CONTROLE $H_\infty$ PARA SISTEMAS LINEARES A TEMPO CONTÍNUO COM INFINITOS SALTOS MARKOVIANOS

Eulina Coutinho Silva do Nascimento

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Marcelo Dutra Fragoso, Ph.D.

Prof. Ernesto Prado Lopes, Ph.D.

Prof. Oswaldo Luiz do Valle Costa , Ph.D.

Prof. Paulo Regis Caron Ruffino, Ph.D.

Prof. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.

Prof. Jack Baczynski, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2003

NASCIMENTO, EULINA COUTINHO SILVA DO

Controle $H_\infty$ para Sistemas Lineares a Tempo Contínuo com Infinitos Saltos Markovianos [Rio de Janeiro] 2003

IX, 96 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2003)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Controle $H_\infty$.
2. Sistemas Lineares a Tempo Contínuo.
3. Semigrupo.
4. Cadeia de Markov.
5. Sistemas em Dimensão Infinita

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Aos meus pais Renato(in memorian) e Edith

Ao meu esposo Flavio

À minha filha Ana Luíza

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço à minha mãe Edith por seu amor e carinho.

Agradeço ao meu esposo Flavio pelo amor, apoio e compreensão todo este tempo. Agradeço à minha filha Ana Luíza que, mesmo sem saber, enchia-me de força e energia ao me receber em casa com um sorriso estampado no rosto.

Agradeço à minha irmã Ana Valéria, ao meu irmão Robson e à minha cunhada Claudia pelas palavras de incentivo, pela confiança e porque não dizer, pela cobrança de resultados.

Agradeço ao meu orientador Prof. Ernesto Lopes por sua atenção e disponibilidade em todos os momentos que precisei. Agradeço ao meu orientador Prof. Marcelo Fragoso pela indicação do tema, pelas valiosíssimas discussões, pelas condições de infra-estrutura para a pesquisa, e, em especial, por sua confiança, respeito e amizade.

Agradeço Prof. Jack, por sua amizade e principalmente pelas excelentes e esclarecedoras discussões.

Agradeço a todos os meus amigos que sempre torceram pelo meu sucesso e cuja lista é extensa. Quero agradecer em particular aos meus amigos Prof. Nei Carlos Rocha por seu carinho e excelentes sugestões na diagramação deste texto e Prof. José Roberto Linhares de Mattos, a quem considero um irmão, por seu apoio em todos os momentos importantes de minha trajetória acadêmica, sejam eles bons ou difíceis.

Gostaria também de prestar meu reconhecimento ao Departamento de Matemática da UFRRJ, onde sou professora, à UFRJ/COPPE-Sistemas onde fiz o curso e, em especial, ao Laboratório Nacional de Computação Científica LNCC, onde desenvolvi grande parte deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTROLE $H_\infty$ PARA SISTEMAS LINEARES A TEMPO CONTÍNUO COM INFINITOS SALTOS MARKOVIANOS

Eulina Coutinho Silva do Nascimento

Março/2003

Orientadores: Marcelo Dutra Fragoso
Ernesto Prado Lopes

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Resolvemos o problema de controle $H_\infty$ para uma classe de sistemas lineares a tempo contínuo sujeitos a saltos Markovianos nos parâmetros (MJLS). Estendemos os resultados de [28] em duas direções: obtivemos condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador de realimentação de estados que estabiliza o MJLS e garante que uma determinada norma $L_2$ seja menor que um valor preespecificado. Além disso, consideramos o caso em que o espaço de estados da cadeia de Markov é infinito enumerável. A solução é dada em termos de um conjunto infinito enumerável de equações algébricas de Riccati (ICARE).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

$H_\infty$CONTROL FOR CONTINUOUS TIME LINEAR SYSTEMS WITH INFINITE MARKOV JUMP PARAMETERS

Eulina Coutinho Silva do Nascimento

March/2003

Advisors: Marcelo Dutra Fragoso
Ernesto Prado Lopes

Department: Systems and Computing Engineering

The subject matter of this thesis is the $H_\infty-$control problem for a class of continuous time linear systems subject to a Markovian jumps in the parameters (MJLS). We extend the results in [28] in two directions: we give *necessary* and *sufficient* conditions for the existence of a feedback controller which stochastically stabilizes the MJLS while ensuring that a certain $L_2$ induced norm be less than a prespecified value. In addition, we consider here the case in which the state-space of the Markov chain is *countably infinite.* The solution here is given in terms of a countably infinite set of coupled algebraic Riccati equations (ICARE).

# Abreviaturas

Ao longo dos capítulos da tese, utilizamos as seguintes abreviaturas:

*ICARE:* conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas associadas ao MJLS (da abreviatura em inglês para countably infinite coupled algebraic Riccati equation).

*JLQ:* problema de controle ótimo para a classe dos MJLSs com critério de custo integral quadrático (da abreviatura em inglês para jump/ linear/ quadratic).

*LQ:* problema de controle ótimo para a classe dos sistemas lineares com critério de custo integral quadrático (da abreviatura em inglês para linear/ quadratic).

*MJLS:* sistema linear com saltos markovianos (da abreviatura em inglês para Markov jump linear system).

*MJS*: sistema com saltos Markovianos (da abreviatura em inglês para Markov jump system).

*MSS:* estabilizabilidade na média quadrática (da abreviatura em inglês para mean square stabilizability).

*SD:* detectabilidade estocástica: (da abreviatura em inglês para stochastic detectability).

*SS:* estabilizabilidade estocástica (da abreviatura em inglês para stochastic stabilizability).

*v.a.*: variável aleatória.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A solução de problemas de controle de sistemas dinâmicos, seja qual for sua natureza (industrial, biológica, ecológica, econômica, entre outras), depende fundamentalmente do *nível de informação* disponível sobre os mesmos. A diversidade dessa informação origina uma grande variedade de modelos e cria situações onde os métodos de controle disponíveis não são adequados, e, como consequência geram diversos tópicos de pesquisa. Uma questão importante consiste em escolher um tipo de modelo que simultaneamente caracterize o sistema de modo adequado, face às informações disponíveis, e seja matematicamente tratável. Convém ressaltar, contudo, que, conforme M. Kac, "*Models are, for the most part, caricatures of reality, but if they are good, then, like good caricatures, they portray, though perhaps in a distorted manner, some of the features of the real world*". Isto traduz, em parte, o fato de que, para tornarmos os modelos mais representativos do sistema real, devemos caracterizar adequadamente as **incertezas** no modelo que podem ser, por exemplo, de natureza ambiental ou de modelagem. Essas incertezas podem ter diversas origens: ruído em aparelhos de comunicação, flutuações atmosféricas, flutuações na bolsa de valores, **falhas**, incertezas paramétricas, etc. De maneira geral, quanto mais complexo o sistema, maior a dificuldade em modelá-los, e, como consequência, maior o grau de incerteza sobre os mesmos. Portanto, o tratamento adequado da maioria dos sistemas, incluindo os acima mencionados, requer a incorporação de incertezas na sua modelagem.

O problema de **controle de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas** é estruturalmente rico, tecnologicamente importante e constitui-se um problema ainda em aberto e promissor em diversos cenários, tanto no que diz respeito a questões de modelagem como na formulação de métodos e algoritmos. Convém ressaltar que as metodologias desenvolvidas para resolver este problema não têm impacto apenas em automação e controle. Na verdade, estas metodologias têm grande impacto social, pois auxiliam na solução de diversos problemas atuais e relevantes, tais como em auxílio ao diagnóstico em medicina, prospecção de petróleo, exploração espacial, telecomunicações via satélite, robótica, processamento de imagens, e em diversas outras aplicações nas quais incertezas surgem naturalmente.

Um desses cenários de incertezas diz respeito às **perturbações aditivas**. Historicamente, essas perturbações foram modelados através dos ruídos brancos, com grande sucesso para o caso de sistemas lineares, e posteriormente através dos processos de Wiener, mais adequados para os sistemas não-lineares. Tradicionalmente, o uso desses modelos requer um conhecimento preciso das estatísticas do ruído, o que em diversas situações práticas não é possível. Isso motivou, em parte, o uso de novas medidas de performance. Uma tentativa de contornar esse problema foi proposta através de uma formulação em que a performance é baseada na norma $H_\infty$, ou seja, assume-se que o ruído é qualquer sinal (processo) com energia finita, i.e., qualquer sinal em $L_2$. Nesse cenário o problema de controle é dito $H_\infty$, e a idéia é projetar controladores que garantam um nível de performance prescrito no ganho $L_2$ induzido pelo operador que relaciona o sinal de ruído com o sinal de saída do sistema. O problema de controle $H_\infty$ passou a ter grande interesse a partir do trabalho de Zames (1981). Inicialmente tratou-se o problema linear, invariante no tempo, usando as técnicas do domínio da frequência e o problema com realimentação de estado foi o primeiro a ser resolvido com esta técnica. No entanto, foi a formulação usando técnicas de espaço de estado, onde a solução recai na solução de equações de Riccati, que mais evoluiu. O sucesso da abordagem $H_\infty$ pode ser medido, por exemplo, pelo número imenso de trabalhos publicados na literatura especializada. Além do problema de controle e filtragem para sistemas lineares ( ver por exemplo, [34], [48], [53], [60], [61], [62], [63], [73] - [76], [78], [80], [85], [89], [92]) essa abordagem tem sido utilizada também para a classe dos sistemas não-lineares (ver, p. ex., [54], [79]). Mais recentemente, para o caso de problemas de controle $H_\infty$ com *delay* ([11], [49], [70], [89]).

Além dos distúrbios aditivos usuais, um outro cenário de incerteza importante diz respeito a mudanças na estrutura do sistema dinâmico como consequência, por exemplo, de **fenômenos abruptos**. Uma abordagem para lidar com esse cenário, e que tem despertado bastante interesse, tem sido aquela em que essas incertezas podem ser caracterizadas no modelo através de uma cadeia de Markov (contínua ou discreta) com espaço de estado contável (finito ou enumerável). Esses sistemas são também conhecidos na literatura como **Sistemas com Saltos Markovianos** (MJS) e constituem uma classe importante de Sistemas Híbridos.

Diversos sistemas dinâmicos são inerentemente vulneráveis a mudanças (incertezas) abruptas em suas estruturas devido, por exemplo, a falhas em componentes ou/e interconexões ( as vezes denominado na literatura de *comportamento de regime múltiplo*). Isso acontece, por exemplo, em sistemas de manipuladores robóticos, em sistemas de controle de aviões, estruturas flexíveis de grande porte para estações espaciais (tais como antenas, aparatos solares,etc), onde a falha de um atuador ou sensor é uma ocorrência bastante comum. Na área médica esse cenário é considerado, por exemplo, no desenvolvimento de técnicas digitais para o diagnóstico automático de eletrocardiogramas, onde uma mudança abrupta no rítmo do coração é um parâmetro importante. Além dessas situações, os MJS, descritos acima, foram também utilizados para estudar problemas em economia, sistemas de potência, meio ambiente, sistemas integrados de redes de comunicações, reatores nucleares, etc. Os MJS são vistos por diversos pesquisadores como uma verdadeira alternativa para se atingir comportamentos tolerantes a falhas em sistemas de controle, e como consequência altamente relevante, para a área de Teoria de Controle ( faz parte do que se denomina na literatura especializada como " safety-critical and high-integrity systems").

A subclasse dos MJS mais estudada tem sido a dos sistemas lineares, e é usualmente conhecida na literatura especializada como **sistemas lineares com saltos markovianos** (de agora em diante denominado MJLS). De maneira geral, podemos dizer que as incertezas nos MJLS, devido a mudanças na estrutura, são de natureza paramétrica e do ponto de vista de aplicações, estão associadas a **fenômenos abruptos** como mencionado anteriormente. À partir dos resultados de Sworder [81] e Wonham [86] uma vasta teoria para os MJLS foi desenvolvida, que inclue diversos resultados em estabilidade, controle, filtragem e jogos (ver, p.ex., [4] - [33], [35] -

[47], [55] - [58], [66] - [69], , [81], [84], [86]). Além do grande desenvolvimento teórico para a classe MJLS, confirmado, em parte, pelo vasto número de publicações, estes modelos têm despertado grande interesse também, face às suas potencialidades em aplicações, tais como em usinas nucleares, energia elétrica e térmica [64], [83] e [88], robótica, técnicas para diagnóstico automático de eletrocardiogramas [87], interferências eletromagnéticas em sistemas de controle digital de vôo [51], econometria [6], [32], etc.

Apesar da teoria de sistemas lineares com saltos Markovianos (MJLS) ter apresentado um avanço notável nos últimos 15 anos, diversos tópicos de pesquisa relevantes permanecem em aberto. Sem a menor intenção de sermos exaustivos nessa questão, podemos citar os problemas de controle e filtragem com observações parciais, controle $H_\infty$ para o caso contínuo, controle robusto, sistemas com retardo, jogos dinâmicos, *inter alia*, como uma pequena amostra de problemas em aberto para o caso em que o espaço de estado da cadeia de Markov é infinito contável.

Nesta Tese pretende-se dar continuidade aos trabalhos desenvolvidos para MJLS, a tempo-contínuo e espaço de estado da cadeia de Markov infinito contável (p.ex., [45] - [47]). O problema que estudaremos nesse cenário é o de controle $H_\infty$. Apesar do problema $H_\infty$ para MJLS, a tempo contínuo, ter sido pioneiramente tratado em [28], os resultados obtidos nesse trabalho sofrem de duas restrições fundamentais:

(R.1) Foram obtidas apenas condições de suficiência.

(R.2) O espaço de estados da cadeia de Markov é finito.

Pretende-se nesse trabalho suprir essa lacuna, investigando as **condições necessárias e suficientes**, para o caso em que a cadeia de Markov tem **espaço de estados infinito enumerável**. Nesse cenário, dificuldades adicionais surgem naturalmente, como por exemplo, o problema passa a ser um *problema de dimensão infinita*. A metodologia usada naquele caso, para a prova da suficiência, não se transporta para o nosso cenário, que requer uma abordagem teórica distinta.

Em [18], tratou-se o problema $H_\infty$ a tempo discreto com espaço estados infinito enumerável para a cadeia de Markov, e, ao contrário de trabalhos anteriores, foram obtidas condições necessárias e suficientes. Resultados trazidos ou adaptados de [5] permeiaram alguns desenvolvimentos aqui apresentados.

Embora as idéias fundamentais serem ainda provenientes do trabalho de Costa e do Val [18], pelo fato de ser um problema a tempo contínuo e de dimensão infinita foi necessário o uso de um ferramental mais sofisticado da Teoria de Operadores (com ênfase em Semigrupo) e Processos Estocásticos.

Via uma versão do conceito do gradiente para funções complexas desenvolvida em [5], a partir do conceito de decomplexificação descrito em [2] para funções complexas não lineares com imagem em $\mathbb{R}$, foi possível especificar o semigrupo do processo de Markov $\{x(t), \theta(t)\}$. Baseado nestes resultados encontramos uma expressão para a fórmula de Dynkin que, aliada às condições estruturais de estabilidade estocástica e detectabilidade estocástica e à condição de existência e unicidade de soluções para um certo conjunto infinito enumerável de equações algébricas de Riccati interconectadas (ICARE), possibilitou estabelecermos a solução do problema minimax no caso horizonte finito. Neste caso a solução coincide com a solução ótima para o controle [47]. No caso horizonte infinito a ferramenta principal para a solução do problema minimax é um lema de Yakubovick [90], descrito na seção 5.6.

Naturalmente, ainda é muito cedo para se prever a totalidade de situações onde a teoria desenvolvida nessa tese será aplicada. No entanto, podemos citar algumas situações onde o modelo estudado aqui pode ser naturalmente aplicado. Por exemplo, aplicações para uma planta não-linear para a qual existem um número infinito contável de pontos de operação, cada um caracterizado por um modelo linear, onde a mudança abrupta poderia representar a dinâmica do sistema movendo de um ponto de operação para outro é sugerido em [23]. Isso poderia acontecer também em economia, onde a complexidade do sistema, incluindo o fato que o futuro é incerto, é tal que temos que considerar um número infinito de cenários possíveis afim de termos um modelo mais adequado (ver, p.ex., [1] para motivação do uso de análise em dimensão infinita em economia e [32] para motivação do uso de MJLS em economia).

Um breve esboço do conteúdo dessa tese pode ser descrito da seguinte maneira. No Capítulo 2 introduzimos notações, os objetos probabilísticos e definições dos espaços que vamos trabalhar. Fazemos um breve histórico do problema de controle $H_\infty$ no Capítulo 3, exibindo alguns resultados bastante referenciados na literatura. No capítulo 4, descrevemos o modelo, o problema de controle $H_\infty$ e anunciamos resultados intermediários. Alguns conceitos fundamentais como decomplexificação, conceitos básicos da Teoria de Semigrupos, conceitos estruturais de estabilidade estocástica e detectabilidade estocástica bem como resultados oriundos do caso homogêneo encontram-se no Capítulo 5. No Capítulo 6, incluímos alguns resultados preliminares importantes para o desenvolvimento do trabalho. Os resultados centrais da Tese encontram-se nos Capítulos 7 e 8 para o cenário horizonte finito e infinito, respectivamente, e, no Capítulo 9, o problema controle $H_\infty$, resultado principal da Tese. A suficiência está provada na Seção 9.2 e, na Seção 9.3, encontram-se os resultados relativos à parte da necessidade. No apêndice incluímos algumas provas que deslocamos do corpo central da tese com o intuito de tornar a leitura mais fluida.

# Capítulo 2

# Notação e Definições

## 2.1 Notação Geral

Como é usual, $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) representa o espaço Euclideano $n$-dimensional no corpo dos números complexos (resp. reais) $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) e denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais $\{1, 2, ...\}$.

Utilizamos a notação $^-$ , $'$ e $^*$, respectivamente, para a operação de conjugação, de transposição e de transposição conjugada de um vetor ou matriz e $\otimes$ para o produto de Kronecker. Eventualmente, utilizamos $\circ$ para designar composição de operadores.

De modo a evitar confusão notacional com os índices $i$ e $j$ que usualmente aparecem em somatórios, representaremos por $\iota$ o complexo imaginário puro. Para $z \in \mathbb{C}$, simbolizamos por $z_{\mathrm{Re}}$ (e às vezes $\mathrm{Re}(z)$) e $z_{\mathrm{Im}}$, respectivamente, a parte real e imaginária de $z$ e escrevemos $z = z_{\mathrm{Re}} + \iota z_{\mathrm{Im}}$. Denotamos $x_{\mathrm{Re}} := (x_{1\,\mathrm{Re}}, .., x_{n\,\mathrm{Re}})'$ e $x_{\mathrm{Im}} := (x_{1\,\mathrm{Im}}, .., x_{n\,\mathrm{Im}})'$ a parte real e imaginária de $x \in \mathbb{C}^n$ e escrevemos $x = x_{\mathrm{Re}} + \iota x_{\mathrm{Im}}$ (as notações $x_{j\,\mathrm{Re}}$ e $x_{j\,\mathrm{Im}}$ abreviam as notações mais precisas $(x_j)_{\mathrm{Re}}$ e $(x_j)_{\mathrm{Im}}$, $j = 1, .., n$).

Definimos $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ o espaço linear normado constituído por todas as matrizes complexas $n$ por $m$ e, por simplicidade, escrevemos $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ sempre que $n = m$.

Denotamos $L \geq 0$ e $L > 0$ para indicar que uma matriz auto-adjunta é, respectivamente, semidefinida positiva e definida positiva e escrevemos

$$\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+ = \{L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n); L = L^* \geq 0\}$$

Salvo indicação em contrário, $\|\cdot\|$ é usado tanto para representar a norma Euclideana em $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ e no espaço produto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n$, como para representar a norma induzida em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$(norma de operadores).

**Observação 1** *Para todo* $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$*, existe um único* $L^{1/2} \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ *tal que* $(L^{1/2})^2 = L$. *O valor absoluto de* $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$*, denotado por* $|L|$*, é definido como* $|L| = (L^*L)^{1/2}$. *Verificamos que* $\|L\| = \||L|\|$.

**Observação 2** *Todo elemento em* $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ *tem uma decomposição auto-adjunta Cartesiana (vide, e.g., [72], pg 376) e todo elemento auto-adjunto em* $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ *pode ser decomposto em parte positiva e parte negativa ([72], pg 464). Logo, para todo* $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$*, existem* $X^+$, $X^-$, $Y^+$, $Y^-$ *em* $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ *tal que*

$$L = \left(X^+ - X^-\right) + \iota\left(Y^+ - Y^-\right)$$

*Além disso* $X^+ \leqslant X^+ + X^- = (L + L^*)/2$ *e portanto* $\|X^+\| \leqslant \|L\|$. *Da mesma forma,* $\|X^-\| \leqslant \|L\|$, $\|Y^+\| \leqslant \|L\|$ *e* $\|Y^-\| \leqslant \|L\|$.

Denotamos por $\{\eta\}$ qualquer processo $\{\eta(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$, sempre que estiver claro se $T$ é finito ou não; por $E[\cdot]$ a esperança matemática usual e por $E_x[\cdot|\ x]$ a esperança condicional dado $x$.

Ainda, para algum conjunto $A$, denotamos por $1_A\ \{.\}$ a medida de Dirac.

Para um espaço de dimensão finita $Y$, denotamos por $o(\|r\|)$ toda função $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0} \frac{f(r)}{\|r\|_Y} = 0$, com $r$ tendendo a zero por qualquer caminho em $Y$.

Denotamos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ por $\mathbb{K}$. Uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{K}$, é dita $o(\delta)$ se $\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{|f(\delta)|}{\delta} = 0$. Uma notação similar, qual seja, $o^n(\delta)$ $(o^{nn}(\delta))$, representa uma função a valores num espaço de vetores (matrizes) se o limite acima vale para cada elemento do vetor (da matriz).

Finalmente suponha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais $\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, .., n$. Denotamos o gradiente de $g$ por $\nabla_x g(x) = (\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g(x)}{\partial x_n})'$.

## 2.2 Espaços de Banach

Denotamos $\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $\mathcal{H}_\infty^{m,n}$) o espaço linear de todas as seqüências infinitas de matrizes complexas $H = (H_1, H_2, \dots)$, $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|H_i\| < \infty$ (resp. $\sup\{\|H_i\|,\ i \in \mathbb{N}\} < \infty$) e escrevemos $\mathcal{H}_1^n$ e $\mathcal{H}_\infty^n$ sempre que $n = m$.

Para $H \in \mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $H \in \mathcal{H}_\infty^{m,n}$) definimos

$$\|H\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|H_i\| \quad \text{(resp. } \|H\|_\infty = \sup\{\|H_i\|\,,\ i \in \mathbb{N}\})$$

a norma em $\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $\mathcal{H}_\infty^{m,n}$).

Denotamos

$$\mathcal{H}_1^{n+} = \{H \in \mathcal{H}_1^n,\ H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i \in \mathbb{N}\}$$

e

$$\mathcal{H}_\infty^{n+} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^n,\ H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i \in \mathbb{N}\}$$

Para $H = (H_1, H_2, ...)$ e $L = (L_1, L_2, ...)$ em $\mathcal{H}_1^{n+}$ usamos a notação $H \leqslant L$ para indicar que $H_i \leqslant L_i$ para cada $i$ em $\mathbb{N}$. Verificamos que

$$H \leqslant L \Rightarrow \|H\|_1 \leqslant \|L\|_1 \tag{2.1}$$

Ademais, usamos $H^*$ para indicar que cada componente $H_i^*$ de $H^*$ é a adjunta de $H_i$, $i \in \mathbb{N}$ e denotamos

$$\mathcal{H}_\infty^{n^*} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^n,\ H_i^* = H_i,\ i \in \mathbb{N}\}$$

Estendemos a notação da ordenação parcial acima para os elementos $H \in \mathcal{H}_1^n$ tais que $H = H^*$.

Usamos $(l_1, \|\cdot\|_1)$, $(l_2, \|\cdot\|_2)$ e $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, respectivamente, para os conjuntos constituídos por todas seqüências infinitas de números complexos $x = (x_1, x_2, ...)$ tais que $\sum_{i=1}^\infty |x_i| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$ e $\sup\{|x_i|\,,\ i = 1, 2, ...\} < \infty$, equipados com a norma usual $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|$, $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2$e $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|\,,\ i = 1, 2, ...\}$ e, no caso de $(l_2, \|\cdot\|_2)$, equipado com o produto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

**Observação 3** *Tem-se que os espaços* $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ *e* $(l_1, \|\cdot\|_1)$ *são uniformemente homeomorfos. Similarmente, este é o caso de* $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. *Uma vez que* $(l_1, \|\cdot\|_1)$ *e* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *são espaços de Banach, temos então que* $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ *e* $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ *também o são.*

**Observação 4** *Consideremos* $Q = (Q_1, Q_{2,\ldots}) \in \mathcal{H}_1^n$ *arbitrário. Da Observação 2, temos que*

$$Q_i = \left(X_i^+ - X_i^-\right) \ + \iota \left(Y_i^+ - Y_i^-\right)$$

*onde* $X_i^+$,$X_i^-$ ,$Y_i^+$ *e* $Y_i^-$ *pertencem a* $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$. *Vamos agora definir* $X^+ = (X_1^+, X_2^+, \ldots)$, $X^- = (X_1^-, X_2^-, \ldots)$, $Y^+ = (Y_1^+, Y_2^+, \ldots)$ *e* $Y^- = (Y_1^-, Y_2^-, \ldots)$. *Da Observação 2 e tendo em vista que* $Q \in \mathcal{H}_1^n$, *vem que* $X^+$, $X^-$, $Y^+$ *e* $Y^-$ *pertencem a* $\mathcal{H}_1^n$. *Logo,* $Q \in \mathcal{H}_1^n$ *sempre pode ser decomposta em*

$$Q = \left(X^+ - X^-\right) \ + \iota \left(Y^+ - Y^-\right)$$

*com* $X^+$, $X^-$, $Y^+$ *e* $Y^-$ *em* $\mathcal{H}_1^{n+}$.

Para quaisquer espaços complexos de Banach $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ denotamos por $\mathbb{B}\ [\mathbb{X}, \mathbb{Y}]$ o espaço de Banach de todas a transformações lineares limitadas de $\mathbb{X}$ em $\mathbb{Y}$ com norma induzida representada por $\|\cdot\|$ . Por simplicidade denotaremos $\mathbb{B}[\mathbb{X}] = \mathbb{B}[\mathbb{X}, \mathbb{X}]$. Para $\mathcal{A} \in \mathbb{B}[\mathbb{X}]$, denotamos por $\sigma(\mathcal{A})$ o espectro do operador $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \text{Para } C &= (C_1, C_2, \ldots) \in \mathcal{H}_\infty^{n,r}, \text{ denotamos } M = (M_1, M_2, \ldots) \in \mathcal{H}_\infty^{n+} \\ \text{onde } M_i &= C_i^* C_i, i = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{2.2}$$

## 2.3 Espaços de Probabilidade

Fixemos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ com filtração contínua à direita $\{\mathcal{F}_t \ , \ t \ \in \ [0, \infty)\}$ com $\mathcal{F}_t$ gerado pelo processo observado $\{x(s), \theta(s), \ 0 \leq s \leq t\}$.

Na base estocástica $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ a medida de probabilidade $\mathcal{P}$ é tal que

$$\mathcal{P}\{\theta(t+s) = j \mid \mathcal{F}_t\} = \mathcal{P}\{\theta(t+s) = j \mid \theta(t)\} = P_s(\theta(t), j)$$

$\{\theta(t), t \geq 0\}$ é um processo de Markov com trajetórias contínuas à direita e o espaço de estados infinito enumerável $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Assumimos que ao processo $\{\theta(t), t \geq 0\}$ corresponde uma função matriz de probabilidade de transição estacionária $\{P_s(i, j)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ no que, para $s \geq 0$,

$$P_s(i, j) =: \mathcal{P}\{\theta(t+s) = j \mid \theta(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij} s + o_{ij}(s) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii} s + o_{ii}(s) & i = j \end{cases} \tag{2.3}$$

com matriz infinitesimal de transição $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ onde $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. O processo de Markov $\{\theta(t), t \geq 0\}$ é conservativo e estável no sentido que

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} = -\lambda_{ii} \leq c < \infty \ , \quad i = 1, 2, ... \tag{2.4}$$

onde c independe do estado $i$.

Considere o espaço de Hilbert $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m)$ formado por todas as variáveis aleatórias (v.a.) de segunda ordem em $\mathbb{C}^m$, com produto interno dado por $\prec x, y \succ = E[x^* y]$, para todo $x$, $y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m)$ (lembrando que E[ $\cdot$ ] representa a esperança matemática), cuja norma é dada por $\|x\|_2 := \left(E\|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, para todo $x \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m)$. Seja $L_2^m[0, \infty)$ (ou simplesmente $L_2^m$ ) o espaço de Hilbert formado por todos os processos

$$L_2^m := \left\{ x : t \in [0, \infty) \mapsto x(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m) \text{ tal que} \int_0^{\infty} E\left[\|x(t)\|^2\right] dt < \infty \right\}$$

munidos do produto interno $\prec x, y \succ := \int_0^{\infty} E[x(t)^* y(t)]\, dt$ e norma também denotada por $\|.\|_2$ e definida por $\|x\|_2 := \left(\int_0^{\infty} E\left[\|x(t)\|^2\right] dt\right)^{\frac{1}{2}}$ para todo $x, y \in L_2^m$. Seja então $\mathcal{C}^m \subset L_2^m$ o espaço formado por todos os processos $x \in L_2^m$ adaptados à filtração $\{\mathcal{F}_t, \ t \in [0, \infty)\}$ ou seja,

$$\mathcal{C}^m := \{x \in L_2^m, x(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m) \ \text{ para todo } \ t \in [0, \infty)\}.$$

Temos que $\mathcal{C}^m$ é um subespaço linear fechado de $L_2^m$ e portanto um espaço de Hilbert. Também definimos $\mathcal{C}_T^m := \{y : t \in [0, T] \mapsto \ y(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m)\}$ com norma dada por $\|y\|_2^2 := \int_0^T E\left[\|y(t)\|^2\right] dt < \infty$ e $\mathcal{C}^{m,T} := \{s \in \mathcal{C}^m$ tal que $s(t) = 0$ para todo $t > T\}$. Finalmente, denotamos por $\Theta_0$ o conjunto de todas as variáveis aleatórias $\theta_0$ $\mathcal{F}_0-$mensuráveis que tomam valores em $\mathbb{N}$.

