DESCRIÇÕES E CONFLITOS COMPUTACIONAIS:
O CASO DA DERIVADA

Victor Augusto Giraldo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por :

Dr. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Dr. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho, D.Sc.

Dr. David Orme Tall, Ph.D.

Dr. Luiz Carlos Guimarães, Ph.D.

Dr. Siobhan Victoria Healy, Ph. D.

Dr. Maria Laura Mouzinho Leito Lopes, D.Sc.

Dr. Elizabeth Belfort da Silva Moren, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MAIO DE 2004

GIRALDO, VICTOR AUGUSTO

Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada [Rio de Janeiro] 2004

IX, 221 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Educação Matemática
2. Tecnologias Educacionais
3. Pensamento Matemático Avançado

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Mudo é quem

só se comunica com palavras...

Candeia - *Filosofia do Samba*

Agradecimentos

À CAPES, pela bolsa de estágio de doutorado no Reino Unido entre março de 2002 e fevereiro de 2003, sem a qual este trabalho não teria sido realizado.

Ao Mathematical Education Research Centre, da University of Warwick, na figura de seu diretor, Dr. Eddie Gray, pela estrutura acadêmica indispensável.

Ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE-UFRJ, pela possibilidade deste trabalho acontecer.

Ao Instituto de Matemática da UFRJ, na figura de seu atual diretor, professor Waldecir Bianchini, e de sua ex-diretora, professora Ângela Rocha, pelo investimento e apoio institucional.

Aos funcionários do PESC, especialmente Fátima, Mercedes, Lúcia e Solange, pelas intermináveis quebrações de galho.

Ao professor Nelson Maculan, pelo apoio irrestrito, de valor inestimável, em todas as situações.

Ao professor David Tall, por me ajudar de formas que ele nem mesmo sabe.

A Luiz Mariano Carvalho, pelo apoio incondicional, pelas conversas e pelas viagens.

Aos meus pais, Eneida e Victor, pelo amor sem limites.

A Lula, por estar ao meu lado em corpo e em coração.

A Tatiana Roque, pela força do espírito e pela crença no inconcebível.

Aos meus irmãos de coração, Marcela e Naylor, pelos braços abertos, sorrisos eternos e almas ternas.

Aos amigos Carla Guedes, Flávia Cruz, Geraldo, Moema, Robson, Rubinho e Thalia, pela poesia do cotidiano.

Aos camaradas matemáticos Bruno Costa, Cândida Silveira, Cássio Neri, Henrique Bursztyn, Isabel Lugão, Marco Cabral, Paulo Goldfeld, Ricardo Rosa e Ronaldo Freire, pela energia da criação.

Aos amigos educadores matemáticos Bibi Lins, Daniel Orey, Elena Nardi, Francisco Mattos, Laurie Edwards e Lulu Healy, pela potência da descoberta.

Ao mestres do passado, amigos do presente, Beth Belfort, Felipe Acker, Luiz Carlos Guimarães e Rolci Cipolatti, pela alegria de fazer matemática.

À professora Maria Laura Leite Lopes, pela resistência e coragem inspiradoras.

À equipe de Projeto Fundão da UFRJ, na figura de suas coordenadoras, professoras Cláudia Segadas Vianna, Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, por acreditar e insistir.

A Antônio, Carlos, Francisco, Júlio, Marcelo e Tiago, pelas palavras inspiradoras e olhos brilhantes.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

DESCRIÇÕES E CONFLITOS COMPUTACIONAIS: O CASO DA DERIVADA

Victor Augusto Giraldo

Maio/2004

Orientadores: Nelson Maculan Filho
Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O objetivo deste trabalho é discutir o papel de limitações associadas com descrições de conceitos para a delimitação de objetos de ensino no campo do planejamento pedagógico. O foco principal é no caso particular de descrições computacionais para o conceito de derivada. A teoria de imagens de conceito é empregada como embasamento teórico para a discussão. Os resultados são inferidos a partir de dados empíricos de um estudo qualitativo realizado com estudantes em cursos iniciais de cálculo infinitesimal.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

DESCRIPTIONS AND COMPUTATIONAL CONFLICTS: THE CASE OF THE DERIVATIVE

Victor Augusto Giraldo

May/2004

Advisors: Nelson Maculan Filho
Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho

Department: Computer Engineering

The aim of this work is to discuss the role of limitations associated with concept descriptions on the delineation of teaching objects within the domain of the pedagogical design. The main focus is on the particular case of computational descriptions for the concept of derivative. The theory of concept images is employed as a theoretical framework. Results are inferred on the basis of empirical data from a qualitative study performed with undergraduate students on the stage of initial infinitesimal calculus courses.

Conteúdo

Introdução

A entrada do computador em sala de aula de cálculo, que, pelo menos na Universidade Federal do Rio de Janeiro, ocorreu com mais força a partir de meados da década de 1990, inicialmente mais suscitou questões do que trouxe soluções. A tecnologia botou em cheque os paradigmas tradicionais de sala de aula, acrescentando uma gama de possibilidades aos recursos de ensino disponíveis – cálculos pesados realizados com facilidade, interatividade, dinâmica e até mesmo estética. Porém, os caminhos a seguir não eram óbvios, pois as conseqüências do uso de tecnologia computacional para a aprendizagem de conceitos matemáticos ainda era um campo pouco explorado, particularmente em matemática avançada. A discussão dominante na literatura de educação matemática disponível até então, que havia sido produzida a partir do final da década de 1980, ainda girava em torno da resposta para uma questão polarizada sobre um caráter intrinsecamente positivo ou negativo do computador. Mas esta questão jamais poderia ser respondida, pois o computador não encerra nenhum caráter intrínseco. Como não poderia deixar de ser, o enfoque da literatura vem mudando progressivamente da questão de *se a máquina é ou não benéfica* para a questão de *como a máquina pode ser beneficamente utilizada*. O contexto pedagógico em que se inserem recursos tecnológicos passa a ser cada vez mais considerado como um todo. Esta perspectiva de pesquisa sugere que a questão mais desafiadora não é *o que o uso da máquina pode acrescentar nos modelos atuais de ensino*, mas *que novos modelos de ensino podem ser inaugurados pelo uso da máquina*.

O presente trabalho é, antes de mais nada, fruto de minha experiência pessoal com ensino em cursos iniciais de cálculo, área em que atuo desde 1992 no Instituto de Matemática da UFRJ. Os primeiros anos de experiência com recursos computacionais no ensino de cálculo – então pensado como apoio para as aulas teóricas – rendeu algumas perguntas. Um esboço dessas primeiras reflexões, elaboradas em conjunto com

Tatiana Roque e com Luiz Mariano Carvalho, pode ser encontrado em (GIRALDO & ROQUE, 1996; GIRALDO & ROQUE, 1997; CARVALHO & GIRALDO, 2000).

A continuidade do trabalho com computadores no ensino de cálculo, desenvolvido fundamentalmente tendo em vista os cursos de Licenciatura e Especialização para Professores de Matemática da UFRJ, fez com que uma faceta particular da ferramenta passasse a chamar-me a atenção: a estrutura finita dos algoritmos produzia diferentes tipos de *erros*. A aritmética de ponto flutuante pode fornecer resultados errôneos, particularmente em operações que envolvam processos infinitos, identificando, por exemplo, limites existentes como não existentes ou vice-versa. Ou então, algoritmos de traçado de gráficos por interpolação de conjuntos finitos de pontos podem produzir gráficos de funções erroneamente, dependendo da janela gráfica escolhida. Como o conceito de infinito está na base de todos os objetos de estudo do cálculo diferencial e integral, a ocorrência de erros desse tipo torna as representações computacionais menos fiéis aos objetos representados. É claro que esses erros podem ser facilmente evitados por meio de uma seleção cuidadosa de exemplos adequados no momento do planejamento das atividades de laboratório. Entretanto, optei por adotar uma postura diferente, simplesmente deixando que os erros ocorressem quando tivessem que ocorrer e, quando fosse o caso, tentando deixar tão claro quanto possível para os estudantes a matemática que estava por trás de situações em que as representações computacionais não correspondiam ao preconizado pela teoria. A razão inicial dessa opção foi a crença de que a abordagem pedagógica de matemática não deve ser orientada pela 'simplificação' de conteúdos, na tentativa de 'poupar' os estudantes das 'complexidades' da disciplina. Tal postura levou-me a perceber, a partir de resultados observados em sala de aula, que a exploração de erros computacionais poderia se constituir em uma fonte rica de aprendizagem de matemática.

A experiência descrita acima foi concretizada em um projeto de doutorado, iniciado em 2000 no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE-UFRJ, sob orientação do professor Nelson Maculan e do professor Luiz Mariano Carvalho. Parte de meus estudos de doutoramento consistiu em elaborar e testar atividades em que os erros computacionais não eram mais meramente incidentais, mas figuravam como uma intencionalidade com objetivos pedagógicos. Alguns resultados foram publicados em (CARVALHO & GIRALDO, 2001; GIRALDO & CARVALHO, 2002a). O trabalho de elaboração de atividades motivou um pensamento teórico mais detido sobre a natureza dos 'erros computacionais'. Estas reflexões conduziram à conclusão de que as discrepâncias entre as representações computacionais e a teoria eram justamente o atributo que as caracterizava como *representações*, distinguindo-as do objeto matemático representado, que, por sua vez só poderia ser perfeitamente caracterizado pela definição formal. Portanto, tais discrepâncias não deveriam ser conceituadas como *erros*. Neste ponto, a continuidade da investigação dependia de um embasamento teórico adequado. A pesquisa bibliográfica em pensamento matemático avançado levou-me a um aprofundamento no trabalho pioneiro de David Tall, por mim já conhecido. Em particular, a teoria de *imagens de conceito* sugere que o desenvolvimento cognitivo de um conceito matemático se dá através do enriquecimento de uma diversidade de idéias associadas ao conceito, e que a compreensão da própria definição do conceito só é possível quando a gama de idéias associadas é rica o suficiente. Sendo assim, a aprendizagem de matemática é favorecida pela multiplicidade de representações presente na abordagem pedagógica – o que coincidia com minha própria experiência com a exploração de 'erros computacionais'.

Esse referencial teórico possibilitou a reformulação da idéia de 'erro'. No texto elaborado por ocasião de meu exame de qualificação de doutoramento, a noção de *conflito teórico-computacional* é conceituada como uma aparente contradição gerada por uma representação computacional para um objeto matemático que seja limitada em relação à definição formal correspondente (GIRALDO, 2001a). No caso particular do cálculo diferencial e integral, em que a noção de infinito está no cerne de todos os conceitos, conflitos teórico-computacionais atuam evidenciando o confronto entres *aspectos quantitativos* dos objetos estudados (propriedades determinadas a partir de um conjunto finito de valores) com seus *aspectos qualitativos* (propriedades que envolvam a noção de infinidade).

Durante o estágio de doutoramento realizado entre março de 2002 e março de 2003 no Mathematics Education Research Centre da University of Warwick, sob a supervisão do professor Tall, tive a oportunidade de discutir o trabalho que já havia sido realizado até então e apresentar resultados parciais em conferências internacionais (GIRALDO & CARVALHO, 2002b; GIRALDO et al., 2002a; GIRALDO et al., 2002b; GIRALDO & CARVALHO, 2003a; GIRALDO et al., 2003a). O aprofundamento de estudos na University of Warwick conduziu a novas reformulações teóricas. O levantamento bibliográfico levou-me a perceber que os efeitos das limitações associadas a representações computacionais é fortemente determinado pelo tipo de abordagem pedagógica em que estas são colocadas. Assim, o uso excessivo ou não criterioso de ambientes computacionais pode fazer com que as limitações das representações gerem limitações nas próprias imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes, mas o uso adequado pode convertê-las em um importante fator de enriquecimento de imagens de conceito. Na verdade, alguns resultados de pesquisa sugeriam que esta não era uma propriedade particular de representações computacionais, mas de quaisquer formas de referência a um conceito matemático utilizadas no processo de ensino. Então, conceituei inicialmente uma *descrição* como qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico que guarde limitações intrínsecas em relação à definição formal correspondente, e *conflito* como uma situação de confusão gerada por uma aparente contradição associada a uma descrição para um conceito matemático (GIRALDO & CARVALHO, 2003b; GIRALDO & CARVALHO, 2003c; GIRALDO et al., 2003b). A hipótese formulada nestes termos foi de que, dependendo da abordagem pedagógica adotada, situações de conflito podem levar tanto ao *estreitamento* – isto é ,à conversão das limitações de uma descrição em limitações nas imagens de conceito dos estudantes – quanto à expansão de imagens de conceito.

De volta ao Brasil em abril de 2003, entrei em fase de análise final e organização de resultados do estudo empírico qualitativo, que havia sido desenvolvido com estudantes de cálculo do curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ, antes de meu estágio na University of Warwick. A análise de dados fez com que alguns aspectos saltassem aos olhos. Em primeiro lugar, o que um participante percebia como *limitação* de uma descrição, não era necessariamente identificado como tal por outro. Isto é, uma mesma descrição dispara conflitos de maneiras diferentes para participantes diferentes. Em segundo lugar, para que a percepção de uma limitação atue efetivamente na imagem de conceito de um participante, não é necessário que tal percepção haja levado a uma situação de confusão. Essas novas reflexões, juntamente com uma nova revisão de bibliografia e com novas discussões levaram-me ainda à conclusão de que não há uma relação de oposição direta entre uma descrição para um conceito e a definição formal do conceito – pois estas habitam contextos distintos, um pedagógico e outro teórico-formal. Mais do que isso, em certas situações, a própria definição formal pode atuar como uma descrição, levando tanto ao estreitamento quanto à expansão de imagens de conceito[1]. Assim, o aspecto fundamental de descrições a ser destacado é a potencialidade de gerar conflitos. Desta forma, cheguei à formulação apresentada nesta tese, em que uma *descrição* é conceituada como *qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico, que não esgote o conceito a que se refere, ou seja, que guarde limitações em relação a este, no sentido em que evidencie certos aspectos e omita outros* (página 72) e *conflito* como *a percepção, por parte do estudante, de uma aparente contradição motivada pelas limitações de uma descrição, ou pelo confronto de mais de uma descrição* (página 74).

Os resultados desta tese vêem se desdobrando em novos estudos dos processos de ensino e aprendizagem em outros domínios da matemáticas, como números reais e geometria. Alguns resultados parciais desses estudos serão apresentados em breve (GIRALDO & CARVALHO, 2004a; GIRALDO & CARVALHO, 2004b; GIRALDO et al., 2004).

No capítulo 1 a seguir, apresento o referencial que embasa esta tese, revendo a teoria de imagens de conceito e discutindo a problemática do ensino de conceitos que envolvam a noção de infinito, através do trabalho de alguns autores sobre obstáculos epistemológicos. O capítulo 2, traz uma discussão de resultados de pesquisa com respeito ao uso de tecnologia computacional no ensino de matemática avançada. No capítulo 3, apresento o quadro teórico construído nesta tese, assim como a formulação das questões de investigação propostas. O capítulo 4 diz respeito ao contexto e à metodologia do estudo empírico. Em 5 e 6, apresento respectivamente as análises de resultados individuais e a discussão global dos resultados do estudo empírico.

[1]Por exemplo, em uma conversa informal com o colega Cássio Neri, ele comentou: 'Quando eu não sabia a demonstração regra de L'Hôpital, eu entendia melhor o teorema. Agora, quando eu penso no teorema, me vem a demonstração. E isto me impede de entender o teorema'.

Parte I

Fundamentação Teórica

Capítulo 1

Referencial teórico: imagens de conceito, raízes cognitivas e a noção de retidão local

Um primeiro fato deve nos espantar, ou pelo menos deveria nos espantar se não estivéssemos tão habituados com ele. Como é possível que haja gente que não compreende a matemática? Se a matemática não evoca nada a não ser as regras da lógica, aquelas aceitas por todos os espíritos bem formados, se sua evidência é fundada sobre os princípios que são comuns a todos os homens e que ninguém poderá negar sem ser louco, como é possível que haja tantas pessoas inteiramente refratárias a ela?

Henri Poincaré (POINCARÉ, 1908a), tradução nossa [1]

Apresentamos neste capítulo o embasamento teórico das questões de investigação formuladas nesta tese. A teoria de *imagens de conceito*, proposta inicialmente por David Tall e Shlomo Vinner no artigo – hoje clássico – *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity* (TALL & VINNER, 1981), sugere que o ensino de matemática deve visar a compreensão pelo estudante não apenas da construção formal dos conceitos, mas o enriquecimento, como

[1] *Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les Mathématiques? Si les Mathématiques n'invoquent que les règles de la logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien fait, si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant des personnes que y soient totalement refractaires?*

um todo, da estrutura cognitiva individual associada a estes. Com este propósito, uma gama ampla de representações e idéias relacionadas de todo tipo deve figurar na abordagem pedagógica de um dado conceito.

A noção de *raiz cognitiva* é sugerida mais tarde por Tall (TALL, 1989), como sendo um idéia âncora para um dado conceito, que, por um lado, é acessível aos estudantes no estágio de aprendizagem em questão e, por outro, encerra o potencial de fornecer uma base para a construção da estrutura teórica posterior. Segundo o autor (comunicação pessoal), a noção de raiz cognitiva foi motivada pelo desenvolvimento da abordagem gráfica para o ensino de cálculo (TALL, 1986b), por ele proposta, tendo a noção de retidão local como idéia central.

1.1 Imagens de conceito e definições de conceito

Na teoria desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner, **imagem de conceito** é definida como sendo:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.
>
> (TALL & VINNER, 1981, p.152), tradução nossa

A noção de imagem de conceito foi definida pela primeira vez, na forma acima, em (TALL & VINNER, 1981) e desenvolvida em diversos trabalhos subseqüentes, por exemplo (VINNER, 1983a; TALL, 1989; VINNER & DREYFUS, 1989; VINNER, 1991; TALL, GRAY & PITTA, 2000; TALL & LI, 1993; TALL & BILLS, 1998; GIRALDO et al., 2003a). Da definição acima, fica claro que só é possível falar da imagem de conceito de um indivíduo; não fazendo sentido descrever algo como uma imagem de conceito associada puramente ao conceito. Sendo assim, ao mencionarmos a *imagem de conceito* neste texto, estaremos sempre nos referindo a uma *imagem de conceito individual*, mesmo nos casos em que, por simplicidade, omitamos tal especificação. A imagem de conceito compõe-se de atributos de diferentes naturezas e graus de generalidade, e que podem ser representações visuais, bem como coleções de impressões ou experiências. A imagem de conceito de função real de um indivíduo, por exemplo, pode incluir elementos, tais como formas de representação (gráficos, fórmulas, tabelas, diagramas); elementos da definição (como domínio, contradomínio) propriedades específicas (como bijetividade, linearidade, monotonicidade); exemplos particulares (como certas funções familiares); possibilidades de manipulação (como operações, inversão); e assim por diante. Assim, incluem-se na imagem de conceito de um indivíduo todos os atributos associados ao conceito em questão na sua mente. Como lemos na definição acima, a imagem de conceito de um indivíduo não é uma estrutura estática, ela sofre transformações de acordo com o desenvolvimento cognitivo do sujeito, podendo ter atributos incluídos, excluídos ou modificados.

Além disso, os autores afirmam que um indivíduo pode ou não utilizar sentença de palavras para especificar um dado conceito, denominada **definição de conceito** (TALL & VINNER, 1981). Esta pode ser uma simples memorização por um indivíduo, bem como a expressão da compreensão do significado matemático do conceito ou ainda uma reconstrução pessoal da definição formal. Seja ela construída pelo próprio indivíduo ou simplesmente memorizada por ele, uma definição de conceito pode mudar ao longo do tempo, da mesma forma que a imagem de conceito. Desta forma, a imagem de conceito pode (ou não) incluir uma definição de conceito pessoal[2], que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal[3].

Consideremos os seguintes exemplos. Uma definição de conceito comumente encontrada entre estudantes em cursos iniciais de geometria euclideana é a seguinte: 'um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes'. Podemos facilmente imaginar que um estudante com esta definição de conceito forme um imagem de conceito incluindo propriedades matematicamente corretas, como: 'todo retângulo possui lados opostos paralelos', ou

[2]Após a publicação do artigo de 1981, em que a teoria é formulada pela primeira vez, os dois autores passam a adotar formulações sutilmente diferentes para a noção de definição de conceito. Tall passa a considerar a definição de conceito como *parte* da imagem de conceito; enquanto Vinner trata definição de conceito e imagem de conceito como estruturas excludentes, ou seja, a imagem de conceito é, de acordo com a formulação de Vinner, a estrutura cognitiva que inclui todos os atributos associados ao conceito, exceto a própria definição de conceito. Entretanto, segundo os próprios autores (comunicação pessoal), tal distinção é de natureza meramente formal, não acarretando em quaisquer diferenças relevantes para a teoria em si. Seguiremos neste texto a formulação de Tall, isto é, consideraremos a definição de conceito como incluída na imagem de conceito.

[3]Entendemos aqui por *definição formal* aquela consensualmente aceita pela comunidade matemática dentro de um dado contexto social, histórico e teórico.

'a área de um retângulo é igual ao produto dos comprimentos de seus lados', e assim por diante. Assim, tal estudante teria uma imagem de conceito rica e poderia ser confiante ao desenvolver raciocínios matemáticos a partir dela. Entretanto, sua imagem de conceito sempre poderá traí-lo, uma vez que, segundo sua definição de conceito, um quadrado não seria considerado um retângulo (diferindo portanto da definição formal usualmente aceita). Um segundo estudante pode ser capaz de recitar a definição correta: 'um retângulo é um quadrilátero eqüiângulo', sem ter conhecimento das propriedades da figura geométrica, ou construir uma imagem de conceito com propriedades incorretas como: 'todo retângulo possui diagonais perpendiculares entre si'.

Da mesma forma que uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda à definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não é necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui um definição de conceito incorreta. Em resumo, uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes. Assim sendo, esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes.

Outros autores chamam atenção para a importância da distinção entre definição de conceito e imagem de conceito do ponto de vista pedagógico. Por exemplo, tratando da aprendizagem do conceito de limite, Cornu comenta que:

> Uma das grandes dificuldades do ensino e aprendizagem do conceito de limite reside não apenas na sua riqueza e complexidade, mas também na extensão em que os aspectos cognitivos não podem ser puramente gerados a partir da definição formal. [...] Lembrar a definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra.
>
> (CORNU, 1991, p.153), tradução nossa

O autor afirma que a forma como muitos problemas envolvendo limites são resolvidos depende não da definição, mas de atributos da conceituação intuitiva. Desta forma, muitos estudantes são capazes de resolver uma ampla gama de exercícios sem haver entendido o formalismo da definição em absoluto. Segundo Cornu, a maioria dos estudantes, mesmo em estágios avançados de seus estudos, não dominam a idéia formal de limite – mas isto não os impede de resolver exercícios e problemas e, conseqüentemente, obter bons resultados em avaliações.

Vinner afirma que:

> [...] muitas palavras em linguagem diária não têm definições (apesar de serem "definidas" de alguma forma em dicionários). Pense em "carro", "casa", "verde", "bonito", etc., e você imediatamente percebe que para entender, por exemplo, a sentença: "meu bonito carro verde está estacionado em frente à minha casa" você não consulta definições. [...] Entretanto, é necessário consultar definições ao tentar entender a sentença: "dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é o que têm área máxima".
>
> (VINNER, 1991, p.67), tradução nossa

Sem dúvida, um estudante em matemática avançada deve ter clareza de que a definição de um conceito é o critério decisivo em um desenvolvimento teórico que o envolva, entretanto, para que este objetivo seja atingido, é necessário que no estágio inicial o estudante trave contato com mais do que simplesmente a definição formal. Tall ressalta que a própria idéia de *definir um conceito* no sentido matemático – em oposição a de *descrevê-lo* – é particularmente difícil de compreender (TALL, 1992, p.496). Vinner afirma que, em matemática, para se manipular um conceito, necessita-se de uma imagem de conceito e não somente de uma definição de conceito; e que se um conceito é introduzido por meio de uma definição somente, esta permanecerá desativada e pode até mesmo ser esquecida (VINNER, 1991). Pelo contrário, para que uma definição de conceito seja provida de sentido e possa desta forma se converter num atributo ativo no pensamento matemático de um indivíduo, deve haver uma imagem de conceito pré-existente. Segundo Vinner, somente produzimos definições de conceito como resultado de experiências prévias com o conceito, isto é, *nossas definições de conceito são descrições de nossas imagens de conceito* (VINNER, 1983a, p.294). É claro que podemos tomar contato com a definição de um conceito antes de ter qualquer experiência com o mesmo, mas a experiência é necessária para a construção de uma definição de conceito conectada à imagem de conceito, à qual recorramos efetivamente ao nos referirmos ao conceito.

Assim, para Tall e Vinner, *adquirir um conceito* significa *formar uma imagem de conceito* para este; *entender* significa *ter uma imagem de conceito.*

Vinner afirma que o uso de definições é uma questão crucial no ensino de matemática avançada (VINNER, 1991). Esta questão reflete sobretudo o conflito entre a estrutura da matemática (como concebida por matemáticos profissionais) e os processos de aquisição de conceitos e, como conseqüência, de produção de conhecimento matemático. A comunidade matemática aceita consensualmente o fato de que matemática é uma teoria dedutiva e, como tal, sustenta-se em noções primárias e axiomas a partir dos quais teoremas e proposições são estabelecidos. Esta organização formal não corresponde ao processo por meio do qual a matemática é criada[4], mas é sob esta forma que ela tende a ser apresentada em livros texto avançados. O autor enumera uma série de premissas nas quais se baseiam a apresentação e organização de muitos livros texto e aulas de matemática:

1. Conceitos são principalmente adquiridos por meio de suas definições.

2. Estudantes usarão definições para resolver problemas e demonstrar teoremas, quando necessário, de um ponto de vista matemático.

3. Definições devem ser mínimas. (Isto é, definições não devem conter partes que podem ser matematicamente deduzidas a partir de outras partes da definição.)

4. É desejável que definições sejam elegantes.

5. Definições são arbitrárias. (Isto é, definir em matemática se reduz a atribuir nomes a entidades, ao gosto do autor.)

Ao desenvolver esta teoria, os autores questionam e criticam este modelo de abordagem pedagógica. Isto é, a teoria de imagens de conceito pode ser pensada como

[4]Alguns autores vão ainda mais longe: Steiner sugere que a formalização de demonstrações demanda uma personalidade obsessiva-compulsiva – que seria incapaz de criatividade matemática (STEINER, 1975).

uma reação ao modelo de pedagogia em que a organização dos conteúdos herda a estrutura formal da teoria matemática[5].

1.1.1 Fatores de conflito potencial e fatores de conflito cognitivo

O significado subjetivo de conceitos e objetos matemáticos extrapola o contexto da própria matemática e alude a todo tipo de idéias, experiências e emoções, que podem diferir radicalmente de cultura a cultura e mesmo de indivíduo a indivíduo[6]. Estas alusões subjetivas certamente têm efeitos nas imagens de conceito individuais desenvolvidas durante a aprendizagem de matemática.

Muitos autores têm se preocupado com a maneira por meio da qual concepções prévias de estudantes atuam na construção de uma nova teoria, ou na aquisição de um novo conceito. Cornu, por exemplo, afirma que modelos individuais de conceitos matemáticos são elaborados a partir de modelos espontâneos, isto é, modelos existentes antes da aprendizagem do conceito matemático e que são originados, por exemplo, na experiência pessoal diária (CORNU, 1981). Sobre o conceito de limite, o autor comenta que:

> Notamos que a idéia de limite denota muito freqüentemente uma barreira que não podemos ultrapassar, da qual se pode ou não se pode aproximar. Ela às vezes é vista como alcançável, às vezes como inalcançável.
>
> (CORNU, 1981), tradução nossa

Tall e Vinner (TALL & VINNER, 1981) assinalam que os atributos contidos na imagem de conceito não são necessariamente sempre coerentes entre si, isto é, a

[5]A forma mais radical deste modelo é provavelmente representada pelo movimento conhecido como *Matemática Moderna* que surgiu em meados da década de 50, a partir dos ecos do movimento formalista do início do século XX (p.ex. (KLINE, 1974)). Desde o seu princípio, a polêmica em torno do movimento foi alimentada por fiéis defensores (p.ex. (STONE, 1961)) e críticos veementes, dentre os quais o eminente matemático Richard Courant.

[6]Um belo exemplo é dado por Sal Restivo (RESTIVO, 1991, p.164). O autor comenta que no conto *Notes from the Underground*, Dostoevsky usa a expressão "$2+2=4$" para simbolizar o mundo opressivo da vida cotidiana, e "$2+2=5$" para simbolizar os impulsos criativos e anti-autoritários do ser humano (DOSTOEVSKY, 1961). Os mesmos símbolos são usados por George Orwell em *1984*, mas com significados quase que opostos: "$2+2=4$" representa a verdade, a beleza e a libertação na vida em sociedade, e "$2+2=5$" tudo que é autoritário, totalitário e opressivo (ORWELL, 1954).

imagem de conceito não é necessariamente consistente em todas as fases de seu desenvolvimento, o que pode gerar conflitos[7]. Uma parte conflitante da imagem de conceito é então denominada um **fator de conflito potencial**. Os autores definem ainda **imagem de conceito evocada** como sendo a porção da imagem de conceito que é ativada em um momento particular, a partir de uma certa demanda externa (como por exemplo, resolver um problema, responder ou formular uma questão, identificar uma propriedade e assim por diante). Quando um fator de conflito potencial é evocado (isto é, partes conflitantes da imagem de conceito são simultaneamente ativadas) este passa a ser denominado **fator de conflito cognitivo**.

Por exemplo, uma concepção (incorreta) que comumente encontra-se incluída nas imagens de conceito de estudantes para limite de seqüências é a seguinte: *uma seqüência aproxima-se indefinidamente de seu limite, sem nunca atingí-lo.* A imagem de conceito de um estudante que contenha este atributo pode ainda incluir propriedades algébricas com limites, como $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$. Tal porção da imagem de conceito se constituiria num fator de conflito potencial, pois a concepção de que uma seqüência não pode atingir seu limite é conflitante com as operações algébricas. Este fator de conflito potencial pode ser evocado, tornando-se um fator de conflito cognitivo, durante a resolução de um problema algébrico de limites onde pelo menos uma das parcelas seja uma seqüência cujos valores dos termos x_n coincidam com o valor do limite para n suficientemente grande (por exemplo $x_n = \left[\frac{1}{n}\right]$, onde $[a]$ denota a parte inteira do número real a). De fato, tal concepção fora observada em (TALL, 1980).

A atualização de fatores de conflito potencial como fatores de conflito cognitivo pode se constituir num obstáculo para o desenvolvimento da imagem de conceito. Por outro lado, fatores de conflito potencial podem jamais ser evocados, permanecendo como porções inativas da imagem de conceito, sem nunca serem percebidos pelo

[7]A ocorrência de *conflitos* no processo de ensino e aprendizagem de cálculo é um dos temas principais desta tese. No entanto, o termo será aqui empregado num sentido e num contexto distintos dos estabelecidos originariamente por Tall e Vinner, como esclarecemos nos capítulos seguintes. As noções de fator de conflito potencial e fator de conflito cognitivo ocuparam um lugar de destaque no artigo original sobre imagens de conceito (TALL & VINNER, 1981). Embora o tema conflitos seja por diversas vezes tratado pelos autores em trabalhos posteriores (p.ex. (VINNER, 1983a; VINNER, 1983b; TALL, 1989; TALL, 1992)), as conceituações estabelecidas naquele artigo não foram exploradas de forma significativa.

indivíduo ou provocando, em certos casos, uma vaga sensação de insegurança. Os autores sugerem ser esta uma séria causa de problemas de aprendizagem em matemática, quando o estudante tem a sensação de que há algo errado em algum lugar, sem conseguir identificar a origem da dificuldade. Tall e Vinner afirmam que, embora possam gerar obstáculos quando ativados, é necessário que fatores de conflito potencial se atualizem como fatores de conflito cognitivo, para que possam assim ser conscientemente entendidos e desta forma tratados.

Um tipo de fator de conflito potencial particularmente grave é aquele que envolve um conflito diretamente com a definição de conceito. Um fator de conflito potencial com esta característica pode, segundo os autores, impedir seriamente a aprendizagem de uma teoria formal, pois um estudante pode se tornar absolutamente seguro em suas interpretações restritas ou errôneas da teoria e passar a considerar o formalismo como um aspecto burocrático, inútil ou supérfluo. Assim, o estudante hipotético do exemplo acima pode memorizar a definição formal correta para o limite de uma seqüência sem jamais atribuir qualquer significado a ela ou conectá-la com o restante de sua imagem de conceito.

Em um trabalho posterior, Vinner coloca duas recomendações veementes ("regras didáticas", nas palavras do autor) quanto a conflitos cognitivos[8] em educação matemática (VINNER, 1991, p.79): evitar conflitos desnecessários e iniciar conflitos cognitivos com estudantes somente quando estes são necessários para motivar os estudantes a alcançar um nível de compreensão mais profundo.

O autor afirma que conflitos cognitivos somente podem ter efeitos benéficos para estudantes candidatos a matemática avançada e que, evitá-los é a melhor estratégia didática para os demais. Este ponto de vista difere daquele defendido inicialmente em (TALL & VINNER, 1981), quando a atualização de fatores de conflito potencial é colocada, sem restrições, como uma condição necessária para a superação dos obstáculos associados aos mesmos.

[8]Embora não seja feita aqui qualquer referência explícita às noções de fator de conflito potencial ou fator de conflito cognitivo, estabelecidas em (TALL & VINNER, 1981), no contexto do artigo, Vinner se refere a aspectos conflitantes na imagem de conceito.

1.2 Imagens de conceito e unidades cognitivas

William Thurston ressalta que:

> Matemática é incrivelmente compressível: você pode lutar, passo a passo, para trabalhar algum processo ou idéia com diversas abordagens. Mas, uma vez que você a tenha realmente entendido e tenha a perspectiva mental para vê-la como um todo, há com freqüência uma tremenda compressão mental. Você pode arquivá-la, relembrá-la rápida e completamente quando necessário, e usá-la como simplesmente um passo em algum outro processo mental. O *insight* que acompanha esta compressão é uma das verdadeiras alegrias da matemática.
>
> (THURSTON, 1990, pp.846-847), tradução nossa

Alguns anos depois do desenvolvimento inicial da teoria de imagem de conceito, Tony Barnard e David Tall (BARNARD & TALL, 1997) introduziram o termo **unidade cognitiva** para designar *uma porção da imagem de conceito em que um indivíduo é capaz de focar atenção conscientemente em um determinado momento* (ver também (BARNARD 1999; TALL & CROWLEY, 1999; TALL & DeMAROIS, 1999; TALL & McGOWEN, 1999)). Assim, uma unidade cognitiva pode ser um símbolo (como os sinais das quatro operações elementares), um fato específico (como o resultado de uma dada operação), uma propriedade geral (como o fato da soma de números pares é um número par), uma relação (como o fato de 10 e 21 serem primos entre si), um passo em um argumento, e assim por diante. Os autores destacam duas habilidades fundamentais no desenvolvimento de um raciocínio matemático, relacionadas com a noção unidade cognitiva:

(i) comprimir informação matemática, formando unidades cognitivas e

(ii) construir conexões entre unidades cognitivas de tal forma que informações necessárias possam ser facilmente acessadas.

Segundo os autores, a quantidade de informação que um indivíduo é capaz de manter no foco de sua atenção num período curto de tempo é limitada (TALL, 2000). Desta forma, a teoria de unidades cognitivas enfoca a capacidade humana de comprimir estruturas de informação matemática, formando novas estruturas que, conforme a demanda do pensamento do indivíduo, podem, por sua vez, ser usadas como elementos de um raciocínio mais geral ou reabertas, dando acesso aos elementos primários que as compuseram originalmente. Barnard observa que unidades cognitivas não só são pequenas o suficiente para poderem permanecer no foco consciente da atenção enquanto são usadas, como atuam num nível operativo (BARNARD 1999). Isto é, além de poupar espaço mental, substituindo uma coleção de itens, uma unidade cognitiva carrega a estrutura original da coleção que a gerou, mantendo com esta uma conexão ativa. O autor afirma que:

> Pode-se dizer que o seu valor [de unidades cognitivas] em pensamento matemático reside no fato dessas se constituirem em um todo que é ao mesmo tempo menor e maior que a soma de suas partes – menor no sentido de ser capaz de caber no foco da atenção de curto período, e maior no sentido de possuir características holísticas que são capazes de orientar a sua manipulação.
>
> (BARNARD 1999, p.404), tradução nossa

A *compressibilidade* de idéias matemáticas reflete-se em muitos exemplos da evolução histórica da própria matemática. O conceito de função, por exemplo, anteriormente concebido como um processo operacional entre variáveis relacionadas por meio de uma expressão simbólica, passa a assumir ele próprio o papel de objeto, que pode ser elemento de um conjunto, variável de uma operação de outra função (p.ex. (KLINE, 1954; GRATTAN-GUINNESS, 1970; KATZ, 1992)).

Fenômenos relacionados à produção de estruturas cognitivas por meio da síntese de estruturas anteriores têm sido amplamente discutidos em educação matemática. Por exemplo, de acordo com a *teoria varifocal* de Richard Skemp, uma coleção de entidades conectadas pode ser comprimida como uma única entidade, que pode ser manipulada tanto como um conceito, quanto como um esquema cognitivo – um conceito pode ser desempacotado como um esquema e um esquema visto como um conceito (SKEMP, 1979). Outras teorias discutem a dualidade entre processos e objetos em educação matemática. A teoria de *proceitos* [9], difundida por David Tall e Eddie Gray, aponta a natureza dual de um símbolo matemático – *processo* e *conceito* – como um fator

[9]O termo no original em inglês é *procept*, neologismo composto pelos autores da junção das palavras *conceito* e *processo*. Seguindo esta construção, traduzimos o termo aqui por *proceito*, formado de *processo* e *conceito*.

decisivo para a aprendizagem de matemática (TALL, GRAY & PITTA, 2000). Em sua teoria de *reificação*, Ana Sfard identifica, de uma perspectiva histórica e epistemológica, três estágios no desenvolvimento de conceitos matemáticos: interiorização, condensação e reificação (SFARD, 1991). A autora descreve o estágio final de reificação como uma mudança ontológica, em que um processo conhecido se condensa num objeto novo – uma habilidade, subitamente adquirida, para enxergar algo familiar de uma perspectiva completamente nova. A teoria de *encapsulação* de objetos de Ed Dubisnky sugere que uma coleção de processos e objetos (razoavelmente) coerentes forma um esquema, no qual os elementos originais interagem por meio de relações de ação, interiorização, encapsulação, coordenação reversa e generalização (DUBINSKY, 1991).

Segundo Barnard , o que distingue a noção de unidade cognitiva das demais teorias de compressibilidade e processo-objeto é a noção de *influência ativa*: a consciência dos elementos específicos da estrutura interna de cada unidade cognitiva atua como um guia para a conseqüente manipulação de outras unidades cognitivas (BARNARD 1999).

A teoria aqui discutida sugere que o enfoque pedagógico de um conceito matemático deve estimular a construção de conexões múltiplas e flexíveis entre unidades cognitivas e dentro das mesmas. Com este objetivo, o ensino do conceito de derivada deve incluir uma gama ampla de abordagens e representações, como por exemplo as seguintes interpretações para a derivada de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, listadas em (ARTIGUE, 1991, p.175):

- o limite da razão $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quando h tende a 0;
- a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x_0[10];
- o coeficiente de primeira ordem na expansão para f em torno de x_0[11];
- o coeficiente de primeira ordem na expansão em série de Taylor para f em torno de x_0;
- o coeficiente característico da aplicação linear tangente a f em x_0;

[10]Provavelmente a abordagem mais popular no ensino universitário brasileiro.

[11]Abordagem adotada no currículo francês.

- o número ou a função obtida pela aplicação das regras usuais de diferenciação, sabidas as derivadas das funções elementares;

- a inclinação de uma porção altamente magnificada do próprio gráfico[12].

Podemos incluir a esta lista, pelo menos:

- a inclinação local do gráfico de f em x_0[13];

- a tangente do ângulo entre a reta tangente ao gráfico de f em x_0 e o eixo horizontal;

- taxa de variação instantânea de f em x_0;

além das interpretações da função derivada em outras ciências:

- velocidade instantânea (em física);

- taxa de crescimento populacional (em ecologia);

- custo marginal (em economia).

Tall (TALL, 2000) observa que cada representação chama atenção para determinadas características do conceito e, ao mesmo tempo, obscurece outras. Assim, as representações presentes em uma pedagogia diversificada (como por exemplo as relacionadas acima) podem se complementar, atuando para a formação de imagens de conceito ricas em conexões flexíveis de unidades cognitivas. A ênfase em certos aspectos e a negligência de outros pode resultar na atrofia dos aspectos negligenciados. Em particular, a literatura de educação matemática fornece exemplos em que esse fenômeno se verifica em abordagens fortemente baseadas em recursos computacionais (como apresentaremos no capítulo seguinte). No que toca o uso do computador no ensino de matemática, Tall defende a posição de que ambientes computacionais podem atuar no processo cognitivo como um complemento da atividade mental humana:

[12]Esta abordagem alternativa foi sugerida por David Tall pela primeira vez em (TALL, 1986a; TALL, 1986b) e adotada pelo currículo inglês. Este é um dos principais temas desta tese e será discutido em detalhes na seção 1.4.

[13]Abordagem difundida em (HUGHES-HALLET et al., 1998).

> Enquanto o computador está confinado a algoritmos para desenvolver cálculos e representar soluções em números e figuras, a mente matemática dispõe de todo tipo de associações de um cérebro multi-processador. [...] O cérebro não está naturalmente configurado para rápida e eficiente aritmética. Em lugar disso, ele usa com freqüência conexões entre unidades cognitivas.
>
> (TALL, 2000, p.8), tradução nossa

Por exemplo, durante a realização da tarefa de esboçar o gráfico de uma função do segundo grau, um ser humano pode ativar uma unidade cognitiva contendo a informação: *o gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola.* Por outro lado, os programas gráficos atualmente aplicados no ensino de funções utilizam, de forma geral, algoritmos baseados na interpolação de um conjunto finito de pontos. Portanto, para o computador, a natureza da função é uma informação indiferente para a tarefa de traçar seu gráfico. Entretanto, a capacidade da máquina de efetuar cálculos pesados com eficiência e rapidez é imensamente superior à do cérebro humano. Baseado nesta relação e oposição – ou complementaridade – Tall (TALL, 2000) afirma que o uso de ambientes computacionais no ensino de matemática pode ser positivamente potencializado para estimular o desenvolvimento de imagens de conceito ricas e conexões flexíveis entre unidades cognitivas.

1.3 Raízes cognitivas

Discutindo o ensino do conceito de função, Sierpińska comenta que:

> A mais fundamental concepção de função é a de uma relação entre magnitudes variáveis. Se isto não é desenvolvido, representações com equações e gráficos perdem seu significado e se tornam isoladas umas das outras. [...] Introduzir funções para jovens estudantes pela sua definição moderna elaborada é um erro didático – uma inversão anti-didática.
>
> (SIERPIŃSKA, 1988, p.572), tradução nossa

De fato, como estabelecido na seção 1.1, a definição formal de um conceito, de forma geral, não se presta como um ponto de partida adequado para a aprendizagem. Esta constatação sugere a discussão sobre o planejamento da abordagem pedagógica inicial de um conceito matemático.

Muitos autores contribuem com essa discussão. Malik, por exemplo, analisa aspectos históricos relativos ao ensino de funções (MALIK, 1980). O autor observa que, em geral, em cursos de pré-cálculo apresenta-se a definição moderna para função, em linguagem de conjuntos. Entretanto, nos cursos de cálculo lida-se exclusivamente com funções definidas por expressões algébricas, cujos gráficos são curvas suaves (a menos de, no máximo, um conjunto discreto de pontos). Desta forma, para cobrir os exemplos de funções estudados em cálculo seria suficiente a definição estabelecida por Euler no século XVIII – segundo a qual uma função era uma expressão analítica composta de uma quantidade variável, de números e constantes. Malik conclui que, como a definição jamais é experimentada em toda a sua generalidade, esta deixa de fazer sentido para os estudantes, que passam a conceber a definição como algo desprovido de significado e sem vínculo com o conceito.

Tall critica uma estratégia pedagógica num certo sentido oposta àquela relatada por Malik: na esperança de "simplificar" os conteúdos, professores apresentam conceitos matemáticos num contexto mais restrito do que aqueles em que eles se inserem (TALL, 1989). Por exemplo, professores de cálculo freqüentemente apelam à experiência prévia dos estudantes com tangência a círculos e a outras curvas elementares como motivação para o conceito de reta tangente no sentido do cálculo infinitesimal. Uma possível conseqüência desta estratégia, como observado em (VINNER, 1983b), por exemplo, é que os estudantes desenvolvam imagens de conceito em que a noção de reta tangente esteja fortemente vinculada ao número de intersecções entre a curva e reta – o que, é claro, não corresponde à noção de tangência no sentido do cálculo. Assim, a apresentação de conceitos em contextos restritos pode ter como efeito a formação de imagens conceituais restritas.

Neste contexto, coloca-se a questão de como motivar nos estudantes a inserção em contextos matemáticos teóricos mais complexos, sem pecar pela simplificação excessiva nem pelo formalismo excessivo. Assim, a noção de raiz cognitiva é uma tentativa de resposta para a pergunta: uma vez que a definição formal de um conceito não se caracteriza como referência pedagógica inicial adequada, *que características deve satisfazer tal referência inicial?* Tall define **raiz cognitiva**, no mesmo trabalho citado acima (TALL, 1989), como sendo *um conceito-âncora que o estudante acha fácil* *de compreender, e que, ainda assim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída.* A idéia de raiz cognitiva foi desenvolvida em trabalhos posteriores. Após a formulação da teoria de unidades cognitivas, a noção de raiz cognitiva foi reformulada nestes termos, como um tipo especial de unidade cognitiva que se relaciona com o conhecimento familiar ao estudante que está começando um novo desenvolvimento conceitual, permitindo a conexão entre seus conhecimentos inicias e aqueles a serem desenvolvidos. Em (TALL, 2000), o autor redefine raiz cognitiva como *uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior.* A reformulação da noção raiz cognitiva como uma unidade cognitiva especial implica na evidência de um aspecto crucial de sua natureza: como uma unidade cognitiva é *parte da imagem de conceito* individual, uma raiz cognitiva também deve sê-lo. Assim, para que um idéia possa ser caracterizada como raiz cognitiva, é necessário que essa seja familiar para o estudante – isto é, que seja um atributo de sua imagem de conceito. Em resumo, uma raiz cognitiva pode ser definida como uma unidade cognitiva atendendo a duas características fundamentais:

(I) fazer sentido (ao menos potencialmente) para o estudante no estágio em questão;

(II) permitir expansões cognitivas para desenvolvimentos teóricos posteriores.

Em (TALL, McGOWEN & DeMAROIS, 2000)), as duas características acima são desdobradas em quatro aspectos:

(i) ser uma unidade cognitiva do conhecimento central do estudante no início da seqüência de aprendizagem;

(ii) permitir o desenvolvimento inicial através da estratégia de expansão cognitiva;

(iii) conter a possibilidade de significado teórico a longo prazo, em desenvolvimentos teóricos posteriores;

(iv) ser robusta o suficiente para permanecer útil enquanto a compreensão se desenvolve, tornado-se mais sofisticada.

1.3.1 Organizadores genéricos

A motivação inicial para a formulação da idéia de raiz cognitiva foi a construção de um embasamento teórico para a concepção do programa de computador *Graphic Approach to Calculus* (TALL et al., 1990), planejado como principal recurso de apoio de uma abordagem cognitiva para o cálculo, que estava em processo de desenvolvimento na ocasião. O *Graphic Approach to Calculus* é uma segunda versão do programa *Graphic Calculus* (TALL, 1986b), desenhado como parte da tese de doutorado de David Tall (TALL, 1986a). Mais, tarde, foi ainda desenvolvida uma versão mais moderna do programa (BLOCKLAND et al., 2000).

Em sua tese de doutorado, Tall toma como base a noção de *organizador avançado*, definido como um conjunto de material introdutório para uma tarefa de aprendizagem, apresentado num nível de generalidade e abstração mais elevado que a própria tarefa e explicitamente relacionado tanto com as idéias existentes na estrutura cognitiva do sujeito quanto com a tarefa; isto é uma ligação entre o que o sujeito já sabe e a tarefa de aprendizagem (AUSUBEL et al., 1968). A partir desta noção, Tall define **organizador genérico** como um organizador avançado apresentado sob a forma de *um ambiente de aprendizagem (ou micromundo) que permita ao usuário manipular exemplos e contra-exemplos de um conceito matemático específico ou um sistema de conceitos relacionados.* Organizadores genéricos podem ser ambientes computacionais ou de outra natureza (como por exemplo materiais concretos) planejados para a aprendizagem de conceitos mais abstratos. O autor ressalta que a disponibilidade de contra-exemplos é particularmente fundamental em conceitos mais avançados (como convergência, continuidade e diferenciabilidade) quando as definições são tão intrincadas que freqüentemente os estudantes têm dificuldades para lidar com situações onde estas não se aplicam (como seqüências divergentes, funções descontínuas ou não diferenciáveis).

O *Graphic Calculus* foi estruturado na forma de organizadores genéricos para conceitos fundamentais do cálculo, como derivada, integral, equações diferenciais. Em particular, o organizador genérico para derivada, chamado *Magnify*, que se baseia na noção de *retidão local* [14] (discutida em detalhes na seção 1.4), permite ao usuário

[14] *Local straightness*, no original em inglês.

traçar gráficos de funções e ampliar partes destes, observando que uma função diferenciável tende a adquirir a aparência de uma reta quando altamente magnificada, enquanto uma função não diferenciável preserva seu aspecto "enrugado". A figura 1.1, abaixo, exemplifica telas geradas pela última versão do *Graphic Calculus*, mostrando o processo de magnificação local de curvas diferenciáveis e não diferenciáveis.

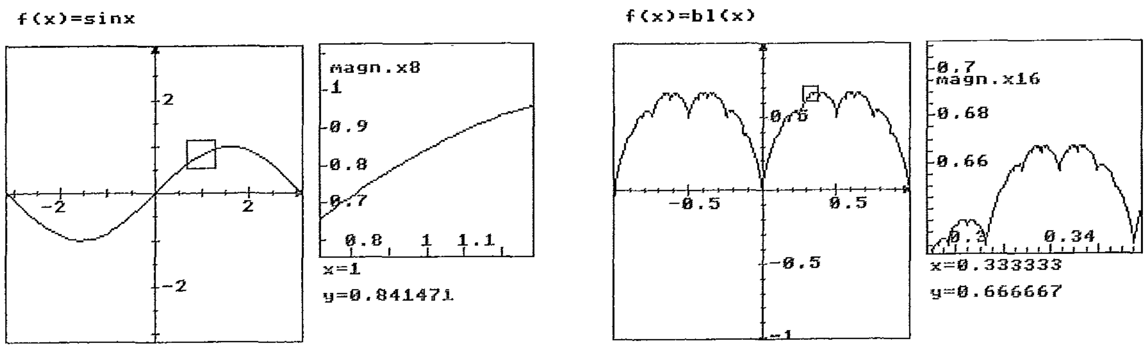


Figura 1.1: Telas geradas pelo programa *Graphic Approach to Calculus*, para curvas diferenciáveis e não diferenciáveis.

A partir de (TALL, 1989), a noção de organizador genérico é reavaliada. Tall afirma que o planejamento de um organizador genérico requer a escolha de uma importante idéia fundamental como foco central – uma idéia que além de ser familiar para o estudante, o ajude a olhar mais profundamente a teoria (ver também (TALL, 2000)). Daí a necessidade da formulação da noção raiz cognitiva. A noção de retidão local é mencionada em (TALL, 1989) como o principal exemplo de raiz cognitiva e como base para o organizador genérico *Magnify* (como discutiremos na seção 1.4).

1.4 A noção de retidão local

Os argumentos apresentados nas seções 1.1 e 1.3 sugerem que, em geral, a definição formal de um conceito não é uma raiz cognitiva adequada para este. Particularmente no caso do conceito de derivada, a definição formal baseia-se na noção de limite – talvez uma das idéias menos acessíveis à intuição humana em toda a matemática, como a sua própria evolução histórica testemunha (p.ex. (KLINE, 1954; GRATTAN-GUINNESS, 1970)).

Diversos autores relatam problemas relativos à aprendizagem dos conceitos de limite e derivada. Cornu, por exemplo, observou que muitos estudantes encapsulam (nos termos da teoria de encapsulação de Dubinsky) o processo de limite de *diminuir indefinidamente* em um objeto *indefinidamente pequeno* (um número real positivo menor que todos os demais reais positivos) – um *infinitésimo cognitivo*[15], na denominação do autor – que passa a integrar suas imagens de conceito (CORNU, 1981). Tall constatou que estudantes freqüentemente acreditam que uma propriedade válida para todos os termos de uma seqüência deve também valer para o limite (TALL, 1986a). Esta crença foi chamada pelo autor de *propriedade genérica de limite*. Um exemplo típico é a crença de que a seqüência $x_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}$ converge para um número menor que 1 (às vezes mencionado como 'o último número real antes de 1'). Além disso, para muitos estudantes, tal crença não é incoerente como o fato do limite da seqüência ser 1, pois estes interpretam a palavra 'limite' neste caso como uma 'barreira superior' que a seqüência não pode ultrapassar. Assim, além da propriedade genérica de limite, observa-se aqui um processo em que atributos associados ao uso cotidiano do termo 'limite' transmitem-se à imagem de conceito da noção matemática de limite. Em um trabalho posterior, Cornu comenta que um infinitésimo cognitivo é um exemplo de propriedade genérica de limite, em que objeto encapsulado adquire as propriedades dos elementos do processo (CORNU, 1991). No mesmo texto, o autor menciona ainda o fato de que os quantificadores 'existe' e 'para todo', que figuram na definição de limite por meio de epsilons e deltas, possuem significados sutilmente diferentes daqueles utilizados em linguagem cotidiana, o que também pode se converter em atributos na imagem de conceito do conceito (da mesma forma que o próprio termo 'limite'). Estas questões serão revistas na seção 1.5.

Desta forma, a definição formal de derivada não se caracteriza como uma raiz cognitiva para o conceito, pois, como essa fundamenta-se no conceito de limite, não atende à condição fundamental (I) da definição de raiz cognitiva (embora a condição (II) certamente seja atendida).

Referenciando-se a sua obra anterior, Tall comenta que:

[15]Uma evidência de que a questão dos infinitésimos como objetos matemáticos se faz presente não só nas mentes de estudantes, mas também preocupa matemáticos profissionais (pelo menos até há pouco tempo), é a elaboração do sistema dos números hiperreais na década de 1960 (ROBINSON, 1966). Esta estrutura, cuja construção depende fortemente de uma versão do axioma da escolha, inclui todos os números reais além de objetos chamados *infinitésimos*, com as características do resultado do processo de encapsulação observado por Cornu.

> Havendo afirmado categoricamente que eu acho que a noção formal de limite é um lugar inteiramente errado para começar o cálculo (embora seja precisamente o lugar certo para começar um desenvolvimento axiomático em análise), é necessário explicar de que forma uma abordagem baseada em retidão local para o cálculo deve começar.
>
> (TALL, 2002, p.15), tradução nossa

A noção de retidão local está baseada na percepção humana de que um objeto curvo parece reto quando olhado de muito perto (TALL, 1989; TALL, 1992; TALL, 2000; TALL, 2002; GIRALDO & CARVALHO, 2003a; GIRALDO et al., 2003a). Numa abordagem baseada na noção de retidão local, a derivada é introduzida a partir do processo computacional de magnificação local, em que uma porção de uma curva é altamente ampliada numa tela de computador. A derivada de uma função é apresentada como a inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local. Assim, a derivada pode ser apreendida a partir da variação do próprio gráfico. O organizador genérico associado é um ambiente computacional onde o estudante possa mudar a janela gráfica e observar as conseqüentes mudanças de aspecto do gráfico visualizado (como os propostos pelo autor em (TALL, 1986b; TALL et al., 1990; BLOCKLAND et al., 2000)). As figuras abaixo ilustram o processo de magnificação local de curvas diferenciáveis e não diferenciáveis. A figura 1.2 mostra a magnificação da curva $y = x^2$ em torno do ponto $x_0 = 1$. A curva adquire o aspecto da reta $y = 2x - 1$, a tangente no ponto. Em 1.3 vemos a magnificação da função *blancmange*[16], em torno de $x_0 = \frac{1}{2}$. Como a função não possui derivada em nenhum ponto, seu gráfico mantém o aspecto 'enrugado'.

[16] A crença de que uma função contínua deveria ser derivável exceto possivelmente num subconjunto discreto de seu domínio era dominante na matemática até meados do século XIX (POINCARÉ, 1899). A prova da existência de funções contínuas sem derivada em nenhum ponto é devida a Weiertrass em 1872. Outro exemplo de uma função com tal propriedade foi dado por Takagi (TAKAGI, 1903). A função de Takagi foi batizada por Tall (TALL, 1982) como *função blancmange*, devido à forma de seu gráfico, que supostamente lembraria um tipo de pudim francês. A função blancmangeblancmange pode ser definida para $x \in [-1,1]$ pela soma da série $b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ onde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções modulares indutivamente definidas como segue:

$$\begin{aligned} b_1(x) &= 1 - |x| \\ b_{n+1}(x) &= \tfrac{1}{2^n} - \left|b_n(x) - \tfrac{1}{2^n}\right| \end{aligned}$$

Cada b_n é não diferenciável nos pontos na forma $x = \pm\frac{k}{2^{n-1}}$, para $k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1$. A função b é contínua, desde que é o limite uniforme de uma série de funções contínuas, mas não possui derivada em nenhum ponto. Para a demonstração da não diferenciabilidade da função blancmange, veja (TALL, 1982) ou (HAIRER & WARNER, 1997, pp.264-165).

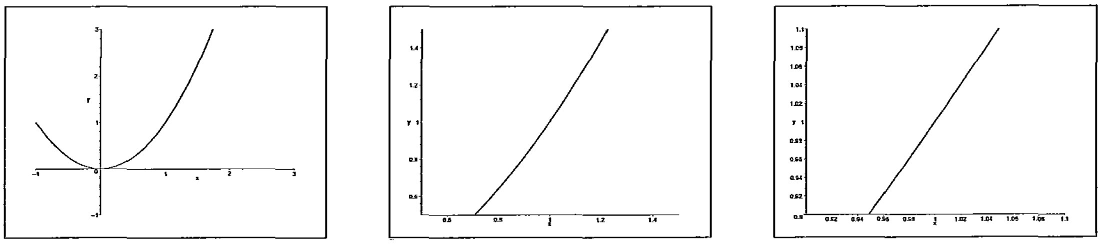


Figura 1.2: O processo de magnificação local da curva $y = x^2$ em torno de $x_0 = 1$.

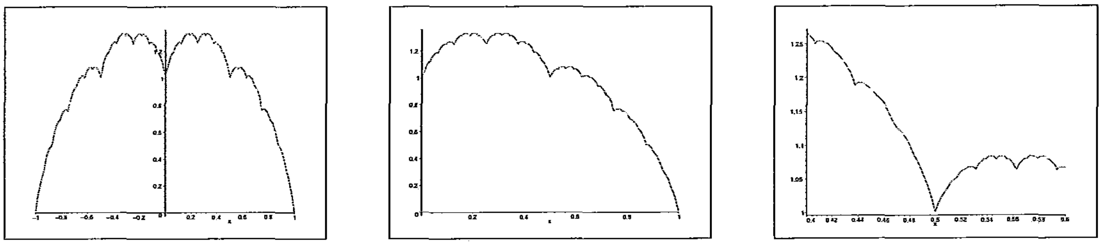


Figura 1.3: O processo de magnificação local da função *blancmange* em torno de $x_0 = \frac{1}{2}$.

Tall distingue a noção retidão local da idéia de aproximação linear local, ou linearidade local (TALL, 1989; TALL, 2002). Segundo ele, linearidade local enfoca o que ocorre em um único ponto fixado, onde a função é aproximada por uma função linear. Esta idéia se representa simbolicamente por meio do limite:

$$\lim_{h \to a} \frac{f(x+h) - (a\,h + f(x))}{h} = 0$$

Linearidade local é portanto uma formulação matemática da própria definição de derivada que, segundo a teoria de raízes cognitivas, deve figurar não como um *ponto de partida* na abordagem pedagógica de derivada, mas como um *objetivo*. Retidão local, por outro lado, é uma expressão de uma percepção humana do gradiente de um gráfico como um todo. O autor afirma que:

> Retidão local é uma percepção humana primitiva dos aspectos visuais de um gráfico. Tem implicações globais em como o indivíduo olha ao longo do gráfico e vê as mudanças do gradiente, então o gradiente do gráfico como um todo é visto como uma entidade global.
>
> (TALL, 2000, p.14), tradução nossa

Da mesma forma que linearidade local, retidão local pode se expandir em desenvolvimentos teóricos mais sofisticados, como por exemplo as noções de espaços tangentes para funções de várias variáveis ou mesmo variedades diferenciáveis (TALL, 1992). No entanto, linearidade local e retidão local diferem do ponto de vista pedagógico pois a segunda revela-se intuitiva e pode ser descoberta por um estudante lidando com um programa que trace gráficos no computador. Assim, Tall propõe a noção de retidão local como uma raiz cognitiva para o conceito de derivada.

Em (TALL, 1989), o autor compara as estruturas da abordagem introdutória tradicional para o conceito com sua proposta de abordagem pedagógica alternativa baseada em retidão local. Numa abordagem tradicional a seqüência de atividades consiste de:

1. apresentar uma abordagem "intuitiva" para limites;
2. fixar x e calcular o limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h se fica pequeno e chamar o limite de $f'(x)$;
3. variar x em $f'(x)$ para obter a derivada como uma função.

Alternativamente, o conceito pode ser explorado de acordo com a seguinte seqüência de atividades, seguida de desenvolvimentos teóricos posteriores:

1. explorar a noção de retidão local;
2. visualizar o gradiente variável do gráfico original como um outro gráfico (isto é, o gráfico da função derivada);
3. relacionar a imagem visual do gradiente ao algoritmo numérico utilizado para gerá-lo;
4. relacionar estas experiências a outras representações, incluindo os processos numéricos e algébricos de limite.

A noção de retidão local é proposta ainda como raiz cognitiva para equações diferenciais ordinárias (TALL, 1992; TALL, 2000; TALL, 2002). O organizador genérico correspondente no programa *Graphic Calculus* consiste de um ambiente onde, dada uma equação diferencial na forma $y' = F(x, y)$, um pequeno segmento de reta com inclinação $F(x, y)$ é exibido para cada ponto do plano (x, y) escolhido pelo usuário. A partir desta representação, o usuário pode visualizar os gráficos das soluções da equação dada.

Uma notável extensão da noção de retidão local como raiz cognitiva para conceitos de cálculo é proposta por Kawski (KAWSI, 1997). Em concordância da aplicabilidade da noção de retidão local como ponto de partida de expansões cognitivas para desenvolvimentos teóricos posteriores (segunda propriedade fundamental da conceituação de raízes cognitivas), o autor afirma que:

> Com tal tecnologia, faz sentido *definir* um objeto como diferenciável se *depois de suficientemente ampliado obtem-se um objeto linear*, isto é, localmente ele é arbitrariamente bem aproximado por um objeto linear. Depois da experiência de ampliação, isto é completamente intuitivo, e pode ser enunciado tão rigorosamente quanto desejado, e até mesmo de forma completamente compatível com a definição de diferenciabilidade usada por matemáticos profissionais em seu trabalho, digamos, a definição de derivadas de Frechet em espaços de Banach de dimensão infinita.
>
> (KAWSI, 1997, p.2), tradução nossa, grifos do autor

Kawski prossegue colocando a pergunta:

> Se ampliações funcionam tão bem em cálculo de uma variável, por que não são usadas em cálculo vetorial, digamos, para **VER** a divergência e o rotacional?
>
> (KAWSI, 1997, p.2), tradução nossa, grifos do autor

O autor propõe então abordagens inovadoras, baseadas em retidão local e magnificação local para diferentes conceitos de cálculo de uma e várias variáveis: continuidade, continuidade e diferenciabilidade uniformes, continuidade e diferenciabilidade de campos vetores bi e tri-dimensionais, integrais de linha, divergentes, rotacionais, teoremas de integração para campos vetoriais[17].

[17] Veja também em http://math.la.asu.edu/~kawski.

1.5 Obstáculos na formação das imagens de conceito de limite e infinito

Como discutido nas seções anteriores, uma definição formal matemática, em geral, não se converte naturalmente em um embasamento adequado para a abordagem pedagógica introdutória de um conceito matemático – ou em uma raiz cognitiva, nos termos de David Tall. Nos casos dos conceitos de derivada e limite, este problema talvez seja particularmente grave. Como já observamos neste texto, a conceituação formal de limite, por meio de épsilons e deltas, demanda um nível de abstração de longe incompatível com os cursos iniciais de cálculo diferencial e integral. A definição formal de derivada, por sua vez, depende do conceito de limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Desta forma, uma estratégia pedagógica comumente utilizada para a introdução do conceito de derivada envolve a apresentação da expressão algébrica acima (muitas vezes ilustrada por uma figura representando retas secantes aproximando-se de uma tangente), sem qualquer tratamento formal anterior para o conceito de limite. Em lugar da definição formal, o conceito de limite tem sido tipicamente introduzido sob a forma de interpretações geométricas, resoluções de expressões algébricas, aproximações numéricas, referências verbais (como os termos, 'aproximar' ou 'chegar muito perto'). Cornu, por exemplo, comenta que na primeira metade do século XX, os livros textos franceses introduziam a noção de limite de forma intuitiva, para, a partir daí, introduzir a definição formal de derivada (CORNU, 1991). Somente mais tarde, nos mesmos textos, a definição formal de limite seria dada sob a forma de um mero comentário, muitas vezes numa nota de rodapé. O mesmo autor afirma que antes de travarem contato com a noção de limite no contexto pedagógico, os estudantes recorrem a idéias prévias, baseadas em intuições e imagens da experiência cotidiana, relacionadas particularmente com o significado coloquial dos termos usados. Por meio deste processo, os estudantes freqüentemente constroem imagens de conceitos restritas, denominadas *concepções espontâneas* (CORNU, 1983). O autor relaciona uma série de significados coloquiais para os termos 'tender a' e 'limite', relacionados com a construção de concepções espontâneas. Assim, 'tender a' pode evocar, por exemplo, os seguintes entendimentos:

- *aproximar-se, mantendo sempre uma certa distância*;
- *aproximar-se, sem nunca alcançar*;
- *aproximar-se, alcançando eventualmente*;
- *assemelhar-se* (sem qualquer idéia de variação envolvida).

E 'limite' pode ser entendido como:

- *algo impassível que é alcançável*;
- *algo impassível que é impossível de alcançar*;
- *um ponto de que alguém se aproxima sem alcançar*;
- *um ponto de que alguém se aproxima e alcança*;
- *uma limitação inferior ou superior*;
- *um máximo ou mínimo*;
- *um intervalo*;
- *aquilo que vem imediatamente a seguir do que pode ser atingido*;
- *um restrição ou regra*;
- *o fim*.

De forma semelhante, Robert (ROBERT, 1982) identifica uma gama de modelos para o conceito de limite desenvolvidos por estudantes universitários. Segundo a autora, tais modelos se encontram fortemente atrelados à noção intuitiva de limite predominante na abordagem pedagógica para limites de seqüências:

- *Monotônico* e *Dinâmico-Monotônico*:
  'uma seqüência convergente é uma seqüência crescente limitada superiomente (ou decrescente limitada inferiormente).'
  'uma seqüência convergente é uma seqüência crescente (decrescente) que se aproxima de um limite.'

- *Dinâmico*:

  'os termos da seqüência tendem a l.'

  'os termos da seqüência aproximam-se de l.'

  'a distância entre os termos da seqüência e l fica pequena.'

  'os valores aproximam-se de um número mais e mais de perto.'

- *Estático*:

  'os termos da seqüência estão em um intervalo perto de l.'

  'os termos da seqüência estão agrupados ao redor de l.'

  'os elementos da seqüência acabam sendo encontrados numa vizinhança de l.'

- *Misturado*: uma mistura dos modelos acima

Assim, a estratégia pedagógica descrita acima lança mão de uma conceituação "pseudo-formal", pois toma como base noções puramente intuitivas. Tais noções intuitivas evocam não só o conhecimento matemático, como todo tipo de experiências prévias dos estudantes (TALL & VINNER, 1981; CORNU, 1991), podendo levar à formação de imagens de conceito restritas. Citamos alguns exemplos deste processo na seção 1.4 – infinitésimos cognitivos e propriedades genéricas de limite, descritos por Bernard Cornu e David Tall, respectivamente. Nesta seção, revisitaremos a discussão sobre problemas na formação de imagens de conceito para o conceito de limite.

1.5.1 A noção de obstáculo epistemológico

Alguns autores, como Anna Sierpińska (SIERPIŃSKA, 1985; SIERPIŃSKA, 1987; SIERPIŃSKA, 1992), Bernard Cornu (CORNU, 1983; CORNU, 1991), Guy Brousseau (BROUSSEAU, 1983) e Michèle Artigue (ARTIGUE, 1990), aplicam a noção de obstáculo epistemológico em educação matemática para explicar alguns processos de construção de conceitos. O termo *obstáculo epistemológico* foi introduzido por Gaston Bachelard em 1938, no campo da filosofia do desenvolvimento científico[18]. No livro

[18]No entanto, a conceituação exata de obstáculo epistemológico permanece controversa. Sierpińska comenta que uma conferência interdisciplinar organizada por em 1988 em Montreal, reunindo psicólogos, filósofos da ciência e educadores físicos e matemáticos, foi parcialmente destinada a elucidar a noção de obstáculo epistemológico. Mas os participantes saíram com um sentimento de confusão maior do que nunca (SIERPIŃSKA, 1994, p.133).

La Formation de l'Esprit Scientifique, o autor conceitua obstáculo epistemológico da seguinte forma[19]:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado.* E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas da estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculo epistemológico. [...] No fundo, o ato de conhecer se dá *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização.
>
> (BACHELARD, 1996, p.17), grifos do autor

Assim, obstáculos epistemológicos não estão associados a quaisquer fatores externos, mas à própria natureza do conhecimento científico – são inerentes ao próprio ato de saber, constituintes essenciais e inevitáveis do próprio conhecimento a ser construído ou adquirido. Desta forma, obstáculos epistemológicos se caracterizam por estarem presentes tanto na evolução histórica do pensamento científico quanto em sua prática educacional. No âmbito educacional eles se distinguem dos obstáculos de natureza *psicológica*, aqueles que são resultado do desenvolvimento pessoal do sujeito, ou *didática*, que se devem à natureza da pedagogia adotada.

[19] Na verdade, segundo o próprio Bachelard, a noção de obstáculo epistemológico não seria aplicável à matemática. De fato, o autor comenta que: "A nosso ver, [...] o crescimento do espírito matemático é bem diferente do crescimento do espírito científico em seu esforço para compreender os fenômenos físicos. Com efeito, a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro. Logo, nenhuma das teses que sustentamos neste livro se refere ao conhecimento matemático. Trata-se apenas do conhecimento do mundo científico." (BACHELARD, 1996, p.28). A extensão desta noção à educação matemática foi primeiro proposta por Brousseau (BROUSSEAU, 1983), que adotando uma linha piagetiana (e contrária às correntes behaviorista e empirista), enfoca a importância para o processo de aprendizagem do erro e do fracasso, visto não como a expressão de uma impossibilidade a ser eliminada, mas como o resultado de um corpo de conhecimentos anteriores. Desde então, a literatura de educação matemática tem demonstrado que, pelo menos a este campo, a noção formulada por Bachelard pode ser aplicável como sucesso para ajudar a elucidar fenômenos importantes. Sierpińska (SIERPIŃSKA, 1994), por exemplo, comenta que: "educadores matemáticos tiveram a sensação de que faria sentido falar sobre obstáculo epistemológico em matemática: cotidianamente, eles se deparavam com algo que parecia atuar como um obstáculo epistemológico na maneira de pensar dos estudantes".

Um ponto importante para este trabalho reside nas dificuldades na aprendizagem do conceito de derivada, considerando seu embasamento teórico assentado no conceito de limite. Neste sentido, a discussão sobre obstáculos epistemológicos na aprendizagem do conceito de limite acrescenta aspectos relevantes tanto para o referencial teórico aqui adotado como para a construção de nossas próprias questões de pesquisa. Sendo assim, exemplificaremos algumas aplicações da noção de obstáculo epistemológico à aprendizagem dos conceitos de limite e infinito, devidas a Bernard Cornu e Anna Sierpińska.

1.5.2 Obstáculos epistemológicos no ensino e aprendizagem de limite e infinito

Com o objetivo de identificar obstáculos epistemológicos no ensino e aprendizagem de limite, Cornu (CORNU, 1991) procura observar a ocorrência de obstáculos epistemológicos no desenvolvimento histórico do conceito. O autor comenta que a noção de limite emerge de tentativas de resolução de questões de três tipos principais: problemas geométricos (cálculo de áreas e comprimentos, problemas de exaustão); problemas de soma e razão de convergência de uma série; problemas de diferenciação (que vêm da relação entre duas grandezas que tendem simultaneamente a zero). A partir daí, Cornu destaca quatro principais obstáculos epistemológicos na história do conceito de limite:

1. *A falha em relacionar números com áreas.*

   O método da exaustão de Eudoxo (HEATH, 1956) era comumente usado na geometria grega antiga. Por exemplo, a determinação de que a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus diâmetros foi feita por Hipócrates de Quios por meio de uma seqüência de polígonos regulares inscritos com número de lados crescendo indefinidamente. Embora o método da exaustão seja um procedimento formal rigoroso, não se pode afirmar que os matemáticos na Grécia antiga possuíam o conceito moderno de limite. O método da exaustão era essencialmente aplicado a grandezas geométricas – que não eram de forma alguma interpretadas como números. Assim a noção unificada de limite permaneceu ausente. O sucesso da interpretação geométrica do método da exaustão parece estar relacionado a um obstáculo que impediu a passagem para a noção geométrica de limite.

2. *As noções de infinitamente pequeno e infinitamente grande.*

   Por muitas vezes ao longo da história da matemática, colocaram-se questões sobre o que aconteceria com grandezas no 'último instante' antes de se anularem; ou debates a respeito da existência de grandezas que poderiam assumir um estado intermediário entre o 'nada' e o 'alguma coisa', isto é, que seriam nulas, mas para as quais ainda assim se poderia atribuir um valor. Cauchy, por exemplo, no seu *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* de 1821, definiu função contínua como sendo uma função $f(x)$ para qual um 'incremento infinitesimal' i na variável x sempre produziria um 'incremento infinitesimal' em $f(x+i) - f(x)$. No mesmo texto, ele explicou sua noção de infinitésimo como sendo uma grandeza variável que se torna infinitamente pequena quando seus valores numéricos decrescem indefinidamente, de forma a convergir ao limite zero (BOYER, 1974). Este obstáculo manifesta-se em algumas crenças comuns entre estudantes, tais como a de que o símbolo ε representaria um número real positivo que é menor que todos os outros reais positivos, mas que ainda assim é diferente de zero; ou, de forma análoga, de que a dízima $0,999\ldots$ seria 'o último número real antes de 1'; ou ainda que existiria um número natural maior que todos os outros, mas ainda assim diferente de infinito.

3. *O aspecto metafísico da noção de limite.*

   O debate sobre a natureza metafísica dos conceitos de infinito e infinitésimo tem estado presente ao longo de séculos de história da matemática. Lagrange, por exemplo, na tentativa de banir qualquer ranço metafísico da ciência matemática, rejeitou a abordagem infinitesimal de Leibniz e reformulou as fundamentações do cálculo em termos puramente algébricos, com base em séries infinitas. No contexto pedagógico, atribui-se freqüentemente ao conceito de limite um estatuto dúbio ou incerto, entre o campo da matemática e o da pura intuição. Por exemplo, embora as diferenciais dx não sejam números reais, elas são muitas vezes algebricamente operadas como se o fossem. Em conseqüência, muitas concepções comuns entre estudantes estão associadas a este obstáculo, tais como: 'isto não é rigoroso, mas funciona'; 'isto não é matemática de verdade'; 'o método funciona, desde que seja com valores aproximados'.

4. *O limite é atingido ou não?*

   Este debate se fez presente durante o período histórico de fundamentação do conceito de limite. D'Alembert, por exemplo, insistia que um limite nunca deveria coincidir com a quantidade da qual ele é limite, mas sim se aproximar sempre da mesma, mantendo dela uma distância tão pequena quanto se queira. A crença em que o fato do valor do limite ser atingido ou não seja um aspecto relevante para a existência do limite é comum entre estudantes. Muitos crêem, por exemplo, que $\frac{1}{n}$ tende a zero porque $\frac{1}{n}$ nunca vale zero; ou, ao contrário, que que $\frac{1}{n}$ tende a zero porque $\frac{1}{n}$ se torna zero para n suficientemente grande.

Com base na análise acima, Cornu observa que, apesar das tentativas de banir completamente os infinitésimos da matemática moderna, esta idéia continua a povoar as formas de expressão de matemáticos profissionais e a imagem de conceito de estudantes. Embora a questão da formulação rigorosa do conceito de limite tenha se esgotado na definição formal em termos de épsilons e deltas, a comunicação matemática informal continua a lançar mão de termos imprecisos, tais como 'arbitrariamente pequeno' – da mesma forma em se fazia nos tempos de Cauchy. No contexto pedagógico em particular, expressões como essa são usadas por professores na tentativa de simplificar situações teoricamente complicadas para ajudar os estudantes. No entanto, tais tentativas de simplificação podem vir a ter conseqüências opostas ao esperado, como por exemplo, a propriedade genérica de limite descrita por Tall (TALL, 1986a).

De forma mais geral, Cornu afirma que, muitos professores ingenuamente acreditam que a simplicidade e a clareza da explicação são condições suficientes para garantir a compreensão dos estudantes – quando na verdade seria muito mais importante apresentá-los o conceito ensinado em toda a sua complexidade. Segundo o autor, neste ponto se coloca a importância pedagógica dos obstáculos epistemológicos:

> A construção de estratégias pedagógicas para ensinar estudantes deve portanto levar em conta tais obstáculos. Não é questão de evitá-los, mas ao contrário,

> de levar os estudantes e encará-los e ultrapassá-los, vendo os obstáculos como partes constituintes dos conceitos matemáticos que estão sendo adquiridos.
>
> (CORNU, 1991, p.162), tradução nossa

Desta forma, obstáculos epistemológicos são inevitáveis para o ato de conhecer e da mesma forma inevitáveis para o ato de aprender. Conceber uma estratégia pedagógica para propositadamente evitá-los seria impor aos estudantes uma simplificação artificial – negar-lhes a complexidade inerente da matemática, sob a justificativa de poupar-lhes do enfrentamento com uma dificuldade.

Brousseau (BROUSSEAU, 1986) chama atenção para a superação de obstáculos epistemológicos, por meio da vivência de conflitos mentais, como fator necessário à aprendizagem. O ponto de vista defendido por Cornu é também compartilhado por Sierpińska:

> A impressão que se poderia ter [...] pode facilmente ser a de que obstáculos epistemológicos são algo negativo em nosso desenvolvimento conceitual, de que eles devem ser evitados no ensino e na aprendizagem. Isto certamente não é o que eu quis dizer. A própria natureza dos obstáculos epistemológicos é tal que eles não podem ser evitados e seu papel para nosso pensamento é importante.
>
> (SIERPIŃSKA, 1992, p.28), tradução nossa

Segundo Sierpińska, superar um obstáculo epistemológico, como fator necessário à aprendizagem, não consiste em substituir uma convicção por outra nova, oposta àquela, mas se elevar acima das próprias convicções e tornar-se capaz de analisá-las de um ponto de vista externo de forma a questionar hipóteses vistas como tácitas até então (SIERPIŃSKA, 1987). Em (SIERPIŃSKA, 1992), a autora formula a superação de obstáculos epistemológicos em termos de *atos de compreensão*. Naquele trabalho, é relacionada uma lista de obstáculos epistemológicos, relacionados ao conceito de função, e atos de compreensão associados. Em (SIERPIŃSKA, 1994), atos de compreensão são conceituados como saltos qualitativos na mente humana, descritos como novas formas de olhar o conhecimento.

Em pesquisas empíricas anteriores (SIERPIŃSKA, 1985; SIERPIŃSKA, 1987), Sierpińska procura identificar obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de limite em alunos secundaristas das áreas de ciências e humanidades, respectivamente.

Naqueles trabalhos, a autora estabele como ponto de partida uma lista de obstáculos epistemológicos sobre limites, como ilustrado na figura 1.4.

<table>
<tr><td rowspan="4">Obstáculos Heurísticos

(falta de rigor)</td><td rowspan="2">Obstáculos Heurísticos Estáticos

Limite é algo de que só se conhecem aproximações.</td><td>Obstáculo Estático-Geométrico
As aproximações são de caráter geométrico.</td></tr>
<tr><td>Obstáculo Estático-Numérico
As aproximações são de caráter numérico.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Obstáculos Heurísticos Cinéticos

Limite é algo de que se está aproximando.</td><td>Obstáculo Cinético-Geométrico
As aproximações são de caráter geométrico.</td></tr>
<tr><td>Obstáculo Cinético-Numérico
As aproximações são de caráter numérico.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Obstáculos Rigorosos

(rigor falso ou excessivo)</td><td colspan="2">Obstáculo de Eudoxo

Passagem ao limite não é uma operação matemática, mas sim um método rigoroso de se provar relações entre quantidades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Obstáculo de Fermat

Passagem ao limite é uma operação matemática, que consiste em atribuir números a variáveis, omitindo valores indesejáveis.</td></tr>
</table>

Figura 1.4: Obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de limite.

Em (SIERPIŃSKA, 1985), a autora faz um estudo etnográfico sobre obstáculos epistemológicos relativos aos conceitos de limite e infinito identificados em estudantes secundaristas da área de ciências (matemática e física). Os estudantes são classificados em três grupos principais. Para os *Infinitistas inconscientes*, o infinito é visto como algo 'muito grande'; e o limite de uma seqüência como seu 'último valor', ou algo para o que este último valor 'tende'. Para os *Infinitistas conscientes*, o infinito é visto como algo metafísico e difícil de abarcar com definições precisas. Assim, sendo a matemática uma ciência exata, deveria tratar somente de números finitos. Os estudantes incluídos neste grupo consideram que, ao descrever o comportamento de uma seqüência, o mais importante é encontrar uma fórmula geral para o n-ésimo termo, de tal forma que este possa ser precisamente calculado para qualquer n dado. Para os *Infinitistas cinéticos*, a idéia de infinito encontra-se atrelada à de tempo. Para pensar em uma seqüência, é preciso percorrer cada um de seus termos com o pensamento, portanto, a construção de uma seqüência ou um conjunto infinitos nunca pode ser completada. O infinito somente existe potencialmente. Ao descrever o comportamento de uma seqüência, é importante determinar como esta varia, se esta se aproxima de algum valor fixo.

Num estudo complementar (SIERPIŃSKA, 1987), Sierpińska observa obstáculos epistemológicos relativos a limites e infinito em estudantes secundaristas da área de humanidades. A autora afirma que as atitudes dos estudantes em relação ao conhecimento científico, em particular ao conhecimento matemático, têm um forte impacto nas suas intuições sobre limite e infinito. Assim, ela estrutura sua análise em três categorias, com respeito às atitudes em relação ao conhecimento. Na atitude *intuitiva empirista*, o objeto de conhecimento não se diferencia do sujeito que conhece. Assim, o conhecimento não pode ser ensinado, somente apreendido a partir da imitação e da prática. Em particular, a existência de verdades absolutas é vista como aceitável. Nesta categoria de atitude, a matemática é considerada uma ciência puramente empírica. Portanto, axiomas devem ser fatos irrefutáveis, intuitivamente aceitáveis ou concordantes com resultados de pesquisa científica. Por outro lado, tal concepção não faz qualquer sentido na atitude *discursiva formalista*. O conhecimento teórico é visto como sem sentido, pois o sentido do conhecimento é puramente prático e operacional. A matemática é considerada como um jogo de símbolos meramente formal, desprovido de significado. De forma semelhante, na atitude *discursiva empirista*, o conhecimento teórico é negado, mas o sentido do conhecimento vem de seu uso diário. A matemática é vista como uma ciência hipotético dedutiva, mas tanto suas motivações quanto seus objetivos estão atrelados às aplicações ao mundo concreto. Com base nessa categorização inicial, Sierpińska classifica e co-relaciona atitudes em relação ao conceito de infinito com modelos conceituais de limite, como ilustrado pela figura 1.5. Ela observa ainda que os modelos de infinito dos estudantes observados nem sempre são consistentes com as atitudes sobre o conceito de infinito com as quais estariam teoricamente relacionados.

atitudes em relação ao infinito		modelos de limite	atitudes em relação ao conhecimento científico
finitistas: *Todo infinito é ilimitado.*	intuitivo definista	intuitivo definista: *Todas as seqüências são finitas e seu número de termos é determinado.*	intuitivo empirista
	intuitivo indefinista	intuitivo indefinista: *Todas as seqüências são finitas, mas às vezes é impossível determinar o número de termos. O limite de uma seqüência é seu último termo, mas se não for possível determiná-lo, deve-se chegar a uma aproximação para ele.*	intuitivo empirista
	discursivo definista	discursivo definista: *Todas as seqüências limitadas são finitas e seu número de termos é determinado.*	discursivo formalista
	discursivo indefinista	discursivo indefinista: *Todas as seqüências limitadas são finitas, mas às vezes é impossível determinar o número de termos. O limite de uma seqüência é seu último termo, e se for impossível determina-lo, deve-se chegar a uma aproximação para ele.*	discursivo formalista
infinitistas: *Existem dois tipos de infinito: um limitado e um ilimitado.*	potencialista	potencialista: *O limite de uma seqüência é aquilo de que ela está se aproximando indefinidamente sem nunca atingir. É impossível percorrer uma infinidade de termos num tempo finito.*	intuitivo empirista
	potencial-atualista	potencial-atualista: *É possível percorrer uma infinidade de termos num tempo finito e o limite de uma seqüência é seu último termo.*	discursivo (formalista/empirista)
	atual-atualista	limitacionista: *Uma seqüência é um conjunto que pode ser limitado ou ilimitado.*	discursivo (formalista/empirista)
		infinitesimalista: *A diferença entre os termos de uma seqüência e seu limite é infinitamente pequena.*	discursivo (formalista/empirista)

Figura 1.5: Modelos de limite e suas relações com as atitudes em relação ao infinito e ao conhecimento científico.

1.5.3 Obstáculos epistemológicos e computadores

A literatura recente em educação matemática na últimas duas décadas sugere que a entrada de novas tecnologias no ensino de matemática pode levar a sensíveis mudanças nos paradigmas vigentes até então. De uma maneira análoga a como a geometria praticada na Grécia de Euclides, e registrada n'*Os Elementos*, foi fortemente determinada pelos instrumentos disponíveis na época, régua não graduada e compasso, talvez o computador venha a determinar, de um ponto de vista histórico, novas formas de fazer e ensinar matemática. Em particular, o computador pode trazer a tona novos obstáculos epistemológicos, ausentes da matemática tradicional. Cornu, por exemplo, observa que:

> [...] o computador pode muito bem representar um papel significante como um ambiente em que os estudantes podem ganhar experiências apropriadas para construir o conceito de limite. Porém, é muito provável que tal abordagem contenha seus próprios obstáculos epistemológicos peculiares [...] e é necessário refletir-se profundamente nas experiências de estudantes com o novo ambiente para ver precisamente o que é aprendido e de que forma o conhecimento é abarcado na mente.
>
> (CORNU, 1991, p.166), tradução nossa

Desde que Cornu manifestou esta posição, no entanto, poucas pesquisas têm sido feitas neste sentido. Tomando como base resultados recentes de pesquisas em educação matemática que mostram algumas dificuldades de alunos e professores em lidar com ambientes computacionais no ensino (como será discutido em detalhes no capítulo a seguir), em (GIRALDO et al., 2002a) são propostos dois novos pares de obstáculo epistemológico e atos de compreensão, no sentido de (SIERPIŃSKA, 1992).

O primeiro deles com a atribuição ao computador de um papel de critério absoluto de verdade. Em certas situações, o computador pode ser colocado como portador de verdades matemáticas, assumindo um papel preponderante em relação a outras formas de representação e até mesmo a conhecimentos sólidos do sujeito, como relatado por exemplo em (ABRAHÃO, 1998). Tal efeito parece estar relacionado com o desconhecimento do funcionamento da máquina e dos programas utilizados, em particular de suas limitações intrínsecas, além do não reconhecimento do computador como uma obra humana, como se este portasse intenção e inteligência próprias. Desta forma, propõe-se o seguinte par:

Obstáculo epistemológico: Crença no computador como validador de conhecimentos matemáticos.

Ato de Compreensão: Reconhecimento do computador como instrumento no processo de ensino e aprendizagem.

O segundo par está relacionado com o anterior, mas diz respeito mais especificamente aos algoritmos utilizados em programas computacionais para esboço de gráficos de funções. De forma geral, tais algoritmos se baseiam na interpolação de um conjunto finito de pontos. Daí podem advir resultados errôneos ou limitados, como a omissão de descontinuidades no gráfico mostrado. As estratégias humanas para traçar gráficos, por outro lado, podem lançar mão de propriedades particulares da função específica considerada, além de seus valores numéricos meramente. O desconhecimento de tal distinção pode acarretar na aceitação de gráficos errôneos ou limitados gerados pelo computador sem qualquer questionamento crítico. Assim propõe-se:

Obstáculo epistemológico: Desconhecimento da estrutura finita dos algoritmos computacionais.

Ato de Compreensão: Distinção entre algoritmos computacionais e estratégias humanas.

Cabe ainda ressaltar um ponto. Pela sua própria conceituação, obstáculos epistemológicos caracterizam-se pela persistência ao longo do desenvolvimento histórico do conceito. No caso do computador, é provavelmente muito cedo para arriscar-se uma avaliação desta natureza. Um possível critério para a proposição de *candidatos* a obstáculos epistemológicos é sua avaliação através de estudos etnográficos – o que pode sugerir a sua distinção de obstáculos de natureza psicológica ou pedagógica. Tais candidatos devem no entanto permanecer sujeitos a uma futura análise sob a perspectiva histórica.

Uma questão mais ampla está implícita na proposição do segundo obstáculo acima: quais os possíveis desdobramentos pedagógicos do choque entre estrutura intrinsecamente finita dos algoritmos computacionais e a natureza infinita dos conceitos fundamentais do cálculo infinitesimal? De fato, esta é uma das questões centrais desta tese e será explorada em maior profundidade a partir do terceiro capítulo.

Capítulo 2

A problemática do uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática avançada

> *Esse trabalho recente reforça a mensagem da teoria de informação algorítmica de que aleatoriedade é tão fundamental e tão permeada na matemática pura quanto é na física teórica. Em nossa opinião, isso também dá mais suporte para a 'matemática experimental' e para a visão 'quase-experimental' da matemática. [...] Mesmo depois que Gödel e Turing demonstraram que o sonho de Hilbert não funcionava, na prática, a maioria matemáticos continuaram agindo como antes, com o espírito de Hilbert. Mas agora, finalmente, o computador está mudando a maneira como fazemos coisas. É fácil rodar um experimento matemático em um computador, mas nem sempre se pode encontrar uma prova para explicar os resultados.*
>
> Calude & Chaitin (CALUDE & CHAITIN, 1999), tradução nossa [1]

O crescente uso de recursos computacionais no ensino tem sido foco de uma ampla gama de estudos em educação matemática nas últimas duas décadas. Compilações

[1] *This recent work reinforces the message of algorithmic information theory that randomness is as fundamental and as pervasive in pure mathematics as it is in theoretical physics. In our opinion it also gives further support to 'experimental mathematics', and to the 'quasi-empirical' view of mathematics. [...] Even after Gödel and Turing showed that Hilbert's dream didn't work, in practice most mathematicians carried on as before, in Hilbert's spirit. But now, finally, the computer is changing the way we do things. It is easy to run a mathematical experiment on a computer, but you can't always find a proof to explain the results.*

de resultados e tendências de pesquisa têm sido organizadas, por exemplo (HAREL & DUBINSKY, 1992; DUNHAM & DICK, 1994; WILSON & KRAPFL, 1994; DUGDALE et al., 1995; PENGLASE & ARNOLD, 1996; MAYES, 1997). A literatura de pesquisa sugere conseqüências diversificadas de ambientes computacionais para a aprendizagem de conceitos matemáticos – efeitos às vezes considerados pelos autores como positivos, às vezes como negativos. Neste sentido, Tall comenta que:

> O uso de calculadoras e computadores em matemática nem sempre tem sido tão bem sucedido quanto poderia ser. Na Inglaterra, o uso de calculadoras com crianças tem sido desencorajado na esperança de que sua ausência permitiria que as crianças construissem relações aritméticas mentais. Talvez esta atitude tenha mais a ver com o mal uso da calculadora (para efetuar cálculos sem ter que pensar) do que com qualquer falha inerente ao próprio aparato. Bem usada – para encorajar reflexão sobre idéias matemáticas – a calculadora pode ser muito benéfica.
>
> (TALL, 2001, p.212), tradução nossa

Assim, os efeitos do uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática parecem estar mais ligados à forma como as máquinas são usadas – o contexto pedagógico em que seu uso insere-se como um todo – do que com qualquer propriedade inerente a elas. Entretanto, esta perspectiva é relativamente recente na literatura de educação matemática. Em uma extensa revisão de literatura sobre o uso de calculadoras em educação matemática, Penglase & Arnold (PENGLASE & ARNOLD, 1996) comentam que muitos estudos não distinguem o próprio aparato computacional do contexto instrucional em que este é colocado, levando a conclusões inconsistentes sobre a sua efetividade para a aprendizagem. Além disso, muitos trabalhos de pesquisa restringem-se a comparar efeitos do uso de ferramentas computacionais com o de ferramentas tradicionais de ensino, em lugar de analisar as potencialidades *inauguradas* pelo advento da tecnologia. Neste sentido, Doerr & Zangor criticam:

> Muitos, se não a maioria dos estudos [...] buscam responder a questão se calculadoras gráficas são ou não efetivas em atingir certos objetivos instrucionais, que são freqüentemente deixados inalterados das abordagens tradicionais de lápis-e-papel. [...] Muitos destes estudos comparam o uso de calculadoras gráficas com o uso de lápis e papel no mesmo conjunto de atividades, dando apenas

um enfoque limitado sobre como e por que os estudantes usam calculadoras gráficas no contexto instrucional.

(DOERR & ZANGOR, 2000, p.144), tradução nossa

Isto é, a questão a ser investigada não é *se* a tecnologia é benéfica ao ensino, mas *como* planejar uma abordagem pedagógica de forma a explorá-la de forma benéfica, fazendo uso positivo de suas potencialidades e limitações. Nesta tese, em particular, enfocaremos o papel pedagógico de certas *limitações* de ambientes computacionais (ou, melhor dizendo, *diferenças* que emergem quando estes são comparados com ferramentas ou representações de natureza distinta) e como tais limitações podem se converter em potencialidades, dependendo do contexto pedagógico em que se encontram inseridas. Neste capítulo, discutiremos alguns resultados de pesquisas sobre os efeitos do uso de computadores e calculadoras no ensino de matemática (em particular de cálculo e funções) na última década.

2.1 Dificuldades genéricas enfrentadas por estudantes e professores com o uso de tecnologia

A partir dos primeiros anos em que computadores e calculadoras gráficas começaram a ser usados em educação matemática, alguns estudos identificaram e classificaram dificuldades e confusões atribuídas à natureza das representações computacionais para objetos matemáticos. Goldenberg (GOLDENBERG, 1987), por exemplo, observa que estudantes freqüentemente interpretavam erroneamente representações gráficas para funções visualizadas na tela do computador, formulando e generalizando a partir daí regras incorretas. Resultados semelhantes são reportados por Hilel et al. (HILEL et al., 1999). Guin & Trouche (GUIN & TROUCHE, 1999) enfocam a confusão em que estudantes podem se encontrar quando não conseguem distinguir um objeto matemático de sua representação computacional.

Resultados nesta direção são também relatados por pesquisadores brasileiros. Abrahão (ABRAHÃO, 1998), por exemplo, observou as reações de quatro professores de matemática de ensino médio no Brasil, referidos como **W**, **X**, **Y** e **Z**, lidando com gráficos de funções gerados por computadores e calculadoras gráficas. Todos os professores participantes tinham pelo menos dez anos de experiência, mas com perfis bastante diversificados. Em particular, o professor **X** possuia curso de mestrado completo, estava concluindo o doutorado em matemática na época da realização do experimento e também lecionava em ensino superior; **Y** é autor de livros didáticos de matemática para ensino médio e segundo segmento do ensino fundamental. Os participantes também demonstravam posturas diferentes em relação ao uso de tecnologia no ensino: **X** e **Y** já haviam usado computadores em suas aulas, enquanto **W** e **Z** não, sendo que **X** nem mesmo permitia o uso de calculadoras por seus alunos por julgá-las nocivas à aprendizagem.