Para $(x_0, w, q) \in (\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m)$ definimos

$$\|(x_0, w, q)\| = \|x_0\|_2 + \|w\|_2 + \|q\|_2 . \tag{2.5}$$

# Capítulo 3

# Breve Histórico do Problema de Controle $H_\infty$

## 3.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos, de maneira sucinta, algumas idéias básicas do problema $H_\infty$, apresentando alguns resultados (sem "jump") bastante citados na literatura. Contudo, não é nossa intenção sermos exaustivos sobre esse tema já que existe uma vasta literatura sobre o assunto.

É sabido que o conhecimento do modelo que caracteriza um fenômeno físico que se quer representar é fundamental no desenvolvimento de uma teoria de controle. Inicialmente as perturbações aditivas inseridas no modelo foram caracterizadas por ruídos brancos, com grande sucesso para sistemas lineares e posteriormente por processos de Wiener, mais adequados a sistemas não lineares. Porém, o uso dessas caracterizações requer um conhecimento preciso das estatísticas do ruído, o que em diversas situações práticas não é possível. Uma tentativa de solucionar tal questão consiste em formular o problema onde a performance é baseada na norma $H_\infty$, onde assume-se o ruído elemento de uma classe de funções com energia finita ($L_2$). O objetivo na performance $H_\infty$ é obter controladores que minimizem (ou no caso subótimo, limitem) o ganho máximo de energia do ruído.

## 3.2 Alguns trabalhos em $H_\infty$

Zames [91], em seu trabalho pioneiro na norma $H_\infty$ , se concentrou nos efeitos da realimentação sobre incertezas. Zames se deteve em algumas questões básicas da teoria "clássica " de controle, usando técnicas inovadoras e atraindo grande atenção.

Em pouco tempo suas técnicas foram estendidas para problemas mais gerais.

Glover e Doyle [52] formularam o problema $H_\infty$ via espaço estados, considerando o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t)\\ z(t) &= C_1x(t) + B_1u(t) + D_1w(t)\\ y(t) &= C_2x(t) + B_2u(t) + D_2w(t)\end{aligned}$$

onde $x(t)$ representa o vetor estado, $u(t)$ o controle, $w(t)$ o vetor distúrbio e $z(t)$ como eles designam, denota o vetor "erro". Consideraram o problema de caracterizar estabilizadores tais que uma determinada matriz de transferência tenha norma menor que uma constante dada.

Ainda em 1988, Khargonekar *et al.* [60], consideraram o problema de controle $H_\infty$ com realimentação de estados, acrescido das hipóteses:

- a saída medida é o estado $x(t)$
- não existe transmissão direta de $w(t)$ e $u(t)$ para $z(t)$.

Naquele trabalho considerou-se a seguinte classe de sistemas lineares invariantes no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t)\\ z(t) &= Cx(t)\end{aligned} \tag{3.1}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ denota o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o controle, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ a perturbação e $z(t) \in \mathbb{R}^q$ denota a saída a ser controlada. $A$, $B$, $C$, $D$, são matrizes constantes de dimensões apropriadas. Consideraram dois tipos de classes de controles para o sistema (3.1), uma que chamaram de realimentação estática, onde a classe de controladores é dada por

$$u(t) = Kx(t) \tag{3.2}$$

com $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A outra, denominada realimentação dinâmica de estados, dada por

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= Fv(t) + Gx(t)\\ u(t) &= Hv(t) + Jx(t)\end{aligned} \tag{3.3}$$

com $(F, G, H, J) \in \mathbb{R}^{r\times r} \times \mathbb{R}^{r\times n} \times \mathbb{R}^{m\times r} \times \mathbb{R}^{m\times n}$. No caso realimentação estática, denotou-se a função de transferência da entrada $w$ para a saída $z$ por $T_s(s) := C[sI-(A+BK)]^{-1}$, com a lei de controle (3.2) e, por $T_d(s)$ a função de transferência da entrada $w$ para a saída $z$ com a lei de controle da realimentação dinâmica de estados (3.3). Definiu-se

$$\gamma_s := \inf\{\|T_s\|_\infty, \ K \in \mathbb{S}\} \tag{3.4}$$

onde,

$$\mathbb{S} := \{K \in \mathbb{R}^{m\times n} : A + BK \text{ é uma matriz estável}\}$$

e

$$\gamma_d := \inf\{\|T_d\|_\infty, \ (F, G, H, J) \in \mathbb{D}\} \tag{3.5}$$

com

$$\mathbb{D} := \left\{(F, G, H, J) \in \mathbb{R}^{r\times r} \times \mathbb{R}^{r\times n} \times \mathbb{R}^{m\times r} \times \mathbb{R}^{m\times n} : \begin{bmatrix} A + BJ & BH \\ G & F \end{bmatrix} \text{é estável}\right\}. \tag{3.6}$$

Além disso, $\|H\|_\infty := \sup\{\sigma_{\max}(H(j\omega)) : \omega \in \mathbb{R}\}$ e $\sigma_{\max}(H)$ denota o valor singular máximo da matriz $H$, (por valores singulares de $H$ entende-se a raiz quadrada dos autovalores da matriz hermitiana $H^*H$).

Por matriz estável entende-se que todos os autovalores estão no semiplano esquerdo aberto.

O resultado principal de [60] enuncia-se pelo seguinte teorema.

**Teorema 5** *Considere a dinâmica (3.1) e os controladores (3.2) e (3.3). Para* $\gamma_s$ *e* $\gamma_d$*, definidos em (3.4) e (3.5), respectivamente, tem-se que* $\gamma_s = \gamma_d$.

Ou seja, o ínfimo da norma da função de transferência da entrada $w$ para a saída $z$, usando a realimentação estática de estados, é igual ao ínfimo da norma da função de transferência sobre todas a dinâmicas estabilizadoras.

Resultados oriundos de Petersen [74] foram fundamentais na prova do resultado acima.

Em 1989, Doyle *et al.* [34] estudaram o caso de sistemas lineares invariantes no tempo de dimensão finita representado pela Figura 3.1.

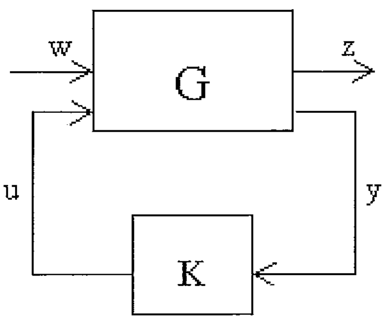


Figura 3.1

Nesta planta o sinal $w$ contém todas as entradas externas, incluindo distúrbios e sensores de ruídos; a saída $z$ é um sinal de erro; $y$ representa as variáveis medidas e $u$ é a entrada de controle.

Dado o problema de encontrar todos os controles tais que a norma $H_\infty$ da função de transição é menor que um escalar $\gamma > 0$ dado, mostrou-se que este controlador existe se e somente se a única solução estabilizante para as duas equações de Riccati é positiva definida. Além disso, também foi feito um paralelo com a solução do problema clássico $H_2$.

Em 1989 Petersen [75] aprimorou o problema [60] de atenuar o distúrbio (perturbação) em $H_\infty$ via realimentação completa de estados estudando a seguinte classe de sistemas lineares:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + u(t) \end{aligned} \quad . \tag{3.7}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ denota o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ denota controle, $w \in \mathbb{R}^p$ denota a perturbação e $z \in \mathbb{R}^m$ a saída a ser controlada.

Antes de passarmos ao principal resultado faz-se necessário enunciar o conceito de estabilizabilidade que se refere o trabalho.

Dada uma constante $\gamma > 0$, diz-se que o sistema (3.7) é **estabilizável** com atenuante de perturbação $\gamma$ se existe uma matriz $K$ tal que a matriz $A + BK$ é estável e a norma $H_\infty$ da função de transferência é menor que $\gamma$. A equação de Riccati correspondente ao sistema (3.7) é dada por:

$$P(A - BC) + (A - BC)'P - PBB'P + \frac{1}{\gamma^2}PDD'P = 0 \tag{ARE}$$

Diz-se ainda que uma matriz simétrica $P \geq 0$ é uma **solução estabilizante** para (ARE) se esta satisfaz a (ARE) e além disso a matriz $A - BC - BB'P + \frac{1}{\gamma^2}DD'P$ é estável. Sob determinadas condições sobre as matrizes $A$, $B$, $C$, e $D$, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 6** *O sistema (3.7) será estabilizável com constante de atenuação $\gamma$ se e somente se a (ARE) tem solução estabilizante $P$. Neste caso a lei de controle é dada por $u(t) = -(BP + C)x(t)$.*

Mostrou-se assim que para a classe de sistemas da forma (3.7), o problema de realimentação de estados com constante de atenuação $\gamma$ pode ser resolvido por **uma única equação algébrica de Riccati**.

Scherer [78] em seguida estudou a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ x(0) &= 0 \\ z(t) &= Cx(t) + Gu(t) \end{aligned} \tag{3.8a}$$

onde todas as matrizes são reais , $x$ denota o estado, $u$ denota o controle, $w$ denota o distúrbio (perturbação) e $z$ a saída a ser controlada.

Como controles admissíveis considerou a seguinte classe:

$$u = Kx \quad \text{com} \quad A + BK \text{ estável}$$

O problema de otimização estudado foi:

$$\gamma^* = \inf_{K \text{ admissíveis}} \left\| (C + GK)(sI - A - BK)^{-1}D \right\|_\infty$$

Considerando algumas hipóteses de regularidade, o principal resultado se escreve:

**Teorema 7** *Para o sistema (3.8a) as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe $K$ admissível:* $\|(C + GK)(sI - A - BK)^{-1}D\|_\infty \leq \gamma$;

(ii) *Existe $X > 0$ :* $XA' + AX + \frac{1}{\gamma^2}DD' - BB' + XC'CX = 0$

(iii) *Existe $P \geq 0$ :* $A'P + PA + \frac{1}{\gamma^2}PDD'P - PBB'P + C'C = 0$

*Toda solução $P$ de (iii) é de fato positiva definida e $K = -B'P$ é uma lei de realimentação admissível tal que (i) é satisfeita.*

*Para $K = -B'P$ a equação em (i) é satisfeita se e somente se o espectro*

$$\sigma\left(A + \frac{1}{\gamma^2}DD'P - BB'P\right) \cap C^0 \neq \emptyset$$

*onde $C^0$ denota o eixo imaginário.*

Ou seja, a existência de controladores admissíveis K tais que a norma $H_\infty$ da matriz de transferência é majorada por uma determinada constante $\gamma$ é equivalente à existência de solução de duas equações algébricas de Riccati. Neste trabalho Scherer obteve um algoritmo para caracterizar o caso em que altos ganhos de realimentação (i. é: $\|K\|$ tendendo ao infinito) são necessários para aproximar do valor ótimo $\gamma^*$.

Tadmor em [85] (trabalho este muito referenciado na literatura), apresentou um desenvolvimento para o problema de controle-$H_\infty$ no domínio do tempo para o "pior caso" em contrapartida às técnicas $H_\infty$ no domínio da frequência.

Estudou o caso invariante no tempo a horizonte infinito, com modelo dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) &= C_1x(t) + C_2w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Gu(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ denota o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ denota o controle, $w \in \mathbb{R}^p$ denota a perturbação, $z \in \mathbb{R}^m$ a saída a ser controlada e $y \in \mathbb{R}^k$ denota a observação. As matrizes $A$, $B$, $C$, $D$, $G$, $C_i$ , $i = 1, 2$, são matrizes de dimensões apropriadas. O sistema acima está definido para $t \in [0, \infty)$. Neste contexto, entende-se por operadores admissíveis aqueles que podem ser obtidos como aplicações " input-output" dos sistemas lineares:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= Mp + Ng \ , \qquad p(0) = 0, \\ u &= Qp + Ry \end{aligned} \tag{3.10}$$

Lembremos que dado um sistema linear, o objetivo é minimizar o impacto das perturbações $w$ sobre a saída $z$ por uma escolha apropriada de um estabilizador $K$. Resumindo, busca-se atingir o *valor ótimo* $\gamma_0$ dado por

$$\gamma_0 = \min_K \max_{w \in L_2} \frac{\|z\|}{\|w\|} \tag{3.11}$$

Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, denotando $x_0$ o valor inicial de $x(t)$, define-se o Operador custo $J_\gamma$, por:

$$J_\gamma(x_0, w, u) = \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 .$$

$J_\gamma$ é uma forma quadrática em suas três variáveis.

A maioria dos resultados deste trabalho foi obtida como consequência do estudo detalhado do seguinte problema *minmax*:

$$\underset{w \in L_2}{min} \; \underset{u \in L_2}{\max} J_\gamma(x_0, w, u)$$

Dado um estabilizador $K$, denotaremos por $T_K$ a aplicação $T_K : L_2 \to L_2$, que leva $w$ em $z$. De acordo com (3.11) um valor $\gamma$ é *estritamente subótimo* $(\gamma > \gamma_0)$ se existe um estabilizador $K$ tal que $\|T_K\| < \gamma$. ( A norma $\|.\|$ é a norma de operadores.) Se $x(0) = 0$, $T_K$ se torna linear.

Considerando algumas hipóteses de regularidade, Tadmor através do Teorema abaixo caracterizou os valores subótimos $\gamma$ para o problema invariante no tempo, à horizonte infinito, em termos de duas equações algébricas de Riccati conectadas.

**Teorema 8 (a)** *O valor $\gamma > 0$ é estritamente subótimo em (3.9) se e somente se existem duas matrizes positivas definidas $P_1$ e $P_2$ as quais satisfazem:*

$$A'P_1 + P_1A - \frac{1}{\gamma^2}P_1DD'P_1 + P_1BB'P_1 - C'C = 0 \tag{3.12}$$

*e*

$$\begin{aligned} DD' = P_2(A - \tfrac{1}{\gamma^2}DD'P_1)' + (A - \tfrac{1}{\gamma^2}DD'P_1)P_2 \\ +P_2(C_1'C_1 - \tfrac{1}{\gamma^2}P_1BB'P_1)P_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

*e tais que as matrizes*

$$A_1 = A + BB'P_1 - \frac{1}{\gamma^2}DD'P_1$$

*e*

$$A_2 = A - \frac{1}{\gamma^2}DD'P_1 + P_2\left(C_1'C_1 - \frac{1}{\gamma^2}P_1BB'P_1\right)$$

*são estáveis.*

(b) *$K$ é um estabilizador tal que $\|T_K\| < \gamma$ se e somente se*

$$\begin{cases} \dot{p} \;= (A_1 + P_2 C_1' C_1)\, p - \left(I + \frac{1}{\gamma^2} P_2 P_1\right) Bv + P_2 C_1' y, \\ q = C_1 p + y, \qquad\qquad v = K_0 q \\ u = -B' P_1 p + v \end{cases} \tag{3.14}$$

*onde $K_0$ é um operador admissível para um sistema estável e tal que $\|K_0\| < \gamma$.*

(c) *Substituindo em (i) e (ii) $C_1 = I$ e $C_2 = \mathbf{0}$, respectivamente, tem-se então: (1) $\gamma$ é estritamente subótimo se e somente se existe uma solução negativa definida para (3.12) e $A_1$ é estável; (2) se $\gamma$ é estritamente subótimo então o controle $u = -B' P_1 x$ é estabilizador e assegura $\|T_K\| < \gamma$.*

Limebeer *et al.* em [62] fizeram uso da teoria de jogos diferenciais quadráticos lineares e estenderam os resultados de [34] e [85] obtendo solução para problema de controle $H_\infty$ a horizonte finito variante no tempo. Mostraram que a "infraestrutura" básica da teoria de controle $H_\infty$ variante no tempo pode ser desenvolvida usando argumentos clássicos baseados em completamento de quadrados, isto devido à sua natureza quadrática linear LQ. De maneira informal, a natureza da teoria de jogos no problema pode ser interpretada da seguinte maneira: o jogador $w$ tenta maximizar a energia em $z$ enquanto que o jogador $u$ simultaneamente trabalha para mimimizá-la.

O sistema estudado, com vetores entradas $u(t)$ e $w(t)$, obedecem à seguinte dinâmica:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

com saída

$$z(t) = \begin{bmatrix} C(t)x(t) \\ N(t)u(t) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$N(t)$ é assumido com colunas linearmente independentes e tal que

$$N'(t)N(t) = I. \tag{3.17}$$

Além disso, as matrizes (3.16) e (3.17) são assumidas com entradas contínuas no tempo. Algumas vezes, para facilitar a notação, omitiremos a dependência do tempo.

Dados (3.15) - (3.17), o problema $H_\infty$ se traduz em encontrar um controle

$$u(t) = K(x(s), w(s), t), \quad 0 \leq s \leq t,$$

tal que

$$\|\mathcal{T}_{zw}\| = \sup_w \{\|\mathcal{T}_{zw} w\|_2 : w \in L^2[0,T], \|w\|_2 \leq 1\} < \gamma$$

para algum $\gamma > 0$. Por $\mathcal{T}_{zw}$ entende-se o operador que leva $w$ em $z$, com controle $u(t)$.

Se $z = \mathcal{T}_{zw}$, então $\|\mathcal{T}_{zw}\| < \gamma$ se e somente se

$$J(K, w) = \int_0^T (z'z - \gamma^2 w'w) dt \leq -\varepsilon \|w\|_2^2$$

para todo $w \in \mathcal{L}^2[0,T]$ e algum $\varepsilon > 0$.

Um operador $K(.,.,.)$ é dito admissível se: (**1**) $u(t) \in \mathcal{L}^2[0,T]$ para todo $w(t) \in \mathcal{L}^2[0,T]$ e (**2**) $x(0) = 0$ e $w(t) = 0$ implicam $u(t) = 0$. Denota-se por $\mathcal{K}$ o conjunto de operadores de controles admissíveis.

O problema de controle $H_\infty$ tem solução se e somente se

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \max_{w \in \mathcal{L}^2[0,T]} \{J(K, w)\} \leq -\varepsilon \|w\|_2^2$$

é satisfeita.

O resultado a seguir mostra que o problema $H_\infty$ tem solução, se uma equação de Riccati particular tem uma solução no intervalo $[0, T]$. Além disso, a Observação subsequente mostra que a matriz $P(t)$ é positiva semidefinida.

**Teorema 9** *Suponha que a Equação Diferencial de Riccati*

$$\begin{cases} -\frac{dP}{dt} = PA + A'P - PB'BP + \frac{1}{\gamma^2} PD'DP + C'C \\ P(T) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

*tem solução em* $[0, T]$. *Então,*

$$\begin{aligned} u^* &= -B'Px \\ w^* &= \frac{1}{\gamma^2} D'Px \end{aligned}$$

*resulta em*

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 = \|u - u^*\|_2^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_2^2$$

*para qualquer* $u$ *e* $w \in \mathcal{L}^2[0,T]$ *em (3.15), notando que* $x(0) = 0$. *Com* $u = u^*$ *tem-se*

$$\|\mathcal{T}_{zw}\| < \gamma. \tag{3.19}$$

**Observação 10** *Considere o sistema (3.15) com* $0 \leq t_0 \leq t \leq T$, *e* $x(0) = x_0$. *Se*

$$J_{t_0}(u,w) = \int_{t_0}^{T} (z'z - \gamma^2 w'w)dt$$

*e completarmos os quadrados obtemos*

$$J_{t_0}(u,w) - x_0' P(t_0) x_0 = \|u - u^*\|_2^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_2^2 .$$

*Consequentemente,*

$$J_{t_0}(u^*, 0) + \gamma^2 \|w^*\|_2^2 = x_0' P(t_0) x_0$$

*para todo* $x_0$. *Logo* $J_{t_0}(u^*, 0) \geq 0$ *para todo* $x_0$ , *mostranto que* $P(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [0,T]$.

Encerramos este capítulo com o trabalho de Hinrichsen e Pritchard [53] em 1998, onde foi considerado um problema com planta controlada por uma dinâmica de saída de realimentação sujeita tanto a perturbações determinísticas como estocásticas. O principal resultado deste trabalho é uma extensão do Lema de Limitação Real ( *Bounded Real Lema*) para sistemas estocásticos. Este resultado estabelece condições necessárias e suficientes para um sistema estocástico dado ser estável quando a medida do pior efeito que o distúrbio $v(.)$ pode ter sobre a saída do sistema a ser controlada $z(.)$ é menor que um determinado $\gamma > 0$. O sistema considerado foi o seguinte:

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + A_0 x(t) dw_1(t) + B_0 v(t) dw_2(t) + Bv(t)d(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dv(t) \end{cases} \tag{3.20}$$

onde $(A, A_0, B_0, B, C, D) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times l} \times \mathbb{K}^{n\times l} \times \mathbb{K}^{q\times n} \times \mathbb{K}^{q\times l}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $w_1, w_2$ são processos de Wiener com média zero sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ relativo a uma família crescente $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $\sigma-$álgebras $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Assume-se ainda que

$$E[(w_i(t) - w_i(s))\,(w_j(t) - w_j(s))] = q_{ij}(t-s),$$

$i,j = 1,2, \quad t,s \in \mathbb{R}_+, \quad t > s$. De forma que $Q = (q_{ij})$ é a matriz de covariância incremental do processo de Wiener bi-dimensional

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}.$$

No sistema (3.20) o processo de entrada $v(t)$ é visto como um distúrbio estocástico desconhecido com energia finita e o processo de saída $z(t)$ é visto como o vetor das variáveis a serem controladas. Por $L^2(\Omega, \mathbb{K}^k)$ se entende o espaço das funções de valores $\mathbb{K}^k$ sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ com quadrado integrável. Denota-se ainda por $L^2_w([0,T], L^2(\Omega, \mathbb{K}^k))$ o espaço dos processos estocásticos não-antecipativos $y(t) = (y(t))_{t\in[0,T]}$ com respeito a $\sigma-$álgebra $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ satisfazendo a

$$\|y(.)\|^2_{L^2_w} = E[\int_0^T \|y(t)\|^2 \, dt] = \int_0^T E[\|y(t)\|^2]dt < \infty.$$

Para $0 < T < \infty$ arbitrário e $(v, x_0) \in L^2_w([0,T], L^2(\Omega, \mathbb{K}^l)) \times \mathbb{K}^n$, existe uma única solução $x(.) = x(., v, x_0) \in L^2_w([0,T], L^2(\Omega, \mathbb{K}^n)$ de (3.20) com $x(0) = x_0$, ou seja $x(t)$ é um processo estocástico não antecipativo satisfazendo a equação integral de Ito

$$x(t) = x_0 + \int_0^T (Ax(s) + Bv(s))ds + \int_0^T [\ A_0x(s) \quad B_0v(t)\ ]d \begin{bmatrix} w_1(s) \\ w_2(s) \end{bmatrix}, \qquad (3.21)$$

$t \in [0,T]$. Além disso, $x(t)$ tem segundo momento limitado em $[0,T]$.

**Definição 11** *O sistema (3.20) é dito* ***internamente estável*** *se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$E[\int_0^\infty \|x(t)\|^2 \, dt] \leq c \, \|x_0\|^2, \qquad x_0 \in \mathbb{K}^n$$

*onde $x(.) = x(., 0, x_0)$ é a trajetória de (3.21) começando em $x_0$.*

Denota-se por $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes Hermitianas em $\mathbb{K}^{n\times n}$. Da literatura tem-se que (3.20) é estável no sentido acima, se e somente se existe $P \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, $P < 0$ tal que

$$PA + A^*P + q_{11}A_0^*PA_0 = I_n.$$

A definição a seguir generaliza o conceito de estabilidade do ganho finito $L^2$ oriundo dos sistemas entrada-saída determinísticos para os sistemas estocásticos da forma (3.20).

**Definição 12** *O sistema (3.20) é dito **externamente estável**, se para todo* $v(.) \in L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega, \mathbb{K}^l))$,

$$z(.) = Cx(., v, 0) + Dv(.) \in L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega, \mathbb{K}^q))$$

*e existe uma constante* $\gamma \geq 0$ *tal que*

$$\|z(.)\|_{L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega,\mathbb{K}^q))} \leq \gamma \|v(.)\|_{L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega,\mathbb{K}^l))} \tag{3.22}$$

**Definição 13** *Suponha (3.20) externamente estável. O operador*

$$\mathbb{Z}_0 : L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega, \mathbb{K}^l)) \to L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega, \mathbb{K}^q)),$$

*definido por*

$$(\mathbb{Z}_0 v)(t) = Cx(t, v, 0) + Dv(t), \ t \geq 0, \quad v \in L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega, \mathbb{K}^l)),$$

*é dito operador de perturbação de (3.20). Sua norma é definida como sendo o mínimo* $\gamma \geq 0$ *tal que (3.22) é satisfeito, isto é,*

$$\|\mathbb{Z}_0\| = \sup_{v \in L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega,\mathbb{K}^l)), v \neq 0} \frac{\|Cx(., v, 0) + Dv(.)\|_{L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega,\mathbb{K}^q))}}{\|v(.)\|_{L^2_w(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega,\mathbb{K}^l))}}. \tag{3.23}$$

Observe que $\|\mathbb{Z}_0\|$ é a medida do pior efeito que o distúrbio $v(.)$ pode ter sobre a saída do sistema a ser controlada $z(.)$. Portanto, é importante encontrar uma maneira de determinar a norma $\|\mathbb{Z}_0\|$. O Lema de Limitação real para sistemas estocásticos deste trabalho obtem um método para calcular $\|\mathbb{Z}_0\|$. Antes, porém, definiremos o custo funcional quadrático a tempo finito associado ao problema.

$$J_T^{\gamma^2}(v, x_0) = \int_0^T E[\gamma^2 \|v(t)\|^2 - \|z(t)\|^2]dt = \int_0^T E[\gamma^2 \|v(t)\|^2 - \|Cx(t) + Dv(t)\|^2]dt$$

onde $x(.) = x(., v, x_0)$ é a solução de (3.20) com $x(0) = x_0$, $v(.) \in L^2_w([0,T], L^2(\Omega, \mathbb{K}^l))$ e $z(.) = z(., v, x_0)$. Formalmente o problema de minimizar $J_T^{\gamma^2}(v, x_0)$ tem a forma de um problema de controle ótimo e por isso no desenvolvimento deste trabalho o distúrbio $v$ foi tratado como um "controle".

Para cada $P \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, fixou-se

$$M(P) = \begin{bmatrix} PA + A^*P + q_{11}A_0^*PA_0 - C^*C & PB + q_{12}A_0^*PB_0 - C^*D \\ B^*P + q_{12}B_0^*PA_0 - D^*C & \gamma^2 I_l + q_{22}B_0^*PB_0 - D^*D \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

**Proposição 14** *Suponha que o sistema (3.20) é internamente estável. Então (3.20) é externamente estável. Além disso, existe* $\gamma > 0$ *e* $P \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, $P < 0$ *tal que*

$$M(P) = \begin{bmatrix} PA + A^*P + q_{11}A_0^*PA_0 - C^*C & PB + q_{12}A_0^*PB_0 - C^*D \\ B^*P + q_{12}B_0^*PA_0 - D^*C & \gamma^2 I_l + q_{22}B_0^*PB_0 - D^*D \end{bmatrix} > 0. \tag{3.25}$$

Finalmente enunciaremos o resultado que os autores intitularam por "Lema da Limitação Real Estocástica ".

**Teorema 15** *Para todo número real positivo* $\gamma$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

**(i)** *O sistema (3.20) é internamente estável e* $\|\mathbb{Z}_0\| < \gamma$.

**(ii)** *Existe* $P \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ *tal que (3.25) é satisfeita.*

Apesar da teoria de controle $H_\infty$ ter hoje um corpo teórico bastante vasto, ainda constitui uma área de intensa atividade em pesquisa. Isto é justificado, em parte, pelo fato de mudanças na classe de modelos ou na classe de controles admissíveis acarretarem no surgimento de problemas que requerem o desenvolvimento de novas técnicas, como é o caso dos MJLS.

# Capítulo 4

# Descrição do Problema

Fixemos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ munido de uma filtração contínua à direita $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ t \geq 0\}$ e consideremos a seguinte classe de sistemas dinâmicos modelados pelo seguinte tipo de equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + D_{\theta(t)}w(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $w \in \mathcal{C}^p$ e $u \in \mathcal{C}^m$. O vetor $x(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^n)$ denota o estado, $u(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^m)$ denota o controle e $w(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{C}^p)$ denota o ruído, do sistema com $t \geq 0$. Os parâmetros do sistema são funções de um processo de Markov homogêneo $\{\theta(t), t \geq 0\}$ como definido na seção 2.3.