Nas atividades propostas, os resultados dados pelos equipamentos pareciam ser contraditórios com a teoria matemática, devido a limitações dos programas ou inadequação das janelas gráficas utilizadas. Por exemplo, em uma das atividades, duas retas perpendiculares pareciam não o ser, devido às escalas dos eixos. Em outra atividade, o gráfico da função de terceiro grau $V(x) = x\,(45-2x)\,(30-2x)$ foi mostrado aos professores na tela do computador na janela $[0, 15] \times [0, 5000]$, onde este se assemelhava a uma parábola (como ilustrado na figura 2.1). A autora descreve a reação dos participantes da seguinte forma:

> [*O professor* **Y**] Demonstrou grande surpresa ao ver que, no intervalo $0 < x < 15$, a curva da função cúbica lembrava o desenho de uma parábola. O professor **W** confundiu o gráfico parcial da função cúbica com o gráfico de função quadrática. Mesmo após alertado para o fato de que a função era de terceiro grau, ele insistiu em querer aplicar as fórmulas algébricas $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ e $x_v = -\frac{b}{2a}$ para identificar as coordenadas do vértice da "parábola". [...] Ao visualizar uma janela onde o gráfico da função cúbica lembrava uma parábola, o professor [**W**] entendeu esse gráfico local como sendo o gráfico completo da função cúbica e mais ainda, quis aplicar resultados algébricos relativos à função quadrática.
>
> (ABRAHÃO, 1998, pp.34-35)

Mais adiante, nas conclusões finais, a autora comenta o resultado dessa atividade:

> Um dos professores entrevistados, ao ver a janela onde o gráfico da função do terceiro grau lembrava uma parábola, interpretou esse gráfico parcial como sendo o gráfico global da função cúbica. Nesse momento seus conhecimentos teóricos não foram ativados para fazê-lo perceber que sua interpretação

> estava incorreta. Em vista disso, o professor absorveu a informação visual, desconectando-a da informação algébrica e entendeu o que "viu" como sendo "o gráfico" da função.
>
> (ABRAHÃO, 1998, p.81)

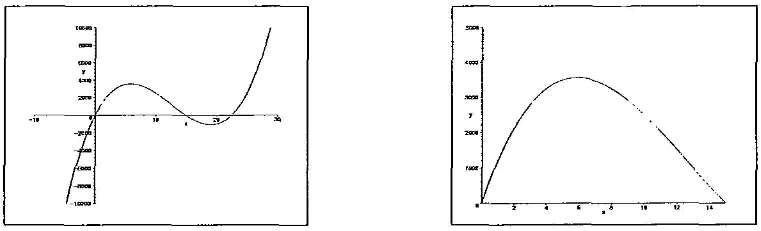


Figura 2.1: O gráfico da função $V(x) = x\,(45-2x)\,(30-2x)$ nas janelas gráficas $[-10,30] \times [-10000,10000]$ (esquerda) e $[0,15] \times [0,5000]$ (direita, como dado aos professores no experimento de Abrahão).

Abrahão relata que, de forma geral, os participantes hesitaram em levar em consideração o fato de que computadores podem fornecer resultados "errôneos" ou incompletos. De fato, tais resultados foram freqüentemente aceitos como corretos por eles, mesmo quando claramente contraditórios aos seus conhecimentos anteriores:

> Quando solicitados a interpretar alguns gráficos não usuais produzidos em computadores, os entrevistados apresentaram algumas dificuldades. Pudemos observar que a compreensão de gráficos gerados por tecnologia gráfica não é imediata. Nem sempre o professor conseguia conciliar seus conhecimentos teóricos com a visualização gráfica. [...] Todos os professores, mesmo os que sabiam que as máquinas tinham seus limites, demonstram, a princípio, acreditar mais nos resultados dos computadores do que nos seus próprios conhecimentos.
>
> (ABRAHÃO, 1998, p.80)

Abrahão divide as dificuldades encontradas pelos professores em dois grupos:

- quanto à escala gráfica e;
- quanto à resolução da tela gráfica e ao processo que a máquina usa para traçar gráficos de funções.

Finalmente, ela conclui que a tecnologia gráfica pode ser uma ferramenta importante para aprendizagem de matemática. No entanto, para que esse objetivo seja atingido, é necessário que o professor tenha acesso a materiais de apoio, desenhados para estimular a conexão crítica entre diferentes representações, de natureza computacional e não computacional.

O Freudenthal Institute, na Holanda, desenvolveu estudos sobre o papel de calculadoras gráficas e simbólicas no ensino de matemática (DRIJVERS & DOORMAN, 1997). Parte dos resultados desses estudos é relatada em (DRIJVERS, 2000), onde o autor identifica obstáculos enfrentados por estudantes ao trabalhar com sistemas de computação simbólica (CAS), com base na teoria de Educação Matemática Realista[2]. Nesse trabalho o autor usa o termo *obstáculo* para se referir a uma barreira trazida por um sistema de computação simbólica que impeça o estudante de desenvolver os esquemas de uso do sistema que ele tenha em mente. Embora declare acreditar nos possíveis benefícios do uso de CAS, Drijvers coloca tais obstáculos em uma perspectiva *negativa* – como uma dificuldade da qual se deve estar consciente para identificar as habilidades necessárias para o uso positivo de CAS.

O experimento relatado por Drijvers foi conduzido com 22 estudantes na faixa de 17 anos, em um curso pré-universitário de matemática, em que foi utilizada a calculadora simbólica TI-92. Os dados foram coletados por meio de observações de sala de aula e entrevistas. O autor relaciona cinco obstáculos:

- *A diferença entre as representações algébricas fornecidas pelo CAS e aquelas esperadas pelos estudantes e concebidas como 'simples'.* Quando o sistema apresentava soluções expressas de forma diferente da esperada pelos estudantes, eles tinham dificuldade em constatar a equivalência algébrica.

- *A diferença entre cálculos numéricos e algébricos e a forma implícita como o CAS lida com ela.* O CAS realiza às vezes cálculos algébricos exatos e às vezes aproximações numéricas. Esta diferença não era apresentada de forma explícita ao usuário. O desconhecimento da natureza do método utilizado pelo sistema as impedia os estudantes de interpretar corretamente os resultados fornecidos.

- *As limitações do CAS e as dificuldades em fornecer estratégias algébricas para ajudar os estudantes a ultrapassar estas limitações.* Freqüentemente os estudantes não sabiam o que fazer quando o computador não dava uma resposta

[2]Para detalhes sobre a teoria de Educação Matemática Realista, veja, por exemplo (FREUDENTHAL, 1991; VAN REEUWIJK, 1995).

objetiva para o problema proposto. Encontrar uma forma de fazer com que a máquina chegasse a tais respostas era difícil para eles.

- *A falta de habilidade para decidir quando e como CAS pode ser útil.* De forma geral, os estudantes demonstraram não saber o que o CAS podia fazer por eles, isto é, em que situações e de que forma este poderia ser útil para ajudar a resolver situações problema.

- *A concepção flexível de variáveis e parâmetros que o CAS exige.* A distinção conceitual entre parâmetros e variáveis é mais geral que o contexto do uso de CAS. Entretanto, o autor afirma que na manipulação simbólica do sistema, parâmetros e variáveis aparecem em um contexto mais amplo que aumenta a possibilidade de confusões. Assim, a manipulação do CAS demanda que a percepção algébrica dos estudantes esteja em um nível simbólico abstrato.

Nas conclusões do trabalho, o autor chama atenção para a importância de não se desprezar obstáculos como estes para se obter um resultado positivo do uso de CAS no ensino de matemática. Ele comenta que:

> De forma geral, como uma estratégia pedagógica, meu sentimento é de que professores deveriam considerá-los [*os obstáculos*] seriamente, prestar atenção a eles e deles tirar vantagem tornando explicita a matemática por trás deles. Tentar evitar estas barreiras pode ser contraproducente. Tópicos como cálculos numéricos e exatos, simplificação de fórmulas e o papel de variáveis e parâmetros merecem ainda mais atenção quando um CAS é usado do que quando não é.
>
> (DRIJVERS, 2000, p.208), tradução nossa

2.2 A abordagem pedagógica como determinante dos efeitos de recursos computacionais

Ao mesmo tempo em que alguns estudos apontam problemas associados ao uso de recursos computacionais, outros mostram que se a abordagem pedagógica é planejada de forma a fazer uso de certas características particulares de representações computacionais, estas podem ter efeitos muito positivos em educação matemática. Por exemplo, (HEID, 1988; CHAZAN, 1993; ARCAVI & SCHOENFELD, 1992) observam que ambientes computacionais podem ser usados para motivar a combinação de raciocínio qualitativo e raciocínio formal. Resultados de pesquisa mais recentes confirmam esta perspectiva. Antes de examinar alguns estudos nesta direção, exemplificaremos trabalhos de pesquisa que mostram como recursos computacionais mal usados podem levar a efeitos indesejáveis na aprendizagem de conceitos matemáticos.

2.2.1 Efeitos negativos

Alguns trabalhos mostram que o uso excessivo, ou sem critério, de ferramentas computacionais no ensino está associado com um enfraquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes. Hunter et al. (HUNTER et al., 1993), por exemplo, observaram um grupo de dezessete estudantes durante um curso de pré-cálculo baseado em recursos computacionais. O curso havia sido elaborado de forma a ser conduzido exclusivamente no laboratório de microcomputadores, onde o programa *Derive* era utilizado. Desta forma, os estudantes não tiveram contato com qualquer outro tipo de recurso ou assistiram aulas do mesmo conteúdo com outra abordagem. Antes e depois do curso, os pesquisadores fizeram aos participantes a seguinte pergunta:

O que você pode dizer de u se $u = v + 3$ e $v = 1$?

Foi observado que nenhum dos estudantes que não havia dado a resposta correta no pré-teste conseguiu acertar no pós teste. Além disso, todos os seis estudantes que haviam acertado no pré-teste, erraram no pós-teste. Os autores comentam que os resultados indesejáveis se deveram ao fato de que, em momento algum durante o curso, os estudantes precisaram substituir valores da variável para obter o gráfico de uma função, pois bastava digitar a equação e observar o gráfico surgir na tela. Em conseqüência, a habilidade de calcular valores por substituição foi atrofiada.

De forma semelhante, Monaghan et al. (MONAGHAN et al., 1994) compararam os resultados de cursos iniciais de cálculos em escolas britânicas que haviam usado e que não haviam usado recursos computacionais. Para tal, os autores analisaram uma amostra de 28 estudantes de 16 e 17 anos de idade, de quatro escolas diferentes ao final de seu primeiro ano de um curso matemática avançada (*further mathematics advance level*, no original em inglês) de dois anos de duração. Dentre estes, nove estudantes eram oriundos de um escola que havia seguido uma abordagem apoiada em recursos computacionais. Nessa escola, metade das aulas havia acontecido em laboratórios de microcomputadores, nas quais o programa *Derive* era utilizado; e, além disso, os estudantes usavam computadores do tipo *palm-top* nas demais aulas. Os autores referem-se a este grupo de estudantes como grupo *Derive*. As três escolas restantes seguiram um modelo tradicional de ensino, sem uso de recursos computacionais. Uma destas, denominada escola **A** pelos autores, seguiu um programa curricular muito próximo ao do grupo *Derive*.

Após o curso, os estudantes da amostra foram entrevistados sobre alguns dos conceitos fundamentais do cálculo. Os autores citam duas questões cujas respostas diferiram sensivelmente entre os membros do grupo *Derive* e os demais. Na primeira dessas, foi pedido o cálculo (se possível) do limite $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+2}$. Os autores descrevem os resultados da seguinte forma:

> Oito dos nove estudantes do grupo *Derive* usaram o *Derive* para encontrar o limite e afirmaram que não conheciam qualquer outro método. [...] Dos 19 estudantes do grupo que não usou o *Derive*, 12 dividiram e então usaram o conceito de que $1/x$ tende a 0 quando x tende a ∞. Três substituíram números e quatro deixaram a questão em branco.
>
> (MONAGHAN et al., 1994, p.284), tradução nossa

Na outra questão mencionada, foi pedida a explicação do significado da expressão $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Os resultados foram os seguintes:

> Todos os estudantes na escola **A** deram explicações teóricas satisfatórias, mas nenhum deu exemplos. Entretanto, nenhum daqueles do grupo *Derive* deu explicações teóricas e somente dois estudantes mencionaram as palavras 'gradiente' ou 'diferenciar'. Quatro do grupo *Derive* deram exemplos. Eles substituíram $f(x)$ por um polinômio e efetuaram ou descreveram a seqüência de teclas para calcular o limite.
>
> (MONAGHAN et al., 1994, p.284), tradução nossa

Estes resultados sugerem que os estudantes do grupo *Derive* desenvolveram imagens de conceito nas quais limites e derivadas não figuram como idéias conceituais, mas como rotinas de manipulação simbólica aplicadas a uma expressão.

No Brasil, Laudares & Lachini (LAUDARES & LACHINI, 2000) observaram o processo de implantação de um laboratório de informática para o ensino de cálculo (LABCAL) numa grande universidade, que vinha adotando até então uma abordagem tradicional. Os autores realizaram um estudo amplo e detalhado, incluindo entrevistas com professores e alunos, questionários e observação de aulas.

As entrevistas com os professores de cálculo revelaram que, para a maioria deles, as atividades no laboratório seriam uma perda de tempo, que deveria ser gasto em sala de aula; e que o uso do computador deveria se restringir a checar resultados de exercícios, simular modelos matemáticos e realizar cálculos muito pesados. Sobre a observação das atividades de laboratório, os autores comentam:

> Um aluno que trabalha sozinho digita os dados do problema, aciona o comando para resolução e lê na tela a resposta. Por não ter domínio do conteúdo da matemática, não sabe se a resposta está certa. Ele, então, confere o resultado com um colega de sala e, sem nada questionar, prossegue na resolução de novo exercício. Ele mostra ter dificuldade, não só na manipulação da máquina, como também parece não entender o significado do resultado que o computador apresenta, após a execução dos comandos. [...] Para quem trabalha em dupla, a primeira dificuldade é conseguir entrar no sistema. [...] Um dos componentes da dupla digita os dados do problema, enquanto o outro apenas acompanha a atividade. Quando chamado para atender dúvidas, o monitor se limita a informar que 'a teoria deve ser aprendida em sala de aula; a atividade no LABCAL é somente para calcular, usando corretamente os comandos'. Embora conversem bastante sobre a atividade que estão executando, os alunos mostram não perceber quais os objetivos do que estão fazendo.
>
> (LAUDARES & LACHINI, 2000, pp.5-6)

Os autores prosseguem mais adiante:

> São raríssimas as perguntas que dizem respeito aos conteúdos de cálculo e inexistem os pedidos de esclarecimentos sobre os conceitos utilizados nos problemas propostos. No laboratório, prevalece o uso do computador como máquina de calcular. [...] O professor é muito solicitado para esclarecimentos pontuais, desligados do contexto da disciplina. Os alunos manifestam interesse em ter respostas prontas e se mostram avessos ao esforço de procurar soluções, bem como às tentativas de erro/acerto.
>
> (LAUDARES & LACHINI, 2000, p.6)

Laudares & Lachini concluem que o uso de tecnologia pode se constituir numa importante alternativa para o modelo tradicional de aula de matemática. Da mesma forma que (ABRAHÃO, 1998), os autores afirmam que tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades de laboratório que estimulem a formação de uma postura crítica e investigativa por parte dos alunos.

2.2.2 Características de ferramentas computacionais como fatores positivos

Gray & Pitta (GRAY & PITTA, 1997) conduziram uma série de atividades apoiadas por uma calculadora gráfica com uma criança de oito anos, Emily (pseudônimo), considerada pelos professores como uma das quatro mais fracas em aritmética em um grupo de 104 da mesma série. Entrevistas preliminares revelaram que ela somente podia operar com números inteiros por meio da associação com imagens como uma seqüência particular de dedos ou um grupo de pontos desenhados numa posição especial. Assim, qualquer manipulação aritmética simples, mesmo com números pequenos, tornava-se muito difícil, já que Emily freqüentemente perdia-se em suas próprias imagens. A calculadora gráfica utilizada por Gray & Pitta no experimento mostrava simultaneamente a operação aritmética e o resultado. Explorando esta característica, nas atividades propostas era pedido a Emily que criasse diferentes maneiras de obter um mesmo número como resultado de operações aritméticas. Durante as atividades, a criança era encorajada a explicar suas descobertas. Como resultado, ela começou a atribuir significado a números e operações aritméticas. Nove meses depois do início das atividades, Emily já era capaz de operar mentalmente com números, sem precisar recorrer a suas imagens mentais anteriores.

Hazzan & Goldenberg (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997) estudam a compreensão por estudantes do conceito de funções por meio de atividades desenvolvidas em um ambiente de geometria dinâmica. Os autores baseiam o estudo no fato de que estes ambientes permitem a exploração de função sem a presença das formas usuais de representação (fórmulas, gráficos, tabelas). Este aspecto particular pode ser relevante para a pesquisa de duas formas: além de poder ser usado para expandir as imagens de conceito de funções dos estudantes, pode fornecer aos pesquisadores novas informações sobre a compreensão dos estudantes.

Desta forma, os autores planejaram atividades em que certos elementos de uma dada construção geométrica dinâmica apresentavam relações de dependência funcional entre si. Atividades desta natureza podem, segundo os autores, alterar a percepção sobre funções, na forma como essas são exploradas, manipuladas e discutidas. Em primeiro lugar, a idéia de *comportamento* de uma função deixa de ser uma inferência analítica proveniente das formas estáticas usuais de representação, passando a ser uma observação direta e aberta da experiência dinâmica. Além disso, elas podem ampliar o universo de funções e suas propriedades. Os domínios e imagens, por exemplo, podem ser famílias de figuras planas e mais não somente conjuntos numéricos. Foram (propositadamente) selecionados para o experimento estudantes universitários de matemática considerados bem sucedidos, em seu último ano de graduação.

Foi observado em particular que os estudantes não identificavam funções em situações em que certos elementos permaneciam parados na tela ou em que o movimento de um elemento gerava o movimento de toda a construção de maneira rígida. Assim, os autores concluem que os os participantes apresentaram dificuldades para identificar as funções constantes ou as funções afins como funções (dadas pela soma da variável independente com uma constante, no caso vetorial). Os autores comentam que exemplos como estes, que seriam facilmente citados pelos estudantes em sua forma algébrica, não foram identificados no contexto de geometria dinâmica. Eles observam que alguns estudantes percebem funções da seguinte maneira:

> Para que algum objeto B seja função de A, não apenas B deve variar em resposta às variações de A, mas deve também variar *sua relação* com A enquanto este varia independentemente.
>
> (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997, p.279), tradução nossa, grifo dos autores

Hazzan & Goldenberg concluem que ambientes de geometria dinâmica podem servir como uma importante ferramenta para o ensino de funções. Eles ressaltam que a comparação de objetos matemáticos de vários pontos de vista é uma importante oportunidade de aprendizagem – em particular, que a identificação de semelhanças em contextos aparentemente distintos é um ato de abstração.

Yerushalmy (YERUSHALMY, 1997) relata um experimento desenhado para explorar e documentar a aprendizagem de funções racionais em uma abordagem conduzida pelo professor com o apoio de exploração computacional. Segundo a autora, a investigação de assíntotas é tipicamente facilitada para os estudantes por meio da introdução de certas 'receitas' (como a 'divisão pelo termo de maior grau'). Por outro lado, Yerushalmy comenta que este tópico envolve conceitos complexos como limite e continuidade, talvez dentre os principais problemas cognitivos para aprendizagem de cálculo. Tal complexidade reside não somente na sua riqueza, mas na discrepância com as noções intuitivas comumente baseadas em linguagem diária, e é amplificada por questões de caráter geométrico, tais como as possíveis posições relativas entre o gráfico de uma função racional e suas assíntotas. A autora afirma que a tecnologia pode oferecer uma opção para a aprendizagem baseada em memorização automática, mas chama atenção:

> No entanto, a aprendizagem de assíntotas usando tecnologia gráfica baseada em cálculos e representações numéricas na verdade *amplifica* complexidades que eram parcialmente escondidas na aprendizagem de representações algébricas.
>
> (YERUSHALMY, 1997, p.3), tradução nossa, grifo da autora

Durante o experimento, foi observada uma turma de cerca de 30 estudantes secundários de pré-cálculo em Israel. A abordagem pedagógica foi desenhada de forma a alternar atividades em pequenos grupos de estudantes com discussões na sala de aula como um todo. As atividades incluíam tanto tarefas formuladas para serem desenvolvidas em ambiente computacional, quanto outras em lápis e papel, sendo que os estudantes eram livres para usar o computador quando quisessem. As atividades computacionais eram parte do currículo para o curso secundário de cálculo e pré-cálculo em Israel desenvolvido com forte ênfase em tecnologia (YERUSHALMY et al., 1995). O ambiente computacional utilizado, *Function Supposer* (SCHWARTZ et al., 1988), inclui ferramentas gráficas em que gráficos de funções de uma variável podem ser esboçados em paralelo com representações algébricas e numéricas. Em particular, a apresentação visual do *Function Supposer* explora a metáfora de uma calculadora em que as funções são tratadas como variáveis, nas quais se podem aplicar operações binárias (composição, soma, produto, divisão, etc.) ou gráficas (translação, dilatação, reflexão, etc.). As atividades enfocaram quatro tópicos principais: funções racionais geradas a partir de polinômios (por meio da operação binária de divisão na metáfora da calculadora descrita acima), tipos de descontinuidades (levando ao estudo de assíntotas verticais), assíntotas horizontais e assíntotas inclinadas.

A autora relata que, durante as atividades com assíntotas verticais, a experiência computacional levou um dos estudantes, Uri, a questionar a interpretação de infinito como algo 'muito muito grande'. Segundo Uri, tal interpretação pode levar por exemplo à interpretação errônea tanto de uma descontinuidade sem assíntota como uma descontinuidade com assíntota. Para ilustrar seu raciocínio, ele formula o exemplo: $f(x) = \frac{10^{12}-x}{10^6-x}$. Uri explica que a função f não está definida no ponto $x = 10^6$ e que seus valores perto deste ponto (de ambos os lados) são 'muito muito grandes' (da ordem de 2×10^6), mas a função não tende a infinito em $x = 10^6$, portanto não tem uma assíntota vertical neste ponto. Dado que o intervalo e a densidade de números fornecidos pelo computador são limitados, esses números poderiam ser considerados como 'se aproximando do infinito'. A autora comenta que:

> A abordagem do professor, que valorizava ciclos de construções dos estudantes e dilemas motivados pelo programa de computador, ajudou a tornar os estudantes explicitamente conscientes de dificuldades e complexidades epistemológicas do conceito de infinito.
>
> (YERUSHALMY, 1997, p.11), tradução nossa

Dentre as atividades sobre assíntotas horizontais, foi proposta aos estudantes a seguinte tarefa:

(a) Encontre uma assíntota horizontal para $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

(b) Encontre uma função cujo gráfico esteja entre $f(x)$ e sua assíntota horizontal encontrada em (a).

A autora relata que cerca de metade dos estudantes caíram na armadilha de supor que uma função cujos valores se encontram entre os de uma dada função e sua assíntota ou não pode existir ou é definida em um domínio parcial (próximo à origem). Dentre os argumentos dos estudantes, encontram-se afirmações como: 'no infinito, a distância entre a assíntota e a função é muito pequena'; 'a partir de um certo ponto ambas as funções tendem a ser congruentes com a assíntota'; 'a função é igual a 1 no infinito'. Embora estes estudantes tenham procedido corretamente no item (a) da atividade, suas respostas para o item (b) sugerem que eles construíram um conhecimento para assíntotas operacionalmente efetivo, mas conceitualmente errôneo. A outra metade do grupo deu respostas satisfatórias, utilizando um repertório variado de estratégias. A autora comenta que tais estratégias foram fortemente influenciadas pelas experiências com o computador (embora a máquina não tenha sido utilizada nesta atividade). Segundo Yearushalmy, ao contrário da outra metade, estes estudantes desenvolveram uma habilidade para observar e analisar expressões simbólicas – ou uma *percepção simbólica*[3], no sentido de Arcavi (ARCAVI, 1994). Para estes estudantes, os símbolos e manipulações simbólicas tornaram-se ferramentas para o pensamento sobre a estrutura simbólica relacionada a objetos gráficos, e não simples citações decoradas de procedimentos conhecidos.

Segundo a autora, a experiência com o ambiente computacional também teve uma influência importante nas estratégias desenvolvidas pelos estudantes para estudar assíntotas inclinadas. Após longa e ativa discussão em sala de aula, os estudantes formularam uma estratégia baseada em divisão de polinômios: assíntotas inclinadas ocorrem quando o quociente da divisão entre o denominador e o numerador é um polinômio de grau 1 e o resto é diferente de zero. Isto é, a existência da assíntota é garantida pela igualdade de funções: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, onde o grau de r é menor que o grau de g. Tal estratégia é diferente do procedimento mecânico tipicamente apresentado para o cálculo de assíntotas inclinadas. A autora interpreta este resultado com sendo fortemente devido à abordagem sugerida pelo ambiente computacional, onde o tratamento de funções como variáveis de operações é enfatizado. Para estes estudantes, o método mecânico usual deixou de ser uma escolha natural. Eles desenvolveram uma percepção qualitativa do quociente em funções racionais e foram capazes de estabelecer uma conexão da expressão algébrica com o resultado gráfico da divisão de polinômios.

De forma geral, ao longo das atividades, algumas importantes diferenças em relação à abordagem tradicional foram observadas:

[3] *Symbol Sense*, no original.

- Quaisquer procedimento ou técnica foram executados por meio de exploração de propriedades usando exemplos e tecnologia gráfica.
- Cada procedimento foi apresentado, ou às vezes solicitado por estudantes, para ajudar a resolver problemas identificados na exploração.
- Cada tarefa foi planejada de tal forma que o desempenho e o sucesso dos estudantes não dependia simplesmente da habilidade para desempenhar um certo procedimento.
- A porção de tempo utilizada para o treinamento de técnicas e procedimentos era relativamente pequena.

(YERUSHALMY, 1997, p.22), tradução nossa

Segundo a interpretação da autora, o ambiente gráfico forneceu um amplo repertório de exemplos e experiências e o contato dos estudantes com um objeto inexplorado – o gráfico gerado pelo programa – levou ao questionamento sobre os processos implícitos em uma representação paralela – os procedimentos simbólicos. Yearushalmy observa que Gafni (GAGNI, 1996) define compreensão sintática de manipulações como a habilidade para desempenhar corretamente procedimentos conhecidos e, por outro lado, compreensão semântica como a habilidade para ver símbolos, expressões e operações como objetos e de trata-los em várias representações, reconhecendo a identidade estrutural e ignorando os detalhes de cada expressão ou símbolo específicos. Yerushalmy conclui que, de forma semelhante ao trabalho de Gafni, a tecnologia gráfica ajudou os estudantes a ultrapassarem a simples compreensão sintática para dominar a compreensão semântica da manipulação de funções racionais.

2.2.3 Limitações de ferramentas computacionais como fatores positivos

De forma mais particular que os estudos exemplificados na seção anterior, alguns autores reportam experiências em que a abordagem pedagógica lança mão das próprias limitações das ferramentas computacionais utilizadas como fatores de enriquecimento da aprendizagem de conceitos matemáticos.

Doerr & Zangor (DOERR & ZANGOR, 2000), por exemplo, relatam os resultados de um estudo qualitativo no Estados Unidos, baseado em observação de salas de aula, sobre o uso de calculadoras gráficas em aulas de pré-cálculo. O estudo enfoca o papel do professor, seus conhecimentos e crenças, a relação entre o papel do professor e os conhecimentos e crenças dos estudantes, na forma como eles usavam a ferramenta como apoio à aprendizagem, além de algumas limitações surgidas da prática de sala de aula. As autoras observaram duas turmas de cálculo (com 17 e 14 estudantes entre 15 e 17 anos de idade) da mesma professora, ao longo de três unidades de estudo: funções lineares, funções trigonométricas e funções exponenciais. Todos os estudantes tinham calculadoras gráficas modelos TI-82 ou TI-83. A professora tinha 20 anos de experiência e era familiar com a calculadora utilizada. A dinâmica do curso de forma geral alternava trabalho em pequenos grupos e discussões em sala de aula. Era pedido aos estudantes para interpretar dados e generalizar relações além da situação particular tratada.

As autoras ressaltam que a atitude da professora em relação ao uso da calculadora foi determinante para os resultados do experimento. Em tratando-se de um curso de pré-cálculo, ela não queria trabalhar com a calculadora como 'caixa preta' eletrônica. Ao contrário, ela criava seus próprios algoritmos e programas para calcular aproximações numéricas para derivadas, além de estimular os estudantes a fazerem o mesmo. Com tal postura, ela pretendia tornar a ferramenta tão visível e transparente quanto possível. Em particular, a professora mostrava-se consciente das limitações da calculadora e procurava discutir esta questão com a turma, através de perguntas como 'A calculadora sempre fala a verdade?' ou 'Até que ponto devemos acreditar na calculadora?'. Ao lidar com arredondamentos e aproximações, por exemplo, tal perspectiva levou os estudantes a verem cada resultado produzido pela ferramenta como algo a ser verificado à luz de seus próprios conhecimentos – e não ao contrário. Os padrões de uso da calculadora pelos estudantes são identificados na forma de cinco categorias:

- *Ferramenta de cálculo - para calcular expressões numéricas, estimar e arredondar.* Ao utilizar a calculadora para realizar cálculos pesados, os estudantes deparavam-se com freqüência com erros de dois tipos: erros de sintaxe gerados pelo uso incorreto de parênteses e outros símbolos; e erros de precisão dos resultados obtidos. Segundo as normas estabelecidas pela professora, as interpretações destes erros era parte da tarefa. Tais interpretações deviam estar baseadas em justificativas matemáticas, e não em qualquer forma de autoridade atribuída à máquina.

- *Ferramenta de transformação - para mudar a natureza da tarefa.* O uso da calculadora permitiu que os estudantes preocupassem-se mais com a interpretação dos resultados do que com os cálculos. Assim, tarefas envolvendo cálculos tediosos puderam se transformar em tarefas interativas. Por exemplo, o cálculo aproximado de taxas de variação para uma dada função seria tediosa sem a calculadora. Assim, a abordagem de taxas de variação provavelmente não iria além do aspecto local, e dificilmente essas seriam vistas globalmente no domínio da função original para serem compreendidas, elas próprias, como funções.

- *Ferramenta de coleta e análise de dados - para coletar dados, controlar fenômenos, encontrar padrões.* Por meio de atividades de coleta de dados, os estudantes eram estimulados a entender o contexto da atividade, para conceber as condições satisfatórias para o planejamento do conjunto de dados coletados.

- *Ferramenta de visualização - para encontrar funções simbólicas, mostrar dados, interpretar dados, resolver equações.* Os estudantes usavam a calculadora como ferramenta de visualização de quatro formas: desenvolver estratégias visuais para encontrar equações que se encaixem com os conjuntos de dados; encontrar janelas visuais para o gráfico e determinar a natureza da estrutura da função; ligar representações visuais com fenômenos físicos; e resolver equações. As autoras relatam que os estudantes tornaram-se bastante familiares e eficientes para encontrar janelas de visualização na calculadora para funções dadas simbolicamente. Eles tiveram contato com funções de uma determinada natureza que pareciam ser de outra quando observadas em certas janelas de visualização na calculadora (por exemplo, exponenciais que pareciam quadráticas, etc.). Em conseqüência da crença da professora de que a calculadora por si não poderia conter qualquer forma de autoridade matemática, os estudantes passaram a buscar razões para explicar a estrutura da função, além da aparência do gráfico na tela. Assim, eles convenceram-se de que um julgamento descuidado baseado na forma do gráfico não seria suficiente para descobrir a natureza da função.

- *Ferramenta de verificação - para confirmar conjecturas, entender formas simbólicas.* A calculadora servia como ferramenta de verificação quando era usada para verificar conjecturas, e em seguida refutá-las, reformulá-las, tentar prová-las ou simplesmente aceitá-las. As autoras relatam que, embora a calculadora fosse a princípio usada como uma ferramenta de visualização, uma vez que os estudantes houvessem entendido as idéias envolvidas, essa passava a servir quase que exclusivamente como ferramenta de verificação.

Além disso, as autoras ressaltam que, quando usada como uma 'caixa preta', isto é, sem tentativas de encontrar explicações para a situação problema, a calculadora tornava-se um limitador para os estudantes. Algumas vezes, eles tentavam usar um recurso da calculadora, sem entender sua estrutura e, neste caso, freqüentemente viam-se perdidos na própria estratégia. Doerr & Zangor comentam que a atitude da professora em relação à máquina e a abordagem pedagógica por ela adotada foram fundamentais para a formação de uma postura crítica por parte dos alunos:

> O conhecimento da professora das limitações da calculadora levou-a a encorajar os estudantes a questionar seus resultados baseados na calculadora. Desta forma, a calculadora tornou-se uma ferramenta que precisava ela própria ser verificada com base em raciocínio matemático. Ao contrário das preocupações prévias [...] a calculadora não se tornou uma fonte de autoridade matemática nesta sala de aula. Vemos isso como uma conseqüência do conhecimento da professora das limitações da calculadora e sua crença de que conjecturas são provadas com base em raciocínio ou argumentação.
>
> (DOERR & ZANGOR, 2000, p.159), tradução nossa

Outros estudos enfocam o papel de limitações computacionais como motivador de raciocínio dedutivo. No Brasil, Belfort & Guimarães (BELFORT & GUIMARÃES, 1998) observaram um grupo de professores em um curso de formação continuada lidando com um atividades de geometria dinâmica, com o programa *Sketchpad*. Em uma das atividades foi proposta aos professores a tarefa de calcular empiricamente o retângulo com 40m de perímetro e maior área possível. Devido a limitações de precisão do programa, respostas aproximadas poderiam ser fornecidas. (Por exemplo, uma dupla de professores participantes, trabalhando juntos, encontrou área máxima de $100m^2$ e lados $10,03$m e $9,97$m.) Assim, os resultados aproximados para os lados poderiam diferir, de forma que duplas diferentes de participantes encontraram resultados diferentes. Os autores relatam que, ao comparar tais resultados inconsistentes, os professores viram-se em grande confusão. De forma semelhante ao descrito em (ABRAHÃO, 1998), eles tendiam a aceitar os resultados fornecidos pela máquina sem questionamento, priorizando-os em relação às demais informações disponíveis sobre o problema, inclusive seus próprios conhecimentos prévios. No entanto, os autores comentam que, apesar disso, a situação de impasse inicial foi usada como motivação para uma exploração mais profunda da teoria:

> Muitos professores aceitavam a resposta dada pelo programa como conclusiva. Em um dos experimentos, fomos chamados por três duplas de professores que, sentados próximos, haviam comparado suas respostas. Todos tinham obtido uma área máxima de 100m^2, mas os valores do lado AB diferiam. Esses professores ficaram em um impasse, e não conseguiram decidir qual dos três valores encontrados seria o correto. A exploração do 'erro' do programa levou à necessidade de encontrar uma solução teórica para o problema.
>
> (BELFORT & GUIMARÃES, 1998, p.106)

Em outro trabalho, os autores (GUIMARÃES & BELFORT, 1998) relatam sua experiência testando uma abordagem apoiada por ambientes de geometria dinâmica em cursos de formação continuada para professores. Os participantes eram então encorajados a formular conjecturas e testar sua veracidade. Segundos os autores, a maioria dos professores teve sucesso em validar ou refutar suas hipóteses por meio de argumentos formais. Alguns deles declararam que, com o apoio do programa, conseguiram entender mais claramente a diferença entre raciocínio empírico e raciocínio dedutivo em geometria. Guimarães & Belfort concluem que:

> Finalmente, do ponto de vista de programa de geometria dinâmica em formação de professores, estamos convencidos que é possível utilizá-los não apenas no estágio exploratório do estudo da geometria, mas também como uma ferramenta de apoio para o desenvolvimento da capacidade de justificar resultados e da valorização do raciocínio dedutivo em geometria.
>
> (GUIMARÃES & BELFORT, 1998, p.379)

Os autores relatam experiências da mesma natureza também em (BELFORT, 2002; BELFORT et al., 1999; BELFORT et al., 2003).

Resultados semelhantes são reportados por Hadas et al. (HADAS et al., 2000). Neste trabalho, as autoras discutem o papel de situações de surpresa e incerteza no desenvolvimento do raciocínio dedutivo de estudantes realizando tarefas especialmente desenhadas em um ambiente de geometria dinâmica. Os autores observam que mesmo estudantes que conseguem redigir demonstrações matemáticas funcionalmente corretas, encaram esta atividade como o cumprimento de um ritual e não estão cientes de seu significado. Como afirma Balacheff (BALACHEFF, 1991), estudantes freqüentemente não se envolvem no processo de construir demonstrações não por que sejam incapazes de fazê-lo, mas por que não vêem razão ou necessidade de fazê-lo. Por outro lado, a experiência de arrastar objetos geométricos em um ambiente de geometria dinâmica permite a verificação da invariância de uma propriedade, como um atributo de uma classe de objetos. Tal operação pode servir para convencer estudantes da veracidade de conjecturas sem a necessidade de demonstrações, afastando-os ainda mais da compreensão do papel de sua necessidade ou razão, como constatam Yerushalmy et al. (YERUSHALMY et al., 1993).

Com esta motivação teórica, Hadas et al. desenvolveram duas atividades no ambiente de geometria dinâmica *Geometry Inventor* (LOGAL EDUCATION SOFTWARE, 1994), para provocar surpresa e incerteza. Os autores aplicaram as atividades a duas amostras de estudantes secundários em Israel, trabalhando em duplas. A primeira atividade foi desenhada com o objetivo de provocar surpresa, sendo os resultados contrários à intuição dos estudantes. A segunda envolvia ainda um ingrediente de incerteza, além de surpresa, pois não só os resultados, mas a própria possibilidade (ou impossibilidade) da construção geométrica seria contrária à intuição.

Na primeira atividade, foram pedidas as somas dos ângulos externos e internos de um polígono (convexo) com número qualquer de lados, a partir do seguinte roteiro:

Tarefa A. Medir (com o programa de computador) a soma dos ângulos internos de um polígono, *enquanto o número de lados cresce.* Generalize e explique suas conclusões.

Tarefa B. Medir (com o programa de computador) a soma dos ângulos externos *de um quadrilátero.* Formule uma hipótese para a soma dos ângulos externos de um polígono enquanto o número de lados cresce. Verifique sua hipótese, por meio de medições, e explique o que você encontrou.

(HADAS et al., 2000, p.132) tradução nossa, grifos nossos

A tarefa A foi desenhada para levar os estudantes a conjecturar que a soma dos ângulos internos de um polígono cresce com o número de lados, ou, mais precisamente, chegar à fórmula $S = 180°(n-2)$. A soma dos ângulos externos, por outro lado, é constante igual a 360°, mas a conjectura formulada em A levaria os estudantes a supor na tarefa B que esta também cresceria com o número de lados. Em seguida, a tarefa B pede a verificação dessa conjectura por meio de medições – levando assim a uma situação de surpresa gerada pela contradição entre a conjectura formulada e os resultados encontrados. De fato, os autores relatam que em 37 das 49 respostas analisadas, os estudantes conjecturaram que a soma dos ângulos externos aumentaria com o número de lados do polígono. Destas 49 respostas, apenas 9 (18%) foram formuladas com explicações dedutivas, sendo as demais incluídas em outras categorias pelos autores (sem explicação, explicação indutiva, explicação parcialmente dedutiva, explicação baseada em variação visual).

Na segunda atividade, aplicada a outra amostra de estudantes, estes deveriam analisar condições suficientes para congruência de triângulos:

Tarefa 1a. Dado um triângulo dinâmico ΔABC, construa outro ΔDEF tendo um ângulo e um lado adjacente iguais a um ângulo e um lado adjacente de ΔABC. Arraste os vértices de ambos os triângulos e investigue a variação dos triângulos e como estes se relacionam entre si.

Tarefa 1b. Dado um triângulo dinâmico ΔABC, construa outro ΔDEF tendo dois ângulos e o lado entre eles iguais a dois ângulos e o lado entre eles de ΔABC. Arraste os vértices de ambos os triângulos e investigue a variação dos triângulos e como estes se relacionam entre si.

Tarefa 2. É possível construir um triângulo com um lado e dois ângulos iguais àqueles de um triângulo dinâmico ΔABC, mas não congruente a ΔABC? Se for possível construa tal triângulo; caso contrário, explique porque.

Tarefa 3a. Quantos lados e ângulos iguais existem nos triângulos não-congruentes construídos na tarefa 2?

Tarefa 3b. É possível construir dois triângulos não congruentes, com *cinco* elementos iguais (lados e ângulos)? Formule uma hipótese.

Tarefa 4. É possível construir dois triângulos não congruentes, com *seis* elementos iguais? Se sim, construa tais triângulos, caso contrário explique porque.

Tarefa 5a. Supondo que nós já tenhamos dois triângulos não congruentes com *cinco* elementos iguais, especifique os elementos iguais.

Tarefa 5b. Tente construir dois triângulos não congruentes com *cinco* elementos iguais.

(HADAS et al., 2000, pp.139-140) tradução nossa, grifos dos autores

Na aplicação desta atividade, situações de surpresa apareceram desde a tarefa 3a, quando os estudantes depararam-se com dois triângulos com quatro elementos iguais, mas que não eram congruentes. A tarefa 5 levou a uma situação de incerteza, sobre a possibilidade de construção de triângulos não congruentes com cinco elementos iguais. Esta tarefa foi planejada para vir depois da tarefa 2, quando os estudantes haviam se surpreendido com uma construção contrária a sua intuição, e depois da tarefa 4, quando eles haviam argumentado sobre a impossibilidade de se construir triângulos não congruentes com seis elementos iguais. Os autores relatam que, das 85 respostas analisadas, 48 (56%) foram formuladas sob a forma de explicações dedutivas.

Os autores observam que, na primeira atividade os estudantes estavam seguros sobre as respostas dadas pelo computador, apesar destas serem contrárias à intuição. Na segunda atividade, por outro lado, a incerteza manteve-se ao longo das tarefas. A proporção de explicações dedutivas aumentou sensivelmente na segunda atividade. Os autores concluem que este resultado deve-se ao fato de que o elemento de incerteza fez com que os estudantes recorressem a explicações dedutivas como única forma de garantir a possibilidade das construções geométricas. Finalmente, eles comentam que:

> Concluímos que as atividades em um ambiente de aprendizagem de geometria dinâmica trouxe demonstrações para o reino das atividades e argumentos dos estudantes; isto é, eles se engajaram naturalmente numa verdadeira atividade matemática. [...] Nestas atividades, os estudantes cessaram de ser recipientes de provas formais, e foram engajados em uma atividade de construção e avaliação de argumentos, na qual certeza e compreensão estavam em jogo, e eles tiveram que usar seu conhecimento geométrico para explicar contradições e ultrapassar incertezas.
>
> (HADAS et al., 2000, p.149), tradução nossa

Exemplos de atividades apoiadas por ambientes computacionais que exploram a surpresa dos estudantes para sugerir a necessidade de provas são também reportados em outros trabalhos (ARCAVI, 2000; ARCAVI & HADAS, 1999; DREYFUS & HADAS, 1996). Arcavi, em particular, relata que professores secundários expressaram grande desconforto ao lidar com situações em que a visualização de resultados na tela do computador era contrária a sua intuição inicial, mas que este desconforto se converteu em motivação para um estudo teórico mais detalhado do problema (ARCAVI, 2000). O autor comenta que uma abordagem para o mesmo problema baseada em papel e lápis dificilmente haveria levado e tais situações – e que, em conseqüência, muitas facetas teóricas do problema provavelmente haveriam permanecido inexploradas. Arcavi conclui que o uso de ambientes computacionais pode introduzir um componente empírico ao pensamento matemático. Esta perspectiva pode converter o computador em um instrumento para inaugurar um modelo novo de fazer e ensinar matemática, em vez de uma simples ferramenta para apresentar velhas abordagens em novas roupagens (ARCAVI, 2000, p.41).

Capítulo 3

Questões centrais de investigação: descrições e conflitos teórico-computacionais

> *O* tonal *é tudo o que somos. Tudo que tem nome é o* tonal. [...] *O* tonal *é tudo o que conhecemos.* [...] *O* tonal *é tudo o que sabemos.* [...]
>
> *O* nagual *é a parte de nós para a qual não existe descrição – nem palavras, nem nomes, nem sensações, nem conhecimento.* [...] *O* nagual *só pode ser presenciado.*
>
> Carlos Castaneda (CASTANEDA, 1974)

Um objeto matemático é perfeitamente caracterizado pela sua definição formal. Todas as suas propriedades e características serão desdobramentos lógicos de sua definição formal, deduzidas a partir do conjunto de postulados e proposições da teoria em que a definição insere-se, por meio de um sistema de regras de inferência pré-estabelecido. Tudo aquilo que pode ser dito do objeto será dito em decorrência da definição. Portanto, podemos dizer que a definição *esgota* completamente o objeto, isto é, de uma perspectiva estritamente formal, um objeto matemático *é* a sua definição.

Neste sentido, uma *função*, como estabelecido por Bourbaki, *é*:

> Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é chamada uma relação funcional em y se, para todo $x \in E$, existe um único $y \in F$ que está na dada relação com x. Damos o nome de função à operação que desta forma associa com todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que está na dada relação com x.
>
> (BOURBAKI, 1939, p.351), tradução nossa

Da mesma maneira, uma dada função específica é completamente determinada pelo terno domínio/contra-domínio/relação: (E, F, φ). Todas as informações acessíveis sobre esta função virão de um processo dedutivo, embasado na definição de Bourbaki e nos três elementos acima.

Por outro lado, lemos no clássico *What Is Mathematics*:

> Uma séria ameaça à própria vida da ciência está implícita na asserção de que matemática não é nada mais que um sistema de conclusões desenhado a partir de definições e postulados que devem ser consistentes e além disso podem ser criados pelo livre arbítrio dos matemáticos. Se esta descrição fosse precisa, matemática não poderia atrair nenhuma pessoa inteligente. Ela poderia ser um jogo de definições, regras e silogismos, sem motivo ou objetivo. A noção de que o intelecto pode criar sistemas postulacionais por seu próprio capricho é uma enganosa meia-verdade. [...] Seja qual for o nosso ponto de vista filosófico, para todos os propósitos da observação científica um objeto se *esgota* na totalidade das possíveis relações com o sujeito ou instrumento que o percebem.
>
> (COURANT & ROBBINS, 1941, p.xvii), tradução nossa

Assim, embora possamos pensar que a definição *esgota* o objeto definido, se nos mantemos restritos a um contexto puramente formal, esta seria uma redução perigosa, como afirmam Courant & Robbins – a matemática como ciência escapa em muito da sua simples forma. Nosso objetivo nesta tese, entretanto, é muito mais modesto que estabelecer a noção de *objeto matemático*, no contexto da natureza da matemática como ciência, em um sentido filosófico ou epistemológico. Desejamos discutir certas questões sobre o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos que dizem respeito à conceituação de *objeto de ensino de matemática*, isto é, à conceituação de *objeto matemático no contexto da pedagogia da matemática*. Neste sentido, Poincaré comenta que:

> Para os filósofos ou cientistas, uma boa definição é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente a eles; e que satisfaz as regras da lógica. Mas em educação, não é assim; seria uma que pode ser entendida pelos alunos.
>
> (POINCARÉ, 1908a, p.117), tradução nossa

A teoria de imagens de conceito e unidades cognitivas, apresentada no capítulo 1, estabelece que um conceito matemático na estrutura cognitiva de um indivíduo é a sua imagem de conceito. Tall afirma que uma definição é mais uma forma de identificar um conceito já existente, do que uma forma de compreendê-lo (TALL, 2000, p.9). Assim, a conceituação formal deve figurar como um objetivo no desenvolvimento cognitivo, não como um ponto de partida – ao contrário do que ocorre no desenvolvimento formal. Em particular, esta teoria sugere que uma pedagogia matemática deve visar o enriquecimento das imagens de conceito dos sujeitos, por meio do estímulo da formação de conexões diversificadas entre unidades cognitivas. Para tal, uma abordagem pedagógica deve incluir não somente uma, mas uma ampla gama de representações para o conceito objetivado. Esta perspectiva pedagógica é compartilhada por muitos outros pesquisadores, por exemplo (ARTIGUE, 1991; CONFREY & DOERR, 1996; CORNU, 1991; DENNIS & CONFREY, 1996; DOERR & ZANGOR, 2000; DUVAL, 1999; GOLDENBERG, 1987; LEINHARDT et al., 1990; MOSCHKOVICH et al., 1993; SIERPIŃSKA, 1992; TIROSH & TSAMIR, 1996; YERUSHALMY, 1991).

Com base nesse referencial teórico, nesta tese desejamos contribuir com a discussão sobre o papel pedagógico das limitações associadas a cada forma de representação e, principalmente, do possível *confronto* entre elas.

3.1 Definir e descrever

No contexto pedagógico, para complementar (ou em certos casos, mesmo substituir) a definição formal de um conceito, para estimular o desenvolvimento de imagens de conceito mais ricas (como discutido acima), professores freqüentemente lançamos mão de referências informais, que encerram limitações em relação à própria definição formal. Por exemplo, é comum utilizarmos a frase 'a função x^2' para nos referirmos à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real x associa seu quadrado. No ensino de funções, usualmente empregam-se representações (escritas) de três naturezas principais: numéricas (tabelas), algébricas (fórmulas) e geométricas (gráficos). Cada uma dessas formas de representação isoladamente é limitada na medida em que evidencia certos aspectos do conceito de função, mas omite outros, como comenta Goldenberg:

> Expressões algébricas especificam a relação exata, mas não dão nem exemplos nem uma gestalt visual. Gráficos fornecem uma gestalt dentro dos limites do gráfico, mas deixam detalhes precisos não esclarecidos. Tabelas fornecem exemplos do mapeamento, mas não especificam sua natureza. Dito de outra forma, cada representação bem escolhida vê a função de uma perspectiva particular que captura bem alguns aspectos da função, mas deixa outros menos claros: tomadas juntas, representações múltiplas deveriam aumentar a fidelidade da mensagem como um todo.
>
> (GOLDENBERG, 1987, p.197), tradução nossa

Muitos autores chamam atenção para a importância da multiplicidade de representações para a aprendizagem de um conceito. Duval, por exemplo, afirma que um componente essencial da aprendizagem de matemática é a coordenação de diferentes representações de uma dada idéia ou conceito (DUVAL, 1999). O próprio Goldenberg prossegue afirmando que, embora a multiplicidade de representações possa propiciar uma compreensão mais ampla do conceito, o estabelecimento das condições sob as quais tal objetivo pode ser atingido demanda pesquisa cuidadosa. Essas três formas de representação, na maneira em que são normalmente apresentadas em sala de aula, são também limitadas em relação à definição formal, na medida em que não especificam de forma indubitável a função a que pretendem se referir (como ilustra a figura 3.1).

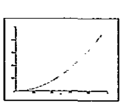
A tabela $\begin{array}{c\|c} x & y \\ \hline -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$ pode representar ambas as funções:	$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$
A fórmula $y = x^2$ pode representar ambas as funções:	$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$
O gráfico  pode representar ambas as funções:	$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x\|\,x \end{array}$

Figura 3.1: Limitações das três principais representações para funções reais.

Usaremos o termo **descrição de conceito** (ou simplesmente **descrição**) para *qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico, que não esgote o conceito a que se refere, ou seja, que guarde limitações em relação a este, no sentido em que evidencie certos aspectos e omita outros*[1]. Assim, descrições podem ser referências orais ou escritas, sob a forma de linguagem corrente, simbologia, notação matemática, esboços, diagramas, esquemas, e assim por diante. No caso do conceito de função, as formas de representação citadas acima constituem exemplos de descrições para o conceito. Diremos que ao enunciar a frase 'a função x^2', por exemplo, estaremos *descrevendo* a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada x real associa seu quadrado. Além disso, ambientes computacionais para o ensino inauguraram um vasto repertório de descrições para conceitos matemáticos – descrições de natureza distinta das tradicionalmente utilizadas em muitos sentidos, como discutiremos em mais detalhes nas seções a seguir.

Como observa Tall, um passo importante para a compreensão de um conceito matemático é, sem dúvida, estabelecer a diferença entre as idéias de *definir*, no sentido formal de um contexto teórico, e *descrever*, no sentido não formal de um contexto pedagógico (TALL, 1992). Assim, certos obstáculos de aprendizagem em matemática estão relacionados com o fato que, em muitas situações, tanto estudantes quanto professores tratam descrições como definições ou definições como descrições. Muitos enunciados estabelecidos em situações pedagógicas com o intuito de *definir formalmente* um conceito pecam pela imprecisão; ou enunciados utilizados para *descrever informalmente* são entendidos como definições, transmitindo suas próprias limitações às imagens de conceito assim formadas. Por outro lado, cabe ressaltar que uma descrição de conceito não guarda com a sua definição formal uma relação direta de oposição. Ao caracterizar neste texto uma descrição através de suas limitações, não pretendemos tampouco estabelecer esta noção como uma maneira de se conceituar um objeto matemático que seja imperfeita em relação à definição formal, (que, por outro lado,

[1]Em trabalhos anteriores conceituamos a noção de descrição de forma diferente. Em (GIRALDO & CARVALHO, 2003c), por exemplo, definimos uma descrição como sendo: "qualquer referência a um conceito matemático, dentro de um contexto pedagógico, que apresente limitações inerentes em relação à definição formal associada." (ver também (GIRALDO et al., 2003b; GIRALDO & CARVALHO, 2004a)). Entretanto, a partir de novas reflexões teóricas, baseadas na análise dos dados empíricos apresentados nesta tese, consideramos mais adequado não posicionar a noção de descrição em oposição à de definição, por motivos que passaremos a expor.

o conceituaria perfeitamente). Com efeito, tal comparação nem mesmo faria sentido, dado que *descrever* e *definir* são atividades pertencentes a contextos distintos, a saber, pedagógico e teórico-formal. A relação entre estes dois contextos é uma questão (complexa) relevante para esta pesquisa em pelo menos dois aspectos: os mecanismos por meio dos quais as práticas pedagógicas em educação matemática influenciam o desenvolvimento formal das teorias; e as formas como as teorias formais inserem-se no ensino e aprendizagem de matemática. Em particular, uma definição formal, quando colocada em um contexto pedagógico, pode atuar como uma descrição. De fato, não é difícil imaginar que definições formalmente equivalentes possam enfatizar ou omitir aspectos diferentes do conceito definido. Consideremos como exemplo as seguintes definições: 'um conjunto é infinito se não pode ser posto em correspondência biunívoca com nenhum subconjunto dos naturais na forma $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ '; ou 'um conjunto é infinito se pode ser posto em correspondência biunívoca com uma parte própria sua'. Winicki-Landman & Leikin comentam que a escolha de um enunciado como definição para um conceito desempenha um papel crucial no processo de aprendizagem – muito embora no âmbito da teoria pura, qualquer um pertencente a uma mesma classe de enunciados logicamente equivalentes possa ser escolhido *arbitrariamente* como definição, tornado-se os demais teoremas (WINIKI-LANDMAN & LEIKIN, 2000, p.17).

É importante observar que uma descrição é uma *situação pedagógica*, e sendo assim suas limitações não são atributos inerentes da forma de representação utilizada, mas dependem do próprio contexto pedagógico. Entendemos aqui por *limitações* todo o conjunto de características ou propriedades do conceito descrito que são evidenciadas ou omitidas no ato de descrever, bem como eventuais diferenças em relação a outras descrições ou à própria definição formal. Seja qual for o caso, as limitações de uma descrição – sejam estas aspectos evidenciados, aspectos omitidos ou diferenças comparativas – não são dadas a priori, mas emergem do contexto pedagógico específico. Embora tenhamos escolhido o termo *limitação*, não desejamos atribuir a esta noção qualquer conotação negativa. Ao contrário, o papel pedagógico das limitações de uma descrição também depende do contexto como um todo e pode ser tanto indesejável quanto muito positivo, como sugerem os resultados de pesquisa já citados, por exemplo (BELFORT & GUIMARÃES, 1998; DOERR & ZANGOR, 2000; HADAS et al., 2000). O objetivo central deste trabalho é justamente estudar as potencialidades pedagógicas das limitações associadas a descrições.

Nos trabalhos citados, podemos encontrar diversos exemplos de descrições computacionais. A característica da calculadora empregada em (GRAY & PITTA, 1997) é explorada para enfatizar as relações entre números inteiros como resultados de operações e as próprias operações (mostrados simultaneamente na tela). De forma semelhante, (YERUSHALMY, 1997) explora a metáfora da calculadora presente no ambiente *Function Supposer* para descrever funções racionais, enfatizando o aspecto de resultado de uma operação binária de polinômios. As atividades propostas em (HADAS et al., 2000) foram deliberadamente planejadas para enfatizar determinados aspectos de cada conceito e confrontá-los entre si. Em (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997) os autores comentam que ambientes de geometria dinâmica podem fazer com que os alunos manipulem e investiguem construções sem se preocupar com os seus aspectos técnicos, levando-os a focar atenção em relações mais abstratas, como propriedades invariantes das entidades. O trabalho com lápis e papel, por outro lado, força a atenção (ao menos inicialmente) para as medidas reais e posições precisas dos objetos. Assim, os autores sugerem que ambientes de geometria dinâmica podem atuar como descrições que enfatizam aspectos abstratos e qualitativos e omitem aspectos técnicos, enquanto esboços em lápis e papel enfatizam grandezas concretas e omitem propriedades mais abstratas.

3.1.1 Descrições e conflitos

As limitações associadas a uma descrição podem levar um estudante a se se dar conta de aparentes contradições com a teoria (ou, melhor dizendo com a sua imagem de conceito da teoria). Por exemplo, ao tentar verificar a bijetividade de uma função, dada somente sua expressão algébrica, um estudante pode perceber que a informação é insuficiente, pois estão omissos o domínio e o contra-domínio. Passaremos a nos referir por meio do termo **situação de conflito** (ou simplesmente **conflito**) a uma situação desta natureza: *a percepção, por parte do estudante, de uma aparente contradição* *motivada pelas limitações de uma descrição, ou pelo confronto de mais de uma descrição*[2] (como ilustrado na figura 3.2).

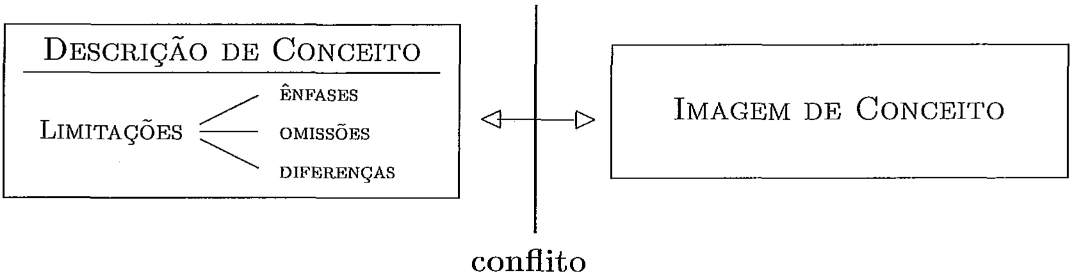


Figura 3.2: Descrições e conflitos.

Desta forma, podemos dizer que uma descrição encerra conflitos potenciais, que podem ou não vir a se atualizar. Por sua vez, a atualização das limitações de uma descrição sob a forma de conflito pode gerar diferentes reações pelos estudantes. Esses podem compreender rapidamente as razões para a aparente contradição, ou, num extremo oposto, verem-se em situação de confusão, como ocorreu por exemplo no relato em (BELFORT & GUIMARÃES, 1998). Esta gama de reações pode ocasionar efeitos diversificados nas imagens de conceito dos estudantes. Tais efeitos são fortemente determinados pela pedagogia adotada frente a uma situação de conflito – este vem a ser o foco principal desta tese. Da discussão acima, fica claro em particular que a escolha do termo *conflito* (assim como no caso do termo *limitação*) não implica qualquer intenção de embutir nesta noção uma conotação negativa.

É importante notar que o sentido que atribuímos aqui para o termo *conflito* é diferente daquele dado por Tall & Vinner nos primeiros estudos sobre imagens de conceito (TALL & VINNER, 1981). Naquele texto, os autores chamam *conflito* (potencial ou cognitivo) como uma parte inconsistente de uma imagem de conceito de um indivíduo (portanto, um "defeito" a ser "corrigido"). No presente texto, identificamos por meio do termo *conflito* um processo particular de desenvolvimento de imagem de conceito, portanto uma estrutura inerente à própria dinâmica da imagem de conceito.

[2]Da mesma forma que no caso da noção de descrição, nossa conceituação de conflito evoluiu a partir de novas reflexões teóricas. Em (GIRALDO & CARVALHO, 2004a), por exemplo, definimos conflito como uma situação de confusão originada pelo uso de uma descrição. Note que, na conceituação estabelecida aqui, não incluímos uma sensação de confusão como condição necessária para a caracterização de uma situação conflito.

3.1.2 Efeitos de estreitamento e expansão

Os experimento relatado em (HUNTER et al., 1993) revela um fenômeno relevante: a limitação das descrições computacionais utilizadas (no caso, a omissão dos processos de cálculo de valores por substituição) fez com que a habilidade de calcular valores por substituição se atrofiasse nas imagens de conceito dos estudantes. Chamaremos processos como esse de **efeito de estreitamento**: *as limitações das descrições utilizadas na abordagem pedagógica convertem-se em limitações nas imagem de conceito conseqüentemente desenvolvidas pelos estudantes* (como ilustrado na figura 3.3). Analogamente, encontramos outro exemplo de efeito de estreitamento no relato de (MONAGHAN et al., 1994): em conseqüência do (ab)uso de descrições computacionais em que as derivadas eram obtidas simplesmente por meio de uma seqüência de teclas corretamente acionadas, os estudantes desenvolveram imagens de conceito nas quais a derivada era simplesmente uma procedimento mecânico computacional.

LIMITAÇÕES NAS DESCRIÇÕES DE CONCEITO $\longrightarrow$ LIMITAÇÕES NAS IMAGENS DE CONCEITO

Figura 3.3: Efeitos de estreitamento.

Como discutimos no capítulo 1, Cornu observou que estudantes freqüentemente desenvolvem imagens para o conceito de limite (chamadas *concepções espontâneas* pelo autor), impregnadas pelos significados coloquiais de termos usados em contextos técnicos, como 'aproximar' ou 'tender a' (CORNU, 1983). De maneira semelhante, Hazzan & Goldenberg, relatam que um estudante interpretou o termo 'independente', que no contexto técnico referia-se a variáveis de uma função, por meio de metáforas provenientes do uso diário. Aquele estudante chegou assim à conclusão inconsistente de que a variável dependente de uma função constante seria independente, pois seu comportamento não seria 'governado' pela outra variável (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997, p.276). Segundo nossa formulação, estes são exemplos de efeitos de estreitamento associados a uma descrição oral para um conceito matemático.

Em nossa própria interpretação, os exemplos de efeitos de estreitamento relatados em (HUNTER et al., 1993) e (MONAGHAN et al., 1994) não estão relacionados à ocorrência de conflitos, mas, ao contrário, à sua ausência – como as descrições computacionais eram usadas com exclusividade na abordagem pedagógica, os estudantes tiveram poucas oportunidades de se dar conta de suas limitações. Neste sentido, Tall comenta que enfocar certos aspectos de uma atividade e negligenciar outros pode causar a atrofia dos aspectos negligenciados (TALL, 2000, p.8). De forma semelhante, ao discutir representações para o conceito de função, Sierpińska afirma que:

> Muitas representações diferentes para funções são usadas, dentre as quais tabelas, gráficos e fórmulas analíticas são as mais amplamente conhecidas e usadas, pelo menos na escola. A consciência das limitações de cada uma das representações e de que elas representam um mesmo conceito geral é certamente condição fundamental para a compreensão de funções.
>
> (SIERPIŃSKA, 1992, p.49), tradução nossa

Drijvers considera um obstáculo como uma barreira que dificulta o uso de esquemas que estudantes tenham em mente (DRIJVERS, 1997). O autor defende que professores devem considerar tais obstáculos seriamente e tirar vantagem deles, tornando explícita a matemática que está por trás. Doerr & Zangor também salientam a consciência da professora das limitações da calculadora e o uso positivo destas limitações como um fator fundamental para o resultado bem sucedido do curso observado (DOERR & ZANGOR, 2000). Hazzan & Goldenberg comentam que:

> Acreditamos que quando estudantes e professores detêm-se para analisar propriedades de idéias ou objetos matemáticos que estão sendo comparados, e para examiná-los de vários pontos de vista, então ocorre uma verdadeira oportunidade para aprender. Em particular, o ato de discernir o que duas situações superficialmente têm em comum [...] é um ato de abstração.
>
> (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997, p.283), tradução nossa

Assim, nossa hipótese é de que se situações de conflito, em lugar de evitadas, são valorizadas, dentro de uma abordagem pedagógica cuidadosamente desenhada, o papel das limitações associadas pode ser revertido positivamente – *estas podem atuar para a expansão de imagens de conceito e não para o seu estreitamento.* Por exemplo, em (BELFORT & GUIMARÃES, 1998), os autores relatam que, ao depararem-se com uma situação de conflito, proveniente das limitações de arredondamento numérico da descrição computacional, os professores participantes viram-se a princípio num impasse. No entanto, a exploração mais detida de tal situação levou os participantes a expandirem suas imagens de conceito para processos dedutivos em geometria.

Doerr & Zangor relatam que os alunos participantes observaram que a calculadora retornava valores da função exponencial (de base 2) iguais a zero para valores muito grandes da variável (expoente). Os estudantes argumentaram então que tal resultado não seria possível, uma vez que 'você pode dividir por dois infinitamente sem chegar a zero', o que levou a uma considerável discussão sobre a calculadora tendo limitação e 'nem sempre dizendo a verdade'. As autoras afirmam que a visão pelos estudantes da calculadora – como uma ferramenta que sempre deve ser checada com base em sua própria compreensão de matemática – foi devida à atitude da professora.

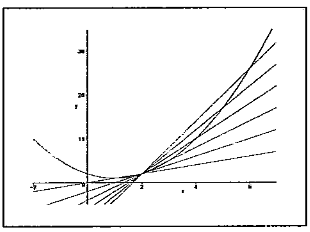
Guin & Trouche apontam para a dificuldade de distinção entre objetos matemáticos e suas representações na calculadora gráfica (GUIN & TROUCHE, 1999). Hazzan & Goldenberg, por outro lado, defendem que contextos geométricos, quando contrastados com contextos algébricos, podem permitir que aspectos essenciais de idéias importantes distinguam-se de características da representação (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997, p.287). Segundo os autores, para que os estudantes possam examinar sua compreensão (no caso, de funções), devem refletir sobre suas observações, desenvolver sua compreensão e ter a oportunidade de testar suas idéias em contextos que exijam certa reinterpretação. Acarvi relata uma série de atividades desenhadas para estudar o comportamento de funções em ambientes de geometria dinâmica, nas quais as expressões algébricas não foram introduzidas inicialmente, mas somente após uma detida exploração no ambiente computacional, ao contrário do que os participantes estavam acostumados (ARCAVI, 2000). O autor comenta que a ausência inicial da representação algébrica não impediu um profundo e genuíno pensamento matemático – ao contrário, permitiu que os estudantes não gastassem demasiada atenção em manipulações simbólicas, podendo se preocupar com outros aspectos dos problemas. Arcavi conclui que esta perspectiva parece ter levado a uma melhor compreensão tanto da situação matemática em si quanto de suas representações. Em nossos próprios termos, diríamos que a reversão da ordem usual da abordagem evitou o efeito de estreitamento das descrições algébricas.

Yerushalmy et al. relatam que estudantes lidando com ambientes de geometria dinâmica podem se convencer da validade de propriedades por meio da operação de arrastar objetos na tela, a ponto de acreditar que demonstrações não são necessárias (YERUSHALMY et al., 1993). Neste caso, o efeito de estreitamento está relacionado com a limitação dada pela ênfase da descrição computacional na observação da invariância de propriedades em classes de objetos geométricos (dinâmicos). Hadas et al., por outro lado, afirmam que a mesma experiência com ambientes de geometria dinâmica – inserida num contexto pedagógico em que um ingrediente de incerteza foi explorado – serviu para que os estudantes passassem a *valorizar* argumentações dedutivas.

No experimento relatado em (YERUSHALMY, 1997), a limitação da descrição por meio do ambiente computacional, que enfatizava o aspecto de uma função como resultado de uma operação binária de polinômios, foi explorado para questionar um método previamente ensinado. Como resultado, os estudantes expandiram suas imagens de conceito e foram capazes de formular por si um método para encontrar assíntotas inclinadas. De maneira semelhante, em (GRAY & PITTA, 1997), os autores exploraram a descrição particular fornecida pela calculadora utilizada, que enfatizava um número como resultado de uma operação aritmética, para questionar a imagem de conceito prévia da estudante, que só era capaz de realizar operação de forma muito limitada por meio de contagem direta.

3.2 O caso da derivada: descrições por meio de inclinações de retas tangentes

Neste trabalho, enfocaremos descrições e conflitos de natureza computacional. Antes porém, discutiremos um exemplo baseado na abordagem tradicional do conceito de derivada. Por se tratar de um exemplo bastante familiar, acreditamos que a discussão será útil para melhor contextualizar as noções aqui estabelecidas. Muitos tipos de descrições para o conceito de derivada são empregadas no ensino de cálculo (por exemplo, aquelas elencadas na página 18). No entanto, como discutimos no capítulo 1, a abordagem pedagógica introdutória tradicional baseia-se principalmente em construção pseudo-formal, em que derivadas são conceituadas através da definição por meio de limite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sem que a noção de limite esteja formalmente estabelecida. Assim sendo, esta maneira de se referir a derivadas *não é* uma definição formal – embora seja comumente apresentada como tal. Trata-se de uma descrição pedagógica para o conceito de derivada. A fórmula acima vem freqüentemente acompanhada da célebre figura representando retas secantes 'tendendo' a uma reta tangente, como na figura 3.4. Desta forma, a derivada num ponto fixado x_0 é apresentada como o 'valor limite' das inclinações das retas secantes quando h 'se aproxima indefinidamente' de zero – interpretado como a inclinação da reta tangente no ponto. Esta abordagem está associada a uma série de problemas na formação dos conceitos de limite e derivada, como por exemplo aqueles constatados por Cornu (CORNU, 1983; CORNU, 1991) e Sierpńska (SIERPIŃSKA, 1987; SIERPIŃSKA, 1992).



$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$m_t = \lim_{x \to a} m_s$$

Figura 3.4: Uma figura bem conhecida.

Tall (TALL, 1989) observa que, nas imagem de conceito de estudantes iniciantes de cálculo, freqüentemente a idéia de tangente encontra-se fortemente atrelada a problemas de construções geométricas de retas tangentes a círculos e outras curvas elementares (em geral convexas) – a única noção de tangência com que os estudantes têm contato antes dos primeiros cursos de cálculo. Nesses problemas, a abordagem enfatiza a situação geométrica global entre a curva e a reta tangente – o que, é claro, não se generaliza para o conceito de tangente no sentido do cálculo infinitesimal (como ilustra a figura 3.5). Neste caso, propriedades válidas em um contexto mais restrito, podem ser indevidamente generalizadas para o contexto mais geral.

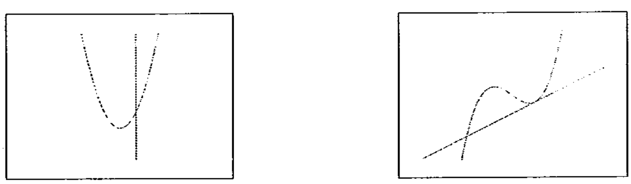


Figura 3.5: Uma reta que intercepta a curva uma vez, mas *não é* tangente; e uma reta que intercepta a curva mais de uma vez, mas *é* tangente.

Winiki-Landman & Leikin relatam que uma das definições para tangência a parábolas dadas na escola secundária em Israel é a seguinte: 'Uma tangente à parábola é uma reta que deixa a curva no mesmo semi-plano definido pela reta, e que tem somente um ponto de intersecção com ela (WINIKI-LANDMAN & LEIKIN, 2000, p.20). Os autores comentam que, embora esta definição só vale para curvas convexas, ela pode ser erroneamente concebida como uma propriedade geral. Assim, a seqüência de ensino pode induzir a transferência incorreta de propriedades de uma curva para outra. Isto pode resultar da falta de atenção para o fato de que quaisquer aumentos no conjunto de propriedades de um conceito implicam em reduções no conjunto de objetos que o exemplificam. Similarmente, encontramos em um livro didático de pré-cálculo (COHEN, 1996, p.518) a definição abaixo (tradução nossa), ilustrada por um desenho (figura 3.6). Embora a intenção aqui seja motivar a idéia de derivada a partir do caso particular de tangência a parábolas, esta descrição enfatiza justamente o aspecto geométrico global, em lugar do analítico local.

Definição: Tangente a uma Parábola
Seja P um ponto em uma parábola. Então uma reta passando por P é dita tangente à parábola em P desde que a reta intercepte a parábola somente em P e a reta não seja paralela ao eixo da parábola.

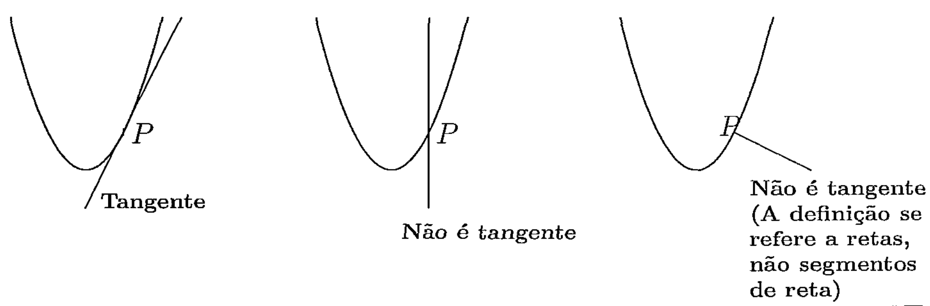


Figura 3.6: Uma definição para tangência a parábolas.

Não é surpreendente constatar que, em conseqüência deste tipo de abordagem, estudantes desenvolvam uma imagem de conceito estreitada, em que a idéia de ser *tangente* – ou 'tocar' em um único ponto – figure em oposição à idéia de ser *secante* – ou 'cortar' em mais de um ponto. De fato, Vinner observou que muitos estudantes acreditam que uma reta tangente deve somente 'tocar' a curva, mas não 'cruzá-la' (VINNER, 1983b). O autor pediu a um grupo de estudantes que desenhassem a reta tangente à cúbica $y = x^3$ em $x = 0$. Grande parte dos participantes representou uma semi-reta com origem no ponto $(0, 0)$, ou um pequeno segmento num ponto muito próximo a $(0, 0)$ (figura 3.7).

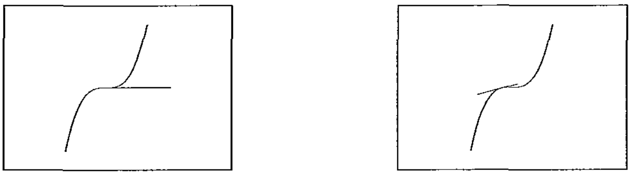


Figura 3.7: A concepção de que uma reta tangente não pode 'cruzar' a curva, como observado por Vinner.

O experimento de Vinner (VINNER, 1983b) revela um efeito de estreitamento relacionado com descrições de derivadas por meio de inclinações de retas tangentes. As limitações associadas a este tipo de descrição decorrem do fato de que o termo *tangente* é implicitamente usado em dois sentidos diferentes: no contexto das construções geométricas, em que o que está em jogo é a situação geométrica global entre a curva e a reta; e no contexto do cálculo infinitesimal, em que o que está em jogo é o comportamento local da curva na vizinhança do ponto de tangência. Isto é, a limitação destas descrições é a ênfase no aspecto global e a conseqüente omissão do aspecto local. A figura 3.8 ilustra diferentes situações geométricas globais associadas a um mesmo comportamento local na vizinhança do ponto de tangência.

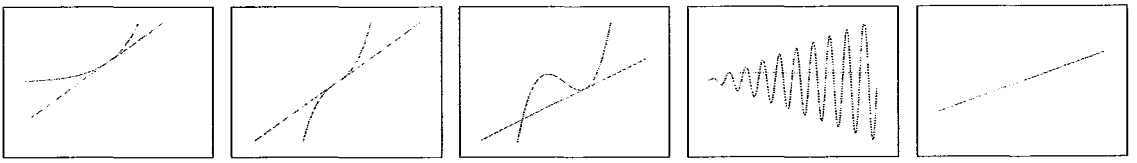


Figura 3.8: Diferentes situações geométricas locais associadas ao mesmo comportamento local: (a) a reta tangente intercepta a curva em único ponto; (b) a reta tangente intercepta a curva em único ponto, mas cruza a curva neste ponto (no sentido que, se S_1 e S_2 são dois semiplanos determinados pela reta tangente, então para toda vizinhança U do ponto de tangência a curva intercepta ambos $U \cap S_1$ e $U \cap S_2$); (c) a reta tangente intercepta a curva em mais de um ponto; (d) a reta tangente intercepta a curva num conjunto infinito (enumerável) de pontos; (e) a reta tangente coincide com a curva (no caso em que a curva é, ela própria, uma reta).

Em nossa interpretação, o efeito de estreitamento está associado ao uso exagerado de descrições de derivadas por meio de inclinações de retas tangentes. No entanto acreditamos que, se essa mesma descrição insere-se em um contexto pedagógico amplo, planejado para que os eventuais conflitos com as imagens de conceito dos estudantes sejam cuidadosamente explorados – em lugar de simplesmente evitados – as limitações associadas podem ter seu papel *revertido*: podem atuar não para o estreitamento, mas para a expansão de imagens de conceito. Acreditamos que, as limitações deste tipo de descrição podem ser convenientemente exploradas para motivar nos estudantes uma idéia *oposta* àquela constatada por Vinner: que diferenciabilidade em um ponto é uma propriedade exclusivamente local, portanto para verificá-la, *o que acontece 'longe' do ponto de tangência é irrelevante*[3] (como representado pelo diagrama da figura 3.9).

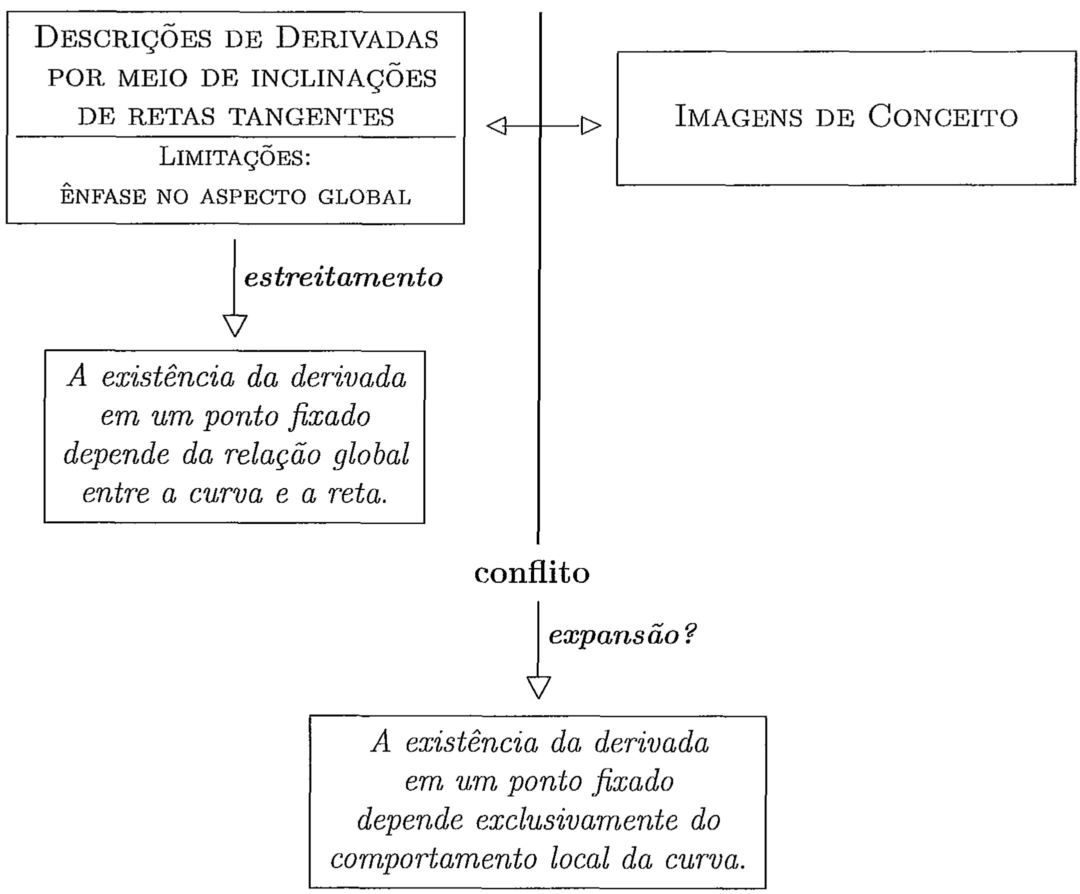


Figura 3.9: Uma conjectura sobre a reversão do papel pedagógico das descrições para o conceito de derivada por meio de retas tangentes: *estreitamento* e *expansão*.

[3] Esta conjectura não será objeto de estudo desta tese. Optamos por enunciá-la com o intuito de tornar mais claras as conjecturas aqui estudadas.

3.3 Descrições numéricas, propriedades qualitativas e conflitos teórico-computacionais

Dentre os autores citados no capítulo 2 deste texto, mesmo aqueles que relatam efeitos considerados como negativos do uso de recursos computacionais, apontam para a possibilidade de reversão de tais efeitos por meio de uma abordagem pedagógica cuidadosamente planejada (ABRAHÃO, 1998; DRIJVERS, 1997; LAUDARES & LACHINI, 2000). Alguns desses trabalhos fazem uso explícito de certas limitações inerentes a ambientes computacionais para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem (BELFORT & GUIMARÃES, 1998; DOERR & ZANGOR, 2000; HADAS et al., 2000; HAZZAN & GOLDENBERG, 1997). De forma geral, propõe-se a exploração das limitações computacionais para motivar a compreensão mais profunda da teoria detalhada. Alinhamo-nos com esses autores na opinião de que a explicitação de tais limitações pode levar à expansão de imagens de conceito, enquanto sua ocultação tende a resultar no estreitamento. Neste sentido, ao refletir sobre a concepção de organizadores genéricos, Tall afirma que:

> Eu espero de todo organizador genérico que estes 'contenham as sementes de sua própria destruição', no sentido em que eles sejam suficientemente sofisticados para mostrar as limitações de seu processo de modelagem e a necessidade para uma abordagem teórica completa.
>
> Tall (TALL, 2000, p.14), tradução nossa

Muitas das limitações de descrições computacionais estão relacionadas com a estrutura numérica finita dos algoritmos dos programas atualmente utilizados. Passaremos a nos referir por **conflitos teórico-computacionais** a conflitos associados a este tipo de limitação. Dentre os autores citados acima, pelo menos (BELFORT & GUIMARÃES, 1998; DOERR & ZANGOR, 2000; HAZZAN & GOLDENBERG, 1997) mencionam o uso de limitações computacionais de natureza numérica como recursos didáticos.

Além de resultados arredondados de operações, outras limitações computacionais de natureza numérica podem ser percebidas em representações gráficas. Por exemplo, Mills, Tall & Wardle relatam um experimento de sala de aula como a equação de 4° grau $x^4 + 2.88\,x^3 - 19.23\,x^2 - 36.11\,x + 91.56 = 0$ (MILL et al., 1990). Como a equação possui duas raízes muito próximas, erros de aritmética de ponto flutuante geraram uma série de resultados inesperados, dentre os quais um gráfico mostrando um número muito grande (da ordem de milhares) de raízes para a equação. Outro exemplo é mostrado na figura 3.10, onde vemos as curvas $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ e $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ respectivamente, desenhadas pelo programa *Maple*. Ambas as curvas possuem assíntotas verticais em $x = 1$, mas esta reta só é mostrada no gráfico de f. Na verdade, o programa não identifica a existência da assíntota para nenhuma das funções[4]. A reta vertical mostrada é desenhada devido a uma interpolação descuidada de um ponto à esquerda da assíntota com uma à sua direita. Isto é, o programa interpreta essa reta como *parte do gráfico*. O mesmo não ocorre no caso de g somente por que os limites laterais em $x = 1$ são ambos infinitos positivos.

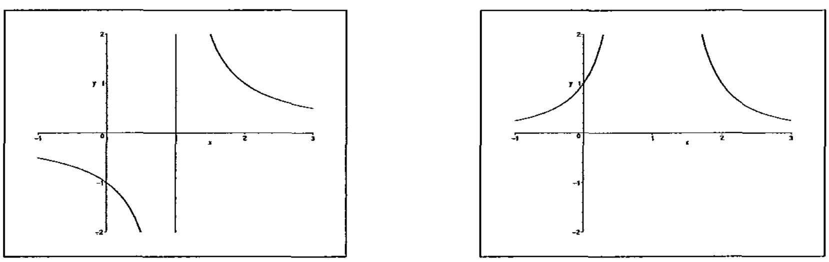


Figura 3.10: Os gráficos de $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ (com uma 'falsa' assíntota) e $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

A estrutura básica dos algoritmos computacionais usados para traçar gráficos baseia-se na interpolação de um número finito de pontos – grande o suficiente para criar a ilusão de se estar visualizando, não uma poligonal com pequenos segmentos de reta, mas uma curva suave. Este procedimento computacional coincide com a seguinte estratégia, comumente utilizada por estudantes para traçar o gráfico de uma função, dada a sua expressão algébrica:

1. encontrar valores por substituição (usualmente arbitrariamente escolhidos);

2. montar uma tabela;

3. ligar os pontos por linhas retas ou pequenas curvas.

O uso exclusivo desta estratégia denota conexões pobres entre as três principais formas de representação para funções (representada na figura 3.11, abaixo).

[4]Na verdade, o *Maple* dispõe de um recurso por meio do qual pode ser feita uma análise simbólica da expressão algébrica antes do gráfico ser traçado. Neste caso, a reta vertical não seria exibida.

$$\begin{tikzcd}
\textbf{algébrica} \arrow[dr] & & \textbf{gráfica} \\
& \textbf{numérica} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.11: Conexões pobres entre as três representações mais usadas para funções.

Chamaremos de **aspectos quantitativos** as propriedades de uma função *que dependam somente de seus valores em um subconjunto finito do domínio*; e de **aspectos qualitativos** aquelas *que envolvam o seu comportamento no domínio todo ou em um subconjunto infinito.* Assim sendo, existência de limites, continuidade e diferenciabilidade são aspectos qualitativos. No exemplo mostrado na figura 3.10, a limitação está associada à ênfase em aspectos quantitativos e à omissão de um aspecto qualitativo – o fato dos limites laterais da função serem infinitos. A estratégia representada pelo diagrama da figura 3.11, emprega somente aspectos quantitativos da função, da mesma forma que algoritmos computacionais para traçar gráficos. A diferença, é claro, está no fato da capacidade de cálculo do computador, ao contrário da humana, ser suficiente para criar a ilusão de ótica de se estar vendo uma curva suave na tela. Por outro lado, seres humanos dispõem de todo tipo de conexões entre unidades cognitivas, que permitem a compreensão de aspectos qualitativos, inacessíveis ao computador. Tall aponta para a potencialidade desta relação de complementaridade entre computadores e humanos para a expansão de imagens de conceito (TALL, 2000). Hazzan & Goldenberg comentam que ambientes de geometria dinâmica podem ser usados para liberar estudantes de particularidades quantitativas para enfocar relações abstratas e propriedades qualitativas invariantes em classes de entidades geométricas[5] (HAZZAN & GOLDENBERG, 1997). Neste trabalho, tratamos de outro tipo de potencialidade: a exploração de conflitos teórico-computacionais para chamar atenção para a distinção entre aspectos quantitativos e qualitativos. Por exemplo, eventuais conflitos teórico-computacionais decorrentes da visualização dos gráficos mostrados em 3.10 poderiam ser explorados para chamar atenção para as limitações da procedimento descrito em 3.11: propriedades qualitativas de uma função não podem ser

[5]É verdade que o sentido da palavra *quantitativo* de Hazzan & Goldenberg é diferente do nosso: por 'particularidades quantitativas' os autores se referem aos detalhes das medidas angulares e lineares das figuras. No entanto, a ênfase nas diferenças entre procedimentos computacionais e não computacionais é comum.

verificadas por meio de métodos puramente quantitativos.

As figuras 3.12 e 3.13 também exemplificam limitações da natureza quantitativa. Em 3.12, vemos o gráfico das funções $u(x) = \operatorname{sen} x$ e $v(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100}\varphi(x)$, onde φ é a função (não diferenciável) dada pela soma da série $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$. As funções u e v são *qualitativamente* bastante diferentes: a primeira é analítica e a segunda é não diferenciável. No entanto, os gráficos visualizados são praticamente indistinguíveis, pois, para traçá-los, o computador utiliza somente uma similaridade *quantitativa* das funções: seus valores em um conjunto finito de pontos. Da mesma forma, 3.13 mostra os gráficos das funções $p(x) = x^2$ e $q(x) = \frac{x^3 + \frac{1}{100}}{x}$, que possuem propriedades *qualitativas* diferentes: uma é contínua e outra não. Mas uma similaridade *quantitativa* as torna indistinguíveis na tela do computador[6].

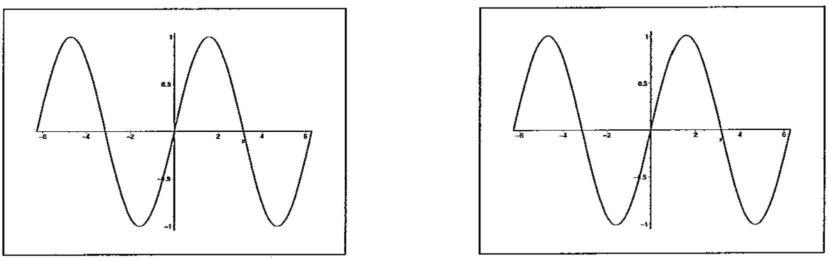


Figura 3.12: Os gráficos de $u(x) = \operatorname{sen} x$ e $v(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}$.

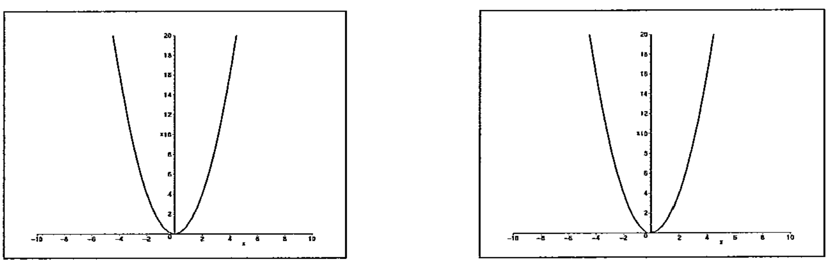


Figura 3.13: Os gráficos de $p(x) = x^2$ e $q(x) = \dfrac{x^3 + \frac{1}{100}}{x}$.

Outro exemplo de limitação computacional numérica pode ser observado em descrições para derivadas por meio de processos de magnificação local. Processos de magnificação local para a parábola $y = x^2$ e a função blancmange realizados no *Maple* são

[6]Note-se que, no caso de u e v, a semelhança quantitativa decorre de uma semelhança qualitativa, uma vez que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x) - v(x)| = \frac{1}{100}\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{600} < 2 \times 10^{-2}$. Mas o mesmo não ocorre com p e q, pois $\sup_{x\in\mathbb{R}} |p(x) - q(x)| = +\infty$, isto é, neste caso a semelhança é puramente quantitativa.

mostrados no capítulo 1, nas figuras 1.2 e 1.3: A parábola, que é diferenciável, adquire cada vez mais a aparência de uma reta, enquanto a blancmange, que não, fica cada vez mais enrugada. Entretanto, se os processos são continuados, uma interessante limitação do algoritmo é revelada. Para valores muito pequenos das janelas gráficas utilizadas (da ordem de 10^{-6}), erros numéricos e a interpolação de pontos fazem com que a parábola adquira o aspecto não mais de uma reta, mas de uma poligonal (figura 3.14). A função blancmange, por outro lado, é dada pelo limite de uma série infinita. Para ser representada no computador, foi utilizado um truncamento finito desta série. Assim, a função realmente mostrada na tela não é não diferenciável em todos os pontos do domínio (como seria a "verdadeira" blancmange), mas sim em um conjunto finito. Em conseqüência, em janelas gráficas menores (da ordem de 10^{-3}), a blancmange tem uma aparência reta, e não mais enrugada (figura 3.15).

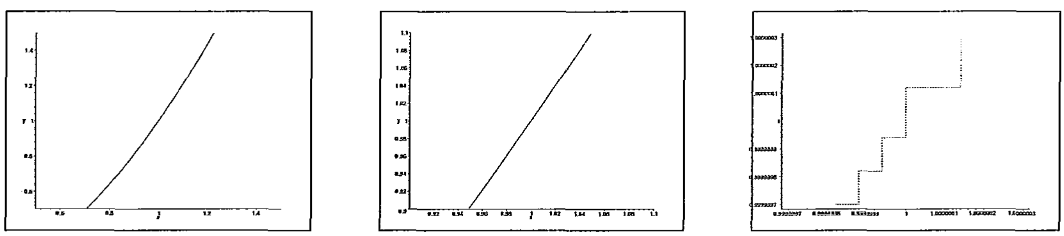


Figura 3.14: O processo de magnificação local da curva $y = x^2$, revelando uma limitação computacional numérica.

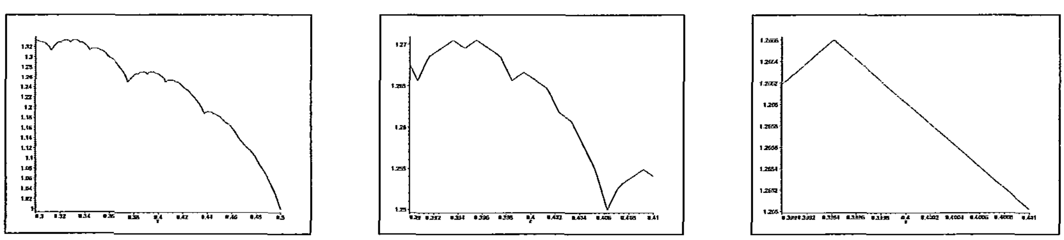


Figura 3.15: O processo de magnificação local da função *blancmange* em torno de $x_0 = \frac{1}{2}$, revelando uma limitação computacional numérica.

Na seção 3.2, discutimos a possibilidade de reversão do papel pedagógico de limitações de descrições para derivadas por meio de inclinações de retas tangentes. Essas limitações estão associadas à ênfase no aspecto global e na relação geométrica entre a curva e a reta. No caso da descrição por meio do noção de retidão local, ao contrário, o caráter local do conceito derivada é enfatizado: a derivada surge a partir da observação local da própria curva – como a expressão de uma propriedade local da curva – e não como um atributo de uma reta externa à curva e que vem a ser tangente a ela. No entanto, ao expressar a noção de retidão local por um processo de magnificação local, aparecem limitações de natureza numérica. Nossa conjectura neste caso é de que os eventuais conflitos teórico-computacionais podem atuar para a expansão de imagens de conceito, assinalando o caráter qualitativo do conceito de derivada. Assim as limitações do processo de magnificação local podem ser exploradas para assinalar que a noção de limite está além da precisão do computador (não importa quão boa esta seja), e portanto, *além de qualquer precisão finita* (como representado pelo diagrama da figura 3.16).

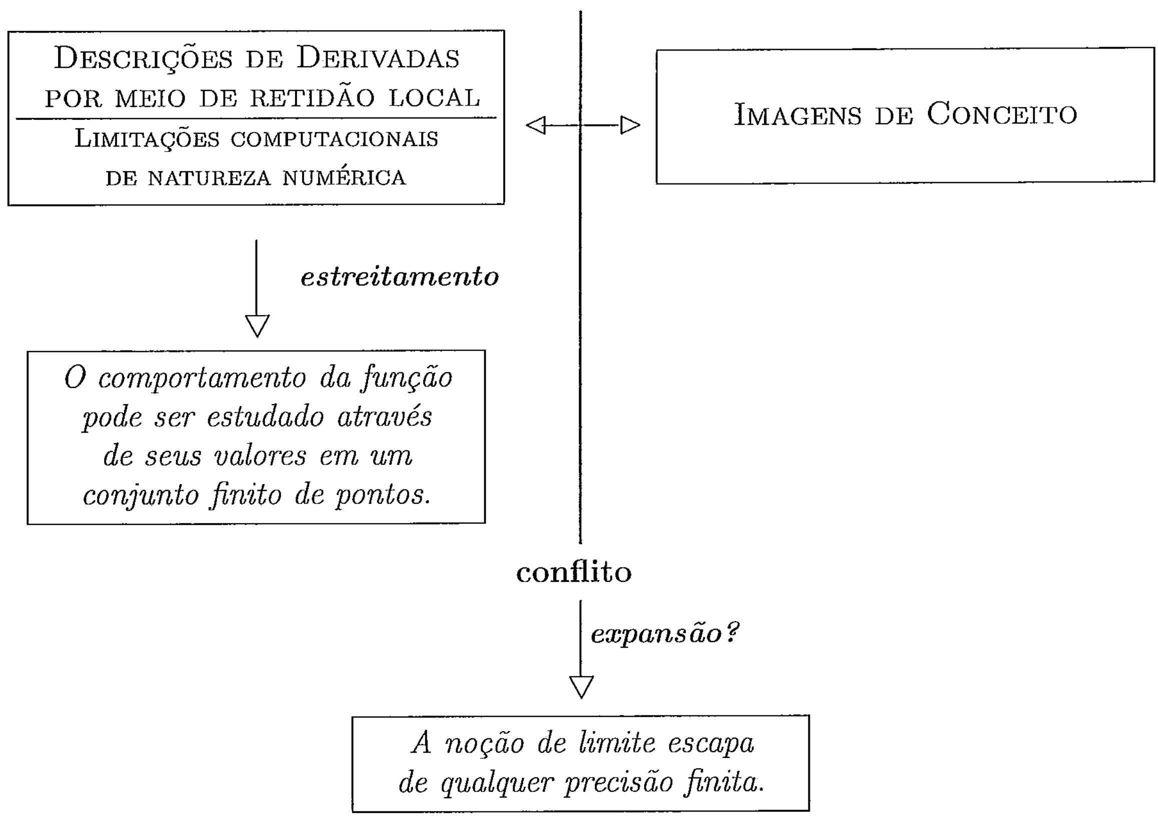


Figura 3.16: Uma conjectura sobre a reversão do papel pedagógico das descrições para o conceito de derivada por meio de retidão local: *estreitamento* e *expansão*.

3.4 Questões de investigação

Nesta tese, enfocamos o papel pedagógico de limitações de descrições computacionais para o conceito de derivada e dos conflitos teórico-computacionais associados. Desta forma, nossa questão central de investigação é (como representado pela figura 3.16): *Em que situações limitações de descrições computacionais podem promover um efeito de expansão das imagens de conceito de derivada?* Com isto, desejamos contribuir para a discussão sobre o planejamento adequado da abordagem pedagógica.