Definimos a saída a ser controlada por $z : [0, \infty) \ni t \mapsto z(t) \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{P}, \mathbb{C}^r)$ onde

$$z(t) = C_{\theta(t)}x(t) + N_{\theta(t)}u(t) \tag{4.2}$$

Assumiremos que $A_{(\cdot)}$, $B_{(\cdot)}$, $D_{(\cdot)}$, $C_{(\cdot)}$, $N_{(\cdot)}$, são tais que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\theta(t) = i$, $A_{\theta(t)} = A_i$, $B_{\theta(t)} = B_i$, $D_{\theta(t)} = D_i$, $C_{\theta(t)} = C_i$, $N_{\theta(t)} = N_i$, definidas nos espaços $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, $\mathbb{M}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^n)$, $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^r)$, $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^r)$, respectivamente, são matrizes constantes. Suporemos ainda que os parâmetros são limitados ou seja, $A = (A_1, A_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$, $B = (B_1, B_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{m,n}$, $D = (D_1, D_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{p,n}$, $C = (C_1, C_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,r}$, $N = (N_1, N_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{m,r}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} C^*_{(\theta(t)=i)} N_{(\theta(t)=i)} &= 0 \qquad \text{para cada } i \in \mathbb{N} \\ N^*_{(\theta(t)=i)} N_{(\theta(t)=i)} &= I \qquad \text{para cada } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

consideramos $x_0$ uma variável aleatória de segunda ordem que pode depender da variável aleatória $\theta_0$ e denotaremos $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0(x_0, \theta_0)$ a distribuição conjunta de $x_0$ e $\theta_0$. Assumiremos que as variáveis aleatórias $\theta(t+s)$, $t \geq 0$, $s > 0$, são condicionalmente independentes de $x_0$, dado $\theta(t)$. Sempre que necessário notaremos $E_{\mathcal{V}_0}(.)$ para indicar que o valor esperado de alguma função é tomado em (4.1) com respeito à distribuição conjunta $\mathcal{V}_0$.

Tendo em vista (2.3), denotaremos o sistema (4.1), por $(A, B, \Lambda)$.

Consideramos o problema com observações perfeitas, no sentido de que o controlador tem acesso ao processo de estado $\{x\}$ e à cadeia de Markov $\{\theta\}$ até o instante presente $t$. Assim, $\mathcal{F}_t$ denota a $\sigma$-álgebra gerada pelo processo $\{x(s), \theta(s), 0 \leq s \leq t\}$. A classe de controles admissíveis considerada é dada por $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t) + q(t)$, $q(t) \in \mathcal{C}^m$.

O objetivo principal deste trabalho é resolver o problema de controle $H_\infty$, que consiste em determinar condições necessárias e suficientes para a obtenção de um controlador $K = (K_1, K_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ que estabilize $(A, B, \Lambda)$ e limite o efeito do ruído no sistema, ou seja, para $\delta > 0$, fixo e arbitrário, deseja-se

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \delta \qquad \text{para todo } w \in \mathcal{C}^p \tag{4.3}$$

ou equivalentemente,

$$\sup_w \{\|z\|_2^2 - \delta^2 \|w\|_2^2\} \leq -\epsilon \|w\|_2^2 \tag{4.4}$$

Além disso, controlador $K$ é exibido.

**Nota 16** *Em boa parte da literatura* $w$ *é uma função determinística e não um processo estocástico. Logo, (4.3) se refere ao pior processo ou à pior estatística e não à pior função.*

**Nota 17** *A forma encontrada em teoria de jogos, proveniente de 4.4, qual seja*

$$\inf_u \sup_w \{\|z\|_2^2 - \delta^2 \|w\|_2^2\}$$

*provê um limiar para o valor preespecificado* $\delta$ *para o qual o problema ainda tem solução.*

As sequências de matrizes $L = (L_1, L_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e $J = (J_1, J_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$, que aparecem na definição dos operadores (4.5) e (4.7) abaixo, encontram-se definidas no Capítulo 5, seção 5.5.2. As questões que seguem fazem parte de um conjunto de resultados fundamentais para atingirmos o objetivo principal deste trabalho.

Consideremos o caso em horizonte finito. Para cada $\theta_0 \in \Theta_0$, condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e para cada política admissível de controle dada por $u(t) = -J_{\theta(t)}x(t)+q(t)$, definimos o funcional de custo $\mathcal{J}^T$ por

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) &= E[\int_0^T (\left\|C_{\theta(r)}x(r)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(r)}x(r) + q(r)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(r)\right\|^2)dr \\ &\quad +x(T)^* L_{\theta(T)}x(T)]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $x(t)$ satisfaz (4.1).

Uma das questões consiste em encontrar uma expressão para o operador $\mathcal{J}^T$ definido acima e determinar $\widehat{w}^T \in \mathcal{C}^p$, $\widehat{q}^T \in \mathcal{C}^m$ que resolvem a seguinte igualdade

$$\mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T, \widehat{q}^T) = \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T}} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q). \tag{4.6}$$

Passemos agora ao o problema em horizonte infinito. Para qualquer $(x_0, w, q) \in \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m$, $\theta_0 \in \Theta_0$, consideremos o operador $Z_J$ definido em (4.2), substituindo $K$ por $J$. Para cada $\theta_0 \in \Theta_0$ definimos o operador custo $\mathcal{J}(\theta_0, .) : \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q) = \int_0^\infty E[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(t)\right\|^2]dt \tag{4.7}$$

onde $x(t)$ satisfaz (4.1).

Formulamos e resolvemos o seguinte problema *minimax* para o operador custo $\mathcal{J}$ acima

$$\sup_{w \in \mathcal{C}^p} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q).$$

Mostraremos que para cada $(\theta_0, x_0) \in \Theta_0 \times \mathcal{C}_0^n$, existem únicos $\widehat{w} \in \mathcal{C}^p$, $\widehat{q} \in \mathcal{C}^m$, que resolvem o *minimax* acima.

# Capítulo 5

# Alguns Conceitos e Resultados

## 5.1 Decomplexificação

Apresentamos nesta Seção os conceitos de decomplexificação de espaços e operadores e a expressão para a aproximação linear de funções complexas não necessariamente holomorfas com decomplexificações diferenciáveis.

### 5.1.1 Decomplexificação de Espaços e Operadores

Definimos a operação de decomplexificação de $x \in \mathbb{C}^n$ por

$$\mathbb{C}^n \ni x \mapsto {}^{\mathrm{R}}x = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{Re}} \\ x_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \tag{5.1}$$

Podemos verificar as seguintes propriedades:

*1.* ${}^{\mathrm{R}}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$,

*2.* ${}^{\mathrm{R}}(x+y) = {}^{\mathrm{R}}x + {}^{\mathrm{R}}y$, ${}^{\mathrm{R}}(cx) = c^{\mathrm{R}}(x)$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ e $c$ um número real e

*3.* $\|x\| = \left\|{}^{\mathrm{R}}x\right\|$, $x \in \mathbb{C}^n$

Por decomplexificação de um operador genérico $g : [0, \infty) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ entendemos o operador ${}^{\mathrm{R}}g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ que coincide com $g$ pontualmente, ou seja,

$${}^{\mathrm{R}}g\left(t, {}^{\mathrm{R}}x\right) = g\left(t, x\right), \quad t \in [0, \infty), x \in \mathbb{C}^n \tag{5.2}$$

Podemos constatar que a decomplexificação acima é uma adaptação natural do conceito descrito em [2], para funções não lineares.

**Observação 16** *Notamos que a decomplexificação de $\mathbb{C}^n$ é o espaço linear real que coincide com $\mathbb{C}^n$ como um grupo e no qual a multiplicação por números reais é definida da mesma forma que em $\mathbb{C}^n$, enquanto que a multiplicação por números complexos simplesmente não é definida (em outras palavras, decomplexificar $\mathbb{C}^n$ significa esquecer a estrutura de módulo $\mathbb{C}^n$ e preservar a estrutura de módulo $\mathbb{R}^n$).*

**Observação 17** *Arnold [2, pg 120] considera a imagem de $g$ em $\mathbb{C}^r$. A versão de (5.2) para este caso é*

$$^{\mathrm{R}}g\left(t,^{\mathrm{R}} x\right) = {}^{\mathrm{R}}(g\left(t,x\right)), \;\; t \in [0,\infty),\, x \in \mathbb{C}^n \tag{5.3}$$

**Observação 18** *Tendo em vista que $^{\mathrm{R}}\mathbb{R}$ simplesmente não é definido, nosso caso, embora mais simples, não é um caso particular de [2].*

### 5.1.2 Aproximação Linear

Quando se trata de variáveis complexas, a diferenciação (por exemplo, a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}g$, $x_i$ uma variável complexa) é uma operação bem definida para funções holomorfas. De fato, o conceito de aproximação linear ou expansão de Taylor que encontramos usualmente na literatura se restringe a esta classe de funções e não cobrem o caso das funções não holomorfas do qual fazem parte, por exemplo, as formas quadráticas $x^*Px$, $x \in \mathbb{C}^n$, importantes no contexto dos problemas de controle linear.

Com base no conceito de decomplexificação definido na Seção 5.1.1, apresentamos nessa seção a expressão para a aproximação linear de funções complexas $g$ com decomplexificações $^{\mathrm{R}}g$ diferenciáveis. Observe que não estamos exigindo que $g$ seja holomorfa.

**Lema 19** *Para $g : [0,\infty) \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$, assumamos a decomplexificação $^{R}g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ Fréchet-diferenciável. Então, para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{C}^n$, $g$ tem aproximação linear*

$$g(t+s,x+w) = g(t,x) + \frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s + \nabla_{R_x}\, {}^{R}g(t,^{R}x)'\, {}^{R}w + o\left(\|(s,w)\|\right) \tag{5.4}$$

**Prova.** Vide [5]. ■

**Observação 22** *Da definição da decomplexificação de* $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\nabla_{{}^{\mathrm{R}}x}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'{}^{\mathrm{R}}w = \nabla_{x_{\mathrm{Re}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'w_{\mathrm{Re}} + \nabla_{x_{\mathrm{Im}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'w_{\mathrm{Im}}$$

**Lema 23** *Seja* $g$ *a função não holomorfa dada por*

$$[0,T) \times \mathbb{C}^n \ni (t,x) \mapsto g(t,x) = x^* P(t) x \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

*com* $P(t) = P(t)^* \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ *diferenciável para todo* $t \in [0,T)$. *Então* $\frac{\partial}{\partial t}g(t,x) = x^*\dot{P}(t)x$, *e a função diferenciável* ${}^{R}g$ *é tal que,*

$$\nabla_{{}^{\mathrm{R}}x}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_{\mathrm{Re}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x) \\ \nabla_{x_{\mathrm{Im}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} (P(t)x)_{\mathrm{Re}} \\ (P(t)x)_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

*ou ainda*

$$\nabla_{R_x}{}^{R}g(t,{}^{R}x)'\,{}^{R}w = w^*P(t)x + x^*P(t)w \tag{5.7}$$

**Prova.** Vide [5] (Seção 11.2 do Apêndice). ∎

**Observação 24** *No caso onde* $P(t)$ *é uma matriz real simétrica,* $x = x_{\mathrm{Re}} + \iota 0$ *e* $w = w_{\mathrm{Re}} + \iota 0$, *o lado direito de (5.7) se escreve* $w'P(t)x + x'P(t)w = 2(P(t)x)'w$. *Logo (5.4) se reconcilia com a aproximação linear da função real* $x'P(t)x$.

## 5.2 Conceitos da Teoria de Semigrupos

Nesta seção, apresentamos um conjunto mínimo de resultados oriundos da Teoria de semigrupos e Teoria espectral, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

**Definição 25** *Uma família a um parâmetro* $\{T(t);\ t \geq 0\}$ *de operadores lineares limitados de um espaço de Banach* $X$ *nele próprio é dita ser um* ***semigrupo*** *de operadores lineares limitados em* $X$ *se*

*(i)* $T(0) = I$

*(ii)* $T(t+s) = T(t)T(s)$.

Um *semigrupo* de operadores lineares limitados $T(t)$ é dito *uniformemente contínuo* se

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$$

Chamamos *gerador infinitesimal* $A$ do semigrupo $T(t)$ ao operador linear definido por

$$Ax := \lim_{t \downarrow 0} \frac{(T(t) - I)x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{para } x \in D(A),$$

onde o domínio $D(A)$ é o conjunto

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{(T(t) - I)x}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

Da Definição acima, tem-se que, se $T(t)$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então

$$\lim_{t \to s} \|T(s) - T(t)\| = 0$$

**Teorema 24** *Um operador linear $A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se e somente se $A$ é um operador linear limitado.*

**Prova.** Veja [77] ∎

**Observação 25** *Da Definição 23 tem-se que um semigrupo $T(t)$ tem um único gerador infinitesimal. Se $T(t)$ é uniformemente contínuo, seu gerador infinitesimal é um operador linear limitado. Por outro lado, todo operador linear limitado $A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo, $T(t)$. O Teorema a seguir garante a unicidade deste semigrupo.*

**Teorema 26** *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{(T(t) - I)}{t} = A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(S(t) - I)}{t}$$

*então $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

**Prova.** Veja [77] ∎

**Corolário 27** *Seja $T(t)$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então,*

*(i) Existe uma constante $\beta \geq 0$ tal que* $\|T(t)\| \leq e^{\beta t}$

*(ii) Existe um único operador linear $A$ tal que $T(t) = e^{At}$*

*(iii) O operador $A$ no item (ii) é o gerador infinitesimal de $T(t)$.*

*(iv) A aplicação $t \longrightarrow T(t)$ é diferenciável na norma e*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A \tag{5.8}$$

**Prova.** Veja [77] ■

**Proposição 28** *Seja $Y$ um espaço de Banach e considere a equação diferencial homogênea*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t), & t > 0 \\ y(0) = y \end{cases} \tag{5.9}$$

*com condição inicial $y \in Y$, onde $A$ é um operador linear limitado definido de $Y$ em $Y$. Então, o sistema (5.9) acima é satisfeito por uma única função continuamente diferenciável dada por*

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow y(t) = T(t)y \in Y, \quad t \geq 0 \tag{5.10}$$

*onde $T(t) : Y \rightarrow Y$, $t \geq 0$ é o semigrupo uniformemente contínuo (denotado semigrupo de classe $C_0$ ) das transformações lineares geradas por seu generador infinitesimal $A$.*

**Prova.** (Segue de resultados fundamentais da teoria de semigrupos; veja por exemplo [77]). ■

Seja $X$ um espaço linear topológico complexo $X$ e seja $T$ um operador linear, $T : X \rightarrow X$. Considere o operador linear

$$T_\lambda = \lambda I - T$$

onde $\lambda$ é um número complexo e $I$ o operador identidade.

**Definição 29** *Diremos que $\lambda_0$ está no* ***conjunto resolvente*** *de $T$, doravante denotado por $R(T)$ se $\lambda_0$ é tal que o conjunto imagem $Im(T_{\lambda_0})$ é denso em $X$ e além disso $T_{\lambda_0}$ tem inversa contínua $(\lambda_0 I - T)^{-1}$.*

*Chamaremos* **resolvente** *(em $\lambda_0$) de $T$, denotado por $R(\lambda_0, T)$, à inversa* $(\lambda_0 I - T)^{-1}$.

*Chamamos* **espectro** *de $T$, denotado $\sigma(T)$, ao conjunto de todos os números complexos $\lambda_0$ que não estão em $R(T)$. O espectro é decomposto em três conjuntos disjuntos, denotados $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ e $\sigma_r(T)$, que são definidos como segue: $\sigma_p(T)$, chamado* **espectro pontual**, *é o conjunto de números complexos para os quais $T_\lambda$ não tem inversa. $\sigma_c(T)$, denominado* **espectro contínuo** *de $T$ é o conjunto formado pelos números complexos $\lambda$ para os quais $T_\lambda$ tem inversa descontínua e cujo domínio é denso em $X$. Finalmente, $\sigma_r(T)$, chamado* **espectro residual** *de $T$, é o conjunto dos números complexos $\lambda$ para os quais $T_\lambda$ tem inversa e cujo domínio não é denso em $X$.*

**Lema 30** *Seja $Y$ um espaço de Banach e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to Y$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $T$ de classe $C_0$, $T(t) : Y \to Y$. Considere as seguintes afirmações:*

*(i)* $sup\{\operatorname{Re}\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$

*(ii) Existem constantes $M \geq 1$ e $\beta > 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M \exp(-\beta t), \quad t \geq 0$.*

*(iii)* $\int_0^\infty \|T(t)y\|\, dt < \infty$, *para todo* $y \in Y$.

*(iv)* $\int_0^\infty \|T(t)\|\, dt < \infty$.

*Então (ii), (iii) e (iv) são afirmações equivalentes e implicam (i). Além disso, se $T(t)$ for analítica, todas as afirmações acima são equivalentes.*

**Prova.** Veja em [47] apêndice. ■

## 5.3 Caracterização via Semigrupo do processo de Markov $\{x(t), \theta(t)\}$

Nesta seção obtemos uma expressão para o gerador infinitesimal de uma família de probabilidades de transição do processo de Markov $\{x(t), \theta(t)\}_{t\in[0,T]}$.

Considere o sistema (4.1). Temos que $\{x(t), \theta(t)\}_{t\in[0,T]}$ é um processo de Markov em $(\mathbb{C}^n, \mathbb{N})$ com trajetórias contínuas à direita. Dado o espaço $\mathcal{X} := ([0, T) \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{N})$, denotemos por $\mathbb{B}(\mathcal{X},\mathbb{R})$ o espaço de Banach de todas as funções limitadas Borel measuráveis $g$, tais que $\mathcal{X} \ni (t,x,i) \mapsto g(t,x,i) \in \mathbb{R}$, munido da norma $\|g\| := \sup_{y\in\mathcal{X}} |g(y)|$. O semigrupo de operadores lineares $T(h) : \mathbb{B}(\mathcal{X},\mathbb{R}) \to \mathbb{B}(\mathcal{X},\mathbb{R})$, $h \geq 0$, que caracteriza o processo de Markov $\{x(t),\theta(t)\}_{t\in[0,T)}$, é dado por

$$((T(h)g)(t,x(t),\theta(t))) := E_{x(t),\theta(t)}\left[g(t+h,x(t+h),\theta(t+h))\right] \tag{5.11}$$

para todo $(t,x(t),\theta(t)) \in \mathcal{X}$ . Além disso, o semigrupo definido em (5.11) é um semigrupo de classe $C_0$ .

Baseado no conceito de decomplexificação em (5.1) é possível obter uma expressão específica para o gerador infinitesimal do processo de Markov $\{x(t),\theta(t)\}_{t\in[0,T)}$.

**Proposição 33** *Para qualquer função contínua limitada $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$, temos que*

$$\lim_{h\downarrow 0}((T(h)g)(t,x(t),\theta(t))) = g(t,x(t),\theta(t)) \tag{5.12}$$

**Prova.** Veja [50]. ■

Denominamos *gerador infinitesimal* de uma família de probabilidades de transição de um processo de Markov $\{x(t),\theta(t)\}_{t\in[0,T)}$ o operador $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \to \mathbb{B}(\mathcal{X},\mathbb{R})$ , tal que

$$(\mathcal{L}g)(t,x(t),\theta(t)) =$$

$$= \left(\lim_{h\downarrow 0}\frac{(T(h)g)(t,x(t),\theta(t)) - (T(0)g)(t,x(t),\theta(t))}{h}\right) \tag{5.13}$$

para todo $(t,x(t),\theta(t)) \in \mathcal{X}$ e $g \in D(\mathcal{L})$ com $(T(h)g)(t,x(t),\theta(t))$ definido em (5.11), onde $D(\mathcal{L})$ é o conjunto de todas as funções $g \in \mathbb{B}(\mathcal{X},\mathbb{R})$ tais que o limite acima exista.

A *fórmula de Dynkin* é dada por

$$E_{x(s),\theta(s)}\left[g(t,x(t),\theta(t))\right] - g(s,x(s),\theta(s)) =$$

$$= E_{x(s),\theta(s)}\left[\int_s^t (\mathcal{L}g)(r,x(r),\theta(r))dr\right] \tag{5.14}$$

para $0 \leq s < t$, $(s,x(s),\theta(s)) \in \mathcal{X}$ e $g \in D(\mathcal{L})$. (Observe que a integral e esperança acima são finitas, tendo em vista que todos os termos são mensuráveis e finitos).

O resultado seguir está baseado no conceito de decomplexificação definido na seção 5.1.1.

**Proposição 32** *Considere o sistema (4.1) definido em* $[0,T)$ *e seja* $g \in \mathbb{B}[\mathcal{X},\mathbb{R}]$. *Assumindo a decomplexificação* $^{R}g$ *(Fréchet)- diferenciável nas variáveis* $t$ *e* $x$, *o operador infinitesimal dado em (5.13) se escreve*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^u g)(t,x(t),\theta(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} g(t,x(t),\theta(t)) + \nabla_{R_x}\ {}^{R}g(t,{}^{R}x(t),\theta(t))'\ {}^{R}(A_{\theta(t)}x(t) \\ &\quad + B_{\theta(t)}u(t) + D_{\theta(t)}w(t)) + \sum_{j=1}^{\infty} g(t,x(t),j)\lambda_{\theta(t)j} \end{aligned} \tag{5.15}$$

*para todo* $(t,x(t),\theta(t)) \in \mathcal{X}$ .

**Prova.** A prova segue *mutatis mutandis* da Proposição 41 [5], substituindo $\dot{x}(t)$ por $A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + D_{\theta(t)}w(t)$. ■

## 5.4 Conceito de Estabilidade Estocástica

No problema de controle a tempo infinito, dois conceitos estruturais são de fundamental importância, a saber: *estabilidade estocástica e detectabilidade estocástica* de um sistema. Por comodidade, usaremos os símbolos SS e SD (do inglês *stochastic stability* e *stochastic detectabiblity*) para representar estabilidade estocástica e detectabilidade estocástica, respectivamente.

**Definição 33** *(Estabilidade Estocástica) Diremos que o sistema* $(A,B,\Lambda)$ *é* ***estocasticamente estabilizável (SS)*** *se existe* $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ *tal que, para qualquer distribuição conjunta* $\mathcal{V}_0$ *de condições iniciais* $(\theta_0, x_0)$ *tem-se que*

$$\int_0^{\infty} \left[E\left\|x(t)\right\|^2\right] dt < \infty \tag{5.16}$$

*onde* $x(t)$ *é dado por (4.1) com* $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t)$ *e* $w(t) = 0$, *i.e,*

$$\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t)\ , \quad t > 0 \tag{5.17}$$

*com* $F_{\theta(t)} = A_{\theta(t)} - B_{\theta(t)}K_{\theta(t)}$. *Neste caso diremos que (5.17) é estocasticamente estável e* $K$ *estabiliza* $(A,B,\Lambda)$.

**Definição 34** *( Detectabilidade Estocástica). Seja* $C = (C_1, C_2, ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,r}$, *diremos que o sistema* $(C,A,\Lambda)$ *é* ***estocasticamente detectável (SD)*** *se existe* $H \in \mathcal{H}_{\infty}^{r,n}$

*tal que, para qualquer distribuição conjunta $\mathcal{V}_0$ de condições iniciais $(\theta_0, x_0)$ tem-se que*

$$\int_0^\infty \left[E\left\|x(t)\right\|^2\right] dt < \infty \tag{5.18}$$

*onde $x(t)$ é dado por*

$$\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t) \ , \quad t > 0 \tag{5.19}$$

*com $F_{\theta(t)} = A_{\theta(t)} - H_{\theta(t)}C_{\theta(t)}$. Neste caso diremos que (5.19) é estocasticamente detectável e $H$ estabiliza $(C, A, \Lambda)$.*

**Observação 35** *Se notarmos $M_i^{\frac{1}{2}} = (C_i^* C_i)^{\frac{1}{2}}$ , $M^{\frac{1}{2}} = \left(M_1^{\frac{1}{2}}, M_2^{\frac{1}{2}}, ...\right) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ então $(C, A, \Lambda)$ é SD se e somente se $\left(M_i^{\frac{1}{2}}, A\right)$ é SD. (Segue do fato de que para alguma matriz unitária $U_i$, tem-se $C_i = U_i M_i^{\frac{1}{2}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$).*

# 5.5 Alguns resultados importantes oriundos do caso homogêneo

## 5.5.1 Estabilidade Estocástica versus Espectro de um Operador Linear

A seguir, veremos o Lema 37, um importante resultado apresentado em [47], que relaciona estabilidade estocástica com o espectro de um operador $\mathcal{D} \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_1^n)$ e permite resgatar o conceito estrutural de SS, para os MJLS.

Para qualquer condição inicial $(\theta_0, x_0)$ arbitrária considere o sistema dinâmico homogêneo abaixo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t) & t > 0 \\ x(0) = 0, & \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{5.20}$$

onde $F = (F_1, F_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$, e definamos

$$Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), ...), \ \ t \ > 0 \tag{5.21}$$

onde

$$Q_i(t) = E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}] \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, \quad i = 1, 2, ... \ . \tag{5.22}$$

Para $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_1^n$ , definimos o operator $\mathcal{D}$ tal que

$$\mathcal{D}(H) = (\mathcal{D}_1(H), \mathcal{D}_2(H), ...) \tag{5.23}$$

onde

$$\mathcal{D}_i(H) = H_i F_i^* + F_i H_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ji} H_j \qquad i = 1, 2, ... \tag{5.24}$$

A Proposição 38 e o Lema 39 a seguir são encontrados em [47].

**Proposição 38** *Seja $x(t)$ dado por (5.20) com $F \in \mathcal{H}_\infty^n$ arbitrário então $Q(t)$, $t \geq 0$, definido por (5.21) e (5.22), pertence a $\mathcal{H}_1^{n\,+}$ e satisfaz a equação diferencial linear em espaço de Banach*

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \mathcal{D}(Q(t)) & , t > 0 \\ Q(0) = Q^0 \in \mathcal{H}_1^{n\,+}, \; Q_i^0 = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}], & i = 1, 2, ... \end{cases} \tag{5.25}$$

*ou equivalentemente, o seguinte conjunto infinito enumerável de equações diferenciais interconectadas*

$$\begin{cases} \dot{Q}_i(t) = \mathcal{D}_i(Q(t)) & , t > 0 \\ Q(0) = Q^0 \in \mathcal{H}_1^{n\,+}, \; Q_i^0 = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}], & i = 1, 2, ... \end{cases} \tag{5.26}$$

*onde $\mathcal{D}$ é dado por (5.23) e (5.24).*

**Lema 39** *Considere o operador $\mathcal{D}$ definido em (5.23) e (5.24), $K = (K_1, K_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$, $C = (C_1, C_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,r}$ e $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{r,n}$.*

*O sistema $(A, B, \Lambda)$ é SS com estabilizador $K$ se e somente se*

$$sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \tag{5.27}$$

*onde $F_i = A_i - B_i K_i \;\; i = 1, 2, ...$*

*Similarmente o sistema $(C, A, \Lambda)$ é SD com estabilizador $H$ se e somente se*

$$sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \tag{5.28}$$

*onde $F_i = A_i - H_i C_i \;\; i = 1, 2, ...$*

### 5.5.2 Solução Ótima para o Problema de Controle

Considere $M = (M_1, M_2,...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ definido em (2.2). Definamos para $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$ o operador linear $\mathcal{E}(H) = (\mathcal{E}_1(H), \mathcal{E}_2(H), ...)$, e o operador não linear $\overline{\mathcal{T}}(H) = (\overline{\mathcal{T}}_1(H), \overline{\mathcal{T}}_2(H), ...)$, onde

$$\mathcal{E}_i(H) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \lambda_{ij} H_j \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{T}}_i(H) &= M_i + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i B_i^* H_i + \mathcal{E}_i(H) + \lambda_{ii} H_i \\ &= M_i + (A_i - B_i B_i^* H_i)^* H_i + H_i (A_i - B_i B_i^* H_i) + H_i^* B_i B_i^* H_i \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} H_j\end{aligned}$$

A Proposição a seguir foi obtida do Teorema 37 em [47] com pequenas modificações.

**Proposição 40** *Suponha $(A, B, \Lambda)$ estocasticamente estabilizável e $(C, A, \Lambda)$ estocasticamente detectável. Então existe uma única solução $L = (L_1, L_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{\mathcal{T}}_i(L) = M_i + A_i^* L_i + L_i A_i - L_i B_i B_i^* L_i + \mathcal{E}_i(L) + \lambda_{ii} L_i \tag{5.30}$$

$$= M_i + (A_i - B_i J_i)^* L_i + L_i (A_i - B_i J_i) + J_i^* J_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} L_j = 0 \tag{5.31}$$

*onde $J_i = B_i^* L_i$. Além disso, $J = (J_1, J_2, ...)$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$.*

**Observação 41** *A sequência de matrizes $J = (J_1, J_2, ...)$ que aparece na Proposição acima é fundamental na definição dos operadores custo $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}^T$ no Capítulo 4.*

## 5.6 Um Lema Importante

O Lema a seguir, devido a Yakubovich [90] é a ferramenta fundamental na prova das Proposições 54 e 55 na seção 8.2.

**Lema 42** *Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Considere também uma forma quadrática $J(\zeta) =< \mathcal{S}\zeta, \zeta >$, tal que $\zeta \in \mathcal{H}$ e $\mathcal{S} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ é autoadjunta. Seja $\mathcal{M}_0$ um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{M}$ uma translação de $\mathcal{M}_0$ por um elemento $m \in \mathcal{H}$ (i.e., $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$). Se $\inf_{\zeta \in \mathcal{M}_0} \frac{<\mathcal{S}\zeta,\zeta>}{<\zeta,\zeta>} > 0$ então existe um único elemento $\widehat{\zeta} \in \mathcal{M}$ tal que $J(\widehat{\zeta}) = \inf_{\zeta \in \mathcal{M}} J(\zeta)$, onde $\widehat{\zeta} = p + m$, com $p = \mathcal{G}m \in \mathcal{M}_0$ para algum $\mathcal{G} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ .*

# Capítulo 6

# Resultados Preliminares

## 6.1 Introdução

Este capítulo diz respeito fundamentalmente a resultados que obtivemos e que servirão de ferramentas na prova de resultados dos capítulos 7, 8 e 9. Na primeira parte estudamos as trajetórias do processo de estados $\{x\}$, cuja caracterização é fundamental na prova dos resultados da seção 6.3. Na segunda parte estudamos questões ligadas à estabilidade cujos resultados baseiam-se principalmente em conceitos do Capítulo 5, com ênfase na seção 5.5.