A investigação basear-se-á na análise das reações de estudantes lidando com descrições computacionais para derivadas, bem como conceitos relacionados (limite e continuidade), dentro de um contexto pedagógico determinado. Entretanto, nosso enfoque não será especificamente na compreensão de processos cognitivos, mas nas características do contexto pedagógico como um todo, em que descrições computacionais inserem-se. Assim, pretendemos contribuir com dados para a discussão da questão acima, no âmbito do planejamento pedagógico. Nossas questões de investigação não dizem respeito à determinação da melhor abordagem didática possível, dada a priori a estrutura cognitiva do sujeito aprendiz, mas na *concepção do objeto de ensino*: ao concebermos uma pedagogia para um conceito matemático, nossas opções delimitam implicitamente este conceito. Nossa discussão será portanto sobre *os objetivos do ensino de matemática e a delimitação do objeto ensinado.*

Parte II

O Estudo Empírico

Capítulo 4

Contexto e metodologia do estudo empírico

A grosso modo, poderíamos comparar com a vista que teríamos do planeta Terra se observássemos do espaço, algo parecido com uma esfera, porém, se observássemos o planeta de perto, ele possui detalhes a princípio imperceptíveis.

Depoimento escrito de um aluno do curso relatado a seguir, sobre a experiência de magnificação local.

A investigação empírica desta tese consistiu de um estudo qualitativo do qual participaram seis estudantes iniciantes de cálculo. Os participantes foram selecionados dentre os que freqüentaram um curso de Cálculo I, por nós lecionado no primeiro semestre letivo (março a julho) de 2001 para o curso de Licenciatura em Matemática (regime noturno) da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Neste capítulo, relataremos o contexto pedagógico em que o curso transcorreu, além da metodologia de planejamento, desenvolvimento e análise dos resultados das entrevistas.

4.1 O curso

4.1.1 Concepção geral

O currículo da disciplina de Cálculo I para o curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ consiste dos conteúdos de limites e derivadas de funções reais a uma variável. O curso aqui descrito foi concebido considerando a noção de retidão local como raiz cognitiva para derivada, dentro de um contexto múltiplo de descrições. Assim, o conceito de derivada foi apresentado inicialmente através da noção de retidão local, expressa por processos computacionais de magnificação local. A partir daí, o conceito foi desenvolvido através de múltiplas descrições computacionais e não computacionais, com a exploração das respectivas limitações como motivação para discussões teóricas. O conceito de limite foi introduzido informalmente a partir de descrições gráficas e algébricas para funções (especialmente racionais) e desenvolvido teoricamente em paralelo com o conceito de derivada.

A turma tinha 40 alunos inscritos, dos quais cerca de 25 assistiam aula regularmente. A carga horária do curso foi de 90 horas, distribuídas em 15 semanas de seis horas de aula. As seis horas semanais eram organizadas em três sessões de duas horas, duas das quais destinadas a sala de aula convencional e uma para atividades no laboratório de microcomputadores. Em ambos os tipos de ambientes, eram intercaladas aulas expositivas, discussões em duplas ou pequenos grupos de alunos e discussões na turma como um todo. O laboratório utilizado contava com 15 microcomputadores, de forma que cada máquina era compartilhada em geral por dois alunos. Nas atividades de laboratório, os estudantes trabalhavam com os programas *Maple V* (WATERLOO MAPLE, 1998) e *Graphmatica 2.0* (HERTZER & MALACA, 1997), além do organizador genérico *Melhor Reta* por nós desenhado para o ensino de derivadas (GIRALDO, 2001b), que será apresentado na seção 4.1.2.

Como descrições de diferentes naturezas eram utilizadas, as limitações associadas eram freqüentemente notadas por estudantes, isto é, situações de conflito eram freqüentes. Nessas ocasiões, os estudantes eram encorajados a trazer suas impressões para a discussão com a turma, motivando desta maneira construções teóricas progressivamente mais elaboradas (como detalharemos na seção 4.1.3).

Antes de dar início à experiência de magnificação local propriamente dita, foram aplicadas atividades baseadas em mudanças de janelas gráficas. Além de serem utilizadas para introduzir a noção de limite, estas atividades visavam a preparação para as atividades de magnificação local. Na experiência de traçar gráficos de funções, em diferentes janelas gráficas, pode-se observar que um mesmo gráfico pode apresentar aspectos radicalmente distintos dependendo da janela utilizada. O aspecto do gráfico visualizado é determinado fundamentalmente pela relação entre as escalas dos eixos coordenados ou, em outras palavras, pela relação entre as ordens de grandeza das variáveis dependente e independente. Assim, o objetivo principal é relacionar o aspecto do gráfico visto na tela, com a expressão algébrica da função. Observemos os seguintes exemplos. A figura 4.1 mostra o gráfico da função $p(x) = x^3 + 10x^2$, traçado para $(x, y) \in [-0.1, 0.1] \times [0, 0.1]$, à esquerda, e para $(x, y) \in [-1000, 1000] \times [-10^9, 10^9]$, à direita. Na primeira janela gráfica, como os valores de x são pequenos, a parcela x^3, sendo muito menor que $10x^2$, se torna desprezível. Por isso, o gráfico observado fica muito parecido com o de $y = 10x^2$. Já na segunda janela, o oposto ocorre: para valores grandes de x, $10x^2$ é muito menor que x^3, portanto o gráfico parece o de $y = x^3$. Em 4.2, vemos o gráfico de $q(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$, para $(x, y) \in [-3, 3] \times [-10, 10]$, à esquerda, e para $(x, y) \in [-100, 100] \times [-10^4, 10^4]$, à direita. Na segunda janela, como os valores de x são pequenos, o termo independente do denominador se torna desprezível e o gráfico se assemelha ao de $y = x^2$.

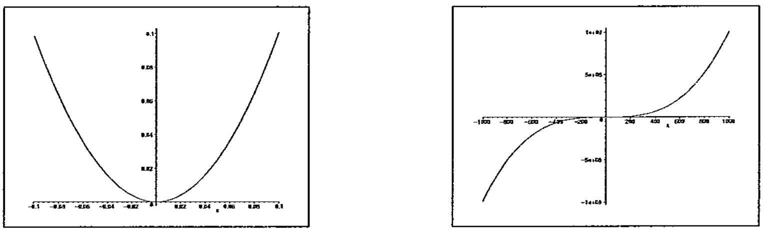


Figura 4.1: O gráfico de $p(x) = x^3 + 10x^2$, em duas janelas gráficas diferentes.

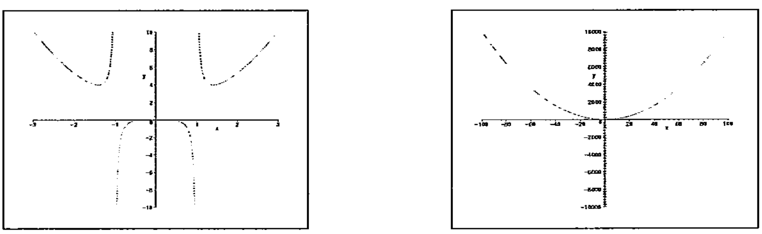
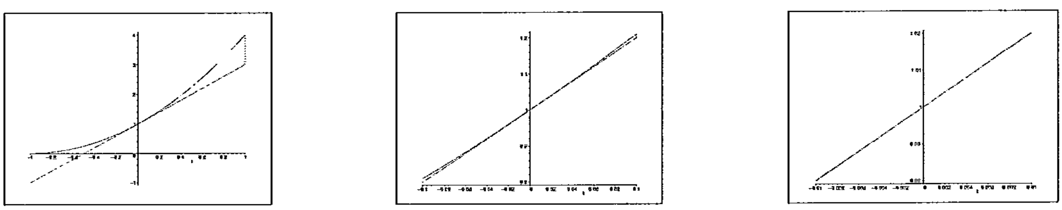


Figura 4.2: O gráfico de $q(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$, em duas janelas gráficas diferentes.

4.1.2 Um organizador genérico para o ensino de derivadas

O organizador genérico *Melhor Reta* (GIRALDO, 2001b) foi concebido para estimular a conexão de unidades cognitivas, por meio da comparação de descrições algébricas, numéricas e gráficas durante o processo de magnificação local (veja também (GIRALDO & CARVALHO, 2003a; GIRALDO & CARVALHO, 2004a)). O *Melhor Reta* consiste de uma rotina de *Maple*, com os seguintes dados de entrada: uma função f, um ponto x_0 no domínio de f, um valor numérico para a inclinação de uma reta passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, e um valor numérico para $h = \Delta x$; e dados de saída: os gráficos de $y = f(x)$ e da reta $r(x) = a\,h + f(x_0)$ traçados no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, os valores numéricos da variação $\rho(h) = |f(x+h) - f(x)|$ e da razão incremental $\frac{\rho(h)}{h}$, e um segmento vertical ligando a curva à reta no ponto $x_0 + h$ representando a diferença $\rho(h)$. A idéia central é comparar gráfica e algebricamente o comportamento local da reta r em relação à curva para valores $a = f(x_0)$ e $a \neq f(x_0)$ (isto é, para retas tangentes e não tangentes). As figuras abaixo reproduzem telas geradas pela rotina para $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$, com a reta tangente no ponto, de inclinação $a = 2$ (figura 4.3), e com uma reta não tangente, de inclinação $a = 2,5$ (figura 4.4).

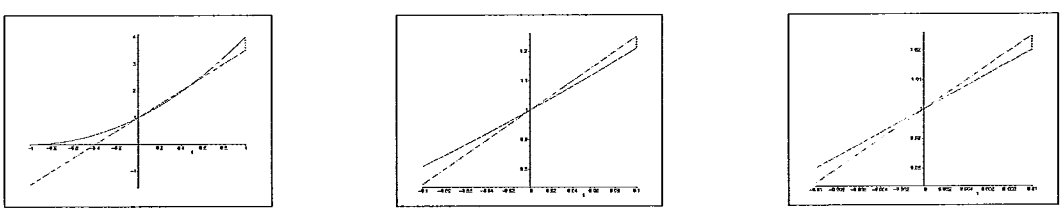


$h = 1 \quad |\rho(h)| = 1 \quad \left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 1$

$h = 0.1 \quad |\rho(h)| = 0.01 \quad \left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0.1$

$h = 0.01 \quad |\rho(h)| = 0.001 \quad \left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0.01$

Figura 4.3: Telas do *Melhor Reta* para uma reta tangente.



$h = 1 \quad |\rho(h)| = 0.5 \quad \left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0.5$

$h = 0.1 \quad |\rho(h)| = 0.04 \quad \left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0.4$

$h = 0.01 \quad |\rho(h)| = 0.0049 \quad \left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0.49$

Figura 4.4: Telas do *Melhor Reta* para uma reta não tangente.

Mostrando simultaneamente descrições gráficas e numéricas, objetivamos fornecer uma visão mais ampla para o fato de que, dentre todas as retas passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, a tangente é aquela que *melhor aproxima* localmente a curva, no sentido matemático preciso de que, não só a diferença $\rho(h)$ tende a zero, como também a razão $\frac{\rho(h)}{h}$. A figura dos gráficos fornece uma interpretação geométrica para a aproximação. De fato, enquanto o usuário diminui o valor de h, para aproximar a janela gráfica em torno de x_0, o valor de h atua como uma unidade de referência para a figura.

Se a reta mostrada *não é* tangente, $\rho(h)$ decresce em direção a zero, mas o mesmo não ocorre com $\frac{\rho(h)}{h}$, e o segmento vertical é sempre visível (figura 4.4). Por outro lado, se a reta *é* tangente, ambos $\rho(h)$ e $\frac{\rho(h)}{h}$ tendem a zero, e o segmento vertical rapidamente desaparece de vista (figura 4.3). No caso da reta não tangente, h e $\rho(h)$ decrescem a taxas equilibradas (uma vez que $\frac{\rho(h)}{h}$ não tende a zero), enquanto no caso da reta tangente, h decresce a uma taxa superior (uma vez que $\frac{\rho(h)}{h}$ tende a zero). Como h controla a dimensão horizontal da janela gráfica e $\rho(h)$ é a medida do segmento vertical, quando a janela é aproximada em torno do ponto, esse segmento desaparece, no caso da tangente, e permanece visível, no caso da reta não tangente.

Há duas formas principais de descrições envolvidas na concepção do *Melhor Reta*. A primeira, é claro, é a noção de retidão local. A segunda é a noção de aproximação linear local, comumente expressa pela frase: 'a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto aproxima localmente a função na vizinhança deste ponto'. Uma óbvia limitação desta descrição é o fato de que o significado do termo 'aproximar' é matematicamente impreciso. De fato, o termo tem um significado preciso no contexto técnico do cálculo infinitesimal: a tangente aproxima a curva no sentido em que a razão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tende a zero quando h tende a zero. Tomando o significado genérico (não técnico) do termo, poder-se-ia dizer que qualquer reta cortando o gráfico de uma função no ponto aproximaria localmente a função, no sentido em que a diferença entre a curva e a reta tende a zero, qualquer que seja a reta (desde, é claro, que a função seja contínua).

4.1.3 Estrutura em etapas

A abordagem do conceito de derivada foi estruturada na forma de cinco etapas. Em cada uma destas, uma forma específica de descrição é usada, e as limitação associadas exploradas como motivação para a etapa seguinte. Isto é, procuramos planejar cada etapa de maneira que as próprias limitações das formas de descrição utilizadas pudessem motivar o refinamento progressivo de idéias, partindo das noções familiares, como propõe Tall com a introdução da noção raiz cognitiva (TALL, 1989; TALL, 2000). O quadro da figura 4.6 representa um esquema do curso, onde as setas verticais indicam o refinamento da noção de derivada. Resumimos a seguir a estrutura das etapas.

Etapa I: aproximação numérica

Nesta etapa, foram aplicadas pela primeira vez atividades de magnificação local. Era pedido aos estudantes que traçassem no computador o gráfico de uma função f dada e aproximassem gradativamente a janela gráfica em torno de de um ponto $(x_0, f(x_0))$ fixado sobre o gráfico, até que a curva se confundisse com uma reta. Era então pedido que os estudantes substituíssem valores para calcular a inclinação aproximada da reta observada por meio da fórmula usual $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Os valores encontrados eram, é claro, aproximações, mas podiam coincidir com o valor exato da derivada devido a erros de visualização e arredondamento. Foi destacado o fato de se tratar de uma *aproximação*: a curva não se transforma na reta. A compreensão deste fato ter sido causado por erros de arredondamento e/ou limitações do programa utilizado foi usada como motivação para um estudo mais refinado do significado matemático da aproximação envolvida.

Esta experiência era repetida com a mesma curva em vários pontos diferentes e, também, com várias curvas diferentes.

Etapa II: aproximação algébrica

Ainda tendo como referência a visualização da curva $y = f(x)$ magnificada na tela, era proposta aos estudantes a tarefa de encontrar algebricamente o valor a da inclinação da reta que melhor aproxima a curva em torno de um ponto x_0 fixado. Desta forma, os alunos, através de manipulação algébrica, deviam tentar encontrar uma aproximação na forma $f(x_0 + h) \approx a\,h + f(x_0)$.

Este valor a era então apresentado como a derivada de f em x_0. Por exemplo, para encontrar a derivada de $f(x) = x^2$ em $x = 3$, podemos fazer: $f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2 \approx 9 + 6h$. O valor procurado é portanto $a = 6$.

Na etapa anterior, encontramos uma aproximação numérica para o valor da inclinação da reta que melhor aproxima a curva. Nesta, determinamos o mesmo valor por meio de uma aproximação algébrica, na qual foram desprezadas as potências de h de grau igual ao superior a 2. Aqui, coloca-se naturalmente a questão de por que fazer justamente este tipo de aproximação. Uma primeira justificativa estaria no fato de estarmos buscando uma aproximação por meio de uma reta. Essa discussão abre caminho para o aprofundamento da compreensão do significado matemático preciso do tipo de aproximação que está sendo feita.

Da mesma forma que na etapa anterior, essa experiência foi repetida com a mesma curva em vários pontos diferentes e, também, com várias curvas diferentes. A partir daí, introduzimos as expressões para a inclinação da reta procurada em um ponto genérico x_0 e apresentamos, desta maneira, as primeiras fórmulas de derivação para polinômios.

Etapa III: discriminação geométrica

Uma vez calculado o valor a da reta que melhor aproxima a curva localmente, era pedido aos estudantes que traçassem essa reta, juntamente com a curva, na janela magnificada (onde elas se confundiam visualmente). Em seguida, eles deviam ampliar gradualmente a janela gráfica e observar a distinção entre a curva e a reta.

Nas duas etapas anteriores, sugerimos a reta que melhor aproxima localmente a curva (ou a reta tangente) por meio de situações de aproximação (numérica e algébrica). Aqui, apresentamos pela primeira vez essa reta como objeto matemático distinto da própria curva, com existência concretizada geometricamente. A reta tangente coloca-se como resultante de um processo geométrico e, ao mesmo tempo, como objeto com natureza própria, distinto do observado no decorrer do próprio processo.

Etapa IV: conceituação

Esta etapa tem o objetivo principal de, com o apoio da rotina *Melhor Reta*, conceituar matematicamente a idéia de *aproximação* introduzida nas etapas anteriores de vários pontos de vista (numérico, algébrico, geométrico). O *Melhor Reta* é explorado para conceituar aproximação na maneira descrita na seção 4.1.2.

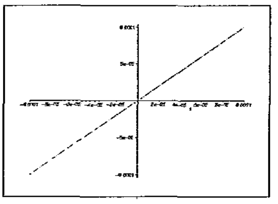
Em particular, no caso de funções polinomiais, a razão pela qual os termos de grau maior ou igual a 2 em h são desprezados na etapa II fica justificada de outra forma. De fato, se escolhemos um valor de a de tal forma que a razão $\rho(h) = |\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}|$ só tenha termos de graus maiores ou iguais a 2, garantimos que $\frac{\rho(h)}{h}$ tende a zero quando h tende a zero. De forma mais geral, a reta que verifica esta propriedade é, dentre todas as que cortam a curva dada em $(x_0, f(x_0))$, *aquela que melhor aproxima a curva na vizinhança do ponto.* Neste ponto, a unicidade desta reta pode ser justificada por um argumento algébrico simples.

A experiência de magnificação local sugere a necessidade de relacionarmos as escalas dos eixos, estabelecendo uma unidade padrão. Ao dividirmos $\rho(h)$ por h, estamos comparando a grandeza $\rho(h)$ com a unidade h. Portanto, a magnificação local fornece uma expressão para o fato de que, se a é a inclinação da reta que melhor aproxima a curva, então a diferença $\rho(h)$ tende a 0 mesmo quando comparada a h.

Etapa V: formalização

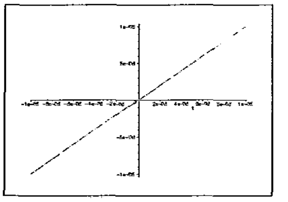
Nesta etapa final introduzimos a definição de derivada em linguagem formal de epsilons e deltas. Neste momento, as limitações de precisão numérica finita das descrições computacionais observadas ao longo das etapas anteriores (por exemplo, as mostradas nas figuras 3.14 e 3.15) são exploradas para assinalar que a idéia de *se aproximar indefinidamente* a que se refere o conceito de limite escapa de qualquer precisão finita. O organizador genérico *Melhor Reta* também pode exibir limitação de natureza numérica, como exemplificado pela figura 4.5. A figura mostra telas geradas pela rotina que retornam valores iguais a zero para $\rho(h)$ e $\frac{\rho(h)}{h}$.

Com base nessa discussão, dizemos que *a é a derivada de f em* x_0 se, dada uma precisão $\varepsilon > 0$ arbitrária, conseguimos escolher uma variação $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{\rho(h)}{h}\right| < \varepsilon$ $\forall\, h \in [-\delta, \delta]$, $h \neq 0$. Ou, de outra forma, $\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a\right| < \varepsilon\ \forall\, h \in [-\delta, \delta]$, $h \neq 0$.



$h = 10^{-4}$
$|\rho(h)| = 0.17 \times 10^{-8}$

$$\left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0.17 \times 10^{-12}$$



$h = 10^{-5}$ $\quad |\rho(h)| = 0$

$$\left|\frac{\rho(h)}{h}\right| = 0$$

Figura 4.5: Magnificação local da curva $y = \operatorname{sen} x$ e sua reta tangente em $x_0 = 1$.

Cabe ressaltar que o objetivo desta etapa é somente fornecer aos estudantes uma primeira familiarização para a linguagem formal de limites. Não se espera dos alunos a compreensão do enunciado formal da definição, no sentido da formação de uma imagem de conceito ampla a ponto de operar simbólica e logicamente com ela. Nos primeiros cursos de cálculo, supõe-se que a abordagem formal seja apenas sugerida, para ser coberta em detalhes nos futuros cursos de análise.

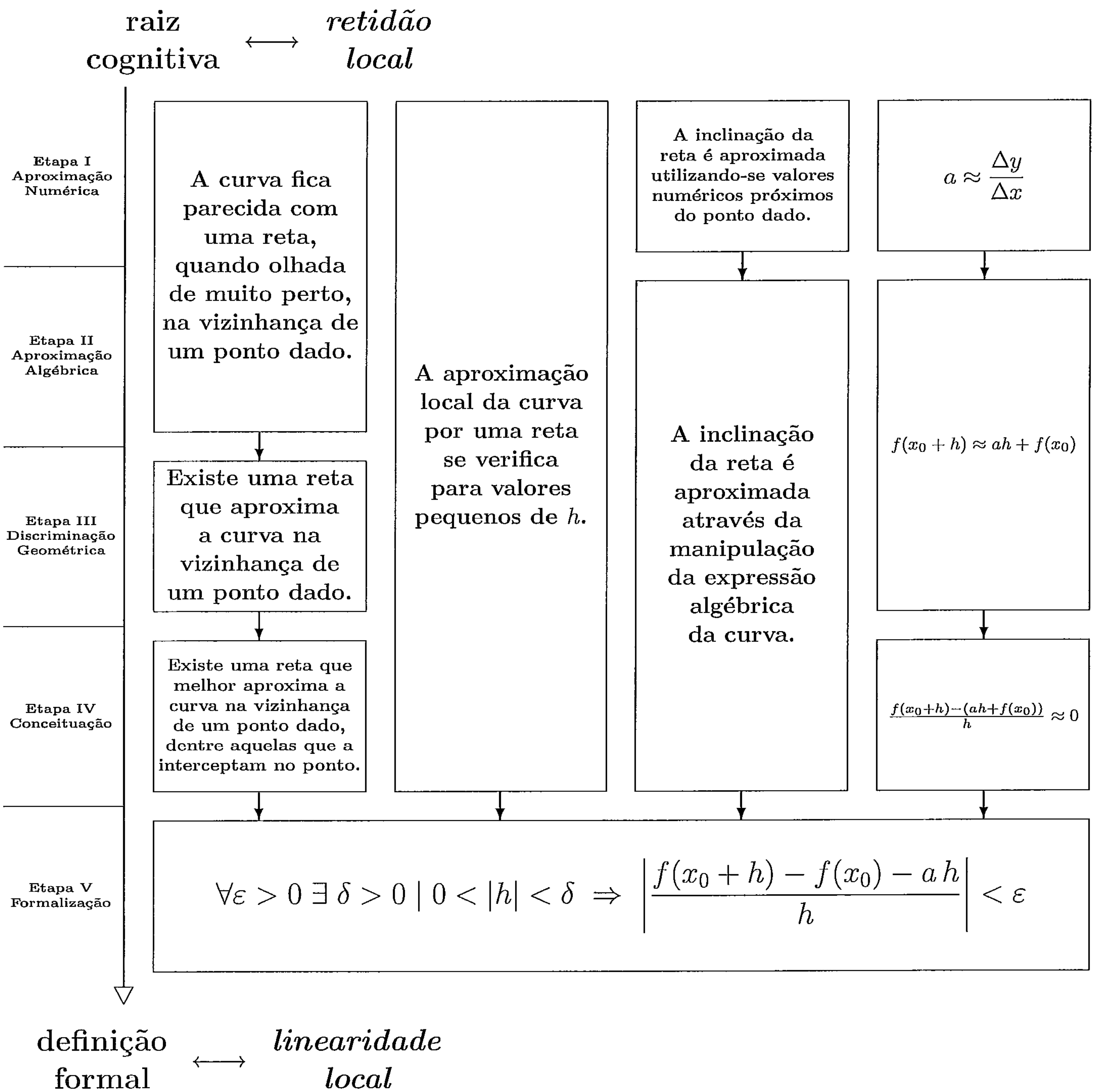


Figura 4.6: Esquema da abordagem do conceito de derivada.

4.2 Concepção do estudo qualitativo

Não temos intenção de mapear, categorizar ou classificar de qualquer forma genérica as imagens de conceito de estudantes ou suas atitudes frente a situações de conflito. Nossa intenção nesta tese é estudar o papel pedagógico de limitação de descrições computacionais para o conceito de derivada e de conflitos teórico-computacionais associados, dentro de um contexto específico. Com esta perspectiva, buscamos o aprofundamento da compreensão sobre os tipos de reações que se pode esperar de estudantes em situações de conflito teórico-computacional e sobre os efeitos para as imagens de conceito associadas com estas reações, considerando as concepções pessoais do sujeito e o contexto pedagógico. Em particular, nosso interesse não é somente detectar *se* os conflitos afetam as imagens de conceito dos sujeitos, mas *como* este processo verifica-se, desde as reações dos estudantes a situações de conflito até seus efeitos em suas concepções e impressões. Desejamos contribuir desta forma para a discussão sobre a concepção do objeto de ensino no planejamento de uma pedagogia em matemática avançada.

Feitas estas observações, concluímos que a investigação empírica desta tese só poderia ser de natureza qualitativa, desenvolvida por meio da observação dos estudantes em momentos em que enfrentem situações de conflito. De fato, dados quantitativos não permitiriam detectar processos desencadeados por situações de conflito, tampouco reações inesperadas de estudantes que nos poderiam escapar no momento do planejamento do estudo. Desta forma, optamos por realizar uma série de entrevistas individuais com uma pequena amostra de estudantes.

4.3 Seleção da amostra

Para identificar e comparar claramente os efeitos das situações de conflito, pretendíamos considerar o modelo de abordagem empregada, com multiplicidade de descrições e valorização de conflitos, nos resultados finais da investigação. Assim, seria conveniente que os estudantes da amostra houvessem tido experiências de aprendizagem semelhantes, em um mesmo contexto pedagógico. Estabelecemos, portanto, dois critérios básicos de seleção: (1) haver tido o primeiro contato formal com cálculo infinitesimal na ocasião do curso e (2) haver de fato freqüentado o curso.

Selecionando os estudantes que atendessem aos critérios acima (e que, além disso, é claro, concordassem voluntariamente em participar das entrevistas), obtivemos uma amostra inicial de 12 estudantes. Considerando-se a natureza da investigação, como exposto acima, este ainda era um número grande para formar a amostra. Assim, realizamos com a amostra inicial uma entrevista exploratória, à qual nos referiremos como *entrevista G0* (por razões que ficarão claras na seção 4.4). A entrevista G0 foi realizada na metade do curso, aproximadamente, e tratou das concepções dos participantes sobre derivada, como passaremos a relatar. Os resultados foram gravados e transcritos. Em primeiro lugar, foram feitas as seguintes perguntas:

1. O que você entende por limite?

2. O que você entende por derivada?

3. Por que você acha que é importante calcular derivadas?

Em seguida, foi mostrada a cada um dos estudantes sua própria resposta escrita para as seguintes atividades, realizadas anteriormente em sala de aula.

I Trace no computador o gráfico da função $y = x^2$. Diminua a janela gráfica em torno do ponto $(2,4)$ até que o gráfico fique parecido com uma reta. Em que janela gráfica você parou? Determine a equação da reta com a qual o gráfico ficou parecido. Explique o procedimento.

II Trace no computador o gráfico da função $y = x^3$. Diminua a janela gráfica em torno do ponto $(2,8)$ até que o gráfico fique parecido com uma reta. Em que janela você parou? Determine a equação da reta com a qual o gráfico ficou parecido. Explique o procedimento.

As atividades I e II haviam sido realizadas durante as etapas I e II respectivamente (aproximação numérica e aproximação algébrica, página 97). Finalmente, foi pedido aos participantes que explicassem suas respostas para as atividades acima.

Com base nos resultados da entrevista G0, procuramos selecionar na amostra inicial um grupo de estudantes que, por um lado, apresentassem perfis diversificados entre si, e por outro, fossem representativos em relação ao universo de estudantes em fase inicial de aprendizagem de cálculo. Chegamos assim à amostra definitiva de seis estudantes: Antônio, Carlos, Francisco, Júlio, Marcelo e Tiago (pseudônimos).

4.3.1 Os participantes

Na ocasião do estudo empírico, todos os participantes tinham entre 17 e 21 anos de idade e estavam em seu primeiro ano de faculdade. Passaremos a relatar um resumo das respostas de cada um na entrevista G0 e a expor os motivos da escolha para cada caso. Na figura 4.7, destacamos as principais idéias relacionadas ao conceito de derivada na imagem de conceito de cada participante e suas atitudes e crenças em relação às limitações do computador.

Antônio

Antônio fala longamente e com entusiasmo ao responder as perguntas. Suas respostas evidenciam que a idéia predominante em sua imagem de conceito de derivada era a de *poder de conhecimento*. Isto é, por diversas vezes, ele menciona a derivada como um instrumento poderoso para obter e conectar informações profundas sobre funções, inacessíveis por outras formas. Exemplificamos alguns extratos de suas falas:

> Derivada, eu entendo por sendo a função que você utiliza pra estudar melhor o resto das funções que existem. [...] É uma função muito poderosa no sentido de ela poder estudar as outras funções. [...] Eu poderia estudar as outras funções detalhadamente. É como se ela conhecesse todas as outras filhas, todas as outras funções, por trás, não só pela frente. Você vendo um gráfico duma função qualquer, a derivada é que sabe o que acontece ali. Você olhando, você não tem como dizer. Você pega a periferia do que a função está dizendo. [...] A derivada seria a função mãe que coordena as filhas e ela sabe no âmago de cada função.

Em particular, no trecho acima Antônio se refere à derivada como um instrumento capaz de elucidar limitações de descrições visuais de funções: 'a derivada é que sabe o que acontece ali. Você olhando, você não tem como dizer'. Antônio faz menção ainda à possibilidade de se recuperar exatamente uma função a partir de sua derivada:

> Se você pegar as infinitas retas de cada ponto de tangência [...] eu não teria infinitas retas? Se você somasse, fizesse esse somatório infinito, daria a própria função. Ou seja, daria ela descrita na letra!

O estudante demonstra conhecimento da definição de derivada e se refere à distinção entre a definição e a imagem de conceito:

> E a gente estuda assim, na maioria das vezes, a derivada como uma definição. Seria o coeficiente angular da reta tangente à curva, num ponto dado qualquer. [...] Eu particularmente entendo a definição, mas como me vem isso na cabeça? [...] Não me vem somente a tangente de a numa reta $ax + b$. Me vem um estudo mais detalhado das variações que uma curva qualquer obedece, num dado intervalo, numa dada variação, num dado intervalo de qualquer coisa, seja de tempo, de espaço, qualquer coisa.

Ao ser indagado sobre resultados discrepantes fornecidos pelo computador para o cálculo aproximado de derivadas, Antônio explica que isto ocorre devido a truncamentos finitos e à impossibilidade da máquina de lidar com o infinito:

> Por que está mexendo com números que não dá para mexer. [...] A gente está mexendo com números que são infinitos! [...] Tipo $1,9876$... e essas outras casas que a gente omite, elas é que vão fazer a própria diferença. Elas são a diferença da parada. [...] Deu 4 por que você está mexendo com um número infinito e outro número infinito dividindo. [...] Agora se você botar um número finito em baixo e um outro número finito, não é essa razão que você está achando. [...] Esses que estão contando, a gente omite. Acha que não é número! Ah, muito pequeno, então não vai fazer diferença. Mas eles são a própria diferença!

Ele acrescenta que tais arredondamentos e aproximações tornam um instrumento não confiável e que sendo assim, para ter certeza se uma função, é preciso verificar se as fórmulas de derivação podem ser aplicadas.

A escolha de Antônio para a amostra se baseou em dois motivos: sua facilidade em ligar o conceito de derivada com uma gama ampla de idéias; e sua visão das limitações do computador como um problema ligado à incapacidade de lidar com o infinito.

Carlos

A idéia de derivada mais presente nas respostas de Carlos é a de um instrumento facilitador, que permitiria traçar gráficos com duas vantagens: com maior exatidão e evitando cálculos trabalhosos de substituição de pontos. Esta idéia é expressa, por exemplo, nas falas:

> Justamente naqueles determinados gráficos, principalmente com ondulações, a derivada é o cálculo exato de um determinado ponto que a gente, de maneira geral, não teria como calcular.

> A derivada facilita a gente elaborar um gráfico [...] sem ter que você calcular, dentro de um conjunto dos números reais que é uma coisa infinita, calcular cada ponto, muito próximo do outro, para se determinar o gráfico mais exato.

Ele se refere a vantagens trazidas pelo uso de derivadas em relação ao método de traçar gráficos por meio da substituição de pontos:

> Aquele método tradicional, que a gente aprende no segundo grau, de fazer o cálculo, de fazer o gráfico calculando, vamos dizer, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e calcular o valor da função naquele ponto x. Então, a partir daquilo ali a gente desenharia o gráfico. Só que com a utilização da derivada, [...] a gente pode determinar o gráfico sem ter que calcular todos esses pontos. Pegaria o ponto de máximo, o ponto de mínimo [...] e o que acontece quando vai para infinito.

Segundo o estudante, é possível verificar se uma função através de métodos algébricos (aplicando as fórmulas de derivação) ou por meio da visualização do gráfico no computador (observando se este não apresenta bicos). Ele afirma que ambos os métodos são igualmente eficazes.

Carlos demonstra uma crença de que a ocorrência de resultados errôneos fornecidos pelo computador não se deve a *limitações da máquina*, mas à *limitação sensorial humana* de perceber seus resultados. Freqüentemente ele se referiu à sua própria incapacidade de enxergar os pontos muito precisos na tela como uma razão de resultados discrepantes. Em duas ocasiões, ele posicionou uma régua na tela do computador com o objetivo de obter valores mais precisos. Esta atitude de Carlos em relação à máquina e sua associação de derivadas com a idéia de exatidão forma as razões para sua escolha para a amostra.

Francisco

A idéia de derivada predominante para Francisco é a sua interpretação geométrica como inclinação da reta tangente. Entretanto, ele expressa com freqüência sua dificuldade em conectar representações distintas para o conceito. Por exemplo, ele comenta:

> A visualização, eu estou entendendo. Eu só sei que fazendo a derivada, tipo um polinômio, derivando, [...] aí aproximando naquele ponto, a reta [...] que vai se tornar uma tangente àquele gráfico, que vai ser a da fórmula da derivada ali. [...] Eu não estou sabendo essa parte da álgebra, em relação a como a função, como o valor da inclinação vem da fórmula.

Francisco utiliza a idéia de derivada como inclinação de tangentes também para explicar a diferença entre funções deriváveis e não deriváveis. Ele se relaciona diferenciabilidade com existência de uma reta tangente única:

> Funções que têm bico também [...] Qual seria a derivada? Teria um monte de derivadas, porque você pode inclinar ali do jeito que você quiser no bico.

O estudante utiliza ainda uma metáfora de equilíbrio para descrever retas tangentes. Ele afirma que encontrar uma reta tangente é como tentar equilibrar uma reta na curva, como se esta foi uma balança. Em relação a resultados imprecisos do computador, ele comenta simplesmente que estes se devem a erros de arredondamento e aproximação.

Francisco foi o único dos entrevistados a expressar explicitamente dificuldades em relacionar formas distintas de representação. Ele também foi o único a mencionar uma interpretação geométrica para funções não diferenciáveis, no caso baseada na *unicidade* da derivada. Estes dois aspectos nos levaram a escolher Francisco para a amostra.

Júlio

Júlio responde às perguntas de forma precisa e sem hesitação. Ele se refere sempre a derivada como uma função:

> Derivada é uma função que associa os pontos de uma outra função à inclinação da reta que está passando por aquela outra função naquele ponto.

O estudante menciona também com freqüência aplicações de derivadas à física, por meio do cálculo de velocidades e acelerações. Júlio afirma que os resultados de cálculos algébricos para determinação da derivada de uma função podem ser comprovados pelo processo de magnificação local:

> A gente calcula a derivada depois pode botar a função no computador para ver se está certo mesmo.

Por outro lado, Júlio admite que computadores podem gerar resultados incompletos devido a erros de arredondamento.

Júlio se destacou entre os demais entrevistados por dar respostas objetivas e precisas às perguntas, quase sempre sem demonstrar hesitação. Porém, a principal razão para ele ter sido selecionado para a amostra foi o fato de que sua consciência das limitações do computador aparentemente não atuar como um obstáculo para sua crença de que a máquina pode ser usada como um instrumento de verificação da correção de resultados matemáticos.

Marcelo

Marcelo demonstra dúvida e hesitação ao responder as perguntas. A idéia de *aproximação* é a mais presente nas suas respostas. Por exemplo, ele comenta que:

> Bom, derivada é a aproximação de um ponto do gráfico. [...] Achar uma reta que faça [...] uma intersecção com a reta [...] com a função. Não chega a ser uma intersecção. A curva tem que encostar na reta para poder analisar aquele ponto ali, naquele intervalo ali da função.

Particularmente no que diz respeito à utilização do computador, Marcelo demonstra grande dificuldade. Ele diz não ter idéia de como a máquina opera e que isto sempre o impede de entender o que está acontecendo. Por exemplo, ele alega não compreender como é possível uma reta "mudar de inclinação" quando as escalas dos eixos mudam durante o processo de magnificação local:

> Eu não entendi muito bem isso não, como funciona este ângulo. Por que conforme os valores que você aproxima, esse ângulo muda. A minha dúvida é por que que muda. [...] Vamos supor, a reta está assim, com inclinação sei lá, 45°. De repente, você pode aproximar mais e ela fica com 90°.

A grande dificuldade de Marcelo em lidar com o computador foi a razão de sua escolha para integrar a amostra.

Tiago

Tiago dá grande destaque e fala com excitação da derivada como resultado da comparação de duas grandezas que se anulam. Ele comenta, por exemplo:

> Bom, derivada pra mim seria [...] você pegar duas coisas que isoladamente não tem sentido estudar, é 0, e achar um k, uma relação entre essas duas coisas. [...] A relação entre duas coisas que isoladamente são nulas, são 0. Por exemplo, a fórmula $\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}$. No caso você quer estudar o h tendendo a 0, então seria $f(x_0) - f(x_0)$, ou seja, 0, sobre h que seria 0 no caso também. E isso tem uma relação, ou seja, duas coisas [...] meio incompreensível, sei lá [...] É estranho. Duas coisas que isoladamente são 0 ter uma razão, uma constância de crescimento, de variação.

Ele acrescenta que funções não diferenciáveis são aquelas que possuem uma variação tão brusca que suas variações não podem ser comparadas entre si.

Ao ser indagado sobre os resultados imprecisos do computador, Tiago se limita a dizer que estes não têm importância e devem ser ignorados. Ele evita sistematicamente trabalhar com resultados provenientes do computador e utiliza sempre as fórmulas de derivação ou a própria definição de derivada. Ao ser indagado sobre a razão de sua preferência, ele responde:

> Eu não gostaria de trabalhar com aproximações, entendeu? Por que tende a um resultado aproximado.

Dois aspectos determinaram a escolha de Tiago: ele priorizou sistematicamente representações de natureza algébrica e expressou enfaticamente seu desconforto em lidar com resultados aproximados; e foi o único dos entrevistados a conceituar derivada como o resultado da comparação entre grandezas que isoladamente se anulam.

	Aspectos da imagem de conceito de derivada	Crenças sobre as limitações do computador
Antônio	*derivada como poder de conhecimento profundo sobre funções e fonte de informações inacessíveis por outros meios*	*incapacidade do computador em lidar com o infinito*
Carlos	*derivada como instrumento para obter informações exatas e traçar gráficos de forma mais precisa e menos trabalhosa*	*limitação sensorial do usuário*
Francisco	*derivada como inclinação de retas tangentes e inexistência de derivada como não unicidade de retas tangentes*	*erro de aproximação do computador*
Júlio	*derivada como função que a cada ponto associa a inclinação da reta tangente* *aplicações de derivadas à física*	*erro de aproximação do computador*
Marcelo	*derivada como resultado de um processo de aproximação*	*sua própria ignorância sobre o funcionamento do computador*
Tiago	*derivada como resultado da comparação de grandezas que se anulam*	*os resultados do computador são irrelevantes*

Figura 4.7: Quadro resumo das imagens de conceito dos participantes na ocasião da entrevista G0.

4.4 Planejamento e realização das entrevistas

Para formar um quadro significativo das imagens de conceito e dos processos de influência das limitações e conflitos nestas, planejamos comparar dados de duas fontes: a observação dos estudantes em situações de conflito e suas respostas a perguntas diretas sobre suas concepções e impressões. Assim, planejamos entrevistas de duas naturezas distintas:

1. *Entrevistas estruturadas, baseadas na realização de tarefas* (às quais nos referiremos como *entrevistas baseadas em tarefas* e denotaremos pelo código T): com o objetivo de identificar as estratégias e reações dos participantes frente a situações de conflito, além de suas possíveis preferências por determinados tipos de descrições ao se certificarem da veracidade de um resultado. As tarefas consistiam em identificar uma propriedade matemática (na maioria dos casos, diferenciabilidade). Com o objetivo de estimular a ocorrência de conflitos, em cada tarefa eram enfatizadas descrições de naturezas distintas, uma das quais computacional. Como afirma Goldin, uma vantagem de entrevistas baseadas em tarefas é que estas fornecem um ambiente matemático estruturado que pode, até certo ponto, ser controlado, e que permite um enfoque direto em *processos* de desenvolvimento de tarefas de forma global, e não apenas em simples padrões de correção ou incorreção de respostas (GOLDIN, 2000, p.520). Esta perspectiva corresponde à natureza das questões de investigação propostas.

2. *Entrevistas semi-estruturadas, baseadas em perguntas e respostas* (às quais nos referiremos como *entrevistas genéricas* e denotaremos pelo código G): com o objetivo de mapear as imagens de conceito dos participantes a partir dos pontos levantados em suas respostas. Procuramos planejar as entrevistas genéricas de forma que as perguntas propostas motivassem os participantes a discutir os mesmos pontos, a saber, características e propriedades de derivadas quando pensadas a partir de diferentes descrições e o papel do computador no estudo de derivadas. Para evitar que os participantes simplesmente repetissem respostas já dadas anteriormente, formulamos perguntas diferentes em entrevistas genéricas diferentes, mas que envolvessem a discussão dos pontos acima.

As sessões duraram entre 30 e 60 minutos, sendo as baseadas em tarefas em geral mais longas. O processo teve início no último mês de aulas do curso e se estendeu por cerca de quatro meses (isto é, entre junho e setembro de 2001). As sessões transcorreram em uma sala com um microcomputador a disposição, e em todas as ocasiões, os participantes eram livres para usá-lo quando desejassem. Todas as entrevistas foram audio-gravadas e transcritas em totalidade. Durante a realização das entrevistas, tomamos notas auxiliares, com o objetivo de registrar as ações não verbais dos participantes, que fossem relevantes para a compreensão de seu comportamento ou suas estratégias durante as sessões. Quando for o caso, indicaremos tais ações entre colchetes nos trechos dos transcritos citados, como por exemplo: [*aponta a tela do computador*] ou [*verifica suas contas no papel*]. Indicaremos também pausas ou hesitações dos entrevistados por meio da marca [. . .].

Como nosso objetivo é estudar o papel de limitações e conflitos dentro do contexto pedagógico específico, procuramos, tanto quanto possível, recriar durante as sessões o ambiente de sala de aula. Visando colocar cada encontro como uma extensão do curso formal, adotamos as mesmas postura e abordagem que seguíamos em aula. Cada sessão foi introduzida como uma situação de estudo e aprendizagem de conteúdo. Em todas as entrevistas, os conteúdos tratados eram familiares aos participantes. No caso das entrevistas baseadas em tarefas, as tarefas propostas eram semelhantes às que haviam sido dadas em sala de aula. Assim, nossa relação com os entrevistados era claramente de professor e alunos. Em particular, acreditamos que esta perspectiva acrescentou ao ambiente das sessões um ingrediente de naturalidade: os participantes, de forma geral, mostraram-se a vontade durante os encontros. Durante as entrevistas baseadas em tarefas, fizemos intervenções de três naturezas distintas:

- Em acordância com o método inaugurado por Newell & Simon, encorajamos os participantes a expressar oralmente seus pensamentos, explicitando suas decisões e estratégias ao resolver as tarefas (NEWELL & SIMON, 1972).

- Sempre que as explicações de um participante não eram, do nosso ponto de vista, claras o suficiente, pedimos maiores detalhes por meio de intervenções do tipo ‘o que você quer dizer com isso?’.

- Num primeiro momento, permitimos que os estudantes se engajassem no que Goldin descreve como *resolução livre de problemas* (GOLDIN, 2000, p.520), para que pudéssemos observar seu comportamento espontâneo e as razões para suas escolhas espontâneas. Entretanto, nos casos em que limitações de uma dada descrição não eram percebidas em absoluto pelo entrevistado, intervimos com frases do tipo 'você não acha que há alguma contradição aqui?'. Tal postura foi adotada visto que o objetivo deste estudo é compreender o papel pedagógico de limitações e conflitos, dentro de uma abordagem em que os mesmos são enfatizados e explorados.

Objetivando a análise comparativa dos tipos de dados, posicionamos as entrevistas genéricas no princípio, meio e fim do processo. Assim, os dados da entrevista G0 servirão, além da seleção da amostra, para a análise dos resultados de cada participante, como uma das entrevistas genéricas. Após a primeira entrevista genérica (G0), realizamos um bloco de entrevistas baseadas em tarefas (ao qual nos referiremos como TI), seguido de uma segunda entrevista genérica, de um segundo bloco de entrevistas baseadas em tarefas (que chamaremos de TII), e, finalmente, de uma última entrevista genérica. Passaremos a relatar os roteiros de cada entrevista. A figura 4.12 mostra um quadro resumo das entrevistas genéricas e baseadas em tarefas.

4.4.1 Bloco TI de entrevistas baseadas em tarefas

Neste bloco de entrevistas, as tarefas propostas consistiam em decidir se uma função dada era ou não diferenciável, a partir de uma descrição computacional (a imagem do gráfico na tela). Nas duas primeiras entrevistas (T1 e T2), a função dada *era* diferenciável, mas a descrição computacional sugeria que não fosse; enquanto na terceira (T3), ao contrário, a função *não era* diferenciável e a descrição sugeria que fosse.

Entrevista T1

Foram mostradas aos participantes duas descrições para a função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$, a expressão algébrica e o gráfico, traçado pelo *Maple* na janela gráfica $[-100, 100] \times [0, 100]$ (figura 4.8). Devido a escolha da janela gráfica, a imagem da função na tela tinha o aspecto da função módulo (na verdade, de duas assíntotas inclinadas). É importante frisar que, no início da entrevista, nos certificamos de que os participantes estavam cientes de ambos: o gráfico na tela e a expressão algébrica. Foi então pedido aos participantes que decidissem se h era ou não diferenciável.

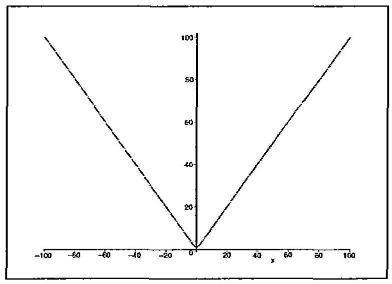


Figura 4.8: O gráfico de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ na janela gráfica $[-100, 100] \times [0, 100]$.

Entrevista T2

Foi pedido aos estudantes que efetuassem a magnificação local da curva $y = x^2$ em torno do ponto $x_0 = 0$, narrando e justificando o processo. A partir de um certo ponto, o *Maple* exibiria a imagem de uma poligonal (como mostrado na figura 3.14), em lugar de uma imagem cada vez mais parecida com uma reta, como esperado. Note-se que, da mesma forma que na entrevista T1, a descrição computacional sugeria que uma função diferenciável não o fosse. No entanto, aqui tal sugestão ocorreria durante o processo de magnificação local, enquanto que no caso da entrevista anterior, em janelas gráficas ampliadas. Isto é, na entrevista T2 a função pareceria ser não diferenciável quando vista 'de perto' e na entrevista T1 quando vista 'de longe'.

Entrevista T3

Foi pedido aos estudantes que efetuassem a magnificação local da função blancmange em torno do ponto $x_0 = \frac{1}{2}$, narrando e justificando o processo. A partir de um certo ponto, o *Maple* exibiria a imagem de uma reta (como na figura 3.15), em lugar de uma imagem progressivamente mais enrugada, como esperado.

4.4.2 Entrevista G1

Foram feitas aos participantes as seguintes perguntas:

1. Qual a diferença entre funções deriváveis e não deriváveis?

2. Como você reconhece uma função não derivável a partir do gráfico?

3. Como você reconhece uma função não derivável traçada no computador?

4. Como você reconhece uma função não derivável a partir da fórmula?

4.4.3 Bloco TII de entrevistas baseadas em tarefas

Neste bloco de entrevistas, além do conceito de derivada, abordamos limites e continuidade, por serem conceitos em que a noção de limite também aparece fortemente, especialmente em situações envolvendo descrições computacionais de natureza numérica.

Entrevista T4

Foram dadas aos participantes as funções:

$$g_1(x) = \frac{x}{x-1} \qquad g_2(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad g_3(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

A entrevista foi conduzida em cinco etapas:

1. Foi pedido aos estudantes que esboçassem os gráficos no papel, indicando os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito.

2. Foi pedido que eles traçassem os gráficos no computador (obtendo imagens semelhantes àquelas mostradas na figura 4.9, na parte de cima) e comparassem com os próprios esboços.

3. Para a janela gráfica mostrando g_1, foi pedido que eles aumentassem gradativamente o intervalo horizontal, mantendo o vertical fixo, e explicassem o observado. O gráfico adquiriria o aspecto de uma reta horizontal (a saber, sua assíntota horizontal).

4. Foi pedido que eles aumentassem gradativamente a janela gráfica mostrando g_2, explicando o observado. O gráfico adquiriria o aspecto de uma reta (sua assíntota inclinada).

5. Foi pedido que eles aumentassem gradativamente a janela gráfica mostrando g_3, explicando o observado. O gráfico adquiriria o aspecto de uma parábola.

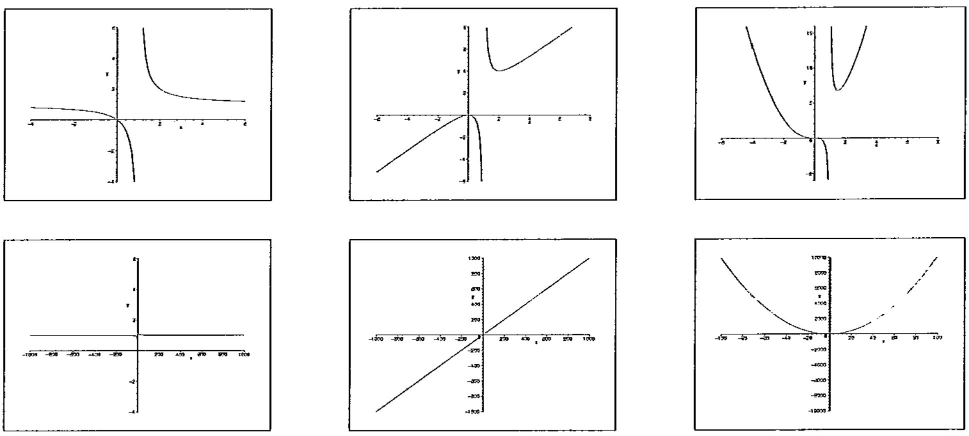


Figura 4.9: Gráficos das funções g_1, g_2 e g_3: g_1, para $(x, y) \in [-4, 6] \times [-4, 6]$ (à esquerda, acima) e $(x, y) \in [-1000, 1000] \times [-4, 6]$ (à esquerda, abaixo); g_2, para $(x, y) \in [-6, 8] \times [-6, 8]$ (no meio, acima) e $(x, y) \in [-1000, 1000] \times [-1000, 1000]$ (no meio, abaixo); g_2, para $(x, y) \in [-6, 8] \times [-6, 16]$ (à direita, acima) e $(x, y) \in [-100, 100] \times [-10.000, 10.000]$ (à direita, abaixo).

Entrevista T5

Foram dadas aos participantes as funções:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad f_3(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

A entrevista foi conduzida em quatro etapas:

1. Foi pedido aos estudantes que esboçassem os gráficos no papel, indicando os pontos de descontinuidade, os limites nestes pontos e no infinito.

2. Foi pedido que eles traçassem os gráficos no computador e comparassem com os próprios esboços. O gráfico de f_1 exibiria uma falsa assíntota (como mostrado na figura 3.10). O gráfico de f_3 não apresentaria qualquer sinal do ponto de descontinuidade.

3. Foi pedido que eles acrescentassem nos gráficos traçados no computador o comando do *Maple* 'discont=true', que analisa simbolicamente a expressão algébrica. A falsa assíntota de f_1 desapareceria, mas os gráficos de f_2 e f_3 permaneceriam da mesma forma (como mostra a figura 4.10).

4. Finalmente foi perguntado se as funções eram contínuas e o que representava melhor o gráfico, a esboço em lápis e papel ou o gráfico traçado na tela.

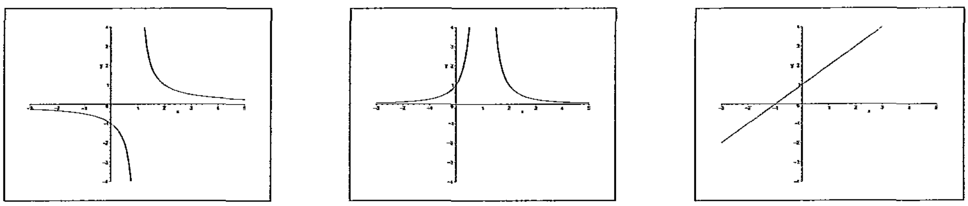


Figura 4.10: Os gráficos das funções f_1, f_2 e f_3, com o recurso de análise simbólica algébrica do *Maple*.

Entrevista T6

Foram mostradas aos participantes descrições algébricas e computacionais (os gráficos traçados pelo *Maple*) para as funções:

$$u_1 = \begin{cases} x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} x^2 \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Com base nestas duas descrições foi pedido a eles que decidissem se as funções eram ou não diferenciáveis. De maneira semelhante às entrevistas do bloco TI, aqui a descrição computacional sugeria que nenhuma das duas funções fossem (veja a figura 4.11) diferenciáveis na origem, mas u_1 não é e u_2 é. A diferenciabilidade neste caso só pode ser verificada através da definição.

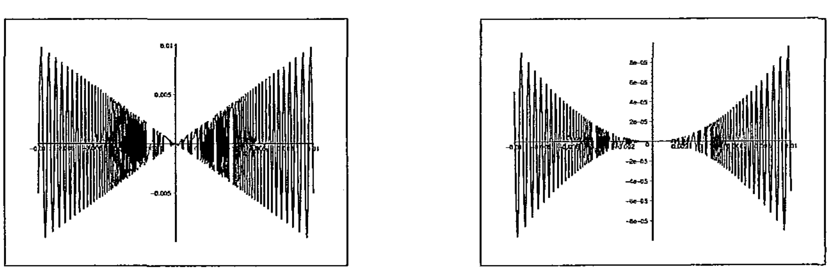


Figura 4.11: Os gráficos das funções u_1 e u_2.

4.4.4 Entrevista G2

Foram feitas aos participantes as seguintes perguntas:

1. O que você entende por derivada?

2. O que você entende por limite?

3. O que você entende por continuidade?

4. Como você reconhece uma função não derivável?

5. Fale livremente da experiência das entrevistas, do curso e da experiência com o computador.

<table>
<tr><td colspan="2">Entrevista G0</td><td>Tema: limites, continuidade e diferenciabilidade</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Bloco TI</td><td>Entrevista T1</td><td>Tema: diferenciabilidade
A função é diferenciável mas, quando vista de longe no computador, parece não ser.</td></tr>
<tr><td>Entrevista T2</td><td>Tema: diferenciabilidade
A função é diferenciável mas, quando magnificada no computador, parece não ser.</td></tr>
<tr><td>Entrevista T3</td><td>Tema: diferenciabilidade
A função não é diferenciável mas, quando magnificada no computador, parece ser.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entrevista G1</td><td>Tema: diferenciabilidade</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Bloco TII</td><td>Entrevista T4</td><td>Tema: limites no infinito
Funções mudando de aspecto quando vistas de longe no computador.</td></tr>
<tr><td>Entrevista T5</td><td>Tema: limites e continuidade
Diferentes tipos de descontinuidades visualizados no computador.</td></tr>
<tr><td>Entrevista T6</td><td>Tema: diferenciabilidade
Uma das funções é diferenciável e outra não é mas, no computador, ambas parecem não ser.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Entrevista G2</td><td>Tema: limites, continuidade e diferenciabilidade
impressões sobre a experiência</td></tr>
</table>

Figura 4.12: Quadro resumo das entrevistas.

4.5 Análise de dados

Para responder às questões propostas, buscamos extrair dos dados empíricos dois tipos de informações: padrões de ocorrência de conflitos e de reações ao lidar com os mesmos; e a influência das limitações e conflitos na evolução das imagens de conceito. Para tal, a análise de dados transcorreu em quatro etapas, descritas a seguir.

Etapa 1: análise das entrevistas genéricas

Com base nos transcritos das entrevistas genéricas, buscamos identificar as imagens de conceito de cada participante, destacando aspectos mencionados e freqüência com que estes eram mencionados. Desta forma, produzimos um mapa de evolução de discurso para cada um deles, através da comparação dos dados das três entrevistas genéricas.

Etapa 2: análise das entrevistas baseadas em tarefas

Após transcrever todas as entrevistas baseadas em tarefas, ouvimos novamente as gravações, identificando as situações de conflito (isto é, de acordo com nossa definição, momentos em que o sujeito se dá conta de limitações de uma descrição). Para cada situação de conflito, buscamos identificar cinco aspectos:

1. que fatores deram origem o conflito (isto é, se o conflito foi espontâneo ou induzido pelas intervenções do entrevistador);
2. de que forma o participante reagiu ao conflito, em particular se experimentou confusão, dúvida ou incerteza e com que intensidade isto ocorreu;
3. se o participante mudou de estratégia, linha de argumentação ou de opinião sobre o resultado da tarefa antes e depois do conflito, em particular:
   (a) em que descrições o participante baseava suas conclusões antes e depois do conflito;
   (b) se e que novas idéias foram motivadas pelo conflito.

Chamaremos um episódio de conflito cada situação de conflito, munida dos aspectos acima. Procuramos ainda identificar os fatores relacionados à *não ocorrência de conflitos*, quando houver sido o caso. Para cada participante, produzimos um mapa de evolução de episódios de conflito ao longo do processo de entrevistas, de forma a obter uma visão global de seus padrões de ocorrência de conflitos.

Etapa 3: comparação de resultados de entrevistas genéricas e baseadas em tarefas de cada participante

Produzimos um relatório final para cada estudante, visando a comparação dos resultados dos dois tipos de entrevistas, identificando similaridades e diferenças entre as escolhas e estratégias adotadas por cada um durante a resolução das tarefas e os aspectos por eles explicitados verbalmente. Com isto, procuramos gerar uma visão mais abrangente da inserção das situações de conflito nas imagens de conceito.

Etapa 4: comparação de resultados entre os participantes

Finalmente, comparamos os relatórios finais de todos os participantes, fornecendo um panorama mais global das reações frente a situações de conflito e sua influência nas imagens de conceito. Nosso objetivo é contribuir para o planejamento de pedagogias baseadas na exploração de limitações de descrições computacionais e não-computacionais com informações sobre os efeitos que podem ser esperados de situações de conflito.

Os diagramas das figuras 4.13 e 4.14 representam nosso esquema de análise de dados. Apresentamos, no capítulo 5, a análise de dados para cada um dos participantes (etapas 1, 2 e 3) e, em 6, a análise comparativa de dados (etapa 6).

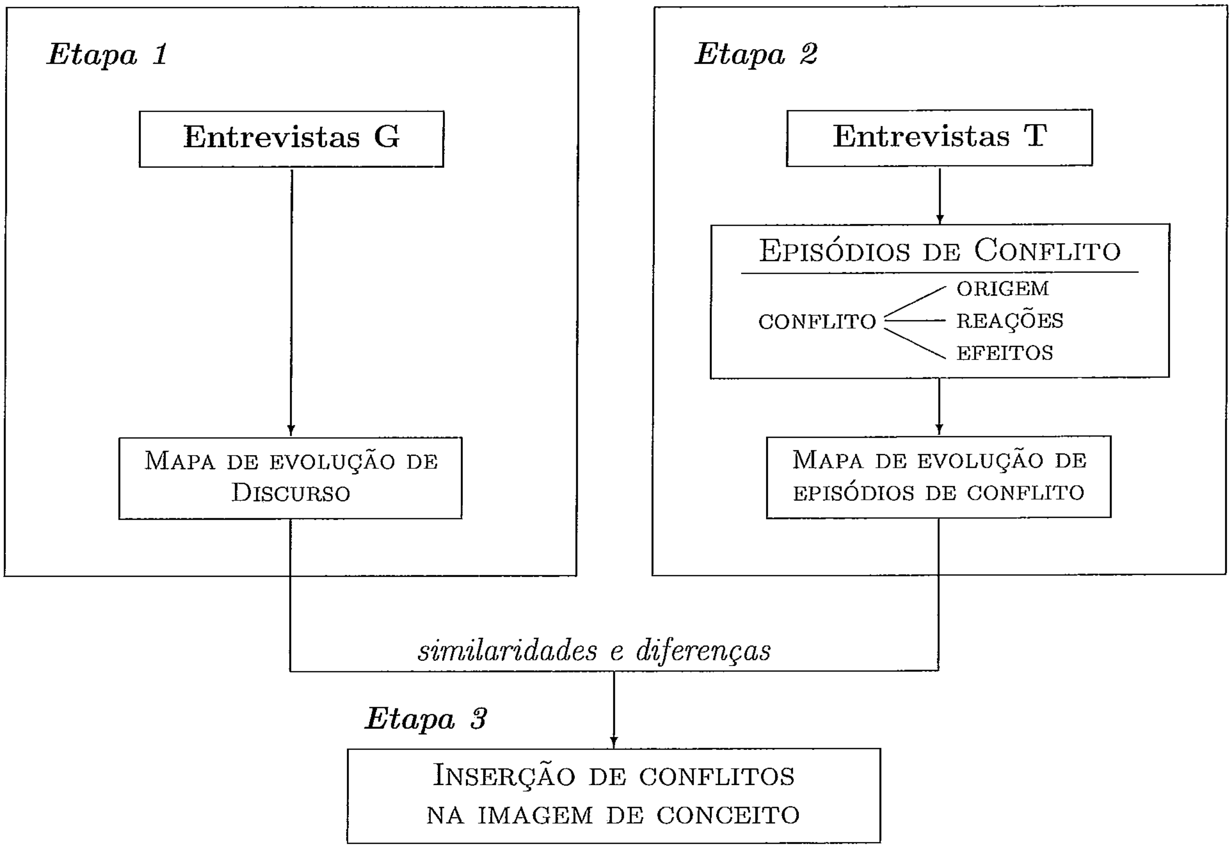


Figura 4.13: Esquema de análise de dados para cada participante.

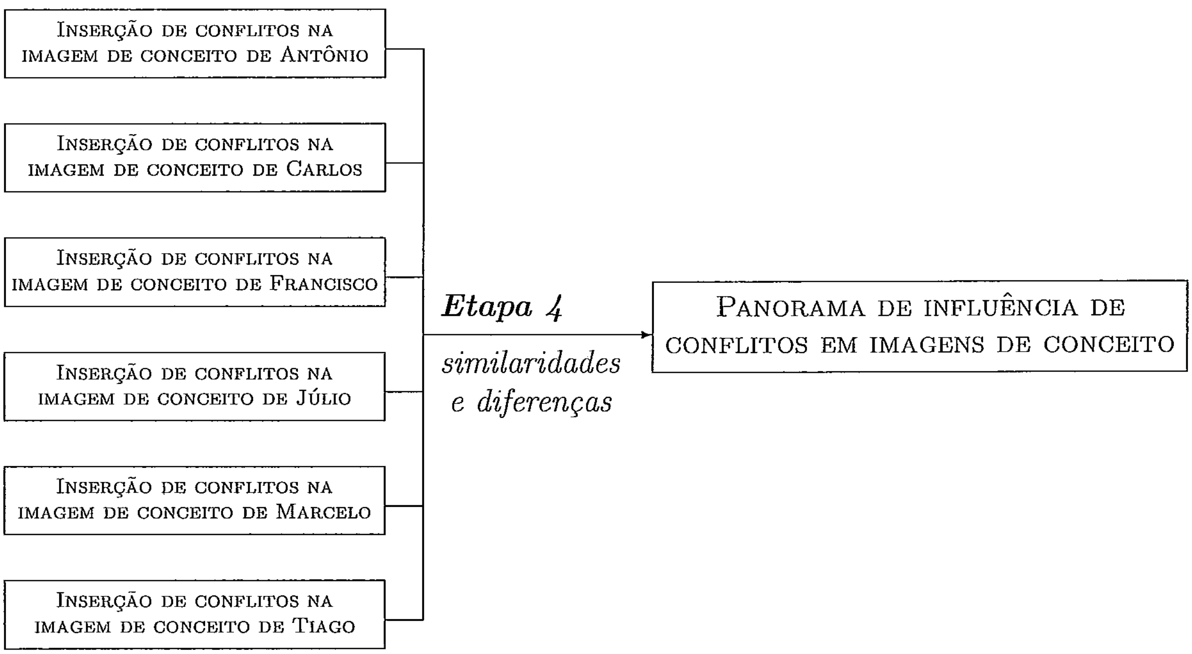


Figura 4.14: Esquema de análise comparativa de dados.

Capítulo 5

Relato das entrevistas e análise de resultados individuais

Neste capítulo, apresentamos as análises dos resultados individuais das entrevistas. Reservamos uma seção para cada um dos seis participantes. Cada uma destas seções está organizada em três sub-seções: análise das entrevistas genéricas, análise das entrevistas baseadas em tarefas e comparação de resultados. Nas sub-seções de análise de entrevistas, fornecemos um relato resumido de como transcorreu cada uma das entrevistas, destacando os pontos relevantes, e analisamos os resultados.

Por meio da análise das entrevistas genéricas, procuramos identificar, a partir das falas dos participantes, aspectos de suas imagens de conceito de derivada que permaneçam estáveis e aspectos que mudem ao longo do processo de entrevistas. Identificamos efeitos nas imagens de conceito de três tipos:

- *Reformulação*: um aspecto da imagem de conceito é reelaborado, de forma que algumas de suas características são preservadas e outras mudam.

- *Reconstrução*: um aspecto da imagem de conceito é substituído por um novo, que é incompatível com o primeiro.

- *Inclusão*: passa a fazer parte do discurso um aspecto até então ausente e sem relação direta aparente com aspectos presentes antes. É claro que o fato de um aspecto estar ausente do discurso não significa que este não faça parte da imagem de conceito. Assim, quando um participante passa a mencionar uma idéia até então ausente, podemos apenas supor, mas não garantir, que esta haja sido incluída em sua imagem de conceito a partir daquele momento. Tal suposição pode ser fortalecida pela freqüência com que a idéia é citada.

- *Exclusão*: deixa de fazer parte do discurso um aspecto até então presente, sem que se identifique relação direta (por exemplo, por meio reformulação ou reconstrução) com novos aspectos. Da mesma forma que no caso do efeito de inclusão, a exclusão de um aspecto do discurso do indivíduo não é garantia da exclusão da imagem de conceito, o que requer estudos mais cuidadosos.

Com base na análise das entrevistas genéricas, produzimos o mapa de evolução de discurso sobre derivada para cada participante (mostrados nas figuras 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10, 5.12). Efeitos de reformulação e reconstrução são representados nos mapas de evolução de discurso, respectivamente, pelos símbolos $\longrightarrow$ e $\leadsto$.

O recorte das imagens de conceito representadas nesses mapas de evolução pode conter, além de aspectos referentes diretamente ao conceito de derivada, também aspectos de conceitos afins (infinito, continuidade, limites). Uma imagem de conceito não é de forma geral uma estrutura isolada (embora o seja em alguns casos). Assim, considerar aspectos de conceitos afins e suas relações com o conceito de derivada para um indivíduo pode ajudar a elucidar a própria imagem de conceito de derivada. Por isso incluímos esses conceitos nos assuntos das entrevistas e, é claro, em sua análise. Além disso, este recorte inclui aspectos referentes às limitações das descrições computacionais para os conceitos tratados.

De forma mais geral, é importante notar que o mapa de evolução aqui definido mostra apenas *um recorte possível de uma porção da imagem de conceito acessível por meio da expressão oral do indivíduo*. Não nos aventuramos em tentar formular um método para produzir um retrato fiel de imagens de conceito – nem acreditamos que isto seja possível. Assim, as conclusões desenhadas com base neste mapa estarão tacitamente sujeitas à expressão oral dos participantes: quanto mais aspectos forem verbalizados, maior será a riqueza de informações acessível. Por esta razão, procuramos encorajar os participantes a falar livremente.

Na análise de cada entrevista baseada em tarefas, identificamos as situações de conflito experimentadas pelos participantes (ou a ausência de situações de conflito, se for o caso) e caracterizamos os episódios de conflito, como estabelecido na seção 4.5. A partir daí, produzimos o mapa de evolução de episódios de conflito para cada participante (mostrados nas figuras 5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.10, 5.12). Nesses mapas, indicamos as características dos episódios de conflito ocorridos ao longo das seis entrevistas baseadas em tarefas. Sendo assim, abaixo do enunciado de cada situação de conflito, são mostradas três colunas, relacionando as características dos episódios de conflito, a saber:

1. *Origem da situação de conflito*, isto é, se o conflito foi espontâneo ou induzido por intervenções.

2. *Reações imediatas à situação de conflito.* Procuramos registrar de que forma o participante reagiu imediatamente após a ocorrência de uma situação de conflito. A partir da análise das entrevistas, identificamos os seguintes tipos de reações:

    - *compreensão*: o participante formula uma explicação pessoal para o conflito, diretamente a partir da própria vivência do conflito, sem precisar para tal engajar-se em investigações mais aprofundadas. Ao classificar a reação de um estudante nesta categoria, não nos preocupamos com o grau de correção matemática da explicação formulada.
    - *confusão*: o participante manifesta ignorância das razões do conflito e hesita antes de decidir que estratégia tomar para tentar entender a situação.
    - *surpresa*: o participante reage explicitamente a um aspecto do conflito que seja inesperado ou contrário a suas suposições prévias.
    - *dúvida*: o conflito leva o participante a questionar suposições prévias.
    - *indiferença*: o participante não expressa interesse em buscar por possíveis explicações para o conflito.

    É claro que as categorias acima, de forma geral, não são excludentes. Isto é, um participante pode reagir por exemplo, com *compreensão e surpresa*, ou *dúvida e indiferença*.

3. *Efeitos da situação de conflito.* Procuramos registrar efeitos tais como mudanças de opiniões, estratégias e linhas de argumentação, ou formulação de novas idéias, ou ainda, formulação e investigação de conjecturas.

Indicamos também nos mapas de evolução de episódios de conflito, as entrevistas em que não foram observadas situações de conflito, e procuramos identificar nestes casos os fatores associados à não ocorrência de conflitos.

Na última sub-seção da seção de cada participante, produzimos um relatório final de resultados individuais, com base na comparação dos resultados das entrevistas genéricas e das entrevistas baseadas em tarefas. Nestes relatórios, procuramos identificar os efeitos das situações de conflito nas imagens de conceito dos participantes.

5.1 Antônio

> *Os limites, eles te dão o quanto a função pode mudar a qualquer hora, o quanto ela destoa do que ela deveria ser, o quanto ela arrebenta, explode, o quanto ela não existe.*
>
> Antônio, entrevista G2

5.1.1 Análise das entrevistas genéricas

Entrevista G1

Ao ser indagado sobre a diferença entre funções diferenciáveis e não diferenciáveis, Antônio reafirma as colocações feitas na entrevista G0, sobre a derivada como um instrumento para o conhecimento mais profundo das curvas. Ele comenta ainda:

> Funções não diferenciáveis [...] são funções que em determinados pontos você não pode estudar ela melhor porque naquele ponto ela não te dá condições de você poder traçar uma reta que seja tangente, justamente. [...] Naquele ponto não tem uma curva.

Perguntamos então o que Antônio considerava como 'curva'. Ele responde:

> Por um ponto podem passar infinitas retas. Só que numa curva só pode passar uma única reta que seja tangente num ponto, concorda? Uma função tem infinitos pontos. [...] Só que uma função que tem derivada, que tem uma curva [...] pode ter esses infinitos pontos representados por infinitas tangentes. As retas tangentes dizem de uma certa forma como é a função perto do ponto. Se não for uma curva, não vai ter reta tangente. Os pontos não têm nenhuma particularidade, nenhuma coisa [...] relacionando uns com os outros, entendeu?

Assim, para Antônio, uma 'curva' é um gráfico proveniente de uma função diferenciável, que admite uma única reta tangente em cada ponto, que 'representa' o ponto. Quando pedimos mais esclarecimentos sobre o que ele queria dizer com 'representar um ponto', ele volta a dizer que, por meio do estudo da reta tangente (caso esta exista), podemos obter mais informações sobre a curva na vizinhança do ponto.

Antônio reafirma também suas opiniões anteriores sobre as limitações do computador e a incapacidade deste de representar o infinito. Ele diz que tais limitações tornariam impossível decidir com absoluta certeza se uma função seria ou não diferenciável a partir do gráfico visualizado na tela. Segundo ele, um gráfico no computador poderia ser magnificado para que se tivesse uma 'pista' sobre a diferenciabilidade ou não da função, mas a certeza só poderia vir de métodos algébricos. Antônio reafirma que a única forma absolutamente segura de se concluir sobre a diferenciabilidade de uma função seria por meio das fórmulas de derivação.

Entrevista G2

Como de costume, Antônio fala longa e entusiasmadamente. Ele começa a explicar sua concepção de derivada falando de comparação de grandezas. Por exemplo, ele afirma:

> Derivada, eu entendo como a razão entre duas grandezas que estão interligadas, [...] e que estão indo para um mesmo lugar. O resultado dessa corrida é a derivada. [...] É isso que a definição diz, o limite da variação de y sobre a variação de x. Derivada é isso. [...] Agora eu vi que não dá para sair aplicando as fórmulas e pronto. Tem que tomar certos cuidados. Às vezes, só dá para saber aplicando o limite da definição.

Mais adiante, ele fala da importância da derivada e retoma a idéia de derivada como um instrumento para o conhecimento mais profundo de funções:

> Eu acho que o mundo todo, [...] tudo que nós vemos, ouvimos, conhecemos, eles estão ligados às funções. Tudo é descrito por funções. Quem descreve as funções são os números. E as funções, elas precisam de um certo controle. [...] E quem controla é a derivada. A derivada que controla esses pontos. [...] A derivada que permite conhecer e entender melhor como acontece com a função, como é comportamento dela em cada ponto, para onde ela vai. [...] Então é mais do que importante, é necessária.

Ao ser indagado sobre funções não deriváveis, Antônio responde:

> As funções não deriváveis, não dá para traçar a tangente num determinado ponto. Então não dá para conhecer ela melhor naquele ponto. Dá para calcular o valor dela naquele ponto, mas este valor é totalmente [...] ele não obedece uma relação com os pontos próximos dele. [...] Assim, uma variação suave, não forma uma curva suave.

O estudante conceitua limite da seguinte forma:

> Os limites, eles te dão o quanto a função pode mudar a qualquer hora, o quanto ela [...] o quanto ela destoa do que ela deveria ser, o quanto ela arrebenta, explode, o quanto ela não existe.

Antônio fala positivamente sobre a experiência do curso e das entrevistas. Por exemplo, ele afirma que:

> Abriu muito esse meu campo de pesquisar por si só, procurar entender as coisas e tal. E como eu sou muito curioso, eu acho que esse método de ensino foi ótimo para mim, por que ele instiga você a querer mais, procurar mais, saber mais sobre o assunto. O computador está relacionado com o fato da interatividade. Você interar com as curvas e poder ver aonde o braço não consegue te levar, entendeu?
>
> Por mais que você saiba a matéria, por mais que você tenha muitas, infinitas folhas de papel, você nunca vai poder fazer tudo que o computador faz. [...] O computador te dá várias aproximações, então libera melhor a sua intuição.

O estudante comenta ainda o papel dos erros cometidos pelo computador. Ele afirma que tais erros são resultado do fato do computador ser uma máquina finita, mas desta vez, acrescenta:

> Eu não gosto quando o computador erra, mas eu levo para o lado [...] que você pode aprender com o erro dele, entendeu? É como se você estivesse se testando. É como se ele fizesse sempre tudo certo e quando ele faz uma coisa errada, você fala: 'mas calma aí, mas é isso?'. Então ele não te leva a pensar que o computador é sempre certo, leva você a questionar sempre as coisas, leva você a aprender. Então isso é bom também, até o erro dele é bom.

Evolução de imagem de conceito

Duas idéias fortes permanecem na imagem de conceito de Antônio ao longo de todo o processo de entrevistas: *derivada como instrumento para controle e conhecimento profundo de funções* e *erros computacionais devido à incapacidade de lidar com o infinito*. A partir da entrevista G1, verificamos a inclusão de uma nova caracterização para funções não diferenciáveis.

Identificamos um efeito de reconstrução na imagem de conceito do estudante, dado pela mudança do critério empregado por Antônio para decidir sobre a diferenciabilidade de uma função. Ele deixa de se basear na aplicação do formulário de derivação, para se basear na definição de derivada por meio de limite.

Identificamos ainda um efeito de reformulação. Antônio considerava o computador como um instrumento não confiável, devido a eventuais erros cometidos por ele, e passa a considerar tais erros como potencial fonte de aprendizagem. Interpretamos esta mudança na imagem de conceito do estudante como uma reformulação e não como uma reconstrução, pois a segunda idéia não elimina a primeira. O fato de Antônio considerar erros computacionais como *fonte potencial de aprendizagem* não significa que ele passe a considerar o computador *confiável*, no sentido de poder fornecer critérios decisivos de veracidade matemática. Com efeito, na entrevista G2, ele afirma que a diferenciabilidade de uma função só pode ser seguramente decidida através da definição.

G0	G1	G2

A derivada é um instrumento poderoso para conhecimento profundo sobre funções e fonte de informações inacessíveis por outros meios.

A única forma de se ter certeza da diferenciabilidade de uma função é pela aplicação das fórmulas de derivação.

A única forma de se ter certeza da diferenciabilidade de uma função é pela definição derivada.

Funções não diferenciáveis são aquelas para as quais certos pontos não obedecem qualquer relação de regularidade em relação a pontos vizinhos.

Resultados errôneos fornecidos pelo computador são devidos à incapacidade da máquina em lidar com o infinito.

Resultados errôneos fornecidos pelo computador fazem dele um instrumento não confiável.

Resultados errôneos fornecidos pelo computador podem auxiliar a aprendizagem.

Figura 5.1: Mapa de evolução de discurso sobre derivada de Antônio.

5.1.2 Análise das entrevistas baseadas em tarefas

Bloco TI

Entrevista T1 Antônio afirma imediatamente que a função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ é derivável. Ao ser indagado sobre a razão deste fato, ele aponta para a tela do computador e comenta:

> Por que, vamos dizer, essa curva, que parece uma reta, ela se encontra com a outra suavemente e não bruscamente, num ponto, sabe? Aquilo ali não é uma ponta, então, ali é uma curvinha.

Perguntamos então como ele tem certeza de não se tratar de uma 'ponta', já que o gráfico dava essa impressão. Ele responde que tem certeza pois seria possível derivar a equação (isto é, as regras de derivação poderiam ser aplicadas), logo a função deveria ser derivável. Portanto, a 'ponta' visualizada teria que ser devida à falta de precisão do computador. O estudante acrescenta que:

> O que parece ser, às vezes não é.

Em nenhum momento da entrevista, Antônio preocupa-se em mudar a janela gráfica. A conclusão de que a função seria diferenciável a partir da expressão algébrica foi forte o suficiente para convencê-lo de que a 'ponta' mostrada pelo computador era apenas aparente, sem mesmo precisar visualizar o gráfico em outra janela.

Observa-se que o conflito ocorreu espontaneamente, já que Antônio se deu conta de que o gráfico mostrado na tela sugeria que a função seria não diferenciável sem qualquer intervenção de nossa parte nesse sentido. Antônio não experimentou qualquer confusão durante o conflito e apresentou imediatamente uma explicação para o mesmo. A utilização da descrição algébrica como critério decisivo sobre a diferenciabilidade da função não foi alterada pela ocorrência do conflito. Além disso, o conflito atuou para reforçar crenças anteriores do estudante, em particular, nas limitações do computador.

Entrevista T2 Ao dar início ao processo de magnificação local, Antônio explica os resultados esperados:

> Conforme eu vou diminuindo, fazendo Δy e Δx tender a 0, o que eu vou vendo aqui é o resultado disso. Eu estou vendo aqui a curva sendo diminuída no ponto, então vai parecer com uma reta. Toda curva, quando você vai fazendo ela parecer com uma reta. Você não consegue mais enxergar a curva, por mais curva que ela seja, se for diminuindo no ponto. [...] Na verdade o que eu estou vendo é a reta tangente.

Quando o programa começa a exibir a imagem de uma poligonal, o estudante declara:

> Eu não esperava a reta ficar distorcida, não. [...] Diminuindo mais, se fosse fechando a janela, ela tinha que ir ficando uma reta. [...] Na minha opinião não era para acontecer esse resultado aí, não, ela começar a quebrar. O computador [...] está maluco.

Ao ser indagado sobre as razões do comportamento do computador, ele demonstra conhecimento do algoritmo computacional:

> Porque o computador, ele [...] não tem a noção do que ele está fazendo. Ele está diminuindo, aí ele começa a confundir os pontos. Aí, por isso que ele dá aqueles resultados lá. Começa a dar reta quebrada, depois vai distorcendo a reta mais ainda. [...] Ele monta o gráfico ligando os pontos, então [...] esses pontos aqui são resultados de aproximações, então ele liga sem pensar. Liga os pontos e o que der é o gráfico para ele, porque ele não sabe o que acontece. É isso, por isso que ficou aquele gráfico todo errado lá.

Da mesma forma que na entrevista T1, o conflito ocorreu espontaneamente, não provocou confusão (embora neste caso tenha causado uma ligeira surpresa) nem alterou as opiniões ou estratégias de Antônio, e atuou para reforçar sua consciência nas limitações do computador.

Entrevista T3 De forma semelhante à entrevista T1, Antônio explica os resultados esperados no início ao processo de magnificação local. Ele demonstra compreensão do processo de limite da construção da função blancmange:

> Você foi pegando funções modulares, foi rebatendo a função para cima, certo? [...] Depois você pegou a mesma curva e dividiu ela por 2, ou multiplicou por $\frac{1}{2}$, e rebateu ela para cima. Depois pegou essa mesma que você rebateu para cima, dividida por 2 e dividiu por 2 de novo. Ou seja, multiplicou [...] aplicou como se tivesse pegado a primeira e multiplicado por $\frac{1}{4}$. Então, se for perceber, se for contínuo isso que você for fazer, é como se você estivesse pegando um número e multiplicando ele por $\frac{1}{2}$, pegando o que for multiplicado por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{2}$. Então é uma PG de razão $\frac{1}{2}$. E o gráfico, a curva, foi o somatório dessas curvas iniciais, que foi por $\frac{1}{2}$, por $\frac{1}{4}$. [...] Então é o somatório de uma PG. O somatório de uma PG é um limite, então ele converge para um ponto. [...] Ela existe, está bem definida no ponto.

Quando o computador começa a mostrar uma imagem formada por segmentos de reta, o estudante afirma não entender o que está acontecendo, pois esperava ver uma imagem cada vez mais enrugada. Explicamos então que, para representar a função blancmange, o programa não usava a série completa, mas um truncamento da mesma (no caso, até a décima parcela). Antônio demonstra haver entendido a explicação. Comentamos ainda que seria possível efetuar um somatório com mais parcelas, ao que ele acrescenta:

> Mas infinito ele não consegue fazer.

Depois de uma pausa prolongada, Antônio prossegue, com crescente entusiasmo:

> Nem o computador, nem nada! [...] Por que [...] não dá para você somar nada no infinito! Você vai continuar com um infinito faltando. E nada pode representar o infinito, como um todo, e sim mostrar que ela vai para aquele lugar, que tende para aquilo, mas não que é. Infinito é isso. Não dá para você representar, nem no plano, nem no espaço, nem em lugar nenhum. [...] Nem em nada! É um mistério, esse infinito. [...] O computador representa aquilo que o homem conhece e sabe para onde vai. Mas ele também não sabe o que é.

Mesmo após o entusiasmo inicial, ele continua a falar longamente sobre funções diferenciáveis e não diferenciáveis, sobre a natureza infinita das funções, a natureza teórica e abstrata dos objetos infinitos, sobre a dificuldade de conceber o infinito e a impossibilidade de representá-lo por meios físicos. Por exemplo, ele comenta:

> Várias curvas assim [*não diferenciáveis*] têm pontos que não têm nenhuma [...] nenhuma coisa relacionando eles, nada singular entre eles, com ponto nenhum. Os pontos não têm nada a ver um com o outro. Então o que acontece? Esse gráfico é como se fosse isso [...] com pontos tão próximos, mas que não fazem nem um segmento em relação ao outro, sabe? [...] Mas é difícil até de pensar isso, porque se a gente parte do pressuposto que reta ou segmento de reta têm infinitos pontos, então entre um ponto e outro há sempre outro ponto, e eles formam uma reta, tudo bem. Mas então isso aqui [...] esse gráfico aqui, cara [...] ele contradiz a intuição.

E mais adiante:

> O conjunto onde tem a maior variedade de coisas é o conjunto das funções. [...] Porque o conjunto das funções tem aquilo que nós conhecemos e aquilo que nós não conhecemos. Tem funções conhecidas, que nós conhecemos a derivada, e funções que nós não temos a menor idéia, o conjunto de todas as funções, desde $ax + b$, até a que eu nunca vi na vida.

Neste caso, Antônio se deu conta do conflito espontaneamente, mas não o compreendeu sem nossa intervenção. De fato, o conflito provocou inicialmente alguma confusão e depois grande entusiasmo. O conflito não alterou a opinião de Antônio sobre a não diferenciabilidade da função blancmange, mas, como sugere o próprio entusiasmo do estudante e a extensão de tempo em que ele se deteve discorrendo sobre a questão, parece haver trazido a suas imagens de conceito algumas novas idéias sobre a natureza das funções reais (diferenciáveis e não diferenciáveis), a natureza abstrata do infinito e a impossibilidade de representá-lo.

Bloco TII

Entrevista T4 Antônio desenha os gráficos de g_1, g_2 e g_3 no papel, identificando corretamente os pontos de descontinuidade e as assíntotas horizontais, verticais e inclinadas. Antes de traçar o gráfico de g_1 no computador, ele prevê que, ao afastar a janela gráfica, mantendo fixo o intervalo do eixo vertical e aumentando os valores do eixo horizontal, o gráfico adquiriria a aparência da assíntota horizontal. Ao ser efetuada a mudança de janela gráfica, a imagem na tela do computador confirma a previsão de Antônio. Da mesma forma, ele prevê que o gráfico ficaria semelhante a sua assíntota inclinada, o que de fato ocorre. Assim, não identificamos conflitos até este ponto da entrevista, já que as descrições envolvidas na experiência não levaram a contradições aparentes com a imagem de conceito prévia de Antônio.

No entanto, o mesmo não ocorre no caso g_3. Antônio faz algumas suposições sobre a possível aparência do gráfico em janelas grandes, mas, segundo suas próprias palavras, não consegue prever com precisão o aspecto do gráfico de forma global. Quando ele muda as janelas gráficas e a curva fica parecida com uma parábola, ele diz não entender a razão do acontecido. Antônio começa então a investigar. Primeiro ele se preocupa com o sinal da função. Comparando com g_2, ele observa que:

> Na g_2, quando x tende a $+\infty$, ela tende a $+\infty$ e quando tende a $-\infty$, tende a $-\infty$. [...] Uma coisa é certa. Dar a parábola, ela não poderia dar, porque as duas coisas não estão indo para o mesmo lugar. Nessa aqui, quando x tende a $\pm\infty$, y tende a $+\infty$. Os dois tendem a $+\infty$. Mas por que uma parábola?

Ainda estudando o sinal, Antônio observa que a função é negativa para $x \in]0,1[$, mas parece ser sempre positiva quando vista 'de longe'. Ele se lembra que o mesmo havia ocorrido com g_1 e g_2, embora não houvesse notado até então. Ele comenta:

> Aqui no 1 tem uma assíntota vertical, nas três [g_1, g_2 *e* g_3]. Esse 1, essa assíntota vertical, vai tender a $x = 0$, porque você não vai conseguir ver, está muito longe, então ela vai colar aqui na ordenada. Esse pedaço aqui [*aponta a tela*], que explode lá em cima, que está na assíntota $x = 1$ vai colar também em 0. Esse pedaço aqui que está explodindo para infinito, vai se juntar aqui, e dá a impressão da parábola contínua, da falsa parábola contínua.

Ele diz ainda não entender perfeitamente por que a curva se parece exatamente uma parábola. Neste momento, sugerimos que ele traçasse no computador gráficos de outras funções racionais. Antônio começa com $y = \frac{x^4}{x-1}$, depois $y = \frac{x^5}{x^4-1}$, $y = \frac{x^{10}}{x^5-1}$, $y = \frac{x^{100}}{x^{50}-1}$ e diversas outras funções. Depois de observar muitos exemplos, ele conclui:

> Na minha opinião é a razão, a razão das coisas. Mas por que a razão?

Neste momento, demos a Antônio uma justificativa algébrica para mostrar que, se q é o quociente dos polinômios f e g, então $\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-q(x)\right|=0$. Ele declara haver finalmente entendido a tarefa, e ainda acrescenta:

> Sem o computador, seria difícil ver isso aí. O que a gente vê no computador, seria realmente a razão entre os dois polinômios. [...] Só que o que a gente realmente vê não é o quociente, e sim parecido com o quociente.

No caso aqui relatado, o conflito foi espontâneo e gerou grande confusão. Antes do conflito, Antônio baseava-se mais nas expressões algébricas para explicar o comportamento das funções. Mas depois do conflito, suas explicações basearam-se na combinação da expressão algébrica e visualização dos gráficos na tela, em diferentes janelas. Ainda assim, o conflito levou Antônio a buscar uma explicação algébrica para o observado na tela: *o gráfico fica parecido com o quociente dos polinômios.* Este era um fato novo, até então ignorado pelo estudante. Embora ele não tenha concluído esta explicação espontaneamente, notamos que Antônio não se satisfez e não cessou a investigação enquanto não encontrou uma explicação algébrica satisfatória.

Entrevista T5 Antônio desenha os gráficos de f_1, f_2 e f_3 no papel, identificando corretamente os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. Em seguida, ele traça os gráficos de f_1 e f_2 no computador e observa imediatamente que a reta vertical é mostrada para o primeiro deles, mas não para o segundo:

> Não sei por que ele não colocou a assíntota. Acho que ele ter deveria colocado, pelo mesmo motivo que ele colocou na primeira.

Pedimos então que o estudante acrescente ao gráfico traçado o comando do *Maple* 'discont=true'. Antônio observa que agora a reta vertical não é mostrada para nenhum dos dois gráficos e afirma não entender a razão deste fato. Explicamos a diferença entre os dois algoritmos utilizados pela máquina: antes, o computador traçava o gráfico somente por meio da interpolação de pontos; agora, ele procede uma análise simbólica da expressão algébrica antes de ligar os pontos. O estudante começa a investigar, procurando por diferenças entre as duas funções. Ele observa que f_1 possui sinais opostos dos dois lados da descontinuidade, enquanto f_2 tem o mesmo sinal. Depois de pensar por alguns instantes, o estudante afirma:

> Ele liga os pontos cegamente. [...] Ele ligando os pontos cegamente, então ele deveria ligar os pontos também no gráfico de baixo [f_2], se fosse por esse motivo.

Chamamos atenção para a diferença de sinal entre as duas funções, observada pelo próprio estudante. Ele comenta:

> Ah, é bem possível por que lá em cima, os dois fiquem muito próximos quando y [...] é muito grande. Então ele liga. Vai ficar como se fosse [...] uma reta lá em cima. Como se a curva se encontrasse em reta vertical lá em cima. Quando ele faz a análise da descontinuidade da função, ele não vai ligar os pontos achando que é parte do gráfico, o que ele faz certo!

Antônio critica duramente o programa, devido a este erro:

> O programa, ele já tinha que vir já com [...] com esse 'discont=true' para poder [...] poder ele te dar o certo. O computador não podia ligar os pontos assim aleatoriamente, ou cegamente. É errado, cara. Te dá uma impressão errada das coisas. Eu pensava que era uma reta que ele colocasse simbólica, representando a descontinuidade. Agora não, para ele é parte do gráfico! Isso é errado!

Pedimos que Antônio desse prosseguimento à tarefa, traçando o gráfico de f_3 no computador e observando a diferença com o que ele havia desenhado no papel. Ele observa imediatamente que a descontinuidade em $x = 1$ não está representada na tela e novamente critica a limitação da máquina, afirmando que o programa omitia um detalhe que fazia grande diferença. Ele então acrescenta espontaneamente o comando 'discont=true' e exclama:

> Não mudou nada! Tinha que mudar, de alguma forma. [...] O computador, ele não usa mais os pontos cegamente, quando você não pede 'discont=true'?

Ele prossegue, depois de pensar por alguns segundos:

> Teria que pular um ponto. Agora, como ele pularia um ponto? Teria que ter tipo um chamativo, uma setinha puxando ali. Ou pelo menos, sabe o que poderia ter? Não dá para ele pular um ponto, mas poderia ter uma reta imaginária, uma reta vertical passando em 1, e onde toca no gráfico, ele poderia puxar uma seta e dizer que ali é descontínuo. Ele tem que colocar alguma coisa, ele não pode colocar a reta contínua! [...] Ele está dizendo que o gráfico $y = x + 1$ é igual a $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. É isso que está escrito ali, e isso não é verdade!

Ao ser indagado se as funções eram contínuas e se elas eram melhor representadas no papel ou na tela, Antônio responde que é claro que as três eram descontínuas e que o desenho no papel representava-as muito melhor que o computador, onde as descontinuidades não eram devidamente assinaladas. Ao final da entrevista, ele critica outra vez o programa:

> Eu acho que o programa *Maple* tem que ser atualizado. Ele foge de muitas coisas. Tipo, não necessitaria você colocar um outro comando para te dar um estudo melhor. Por que você precisar de comando para te dar melhor o gráfico? Se uma pessoa que quer aprender, vai aprender o melhor possível. Ela não vai aprender do errado para o certo, ela aprende logo o certo!

Podemos identificar nesta entrevista a ocorrência de duas situações de conflito. Na primeira, Antônio observa que o computador representa a reta vertical para f_1, mas não para f_2. Na segunda, ele observa a ausência do ponto de descontinuidade no gráfico traçado para f_3 pelo computador. Os episódios de conflito são semelhantes. Em ambos, o conflito ocorreu espontaneamente, causou confusão (poderíamos até mesmo dizer, revolta contra o computador) e não alterou as estratégias ou opiniões de Antônio sobre a tarefa, pois, tanto antes quanto depois dos conflitos, ele baseia suas conclusões na expressão algébrica e no gráfico traçado no papel. Além disso, as situações de conflito fortaleceram a consciência de Antônio das limitações da máquina.

Entrevista T6 No primeiro momento, Antônio afirma que ambas as funções deveriam ser diferenciáveis, pois as fórmulas que ele conhecia poderiam ser aplicadas às expressões algébricas. Ele então começa a magnificar os gráficos em torno da origem, e as curvas parecem cada vez mais borradas e confusas. Antônio argumenta que isso deveria ser devido a erros de interpolação, mas que as funções deveriam ter derivada. Ele comenta:

> Se fosse $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, sem mais nada, elas não seriam. Elas não seriam diferenciáveis em 0, porque $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não estaria definido. Mas, para essas funções o ponto $(0,0)$ existe, então é a junção de duas curvas.

Ele passa a se preocupar em entender melhor como se dava a 'junção' entre os dois ramos das curvas. Após mudar diversas vezes as janelas gráficas de ambas, ele observa que o gráfico de u_1 é 'modelado' por duas retas e o de u_2 por duas parábolas. Depois de pensar por alguns momentos, ele comenta:

> Ei, espera aí! Eu acho que u_1 não é [*diferenciável*], sabe por que? Porque em 0, ela é modelada pela junção de duas retas, $y = x$ e $y = -x$. [...] Quando

> chega perto daquele ponto, as partes se aproximam uma da outra de acordo com aquelas retas! Elas vão se encontrar naquele ponto, certo? Mas é uma junção assim brusca, tipo um bico. [...] A outra [u_2] é diferente, é uma junção suave. Aqui as parábolas modelam a curva, não as retas, essa é a diferença. Por isso que eu acho que uma tem derivada e a outra não, u_1 tem e u_2 não. [...] Mas eu não posso ficar totalmente seguro só olhando para o gráfico. Deixa eu pensar.

Antônio observa que as fórmulas de derivação não eram válidas em $x = 0$, pois as funções não estavam definidas naquele ponto. Neste ponto, ele comenta:

> Eu teria que calcular o limite.

Ele enuncia a definição de derivada por meio de limite e começa a fazer os cálculos para as funções u_1 e u_2. Assim, Antônio conclui que, neste caso, o único caminho para se ficar absolutamente seguro seria usando a definição de derivada. O estudante apresenta dificuldades para calcular os limites e não consegue chegar a uma conclusão final, mas reafirma que este seria o único procedimento confiável, mesmo que ele não conseguisse efetuá-lo.