## 6.2 As Trajetórias do Processo de Estados $\{x\}$

O resultado que segue estende o Lema 80 de [5] ao caso não homogêneo.

**Lema 43** *Para condições iniciais arbitrárias* $(\theta_0, x_0)$ *consideremos o sistema dinâmico não homogêneo*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}w(t) \ , & t > 0 \\ x(0) = x_0 \ , \quad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

*onde* $F = (F_1, F_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$. *Para todo* $t \geq 0$ *definamos* $t_0 = 0$ *e a variável aleatória* $\xi = (\theta(t_1), ......, \theta(t_{m-1}))$, *com* $t_1 < t_2 < ... < t_N$ *tempos de saltos. Então a trajetória do processo de estados* $\{x\}$ *com* $t_{m-1} \leq t < t_m$, *para* $m = 1, 2, ..., N$, *é representada por*

$$\begin{aligned} x(t) = M(\theta_0, t, \xi)x_0 + \textstyle\int_{t_{m-1}}^{t} \exp(F_{\theta(t_{m-1})}(t-\tau))D_{\theta(\tau)}w(\tau)d\tau + \\ + \sum_{j=1}^{m-1} \textstyle\int_{t_{m-j-1}}^{t_{m-j}} \exp(F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1}))\exp(F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2}))... \\ ... \exp(F_{\theta(t_{m-j})}(t_{m-j+1}-t_{m-j}))\exp(F_{\theta(t_{m-j-1})}(t_{m-j}-\tau))D_{\theta(\tau)}w(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6.2}$$

*onde*

$$M(\theta_0,t,\xi)=\begin{cases}\exp(F_{\theta_0}t) & se \quad m=1\\ \exp(F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1}))\exp(F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2}))... & \\ ...\exp(F_{\theta(t_1)}(t_2-t_1))\exp(F_{\theta_0}t_1), & se\ m=2,3,...,N\end{cases} \tag{6.3}$$

*e* $N$ *é finito com* $t_N=\infty$ *ou infinito com* $\lim\limits_{N\to\infty} t_N=\infty$.

**Prova.** As trajetórias do processo de estados $\{x\}$ são soluções conectadas de

$$\dot{x}(t)=F_{\theta(t_{m-1})}x(t)+D_{\theta(t)}w(t), \quad t_{m-1}\leq t<t_m$$

com condição inicial $(\theta(t_{m-1}),x(t_{m-1}))$ e portanto dadas por

$$x(t)=\exp(F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1}))x(t_{m-1})+\int_{t_{m-1}}^{t} e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-\tau)}D_{\theta(\tau)}w(\tau)d\tau \tag{6.4}$$

Pela continuidade de (6.4), em todo ponto de salto temos

$$\begin{aligned} x(t_m)=\lim_{t\uparrow t_m}x(t) &= \exp(F_{\theta(t_{m-1})}(t_m-t_{m-1}))x(t_{m-1})\\ &+\textstyle\int_{t_{m-1}}^{t_m} e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t_m-\tau)}D_{\theta(\tau)}w(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6.5}$$

substituindo $x(t_{m-1})$ em (6.4) por seu correspondente dado por (6.5), obtemos

$$\begin{aligned} x(t) \;=\; & e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})}e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2})}x(t_{m-2})+\\ & +e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})}\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-\tau)}D_{\theta(\tau)}w(\tau)d\tau+\\ & +\int_{t_{m-1}}^{t} e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-\tau)}D_{\theta(\tau)}w(\tau)d\tau \end{aligned}$$

quase certamente, com $t_{m-1}\leq t<t_m$. Consecutivas substituições levam-nos a (6.2).

Em (6.2) $N$ é finito quando um estado absorvente é visitado (isto ocorre se $\lambda_{ii}=0$). Neste caso $t_N=\infty$. Caso contrário, $N$ é infinito. Como $-\lambda_{ii}<c$, para todo $i\in\mathbb{N}$ (veja (2.4)) então quase todas as trajetórias de $\{\theta\}$ tem um número finito de saltos em cada intervalo $[0,\alpha]$, $\alpha<\infty$. Logo, com probabilidade um não existem sequências de saltos convergindo para um instante finito $t$ tal que $\lim\limits_{N\to\infty} t_N=\infty$ a.s.. Então, (6.2) expressa a trajetória do processo de estado $\{x\}$ para todo $t\geq 0$ mesmo quando $N$ é finito ou infinito. ■

## 6.3 Aspectos da Estabilidade Estocástica para o Caso Não Homogêneo

Se considerarmos a classe de controles admissíveis dada por $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t)+q(t)$, é possível verificar através da Proposição 44 a seguir que a estabilidade do sistema no sentido estocástico independe da presença do ruído, dependendo apenas do espectro do operador linear limitado $\mathcal{D}$, como no caso homogêneo. Além disso, se $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t)$ então tem-se a equivalência.

**Proposição 44** *Considere o sistema (4.1), com a classe de controles admissíveis dada por* $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t) + q(t)$*, onde* $q \in \mathcal{C}^m$*. Considere ainda o operador* $\mathcal{D}$ *definido em (5.23) e (5.24), com* $F_i = A_i - B_i K_i$*. Se* $sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \ ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ *então* $x \in \mathcal{C}^n$ *para todo* $w \in \mathcal{C}^p$*,* $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$*, e* $\theta_0 \in \Theta_0$*. Além disso, o operador* $X_K(\theta_0, \cdot)$ *definido em (7.11) pertence a* $\mathbb{B}[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m \ , \mathcal{C}^n]$.

**Prova.** $(\Longrightarrow)$ Para condições iniciais arbitrárias $(\theta_0, x_0)$ considere o sistema dinâmico não homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}w(t) + B_{\theta(t)}q(t) \ , \quad t > 0 \\ x(0) = x_0, \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{6.6}$$

onde $F = (F_1, F_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$.

Definamos $t_0 = 0$. Pelo Lema 43, para todo $t \geq 0$ a trajetória do processo de estados $\{x\}$ com tempos de saltos $t_1 < t_2 < ... < t_N$ é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) = {} & e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})}e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2})}...e^{F_{\theta(t_1)}(t_2-t_1)}e^{F_{\theta_0}t_1}x_0 \\ & + \int_{t_{m-1}}^{t} e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-\tau)}(D_{\theta(\tau)}w(\tau) + B_{\theta(\tau)}q(\tau))d\tau \\ & + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_{m-j-1}}^{t_{m-j}} e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})}e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2})}... \\ & ...e^{F_{\theta(t_{m-j})}(t_{m-j+1}-t_{m-j})}e^{F_{\theta(t_{m-j-1})}(t_{m-j}-\tau)}(D_{\theta(\tau)}w(\tau) + B_{\theta(\tau)}q(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{6.7}$$

quase certamente, para $t_{m-1} \leq t < t_m$.

Consideremos o sistema dinâmico homogêneo,

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = F_{\theta(t)}\overline{x}(t) \ , \quad t \geq 0 \\ \overline{x}(0) = x_0 \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Se fizermos $w = 0$, pelo Lema 43 temos que a trajetória do processo de estados $\{\overline{x}\}$ com tempos de saltos $t_1 < ... < t_m < ...$ é dada por

$$\overline{x}(t) = e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})} e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2})} ... e^{F_{\theta(t_1)}(t_2-t_1)} e^{F_{\theta_0} t_1} x_0 \tag{6.9}$$

quase certamente, para $t_{m-1} \leq t < t_m$.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \mathcal{D}(Q(t)) & , t > 0 \\ Q(0) = Q^0 \in \mathcal{H}_1^{n+}, \; Q_i^0 = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}], & i = 1, 2, ... \end{cases} \tag{6.10}$$

onde $\mathcal{D}$ é o operador definido em (5.24). Pela Proposição 38, Capítulo 5, temos que $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), ...)$, onde $Q_i(t) = E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}]$ é solução do sistema (6.10). Por outro lado, como $\mathcal{D}$ é um operador linear limitado, a Proposição 30 garante que o sistema (6.10) é satisfeito por uma única função

$$Q(t) = T(t) Q^0 \tag{6.11}$$

onde $T$ é o semigrupo de classe $C_0$ gerado pelo operador limitado $\mathcal{D}$. Tendo em vista (6.8), (6.9), (6.11) e o Lema 65 no Apêndice, temos que

$$\left\| e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})} e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2})} ... e^{F_{\theta(t_1)}(t_2-t_1)} e^{F_{\theta_0} t_1} x_0 \right\|_2^2 = \|\overline{x}(t)\|_2^2 \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} \|\overline{x}(t)\|_2^2 &= E\left[\|\overline{x}(t)\|^2\right] \\ &\leq n \|Q(t)\|_1 = n \|T(t) Q^0\|_1 \\ &= n \sum_{i=1}^{\infty} \left\| T(t) E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}] \right\| \\ &\leq n \|T(t)\| \sum_{i=1}^{\infty} E[\left\| x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}} \right\|] \\ &\leq n \|T(t)\| \sum_{i=1}^{\infty} E[\|x_0\|^2 1_{\{\theta_0 = i\}}] \end{aligned}$$

$$= n \|T(t)\| E[\|x_0\|^2] = n \|T(t)\| \|x_0\|_2^2 \tag{6.13}$$

Consideremos agora o seguinte sistema homogêneo

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = F_{\theta(t)} s(t) & , \quad t \geq \tau \\ s(\tau) = D_{\theta(\tau)} w(\tau) + B_{\theta(\tau)} q(\tau) \;, & \theta(\tau) = \theta(\tau) \end{cases} \tag{6.14}$$

então, a solução do problema de valor inicial (6.14) para cada $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$, é dada por:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})} e^{F_{\theta(t_{m-2})}(t_{m-1}-t_{m-2})} \dots \\
&\dots e^{F_{\theta(t_{m-j})}(t_{m-j+1}-t_{m-j})} e^{F_{\theta(t_{m-j-1})}(t_{m-j}-\tau)} (D_{\theta(\tau)} w(\tau) + B_{\theta(\tau)} q(\tau))
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

onde $t_{m-j-1} \le \tau < t_{m-j}$, $t_{m-1} \le t < t_m$.

Para cada $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$, o integrando de (6.7) pode ser encarado como a solução de (6.14). Assim, para cada $j$ podemos associar o sistema

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{S}(t) = \mathcal{D}(S(t)) \ , \qquad t \ge \tau \\
S(\tau) = S^\tau, \quad S_i^\tau = E[(D_{\theta(\tau)} w(\tau) w(\tau)^* D_{\theta(\tau)}^* + D_{\theta(\tau)} w(\tau) q(\tau)^* B_{\theta(\tau)}^* \\
+ B_{\theta(\tau)} q(\tau) w(\tau)^* D_{\theta(\tau)}^* + B_{\theta(\tau)} q(\tau) q(\tau)^* B_{\theta(\tau)}^*) 1_{\{\theta(\tau)=i\}}], \quad i = 1, 2, ...
\end{array}
\right. \tag{6.16}
$$

onde $\mathcal{D}$ está definido em (5.24). Novamente, como $\mathcal{D}$ é um operador linear limitado, a Proposição 28 nos garante que o sistema (6.16) é satisfeito por uma única função

$$
S(t) = T(t) S^\tau \tag{6.17}
$$

onde $T$ é o semigrupo de classe $C_0$ gerado pelo operador $\mathcal{D}$. Aplicando a Proposição 36 obtemos que

$$
\begin{aligned}
S(t) &= (S_1(t), S_2(t), ...), \\
S_i(t) &= E[s(t) s(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}]
\end{aligned} \tag{6.18}
$$

é também solução do sistema (6.16). Pelo Lema 63, substituindo $x$ e $Q$ por $s$ e $S$ respectivamente, temos que $\|s(t)\|_2^2 \le n \|S(t)\|_1$, para cada $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$. Tendo em vista (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18) , temos:

$$
\begin{aligned}
&\|s(t)\|_2^2 = \\
&\left\| e^{F_{\theta(t_{m-1})}(t-t_{m-1})} \dots\dots e^{F_{\theta(t_{m-j})}(t_{m-j+1}-t_{m-j})} e^{F_{\theta(t_{m-j-1})}(t_{m-j}-\tau)} (D_{\theta(\tau)} w(\tau) + B_{\theta(\tau)} q(\tau)) \right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
&\|s(t)\|_2^2 = E\left[\|s(t)\|^2\right] \\
&\le n \|S(t)\|_1 = n \|T(t) S^\tau\|_1 \\
&= n \sum_{i=1}^{\infty} \Big\| T(t) E[(D_{\theta(\tau)} w(\tau) w(\tau)^* D_{\theta(\tau)}^* + D_{\theta(\tau)} w(\tau) q(\tau)^* B_{\theta(\tau)}^* \\
&\quad + B_{\theta(\tau)} q(\tau) w(\tau)^* D_{\theta(\tau)}^* + B_{\theta(\tau)} q(\tau) q(\tau)^* B_{\theta(\tau)}^*) 1_{\{\theta(\tau)=i\}}] \Big\|
\end{aligned}
$$

$$\leq n\|T(t)\| \sum_{i=1}^{\infty} \Big\| E[(D_{\theta(\tau)}w(\tau)w(\tau)^* D^*_{\theta(\tau)} + D_{\theta(\tau)}w(\tau)q(\tau)^* B^*_{\theta(\tau)}$$

$$+B_{\theta(\tau)}q(\tau)w(\tau)^* D^*_{\theta(\tau)} + B_{\theta(\tau)}q(\tau)q(\tau)^* B^*_{\theta(\tau)})1_{\{\theta(\tau)=i\}}]\Big\|$$

$$\leq n\|T(t)\| \sum_{i=1}^{\infty} E[\Big\|(D_{\theta(\tau)}w(\tau)w(\tau)^* D^*_{\theta(\tau)} + D_{\theta(\tau)}w(\tau)q(\tau)^* B^*_{\theta(\tau)}$$

$$+B_{\theta(\tau)}q(\tau)w(\tau)^* D^*_{\theta(\tau)} + B_{\theta(\tau)}q(\tau)q(\tau)^* B^*_{\theta(\tau)})1_{\{\theta(\tau)=i\}}\Big\|]$$

$$\leq n\|T(t)\| \sum_{i=1}^{\infty}(\|D\|^2_\infty E[\|w(\tau)\|^2] + \|B\|^2_\infty E[\|q(\tau)\|^2]$$
$$+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty E[\|w(\tau)q(\tau)\|])1_{\{\theta(\tau)=i\}}$$
$$\leq n\|T(t)\| \left(\|D\|^2_\infty \sum_{i=1}^{\infty} E[\|w(\tau)\|^2 1_{\{\theta(\tau)=i\}}] + \|B\|^2_\infty \sum_{i=1}^{\infty} E[\|q(\tau)\|^2 1_{\{\theta(\tau)=i\}}]\right.$$
$$\left.+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty \sum_{i=1}^{\infty} E[\|w(\tau)q(\tau)\|]1_{\{\theta(\tau)=i\}}\right)$$
$$= n\|T(t)\| (\ \|D\|^2_\infty E[\|w(\tau)\|^2] + \|B\|^2_\infty E[\|q(\tau)\|^2]$$
$$+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty E[\|w(\tau)q(\tau)\|]\ )$$

$$= n\|T(t)\| (\|D\|^2_\infty \|w(\tau)\|^2_2 + \|B\|^2_\infty \|q(\tau)\|^2_2$$
$$+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty E[\|w(\tau)q(\tau)\|]\ ) \tag{6.20}$$

por (6.7), (6.12), (6.13) (6.19) e (6.20) obtemos

$$\|x(t)\|^2_2 = E\left[\|x(t)\|^2\right]$$
$$\leq n\|T(t)\| \|x_0\|^2_2 + \int_{t_{m-1}}^{t} n\|T(t)\| (\|D\|^2_\infty \|w(\tau)\|^2_2 + \|B\|^2_\infty \|q(\tau)\|^2_2$$
$$+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty E[\|w(\tau)q(\tau)\|])d\tau$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_{m-j-1}}^{t_{m-j}} n\|T(t)\| (\|D\|^2_\infty \|w(\tau)\|^2_2 + \|B\|^2_\infty \|q(\tau)\|^2_2$$
$$+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty E[\|w(\tau)q(\tau)\|])d\tau$$

$$= n\|T(t)\| \left[\|x_0\|^2_2 + \|D\|^2_\infty (\int_{t_{m-1}}^{t} \|w(\tau)\|^2_2 d\tau) + \|D\|^2_\infty \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_{m-j-1}}^{t_{m-j}} \|w(\tau)\|^2_2 d\tau\right.$$
$$+\|B\|^2_\infty (\int_{t_{m-1}}^{t} \|q(\tau)\|^2_2 d\tau) + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_{m-j-1}}^{t_{m-j}} \|q(\tau)\|^2_2 d\tau)$$
$$\left.+2\|D\|_\infty \|B\|_\infty (\int_{t_{m-1}}^{t} E[\|w(\tau)q(\tau)\|]d\tau + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_{m-j-1}}^{t_{m-j}} E[\|w(\tau)q(\tau)\|]d\tau\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\leq n \|T(t)\| \left[\|x_0\|_2^2 + \|D\|_\infty^2 \int_0^\infty \|w(\tau)\|_2^2 \, d\tau + \|B\|_\infty^2 \int_0^\infty \|q(\tau)\|_2^2 \, d\tau \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2 \|D\|_\infty \|B\|_\infty \int_0^\infty E[\|w(\tau) q(\tau)\|] d\tau \right] \\
&= n \|T(t)\| \left(\|x_0\|_2^2 + \|D\|_\infty^2 \|w\|_2^2 + \|B\|_\infty^2 \|q\|_2^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2 \|D\|_\infty \|B\|_\infty \|w\|_2 \|q\|_2 \right) \\
&= \widetilde{\gamma}^2 \|T(t)\| \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\widetilde{\gamma}^2 = n(\|x_0\|_2^2 + \|D\|_\infty^2 \|w\|_2^2 + \|B\|_\infty^2 \|q\|_2^2 + 2 \|D\|_\infty \|B\|_\infty \|w\|_2 \|q\|_2).
$$

Mas por hipótese $sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$, tendo em mente que $\mathcal{D}$ é um operador linear limitado, podemos lançar mão da implicação (1) $\Rightarrow$ (4) do Lema 32 (i.e., $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \Rightarrow \int_0^\infty \|T(t)\| \, dt < \infty$). Daí temos que

$$
\|x\|_2^2 = \int_0^\infty E\left[\|x(t)\|^2\right] dt \leq \widetilde{\gamma} \int_0^\infty \|T(t)\| \, dt < \infty
$$

ou seja, $x \in \mathcal{C}^n$.

Tendo em vista as trajetórias do processo de estados $\{x\}$, em (6.2), verifica-se facilmente a linearidade do operador $X_K$. Além disso, como $X_K(\theta_0, x_0, w, q) = x$, temos que $\|X_K(\theta_0, x_0, w, q)\|_2^2 = \|x\|_2^2$ e

$$
\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &\leq n \left(\|x_0\|_2^2 + \|D\|_\infty^2 \|w\|_2^2 + \|B\|_\infty^2 \|q\|_2^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \|D\|_\infty \|B\|_\infty \|w\|_2 \|q\|_2 \right) \int_0^\infty \|T(t)\| \, dt \\
&\leq n \left(\|x_0\|_2^2 + \|D\|_\infty^2 \|w\|_2^2 + \|B\|_\infty^2 \|q\|_2^2 \right. \\
&\quad \left. + \|D\|_\infty \|B\|_\infty (\|w\|_2^2 + \|q\|_2^2)\right) \int_0^\infty \|T(t)\| \, dt \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

Denotando $\beta^2 = \int_0^\infty \|T(t)\| \, dt$ , (6.22) pode ser reescrito como

$$
\|x\|_2^2 \leq n\beta^2 \left(\|x_0\|_2^2 + (\|D\|_\infty^2 + \|D\|_\infty \|B\|_\infty) \|w\|_2^2 + (\|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty \|B\|_\infty) \|q\|_2^2\right)
$$

Fixemos $\mu > 0$ tal que

$$
\frac{\mu^2}{n\beta^2} \geq \max\left\{1, \; (\|D\|_\infty^2 + \|D\|_\infty \|B\|_\infty) \, , \; (\|B\|_\infty^2 + \|D\|_\infty \|B\|_\infty)\right\}
$$

então,

$$
\|x\|_2^2 \leq \mu^2 \left(\|x_0\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|q\|_2^2\right) \qquad (6.23)
$$

e

$$\|x\|_2 \leq \mu \left(\|x_0\|_2 + \|w\|_2 + \|q\|_2\right)$$

tendo em vista a norma em $(\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m)$ dada em (2.5), temos que

$$\|x\|_2 \leq \mu \left\|(x_0, w, q)\right\|$$

provando que o operador $X_K(\theta_0, \cdot)$ é limitado. Portanto, $X_K(\theta_0, \cdot) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m\ , \mathcal{C}^n]$. ■

**Proposição 43** *Se* $sup\{\operatorname{Re}\lambda\ ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$, *temos que* $z$ *definido em (4.2) pertence a* $\mathcal{C}^r$. *Além disso o operador* $Z_K(\theta_0, \cdot)$ *definido em (4.4) pertence a* $\mathbb{B}[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m\ , \mathcal{C}^r]$.

**Prova.** Veja seção 11.2 do Apêndice . ■

Considerando a classe de controles admissíveis $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t)$, é possível estabelecer equivalência entre estabilidade estocástica do sistema e o espectro do operador $\mathcal{D}$. Este resultado será aplicado para completar a prova do Lema 62.

**Corolário 44** *Considere o sistema (4.1), a classe de controles admissíveis dada por* $u(t) = -K_{\theta(t)}x(t)$ *e o operador* $\mathcal{D}$ *definido em (5.23) e (5.24), onde* $F_i = A_i - B_i K_i$. *Então* $sup\{\operatorname{Re}\lambda\ ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ *se e somente se* $x \in \mathcal{C}^n$ *para todo* $w \in \mathcal{C}^p$, $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$, *e* $\theta_0 \in \Theta_0$.

**Prova.** ($\Longrightarrow$)O resultado segue da Proposição 42 fazendo $q = 0$ .

($\Longleftarrow$) Como por hipótese $x \in \mathcal{C}^n$ , então para todo $x_0 \in \mathcal{C}^n$ , $\theta_0 \in \Theta_0$, e $w \in \mathcal{C}^p$, temos $\int_0^\infty E\left[\|x(t)\|^2\right] dt < \infty$. Fazendo $w = 0$, o Lema 37 nos garante que $sup\{\operatorname{Re}\lambda\ ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$. ■

# Capítulo 7

# Aspectos próprios do Cenário em Horizonte Finito

## 7.1 Introdução

Na seção 7.2 exibimos a equação diferencial de Riccati em espaços de Banach e exibimo-la também numa versão *forward*, forma esta que utilizamos para desenvolvimento da teoria. Na seção 7.3 obtemos uma expressão para o operador infinitesimal $\mathcal{L}^u$, bem como uma versão da fórmula de Dynkin para o nosso problema. Este resultado constitui-se na ferramenta fundamental na obtenção de uma expressão para o operador custo $\widehat{\mathcal{J}}^T$ na seção 7.4. Esta, por sua vez, se encerra com a solução do problema minimax proposto em (4.8).

## 7.2 A Equação Diferencial de Riccati em Espaço de Banach

Para $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, $M_i$ como em (2.2), definimos o operador não linear $\mathcal{T}(H) = (\mathcal{T}_1(H), \mathcal{T}_2(H), ...)$, por

$$\mathcal{T}_i(H) = M_i + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i B_i^* H_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} H_j + \frac{1}{\delta^2} H_i D_i D_i^* H_i \tag{7.1}$$

**Proposição 45** *O operador $\mathcal{T}$ leva $\mathcal{H}_\infty^{n+}$ em $\{H \in \mathcal{H}_\infty^{n} : H^* = H\}$.*

**Prova.** Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_i(H) &= M_i + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i B_i^* H_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} H_j + \frac{1}{\delta^2} H_i D_i D_i^* H_i \\
&= M_i + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i B_i^* H_i + \lambda_{ii} H_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j + \frac{1}{\delta^2} H_i D_i D_i^* H_i
\end{aligned}$$

Como $\{\theta\}$ é conservativo, temos, para $H \in \mathcal{H}_\infty^n$ e $m_2 > m_1$, que

$$\left\| \sum_{j=m_1, j\neq i}^{m_2} \lambda_{ij} H_j \right\| \leq \|H\|_\infty \sum_{j=m_1, j\neq i}^{m_2} |\lambda_{ij}| \to 0 \text{ quando } m_1, m_2 \to \infty.$$

Logo, $\{\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \lambda_{ij} H_j\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto converge no espaço completo $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ quando $m \to \infty$. Por outro lado, como o processo de Markov $\{\theta(t),\, t \geq 0\}$ é conservativo e estável por (2.4) temos

$$\left\| \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j \right\| \leq \|H\|_\infty \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} |\lambda_{ij}| = \|H\|_\infty |\lambda_{ii}| \leq \|H\|_\infty c.$$

Logo, $\left\|\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j\right\|$ é uniformemente limitado em $i$. Como $A,\, H \in \mathcal{H}_\infty^n$, $B \in \mathcal{H}_\infty^{m,n}$ e $D \in \mathcal{H}_\infty^{p,n}$, tomando a norma em ambos lados de (7.1), segue que $\mathcal{T}(H) \in \mathcal{H}_\infty^n$. Além disso, como $H_i = H_i^*$, é imediato verificar que $\mathcal{T}_i(H)^* = \mathcal{T}_i(H)$.

■

Para $T$ finito e $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ arbitrariamente fixados, a equação diferencial de Riccati em espaços de Banach se escreve como

$$\begin{cases} \dot{P}^T(t) + \mathcal{T}\left(P^T(t)\right) = 0, & t \in (0, T) \\ P^T(T) = L \end{cases} \tag{7.2}$$

onde

$$P^T(t) = (P_1^T(t), P_2^T(t), \ldots) \tag{7.3}$$

A equação (7.2) pode ser reescrita como um conjunto infinito enumerável de equações diferenciais de Riccati interconectadas

$$\begin{cases} \dot{P}_i^T(t) + \mathcal{T}_i\left(P^T(t)\right) = 0, & t \in (0, T) \\ P_i^T(T) = L_i\ , & i \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{7.4}$$

a garantia de existência e unicidade de solução da equação diferencial de Riccati (7.2) é dada pela Proposição a seguir.

**Proposição 46** *Para* $T \in [0,\infty)$ *e condição terminal* $L \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$ *arbitrariamente fixada, existe solução* $P^T(.) : [0,T) \to \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$ *para (7.2), contínua para* $t \in [0,T]$ *e continuamente diferenciável para* $t \in (0,T)$. *Além disso, esta solução é única (dentro de uma classe de soluções com estas propriedades).*

**Prova.** Veja Proposição 4.9 em [47]. ∎

**Observação 47** *Denotemos* $P^{T-t}(0) = P^T(t)$. *Então,* $[0,T] \ni t \to P^{T-t}(0) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$ *satisfaz (7.2). Em particular, em* $t = T$, $P^{T-T}(0) = P^0(0) = P^T(T) = L$ *e em* $t = 0$, *temos que* $P^{T-0}(0) = P^T(0)$.

Tradicionalmente a equação diferencial de Riccati é um problema *backward*, porém, sob o ponto de vista da Observação 47, a equação diferencial de Riccati (7.2) pode ser reescrita como *forward*, como segue

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P^{T-t}(0) + \mathcal{T}\left(P^{T-t}(0)\right) = 0, & t \in (0,T) \\ P^0(0) = L \end{cases} \tag{7.5}$$

ou o seguinte conjunto infinito enumerável de equações diferenciais de Riccati interconectadas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_i^{T-t}(0) + \mathcal{T}_i\left(P^{T-t}(0)\right) = 0, & t \in (0,T) \\ P_i^0(0) = L_i\ , \quad i \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{7.6}$$

**Proposição 48** $[0,T] \ni t \to P^T(t) = P^{T-t}(0) = P \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$ *satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P^{T-t}(0) + \mathcal{T}\left(P^{T-t}(0)\right) = 0, & t \in (0,T) \\ P^0(0) = P \end{cases} \tag{7.7}$$

*se e somente se* $P$ *satisfaz* $\mathcal{T}(P) = 0$.

**Prova.** Supondo $\mathcal{T}(P) = 0$, temos que $\mathcal{T}\left(P^{T-t}(0)\right) = \mathcal{T}(P) = 0$, para $t \in (0,T)$. Por outro lado, $\frac{d}{dt}P^{T-t}(0) = 0$ implica $\frac{d}{dt}P^{T-t}(0) + \mathcal{T}\left(P^{T-t}(0)\right) = 0$ e também temos $P^0(0) = P$. Reciprocamente, como $P^0(0) = P$, então $\mathcal{T}(P^0(0)) = \mathcal{T}(P) = 0$.

∎

## 7.3 Operador Infinitesimal $\mathcal{L}^u$ e a Fórmula de Dynkin

Por simplicidade, denotaremos $P^0(0) = P^0$, e $P^T(0) = P^T$ (de acordo com a Observação 49). Assim, definimos as seguintes sequências de matrizes:

$$
\begin{aligned}
&P^T = (P_1^T, P_2^T, ...), \quad P_i^T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n) \\
&P^0 = (P_1^0, P_2^0, ...) = (L_1, L_2, ...) \\
&K^T = (K_1^T, K_2^T, ...), \quad K_i^T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \\
&G^T = (G_1^T, G_2^T, ...), \quad G_i^T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
K_i^T &= B_i^* P_i^T \\
G_i^T &= \frac{1}{\delta} D_i^* P_i^T \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

A Proposição a seguir, está fundamentada nos resultados do Capítulo 5, seção 5.3. A classe de controles admissíveis considerada é dada por: $u(t) = -J_{\theta(t)}x(t)+q(t)$ onde $J$, definido na Proposição 40, estabiliza $(A, B, \Lambda)$.

**Proposição 51** *Seja $g$ tal que*

$$
\mathcal{X} \ni (t, x, i) \mapsto g(t, x, i) = x(t)^* P_i^{T-t} x(t) \tag{7.8}
$$

*onde $P^{T-t} = (P_1^{T-t}, P_2^{T-t}, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ satisfaz a equação diferencial de Riccati infinito enumerável dada por (7.6). Então sob as hipóteses de sistema da Proposição 34 o operador infinitesimal $\mathcal{L}^u$ é dado por*

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) = x(t)^* &\left[-M_{\theta(t)} + \left(K_{\theta(t)}^{T-t}\right)^* K_{\theta(t)}^{T-t} - \left(G_{\theta(t)}^{T-t}\right)^* G_{\theta(t)}^{T-t}\right] x(t) \\
&-x(t)^* J_{\theta(t)}^* K_{\theta(t)}^{T-t}\, x(t) - x(t)^* \left(K_{\theta(t)}^{T-t}\right)^* J_{\theta(t)} x(t) \\
&+q(t)^* K_{\theta(t)}^{T-t}\, x(t) + x(t)^* \left(K_{\theta(t)}^{T-t}\right)^* q(t) \\
&+w(t)^* \delta G_{\theta(t)}^{T-t}\, x(t) + x(t)^* \delta \left(G_{\theta(t)}^{T-t}\right)^* w(t)
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

*para todo $(t, x(t), \theta(t)) \in \mathcal{X}$ . Além disso, para $s = 0$ e $t = T$, a fórmula de Dynkin (5.14) se escreve*

$$
\begin{aligned}
&E_{x_0,\theta_0}[x(T)^* P^0_{\theta(T)} x(T)] - x(0)^* P^T_{\theta(0)} x(0) = \\
&= E_{x_0,\theta_0}[\int_s^t x(r)^* \left[ -M_{\theta(r)} + \left(K^{T-r}_{\theta(r)}\right)^* K^{T-r}_{\theta(r)} - \left(G^{T-r}_{\theta(r)}\right)^* G^{T-r}_{\theta(r)} \right] x(r) \\
&- x(r)^* J^*_{\theta(r)} K^{T-r}_{\theta(r)}\, x(r) - x(r)^* \left(K^{T-r}_{\theta(r)}\right)^* J_{\theta(r)} x(r) \\
&+ q(r)^* K^{T-r}_{\theta(r)}\, x(r) + x(r)^* \left(K^{T-r}_{\theta(r)}\right)^* q(r) \\
&+ w(r)^* \delta G^{T-r}_{\theta(r)}\, x(r) + x(r)^* \delta \left(G^{T-r}_{\theta(r)}\right)^* w(r)] dr.
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

**Prova.** Considere $g(t, x(t), \theta(t) = i) = x(t)^* P_i^{T-t} x(t)$. Pelo Lema 23, $\frac{\partial}{\partial t} g(t, x(t), i) = x(t)^* \frac{d}{dt} P_i^{T-t} x(t)$, como $P^{T-t}$ satisfaz a equação diferencial de Riccati (7.6), temos

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} P_i^{T-t} &= -\mathcal{T}_i(P^{T-t}) = -M_i - A_i^* P_i^{T-t} - P_i^{T-t} A_i + P_i^{T-t} B_i B_i^* P_i^{T-t} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{T-t} \lambda_{ij} - \tfrac{1}{\delta^2} P_i^{T-t} D_i D_i^* P_i^{T-t}.
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
x(t)^* \tfrac{d}{dt} P_i^{T-t} x(t) &= x(t)^* [-M_i - A_i^* P_i^{T-t} - P_i^{T-t} A_i + P_i^{T-t} B_i B_i^* P_i^{T-t} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{T-t} \lambda_{ij} - \tfrac{1}{\delta^2} P_i^{T-t} D_i D_i^* P_i^{T-t}] x(t).
\end{aligned}
$$

Também pelo Lema 23, com $g(t, x(t), i)$ definido em (7.8) temos que,

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{R_x} {}^R g(t, {}^R x(t), i)'^R (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i w(t)) \\
&= (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i w(t))^* \, P_i^{T-t} \, x(t) \\
&+ x(t)^* P_i^{T-t} (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i w(t)).
\end{aligned}
$$

então, usando a Proposição 34, obtemos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) &= x(t)^* [-M_{\theta(t)} - A^*_{\theta(t)} P^{T-t}_{\theta(t)} - P^{T-t}_{\theta(t)} A_{\theta(t)} + P^{T-t}_{\theta(t)} B_{\theta(t)} B^*_{\theta(t)} P^{T-t}_{\theta(t)} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} P_j^{T-t} \lambda_{\theta(t)j} - \tfrac{1}{\delta^2} P^{T-t}_{\theta(t)} D_{\theta(t)} D^*_{\theta(t)} P^{T-t}_{\theta(t)}] x(t) \\
&\quad + \left(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + D_{\theta(t)} w(t)\right)^* P^{T-t}_{\theta(t)} x(t) \\
&\quad + x(t)^* P^{T-t}_{\theta(t)} \left(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + D_{\theta(t)} w(t)\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} x(t)^* P_j^{T-t} x(t) \lambda_{\theta(t)j}
\end{aligned}
$$

$$= x(t)^*[-M_{\theta(t)} - A^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)} - P^{T-t}_{\theta(t)}A_{\theta(t)} + P^{T-t}_{\theta(t)}B_{\theta(t)}B^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}$$
$$- \sum_{j=1}^{\infty} P^{T-t}_j \lambda_{\theta(t)j} - \tfrac{1}{\delta^2}P^{T-t}_{\theta(t)}D_{\theta(t)i}D^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}]x(t)$$
$$+x(t)^*A^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + u(t)^*B^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + w(t)^*D^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}x(t)$$
$$+x(t)^*P^{T-t}_{\theta(t)}A_{\theta(t)}x(t) + x(t)^*P^{T-t}_{\theta(t)}B_{\theta(t)}u(t) + x(t)^*P^{T-t}_{\theta(t)}D_{\theta(t)}w(t)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} x(t)^*P^{T-t}_j x(t)\lambda_{\theta(t)j}$$

$$= x(t)^*[-M_{\theta(t)} + P^{T-t}_{\theta(t)}B_{\theta(t)}B^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)} - \tfrac{1}{\delta^2}P^{T-t}_{\theta(t)}D_{\theta(t)}D^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}]x(t)$$
$$+u(t)^*B^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + w(t)^*D^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + x(t)^*P^{T-t}_{\theta(t)}B_{\theta(t)}u(t)$$
$$+x(t)^*P^{T-t}_{\theta(t)}D_{\theta(t)}w(t)$$

substituindo $K^{T-t}_{\theta(t)}$ por $B^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}$, $G^{T-t}_{\theta(t)}$ por $\frac{1}{\delta}D^*_{\theta(t)}P^{T-t}_{\theta(t)}$ e tendo em vista a classe de controles admissíveis da forma $u(t) = -J_{\theta(t)}x(t) + q(t)$, obtemos

$$(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) = x(t)^*[-M_{\theta(t)} + (K^{T-t}_{\theta(t)})^*K^{T-t}_{\theta(t)} - (G^{T-t}_{\theta(t)})^*G^{T-t}_{\theta(t)}]x(t)$$
$$+(-J_{\theta(t)}x(t) + q(t))^*K^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + \delta w(t)^*G^{T-t}_{\theta(t)}x(t)$$
$$+x(t)^*(K^{T-t}_{\theta(t)})^*(-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)) + x(t)^*\delta(G^{T-t}_{\theta(t)})^*w(t)$$

$$= x(t)^*[-M_{\theta(t)} + (K^{T-t}_{\theta(t)})^*K^{T-t}_{\theta(t)} - (G^{T-t}_{\theta(t)})^*G^{T-t}_{\theta(t)}]x(t)$$
$$-x(t)^*J^*_{\theta(t)}K^{T-t}_{\theta(t)}x(t) - x(t)^*\left(K^{T-t}_{\theta(t)}\right)^* J_{\theta(t)}x(t)$$
$$+q(t)^*K^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + x(t)^*\left(K^{T-t}_{\theta(t)}\right)^* q(t)$$
$$+w(t)^*\delta G^{T-t}_{\theta(t)}x(t) + x(t)^*\delta\left(G^{T-t}_{\theta(t)}\right)^* w(t).$$

A expressão (7.10) segue imediatamente da expressão acima e de (5.14). ■

## 7.4 Custo de uma Política Admissível

Fixado $\theta_0 \in \Theta_0$, para $(x_0, w, q) \in (\mathcal{C}^n_0 \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m)$, $K \in \mathcal{H}^{n,m}_\infty$, definimos os operadores lineares $X_K(\theta_0, \cdot)$, $Z_K(\theta_0, \cdot)$ como

$$X_K(\theta_0, x_0, w, q) = x \tag{7.11}$$

$$Z_K(\theta_0, x_0, w, q) = z \tag{7.12}$$

onde $x$ é dado em (4.1), $z(t)$ está definido em (4.2). Finalmente, para $w \in \mathcal{C}^p$ definimos os operadores $X_K^0(\theta_0, \cdot)$ e $Z_K^0(\theta_0, \cdot)$ respectivamente, por

$$X_K^0(\theta_0, w) = X_K(\theta_0, 0, w, 0) \tag{7.13}$$

$$Z_K^0(\theta_0, w) = Z_K(\theta_0, 0, w, 0) \tag{7.14}$$

Denotemos $x = X_J(\theta_0, x_0, w, q)$ e $z = Z_J(\theta_0, x_0, w, q)$ substituindo $K$ por $J$ em (7.11) e (7.12), respectivamente.

Tendo em vista os operadores definidos acima, podemos reescrever o operador custo $\mathcal{J}^T$ dado em (4.5), por

$$\mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) = \int_0^T (\|Z_J(\theta_0, x_0, w, q)(r)\|_2^2 - \delta^2 \|w(r)\|_2^2)dr + E[x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)].$$

Definimos os operadores $\widetilde{\mathcal{J}}^T$ e $\widehat{\mathcal{J}}^T$ por

$$\widetilde{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0, w) = \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) \tag{7.15}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) = \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T}} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q). \tag{7.16}$$

Na Proposição 52 a seguir, encontramos uma outra expressão para o operador custo $\mathcal{J}^T$.

**Proposição 52** *Suponhamos $(C, A, \Lambda)$ estocasticamente detectável e $(A, B, \Lambda)$ estocasticamente estabilizável. Para a política de controle admissível $u(t) = -J_{\theta(t)}x(t) + q(t)$, com $J$ definido na Proposição 40, o custo (4.5) se lê*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) &= E[\int_0^T E_{x_0,\theta_0}(\left\| -(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r})x(r) + q(r) \right\|^2 \\ &\quad -\delta^2 \left\| w(r) - \frac{1}{\delta} G_{\theta(r)}^{T-r} x(r) \right\|^2 )dr] + E\left(x_0^* P_{\theta_0}^T x_0\right) \end{aligned} \tag{7.17}$$

*onde $P^{T-t} \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ satisfaz (7.5).*

**Prova.** De (4.5) temos que

$$\mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) = E[E_{x_0,\theta_0}[\int_0^T (\left\|C_{\theta(r)}x(r)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(r)}x(r) + q(r)\right\|^2$$

$$-\delta^2 \left\|w(r)\right\|^2)dr] + E_{x_0,\theta_0}[x(T)^* L_{\theta(T)}x(T)]]$$

$$= E[E_{x_0,\theta_0}[\int_0^T (x(r)^* M_{\theta(r)}x(r) + x(r)^* J_{\theta(r)}^* J_{\theta(r)}x(r) - x(r)^* J_{\theta(r)}^* q(r)$$

$$+q(r)^* q(r) - q(r)^* J_{\theta(r)}x(r) - \delta^2 w(r)^* w(r))dr]$$

$$+E_{x_0,\theta_0}[x(T)^* L_{\theta(T)}x(T)]]$$

Agora, substituindo $E_{x_0,\theta_0}[x(T)^* L_{\theta(T)}x(T)]$ na fórmula de Dynkin (7.10), Proposição 51, obtemos

$$\mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) = E[E_{x_0,\theta_0}[\int_0^T (x(r)^* M_{\theta(r)}x(r) + x(r)^* J_{\theta(r)}^* J_{\theta(r)}x(r) - x(r)^* J_{\theta(r)}^* q(r)$$

$$+q(r)^* q(r) - q(r)^* J_{\theta(r)}x(r) - \delta^2 w(r)^* w(r))dr]$$

$$+E_{x_0,\theta_0}[\int_0^T (x(r)^*[-M_{\theta(r)} + (K_{\theta(r)}^{T-r})^* K_{\theta(r)}^{T-r} - (G_{\theta(r)}^{T-r})^* G_{\theta(r)}^{T-r}]x(r)$$

$$-x(r)^* J_{\theta(r)}^* K_{\theta(r)}^{T-r} x(r) - x(r)^* (K_{\theta(r)}^{T-r})^* J_{\theta(r)}x(r)$$

$$+q(r)^* K_{\theta(r)}^{T-r} x(r) + x(r)^* (K_{\theta(r)}^{T-r})^* q(r)$$

$$+w(r)^* \delta G_{\theta(r)}^{T-r} x(r) + x(r)^* \delta (G_{\theta(r)}^{T-r})^* w(r))dr] + x(0)^* P_{\theta(0)}^T x(0)]$$

$$= E[E_{x_0,\theta_0}[\int_0^T (x(r)^* J_{\theta(r)}^* J_{\theta(r)}x(r) - x(r)^* J_{\theta(r)}^* K_{\theta(r)}^{T-r} x(r)$$

$$+x(r)^* \left(K_{\theta(r)}^{T-r}\right)^* K_{\theta(r)}^{T-r} x(r) - x(r)^* \left(K_{\theta(r)}^{T-r}\right)^* J_{\theta(r)}x(r)$$

$$-x(r)^* \left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right)^* q(r) - q(r)^* \left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right) x(r)$$

$$+q(r)^* q(r) - \delta^2 w(r)^* w(r) - x(r)^* \left(G_{\theta(r)}^{T-r}\right)^* G_{\theta(r)}^{T-r} x(r)$$

$$+w(r)^* \delta G_{\theta(r)}^{T-r}\ x(r) + x(r)^* \delta \left(G_{\theta(r)}^{T-r}\right)^* w(r))dr]$$

$$+E_{x_0,\theta_0}[x(0)^* P_{\theta(0)}^T x(0)]]$$

$$= E[E_{x_0,\theta_0}[\int_0^T \left(\left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right) x(r)\right)^* \left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right) x(r)$$

$$-\left(\left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right) x(r)\right)^* q(r) - q(r)^* \left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right) x(r)$$

$$+q(r)^* q(r) - \delta^2 w(r)^* w(r) - \left(G_{\theta(r)}^{T-r} x(r)\right)^* G_{\theta(r)}^{T-r} x(r)$$

$$+w(r)^* \delta G_{\theta(r)}^{T-r}\ x(r) + \delta \left(G_{\theta(r)}^{T-r} x(r)\right)^* w(r)]\ dr$$

$$+E_{x_0,\theta_0}[x(0)^* P_{\theta(0)}^T x(0)]]$$

$$= E[\int_0^T E_{x_0,\theta_0}(\left\| -\left(J_{\theta(r)} - K_{\theta(r)}^{T-r}\right) x(r) + q(r) \right\|^2$$
$$-\delta^2 \left\| w(r) - \tfrac{1}{\delta} G_{\theta(r)}^{T-r} x(r) \right\|^2 )dr] + E\left(x_0^* P_{\theta_0}^T x_0\right).$$

■

**Corolário 53** *Considere $\theta_0 \in \Theta_0$ fixo. Suponhamos $(C, A, \Lambda)$ estocasticamente detectável. Suponhamos ainda que existe $K = (K_1, K_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ tal que $K$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$ e que $\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} \|Z_K^0(\theta_0, \cdot)\| < \delta$, para algum $\delta > 0$. Então, para cada $T > 0$ o operador $\widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0)$ definido em (7.16) é dado por*

$$\widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) = \mathcal{J}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T, \widehat{q}^T) = E\left(x_0^* P_{\theta_0}^T x_0\right) \tag{7.18}$$

*onde*

$$\widehat{w}^T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} G_{\theta(t)}^{T-t}\, \widehat{x}^T(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{7.19}$$

$$\widehat{q}^T(t) = \begin{cases} \left(J_{\theta(t)} - K_{\theta(t)}^{T-t}\right) \widehat{x}^T(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{7.20}$$

*e*

$$\widehat{x}^T = X_J(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T, \widehat{q}^T). \tag{7.21}$$

**Prova.** Segue imediatamente da Proposição 52. ■

# Capítulo 8

# Aspectos do Cenário em Horizonte Infinito

## 8.1 Introdução

A seção 8.2, consiste basicamente na solução do seguinte problema minimax:

$$\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) = \sup_{w \in \mathcal{C}^p} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q). \tag{8.1}$$

O Lema 42 constitui-se na ferramenta principal na solução do problema minimax acima.

Na seção 8.3, a partir da solução de (8.1), definimos uma sequência de matrizes $P = (P_1, P_2, ...)$. Definimos "uma solução positiva semidefinida da ICARE" e mostramos que $P = (P_1, P_2, ...)$ acima satisfaz esta propriedade e além disso $P$ é limite (quando T tende a infinito) da única solução da equação diferencial de Riccati (7.2).

## 8.2 O Operador Custo e o Problema *minimax*

Nesta seção mostramos existência e unicidade de $\widehat{w} \in \mathcal{C}^p$, $\widehat{q} \in \mathcal{C}^m$ tais que

$$\sup_{w \in \mathcal{C}^p} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q) = \mathcal{J}(\theta_0, x_0, \widehat{w}, \widehat{q}).$$

A estratégia para resolver este problema consiste em desmembrá-lo nas Proposições 54 e 55. Neste sentido, resolveremos primeiramente o problema de minimização.

**Proposição 54** *Considere $\theta_0 \in \Theta_0$ fixo e $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$. Suponhamos $(C, A, \Lambda)$ estocasticamente detectável e $(A, B, \Lambda)$ estocasticamente estabilizável. Então existe*

$Q : \mathcal{C}^p \to \mathcal{C}^m$ *tal que* $Q \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^p, \mathcal{C}^m]$. *Além disso,*

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, w) = \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q) = \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, \widetilde{q}) \tag{8.2}$$

*onde* $\widetilde{q} = Q(w)$.

**Prova.** Por (4.9) o operador $\mathcal{J}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q) &= \int_0^\infty E[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(t)\right\|^2]dt \\
&= \left\|Z_J(\theta_0, x_0, w, q)\right\|_2^2 - \delta^2 \left\|w\right\|_2^2 \\
&= \langle Z_J(\theta_0, x_0, w, q), Z_J(\theta_0, x_0, w, q)\rangle - \delta^2 \langle w, w\rangle \\
&= \langle Z_J^* Z_J(\theta_0, x_0, w, q); (x_0, w, q)\rangle - \left\langle (0, \delta^2 w, 0); (x_0, w, q)\right\rangle \\
&= \left\langle (Z_J^* Z_J(\theta_0, x_0, w, q) - (0, \delta^2 w, 0)); (x_0, w, q)\right\rangle \\
&= \langle \mathcal{Z}((\theta_0, x_0, w, q); (x_0, w, q)\rangle
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Z}(\theta_0, x_0, w, q) = Z_J^* Z_J(\theta_0, x_0, w, q) - (0, \delta^2 w, 0).$$

Definamos agora $\mathcal{M}_0 = \{(0, 0, q) \in \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m\}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$ com $m = (x_0, w, 0) \in \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m$.

$$\begin{aligned}
\inf_{\zeta \in \mathcal{M}_0} \left\{\frac{< \mathcal{Z}\zeta, \zeta >}{< \zeta, \zeta >}\right\} &= \inf_{(0,0,q) \in \mathcal{M}_0} \left\{\frac{\langle \mathcal{Z}(0, 0, q); (0, 0, q)\rangle}{< (0, 0, q); (0, 0, q) >}\right\} \\
&= \inf_{(0,0,q) \in \mathcal{M}_0} \left\{\frac{\langle Z_J^* Z_J(0, 0, q); (0, 0, q)\rangle}{< (0, 0, q); (0, 0, q) >}\right\} \\
&= \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \left\{\frac{\left\|Z_J(\theta_0, 0, 0, q)\right\|_2^2}{\left\|q\right\|_2^2}\right\} \\
&= \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \left\{\frac{\int_0^\infty E[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2]dt}{\left\|q\right\|_2^2}\right\} \\
&= \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \left\{\frac{\int_0^\infty [\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|_2^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|_2^2]dt}{\left\|q\right\|_2^2}\right\} \\
&\geq \alpha > 0 \text{ pelo Lema 64.}
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o Lema 40, temos que para cada $\theta_0 \in \Theta_0$ existe um único elemento $\widetilde{\zeta} \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, \widehat{q}) = \inf_{\zeta \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(x_0, \zeta)$, onde $\widetilde{\zeta} = p + m$, com $\mathcal{M}_0 \ni p = \mathcal{Q}'(\theta_0, m)$, para algum $\mathcal{Q}'(.) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p \times \mathcal{C}^m]$. Portanto $\mathcal{M}_0 \ni p = \mathcal{Q}'(\theta_0, m) = \mathcal{Q}'(\theta_0, x_0, w, 0) = (0, 0, \widehat{q})$ e para algum $\mathcal{Q} \in \mathbb{B}[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p, \mathcal{C}^m]$, $\widehat{q} = \mathcal{Q}(\theta_0, x_0, w)$. ■

Antes de atacarmos o problema de maximização, definiremos alguns operadores auxiliares que serão usados na prova da Proposição 55. Para facilitar a notação destes operadores, denotaremos por $\overline{K}$ o estabilizador de $(A, B, \Lambda)$. Para $\theta_0 \in \Theta_0$ fixo, $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$, definimos os operadores $\widetilde{X}(\theta_0, .)$, $\overline{X}(\theta_0, .)$ em $\mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p, \mathcal{C}^n\right]$ e $\widetilde{Z}(\theta_0, .)$, $\overline{Z}(\theta_0, .)$ em $\mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p, \mathcal{C}^r\right]$ por:

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(\theta_0, x_0, w) &= X_J(\theta_0, x_0, w, Q(\theta_0, x_0, w)) \\ \overline{X}(\theta_0, x_0, w) &= X_{\overline{K}}(\theta_0, x_0, w, 0) \\ \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w) &= Z_J(\theta_0, x_0, w, Q(\theta_0, x_0, w)) \\ \overline{Z}(\theta_0, x_0, w) &= Z_{\overline{K}}(\theta_0, x_0, w, 0) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Passemos agora para o problema de maximização.

**Proposição 55** *Considere $\theta_0 \in \Theta_0$ fixo. Para cada $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$, suponhamos que $(C, A, \Lambda)$ é estocasticamente detectável e que existe um controlador $\overline{K} = (\overline{K}_1, \overline{K}_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ tal que $\overline{K}$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$ e além disso, para algum $\delta > 0$, $\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} \left\| Z_{\overline{K}}^0(\theta_0, \cdot) \right\| < \delta$. Então existe um único elemento $\widehat{w} \in \mathcal{C}^p$ tal que*

$$\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) = \sup_{w \in \mathcal{C}^p} \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, w) = \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}) \tag{8.4}$$

*Além disso, para algum $\mathcal{W}(\theta_0, .) \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n, \mathcal{C}^p\right]$, $\widehat{w} = \mathcal{W}(\theta_0, x_0)$.*

**Prova.** Usando a notação acima, a Proposição 54 nos garante que para qualquer $q \in \mathcal{C}^m$ e todo $(x_0, w) \in \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p$, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, w) = \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, \widehat{q}) &= \left\| Z_J(\theta_0, x_0, w, \widehat{q}) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \\ &= \left\| \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \\ &\leq \left\| Z_J(\theta_0, x_0, w, q) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 = \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q). \end{aligned}$$

Lembrando que

$$z(t) = C_{\theta(t)} x(t) + N_{\theta(t)} u(t) = C_{\theta(t)} x(t) + N_{\theta(t)}(-J_{\theta(t)} x(t) + q(t)),$$

se escolhermos $q$ como, $q(t) = \left(J_{\theta(t)} - \overline{K}_{\theta(t)}\right) x(t),\ t > 0$ teremos,

$$z(t) = C_{\theta(t)} x(t) - N_{\theta(t)} \overline{K}_{\theta(t)} x(t).$$

logo,

$$\left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w)\right\|_2^2 - \delta^2 \|w\|_2^2 \leq \left\|\overline{Z}(\theta_0, x_0, w)\right\|_2^2 - \delta^2 \|w\|_2^2 \tag{8.5}$$

mas por hipótese, $\underset{\theta_0 \in \Theta_0}{sup} \left\|Z_{\overline{K}}^0(\theta_0, \cdot)\right\| < \delta$ para algum $\delta > 0$. Então existe $\alpha > 0$ tal que para todo $w \in \mathcal{C}^p$, $w \neq 0$,

$$\underset{\theta_0 \in \Theta_0}{sup} \left\{ \frac{\left\|Z_{\overline{K}}^0(\theta_0, w)\right\|_2^2}{\|w\|_2^2} \right\} < \delta^2 - \alpha^2 \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|Z_{\overline{K}}^0(\theta_0, w)\right\|_2^2 < \delta^2 \|w\|_2^2 - \alpha^2 \|w\|_2^2 \\
&\alpha^2 \|w\|_2^2 < \delta^2 \|w\|_2^2 - \left\|Z_{\overline{K}}^0(\theta_0, w)\right\|_2^2 = \delta^2 \|w\|_2^2 - \left\|\overline{Z}(\theta_0, 0, w)\right\|_2^2 \\
&\leq \delta^2 \|w\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, 0, w)\right\|_2^2
\end{aligned} \tag{8.7}$$

então,

$$\alpha^2 < \frac{\delta^2 \|w\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, 0, w)\right\|_2^2}{\|w\|_2^2} \tag{8.8}$$

Logo, para $w \neq 0$

$$0 < \alpha^2 \leq \inf_{w \in \mathcal{C}^p} \left\{ \frac{\delta^2 \|w\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, 0, w)\right\|_2^2}{\|w\|_2^2} \right\} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, w) &= \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w)\right\|_2^2 - \delta^2 \|w\|_2^2 \\
&= \left\langle \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w) \right\rangle - \delta^2 \langle w, w \rangle \\
&= \left\langle \widetilde{Z}^* \widetilde{Z}(x_0, w); (x_0, w) \right\rangle - \langle (0, \delta^2 w); (x_0, w) \rangle \\
&= \left\langle (\widetilde{Z}^* \widetilde{Z}(x_0, w) - (0, \delta^2 w)); (x_0, w) \right\rangle = \langle \mathcal{Z}(x_0, w); (x_0, w) \rangle
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Z}(x_0, w) = \widetilde{Z}^* \widetilde{Z}(x_0, w) - (0, \delta^2 w). \tag{8.10}$$

Claramente $\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p$ é um espaço de Hilbert e também $\mathcal{Z} \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p\right]$ com $\mathcal{Z}(\theta_0, \cdot)$ autoadjunto para todo $\theta_0 \in \Theta_0$ (O fato de $\widetilde{Z}$ ser limitado implica que $\mathcal{Z}$ também é limitado). Defina agora $\mathcal{M}_0 = \{(0, w) \in \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p\}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$ com $m =$

$(x_0,0) \in \mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p$. Observe que $\mathcal{M}_0$ é um subespaço fechado de $\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p$ e $\mathcal{M}$ é apenas uma translação de $\mathcal{M}_0$ pelo elemento $m$. Temos de (8.9) e (8.10) que

$$
\begin{aligned}
\inf_{\zeta \in \mathcal{M}_0} \left\{ \frac{-<\mathcal{Z}\zeta,\zeta>}{<\zeta,\zeta>} \right\} &= \inf_{(0,w)\in\mathcal{M}_0} \left\{ \frac{-\left\langle \widetilde{Z}^*\widetilde{Z}(0,w) - (0,\delta^2 w);(0,w)\right\rangle}{<(0,w),(0,w)>} \right\} \\
&= \underset{w\in\mathcal{C}^p}{inf} \left\{ -\frac{\left\|\widetilde{Z}(0,w)\right\|_2^2 - \delta^2\|w\|_2^2}{\|w\|_2^2} \right\} \\
&= \underset{w\in\mathcal{C}^p}{inf} \left\{ \frac{\delta^2\|w\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(0,w)\right\|_2^2}{\|w\|_2^2} \right\} \geq \alpha^2 > 0
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando o Lema 40, para cada $\theta_0 \in \Theta_0$ existe um único elemento $\widehat{m} \in \mathcal{M}$ tal que $-\widetilde{\mathcal{J}}(\widehat{m}) = \inf_{(x_0,w)\in\mathcal{M}} -\widetilde{\mathcal{J}}(x_0,w)$, onde $\widehat{m} = p + m$, com $p = \mathcal{W}'(m)$, para algum $\mathcal{W}'(.) \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n \times \mathcal{C}^p\right]$. Portanto, $\mathcal{M}_0 \ni p = \mathcal{W}'(m) = \mathcal{W}'(x_0,0) = (0,\widehat{w})$ e para algum $\mathcal{W} \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n, \mathcal{C}^p\right]$, $\widehat{w} = \mathcal{W}(x_0) = \mathcal{W}(\theta_0,x_0)$. ∎