Observamos que neste caso a situação de conflito ocorreu espontaneamente e fez com que Antônio ficasse em dúvida. O conflito motivou também o estudante a mudar de estratégia: antes ele baseava suas conclusões na possibilidade da aplicação (indevida) das fórmulas de derivação; mas depois passou a vincular a conclusão definitiva na definição de derivada por meio de limite.

Evolução de episódios de conflito

Nas duas primeiras entrevistas, a reação de Antônio às situações de conflito é de compreensão imediata. Ele não se mostra confuso ou hesitante e rapidamente formula explicações para as aparentes contradições baseadas nas limitações das descrições computacionais utilizadas. Em ambos os casos, seus critérios de decisão sobre as tarefas propostas (a diferenciabilidade das funções) baseiam-se exclusivamente nas descrições algébricas das funções, o que não é alterado pelos conflitos. Assim, os conflitos atuam somente reforçando a consciência do estudante das limitações das descrições computacionais.

Já nas terceira e quarta entrevistas, Antônio não compreende as situações com tanta agilidade – ele se mostra inicialmente confuso. A partir das reações imediatas de confusão, ele busca compreender mais profundamente as possíveis causas para as aparentes contradições.

Na entrevista T3, o conflito leva-o a formular idéias importantes sobre a natureza abstrata do infinito e das funções reais diferenciáveis e não diferenciáveis – idéias que parecem ser absolutamente novas para ele, ao que sugere o entusiasmo com que o estudante as narra. Ele afirma que *existem as funções conhecidas e aquelas de que nada se conhece*; que *nas funções não diferenciáveis não há nada singular relacionando os pontos uns aos outros*; que *o infinito não pode ser representado por quaisquer meios físicos*, e formula ainda uma razão para esta impossibilidade: *haverá sempre uma infinidade faltando.*

Na entrevista T4, o conflito também leva Antônio a formular uma nova idéia sobre o comportamento de funções racionais. Mas, talvez o fato mais relevante seja que, pela primeira, vez o estudante se baseia na comparação das descrições computacional e algébrica para estabelecer suas conclusões, e não mais na descrição algébrica exclusivamente. Ele comenta inclusive que sua conclusão *seria difícil sem o computador.*

Antônio também se viu confuso frente aos dois conflitos vivenciados na entrevista T5. As investigações engajadas pelo estudante não o levaram a nenhuma nova idéia ou mudança de estratégia, mas serviram novamente como reforço de sua consciência das limitações das descrições computacionais.

Na última entrevista, observamos um fato significativo. A reação de Antônio ao conflito não é de confusão, mas de dúvida em relação a suas suposições iniciais sobre a diferenciabilidade das funções. Sua investigação leva-o a concluir que ele estava errado inicialmente. Com isto, Antônio se força a estabelecer um novo critério para decidir sobre a diferenciabilidade de uma função: ele não se baseia mais na descrição algébrica, mas na definição de derivada por meio de limite. Este não é simplesmente um aspecto *acrescentado* aos critérios anteriores de Antônio e sim *contrário* a estes. De fato, o estudante conclui que a diferenciabilidade das funções u_1 e u_2 não poderia ser determinada por meio da simples aplicação das fórmulas usuais de derivação – isto é, o método adotado por ele até então *falharia* neste caso.

<table>
<tr><th></th><th>ORIGEM</th><th>REAÇÕES</th><th>EFEITOS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">T1</td><td>Conflito:</td><td colspan="2">A função h é diferenciável, mas no computador parece não ser.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>compreensão imediata</td><td>reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T2</td><td>Conflito:</td><td colspan="2">A parábola é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece não ser.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>surpresa
compreensão imediata</td><td>reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T3</td><td>Conflito:</td><td colspan="2">A função blancmange não é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece ser.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>surpresa
confusão leve</td><td>nova idéia: O infinito é um conceito abstrato e não pode ser representado por meios físicos.
nova idéia: Uma função não diferenciável tem pontos sem nenhuma relação singular com outros pontos.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T4</td><td>Conflito:</td><td colspan="2">A função g_3 fica parecida com uma parábola no computador.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>confusão forte</td><td>nova idéia: O gráfico de função racional fica parecido com a função quociente quando visto no computador em uma janela afastada.
mudança de argumentação baseada exclusivamente na descrição algébrica para argumentação baseada na combinação das descrições algébrica e computacional</td></tr>
<tr><td rowspan="4">T5</td><td>Conflito:</td><td colspan="2">O computador exibe a 'assíntota' para f_1, mas não para f_2.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>confusão forte</td><td>reforço da consciência e crítica de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td>Conflito:</td><td colspan="2">O computador não indica a descontinuidade de f_3.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>confusão</td><td>reforço da consciência e crítica de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T6</td><td>Conflito:</td><td colspan="2">As expressões algébricas das funções u_1 e u_2 sugerem que ambas sejam diferenciáveis, mas no computador ambas parecem não ser.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>confusão forte
dúvida</td><td>mudança na conclusão sobre a diferenciabilidade das funções
mudança de argumentação baseada na descrição algébrica para argumentação baseada na definição de derivada</td></tr>
</table>

Figura 5.2: Mapa de evolução de episódios de conflito de Antônio.

5.1.3 Comparação de resultados

Identificamos dois pontos similares entre os mapas de evolução de episódios de conflito e de episódios de conflito de Antônio. O primeiro é a inclusão da idéia sobre funções não diferenciáveis. A afirmação de que *nas funções não diferenciáveis ocorrem pontos que não possuem nenhuma relação singular uns com os outros* ocorre de forma semelhante em T3 e em G1, pela primeira vez nas entrevistas genéricas. Este fato indica que o conflito vivenciado na entrevista T3, que motivou Antônio a refletir sobre funções não diferenciáveis, provocou a inclusão desta nova idéia em sua imagem de conceito de derivada. O segundo ponto de similaridade é a reconstrução do seu critério de decisão sobre diferenciabilidade. A mudança do critério baseado na aplicação do formulário algébrico para a definição de derivada é verificado em T6, pela primeira vez nas entrevistas baseadas em tarefas, e em G2, pela primeira vez nas entrevistas genéricas. Esta constatação sugere a interpretação de que a situação de conflito ocorrida em T6 levou Antônio a refutar seu critério até então, substituindo-o por um novo em sua imagem de conceito.

Outro fato relevante é a reformulação da visão de Antônio do papel do computador no seu próprio processo de aprendizagem. Sua consciência das limitações do computador foi reforçada pelos conflitos ocorridos nas entrevistas T1, T2, T4 e T5 – em T4 e T5 ele chega a criticar fortemente os resultados errôneos da máquina. No entanto, nas entrevistas T3 e T6, os conflitos levaram à inclusão e à reconstrução de idéias. Suas reações às situações de conflito variam: de compreensão imediata em T1 e T2, a surpresa em T2 e T3, confusão de T3 a T6, e dúvida (que leva a reconstrução) em T6. Por outro lado, no mapa de evolução de discurso, o papel das limitações do computador como um aspecto *favorável à aprendizagem* aparece pela primeira vez em G2, ao final do processo de entrevistas. Esta nova idéia não se encontra associada ao abandono da consciência de Antônio das limitações das descrições computacionais. Ao contrário, ele nunca adota descrições computacionais como critérios de verdade matemática e, em todas as entrevistas genéricas, se refere consistentemente à impossibilidade do computador de lidar com o infinito. A reformulação de idéias de Antônio reside na nova visão das facetas positivas do computador: instigar investigações a partir de seus erros, possibilitar representações impossíveis por outros meios – nem com 'infinitas folhas de papel', segundo as próprias palavras do participante (entrevista G2). Assim, nossa conclusão é de que esta reformulação foi um resultado da série de episódios de conflito vivenciados por Antônio.

Em resumo, concluímos que os conflitos levaram Antônio a: incluir e reconstruir suas idéias de derivada, reforçar e fundamentar sua consciência das limitações das descrições computacionais e reformular sua visão do papel destas limitações.

5.2 Carlos

No computador ele é imperfeito porque não indica a descontinuidade. Mas na verdade o gráfico no papel também não seria perfeito, porque não dá para desenhar uma bolinha do tamanho de um ponto. [...] Imperfeito, o computador é sim, mas não dá para fazer nada totalmente perfeito.

Carlos, entrevista T5

5.2.1 Análise das entrevistas genéricas

Entrevista G1

Carlos refere-se à derivada de forma semelhante à entrevista G0, como um instrumento que facilitaria o traçado de gráficos, especialmente aqueles mais complicados, evitando a substituição de pontos. Ao ser indagado sobre a diferença entre funções diferenciáveis e não diferenciáveis, Carlos cita exemplos dados anteriormente em sala de aula. Ele comenta que funções não diferenciáveis são aquelas que, como a função módulo, formam um 'bico' em um certo ponto e, por isso, não podem de forma nenhuma ser aproximadas por retas naquele ponto. Por diversas vezes, Carlos refere-se a não diferenciabilidade como uma anomalia. Por exemplo, ele explica que:

> E pelo gráfico, se num determinado ponto, ela forma um bico, [...] então naquele intervalo qualquer, o gráfico nunca vai se aproximar de uma reta. Vai ter sempre aquela anomalia, então também não [...] não seria uma função derivável naquele ponto.

O estudante diz que, a partir do gráfico visto na tela do computador, não é possível ter certeza da diferenciabilidade de uma função, devido a erros e imprecisões cometidos *pelo computador*. Note-se que, na entrevista G0, Carlos atribuia resultados inconsistentes gerados pelo computador como falhas de observação *do usuário*. Já para determinar a diferenciabilidade a partir da expressão algébrica, seria preciso traçar o gráfico e observar se a curva forma 'bicos'.

Entrevista G2

Carlos volta a falar sobre a derivada como instrumento facilitador para estudar funções detalhadamente:

> Depois de tudo isso que a gente viu, o que dá para resumir de derivada, é que ela seria, vamos dizer assim, a maneira mais correta da gente estudar os valores da função. [. . .] É a maneira mais fácil da gente estudar todos os pontos duma função qualquer, seja ela qual for.

Ele compara com os métodos estudados no ensino médio:

> Eu acho importante, porque eu já me deparei muito, principalmente durante o meu segundo grau, com problemas de matemática e física que, quando a gente não tem esse recurso da derivada, às vezes, os problemas [. . .] principalmente de análise de gráfico, eles se tornam muito complicados, assim, porque você não tem essa base, esse recurso, você não tem conhecimento disso. [. . .] Se torna mais, sei lá, mais curioso, mais atraente, é justamente esse conhecimento que você tem de derivada, que você consegue destrinchar de maneira mais [. . .] clara qualquer gráfico.

Carlos comenta também as limitações do computador:

> O computador, às vezes ele pode cometer erros sim. [. . .] Não seria bem erros, mas tem coisas que não dá para ele fazer. Então, a gente não pode se fiar no que aparece no computador assim de qualquer maneira.

Quando perguntado como saber se uma função tem derivada, Carlos responde:

> Se não me engano, a gente já viu funções que o computador mostrava como tendo derivada, mas na verdade não tinham. Então não dá para se fiar nisso aí somente. O computador ajuda a nossa compreensão, mas tem que estudar direito o que ele mostra.

Ele acrescenta ainda que é preciso sempre lembrar que os conceitos matemáticos são abstratos e que, portanto, qualquer representação para eles terá alguma imperfeição.

Evolução de imagem de conceito

A idéias de Carlos de derivada como *derivada como um instrumento facilitador para o estudo de funções* é mencionada em todas as entrevistas genéricas. De fato, a freqüência com que ele se refere a esta idéia indica que este seja um aspecto importante de sua imagem de conceito derivada. A idéia de não diferenciabilidade como *uma anomalia*, por outro lado, é referida pelo estudante apenas na entrevista G1.

Identificamos dois efeitos de reconstrução importantes – que estão fortemente relacionados entre si. Na entrevista G0, Carlos afirma que resultados incoerentes do computador se devem a falhas *do usuário* que o observa e que é possível determinar se uma função tem derivada a partir de seu gráfico traçado pela máquina (desde que este seja visualizado bem o suficiente). No entanto, a partir da entrevista G1, ele demonstra haver reconstruído ambas as idéias: ele passa a afirmar que resultados incoerentes são devidos a limitações *da máquina* e que, sendo assim, não se pode estar certo sobre a diferenciabilidade de uma função com base na imagem na tela.

G0	G1	G2
A derivada é um instrumento facilitador para traçar gráficos e estudar funções com mais detalhes e menos trabalho.		
	Não diferenciabilidade é uma anomalia.	
		Conceitos matemáticos são abstratos.
É possível ter certeza se uma função é ou não diferenciável tanto pela aplicação das fórmulas de derivação quanto pela visualização do gráfico no computador.	*Não é possível ter certeza se uma função é diferenciável através da visualização do gráfico no computador, devido às limitações da máquina.*	
Resultados incoerentes do computador ocorrem devido a falhas do usuário.	*Resultados incoerentes do computador ocorrem devido a limitações da máquina.*	

Figura 5.3: Mapa de evolução de discurso sobre derivada de Carlos.

5.2.2 Análise das entrevistas baseadas em tarefas

Bloco TI

Entrevista T1 Carlos começa supondo que a função h não seria diferenciável, com base na visualização da imagem na tela, mas chama atenção para a falta de precisão do computador:

> O computador, ele não apresenta a perfeição ali no bico. Mas pela visualização [...] assim pela visualização mais [...] mais grosseira, naquele ponto ali onde ele está fazendo a bifurcação, então a princípio naquele ponto ela não é derivável, apesar de ser uma função contínua.

Perguntamos o que o estudante queria dizer com 'perfeição no bico', ao que ele responde:

> É, ele não tem aquela [...] precisão de mostrar, aqui no ponto 0 se ele está [...] está reto, ou se tem aquele 'V' da formação do bico. [...] Mas eu acredito sim que a função não seja derivável naquele ponto.

Perguntamos se ele estava seguro de sua conclusão sobre a não diferenciabilidade da função. Carlos responde que não podia ter certeza absoluta baseando-se somente no gráfico traçado no computador e que deveria calcular os limites laterais da função. Ele começa a calcular os limites laterais e rapidamente percebe uma contradição. Olhando para a tela da computador, Carlos comenta:

> O ponto seria o ponto 0. Então, a função $h(0)$, seria igual [...] raiz quadrada de 0 ao quadrado mais 1. Então $h(0)$ seria igual a 1. [...] Não bateu.

Carlos continua olhando para a tela por alguns segundos e comenta:

> Ah, na realidade aqui você está utilizando um intervalo grande, de -100 a 100. Então a visualização aqui é que não [...] Teria que fazer uma aproximação maior do gráfico, diminuir esse intervalo, para verificar a coordenada de $x = 0$.

Ele muda o intervalo horizontal para $[-5, 5]$ e observa que a curva deixa de apresentar a forma de um bico e começa a parecer mais suave. Com base nesta visualização, o estudante conclui que a função é diferenciável em todos os pontos.

O conflito vivenciado por Carlos foi induzido, pois ele não demonstrou haver percebido nenhuma contradição entre o gráfico da função e a expressão algébrica sem que houvéssemos perguntado se ele estava seguro de sua resposta. O estudante experimenta uma breve confusão durante o conflito. A conclusão de Carlos é baseada fundamentalmente na descrição computacional, tanto antes quanto depois do conflito. Entretanto, sua estratégia sofre uma mudança, pois inicialmente ele se baseia exclusivamente na descrição computacional, mas a situação de conflito o motiva a considerar uma comparação das descrições computacional e algébrica antes de sua conclusão final.

Entrevista T2 Ao dar início ao processo de magnificação local, Carlos diz que espera visualizar uma reta. Quando o computador começa a mostrar irregularidades, ele se mostra surpreso. Perguntamos se ele saberia explicar este resultado, ao que Carlos responde:

> Então, na realidade, de um jeito ou de outro, ele [*o computador*] está sempre ligando os pontos. Então, eu acredito que essa é a visualização que a gente está tendo agora da função x^2. Quando a gente vai diminuir o intervalo, na realidade o gráfico deveria apresentar um segmento de reta, vamos dizer assim. Quanto mais a gente vai diminuindo, vai diminuindo esse intervalo, esses pontos que ele marca vão ficando mais separados, mas ele, de uma maneira ou de outra, sempre vai tentar unir. E é aí que dá essa coisa aí meio [...] essa anomalia, parece uma coisa meio quadrada, uma figura mais geométrica.

Assim, observamos que o conflito ocorreu espontaneamente, provocou surpresa em Carlos, mas foi rapidamente entendido e não causou mudanças nas estratégias ou opiniões de Carlos, mas serviu para chamar sua atenção para as limitações da máquina.

Entrevista T3 Carlos fala sobre a sua concepção da função blancmange:

> O gráfico da função, ela é definida por vários bicos, mas aí, é difícil assim a gente entender. [...] A gente entende a coisa da álgebra, o algebrismo do funcionamento da função. [...] Mas o que ficou por trás da função na hora que a gente visualizar é aquela coisa, entre dois números quaisquer, seja ele racional ou irracional, vai existir sempre um outro, então como é que entre um bico e outro não vai existir um trecho reto? Isso na realidade é o que ficou por trás. Mas não que seja assim uma coisa do [...] do entendimento matemático, mas aquela coisa de você [...] abstração. Na realidade é uma abstração. [...] A interrogação é: como é que pode haver dois bicos e entre o espaço entre dois bicos, não existe um trecho reto, onde possa ser derivável?

Carlos supõe que no processo de magnificação local da função, deveria ver uma imagem cada vez mais irregular. Quando o computador começa a mostrar uma poligonal em vez disso, ele diz estar em dúvida da sua própria suposição. Explicamos então que o computador utiliza na verdade um truncamento da série geradora da blancmange. Carlos pensa por instantes e conclui:

> Então, é o que eu estava dizendo antes. Essa curva aí, ela é uma questão de abstração. [...] Ela não é uma curva assim [...] que a gente desenhe, que a gente faça um desenho dela. Só fica no abstrato mesmo. O computador também não consegue desenhar.

Nesta entrevista, o conflito foi percebido espontaneamente e provocou dúvida em Carlos. O conflito não fez com que o estudante mudasse de opinião, mas ao contrário, serviu para fundamentar e fortalecer suas crenças anteriores.

Bloco TII

Entrevista T4 Carlos desenha os gráficos de g_1, g_2 e g_3, identificando os pontos de descontinuidade e as assíntotas horizontais e verticais, porém não identifica a assíntota inclinada de g_2. Ele traça o gráfico de g_1 e aumenta o intervalo do eixo horizontal. Observando a função adquirir o aspecto de uma reta, o estudante comenta que o gráfico fica parecido com sua assíntota horizontal. Carlos propõe então aumentar também o intervalo vertical. Ele observa a imagem da função coincidir com o eixo horizontal e explica:

> Se aumentar a janela também do y na realidade, o gráfico vai coincidir justamente com o eixo, nesta visão distante. Então eu acredito que [...] o motivo do gráfico com essa aparência é justamente o estudo que você faz da derivada, que cada vez mais você aproxima. Você vai verificando aspectos menores da função, cada vez mais próximo. Então, quando você colocou o intervalo muito grande, na realidade você quase não tem visão nenhuma da função porque ela coincidiu com os eixos. Quando você coloca intervalos menores, então você vai verificando as particularidades da função, como é que é o aspecto dela em cada ponto. Aqui é justamente o contrário, você enxerga cada vez menos. Então acredito que seja essa a explicação.

Perguntamos por que exatamente o gráfico tendia a coincidir com eixos. Carlos responde:

> A medida em que você fez o gráfico aí, que você foi aumentando, inicialmente quando você aumentou o intervalo do x, como o gráfico tendia a 1, ele foi se aproximando cada vez mais do 1, da reta horizontal igual a 1. A medida em que a gente foi aumentado agora o do y, a parte do gráfico que tendia também a 1 está se aproximando agora do x. Então se a gente for aumentando cada vez mais essa janela, mais ela vai se aproximar dos eixos, nesta visão longe.

Em seguida, ele traça no computador o gráfico de g_2. Ao perguntarmos o que ele deverá ver ao afastar a janela gráfica, Carlos diz que espera ver a curva 'colar' no eixo vertical, devido à existência de uma assíntota vertical. Quando a curva começa a ficar parecida com uma reta inclinada, o estudante se mostra surpreso e levemente confuso. Ele faz algumas conjecturas vagas tentando relacionar a similaridade do gráfico com uma reta com os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. Depois de algum tempo, comenta:

> A outra tinha uma assíntota horizontal, então essa aqui deve ter uma inclinada.

Carlos toma o papel e tenta procurar por uma assíntota inclinada. Ele faz o seguinte cálculo: $y = \frac{x^2}{x-1} = \frac{\frac{x^2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{x}{1-\frac{1}{x}}$, e comenta:

> É por isso que parece com a reta $y = x$.

O estudante começa então o processo de afastar a janela gráfica da função g_3. Ao ver a curva ficar parecida com uma parábola, ele explica:

> Eu tenho como referência a função anterior, $\frac{x^2}{x-1}$. [...] Ela tem uma descontinuidade no 1, que, na realidade, quando a gente aumenta a janela, essa descontinuidade, ela some porque ela se aproxima do eixo. E a aparência da parábola, eu acredito também que se deve ao fato dos limites no infinito, tanto para o x no $-\infty$ como para o $+\infty$. E eu acredito que seja por esse motivo também que dá essa [...] aparência de parábola quando a gente aumenta o *zoom*.

Pedimos maiores esclarecimentos sobre o raciocínio de Carlos. Ele explica que pode repetir o mesmo procedimento feito com g_2, dividindo o numerador e o denominador por x, e concluindo que $\frac{x^3}{x-1} = \frac{x^2}{1-\frac{1}{x}}$. Carlos acrescenta ainda:

> Então o gráfico da função $\frac{x^4}{x-1}$, por exemplo, ela parece o gráfico da função x^3. Então eu acredito que seja [...] essa a explicação.

Sugerimos que o estudante verificasse sua conjectura no computador. Ele assim faz e observa que estava certo. Perguntamos o que aconteceria então com a função $\frac{x^4}{x^2-1}$. Carlos responde:

> Com x^2 no denominador, eu acredito que ia ficar parecido com a função x^2.

Mais uma vez, seguindo nossa sugestão, ele verifica que sua conjectura estava certa. Perguntamos como ele havia previsto este resultado, ao que ele responde:

> Eu estou tentando assimilar justamente isso: que o quociente entre o numerador e o denominador das potências do x é que está gerando a função quando você aumenta o *zoom*. O quociente dos graus do x é que está gerando um gráfico parecido com a função do resultado desse quociente. Porque os outros, de grau menor ficam desprezíveis.

Nesta entrevista, Carlos vivenciou espontaneamente um conflito quando o gráfico de g_2 ficou parecido com uma reta inclinada. A situação de conflito provocou surpresa e confusão leve em Carlos e motivou-o a identificar a assíntota inclinada de g_2. Além disso, o conflito levou o estudante a formular, testar e concluir uma nova conjectura, que generaliza a idéia de assíntota: *a aparência de uma função racional quando vista de longe é determinada pela diferença dos graus dos polinômios numerador e denominador.* O estudante se convenceu da veracidade de sua conjectura com tal firmeza que foi capaz de prever com base nela o que aconteceria com g_3, além de propor e explicar por si próprio um novo exemplo.

Entrevista T5 Carlos esboça os gráficos de f_1 e f_2 no papel, identificando corretamente os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. No caso de f_3, ele erra ao calcular o limite em x tendendo a 1 e identifica uma assíntota em lugar de uma descontinuidade removível. Ao traçar os gráficos de f_1 e f_2 no computador, ele estranha o fato da assíntota só ser mostrada para uma das funções. Inicialmente, ele diz não entender a razão disto, mas poucos segundos depois, exclama:

> Ah, só uma coisa! [...] Na realidade, ele está considerando então que na primeira função não seria uma função. Porque o mesmo x está dando mais de um valor de y. [...] Esse gráfico aí não seria o gráfico de uma função.

Ao perguntarmos o motivo para tal erro, Carlos responde porque o computador liga os pontos. Em seguida, acrescentamos o comando '`discont=true`' e explicamos sua função. Carlos comenta que a análise simbólica evita que o computador desenhe a falsa assíntota. Passamos então a analisar f_3. Ao ver o gráfico na tela, o estudante imediatamente se dá conta de seu erro. Ele explica o processo de construção do gráfico pelo computador:

> Na realidade, ele resolve o quociente dos dois polinômios. Então, ele pensa que a função $\frac{x^2-1}{x-1}$ é na realidade a função $x+1$. Então, ele considera como uma função linear. Então, por isso que ele constrói o gráfico como se fosse uma função linear. O computador não põe a bolinha, ela liga os pontos direto.

Em seguida ele volta para o desenho feito inicialmente no papel e o conserta, desenhando a 'bolinha' para indicar a descontinuidade. Ao incluirmos o comando '`discont=true`', o estudante comenta que, mesmo com a análise algébrica, o computador é incapaz de 'pular' um único ponto. Finalmente, perguntamos de que forma as funções eram melhor representadas, no papel ou no computador. Carlos responde:

> No computador ele é imperfeito porque não indica a descontinuidade. Mas na verdade o gráfico no papel também não seria perfeito, porque não dá para

> desenhar uma bolinha do tamanho de um ponto. [...] Imperfeito, o computador é sim, mas não dá para fazer nada totalmente perfeito. Mas é melhor do que o computador, por que pelo menos a gente indica que tem uma descontinuidade. [...] Mas ponto mesmo, a descontinuidade como sendo um ponto, ficaria somente no campo da abstração.

Nesta entrevista, Carlos vivencia espontaneamente duas situações de conflito. Na primeira, ele se dá conta de que a assíntota vertical só é mostrada em um dos gráficos. O conflito causa uma confusão muito ligeira, pois o estudante compreende sua origem em poucos segundos. Neste caso, o conflito serve para confirmar o entendimento de Carlos sobre as limitações dos algoritmos computacionais para traçar gráficos de funções. Na segunda situação de conflito, Carlos percebe que o gráfico de f_3 traçado no computador está diferente daquele traçado por ele no papel. Um primeiro efeito deste conflito é a percepção pelo estudante de seu próprio erro (na verdade, a rapidez com que o estudante percebe o erro ao ver o gráfico na tela sugere que este não foi devido a uma deficiência conceitual de Carlos, mas a uma distração momentânea). Mas este conflito tem um segundo (e mais interessante) efeito. De fato, ele atua chamando a atenção do estudante não só para a limitação da descrição computacional, como também para a limitação da descrição gráfica produzida por ele próprio: *não é possível desenhar uma bolinha do tamanho de um ponto.*

Entrevista T6 Carlos afirma que ambas as funções teriam derivada e diz que isto é garantido pelas suas fórmulas. Ele examina os gráficos mostrados na tela do computador, mudando as janelas gráficas algumas vezes. Finalmente, Carlos afirma que a imagem na tela poderia sugerir que as funções não fossem deriváveis, mas que isto se devia à alta oscilação das funções e à imprecisão do computador:

> Eu acho que isso é a imperfeição do computador de não conseguir mostrar a proximidade, como a freqüência está muito pequena [...] ou está muito grande? [...] Não, a freqüência está grande e o período está pequeno. Ele não consegue definir ali como é que a curva está se comportando. Por que na realidade, a medida que a gente aproxima, mais ainda esse negócio se torna mais acentuado, tanto a freqüência como o período, o período menor e a freqüência maior. Por isso que dá o borrão.

Desta forma, Carlos experimenta espontaneamente um conflito, mas não fica confuso ou em dúvida e não muda sua opinião sobre as funções em virtude deste.

Evolução de episódios de conflito

No começo da entrevista T1, Carlos baseia sua suposição na não diferenciabilidade da função h na descrição computacional. Ele reage com confusão quando a situação de conflito induzida abala sua crença na imagem visualizada na tela. No entanto, este conflito leva-o a adotar uma estratégia diferente, baseada na combinação das descrições algébrica e computacional, para mudar sua suposição inicial e concluir que a função é derivável.

Na entrevista T2 a atitude do estudante é diferente. O conflito ocorre espontaneamente e Carlos compreende imediatamente a situação, atribuindo o resultado a limitações da descrição computacional. Como resultado, o conflito reforça uma consciência das limitações do computador adquirida na entrevista anterior.

Em T3, o conflito também é espontâneo e faz com que Carlos duvide de sua própria suposição. Entretanto, depois de pensar mais detidamente, ele atribui a aparente contradição à incapacidade do computador de representar o abstrato e reafirma sua suposição inicial, além de confirmar sua concepção da natureza abstrata da função blancmange.

Na entrevista T4, a investigação detonada pelo conflito leva Carlos a identificar propriedades e formular uma nova idéia sobre o comportamento de funções racionais. Ao longo do processo, ele emprega métodos algébricos para confirmar suas conjecturas e a visualização no computador como uma forma de ilustrá-las. Este fato confirma que, diferentemente da entrevista T1, o participante não se baseia nas descrições computacionais como critério de certeza matemática.

Finalmente, em T5 e T6, os conflitos ocorrem espontaneamente e são compreendidos imediatamente por Carlos. Ele fortalece sua consciência não só nas limitações de descrições computacionais como de descrições de natureza não computacional. Note-se que Carlos é o único participante que menciona que a limitação da descrição da descontinuidade por meio de uma 'bolinha'.

	Origem	Reações	Efeitos
T1	*Conflito:*	*O valor da $h(0)$, calculado a partir da expressão algébrica 'não bate' com o gráfico mostrado na tela do computador.*	
	induzido	confusão leve	mudança de argumentação baseada exclusivamente na descrição computacional para argumentação baseada na combinação das descrições algébrica e computacional identificação de limitações da descrição computacional
T2	*Conflito:*	*A parábola é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece não ser.*	
	espontâneo	surpresa compreensão imediata	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
T3	*Conflito:*	*A função blancmange não é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece ser.*	
	espontâneo	dúvida	fortalecimento de crenças prévias sobre a natureza abstrata e a impossibilidade de visualização da função blancmange
T4	*Conflito:*	*A função g_2 fica parecida com uma reta no computador.*	
	espontâneo	surpresa confusão leve	identificação da assíntota inclinada nova idéia: *a aparência de uma função racional quando vista de longe é determinada pela diferença entre os graus do numerador e do denominador*
T5	*Conflito:*	*O computador exibe a 'assíntota' para f_1, mas não para f_2.*	
	espontâneo	confusão leve compreensão rápida	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
	Conflito:	*O computador não indica a descontinuidade de f_3.*	
	espontâneo	compreensão imediata	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais identificação de limitações da descrição gráfica
T6	*Conflito:*	*As expressões algébricas das funções u_1 e u_2 sugerem que ambas sejam diferenciáveis, mas no computador ambas parecem não ser.*	
	espontâneo	compreensão imediata	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais

Figura 5.4: Mapa de evolução de episódios de conflito de Carlos.

5.2.3 Comparação de resultados

A evolução de episódios de conflito de Carlos sugere que estes estejam relacionados com os dois efeitos de reconstrução observados na imagem de conceito do participante. De fato, apenas no começo da entrevista T1 ele baseia afirmação exclusivamente na descrição computacional, porém a experiência do conflito força-o a mudar de estratégia. Em T2 e T3, Carlos mantém uma linha de argumentação baseada na combinação de informações provenientes de descrições computacionais e não computacionais e se mostra mais consciente das limitações do computador. Na entrevista T3, em particular, ele chega a se referir à incapacidade da máquina de lidar com o abstrato. Nas entrevistas do segundo bloco, ele formula explicações atribuindo resultados aparentemente contraditórios às limitações da máquina e baseia suas conclusões em explorações simbólicas, usando as descrições computacionais como apoio – mas não como critério de decisão. No mapa de evolução de discurso, a partir da entrevista G1, ele demonstra haver reconstruído dois importantes aspectos: ele passa a se referir a limitação do computador como um atributo da máquina, e não mais do usuário, e deixa de considerar descrições computacionais como fonte de certeza matemática.

Podemos observar outro ponto comum relevante entre os dois mapas de Carlos. Nas entrevistas T3 e T6, ele se refere a conceitos matemáticos como sendo de natureza *abstrata*. Em T3, ele afirma que o computador não pode desenhar a função blancmange por ela ser abstrata. Em T6, o conflito leva Carlos a refletir sobre as limitações não só da descrição computacional, como também da descrição gráfica para a descontinuidade removível. Como resultado, ele se refere ao ponto como sendo um conceito abstrato, para o qual qualquer representação seria imperfeita. Na entrevista T3, o estudante já havia mencionado a natureza abstrata da blancmange mesmo antes do conflito, o que sugere que esta idéia já estava presente em sua imagem de conceito, mas parece ter sido confirmada e fortalecida pelos conflitos. A idéia de conceitos matemáticos abstratos é incluída no mapa de evolução de discurso do participante na entrevista G2, quando ele volta a se referir a imperfeições das representações. Estes resultados sugerem que o fortalecimento desta idéia esteja relacionado com a vivência das situações de conflito.

A idéia de descontinuidade como anomalia, que aparece no mapa de evolução de discurso, é mencionada com freqüência na entrevista G1 (mas não nas demais entrevistas genéricas) e ocasionalmente nas entrevistas baseadas em tarefas. Não há evidência de que este aspecto da imagem de conceito de Carlos esteja relacionado com a experiência de conflitos.

Em resumo, podemos concluir que os conflitos atuaram na imagem de conceito de Carlos promovendo: a reconstrução de seus critérios de verdade matemática, a reconstrução de suas idéias sobre as limitações de descrições computacionais e não computacionais e sobre a impossibilidade das mesmas para representar com perfeição conceitos matemáticos abstratos, além do fortalecimento da própria idéia da natureza abstrata de conceitos matemáticos.

5.3 Francisco

Na verdade essa função lembra bem realmente um montanha toda irregular. [...] É como se você pegasse uma tora muito grande, uma tora bem grossa e quisesse fazer ela uma tangente numa montanha toda irregular.

Francisco, entrevista T3

5.3.1 Análise das entrevistas genéricas

Entrevista G1

Ao comentar a diferença entre funções diferenciáveis e não diferenciáveis, Francisco reafirma as idéias estabelecidas na entrevista G0, relacionando existência de derivadas com unicidade de retas tangentes:

> As funções que têm derivada em qualquer ponto, significa [...] na minha cabeça eu penso assim, em qualquer ponto dela eu posso traçar uma reta tangente ali no gráfico. [...] Não é o que acontece com, por exemplo, as funções que têm derivada, que ali naquele ponto [...] você não vai conseguir uma derivada. [...] Funções que têm bico, porque ali não tem como você [...] qual seria a derivada? Teria um monte de derivadas, porque você pode inclinar ali do jeito que você quiser no bico.

Ele menciona também a idéia de reta tangente como a que mais se assemelha localmente com a curva:

> Você vai ter várias retas que passam por ali, com inclinações diferentes. Mas a reta que melhor vai se enquadrar, ou seja a [*ele enfatiza o artigo 'a', para assinalar o caráter de unicidade da reta tangente*] reta que vai se enquadrar para tangente vai ser a da derivada que a gente faz derivando a função.

O estudante comenta ainda a diferença entre retas tangentes e não tangentes a partir da taxa de decrescimento da diferença entre a curva e a reta:

> Quando você vai olhando de perto, você vai vendo que aquela diferençazinha [...] entre o y da função e o y da reta, ela decresce muito mais quando a reta é a derivada. Você sempre vai ter [...] bem próximo do ponto vai ser pequeno, mas a reta derivada vai ser menor ainda. De todas as retas, vai ser a menor diferença entre os y.

Ao ser indagado sobre como decidir sobre diferenciabilidade de uma função a partir fórmula, Francisco comenta que usaria as fórmulas de derivação, mas reafirma as dúvidas colocadas na entrevista G0, sobre a relação entre o resultado dado pelas fórmulas e a interpretação geométrica como inclinação de retas. Sobre o reconhecimento de funções deriváveis a partir de gráficos traçados no computador, ele comenta que não é possível ter certeza devido a eventuais erros cometidos pela máquina.

Entrevista G2

Francisco fala longa e detalhadamente de suas idéias durante a entrevista. Ele começa conceituando derivada por meio das retas que mais se aproximam da curva, ou que se confundem com a curva em janelas gráficas pequenas de aproximação. Ele explica que essas retas *se confundem* com a curva devido a aproximações efetuadas pelo computador, mas que na verdade elas coincidem com a curva somente no ponto de contato. Para ilustrar suas idéias, Francisco pede para usar a rotina *Melhor Reta*. Enquanto usa o organizador genérico, ele narra suas observações:

> Essa reta que está aproximando seria a secante. A derivada dá a tangente, que é a reta perfeita que se encaixa [...] eu estou usando essa palavra 'perfeita' por que ela consegue [...] quer dizer, isso é a definição de reta tangente. [...] A derivada dá a reta perfeita. Eu achei uma boa palavra. Para essa definição de derivada, quando a gente joga na fórmula, a reta que vai corresponder à perfeição disso aqui. Isso vai tender a 0 [*aponta para a diferença* $\rho(h) = f(x_0 + h) - r(h)$ *mostrada na tela*] e se isso aqui também tender a 0 [*aponta para a razão* $\frac{\rho(h)}{h}$ *na tela*] é somente a derivada. [...] A 'reta perfeita' é a reta que mais se parece com a curva, olhando uma janela bem pequena com relação àquela curva.

Em seguida, o estudante deixa o computador de lado e continua falando:

> Agora eu estou entendendo melhor aquelas fórmulas. Eu entedia [...] as duas coisas separadamente, isso aqui, que é o conceito, e a utilização das fórmulas, a parte de cálculos. Agora eu já entendo como as fórmulas vêem dessa definição aqui. Não que eu saiba assim [...] se eu fosse tentar, acho que não ia saber fazer tudo direitinho, mas já entendi como é o processo.

Francisco prossegue mencionando algumas idéias já citadas em outras entrevistas. Ele compara novamente traçar retas tangentes com equilibrar uma reta sobre a curva como em uma balança, afirma inexistência de derivada ligada à impossibilidade de se equilibrar uma reta sobre a curva e que para uma função não diferenciável existiria uma reta tangente única. O estudante fala consideravelmente também da importância histórica do conceito de derivada, proveniente de suas aplicações à física. Por exemplo, ele comenta:

> A importância que eu vejo em derivada é justamente a história como ela foi descoberta. [...] Tem dois caras que pesquisaram ao mesmo tempo, mas eu me liguei mais na história de Newton porque ele bolou essa parte para resolver os problemas de física. [...] E o que que acontece, na verdade, o tempo todo para a gente dar uma resposta exata para o movimento, para todos os fenômenos físicos, principalmente de mecânica, dinâmica, é com a derivada. Por que a velocidade de um carro não é constante, os nossos movimentos não são movimentos tratados por retas e sim por curvas. Então se a gente quiser analisar o movimento num determinado instante, é super importante conhecer a derivada.

Em virtude desta fala de Francisco, pedimos mais esclarecimentos sobre o que ele queria dizer com 'a descoberta da derivada'. Ele responde:

> Não, a derivada não é uma invenção. Ela sempre existiu, só que foi descoberta. Exatamente, acho que essa é a melhor palavra. Sempre existiu uma velocidade instantânea, sempre existiu. [...] Existiu, assim, sempre existiu uma maneira de se descobrir a velocidade instantânea de um determinado corpo. E essa maneira para se descobrir é calculando a derivada.

Ao final da entrevista, pedimos que Francisco falasse livremente de toda a experiência. Sua fala demonstra uma avaliação positiva. Por exemplo, ele comenta:

> Esse método é muito interessante para mim, eu gosto de investigar os problemas. Então é legal a gente olhar no computador, às vezes procurar pelo furo do computador, e olhar a mesma coisa de vários ângulos. Quando a gente muda a janela por exemplo, a gente vê a função de vários ângulos. Isso ajuda a entender mais, dá várias informações, inclusive comparando com a própria fórmula.

Evolução de imagem de conceito

Francisco apresenta uma imagem de conceito rica. Ele demonstra em suas falas uma diversidade de idéias sobre derivadas. Suas idéias variam desde interpretações geométricas e físicas a importância histórica do conceito. Além disso, o mapa de evolução de discurso é consideravelmente estável. Algumas idéias fortes estiveram presentes nas três entrevistas genéricas: a idéia de reta tangente como a reta que melhor aproxima a curva, a relação geométrica entre retas tangentes e equilíbrio, a relação entre inexistência da derivada e inexistência de uma reta tangente única. A consciência das limitações do computador, provenientes de aproximações e arredondamentos, também se manteve estável ao longo das entrevistas. Observamos um único efeito de reconstrução, quando Francisco afirma na entrevista T2 já haver entendido a relação entre as fórmulas e definição de derivada.

G0	G1	G2

A reta tangente, dada pela derivada, é a que mais se parece com a curva perto do ponto, e que coincide com ela quando esta é ampliada no computador.

Traçar uma reta tangente e tentar equilibrar uma reta sobre a curva como em uma balança.

Funções não deriváveis são aquelas que não possuem uma reta tangente única em cada ponto.

O conceito de derivada não tem relação aparente com as fórmulas de derivação.

As fórmulas de derivação decorrem da definição.

A importância da derivada vem da sua história e de sua aplicação à física.

Derivada é uma descoberta, não invenção.

Resultados errôneos do computador são devidos a aproximações e arredondamentos.

Figura 5.5: Mapa de evolução de discurso sobre derivada de Francisco.

5.3.2 Análise das entrevistas baseadas em tarefas

Bloco TI

Entrevista T1 Francisco afirma, olhando para a fórmula da função, que ela deveria ser derivável, e que portanto o 'bico' mostrado na tela do computador não seria na realidade um bico, mas uma curva suave. Ele aproxima o rosto da tela do computador e, sem mudar a janela gráfica, comenta:

> Visualmente, no visual, ali não é o bico, então, teria derivada. Estou falando em termos visuais. Agora vamos falar algebricamente.

Ele olha novamente para a expressão algébrica e verifica que seria possível aplicar as fórmulas usuais de derivação, logo a função tem que ser derivável. Em seguida, Francisco volta a atenção para a tela do computador e efetua o 'zoom'. Ao ver a nova imagem, ele comenta:

> É, parece uma parábola. Dando um zoom aí, você percebe nitidamente como é que ela é derivável.

Francisco conclui desta forma a tarefa proposta. Entretanto, ele se engaja espontaneamente em uma segunda investigação. Ele observa que, mesmo na nova janela gráfica, em que o aparente 'bico' havia desaparecido, o gráfico parece ser formado por duas semi-retas unidas (suavemente) por uma curva nas proximidades do ponto $(0, 1)$, embora a expressão algébrica da função não seja, aparentemente a equação de uma reta. Ele comenta:

> Agora está aí, uma boa questão. [...] A fórmula não parece de uma reta. Mas isso aqui [*aponta para o trecho do gráfico que parecia ser uma semi-reta*] tende a ser uma reta, mas não é uma reta? [...] Aí, agora, me pegou!

Depois de pensar alguns segundos, Francisco exclama:

> Espera! Eu sei que é derivável! Deixa eu ver. Eu sei que ela é derivável. [...] Aí, eu vou ter que derivar ela para pensar se é uma reta ou não.

O estudante calcula a derivada corretamente, obtendo o resultado $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Ele conclui, que a derivada não é constante em nenhum intervalo, a função não pode ser linear em nenhum intervalo:

> Olha! Essa função é derivável, mas vai ter uma inclinação diferente para cada ponto. Não é como a função módulo que não é derivável no ponto $(0, 0)$, mas que tem a mesma derivada do lado x positivo e mesma derivada do lado x negativo para todos os pontos. Essa função não, ela vai se aproximar no $+\infty$ e $-\infty$ da função $|x|$. Vai se aproximar, mas para cada ponto vai ter uma derivada diferente.

Ele ainda explica em que sentido a função h se aproxima da função módulo:

> Entendo por que. Vamos colocar um x bem grande, um $x = 100$. Se fosse a função $\sqrt{x^2}$, seria $\sqrt{100^2}$. Mas qual é a diferença entre $\sqrt{100^2}$ e $\sqrt{100^2 + 1}$? É muito pequena. E quanto maior for o x, menor vai ser essa diferença, ou seja, ela vai tender a encostar nessa reta, que é a $\sqrt{x^2}$.

Verificamos que Francisco vivenciou duas situações conflito, ambas espontaneamente. Na primeira, ele percebe que o aparente 'bico' mostrado na tela não seria compatível com a expressão algébrica da função. Como ele está convencido de que a função seria derivável, não experimenta qualquer confusão ou dúvida. Mesmo assim, esta primeira situação de conflito o motiva a compreender mais profundamente a relação entre as descrições computacional e algébrica. De fato, ele alterna sua atenção entre as duas descrições diversas vezes antes de confirmar finalmente sua afirmação inicial sobre a diferenciabilidade de h. Na segunda situação de conflito, Francisco propõe a si mesmo uma questão: *o gráfico seria formado por semi-retas ou não*? Ele fica inicialmente em dúvida e estabelece uma estratégia algébrica para concluir: *se a derivada de uma função não é constante em um dado intervalo, a função não pode ser linear no intervalo.*

Entrevista T2 No começo do processo de magnificação local, Francisco comenta:

> Na verdade eu estou vendo uma figura que parece uma reta, mas não é. É um pedaço da parábola, também do primeiro quadrante porque o computador não está mostrando desde o 0 aqui. [...] Mas vai tendo uma semelhança, vai ficando parecido com uma reta. [...] Vamos botar mais um 0 [*isto é, aumentar o número de casas decimais do intervalo de visualização*]. Continuo vendo uma coisa que parece mais ainda com a reta do que era antes.

Ele prossegue dizendo que espera ver algo cada vez mais semelhante a uma reta. Quando a imagem começa a mudar de aspecto, ele demonstra surpresa e comenta:

> Era para continuar aparecendo aquela reta. [...] O computador não enxerga alguma coisa, é isso? [...] Ele pega os pontos e liga. Então isso ficou assim porque foi o que ele conseguiu calcular foi esse ponto [*aponta para a tela*], o outro e ligou. Por isso que não fica aquela reta com a inclinação, que seria o que a gente deveria ver. [...] Agora que eu entendi o que aconteceu. Conforme nós vamos diminuindo o intervalo, na verdade ele vai pegar os dois pontos e vai unir. Quando ele pega dois pontos no intervalo pequeno e une, erroneamente ele faz o gráfico que não deveria fazer.

O conflito ocorreu espontaneamente, provocou surpresa em Francisco, foi compreendido rapidamente, não levou a mudanças de estratégia ou opinião e serviu para fortalecer a compreensão de Francisco das limitações computacionais.

Entrevista T3 Francisco começa a entrevista falando longamente de sua concepção da função blancmange:

> Você não conseguiria traçar nenhuma micro retinha ligando um ponto ao outro que batesse num terceiro ponto. [...] Você não teria como equilibrar a reta ali, vamos dizer assim. Tipo assim, por exemplo, quando você tem uma parábola, você vem na tangente. [...] Porque se você curvar um pouquinho [...] você traça a tangente num determinado ponto. Se você inclinar ela um pouquinho, você já vai tornar ela uma secante, não tornar ela uma tangente. Exatamente

> ela tem que ficar rígida naquela posição para ser tangente. Aqui, você pode conseguir até traçar uma reta que passe num pontinho só. [...] Só que ela vai ficar bamba. É isso que eu enxerguei nessa função. Por isso ela não é derivável.

O estudante prossegue, comparando com a função módulo, e menciona espontaneamente a magnificação local:

> Na função módulo é fácil de ver, porque é só um ponto, aí você vê como se fosse uma balança ali, no bico de uma balança. [...] E a reta, você puxando ela para o lado esquerdo, puxando ela para o lado direito, tal. Assim, como se botasse um pesinho de um lado e do outro, ela ficaria, como numa balança. Ela não equilibraria, ficaria bamba. Aqui, é mais difícil de ver, porque na verdade você tem como traçar uma reta que passa só por um pontinho aqui. Só que, se você der um leve toquezinho nela para o lado ou para o outro, botar um pesinho assim em cada lado, ela já encostaria no outro ponto. É uma coisa muito mais sutil que na função módulo. Mas, se você aumentar, botar uma lente de aumento, no fundo é a mesma coisa.

Perguntamos em que sentido seria a mesma coisa, uma vez que até então, Francisco falava sobre a *diferença* entre a blancmange e a função módulo. Ele continua com a idéia de equilíbrio:

> Na verdade essa função lembra bem realmente um montanha toda irregular. [...] É como se você pegasse uma tora muito grande, uma tora bem grossa e quisesse fazer ela uma tangente numa montanha toda irregular. Você também teria essa mesma dificuldade que tem aqui. Só que na função seria só num ponto e aqui nela toda.

Quando o computador mostra a poligonal, Francisco comenta que ela deveria parecer toda irregular e não somente com alguns bicos. Explicamos o processo de truncamento da série geradora da blancmange. Francisco não se mostra surpreso e comenta:

> Ah, sim, tudo bem. Isso já era de se esperar mesmo. O computador tem a precisão dele, ele não consegue fazer nada que tenha o infinito.

Assim, nesta entrevista o conflito é espontâneo, é compreendido imediatamente por Francisco, mas não afeta ou altera suas opiniões anteriores. Ele atua para fortalecer a visão de Francisco das limitações computacionais.