## 8.3 A ICARE e suas Propriedades

Com o problema minimax (8.1) resolvido na seção 8.2, temos das Proposições 52 e 53 que para cada $\theta_0 \in \Theta_0$, $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$ existem $\widehat{w} \in \mathcal{C}^p$ e $\widehat{q} \in \mathcal{C}^m$ tais que

$$
\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0) = \sup_{w\in\mathcal{C}^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0,x_0,w,q) = \mathcal{J}(\theta_0,x_0,\widehat{w},\widehat{q}) \tag{8.11}
$$

Nosso objetivo agora é determinar uma sequência infinita de matrizes $P = (P_1, P_2, ...)$ a partir do operador (8.11). Neste intuito definiremos ainda mais alguns operadores lineares limitados como segue. Para qualquer $\theta_0 \in \Theta_0$ fixo definimos

$$
\widehat{X}(\theta_0,.) \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n, \mathcal{C}^n\right] \quad \text{e} \quad \widehat{Z}(\theta_0,.) \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n, \mathcal{C}^r\right] \tag{8.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}(\theta_0,x_0) &= \widetilde{X}(\theta_0,x_0,\mathcal{W}(\theta_0,x_0)) \\
&= X_J(\theta_0,x_0,\mathcal{W}(\theta_0,x_0),Q(\theta_0,x_0,\mathcal{W}(\theta_0,x_0))) \\
&= X_J(\theta_0,x_0,\widehat{w},\widehat{q}) = \widehat{x} \qquad (8.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{Z}(\theta_0, x_0) &= \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \mathcal{W}(\theta_0, x_0)) \\
&= Z_J(\theta_0, x_0, \mathcal{W}(\theta_0, x_0), Q(\theta_0, x_0, \mathcal{W}(\theta_0, x_0))) \\
&= Z_J(\theta_0, x_0, \widehat{w}, \widehat{q}) = \widehat{z} \qquad (8.14)
\end{aligned}
$$

Tendo em vista (8.11) e (8.14), podemos notar

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) &= \mathcal{J}(\theta_0, x_0, \widehat{w}, \widehat{q}) \\
&= \|Z_J(\theta_0, x_0, \mathcal{W}(\theta_0, x_0), \widehat{q})\|_2^2 - \delta^2 \|\mathcal{W}(\theta_0, x_0)\|_2^2 \\
&= \left\|\widehat{Z}(\theta_0, x_0)\right\|_2^2 - \delta^2 \|\mathcal{W}(\theta_0, x_0)\|_2^2 \\
&= \left\langle \widehat{Z}(\theta_0, x_0), \widehat{Z}(\theta_0, x_0)\right\rangle - \delta^2 \langle \mathcal{W}(\theta_0, x_0), \mathcal{W}(\theta_0, x_0))\rangle \\
&= \left\langle (\widehat{Z}^*\widehat{Z}(\theta_0, x_0); x_0\right\rangle - \delta^2 \langle \mathcal{W}^*\mathcal{W}(\theta_0, x_0); x_0\rangle \\
&= \left\langle (\widehat{Z}^*\widehat{Z} - \delta^2\mathcal{W}^*\mathcal{W})(\theta_0, x_0); x_0\right\rangle = \langle \mathcal{A}(\theta_0, x_0); x_0\rangle
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{A}(\theta_0, \cdot) \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}_0^n\right]$ é definido por

$$
\mathcal{A}(\theta_0, \cdot) = (\widehat{Z}^*\widehat{Z} - \delta^2\mathcal{W}^*\mathcal{W})(\theta_0, \cdot).
$$

Para qualquer $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$, afirmamos que $\mathcal{A}(\theta_0, \cdot) \geq 0$. Realmente, para qualquer $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$ temos que

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) &= \sup_{w\in\mathcal{C}^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q) \\
&= \sup_{w\in\mathcal{C}^p} \left\{ \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, w)\right\|_2^2 - \delta^2 \|w\|_2^2 \right\} \\
&\geq \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, 0)\right\|_2^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Agora, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$, podemos definir $P = (P_1, P_2, ...)$ com $P_i \in \mathbb{B}\left[\mathbb{C}^n\right]$, $P_i \geq 0$ e tal que

$$
P_i x_0 = E[\mathcal{A}(i, x_0)]. \qquad (8.15)
$$

Podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{J}}(i, x_0) &= \langle \mathcal{A}(i, x_0); x_0\rangle = E[\langle \mathcal{A}(i, x_0); x_0\rangle] \\
&= \langle E[\mathcal{A}(i, x_0)]; x_0\rangle = \langle P_i x_0, x_0\rangle \\
&= x_0^* P_i x_0 \geq 0.
\end{aligned}
$$

**Definição 56** *Diremos que* $P = (P_1, P_2, ...)$ *é uma solução positiva semidefinida da ICARE se e somente se* $P \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *e satisfaz a ICARE*

$$\mathcal{T}(P) = 0 \tag{8.16}$$

*onde* $\mathcal{T}$ *está definido em (7.1).*

Observe que

$$\widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) = \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T}} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}^T(\theta_0, x_0, w, q) = \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T}} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}(\theta_0, x_0, w, q).$$

Veremos a seguir que P definida em(8.15) é uma solução positiva definida da ICARE.

**Proposição 57** *Suponha que* $(A, B, \Lambda)$ *é SS e que* $(C, A, \Lambda)$ *é SD. Então, para* $L = 0 \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *e para cada* $i \in \mathbb{N}$*, o valor* $P_i^T(0)$ *da única solução* $P^T(t) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$*,* $t \in [0, T]$ *de (7.2), converge para* $P_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ *definido em (8.15) quando* $T \to \infty$*. Além disso,* $P = (P_1, P_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *e satisfaz a ICARE (8.16).*

**Prova.** Temos da Proposição 48 que existe uma única solução da equação diferencial de Riccati (7.2) para $T \in [0, \infty)$ e $L = 0 \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. Para $x_0 \in \mathbb{C}^n$ arbitrário, $\theta_0 = i \in \mathbb{N}$, com horizonte de tempo $T_1 < T_2 \in (0, \infty)$ e condições terminais $P^{T_1}(T_1) = P^{T_2}(T_2) = L = 0$ e considerando $\widetilde{q}$ definido na Proposição 54, temos que

$$\begin{aligned}
& x_0^* P_i^{T_2}(0) x_0 = \widehat{\mathcal{J}}^{T_2}(i, x_0) \\
&= \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T_2}} \inf_{q \in \mathcal{C}^m} \mathcal{J}^{T_2}(i, x_0, w, q) = \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T_2}} \widetilde{\mathcal{J}}^{T_2}(i, x_0, w) \\
&= \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T_2}} \left\{ \int_0^{T_2} \left( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 \right) dt \right\} \\
&= \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T_2}} \left\{ \int_0^{T_1} ( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 ) dt \right. \\
&\qquad \left. + \int_{T_1}^{T_2} ( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 ) dt \right\} \\
&\geq \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T_1}} \left\{ \int_0^{T_1} ( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 ) dt \right. \\
&\qquad \left. + \int_{T_1}^{T_2} ( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 ) dt \right\} \\
&= \sup_{w \in \mathcal{C}^{p,T_1}} \left\{ \int_0^{T_1} ( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2 ) dt \right. \\
&\qquad \left. + \int_{T_1}^{T_2} ( \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 ) dt \right\}
\end{aligned}$$

$$\geq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T_1}} \left\{ \int_0^{T_1} (\left\| C_{\theta(t)}x(t) \right\|_2^2 + \left\| -J_{\theta(t)}x(t) + \widetilde{q}(t) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|_2^2) dt \right\}$$

$$= \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T_1}} \widetilde{\mathcal{J}}^{T_1}(\theta_0, x_0, w) = \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T_1}} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \mathcal{J}^{T_1}(\theta_0, x_0, w, q)$$

$$= \widehat{\mathcal{J}}^{T_1}(i, x_0) = x_0^* P_i^{T_1}(0) x_0 \geq 0$$

mostrando que para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$, se $0 < T_1 < T_2$ então, para todo $i \in \mathbb{N}$, vale

$$0 \leq P_i^{T_1}(0) \leq P_i^{T_2}(0) \tag{8.17}$$

Tendo em vista que $\overline{K}$ estabiliza o sistema $(A, B, \Lambda)$, da prova da Proposição 45 vemos que para algum $c > 0$, $\left\| \overline{Z}(i, x_0, 0) \right\|_2 \leq c \left\| x_0 \right\|_2$, independente de $i$. Aplicando (8.5) na primeira inequação e (8.7) na quarta inequação, obtemos

$$\begin{aligned}
x_0^* P_i^T(0) x_0 &= x_0^* P_i^T x_0 = \widehat{\mathcal{J}}^T(i, x_0) \\
&= \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \widetilde{\mathcal{J}}^T(i, x_0, w) = \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \left\{ \left\| \widetilde{Z}(i, x_0, w) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \right\} \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \left\{ \left\| \overline{Z}(i, x_0, w) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \right\} \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \left\{ \left\| \overline{Z}(i, x_0, 0) + \overline{Z}(i, 0, w) \right\|_2^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \right\} \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \{ (\left\| \overline{Z}(i, x_0, 0) \right\|_2 + \left\| \overline{Z}(i, 0, w) \right\|_2)^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \} \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \left\{ (\left\| \overline{Z}(i, x_0, 0) \right\|_2 + \sqrt{\delta^2 - \alpha^2} \left\| w \right\|_2)^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \right\} \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \left\{ (c \left\| x_0 \right\|_2 + \sqrt{\delta^2 - \alpha^2} \left\| w \right\|_2)^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \right\}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}
\left\| P^T \right\|_\infty &= \sup_{i\in\mathbb{N}} \left\| P_i^T \right\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\left\| x_0 \right\| = 1} \left\{ x_0^* P_i^T x_0 \right\} \\
&\leq \sup_{w\in\mathcal{C}^{p,T}} \left\{ (c + \sqrt{\delta^2 - \alpha^2} \left\| w \right\|_2)^2 - \delta^2 \left\| w \right\|_2^2 \right\} \\
&= \sup_a \left\{ (c + \sqrt{\delta^2 - \alpha^2} a)^2 - \delta^2 a^2 \right\} < \infty
\end{aligned}$$

o que implica que $P^T \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ para todo $T \geq 0$. Como $\left\| P^T \right\|_\infty < \infty$, existe $d > 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$, $x_0^* P_i^T(0) x_0 \leq d \left\| x_0 \right\|^2 = x_0^* d I x_0$, logo

$$P_i^T(0) = P_i^T \leq dI. \tag{8.19}$$

Levando em consideração as desigualdades (8.19) e (8.17), podemos aplicar o Lema 67 do Apêndice e obter que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$, $P_i^T(0)$ converge para $P_i(0)$

quando $T \to \infty$. Provaremos agora que $P_i^T(a) \to P_i$ quando $T \to \infty$ para qualquer condição inicial de tempo $t = a$.

Tendo em vista a Proposição 48 e o Lema 7.10 em [47], fixando arbitrariamente $a > 0$ e $T \in (a, \infty)$, sejam $P^T(t)$, $t \in [0, T]$, solução de

$$\begin{cases} \dot{P}^T(t) + \mathcal{T}(P^T(t)) = 0, & t \in (0, T) \\ P^T(T) = 0 \end{cases} \tag{8.20}$$

e $P^{T,-a}(t), \quad t \in [-a, T-a]$, solução de

$$\begin{cases} \dot{P}^{T,-a}(t) + \mathcal{T}(P^{T,-a}(t)) = 0, & t \in (-a, T-a) \\ P^{T,-a}(T-a) = 0 \end{cases} \tag{8.21}$$

Como $P_i^T(0) \to P_i$ quando $T \to \infty$, temos que $P_i^{T-a}(0) \to P_i$ quando $T \to \infty$. Renomeando $T$ por $T - a$ em (8.20), obtemos

$$P_i^{T,-a}(t) = P_i^{T-a}(t), t \in [0, T-a] \tag{8.22}$$

assim $P_i^{T,-a}(0) \to P_i$ quando $T \to \infty$. Agora, do Lema 7.10 em [47], temos que

$$P_i^T(a) = P_i^{T,-a}(0), \ i \in \mathbb{N} \tag{8.23}$$

Reescrevendo (8.17) e (8.19) como $0 \leqslant P_i^{T_1-a}(0) \leqslant P_i^{T_2-a}(0)$ e $P_i^{T-a}(0) \leqslant dI$, respectivamente, considerando (8.22) e (8.23), obtemos

$$0 \leqslant P_i^{T_1}(a) \leqslant P_i^{T_2}(a) \ \text{ e } \ P^T(a) \leqslant dI \tag{8.24}$$

para todo $T, T_1, T_2 \in (a, \infty)$, $T_1 < T_2$ e $i \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lim_{T\to\infty} P_i^T(a) = P_i \quad , i \in \mathbb{N} \tag{8.25}$$

Ou,

Definamos $\varphi^T \in \mathbb{B}\left[\mathcal{C}^p, \mathcal{C}^{p,T}\right]$ por $\varphi^T(w) = w^T \in \mathcal{C}^{p,T}$, para todo $w \in \mathcal{C}^p$ , onde

$$w^T(t) := \begin{cases} w(t) & \text{se } \ t \in [0, T] \\ 0 & \text{se } t > T \end{cases} .$$

De (8.4), Proposição 55 e (7.16), obtemos

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \varphi^T(\mathcal{W}(\theta_0, x_0))) \leq \widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) \leq \widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0)$$

Como $\varphi^T(\mathcal{W}(\theta_0, x_0)) \to \mathcal{W}(\theta_0, x_0)$ quando $T \to \infty$, obtemos pela continuidade de $\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, .)$ que

$$\widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) \to \widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) \qquad \text{quando } T \to \infty \tag{8.26}$$

então,

$$x_0^* P_i^T x_0 = \widehat{\mathcal{J}}^T(i, x_0) \uparrow \widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) = x_0^* P_i x_0 \quad \text{quando} \quad T \to \infty$$

com $P_i$ definido em (8.15). Pela unicidade do limite, para cada $i \in \mathbb{N}$, $P_i^T$ converge para $P_i$ e $P^T \to P$ quando $T \to \infty$.

Além disso, por (8.19) temos que $\left\|P^T\right\|_\infty \leq d$, para todo $T \geq 0$ o que implica $\|P\|_\infty \leq d$, completando a prova de que $P \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$.

Finalmente mostremos que $P$ satisfaz a ICARE, ou seja, $\mathcal{T}(P) = 0$. Tendo em vista (8.24), (8.25) e o fato de $P = (P_1, P_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ , obtemos a partir do Lema 68 no Apêndice que

$$\lim_{T \to \infty} \mathcal{T}(P^T(a)) = \mathcal{T}(P). \tag{8.27}$$

Para $(0, T) \ni t \mapsto P^T(t)$, definimos o operador diferencial $\mathbf{D}$ por

$$P^T(\cdot) \mapsto \mathbf{D}P^T(\cdot) = \dot{P}^T(\cdot).$$

De (8.25) e como $a > 0$ é arbitrário, temos que $\lim_{T \to \infty} P^T(t) = P_i$, para $t \in (0, T)$. Como $P_i$ é uma função constante em t, obtemos

$$\lim_{T \to \infty} \dot{P}_i^T(t) = \lim_{T \to \infty} \mathbf{D}P_i^T(t) = \mathbf{D}(P_i) = 0, \quad i \in \mathbb{N}$$

Tomando $t = a$ na expressão acima e em (8.20), obtemos

$$\lim_{T \to \infty} \dot{P}^T(a) = 0 \tag{8.28}$$

e

$$\dot{P}^T(a) + \mathcal{T}(P^T(a)) = 0 \tag{8.29}$$

Passando o limite em (8.29) e tendo em vista (8.27) e (8.28), temos que

$$0 = \lim_{T \to \infty} \dot{P}^T(a) + \lim_{T \to \infty} \mathcal{T}(P^T(a)) = \mathcal{T}(P). \tag{8.30}$$

como desejávamos. ■

A Proposição 58 a seguir, nos mostra que a solução da equação diferencial de Riccati (7.2) converge para $P$ (definido em (8.15)), para qualquer condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$.

Para diferenciar do caso da Proposição 57 em que $L = 0$, optamos por denotar a solução da equação diferencial de Riccati por $\widetilde{P}^T(t)$.

**Proposição 56** *Suponha $(A, B, \Lambda)$ estocasticamente estabilizável e $(C, A, \Lambda)$ estocasticamente detectável. Então, qualquer que seja a condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, o valor $\widetilde{P}_i^T(0) = \widetilde{P}_i^T$ da única solução $\widetilde{P}^T(t) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, $t \in [0,T]$ para (7.2), converge para $P_i(0) = P_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$(definido em (8.15)), quando $T \to \infty$. Além disso, $P(0) = P = (P_1, P_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e satisfaz a ICARE (8.16).*

**Prova.** A idéia da prova é recair no resultado da Proposição 55, ou seja mostrar que $\lim\limits_{T\mapsto\infty} \widetilde{P}_i^T(0) = P_i(0) = P_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$, onde $P = (P_1, P_2, ...)$ é a solução positiva semidefinida da ICARE (8.16) e $P^{T-t}(0) = P^T(t)$, $t \in [0,T]$ satisfaz (7.2) com condição terminal (inicial) nula.

$$x_0^*\widetilde{P}_i^T x_0 = \sup_{w\in\mathcal{C}_T^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \{\textstyle\int_0^T E(\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(t)\right\|^2)dt\}$$
$$+E[x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)]$$
$$\geq \sup_{w\in\mathcal{C}_T^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \left\{\int_0^T E\left(\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(t)\right\|^2\right) dt\right\}$$

então,

$$x_0^*\widetilde{P}_i^T x_0 = x_0^*\widetilde{P}_i^T(0)x_0 \geq x_0^* P_i^T(0)x_0 = x_0^* P_i^T x_0 \tag{8.31}$$

onde $P_i^T(0)$, $i \in \mathbb{N}$, está definido na Proposição 55.

Tomando o limite em ambos os lados de (8.31), temos que

$$\lim_{T\to\infty} x_0^*\widetilde{P}_i^T x_0 \geq \lim_{T\to\infty} x_0^* P_i^T x_0 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{w\in\mathcal{C}_T^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \{\textstyle\int_0^T E[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(t)\right\|^2]dt\} \right\}$$

$$= \sup_{w\in\mathcal{C}^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \left\{\int_0^\infty E\left(\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2 - \delta^2 \left\|w(t)\right\|^2\right) dt\right\}$$

$$= \widehat{\mathcal{J}}(i, x_0) = x_0^* P_i x_0.$$

Logo,

$$\lim_{T\to\infty} x_0^*\widetilde{P}_i^T x_0 \geq x_0^* P_i x_0. \tag{8.32}$$

Por outro lado, temos que

$$\lim_{T\to\infty} x_0^* \widetilde{P}_i^T x_0 = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{w\in\mathcal{C}_T^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \{ \int_0^T E \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + q(t) \right\|^2 \right.$$

$$\left. -\delta^2 \left\| w(t) \right\|^2 dt] \} + E[x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)] \right\}$$

$$= \sup_{w\in\mathcal{C}^p} \inf_{q\in\mathcal{C}^m} \left\{ \int_0^\infty E \left\| C_{\theta(t)} x(t) \right\|^2 + \left\| -J_{\theta(t)} x(t) + q(t) \right\|^2 - \delta^2 \left\| w(t) \right\|^2 dt] \right\}$$

$$+ \lim_{T\to\infty} E[x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)]$$

$$= \widehat{\mathcal{J}}(i, x_0) + \lim_{T\to\infty} E[\left\| x(T) L_{\theta(T)}^{\frac{1}{2}} \right\|^2]$$

$$\leq \widehat{\mathcal{J}}(i, x_0) + \lim_{T\to\infty} E[\left\| x(T) \right\|^2] \left\| L \right\|_\infty] \tag{8.33}$$

Como $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ , temos que $\|L\|_\infty < \infty$. Por outro lado, por hipótese, o sistema é SS, conseqüentemente o sistema também é M.S.S. (mean square stable), o que significa que $\lim_{T\to\infty} E[\|x(T)\|^2] = 0$. Então a expressão (8.33) acima se lê como

$$\lim_{T\to\infty} x_0^* \widetilde{P}_i^T x_0 \leq \widehat{\mathcal{J}}(i, x_0) = x_0^* P_i x_0. \tag{8.34}$$

Finalmente, de (8.32) e (8.34), obtemos que

$$\lim_{T\to\infty} x_0^* \widetilde{P}_i^T x_0 = x_0^* P_i x_0$$

implicando que para $x_0 \in \mathbb{C}^n$ arbitrário, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P}_i^T \to P_i$ quando $T \to \infty$.

Pela Proposição 55, temos que $P \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e satisfaz $\mathcal{T}(P) = 0$. ■

# Capítulo 9

# O Problema $H_\infty$ com saltos Markovianos

## 9.1 Introdução

Dividimos a prova do teorema 57 em dois Lemas, a saber: Lema 58, referente à parte da Suficiência e Lema 62, referente à necessidade, ambos provados nas subseções de mesmos nomes.

**Teorema 57** *Suponha* $(C, A, \Lambda)$ *estocasticamente detectável ( SD) e considere* $\delta > 0$ *fixado. Então existe* $K = (K_1, K_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ *, que estabiliza* $(A, B, \Lambda)$ *e é tal que*

$$\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} \left\| Z_K^0(\theta_0, \cdot) \right\| < \delta$$

*se e somente se existe* $P = (P_1, P_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n\,+}$ *satisfazendo:*

$$(i)\ M_i + (A_i - B_iK_i + \tfrac{1}{\delta}D_iG_i)^*P_i + P_i(A_i - B_iK_i + \tfrac{1}{\delta}D_iG_i) + K_i^*K_i - G_i^*G_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij}P_j = 0 \quad para\ todo\ \ i \in \mathbb{N}. \tag{9.1}$$

*onde*

$$\begin{aligned} K_i &= B_i^*P_i \\ G_i &= \frac{1}{\delta}D_i^*P_i \end{aligned}$$

*para todo* $i \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $sup\{\mathrm{Re}\,\lambda\ ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ *onde* $\mathcal{D}$ *está definido em (5.24), com* $F_i = A_i - B_iK_i + \frac{1}{\delta}D_iG_i$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

## 9.2 Suficiência

**Lema 60** *Suponha que as condições (i) e (ii) do Teorema 59 se verificam. Então $K$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$ e* $\sup\limits_{\theta_0 \in \Theta_0} \|Z_K^0(\theta_0, \cdot)\| < \delta$.

A prova do Lema 60 acima é conseqüência das Proposições 61, 62 e 63.

**Proposição 61** *Suponha que (i) e (ii) do teorema 59 se verificam. Então $K = (K_1, K_2, ...)$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$.*

**Prova.** Seja $\overset{\wedge}{F} = (\overset{\wedge}{F}_1, \overset{\wedge}{F}_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$ onde $\overset{\wedge}{F} = A_i - B_i K_i$ . Da condição (i) do teorema temos que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$M_i + (A_i - B_i K_i + \tfrac{1}{\delta} D_i G_i)^* P_i + P_i(A_i - B_i K_i + \tfrac{1}{\delta} D_i G_i) + K_i^* K_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} P_j - G_i^* G_i = 0$$

Rearranjando, podemos reescrever a expressão acima como

$$M_i + (A_i - B_i K_i)^* P_i + P_i(A_i - B_i K_i) + \tfrac{1}{\delta} G_i^* D_i^* P_i + \tfrac{1}{\delta} P_i D_i G_i + K_i^* K_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} P_j - G_i^* G_i = 0$$

Substituindo $\frac{1}{\delta} D_i^* P_i$ por $G_i$, a condição (i) do teorema se escreve

$$M_i + (A_i - B_i K_i)^* P_i + P_i(A_i - B_i K_i) + K_i^* K_i + G_i^* G_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} P_j = 0 \tag{9.2}$$

Lembrando que $M_i = C_i^* C_i$ e notando $\widehat{C}_i^* = [C_i^* \quad G_i^* \quad K_i^*]$ obtemos

$$\widehat{C}_i^* \, \widehat{C}_i = C_i^* C_i + G_i^* G_i + K_i^* K_i.$$

Então, a expressão (9.2) se lê

$$\widehat{C}_i^* \, \widehat{C}_i + \overset{\wedge}{F}_i P_i + P_i \overset{\wedge}{F}_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} P_j = 0. \tag{9.3}$$

Definindo $\widehat{H} = (\widehat{H}_1, \widehat{H}_2, ...)$, onde $\widehat{H}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\delta} D_i G_i & 0 \end{bmatrix}$ obtemos

$$\widehat{H}_i \widehat{C}_i = -\frac{1}{\delta} D_i G_i \quad e \quad \overset{\wedge}{F}_i - \widehat{H}_i \widehat{C}_i = F_i = A_i - B_i K_i + \frac{1}{\delta} D_i G_i.$$

Da hipótese (ii) do teorema temos que $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ onde $\mathcal{D}$ está definido em (5.23) e (5.24), com $F_i = A_i - B_i K_i + \frac{1}{\delta} D_i G_i$. Pelo Lema 39, $\widehat{H}$ estabiliza

$(\widehat{C},\widehat{F})$ e o sistema $(\widehat{C},\widehat{F})$ é SD. Tendo em vista a Observação 37, por uma pequena modificação na proposição 6.10 em [47] temos que $\widetilde{K}=0$ estabiliza o sistema $(\widehat{F},\, B)$, i.e,

$$\dot{x}(t)=\widehat{F}_{\theta(t)}x(t)=\left(A_{\theta(t)}-B_{\theta(t)}K_{\theta(t)}\right)x(t)$$

então $K$ estabiliza $(A,B,\Lambda)$. ■

Para facilitar a notação, para qualquer $\theta_0\in\Theta_0$ e $w\in\mathcal{C}^p$, denotaremos $x=X_K^0(\theta_0,w)$ e $z=Z_K^0(\theta_0,w)$.

**Proposição 62** *Suponha que (i) e (ii) do teorema se verificam, então*

$$\|z\|_2^2=\delta^2(\|w\|_2^2-\|r\|_2^2) \tag{9.4}$$

*onde* $r\in\mathcal{C}^p$ *está definido por*

$$r(t)=\frac{1}{\delta}G_{\theta(t)}x(t)-w(t) \tag{9.5}$$

**Prova.** Começamos por escrever $\|z(t)\|^2$ e $\|r(t)\|^2$.

$$\begin{aligned}\|z(t)\|^2&=\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2+\|u(t)\|^2=\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2+\left\|B^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}x(t)\right\|^2\\&=x(t)^*M_{\theta(t)}x(t)+x(t)^*P_{\theta(t)}B_{\theta(t)}B^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}x(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|r(t)\|^2&=\left\|\tfrac{1}{\delta}G_\theta(t)x(t)-w(t)\right\|^2=(\tfrac{1}{\delta}G_\theta(t)x(t)-w(t))^*\left(\tfrac{1}{\delta}G_\theta(t)x(t)-w(t)\right)\\&=\tfrac{1}{\delta^2}x(t)^*G^*_{\theta(t)}G_{\theta(t)}x(t)-\tfrac{1}{\delta}x(t)^*G^*_{\theta(t)}w(t)-\tfrac{1}{\delta}w(t)G_\theta(t)x(t)+w(t)^*w(t)\\&=\tfrac{1}{\delta^4}x(t)^*P_{\theta(t)}D_{\theta(t)}D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}x(t)-\tfrac{1}{\delta^2}x(t)^*P_{\theta(t)}D_{\theta(t)}w(t)\\&\quad-\tfrac{1}{\delta^2}w(t)^*D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}x(t)+\|w(t)\|^2\end{aligned}$$

Nesta última igualdade substituímos $G_{\theta(t)}$ por $\frac{1}{\delta}D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}$. Logo,

$$\begin{aligned}&-\|z(t)\|^2+\delta^2(\|w(t)\|^2-\|r(t)\|^2)=\\&=x(t)^*\left[-M_{\theta(t)}-P_{\theta(t)}B_{\theta(t)}B^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}-\tfrac{1}{\delta^2}P_{\theta(t)}D_{\theta(t)}D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}\right]x(t)\\&\qquad+w(t)^*D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}x(t)+x(t)^*P_{\theta(t)}D_{\theta(t)}w(t).\end{aligned}$$

Tomando $g(t, x(t), \theta(t)) = x(t)^* P_{\theta(t)} x(t)$, pela Observação 69 (expressão (11.16)), obtemos

$$(-\|z(t)\|^2 + \delta^2(\|w(t)\|^2 - \|r(t)\|^2) = (\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)).$$

Fixe $s = 0$ na fórmula de Dynkin (11.17). Lembrando que $x_0 = 0$, obtemos $x(0)^* P_{\theta_0} x(0) = 0$. Então,

$$E_{\theta_0, x_0}\left[\int_0^t (\mathcal{L}^u g)(y, x(y), \theta(y)) dy\right] = E_{\theta_0, x_0}\left[x(t)^* P_{\theta(t)} x(t)\right] = \left\|P_{\theta(t)}^{\frac{1}{2}} x(t)\right\|_2^2 \geq 0.$$

Por outro lado, uma vez que $K$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$, temos que

$$\left\|P_{\theta(t)}^{\frac{1}{2}} x(t)\right\|_2^2 \leq \|P\|_\infty \|x(t)\|_2^2 \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Então, aplicando o Teorema de Fubini e o teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \left(E_{\theta_0, x_0}\left[\int_0^t (\mathcal{L}^u g)(y, x(y), \theta(y)) dy\right]\right) \\ &= \int_0^\infty \left(-\|z(t)\|_2^2 + \delta^2(\|w(t)\|_2^2 - \|r(t)\|_2^2\right) dt \\ &= -\|z\|_2^2 + \delta^2(\|w\|_2^2 - \|r\|_2^2). \end{aligned}$$

■

Defina agora o operador $\widetilde{W}(\theta_0, \cdot) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^p]$ como:

$$\widetilde{W}(\theta_0, \cdot) = \frac{1}{\delta} G X_K^0(\theta_0, \cdot) - I \tag{9.6}$$

isto é, para todo $w \in \mathcal{C}^p$,

$$\widetilde{W}(\theta_0, w) = \widetilde{w}, \text{ onde } \widetilde{w}(t) = \frac{1}{\delta} G_{\theta(t)} x(t) - w(t)$$

qualquer que seja $t \in [0, \infty)$. Observe que pela Proposição 42, $\widetilde{W}$ é limitado.

Por simplicidade omitiremos a dependência de $\theta_0$ nos operadores na próxima Proposição, bem como na prova do Lema 58.

**Proposição 61** *Suponha que (i) e (ii) do Teorema 57 sejam satisfeitas. Então o operador $\widetilde{W}$ definido em (9.6) é inversível.*

**Prova.** Primeiramente definamos o operador $\widetilde{Y}$. Para qualquer $w \in \mathcal{C}^p$, $\widetilde{Y}(w) = \widetilde{y}$, onde

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{y}}(t) = (A_{\theta(t)} - B_{\theta(t)}K_{\theta(t)} + \frac{1}{\delta}D_{\theta(t)}G_{\theta(t)})\widetilde{y}(t) - D_{\theta(t)}w(t) \\ \widetilde{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Note que, pela condição (ii) do teorema 57, $sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \ ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ , temos da Proposição 42 que $\widetilde{Y}(w) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^p, \mathcal{C}^n]$ e $\left\|\widetilde{Y}(w)\right\| \leq \alpha$, para algum $\alpha \geq 0$ e todo $\theta_0 \in \Theta_0$. Considere o operador $\widetilde{W_{inv}}(\theta_0, \cdot) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^p]$ definido por

$$\widetilde{W_{inv}}(\theta_0, \cdot) = \frac{1}{\delta}G\widetilde{Y}(\theta_0, \cdot) - I \tag{9.7}$$

isto é, para todo $w \in \mathcal{C}^p$,

$$\widetilde{W_{inv}}(\theta_0, w) = \widetilde{s}, \text{ onde } \widetilde{s} = \frac{1}{\delta}G_{\theta(t)}\widetilde{y}(t) - w(t)$$

para todo $t \in [0, \infty)$. É fácil verificar que $\widetilde{Y}(w) = X_K^0(\widetilde{s})$ e $\widetilde{Y}(\widetilde{w}) = X_K^0(w)$. Podemos provar que o operador $\widetilde{W}$ é inversível e $\widetilde{W_{inv}}$ é sua inversa, i.e., $\widetilde{W}\widetilde{W_{inv}} = \widetilde{W_{inv}}\widetilde{W} = I$. De fato,

$$\widetilde{W}\widetilde{W_{inv}}(w) = \widetilde{W}(\widetilde{s}) = \frac{1}{\delta}GX_K^0(\widetilde{s}) - \widetilde{s} = \frac{1}{\delta}G\widetilde{Y}(w) - \left(\frac{1}{\delta}G\widetilde{Y}(w) - w\right) = w.$$

Da mesma forma,

$$\widetilde{W_{inv}}\widetilde{W}(w) = \widetilde{W_{inv}}(\widetilde{w}) = \frac{1}{\delta}G\widetilde{Y}(\widetilde{w}) - \widetilde{w} = \frac{1}{\delta}GX_K^0(w) - \left(\frac{1}{\delta}GX_K^0(w) - w\right) = w,$$

o que mostra que $\widetilde{W}^{-1} = \widetilde{W_{inv}} \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^p]$. ∎

**Prova. do Lema 58.**

A primeira parte, ou seja, que $K$ estabiliza $(A, B, \Lambda)$, foi provada na Proposição 59.

Para todo $w$ temos que $w = \widetilde{W}^{-1}\left(\widetilde{W}(w)\right)$, o que implica

$$\|w\|_2 = \left\|\widetilde{W}^{-1}(\widetilde{W}(w))\right\|_2 \leq \left\|\widetilde{W}^{-1}\right\| \left\|\widetilde{W}(w)\right\|_2$$

multiplicando ambos os membros da expressão acima por $\left\|\widetilde{W}^{-1}\right\|^{-1}$, vem

$$\left\|\widetilde{W}^{-1}\right\|^{-1} \|w\|_2 \leq \left\|\widetilde{W}(w)\right\|_2.$$

Considere agora $\alpha_1 > 1$ tal que $\left\|\widetilde{W}^{-1}\right\| \leq \alpha_1$ para todo $\theta_0 \in \Theta_0$. Então, para todo $w \in \mathcal{C}^p$ temos

$$\frac{1}{\alpha_1}\left\|w\right\|_2 \leq \left\|\widetilde{W}^{-1}\right\|^{-1}\left\|w\right\|_2 \leq \left\|\widetilde{W}(w)\right\|_2 \tag{9.8}$$

Assim,

$$\|r\|^2 = \int_0^\infty E\left[\left\|\tfrac{1}{\delta}G_\theta(t)x(t) - w(t)\right\|^2\right]dt = \int_0^\infty E\left[\left\|\widetilde{W}(w)(t)\right\|^2\right]dt$$

$$= \left\|\widetilde{W}(w)\right\|_2^2 \geq \tfrac{1}{(\alpha_1)^2}\left\|w\right\|_2^2 \tag{9.9}$$

e portanto, para todo $w \in \mathcal{C}^p$, $w \neq 0$, de (9.4) e (9.9) temos:

$$\|z\|_2^2 = \delta^2(\|w\|_2^2 - \|r\|_2^2) \leq \delta^2\left(\|w\|_2^2 - \frac{1}{\alpha_1^2}\|w\|_2^2\right) = \delta^2\left(1 - \frac{1}{\alpha_1^2}\right)\|w\|_2^2 < \delta^2\|w\|_2^2.$$

■

## 9.3 Necessidade

A parte de *necessidade* do Teorema 59, como já dissemos, será reescrita pelo Lema 64 e cuja prova está no fim desta Seção. Usaremos a notação $\overline{K}$ para o controlador $K$ como no Capítulo 8.

**Lema 64** *Suponhamos que* $(C, A, \Lambda)$ *seja estocasticamente detectável e que exista um controlador* $\overline{K} = (\overline{K}_1, \overline{K}_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ *tal que* $\overline{K}$ *estabiliza* $(A, B, \Lambda)$ *e além disso, para algum* $\delta > 0$, $\sup_{\theta_0 \in \Theta_0}\left\|Z_{\overline{K}}^0(\theta_0, \cdot)\right\| < \delta$. *Então existe* $P = (P_1, P_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

$$(i)\ M_i + (A_i - B_i\overline{K}_i + \tfrac{1}{\delta}D_iG_i)^*P_i + P_i(A_i - B_i\overline{K}_i + \tfrac{1}{\delta}D_iG_i) + \overline{K}_i^*\overline{K}_i - G_i^*G_i$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}P_j = 0 \ \ \textit{para todo} \ \ i \in \mathbb{N}.$$

*onde*

$$\begin{aligned} \overline{K}_i &= B_i^*P_i \\ G_i &= \frac{1}{\delta}D_i^*P_i \end{aligned}$$

*para todo* $i \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $sup\{\operatorname{Re}\lambda\ ;\lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$, *onde* $\mathcal{D}$ *está definido em (5.24), com* $F_i = A_i - B_i\overline{K}_i + \frac{1}{\delta}D_iG_i$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

**Prova.** Tendo em vista a Observação 67 no Apêndice, a afirmação *(i)* do Lema 62 foi provada na Proposição 56, seção 8.3 do capítulo 8. Temos que,

$$\widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) = \widetilde{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) = \sup_{w \in \mathcal{C}_T^p} \widetilde{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0, w)$$

$$\lim_{T\to\infty} \widehat{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0) = \lim_{T\to\infty} \widetilde{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{w \in \mathcal{C}_T^p} \widetilde{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0, w) \right\}$$

$$= \sup_{w \in \mathcal{C}^p} \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, w) = \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}) = \widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0) \tag{9.10}$$

Da unicidade de $\widehat{w}$ estabelecida na Proposição 53, e lembrando que $\widehat{w}^T$ é uma função maximizadora para $\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0)$, temos pelo Lema 71 do Apêndice que $\widehat{w}^T \to \widehat{w}$ quando $T \to \infty$.

Como $\widetilde{X}(\theta_0, x_0, .\,)$ é contínua, temos,

$$\widehat{x}^T = \widetilde{X}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) \to \widetilde{X}(\theta_0, x_0, \widehat{w}) = X_J(\theta_0, x_0, \widehat{w}, \widehat{q}) = \widehat{x}$$

quando $T \to \infty$, o que significa que $\widehat{x}^T \to \widehat{x}$ quando $T \to \infty$. Por outro lado, para $x_0 \in \mathcal{C}_0^n$, $\theta_0 \in \Theta_0$ fixado, como a função $Q(.)$ definida na Proposição 52 é contínua, então

$$\widehat{q}^T = Q(\theta_0, x_{0,}\widehat{w}^T) \to Q(\theta_0, x_{0,}\widehat{w}) = \widehat{q}$$

quando $T \to \infty$.

Vimos na prova da Proposição 55, que $\lim_{T\to\infty} P_{\theta(t)}^{T-t} = P_{\theta(t)}$, daí,

$$\lim_{T\to\infty} \overline{K}_{\theta(t)}^{T-t} = \lim_{T\to\infty} \left( B_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)}^{T-t} \right) = B_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)} = \overline{K}_{\theta(t)}$$

e

$$\lim_{T\to\infty} G_{\theta(t)}^{T-t} = \lim_{T\to\infty} \left( \frac{1}{\delta} D_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)}^{T-t} \right) = \frac{1}{\delta} D_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)} = G_{\theta(t)}$$

o que implica que

$$\widehat{q}^T(t) = \left( J_{\theta(t)} - \overline{K}_{\theta(t)}^{T-t} \right) \widehat{x}^T(t) \to \left( J_{\theta(t)} - \overline{K}_{\theta(t)} \right) \widehat{x}(t) = \widehat{q}(t) \tag{9.11}$$

$$\widehat{w}^T(t) = \frac{1}{\delta} G^{T-t}_{\theta(t)} \, \widehat{x}^T(t) \to \frac{1}{\delta} G_{\theta(t)} \, \widehat{x}(t) = \widehat{w}(t) \tag{9.12}$$

quando $T \to \infty$. ■

Temos que $\widehat{X}(\theta_0, x_0) = X_J(\theta_0, x_0, \widehat{w}, \widehat{q})$, se notarmos $\widehat{u}(t) = -J_{\theta(t)}\widehat{x}(t) + \widehat{q}(t)$, $\widehat{q}(t)$ como em (9.11), obtemos

$$\widehat{u}(t) = -\overline{K}_{\theta(t)}\widehat{x}(t) \tag{9.13}$$

Tendo em vista (9.12) e (9.13) temos que

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}}(t) = (A_{\theta(t)} - B_{\theta(t)}\overline{K}_{\theta(t)} + \frac{1}{\delta} D_{\theta(t)} G_{\theta(t)})\widehat{x}(t) \\ \widehat{x}(0) = x_0, \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

Como $\widehat{X}(\theta_0, .) \in \mathbb{B}(\mathcal{C}^n_0, \mathcal{C}^n)$, por (8.12), para quaisquer $x_0 \in \mathcal{C}^n_0$, $\theta_0 \in \Theta_0$, tem-se $\widehat{X}(\theta_0, x_0) \in \mathcal{C}^n$. Em outras palavras, $\int_0^\infty E\left[\|\widehat{x}(t)\|^2\right] dt < \infty$, pelo Corolário 44, $sup\{\mathrm{Re}\,\lambda \; ; \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$, com $\mathcal{D}$ definido em (5.24) e $F_i = A_i - B_i\overline{K}_i + \frac{1}{\delta} D_i G_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, como desejávamos.

# Capítulo 10

# Conclusões

Nesta tese estudamos o problema de controle $H_\infty$ para uma classe de sistemas lineares a tempo contínuo sujeitos a saltos Markovianos nos parâmetros, os MJLS. Obtivemos condições necessárias e suficientes para se obter um controlador que estabiliza o sistema no sentido estocástico (conforme definição 33) e garante que uma determinada norma induzida $L_2$ seja menor do que um valor pré-especificado.

Mostramos que determinada propriedade do espectro do operador linear limitado em espaços de Banach de dimensão infinita $\mathcal{D}$, dado em 5.23 e 5.24, implica na estabilidade do sistema, coincidindo com o caso sem ruído, tratado em [47].

Baseado nos conceitos de decomplexificação e Teoria de semigrupos, e, considerando a solução da equação diferencial de Riccati (que vimos numa versão *forward*), obtivemos as expressões para o operador infinitesimal $\mathcal{L}^u$ e para a fórmula de Dynkin, que foram importantíssimos tanto na prova de resultados da suficiência do principal resultado deste trabalho, Teorema 57, como na obtenção da expressão para o operador custo no caso horizonte finito. Vimos que a solução do problema *minimax* a horizonte finito coincidiu com o custo ótimo em [47].

No que concerne à continuação desse trabalho podemos pensar nas seguintes extensões:

*(i)* Analisar o caso robusto;

*(ii)* Analisar um cenário similar àquele encontrado em Hinrichsen e Pritchard [53], descrito no Capítulo 3.

# Capítulo 11

# Apêndice

## 11.1 Suporte para a prova da Proposição 42

**Lema 63** *Considere o sistema dado por (5.20) e considere $Q(t)$ dado por (5.21) e (5.22). Então,*

$$\|x(t)\|_2^2 \leq n \|Q(t)\|_1 .$$

**Prova.**

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_2^2 &= E[\|x(t)\|^2] = E[tr\,(x(t)(x(t)^*)] = E[tr\left(x(t)x(t)^*(\sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{\theta(t)=i\}})\right)] \\
&\leq E[\sum_{i=1}^{\infty} tr(x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}})] \leq \sum_{i=1}^{\infty} E[tr(x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}})] \\
&= tr\left(\sum_{i=1}^{\infty} E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}]\right) = tr\left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t)\right) \\
&\leq n\left\|\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t)\right\| \leq n\sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i(t)\| = n\|Q(t)\|_1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## 11.2 Prova da Proposição 43

**Prova.** Inicialmente verifiquemos que $Z_K \in C^r$.

$$\begin{aligned}
&\|z\|_2^2 = \int_0^\infty E\left[\|z(t)\|^2\right] dt = \int_0^\infty E[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|^2 + \left\|-K_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2]dt \\
&= \int_0^\infty \left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|_2^2 + E[\left\|-K_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2]dt \\
&\leq \int_0^\infty \|C\|_\infty^2 \|x(t)\|_2^2 + E[(\left\|-K_{\theta(t)}x(t)\right\| + \|q(t)\|)^2]dt \\
&\leq \int_0^\infty \|C\|_\infty^2 \|x(t)\|_2^2 + E[(\|K\|_\infty \|x(t)\|_2 + \|q(t)\|_2)^2]dt \\
&= \int_0^\infty (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2) \|x(t)\|_2^2 + \|q(t)\|_2^2\, dt + 2\|K\|_\infty \int_0^\infty E[\|x(t)\|\,\|q(t)\|]dt
\end{aligned}$$

$$\leq (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2) \|x\|_2^2 + \|q\|_2^2 + 2\|K\|_\infty \|x\|_2 \|q\|_2 < \infty \tag{11.1}$$

Mostremos agora que $Z_K(\theta_0, \cdot)$ é um operador limitado. Realmente, sabemos que $\|Z_K(\theta_0, x_0, w, q)\|_2^2 = \|z\|_2^2$. Tendo em vista (11.1) e (6.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|z\|_2^2 \leq (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2)\,\|x\|_2^2 + \|q\|_2^2 + 2\,\|K\|_\infty\,\|x\|_2\,\|q\|_2 \\
&\leq (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2)\,\|x\|_2^2 + \|q\|_2^2 + \|K\|_\infty\,(\|x\|_2^2 + \|q\|_2^2) \\
&= (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\,\|x\|_2^2 + (1 + \|K\|_\infty)\,\|q\|_2^2 \\
&\leq (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2\,(\|x_0\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|q\|_2^2) + (1 + \|K\|_\infty)\,\|q\|_2^2 \\
&= (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2(\|x_0\|_2^2 + \|w\|_2^2) \\
&+(\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2(\|q\|_2^2 + \tfrac{(1+\|K\|_\infty)}{(\|C\|_\infty^2+\|K\|_\infty^2+\|K\|_\infty)\mu^2}\,\|q\|_2^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2(\|x_0\|_2^2 + \|w\|_2^2) \\
&+(\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2(1 + \tfrac{(1+\|K\|_\infty)}{(\|C\|_\infty^2+\|K\|_\infty^2+\|K\|_\infty)\mu^2})\,\|q\|_2^2)
\end{aligned}
$$

Fixemos $\eta > 0$ tal que

$$\frac{\eta^2}{(\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2} \geq (1 + \frac{(1 + \|K\|_\infty)}{(\|C\|_\infty^2 + \|K\|_\infty^2 + \|K\|_\infty)\mu^2})$$

então,

$$\|z\|_2^2 \leq \eta^2\,(\|x_0\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|q\|_2^2)$$

e o operador $Z_K(\theta_0, \cdot)$ é limitado. ■

## 11.3 Suporte para a Proposição 52

Aqui também, por simplicidade, omitiremos a dependência de $\theta_0$ em alguns operadores. O Lema a seguir tem como finalidade mostrar uma desigualdade que surge na prova da Proposição 52 com vias a se encaixar nas hipóteses do Lema 40. Definiremos a seguir alguns operadores auxiliares na prova do Lema 64. Começamos por definir o operador

$$X_J^{\overline{0}}(\theta_0, q) = X_J(\theta_0, 0, 0, q), \;\; X_J^{\overline{0}} \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^m, \mathcal{C}^n]. \tag{11.2}$$

Definimos também o operador

$$\widetilde{V}(\theta_0, \cdot) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^m] \text{ como } \widetilde{V}(\theta_0, \cdot) = JX_J^{\overline{0}}(\theta_0, \cdot) - I \tag{11.3}$$

ou seja, para qualquer $q \in \mathcal{C}^m$, $\widetilde{V}(\theta_0, q) = \widetilde{q}$, onde $\widetilde{q}(t) = J_{\theta(t)}x(t) - q(t)$, qualquer que seja $t \in [0, \infty)$. Definimos ainda o operador $\widetilde{Y}$ como segue,

$$\widetilde{Y}(q) = \widetilde{y} \ \text{ para todo } q \in \mathcal{C}^m \tag{11.4}$$

onde $\widetilde{y}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{y}}(t) = A_{\theta(t)}\widetilde{y}(t) - B_{\theta(t)}q(t) \\ \widetilde{y}(0) = 0 \end{cases} \tag{11.5}$$

Para completar os operadores auxiliares definimos

$$\widetilde{V}_{inv}(\theta_0, \cdot) \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^m] \ \text{ por } \ \widetilde{V}_{inv}(\theta_0, \cdot) = J\widetilde{Y}(\theta_0, \cdot) - I \tag{11.6}$$

ou seja, para qualquer $q \in \mathcal{C}^m$, $\widetilde{V}_{inv}(\theta_0, q) = \widetilde{s}$, onde $\widetilde{s} = J_{\theta(t)}\widetilde{y}(t) - q(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$.

**Lema 64** *Considere $\theta_0 \in \Theta_0$ fixado, $x_0 = 0$, $w = 0$ e $q \in \mathcal{C}^m$, $q \neq 0$. Considerando as hipóteses do Lema 62 e $J$ definido na Proposição 38, temos que*

$$\frac{\int_0^\infty [\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|_2^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|_2^2]dt}{\|q\|_2^2} \geq \alpha > 0$$

**Prova.** A idéia da prova segue *mutatis mutandis* a prova da Proposição 61 e Lema 58. Considere os operadores (11.2), (11.3), (11.4) e (11.6). Verifica-se facilmente que $\widetilde{Y}(q) = X_K^{\overline{0}}(\widetilde{s})$ e $\widetilde{Y}(\widetilde{q}) = X_K^{\overline{0}}(q)$. Podemos então provar que o operador $\widetilde{V}$ é inversível e que $\widetilde{V}_{inv}$ é seu operador inverso, ou seja, $\widetilde{V}\widetilde{V}_{inv} = \widetilde{V}_{inv}\widetilde{V} = I$. Realmente,

$$\widetilde{V}\widetilde{V}_{inv}(q) = \widetilde{V}(\widetilde{s}) = JX_K^{0}(\widetilde{s}) - \widetilde{s} = J\widetilde{Y}(q) - \left(J\widetilde{Y}(q) - q\right) = q.$$

Da mesma forma,

$$\widetilde{V}_{inv}\widetilde{V}(q) = \widetilde{V}_{inv}(\widetilde{q}) = J\widetilde{Y}(\widetilde{q}) - \widetilde{q} = JX_K^{\overline{0}}(q) - \left(JX_K^{\overline{0}}(q) - q\right) = q,$$

o que mostra que $\widetilde{V}^{-1} = \widetilde{V}_{inv}$. Como $\widetilde{V} : \mathcal{C}^m \to \mathcal{C}^m$ é bijetiva, inversível e limitada e além disso $\mathcal{C}^m$ é um espaco de Banach, temos que $\widetilde{V}^{-1}$ também é limitado, e $\widetilde{V}^{-1} \in \mathbb{B}[\mathcal{C}^m]$. Considere agora $\alpha_1 > 1$ tal que $\left\|\widetilde{V}^{-1}\right\| \leq \alpha_1$ para todo $\theta_0 \in \Theta_0$.

Para todo $q \in \mathcal{C}^m$ temos

$$\frac{1}{\alpha_1}\|q\|_2 \leq \left\|\widetilde{V}^{-1}\right\|^{-1}\|q\|_2 \leq \left\|\widetilde{V}(q)\right\|_2. \tag{11.7}$$

De (11.3) e (11.7) temos que

$$\int_0^\infty E[\left\|J_{\theta(t)}x(t) - q(t)\right\|^2]dt = \int_0^\infty E[\left\|\widetilde{V}(q)(t)\right\|^2]dt = \left\|\widetilde{V}(q)\right\|_2^2 \geq \frac{1}{(\alpha_1)^2}\|q\|_2^2.$$

Ora,

$$\int_0^\infty[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|_2^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|_2^2]dt \geq \int_0^\infty E[\left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|^2]dt$$

$$= \int_0^\infty E[\left\|J_{\theta(t)}x(t) - q(t)\right\|^2]dt \geq \frac{1}{(\alpha_1)^2}\|q\|_2^2$$

Então, para todo $q \in \mathcal{C}^m$, $q \neq 0$, temos

$$\frac{\int_0^\infty[\left\|C_{\theta(t)}x(t)\right\|_2^2 + \left\|-J_{\theta(t)}x(t) + q(t)\right\|_2^2]dt}{\|q\|_2^2} \geq \frac{1}{(\alpha_1)^2} = \alpha > 0 \tag{11.8}$$

■

## 11.4 Suporte para a prova da Proposição 55.

**Lema 65** *Para $i \in \mathbb{N}$ arbitrário e $H_i^T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$, $T \in (0,\infty)$ suponha que $H_i^{T_1} \leqslant H_i^{T_2} \leqslant dI$ para todo $T_1 < T_2$ e alguma constante $0 < d < \infty$ que não depende de $i$, $T_1$ e $T_2$. Então, valem as seguintes afirmações.*

*(i) Para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que $H_i^T \to H_i$ quando $T \to \infty$;*

*(ii) $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$.*

**Prova.** A afirmação (i) segue da monotonicidade referente a matrizes positivas semidefinidas. Como, $\left\|H_i^T\right\| \leqslant d$ para todo $T$ finito, logo $\|H_i\| \leqslant d$ para todo $i \in \mathbb{N}$, provando (ii). ■

**Lema 66** *Para $H^T \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, $T \in (0,\infty)$ Assumamos que*

*(i) $H_i^T \to H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ quando $T \to \infty$, $i \in \mathbb{N}$;*

*(ii) $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$;*

*(iii) $H_i^{T_1} \leqslant H_i^{T_2} \leqslant dI$, $T_1, T_2 \in (0,\infty)$, $T_1 < T_2$, $i \in \mathbb{N}$, e alguma constante $0 < d < \infty$ que não depende de $i$, $T_1$ e $T_2$.*

*Então, com $\mathcal{T}$ dado por (7.1), obtemos que*

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_i(H^T) = \mathcal{T}_i(H), \quad i \in \mathbb{N} \tag{11.9}$$

*e*

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}(H^T) = \mathcal{T}(H) \tag{11.10}$$

**Prova.** Em vez de provarmos diretamente que (11.9) se verifica, provaremos primeiramente que, para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{E}_i(H^T) = \mathcal{E}_i(H). \tag{11.11}$$

com $\mathcal{E}_i(H^T) = \sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j^T$ . Realmente, para $x_0 \in \mathbb{C}^n$ arbitrário, de *(iii)* temos que

$$0 \leqslant \lambda_{ij} x_0^* H_j^{T_1} x_0 \leqslant \lambda_{ij} x_0^* H_j^{T_2} x_0 \leqslant \lambda_{ij} x_0^* dI x_0$$

para todo $T_1, T_2 \in (0,\infty)$, com $T_1 < T_2$ e $i$, $j \in \mathbb{N}$. O que implica que

$$0 \leqslant \lim_{b\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* H_j^{T_1} x_0 \leqslant \lim_{b\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* H_j^{T_2} x_0$$

$$\leqslant \lim_{b\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* dI x_0 = d \sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} x_0^* x_0 = d \left\|x_0\right\|^2 |\lambda_{ii}|$$

Então, pela monotonicidade da função $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* H_j^T x_0$ em $b$ e $T$ e também tendo em vista *(i)* e *(ii)*, segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} x_0^* \mathcal{E}_i(H^T) x_0 = \lim_{T\to\infty} x_0^* (\lim_{b\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} H_j^T) x_0 \\
&= \lim_{T\to\infty} \lim_{b\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* H_j^T x_0 \\
&= \lim_{b\to\infty} \lim_{T\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* H_j^T x_0 \\
&= \lim_{b\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} x_0^* H_j x_0 \\
&= x_0^* (\lim_{b\to\infty} \textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{b} \lambda_{ij} H_j) x_0 = x_0^* \mathcal{E}_i(H) x_0
\end{aligned}$$

Como $x_0 \in \mathbb{C}^n$ é arbitrário e $\mathcal{E}_i(H)$ é uma matriz autoadjunta, então (11.11) se verifica. Passemos agora à prova de (11.9) propriamente dita. De (7.1), temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_i(H^T) = \\
&= \lim_{T\to\infty} \{M_i + A_i^* H_i^T + H_i^T A_i - H_i^T B_i B_i^* H_i^T + \lambda_{ii} H_i^T + \mathcal{E}_i(H^T) + \tfrac{1}{\delta^2} H_i^T D_i D_i^* H_i^T\} \\
&= M_i + A_i^* \lim_{T\to\infty} H_i^T + (\lim_{T\to\infty} H_i^T) A_i - (\lim_{T\to\infty} H_i^T) B_i B_i^* (\lim_{T\to\infty} H_i^T) \\
&+ \lambda_{ii} \lim_{T\to\infty} H_i^T + \lim_{T\to\infty} \mathcal{E}_i(H^T) + \tfrac{1}{\delta^2} (\lim_{T\to\infty} H_i^T) D_i D_i^* (\lim_{T\to\infty} H_i^T) \\
&= M_i + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i B_i^* H_i + \lambda_{ii} H_i + \mathcal{E}_i(H) + \tfrac{1}{\delta^2} H_i D_i D_i^* H_i
\end{aligned} \tag{11.12}$$

então, (11.9) segue imediatamente de (11.12). Finalmente, da Proposição 45 e de (11.9) obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\infty^n &\ni \mathcal{T}(H) = (\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_1(H^T), \lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_2(H^T), ...)\\ &= \lim_{T\to\infty} (\mathcal{T}_1(H^T), \mathcal{T}_2(H^T), ...) = \lim_{T\to\infty} \mathcal{T}(H^T)\end{aligned}$$

onde a segunda equação vem do fato de que a norma standard em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ coincide com a norma induzida por $\mathcal{H}_\infty^n$ no subespaço linear $\{(0, .., 0, H, 0, ..), H \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)\}$.

■

## 11.5 Suporte para a Proposição 60.

**Observação 67** *A condição (i) do Teorema 57 pode ser reescrita como* $M_i + A_i^* P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} P_j - P_i B_i B_i^* P_i + \frac{1}{\delta^2} P_i D_i D_i^* P_i = 0$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *Isto se Verifica substituindo* $K_i$ *por* $B_i^* P_i$ *e* $G_i$ *por* $\frac{1}{\delta} D_i^* P_i$ *em (9.1).*

**Proposição 68** *Seja g tal que*

$$\mathcal{X} \ni (t, x, i) \mapsto g(t, x, i) = x(t)^* P_{(\theta(t)=i)} x(t) = x(t)^* P_i x(t) \tag{11.13}$$

*onde* $P = (P_1, P_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *é dado por (9.1) (condição (i) do teorema 57). Então, sob as hipóteses da Proposição 32, seção 5.3, o operador infinitesimal* $\mathcal{L}^u$ *é dado por*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) = x(t)^*[-M_{\theta(t)} - P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} B_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)} - \tfrac{1}{\delta^2} P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} D_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)}] x(t)\\ + w(t)^* D_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)} x(t) + x(t)^* P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} w(t)\\ + q(t)^* B_{\theta(t)}^* P_{\theta(t)} x(t) + x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} q(t)\end{aligned} \tag{11.14}$$

*para qualquer* $(t, x(t), \theta(t)) \in \mathcal{X}$ . *Além disso, a fórmula de Dynkin (5.14) se escreve*

$$\begin{aligned}&E_{x(s),\theta(s)}[x(t)^* P_{\theta(t)} x(t)] - x(s)^* P_{\theta(s)} x(s) =\\ &= E_{x(s),\theta(s)}[\textstyle\int_s^t x(r)^*[-M_{\theta(r)} - P_{\theta(r)} B_{\theta(r)} B_{\theta(r)}^* P_{\theta(r)} - \tfrac{1}{\delta^2} P_{\theta(r)} D_{\theta(r)} D_{\theta(r)}^* P_{\theta(r)}] x(r)\\ &+ w(r)^* D_{\theta(r)}^* P_{\theta(r)} x(r) + x(r)^* P_{\theta(r)} D_{\theta(r)} w(r)\\ &+ q(r)^* B_{\theta(r)}^* P_{\theta(r)} x(r) + x(r)^* P_{\theta(r)} B_{\theta(r)} q(r)]\ dr\end{aligned} \tag{11.15}$$

*para* $0 \leq s < t$ *e* $(s, x(s), \theta(s)) \in \mathcal{X}$.

**Prova.** Considere $g(t,x(t),i) = x(t)^* P_i x(t)$. Pelo Lema 21 temos que $\frac{\partial}{\partial t} g(t,x(t),\theta(t)) = x(t)^* \dot{P}_i x(t) = 0$, pois $\dot{P}_i = 0$. Então, aplicando a Proposição 32 temos que

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^u g)(t,x(t),\theta(t)) &= \left(A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + D_{\theta(t)}w(t)\right)^* P_{\theta(t)}x(t) \\
&+ x(t)^* P_{\theta(t)} \left(A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + D_{\theta(t)}w(t)\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} x(t)^* P_j x(t) \lambda_{\theta(t)j} \\
&= x(t)^* A^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + u(t)^* B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + w(t)^* D^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) \\
&+ x(t)^* P_{\theta(t)} A_{\theta(t)} x(t) + x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} u(t) + x(t)^* P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} w(t) \\
&+ x(t)^* \left( \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\theta(t)j} P_j \right) x(t) \\
&= x(t)^* \left[ A^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} + P_{\theta(t)} A_{\theta(t)} + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\theta(t)j} P_j \right] x(t) \\
&+ \left(-B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + q(t)\right)^* B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + w(t)^* D^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) \\
&+ x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} \left(-B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + q(t)\right) + x(t)^* P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} w(t) \\
&= x(t)^* [-M_{\theta(t)} + P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} - \tfrac{1}{\delta^2} P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} D^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)}] x(t) \\
&- x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + q(t)^* B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) \\
&+ w(t)^* D^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) - x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) \\
&+ x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} q(t) + x(t)^* P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} w(t) \\
&= x(t)^* [-M_{\theta(t)} - P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} - \tfrac{1}{\delta^2} P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} D^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)}] x(t) \\
&+ w(t)^* D^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + x(t)^* P_{\theta(t)} D_{\theta(t)} w(t) + q(t)^* B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) \\
&+ x(t)^* P_{\theta(t)} B_{\theta(t)} q(t).
\end{aligned}
$$

para qualquer $(t,x(t),\theta(t))$. Na terceira igualdade substituimos $u(t)$ por $u(t) = -B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t) + q(t)$ e na quarta igualdade usamos a Observação 67. A fórmula de Dynkin (11.15) segue imediatamente de (5.14) e da expressão acima. ■

**Observação 69** *Se considerarmos na Proposição 68 acima a classe de controles admissíveis dada por* $u(t) = -B^*_{\theta(t)} P_{\theta(t)} x(t)$, *o operador infinitesimal* $\mathcal{L}^u$ *(11.14) se* *escreve*

$$(\mathcal{L}^u g)(t,x(t),\theta(t)) = x(t)^*[-M_{\theta(t)} - P_{\theta(t)}B_{\theta(t)}B^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)} - \tfrac{1}{\delta^2}P_{\theta(t)}D_{\theta(t)}D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}]x(t)$$
$$+w(t)^*D^*_{\theta(t)}P_{\theta(t)}x(t) + x(t)^*P_{\theta(t)}D_{\theta(t)}w(t). \tag{11.16}$$

*para todo* $(t,x(t),\theta(t)) \in \mathcal{X}$ . *Conseqüentemente a fórmula de Dynkin (11.15) se escreve*

$$E_{x(s),\theta(s)}[x(t)^*P_{\theta(t)}x(t)] - x(s)^*P_{\theta(s)}x(s) =$$
$$= E_{x(s),\theta(s)}[\textstyle\int_s^t x(r)^*[-M_{\theta(r)} - P_{\theta(r)}B_{\theta(r)}B^*_{\theta(r)}P_{\theta(r)} - \tfrac{1}{\delta^2}P_{\theta(r)}D_{\theta(r)}D^*_{\theta(r)}P_{\theta(r)}]x(r)$$
$$+w(r)^*D^*_{\theta(r)}P_{\theta(r)}x(r) + x(r)^*P_{\theta(r)}D_{\theta(r)}w(r)]\ dr \tag{11.17}$$

*para* $0 \le s < t$ *e* $(s,x(s),\theta(s)) \in \mathcal{X}$.

## 11.6 Suporte para a prova do Lema 62.

Definimos, para todo $w \in \mathcal{C}^p$, o operador $|||.|||_2$ , por

$$|||w|||_2^2 = \delta^2 \left\|w\right\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0,0,w)\right\|_2^2.$$

**Proposição 70** *O operador* $|||.|||_2$ *define uma norma em* $\mathcal{C}^p$ *que é equivalente à norma* $\|.\|_2$ *em* $\mathcal{C}^p$.

**Prova.** Como vimos na Proposição 53, em (8.7),

$$\alpha^2 \left\|w\right\|_2^2 \le \delta^2 \left\|w\right\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0,0,w)\right\|_2^2 \le \delta^2 \left\|w\right\|_2^2,$$

isto é,

$$\alpha^2 \left\|w\right\|_2^2 \le |||w|||_2^2 \le \delta^2 \left\|w\right\|_2^2$$

para todo $w \in \mathcal{C}^p$. ∎

**Lema 71** $\widehat{w}^T$, *definido em (7.15), converge para* $\widehat{w}$, *definido na Proposição 53, quando* $T \to \infty$.

**Prova.** Pela definição de $\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, w)$ e $\widehat{w}^T$, podemos notar $\widetilde{\mathcal{J}}^T(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) = \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T)$.

Seja $\{\widehat{w}^\alpha\}$ uma seqüência maximizante como definida em (7.15). Então,

$$|||\widehat{w}^\alpha - \widehat{w}^\beta|||_2^2 = \delta^2 \left\|\widehat{w}^\alpha - \widehat{w}^\beta\right\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, 0, \widehat{w}^\alpha - \widehat{w}^\beta)\right\|_2^2$$
$$= \delta^2 \left\|\widehat{w}^\alpha - \widehat{w}^\beta\right\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha) - \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\|_2^2$$
$$= \delta^2 \left\|\widehat{w}^\alpha\right\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\|_2^2 + \delta^2 \left\|\widehat{w}^\beta\right\|_2^2 - \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\|_2^2$$
$$-\delta^2 \left\langle\widehat{w}^\alpha, \widehat{w}^\beta\right\rangle - \delta^2 \left\langle\widehat{w}^\beta, \widehat{w}^\alpha\right\rangle + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\rangle$$
$$+ \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\rangle$$

$$= -\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha) - \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta) - \delta^2 \left\langle\widehat{w}^\alpha, \widehat{w}^\beta\right\rangle - \delta^2 \left\langle\widehat{w}^\beta, \widehat{w}^\alpha\right\rangle$$
$$+ \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\rangle + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\rangle \tag{11.18}$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \tfrac{(\widehat{w}^\alpha + \widehat{w}^\beta)}{2}) = \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \tfrac{(\widehat{w}^\alpha + \widehat{w}^\beta)}{2})\right\|_2^2 - \delta^2 \left\|\tfrac{(\widehat{w}^\alpha + \widehat{w}^\beta)}{2}\right\|_2^2$$
$$= \tfrac{1}{4}[\left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\|_2^2 - \delta^2 \left\|\widehat{w}^\alpha\right\|_2^2 + \left\|\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\|_2^2$$
$$-\delta^2 \left\|\widehat{w}^\beta\right\|_2^2 - \delta^2 \left\langle\widehat{w}^\alpha, \widehat{w}^\beta\right\rangle + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\rangle$$
$$-\delta^2 \left\langle\widehat{w}^\beta, \widehat{w}^\alpha\right\rangle + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\rangle]$$

$$= \tfrac{1}{4}[\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha) + \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta) - \delta^2 \left\langle\widehat{w}^\alpha, \widehat{w}^\beta\right\rangle$$
$$-\delta^2 \left\langle\widehat{w}^\alpha, \widehat{w}^\beta\right\rangle + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\rangle$$
$$+ \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\rangle]$$

então,

$$4\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \tfrac{(\widehat{w}^\alpha + \widehat{w}^\beta)}{2}) - \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha) - \widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)) =$$
$$= + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta)\right\rangle + \left\langle\widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\beta), \widetilde{Z}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^\alpha)\right\rangle \tag{11.19}$$
$$-\delta^2 \left\langle\widehat{w}^\beta, \widehat{w}^\alpha\right\rangle - \delta^2 \left\langle\widehat{w}^\alpha, \widehat{w}^\beta\right\rangle$$

substituindo (11.19) em (11.18) e tendo em vista (9.10), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left\|\widehat{w}^{\alpha}-\widehat{w}^{\beta}\right\|\right|_2^2=4\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0,\tfrac{1}{2}(\widehat{w}^{\alpha}+\widehat{w}^{\beta}))-2\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0,\widehat{w}^{\alpha})-2\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0,\widehat{w}^{\beta})\\
&=2[2\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0,\tfrac{1}{2}(\widehat{w}^{\alpha}+\widehat{w}^{\beta}))-\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0,\widehat{w}^{\alpha})-\widetilde{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0,\widehat{w}^{\beta})]\\
&\leq 2[2\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0)-\widetilde{\mathcal{J}}^{\alpha}(\theta_0,x_0,\widehat{w}^{\alpha})-\widetilde{\mathcal{J}}^{\beta}(\theta_0,x_0,\widehat{w}^{\beta})]\rightarrow\\
&\rightarrow 2[2\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0)-\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0)-\widehat{\mathcal{J}}(\theta_0,x_0)]=0 \text{ quando } \alpha,\beta\rightarrow\infty
\end{aligned}$$

Portanto $\{\widehat{w}^{\alpha}\}$ é uma sequência de Cauchy na topologia $(\mathcal{C}^p, |\|.\||_2)$. Pela Proposição 70 as normas $\|.\|_2$ e $|\|.\||_2$ são equivalentes, logo $\{\widehat{w}^{\alpha}\}$ é também uma sequência de Cauchy na topologia $(\mathcal{C}^p, \|.\|_2)$, que é completo, então $\widehat{w}^T \rightarrow w^*$ para algum $w^* \in \mathcal{C}^p$ na topologia $(\mathcal{C}^p, \|.\|_2)$.

Tendo em vista (9.10), $\widetilde{J}^T(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) = \widetilde{J}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) \rightarrow \widetilde{J}(\theta_0, x_0, \widehat{w})$. Mas $\widetilde{J}$ é um operador contínuo. Logo, $\widetilde{J}(\theta_0, x_0, \widehat{w}^T) \rightarrow \widetilde{J}(\theta_0, x_0, w^*)$. Pela unicidade de um maximizante $\widehat{w}$, segue que $\widehat{w}^T \rightarrow \widehat{w}$ quando $T \rightarrow \infty$. ■

# Referências Bibliográficas


[1] ALIPRANTIS, C. D., BORDER, K. C., *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Stud. Econom. Theory 4, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[2] ARNOLD, V. I., *Ordinary Differential Equations*, the MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1978.

[3] ARNOLD, L., *Stochastic Differential Equations*, Theory and Applications, John Wiley and Sons New New York, 1974.

[4] BACZYNSKI, J., FRAGOSO, M. D., LOPES, E. P., "On a discrete time linear jump stochastic dynamic game. "*International Journal of Systems Science.* vol. 32, n. 8, pp. 979-988, 2001.

[5] BACZYNSKI, J. *Controle Ótimo para problemas-LQ a tempo contínuo com saltos Markovianos*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro- junho(2000).

[6] Jr. BLAIR, W. P., SWORDER, D. D. "Continuous-time regulation of a class of econometric models ", *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.*, SMC-5, (1975).

[7] BLOM, H. A. P., "Continuous-discrete filtering for the systems with markovian switching coefficients and simultaneous jump ", in *Proc. 21th Asilomar Conf. Signals Syst. Comp.*, Pacific Grove, 1987.

[8] BLOM, H. A. P., "Overlook potential systems with markovian coefficients ", in Proc. 25th *IEEE Conf. Decision Control*, Athens, 1986.

[9] BLOM, H. A. P., Bar SHALOM, Y., "The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching parameters ", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 33, No.8, 1988.

[10] BOUKAS, El-Kebir, SHI, P., "Stochastic stability and guarantee cost control of discrete–time uncertain systems with Markovian jumping parameters ", *Internat. J. Robust Nonlinear Control,* 8, pp 1155-1167, 1998.

[11] BOUKAS, E. K., LIU, Z. K., "Robust $H_\infty$–control of discrete-time Markovian jump linear sistems with mode-dependent time-delays ", *IEEE Trans. Automat. Control*, 46, n. 12, pp 1918-1924, 2001.

[12] COSTA, E. F., DO VAL, J. B. R., "On the detectability and observability of discrete-time Markov jump linear systems", *System and Control Letters*, 44, n.2, pp. 135–145, 2001.

[13] COSTA, E. F., DO VAL, J. B. R., "On the detectability and observability of continuous-time Markov jump linear systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41, n.4, pp. 1295–1314, 2002.

[14] COSTA, E. F., DO VAL, J. B. R., "Weak detectability and the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems", *International Journal of Control*, accepted for publication in the special issue on Switched and Polytopic Linear Systems.

[15] COSTA, O. L. V., "Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, n.8, pp. 1685–1689, 1994.

[16] COSTA, O. L. V., "Discrete-time coupled Riccati equations for systems with Markov switching parameters", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194, pp. 197–216, 1995.

[17] COSTA, O. L. V., "Mean square stabilizing solutions for discrete-time coupled algebraic Riccati equations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, n.4 pp. 593–598, 1996.

[18] COSTA, O. L .V., DO VAL, J. B. R., "Full information $H_\infty$–control for discrete-time infinite Markov jump parameter systems ", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 202, pp 578-603, 1996.

[19] COSTA, O. L. V., DO VAL, J. B. R., "Jump LQ-optimal control for discrete-time Markovian systems with stochastic inputs", *Stochastic Analysis and Applications*, 16, n.5, pp. 843–858, 1998.

[20] COSTA, O. L. V., DO VAL, J. B. R. e GEROMEL, J.C., "A convex programming approach to $H_2$ control of discrete-time Markovian jump linear systems", *Int. J. Control*, 66, n.4, pp. 557–579, 1997.

[21] COSTA, O. L. V., DO VAL, J.B.R. e GEROMEL, J.C., "Continuous-time state-feedback $H_2$-control of Markovian jump linear systems via convex analysis", *Automatica*, 35, pp. 259–268, 1999.

[22] COSTA, O. L. V., FRAGOSO, M. D., "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters ", *J. Math. Anal. Appl.*179 (1993), 154-178.

[23] COSTA, O. L .V., FRAGOSO, M. D., "Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems ", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No.12, December 1995.

[24] COSTA, O. L. V., MARQUES, R. P. "Mixed $H_2/H_\infty$-control of discrete-time Markovian jump linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43, n.1, pp. 95–100, 1998.

[25] COSTA, O. L. V., MARQUES, R. P., "Maximal and stabilizing Hermitian solutions for the discrete-time coupled algebraic Riccati equations", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 12, pp. 167–195, 1999.

[26] COSTA, O. L. V., MARQUES, R. P., "Robust $H_2$-control for discrete-time Markovian jump linear systems", *International Journal of Control*, 73, no.1, pp. 11–21, 2000.

[27] DE FARIAS, D. P., Geromel, J. C., DO VAL, J. B.R. e Costa, O. L. V., "Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time", *IEEE Transactions on Automatic Control* 45, n.5, 944–949, 2000.

[28] DE SOUZA, C. E., FRAGOSO, M. D., "$H_\infty$−control for linear systems with Markovian jumping parameters ", *Control-Theory and Advanced Technology* Vol.9, No.2, pp. 457-466, 1993.

[29] DE SOUZA, C. E., FRAGOSO, M. D., "Robust filtering for uncertain Markovian jump linear systems". *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 12, n.5, pp.435-446, 2002.

[30] DO VAL, J. B. R., COSTA, O. L. V., GEROMEL, J. C., "A convex programming approach to $H_2$−control of discrete-time Markovian jump linear systems", *Intern. Journal of Control*, 66, pp. 557-579, 1997.

[31] DO VAL, J. B. R., COSTA, O. L. V., GEROMEL, J. C., "Uncoupled Riccati iteration for the quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43, pp. 1727-1733, 1998.

[32] DO VAL, J. B. R., BAZAR, T., "Recending horizon control of jump linear systems and macroeconomic policy problem", *J. Econom. Dynam. Contr.*, vol.23, n. 8, pp. 1099-1131, 1999.

[33] DO VAL, J. B.R., COSTA, E. F., "Numerical solution for linear quadratic control problems of Markov jump linear systems and weak detectability concept" *J. Optim. Theory Appl.* 114, n.1, pp 69-96, 2002.

[34] DOYLE, John C., GLOVER, Keith, KHARGONEKAR, Pramod P., FRANCIS, Bruce A., "State-Space Solutions to $H_2$ and $H_\infty$ Control Problems", *IEEE Transactions on Automatic Contro*l, Vol. 34, No.8, August 1989.

[35] DRAGAN, V., MOROZON, T., Game-theoretic coupled Riccati equations associated to controlled linear differential systems with jump Markov perturbations, *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 19, No.5, pp. 715–751, 2001.

[36] DUFOUR, F., BERTRAND, P., "The filtering problem for continuous-time linear systems with Markovian switching coefficients." *Systems and Control Letters*, v. 23 pp. 453-461, 1994.

[37] FENG, X., LOPARO, K. A., YUANDONG, J. I., CHIZECK, H. J., "Stochastic stability properties of jump linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, No.1, 1992.

[38] FRAGOSO, M. D., "On a partially observable LQG problem for systems with Markovian jumping parameters", *Systems & Control Letts.*vol. 10, pp. 349-356, 1988.

[39] FRAGOSO, M. D., "A small random perturbation analysis of a partially observable LQG problem for systesm with Markovian jumping parameters", *IMA Journal of Mathematical Control & Information* vol. 7, pp. 293–305, 1990.

[40] FRAGOSO, M. D., HEMERLY, E. M., "Optimal control for a class of noisy linear systems with Markovian jumping parameters and quadratic cost", *Int. J. of Syst. Sci.* 22, pp. 2553-2561, 1991.

[41] FRAGOSO, M. D., DO VAL, J.B. R.,PINTO Jr., D. L., "Jump linear $H_\infty-$control: The discrete-time case", *Control Theory and Adv. Tech.* 10, pp. 1459-1474, 1995.

[42] FRAGOSO, M. D., COSTA, O. L. V., DE SOUZA, C. E., "A new approach to linearly perturbed Riccati equations arising in stochastic control", *J. Appl. Math. Optimiz.* 37, pp. 99-126, 1998.

[43] FRAGOSO, M. D., **NASCIMENTO, E. C. S.**, BACZYNSKI, J., "$H_\infty-$control for continuous time linear systems with infinite Markov jump parameters via semigroup" Proceedings of the *39th IEEE Conference on Decision & Control-CDC2000*, Sydney, Austrália, pp 1160-1165, ISBN 0780366417.

[44] FRAGOSO, M. D., **NASCIMENTO, E. C. S.**, BACZYNSKI, J., "$H_\infty-$Control for continuous time linear systems with infinite Markov jump parameters via semigroup" A ser publicado (Submetido ao SIAM Journal on Control & Optimization).

[45] FRAGOSO, M. D., BACZYNSKI, J., "Stochastic versus mean square stability in continuous time linear infinite Markov jump parameter systems". *Stochastic Anal. Appl.*, Vol. 20, no. 2, pp.347–356, 2002.

[46] FRAGOSO, M. D., BACZYNSKI, J., "Lyapunov coupled equations for continuous-time infinite Markov jump linear systems". *Journal Math. Anal. Appl.*, Vol. 274, no. 1, pp.319–335, 2002.

[47] FRAGOSO, M. D., BACZYNSKI, J., "Optimal control for continuous time LQ-problems with infinite Markov Jump Parameters via Semigroup", *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 40 n. 1 pp. 270-297, 2001.

[48] FRANCIS, B .A., *A Course in $H_\infty$ Control Theory; Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol.88, Springer-Verlag, New York, 1987.

[49] FRIDMAN, E., SHAKED, U., "$H_\infty$−Control of linear stade-delay descriptor systems: an LMI approach. Fourth special issue on linear systems and control" *Linear Algebra Appl.* 351/352, pp. 271-302, 2002.

[50] GIHMAN I. I., SKOROHOD, A.V., *Introduction of The Theory of Random Process* (Philadelphia, Pa.: W. B, Saunders); *Stochastic Differential Equations* (Berlin: Springer-Verlag), 1972.

[51] GRAY, W. S., GONZALEZ, O., "Modelling electromagnetic disturbances in closed-loop computer controlled flight systems", *IEEE 37th Conf. on Dec. and Contr.*, Philadelphia, Pennsylvania, june, pp 359-364, 1998.

[52] GLOVER, K., DOYLE, J. C., "State-space formulae for stabilizing controllers that satisfy an $H_\infty$−norm bound and relations to risk sensitivivty" *Systems and Control Letters.* vol. 11, pp 167-172, 1988.

[53] HIRICHSEN, D., PRITCHARD, A. J., "Stochastic $H_\infty$" *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 36 n. 5 pp. 1504-1538, 1998.

[54] HELTON, J. W., JAMES, M. R., *Extending $H_\infty$−control to nonlinear systems. Control of nonlinear systems to achieve performance objectives.* Advance in Design and Control, 1. SIAM, Philadelphia, PA. 1999.

[55] Ji, Y., Chizek, H.J., "Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control", *IEEE International Journal of Control* 48, n.2, pp. 481-498, 1988.

[55] Ji, Y., Chizek, H.J., "Controllability, observability and discrete-time Markovian jump linear quadratic control", *IEEE International Journal of Control* 48, n.2, pp. 481-498, 1988.

[56] JI, Y. and CHIZECK, H. J., "Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jumping linear quadratic control", *IEEE Trans. Automat. Control* 35, pp. 777-788, 1990.

[57] JI, Y. and CHIZECK, H. J., "Jump linear quadratic Gaussian control: steady-state solution and testable conditions ", *Control Theory and Adv. Tech.* 6, pp. 289-319, 1990.

[58] Ji, Y., CHIZECK, H. J., "Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time", *IEEE Transactions on Automatic Control* 37, n.12, pp. 1884-1892, 1992.

[59] JI, Y. and CHIZECK, H. J., FENG, X., and LOPARO, K.A., "Stability and control of discrete-time jump linear systems", *Control-Theory and Adv. Tech.* vol. 7, pp. 247-270, 1991.

[60] KHARGONEKAR, Pramod P., PETERSEN, I. R., ROTEA, M. A., "$H_\infty -$Optimal control with state feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, pp. 786-788, 1988.

[61] KHARGONEKAR, Pramod P., PETERSEN, ZHOU, K., "Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and $H_\infty$-control theory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, pp. 356-361, 1990.

[62] LIMEBEER, D.J. N., ANDERSON, B. D. O., KHARGONEKAR, P. P. e GREEN, M., "A game theoretical approach to $H_\infty -$control for time varying systems", *SIAM J. Control Optimization* vol. 30, pp. 262-283, 1992.

[63] MAHMOUD, M. S., "Robust $H_\infty -$control of lenear neutral systems. *Automatica J. IFAC* 36, n. 5, pp. 757-764, 2000.

[64] MALHAME, R., CHONG, C.Y., "Electric load model synthesis by diffusion approximation in a high order hybrid state stochastic systems" *IEEE Trans. Automatic Control,* vol. 30, pp. 854-860, 1985.

[66] MARITON, M., "Jump Linear Quadratic Control with Random State Discontinuities", *Automatica*, vol. 23, No.2, pp. 237-240, 1987.

[67] MARITON, M., "Almost sure and moments stability of jump linear systems", *Systems & Control Letts.* , 11, pp. 393-397, 1988.

[68] MARITON, M. *Jump Linear Systems in Automatic Control*, Marcel Dekker, New York, 1990.

[69] MARITON, M., BERTRAND, P., "Output feedback for a class of linear systems with stochastic jump parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30, n.9, pp.898-900, 1985.

[70] MIRKIN, L., TADMOR, G., "$H_\infty-$control of system with I/O delay: a review of some problem-oriented methods. Special issue on analysis and design of delay and propagation systems" *IMA J. Math. Control Inform.* 19 n.1-2, pp. 185-199, 2002.

[71] NAGPAL, K. M., KHARGONEKAR, P. P., "Filtering and smoothing in an $H_\infty$ setting", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 152-166, 1991.

[72] NAYLOR, A. W., SELL, G. R., *Linear Operator in Engineering and Science.* Springer Verlag, 1983.

[73] PETERSEN, I. R., HOLLOT, C. V., "A Riccati equation to the stabilization of uncertain linear systems", *Automatica*, Vol.2, pp.397-411, 1986.

[74] PETERSEN, I. R., "Disturbance attenuation and $H_\infty$ optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. AC32, n 5, pp. 427-429, 1987.

[75] PETERSEN, I.R., "Complete results for a class of state feedback control disturbance attenuation problems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 34, n 11, pp. 1196-1199, 1989.

[76] PAN Z., BASAR T., "Zero-sum differential games with random structures and applications in $H_\infty$-control of jump linear systems", in $6^{th}$ *Internat. Symp. on Dynamic Games and Appl.*, Quebec, Canada, july 13-15, 1994.

[76] PAN Z., BASAR T., "Zero-sum differential games with random structures and applications in $H_\infty$-control of jump linear systems", in *$6^{th}$ Internat. Symp. on Dynamic Games and Appl.*, Quebec, Canada, july 13-15, 1994.

[77] PAZY, A. , *Semigroups of Linear Operations and Applications to Partial differential Equations*, Springer-Verlag.

[78] SCHERER, C., "$H_\infty$−control by state feedback: An iterative algorithm and characterization of high-gain occurence", *Systems & Control Letters*, 12, pp. 383-391, 1989.

[79] SORAVIA, Pierpaolo. *Feedback stabilization and $H_\infty$−control of nonlinear systems affected by disturbances: the differential games approach.* Lecture Notes in Control and Information. Sci., 273, Springer, Berlin, 2002.

[80] STOORVOGEL, A. A., *The $H_\infty$−Control Problem : A State Space Approach*, Prentice Hall, New York, 1992.

[81] SWORDER, D. D., "Feedback control for a class of linear systems with jump parameters ", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14, pp. 9-14, 1969.

[82] SWORDER, D. D. "Regulation of stochastic systems with wide-band transfer functions", *IEEE Trans. Systems Man Cyber.*, vol. SMC-12, N. 3, 1982.

[83] SWORDER, D. D. and ROGERS, R. O. "An LQ solution to a control problem associated with a solar thermal central reciever", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. AC-28, No.10, 1983.

[84] SWORDER, D.D. , "Control of systems subject to small measurement disturbances", *Trans. ASME, J. Dynam. Systems Meas. Contr.*, vol. 106, 1984.

[85] TADMOR, G., "Worst-case design in the time-domain: The maximum principle and the standard $H_\infty$−problem", *Math. Control Signals Systems* 3, pp. 301-324, 1990.

[86] WONHAM, W. H., "Random differential equations in control theory ". In: *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, A.T. Bharucha-Reid (Ed.), vol. 2 , pp. 131-212, Academic Press, New York, 1971.

[88] WILLSKY, A. S., LEVY, B. C., *Stochastic Stability Research for Complex Power Systems.* In: Rep. ET-76-C-01-2295, DOE Contract, LIDS, MIT, 1979.

[89] XIE, L., FRIDMAN, E., SHAKED, U., "Robust $H_\infty-$control of distributed delay systems with application to combustion control " *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 46, n. 12, pp. 1930-1935, 2001.

[90] YAKUBOVICK, V. A., " A frequency theorem for the case in which an application to some problems in the synthesis of optimal controls ", I , *Siberian Math. J.,* 15, pp. 457-476, 1974.

[91] ZAMES, G., "Feedback and optimal sensitivity: Mode reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses ", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, pp. 301-320, 1981.

[92] ZHOU, K., DOYLE, J. C., GLOVER, K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.