Bloco TII

Entrevista T4 Francisco desenha os gráficos de g_1, g_2 e g_3 no papel, identificando corretamente os pontos de descontinuidade e as assíntotas horizontais, verticais e inclinadas. O estudante afirma que o gráfico de g_1 ficará semelhante a uma reta horizontal quando traçado com um intervalo horizontal grande. Em seguida, ele executa a experiência no computador e explica o observado:

> A gente está colocando de -10.000 a $+10.000$ no eixo x, a gente vai ter exatamente o que eu falei agora a pouco, aquela sensação de que o gráfico é uma linha horizontal paralela ao eixo x passando pelo 1, porque a parte vertical dele estaria em cima do eixo y. [...] Existe uma assíntota horizontal de valor 1 e a gente foi comprimindo essa separação, de um lado e do outro com esse aumento de escala. Então na verdade acabou que colou o gráfico. Tanto a assíntota para esquerda quanto para direita têm o mesmo valor, por isso bateu. Se tivesse valores diferentes, acho que a gente ia ter duas retas.

De forma semelhante, Francisco prevê que o gráfico de g_2 ficará parecido com uma reta inclinada. Ele comenta longamente a experiência observada no computador:

> A parte do gráfico em que a gente tinha a assíntota vertical no valor $x = 1$, como a gente aumentou muito a escala, esse 1 ficou bem colado ao 0, a gente não vê essa parte, vamos chamar assim, a parte vertical do gráfico junto à assíntota 1, porque ela está coincidindo com o eixo do y. E a outra parte, que é quando x tende para $+\infty$ e quando x tende para $-\infty$, a gente tem a sensação que se transformou numa reta justamente também pelo grande aumento da escala de y. E uma coisa interessante é que parece ser uma reta só, porque ela se comporta da mesma maneira. Quando x vai para $+\infty$, ela vai para $+\infty$, e quando x vai para $-\infty$, ela também vai para $-\infty$. Porque se ela se comportasse diferente, a gente não teria a sensação de uma reta cruzando o ponto $(0, 0)$ e sim duas retas, uma chegando no $(0, 0)$ e outra saindo com outra inclinação.

No caso de g_3, o fato de ambos os limites quando x tende a $+\infty$ e quando x tende a $-\infty$ serem iguais a $+\infty$, leva Francisco a supor que, em uma janela gráfica afastada, o gráfico se pareceria com duas semi-retas partindo da origem, sendo uma com inclinação positiva e outra com inclinação negativa. Ele inclusive vai mais longe e formula a seguinte conjectura: *Se n é par, o gráfico de $\frac{x^n}{x-1}$ em janelas gráficas grandes ficará parecido com uma reta. Se n é ímpar, o gráfico de $\frac{x^n}{x-1}$ em janelas gráficas grandes ficará parecido com um par de semi-retas com inclinações opostas. Em ambos os casos, quanto maior for n, maior será a inclinação das retas.*

Ao ver que a função se assemelha a uma parábola no computador, o estudante se mostra muito surpreso e confuso. Ele passa então a buscar uma janela gráfica em que a curva fique parecida com uma reta. Francisco tenta verificar sua conjectura, trabalhando com g_3 e com outras funções racionais na forma $\frac{x^n}{x-1}$. Depois de muito tentar sem sucesso, o estudante desiste da estratégia e põe-se a estudar a expressão algébrica da sua família de funções. Depois de algum tempo, ele exclama:

> Ah, não era nada daquilo! Porque quando tende a $+\infty$, em baixo você pode desprezar o [...] você pode desprezar o -1. Então a gente vai ficar com $\frac{x^n}{x}$, que vai dar como resultado x^{n-1}. Eu estou entendendo assim isso.

Finalmente, ele verifica sua nova conjectura no computador. Nesta entrevista, Francisco experimentou espontaneamente uma situação de conflito que causou grande confusão. O conflito levou-o a se engajar em um processo investigativo que culminou com a refutação de uma conjectura e a formulação e verificação de uma nova em seu lugar: *O gráfico de* $\frac{x^n-1}{x}$ *em janelas gráficas grandes ficará parecido com o de* x^{n-1}.

Entrevista T5 Francisco desenha os gráficos de f_1, f_2 e f_3, identificando corretamente os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. Ao ver os gráficos de f_1 e f_2 na tela do computador, ele explica imediatamente:

> Na primeira está aparecendo a assíntota e na segunda não está aparecendo a assíntota. [...] O computador está colocando o gráfico erroneamente na primeira função, que ele está fazendo a assíntota fazer parte do gráfico.

Em seguida, incluímos o comando 'discont=true' e explicamos sua função. Francisco comenta que, com a análise algébrica, o computador 'percebe' a descontinuidade. Passamos então a examinar o gráfico de f_3 no computador. Francisco comenta a ausência da indicação da descontinuidade e questiona qual seria o efeito de comando 'discont=true':

> Ele só não ressalta onde é [...] que tem aquele ponto que não existe na função, a descontinuidade da função. [...] Se você botar daquela outra maneira vai aparecer isso?

Ao ver que o computador não indica a descontinuidade mesmo com a inclusão do comando, ele comenta que mesmo assim o computador é incapaz de representar a descontinuidade. Quando indagamos se as funções eram contínuas e se elas eram melhor representadas pelo gráfico traçado por ele ou pelo traçado pelo computador, Francisco responde:

> O meu, que eu desenhei no papel, porque eu deixo claro a descontinuidade da função. E o computador, burramente, constrói a função com a descontinuidade como se ela não existisse, porque o computador liga os pontos. Depois dele construir ponto a ponto, ele liga todos eles. Esse é o motivo que não aparece a descontinuidade nesse gráfico $\frac{x^2-1}{x-1}$. E é também voltando à explicação daquela da assíntota [...] fazia parte do gráfico [...]como se a assíntota fizesse parte do gráfico. Mas isso aí não é culpa da gente, é do computador!

Ocorreram dois conflitos nestas entrevista: quando Francisco observou que o computador mostrava a reta vertical para a primeira função, mas não para a segunda; e quando ele observou a ausência do ponto de descontinuidade no gráfico de f_3. Em ambos os episódios, o conflito foi espontâneo, foi imediatamente compreendido por Francisco e não alterou as estratégias ou opiniões do estudante sobre a tarefa. Tanto antes quanto depois dos conflitos, ele se baseou na expressão algébrica e no gráfico traçado no papel para concluir sobre a continuidade das funções. As situações de conflito serviram ainda para reforçar a consciência de Francisco das limitações do computador.

Entrevista T6 Francisco começa investigando o comportamento de ambas as funções no computador:

> O que dá para ver aí pelo computador é que a função que é multiplicada, o sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ que é multiplicado por x^2, ela toma um aspecto assim de parábola, acima do gráfico e abaixo do gráfico, que tem a ver, porque está sendo multiplicado por x^2, que tem como gráfico uma parábola. E a u_1 toma o aspecto de duas retas concorrentes, que também tem a ver, porque está sendo multiplicada pela $f(x) = x$, que o gráfico é uma reta. E por que x^2 para os dois lados? Porque o seno varia entre -1 e 1. Agora, se a derivada existe no 0, não sei te dizer. Nos outros pontos, sim é derivável, porque são várias [...] são as oscilações do seno. Agora ali no 0 eu não sei te dizer.

Depois de algum tempo tentando, ele afirma não saber se as funções possuem ou não derivada no ponto 0, nem por meio do computador, nem por meio da expressão algébrica. Em particular, não houve situação de conflito nesta entrevista, uma vez que Francisco não manifestou nenhuma intuição sobre a função.

Evolução de episódios de conflito

O comportamento de Francisco nas entrevistas baseadas em tarefas é regular. À exceção da entrevista T6, em que não acontecem situações de conflito, em todas as ocasiões os conflitos ocorrem espontaneamente e são freqüentemente compreendidos com rapidez pelo estudante. Somente na entrevista T4 ele reage com dúvida e confusão acentuada. Porém, em todas as situações, mesmo aquelas em ele não demonstra ter dúvidas, Francisco segue estratégias semelhantes: ele procura entender cada situação de vários pontos de vista, baseia suas conclusões em argumentos algébricos e atribui as contradições aparentes às limitações de aproximação do computador.

	ORIGEM	REAÇÕES	EFEITOS
T1	*Conflito:*	*A função h é diferenciável, mas no computador parece não ser.*	
	espontâneo	compreensão imediata	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais motivação para uma nova questão
	Conflito:	*A o gráfico da função h parece não ser formado por retas para x longe da origem.*	
	espontâneo	dúvida	utilização da idéia: *se a derivada de uma função não é constante em um dado intervalo, a função não pode ser linear no intervalo.*
T2	*Conflito:*	*A parábola é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece não ser.*	
	espontâneo	surpresa compreensão imediata	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
T3	*Conflito:*	*A função blancmange não é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece ser.*	
	espontâneo	compreensão rápida	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
T4	*Conflito:*	*O gráfico de g_3 não fica parecido com um par de semi-retas em janelas gráficas grandes.*	
	espontâneo	confusão forte dúvida	refutação de uma conjectura e formulação e verificação de uma nova idéia: *O gráfico de $\frac{x^n-1}{x}$ em janelas gráficas grandes ficará parecido com o de x^{n-1}.*
T5	*Conflito:*	*O computador exibe a 'assíntota' para f_1, mas não para f_2.*	
	espontâneo	compreensão imediata	reforço da consciência e crítica de limitações de descrições computacionais
	Conflito:	*O computador não indica a descontinuidade de f_3.*	
	espontâneo	compreensão imediata	reforço da consciência e crítica de limitações de descrições computacionais
T6	*Ausência de Conflitos:*	*Francisco não tem qualquer intuição sobre a diferenciabilidade das funções.*	

Figura 5.6: Mapa de evolução de episódios de conflito de Francisco.

Na entrevista T1, as investigações de Francisco conduzem à formulação de uma segunda questão e à busca de sua resposta. Na entrevista T4, única ocasião em que o estudante se mostra confuso, suas investigações o levaram a refutar sua hipótese inicial, formular e verificar a veracidade de uma nova.

A entrevista T6 é a única em que Francisco não tem um comportamento consistente com o padrão: ele não percebe o conflito, mesmo quando induzido e não se mostra disposto a buscar a resposta da tarefa muito demoradamente. Em nossa interpretação, como este comportamento difere significativamente do padrão de Francisco, ele é provavelmente devido à dificuldade excessiva da tarefa, ou fatores subjetivos particulares como cansaço ou distrações ocasionais.

5.3.3 Comparação de resultados

Observamos a estabilidade de idéias fundamentais no mapa de evolução de discurso de Francisco: reta tangente como melhor aproximação, interpretação de retas tangentes como equilíbrio, relação entre diferenciabilidade e unicidade de retas tangentes, limitações do computador como efeitos de aproximações. As mudanças observadas são a reconstrução da visão da relação entre definição e fórmulas e a inclusão das idéias de relevância histórica e física. Não encontramos evidências de que tais mudanças estejam diretamente relacionadas com a vivência de conflitos. Isto é, não encontramos evidências de que a vivência de conflitos hajam afetado significativamente a imagem de conceito de Francisco.

Por outro lado, isto não quer dizer que as experiências tenham sido inócuas para Francisco. Segundo nossa interpretação, a razão pela qual não foram observados efeitos significativos é o fato de que a vivência de conflitos é compatível com a (saudável) atitude investigativa natural do estudante. De fato, ao avaliar sua própria experiência no final do processo, Francisco fala com excitação e entusiasmo, narrando o quanto a experiência foi interessante. Em todas as entrevistas baseadas em tarefas (exceto T6), Francisco demonstra interesse e se envolve com a tarefa proposta, particularmente em T1 e T4. Portanto, é razoável supor que a vivência de conflitos haja atuado como incentivo para a atitude natural de Francisco – que poderia ser inibida por uma abordagem pedagógica que não a valorizasse.

5.4 Júlio

> *Às vezes uma função que você não tem nem idéia do que vá acontecer, você no computador consegue fazer experiências, você pode virar ao contrário e de cabeça para baixo.*
>
> Júlio, entrevista G2

5.4.1 Análise das entrevistas genéricas

Entrevista G1

Na entrevista G1, Júlio mantém sua postura de respostas diretas e sem hesitação, da mesma forma que na entrevista G0. A idéia de derivada como função ainda aparece fortemente:

> Diferenciável é a função que todos os valores do domínio dela, com exceção das descontinuidades, tem uma derivada correspondente, um valor associado à derivada. E função não diferenciável é que alguns valores do domínio, [...] não tem essa derivada associada.

Ele completa citando a função módulo e a ocorrência de bicos, como exemplo de não diferenciabilidade. Sobre o reconhecimento de funções diferenciáveis a partir de expressões algébricas, ele insiste na idéia de derivada como função, afirmando que seria necessário verificar se existiria uma função derivada. Sobre o reconhecimento a partir de gráficos traçados no computador, Júlio explica a diferença de comportamento local:

> Se você tem a função módulo, aí quando você der 'zoom' você vai ver aquele mesmo desenho sempre. Na diferenciável, não, o desenho vai se aproximar de uma reta.

Ele também chama atenção para a possibilidade de erros computacionais de aproximação e arredondamento afetarem a correção dos resultados fornecidos pela máquina:

> Às vezes, quando a aproximação é muito pequena, ele [*o computador*] liga os pontos de qualquer maneira e o desenho sai errado. Então às vezes ele pode dar uma resposta errada, ele não consegue diferenciar a curva.

Júlio comenta ainda a importância das aplicações de derivada à física.

Entrevista G2

Júlio é consistente com a idéia de derivada como função:

> É o coeficiente angular da reta. [...] Não, espera aí. [...] É uma função que me dá os valores do coeficiente angular da reta tangente num determinado ponto.

Ele também insiste na importância das aplicações à física:

> Na física, derivada de velocidade é aceleração, derivada de espaço é velocidade. Tem muitas utilidades.

Quando indagado sobre o computador ele discorre longamente (ao contrário do seu padrão usual de respostas). Ele afirma que a aproximação local de curvas diferenciáveis por retas pode ser visualizada pelo processo de magnificação local. Ele comenta ainda, por exemplo:

> O que eu acho maneiro assim [...] Às vezes uma função que você não tem nem idéia do que vá acontecer, você no computador consegue fazer experiências, você pode virar ao contrário e de cabeça para baixo. Aí dá para você ter uma noção do que vai acontecer. Você consegue ver o que está acontecendo, pelo menos na maioria das funções. Então o computador ajuda a entender melhor as coisas, dá uma compreensão mais global.

No entanto, ele chama atenção para o cuidado com os erros de arredondamento e interpolação do computador. Por exemplo, ele cita uma experiência vista anteriormente na entrevista T5:

> Legal, mas eu só confio [...] como é que eu vou dizer [...] Eu só confio no computador, mas usando a teoria que eu conheço. [...] Por que o computador é falho também, como em um montão de vezes que a gente viu aí. Como naquela hora, tem uma curva para cima, uma para baixo, ele liga a reta vertical pensando que faz parte do gráfico mas não faz. Então tem que usar o computador, assim para fazer experiências, mas continuar usando a teoria também.

Evolução de imagem de conceito

Júlio apresenta estabilidade de suas principais idéias sobre derivadas: derivada como função, aproximação local por retas, importância das aplicações à física. Estes aspectos são consistentes ao longo das três entrevistas genéricas de Júlio. Ele insiste particularmente na idéia de derivada como função e demonstra uma preocupação com a correção deste enunciado, como pode ser exemplificado pela fala do estudante na entrevista G2.

A menção a erros computacionais de aproximação e arredondamento também se repete nas três entrevistas. A evolução da concepção de Júlio sobre a relação entre o computador e os resultados matemáticos é um aspecto relevante de sua imagem de conceito. Na entrevista G0, sua consciência de tais erros não o impede de afirmar que o computador pode ser usado como *critério de correção de resultados matemáticos*. Já em G1, ele comenta que os erros computacionais podem afetar os resultados matemáticos produzidos pela máquina. Finalmente em G2, Júlio afirma que a confiabilidade dos resultados do computador está sujeita à verificação *pela teoria matemática* – precisamente o oposto do que ele havia afirmado em G1. Identificamos este processo como uma reformulação seguida por uma reconstrução, como ilustra o mapa de evolução de discurso do estudante.

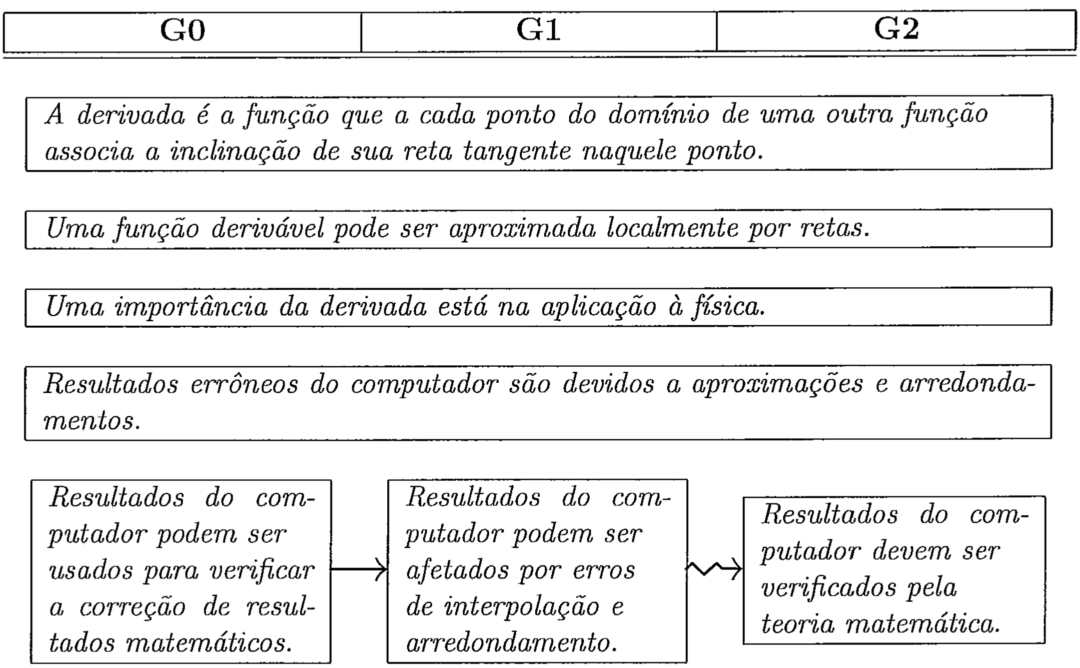


Figura 5.7: Mapa de evolução de discurso sobre derivada de Júlio.

5.4.2 Análise das entrevistas baseadas em tarefas

Bloco TI

Entrevista T1 Júlio começa afirmando:

> Eu acho que é o seguinte. Era uma coisa de grau 2, aí você tirando a raiz quadrada, aí o grau está ficando 1. Vai tender a ficar retas.

Perguntamos se a função era ou não diferenciável. Ele responde:

> Como eu vou tirar a raiz quadrada, quando eu tirar a raiz vai ser módulo daquilo que vai sair. Aí, como a função módulo tem bico [...] por isso essa aí vai ter também.

O estudante começa então a tentar eliminar a raíz quadrada da expressão algébrica da função. Mesmo sem conseguir, ele insiste nesta estratégia longamente e segue tentando, sem sucesso, eliminar a raíz. Perguntamos por diversas vezes se Júlio estava seguro da existência do 'bico', e se não havia nada de contraditório, ao que ele responde que sim com muita firmeza. Finalmente ele desiste de eliminar a raiz quadrada, mas mantém a opinião de que a função não seria diferenciável em $x = 0$ e que ele não havia conseguido simplificar a função devido a sua própria inabilidade algébrica.

Nesta entrevista, não ocorreu conflito, já que Júlio não reconheceu qualquer inconsistência entre o gráfico e a expressão algébrica, mesmo quando induzido nesta direção.

Entrevista T2 Júlio afirma que espera ver a tangente no ponto 1. Quando o computador mostra a imagem irregular, ele explica imediatamente a razão do resultado inesperado:

> Agora a reta não está tão reta. Eu acho que é por que o computador não está reconhecendo. A aproximação, está muito pequeno. Ele não está mais conseguindo diferenciar a curva.

Ele diminui um pouco mais a janela gráfica e prossegue:

> Mais ainda. [...] Como ele liga os pontos somente e a aproximação está muito pequena, o desenho está saindo deformado.

Neste caso, a situação de conflito foi espontânea, não provocou surpresa ou dúvida, não levou a mudanças de estratégia ou opinião e reforçou a consciência de Júlio nas limitações do computador.

Entrevista T3 Júlio começa a entrevista afirmando não haver entendido bem o processo de construção da função blancmange:

> Por que que quando você vai somando os módulos [...] os bicos não somem?

Pedimos que Júlio esclarecesse melhor sua dúvida, ao que ele responde:

> Quando eu somo funções qual é a tendência do desenho? Vamos supor, eu tenho uma curva assim [*ele faz um movimento com a mão indicando uma curva*] e um bico. Aí eu somo essa duas funções. Que que vai dar mais ou menos? Não sei. [...] Seriam duas curvas. [...] Uma curva assim e uma assim, uma parábola, por exemplo. Aí eu somo, o que que vai dar? Por que que não poderia dar uma reta?

Assim, Júlio crê que a soma de funções teria um efeito suavizador nos seus 'bicos'. Ele explica que, em virtude deste fato, ele espera ver cada vez menos bicos, quanto maior for o número de parcelas da soma. Desta forma, a imagem de uma poligonal mostrada pelo computador no processo de magnificação local da blancmange *não é* incoerente com a concepção de Júlio. Ele comenta que é justamente isto que ele espera enxergar. Portanto, não ocorrem conflitos nesta entrevista.

Bloco TII

Entrevista T4 Júlio faz os desenhos dos gráficos de g_1, g_2 e g_3, identificando corretamente os pontos de descontinuidade e todas as assíntotas. Ao observar a função g_1 adquirindo a aparência da reta horizontal, ele explica:

> A medida que o intervalo vai aumentando, a descontinuidade tende a sumir. Aí, primeiro ela fica na mesma linha, a descontinuidade do y. Depois que você aumenta mais, fica só uma linha horizontal. É por causa da assíntota horizontal. Dos dois lados tende a ficar a 1.

Quanto perguntamos o que Júlio esperava ver ao afastar a janela gráfica da função g_2, ele afirma:

> Vai aparecer a reta $y = x$ ali, como assíntota inclinada.

Perguntamos a razão de sua afirmativa. Ele explica:

> Dividindo x^2 por $x - 1$, o quociente é sempre a assíntota. Aí, vai dar a reta x.

Da mesma forma, ele prevê corretamente que o gráfico de g_3 ficará semelhante a uma parábola. Assim, não ocorreram conflitos nesta entrevista, pois os resultados coincidiram com as expectativas do estudante.

Entrevista T5 Júlio desenha os gráficos de f_1, f_2 e f_3, identificando corretamente os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. Ao desenhar os gráficos no computador, ele comenta que a assíntota vertical deveria estar aparecendo também no gráfico de f_2. Perguntamos se ele saberia explicar o motivo deste fato. Júlio faz algumas suposições vagas e depois diz não saber. Lembramos então a ele que o computador traça gráficos ligando pontos. O estudante exclama:

> Ah, está certo! No gráfico f_1, uma parte é para baixo e a outra é para cima. Aí, ele entende que aquilo dali [...] o computador entende que aquilo dali é uma reta. Aí, por isso que ele desenha a assíntota. Quer dizer, eu nem posso dizer que seria uma assíntota. No outro, como estão os dois para cima, o computador não desenha.

Depois de incluir o comando 'discont=true', Júlio explica o ocorrido:

> Como ele analisou a descontinuidade, ele viu que a função não pode passar por 1. Então deixou de traçar a reta em f_1. Em f_2 já não traçava mesmo.

No caso de f_3, Júlio observa que o computador não indica a descontinuidade mesmo com o comando 'discont=true'. Ele explica imediatamente:

> É por causa disso, como é só um ponto da reta, que tem infinitos pontos, um muito perto do outro, aí o computador não reconhece, mesmo pedindo para analisar a descontinuidade.

Júlio experimenta duas situações de conflito espontaneamente. Na primeira, ele verifica que a assíntota vertical de f_2 não é mostrada enquanto, segundo ele, esta deveria estar presente. Júlio se mostra um pouco confuso inicialmente, mas compreende sem dificuldade a razão do conflito com nossa explicação. Na segunda situação, o estudante observa que o computador deixa de indicar o ponto de descontinuidade de f_3. Neste caso, ele compreende imediatamente o conflito. Em ambas as situações, o conflito atua reforçando a compreensão de Júlio sobre limitações dos algoritmos computacionais.

Entrevista T6 Júlio afirma que u_1 não tem derivada em $x = 0$. Ao perguntarmos por que, ele responde, olhando para a tela do computador, que a função está oscilando muito perto de 0. Perguntamos então se ele achava que a função teria derivada em outros pontos do domínio. O estudante responde:

> Esses bem próximos? [...] Ah, pelo desenho parece não ter derivada. [...] Mas eu acho que tem.

Perguntamos então por que ele achava isto. Júlio responde:

> Por que x sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ tem como derivar. O problema seria só no 0, que é uma definição isolada.

Ao indagarmos por que então o computador dava a impressão da função não ter derivada em pontos próximos de 0, ele explica que o efeito seria devido à oscilação elevada de sen $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Passamos então a analisar u_2. Júlio afirma que o comportamento da função seria provavelmente o mesmo de u_1: a função seria não derivável somente no ponto 0, embora a imagem na tela dê a impressão de ela não ser derivável no 0 e também no pontos próximos. No entanto, ele diz não estar totalmente certo da afirmativa neste caso. O estudante começa então a pensar na resposta, faz algumas afirmações sobre o crescimento da função $y = x^2$ e altera a janela gráfica algumas vezes. Depois de alguns minutos, ele afirma:

> x^2 e sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ [...] É como se o x^2 estivesse quebrando o efeito do sen $\left(\frac{1}{x}\right)$. Aí, impedindo um pouco essa oscilação, que estava sendo muito brusca. [...] Ah, x^2 cresce muito rápido perto do 0 [...] e a outra também cresce rápido. Aí, quebra um pouco o efeito. [...] Apesar dela oscilar muito, ela está oscilando comprimida. Ou seja, vai ter como desenhar uma reta tangente ali. Então na verdade tem derivada em 0.

Perguntamos então qual seria o valor da derivada em 0. Júlio afirma:

> É 0, por causa do desenho que eu tô vendo. [...] Por que como ela está limitada [...] limitada não, está sendo comprimida pela função x^2, e na função x^2 a derivada em 0 é 0, então aí também vai ser 0.

Júlio experimenta espontaneamente situações de conflito em dois momentos nesta entrevista: ao observar que as imagens na tela sugerem que cada uma das funções u_1 e u_2 não seriam deriváveis em pontos próximos de 0. No caso de u_1, o conflito é imediatamente compreendido pelo estudante. No caso de u_2, Júlio fica em dúvida e finalmente conclui que a função deveria ser diferenciável inclusive no ponto 0. Neste caso, verificamos ainda que o conflito provocou uma mudança de estratégia: antes, Júlio baseava-se exclusivamente na descrição algébrica de u_2, mas depois passou a considerar a comparação das descrições algébrica e computacional. Em ambos os casos, o conflito atua como reforço de sua consciência das limitações do computador.

Evolução de episódios de conflito

Em três das entrevistas, as concepções prévias de Júlio sobre os objetos tratados não propiciaram a ocorrência de conflitos. Do ponto de vista conceitual, as três situações são consideravelmente diferentes. Na entrevista T1, o símbolo de raíz quadrada alude (erroneamente) ao estudante a idéia de não diferenciabilidade, o que o faz ficar convicto de que não há nada de contraditório em relação à descrição computacional. Sua convicção é tal, que ele nem mesmo considera a possibilidade de estudar com mais cuidado a imagem mostrada na tela, por exemplo, mudando a janela gráfica. Na entrevista T3, sua falta de familiaridade com a situação é tal, que ele não tem idéia do que esperar da experiência e, em particular, não se questiona o resultado. Em entrevista T4 o que ocorre é justamente o contrário: Júlio é tão confortável com a situação que ele prevê com precisão o que irá acontecer.

A situação da entrevista T2, por outro lado, também guarda uma certa relação de oposição com a da entrevista T1. Enquanto em T1 uma concepção errônea ofuscou para Júlio qualquer contradição, em T2 sua segurança quanto a diferenciabilidade da parábola evidenciou a contradição na imagem exibida na tela. Na entrevista T5 o participante parece estar mais atento às possíveis contradições e percebe imediatamente que a presença da reta vertical se deve a uma limitação da máquina. Ele se mostra ligeiramente confuso, mas rapidamente formula uma explicação teórica para o resultado contraditório. Esta primeira situação de conflito ocorrida em T5 parece havê-lo preparado de certa forma para a segunda. Quando Júlio percebe a ausência da indicação do ponto de descontinuidade no gráfico de f_3, ele não fica confuso em absoluto e imediatamente atribui este resultado a uma limitação do algoritmo.

Na entrevista T6, finalmente, podemos constatar que a situação que antecede imediatamente a ocorrência do segundo conflito é semelhante à situação da entrevista T1: a descrição computacional parece confirmar a suposição de Júlio de que a função u_2 não seja diferenciável. No entanto, sua reação neste caso é bastante diferente. Ele explora o gráfico exibido na tela do computador, muda a janela gráfica algumas vezes e se baseia nisto para duvidar de sua suposição inicial sobre a não diferenciabilidade de u_2 e mudar de opinião. Ele se preocupa, ainda, em buscar uma fundamentação algébrica para sua nova suposição e procura relacionar propriedades dos fatore x_2 e sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ próximo ao ponto 0.

<table>
<tr><th></th><th>ORIGEM</th><th>REAÇÕES</th><th>EFEITOS</th></tr>
<tr><td>T1</td><td colspan="3">Ausência de Conflitos: Júlio está certo da não diferenciabilidade da função e não vê qualquer incoerência no gráfico exibido no computador.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">T2</td><td colspan="3">Conflito: A parábola é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece não ser.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>compreensão imediata</td><td>reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td>T3</td><td colspan="3">Ausência de Conflitos: O gráfico mostrado no computador corresponde à expectativa de Júlio.</td></tr>
<tr><td>T4</td><td colspan="3">Ausência de Conflitos: O gráfico mostrado no computador corresponde à expectativa de Júlio.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">T5</td><td colspan="3">Conflito: O computador exibe a 'assíntota' para f_1, mas não para f_2.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>confusão leve
compreensão rápida</td><td>reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conflito: O computador não indica a descontinuidade de f_3.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>compreensão imediata</td><td>reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td rowspan="4">T6</td><td colspan="3">Conflito: A expressão algébrica da função u_1 sugere que ela seja diferenciável em todos os pontos exceto 0, mas no computador ela parece ser não diferenciável também em pontos próximos a 0.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>compreensão imediata</td><td>reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conflito: A expressão algébrica da função u_2 sugere que ela seja diferenciável em todos os pontos exceto 0, mas no computador ela parece ser não diferenciável também em pontos próximos a 0.</td></tr>
<tr><td>espontâneo</td><td>dúvida</td><td>mudança na conclusão sobre a não diferenciabilidade da função em 0
mudança de argumentação baseada na descrição algébrica para argumentação baseada na comparação das descrições algébrica e computacional
reforço da consciência de limitações de descrições computacionais</td></tr>
</table>

Figura 5.8: Mapa de evolução de episódios de conflito de Júlio.

5.4.3 Comparação de resultados

As concepções de derivada mencionadas por Júlio nas entrevistas genéricas (derivada como função, aproximação local por retas, importância das aplicações à física) não mudam significativamente ao longo do processo. Assim, não há evidência de qualquer influência da vivência de conflitos sobre essas idéias.

Os resultados sugerem que a evolução de sua concepção das limitações do computador, ao contrário, tenham sofrido forte influência das situações de conflito. O mapa de evolução de discurso do participante revela uma significativa mudança do papel do computador em seu pensamento matemático: considerados inicialmente como critério de verdade matemática, os resultados do computador passam a estar sujeitos à legitimação da teoria. Também podemos observar uma mudança marcante na evolução de episódios de conflito. Nas entrevistas T1 e T6, Júlio tem reações bem diferentes a situações semelhantes. Nas entrevistas intermediárias, ele teve oportunidade de vivenciar situações de conflito que chamaram sua atenção para o papel das limitações das descrições computacionais e aumentaram sua familiaridade com estas. Como resultado, em T6 a atitude de Júlio é de exploração tanto da descrição computacional, quanto da descrição algébrica. Ele usa a exploração da descrição computacional para buscar uma explicação algébrica e finalmente se dá conta de uma limitação da própria descrição algébrica: o fato da função ter uma definição particular para $x = 0$ sugeria que ela não fosse diferenciável neste ponto, quando na verdade ela era.

Nossa interpretação destes resultados é de que a vivência de situações de conflito haja atuado para reverter o papel atribuído por Júlio ao computador e sua atitude perante as limitações das descrições computacionais.

5.5 Marcelo

Sei lá, no computador tudo pode acontecer. Eu fico meio perdido, nunca tenho a menor idéia das coisas.

Marcelo, entrevista T3

5.5.1 Análise das entrevistas genéricas

Entrevista G1

Marcelo demonstra grande confusão e muitas dúvidas. Ele declara não saber a diferença entre funções deriváveis e não deriváveis e diz também não saber como decidir, de nenhuma maneira, se uma função é ou não diferenciável. Marcelo menciona alguns pontos tratados nas aulas e entrevistas anteriores nos quais ele tem dúvidas:

> Às vezes eu não entendo por que se eu derivar uma função, sei lá, do 4º grau, vou ter, sei lá, uma do 3º, sabe? Isso é que eu não entendo muito bem, como é que funciona isso. [...] No meu entendimento teria que dar uma função do 1º grau, sabe? Eu ainda não me liguei assim, como é que faz esse processo.

Ele afirma que a idéia de derivada está relacionada com fazer aproximações, mas diz também não estar seguro neste ponto, quando o computador está envolvido. Por exemplo, ele comenta:

> Por que que no bico não [...] por mais que você aproxima, aproxima, nunca vai se parecer com uma reta. Essa parte eu não entendi.

Entrevista G2

Nesta entrevista G2, Marcelo se limita a reafirmar sua grande dificuldade com a matéria e em particular com o computador. Ele comenta que entende derivada como aproximação, mas afirma que não entende como o computador opera essa aproximação.

Evolução de imagem de conceito

A imagem de conceito de Marcelo se compõe mais por dúvidas do que por concepções. As dúvidas citadas em diferentes ocasiões ao longo das entrevistas parecem ser desconexas e não guardam relação de evolução aparente entre si. A noção de derivada como aproximação se faz presente ao longo de todo o processo, mas mesmo esta idéia não parece estar clara para o estudante. Ele também aponta constantemente para sua grande dificuldade com o computador.

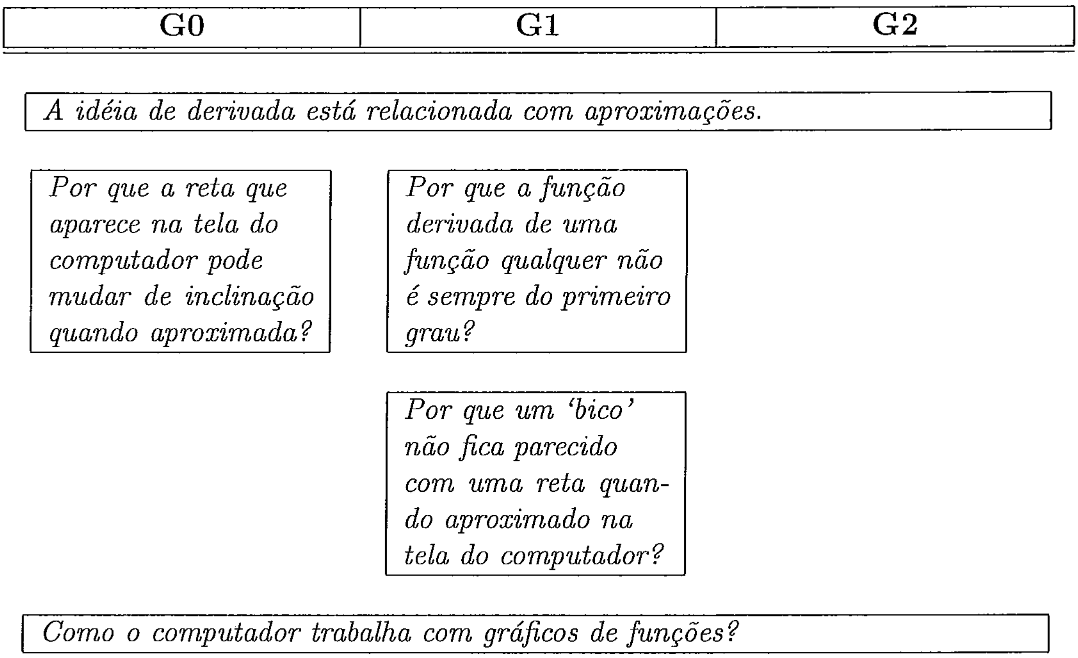


Figura 5.9: Mapa de evolução de discurso sobre derivada de Marcelo.

5.5.2 Análise das entrevistas baseadas em tarefas

Bloco TI

Entrevista T1 Marcelo responde à pergunta, simplesmente afirmando que a função tinha derivada, sem qualquer justificativa espontânea para este fato. Quando perguntamos por que, ele responde:

> Porque eu imaginei. [...] Eu já derivei aquela outra, até que a gente estava fazendo. [*ele se refere a exercícios feitos em sala de aula*] Com alguma coisa dentro da raiz. [...] Aí, imaginei que essa aí também poderia ser, só por isso.

Perguntamos, então, se ele não via nada incoerente no gráfico. Marcelo responde:

> Eu nem tinha prestado atenção no gráfico. Agora é que eu fui olhar. E daí?

Perguntamos diretamente se, em sua opinião, o gráfico não sugeriria que a função não teria derivada, ao que o estudante responde:

> Olhando para o gráfico, o estilo é do módulo. [...] Aí não sei, também não estou entendendo por que ela está assim.

Marcelo não demonstra interesse em entender por que o gráfico poderia ter aquele aspecto e reafirma que a função deveria ser derivável porque não havia nada 'estranho' na fórmula. Nesta entrevista, Marcelo experimentou uma situação de conflito de forma induzida e reagiu com indiferença. O conflito não motivou qualquer mudança de estratégia ou nova idéia.

Entrevista T2 Marcelo afirma que espera ver uma reta no processo de magnificação local da parábola, de forma semelhante a experiências que haviam sido feitas muitas vezes em sala de aula. Quando o programa começa a exibir uma poligonal, ele comenta:

> Sei lá, era para ver uma reta, eu acho. [...] Mas eu nunca entendo o que rola no computador.

Explicamos, então, que aquele resultado se devia a erros de interpolação da máquina. Entretanto, Marcelo não demonstra haver entendido a explicação – ou, melhor dizendo, ele não demonstra sequer haver tentando entender. O estudante repete que tem muitas dificuldades com computadores e, por isso, não consegue entender a matéria daquela forma. Embora neste caso o conflito tenha ocorrido de forma espontânea, provoca inicialmente dúvida e depois indiferença em Marcelo e não leva a qualquer mudança de estratégias ou idéias.

Entrevista T3 Marcelo declara que a função blancmange não tem derivada em nenhum ponto e que, por esta razão, ele não espera enxergar uma reta ao magnificar a função no computador:

> A característica daquela função é que ela não tem derivada em nenhum ponto. Não sei se eu estou certo, mas eu acho que não deveria se parecer com uma reta quando ampliar.

Perguntamos que aparência a função deveria adquirir ao ser ampliada. Marcelo afirma não ter a menor idéia. Ele dá início então ao processo de magnificação local em torno do ponto $x_0 = \frac{1}{2}$. Basicamente, o processo transcorre em três fases: no início a função preserva seu aspecto enrugado; depois adquire o aspecto de uma poligonal (devido ao truncamento da série geradora); e, finalmente, para janelas gráficas de ordem menor que 10^{-6} de lado, fica parecida com uma poligonal ainda mais irregular (agora devido a erros de interpolação, da mesma forma que ocorre com a parábola na entrevista T2). Note-se que Marcelo é o único participante que conduz a magnificação local da blancmange até esta terceira fase, pois para todos os demais, o conflito ocorre antes. De fato, ele não percebe qualquer contradição durante a entrevista – talvez por que a curva não haja ficado parecida com uma reta em nenhum momento e Marcelo espera visualizar *qualquer coisa a não ser uma reta.*

Marcelo, mais uma vez, reclama muito de suas dificuldades com a máquina. Por exemplo, ele comenta:

> Sei lá, no computador tudo pode acontecer. Eu fico meio perdido, nunca tenho a menor idéia das coisas.

Bloco TII

As três entrevistas deste bloco transcorrem de forma muito semelhante à entrevista T3. Marcelo não se dá conta de contradições em momento algum, fundamentalmente por que nunca sabe o que esperar do computador. Ele reclama insistentemente de suas dificuldades com a máquina e resiste sistematicamente a qualquer explicação de nossa parte que envolva o entendimento de seu funcionamento. Por isso, julgamos desnecessário fornecer maiores detalhes de cada uma das entrevistas separadamente.

Evolução de episódios de conflito

	ORIGEM	REAÇÕES	EFEITOS
T1	*Conflito:*	*A função h é diferenciável, mas no computador parece não ser.*	
	induzido	indiferença	nenhum efeito identificado
T2	*Conflito:*	*A parábola é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece não ser.*	
	espontâneo	dúvida indiferença	nenhum efeito identificado
T3 **T4** **T5** **T6**	***Ausência de Conflitos:***	*Marcelo não tem qualquer intuição sobre o que esperar das descrições computacionais.*	

Figura 5.10: Mapa de evolução de episódios de conflito de Marcelo.

Observamos que as dúvidas conceituais, juntamente com a grande dificuldade de

Marcelo com o uso da máquina, rapidamente tornaram inviáveis os conflitos. Mesmo nas entrevistas T1 e T2, em que Marcelo consegue perceber contradições e assim experimentar situações de conflito, o participante reage com indiferença a estas. Aparentemente, suas dúvidas são tantas que ele tem dificuldades mesmo para formular perguntas.

5.5.3 Comparação de resultados

Como mostram os resultados, o processo de entrevistas desenhadas para motivar a ocorrência de situações de conflito não surtiu efeito para Marcelo. Ao longo do processo, não observamos qualquer mudança no quadro do estudante. Atribuímos este resultado negativo ao fato de que ele apresentava grandes dificuldades tanto nos conteúdos, quanto no uso do computador em si. Em conseqüência, o computador não se constituiu em um meio suficientemente transparente para representar conceitos matemáticos.

5.6 Tiago

A gente tem que pensar na função, puramente. O que o computador mostra é só enfeite.

Tiago, entrevista T1

5.6.1 Análise das entrevistas genéricas

Entrevista G1

Tiago comenta que é muito interessante observar que a derivada é o resultado da comparação entre duas coisas que separadamente se anulam. Ao responder sobre a diferença entre funções diferenciáveis e não diferenciáveis, ele se refere à idéia de suavidade de curvatura:

> A função que teria uma derivada, ela seria uma função assim, a curvatura seria [...] leve. Assim, entre aspas, seria uma curvatura suave. E a que não teria derivada seria uma [...] uma interrupção. A curvatura seria ou muito acentuada, do nada ela mudaria muito, teria uma variação muito grande, essa curva; ou então nem seria uma curva, seria uma quina, algo do tipo.

É interessante notar que Tiago é o único participante que, nesta altura do processo de entrevistas, menciona explicitamente modelos para funções não diferenciáveis *além* dos 'pontos que formam bicos'. De fato, ele explica que funções não diferenciáveis são aquelas que possuem 'curvatura muito acentuada' *ou* possuem 'quinas'.

Sobre o computador, Tiago comenta que quando ele mostra resultados incorretos, estes podem induzir a erros e, sendo assim, devem ser desconsiderados nestes casos.

Entrevista G2

Tiago começa falando de aproximação de curvas por retas:

> Derivada, a gente está tentando aproximar uma curva de uma reta, porque é mais fácil trabalhar com uma reta. [...] Você vai pegar uma janela pequena e transforma [...] transforma não [...] Nessa janela pequena, a curva que você vai ter vai se parecer muito com uma reta, então você teria que uma curva seria mais ou menos como se fosse várias, infinitas retas assim em seqüência, só que elas formariam essa curva, entendeu? Você poderia desmembrar essa curva em várias retinhas, se pegar esse intervalo pequeno. Então, com retas você tem muito mais facilidade de trabalhar. Então, isso ajudaria você a analisar várias funções diferentes.

Em seguida, ele toca na idéia surpreendente de duas coisas que tendem a zero poderem dar um resultado quando comparadas:

> O cálculo trouxe mais perguntas para o que eu tinha, assim na minha cabeça. [...] Duas coisas que tendem a 0 darem um resultado, entendeu? Tipo, mais coisas a se pensar, assim. [...] Coisas estranhas, sei lá, surpreendentes.

Ele prossegue falando de funções não diferenciáveis:

> Trouxe indignação também porque até agora não tem como visualizar direito a função que é continua e não tem derivada em nenhum ponto. [...] Porque não dá para pensar em termos de bicos. Porque ela teria vários bicos, assim, várias pontas. Então teria que ter um segmento. Se tem um segmento teria que ter uma derivada. Então não dá para entender ela como formada por bicos. Ela tem uma curvatura muito acentuada em todos os pontos, que não deixa ela ter derivada. [...] Mas eu não consigo visualizar isso, só pensar.

Quando perguntamos sobre o papel do computador, Tiago responde:

> Ele ajuda bastante a visualizar as coisas que você não consegue ver, mas ele também erra bastante também.

Perguntamos então sua opinião sobre estes erros. Ele responde:

> Ah, induz você, se for só pelo gráfico, você vai cometer erros também, induzido. [...] Tem que analisar você mesmo a função e tem analisar sempre mexendo na janela no computador. Mas se aparecer erros, pode esquecer, vai dar tudo errado.

Evolução de imagem de conceito

Podemos observar que Tiago possui uma imagem de conceito de derivada rica, com interpretações diversificadas para o conceito: aproximação por retas, relação de diferenciabilidade e não diferenciabilidade com suavidade de curvatura. A idéia que parece mais fasciná-lo é a interpretação de derivada como o resultado da comparação de variação de duas grandezas, que isoladamente se anulariam. Ele sempre mostra entusiasmo a falar desta idéia. Sua imagem de conceito apresenta aspectos estáveis de forma geral. A relação entre diferenciabilidade e suavidade é reformulada ligeiramente. A idéia de aproximação por retas tangentes é citada pela primeira vez na entrevista G2, mas não encontramos indícios significativos de que tenha sido de fato incluída na imagem de conceito naquele momento.

O aspecto que mais chama atenção na imagem de conceito de Tiago é sua atitude em relação ao uso do computador. Ele afirma consistentemente que os resultados errôneos da máquina devem ser descartados, pois podem induzir ao erro. Na entrevista G2, ele comenta que o computador pode ajudar a visualização, mas somente quando não gera resultados errados.

G0	G1	G2
A derivada é o resultado da comparação da variação de duas grandezas, que isoladamente se anulariam.		
Funções não diferenciáveis possuem variação brusca. →	*Existem dois tipos distintos de funções não diferenciáveis: as que possuem 'bicos' e as que possuem curvatura muito acentuada. Funções diferenciáveis, por outro lado, são aquelas que possuem curvatura suave.*	
		Uma curva se parece muito com uma reta em janela pequena e é mais fácil trabalhar com retas.
Resultados errôneos do computador devem ser descartados.		

Figura 5.11: Mapa de evolução de discurso sobre derivada de Tiago.

5.6.2 Análise das entrevistas baseadas em tarefas

Bloco TI

Entrevista T1 Tiago responde à pergunta de forma direta. Ele explica o algoritmo algébrico de derivação:

> Vou tratar a raiz quadrada como sendo tipo um $x^{\frac{1}{2}}$. Aí, no caso, você faria potência de potência, você cairia num polinômio. Aí, pela regra do polinômio, você teria a derivada.

Quando chamamos sua atenção para o gráfico, Tiago comenta:

> Pelo gráfico parece que ela não tem derivada em 0, acho.

Perguntamos, então, se ele sabia a razão para este fato. Ele responde:

> O intervalo está muito grande. Se a gente diminuir o intervalo próximo a 0, acho que a gente teria uma visualização melhor.

Ele magnifica a janela gráfica e comenta que então o computador mostra o que ele já sabia. Devido a segurança com que Tiago afirmou desde o começo da entrevista que a função tinha derivada, decidimos perguntar se a imagem na tela não havia abalado sua certeza. Ele responde:

> A gente tem que pensar na função, puramente. O que o computador mostra é só enfeite.

Tiago vivenciou uma situação de conflito induzida, mas compreendeu imediatamente a situação. O conflito não alterou suas opiniões ou estratégias e atuou para confirmar sua concepção sobre as limitações do computador.

Entrevista T2 Tiago começa afirmando:

> Quando for olhando de mais perto, a gente vai ver uma reta. [...] Por que você vai limitar a tua janela, vai diminuindo a curva. Isso aí é o sentido de derivada, chegar a uma reta tangente. O computador vai mostrar para a gente algo muito próximo da reta tangente à curva no ponto 1.

Quando a imagem deixa de se parecer com uma reta, Tiago afirma que o resultado está errado. Perguntamos se ele sabe a causa do erro e ele responde que não faz idéia, mas que se trata de um erro do computador. Ele continua o processo de magnificação local até que a imagem some completamente da tela. Perguntamos mais uma vez se ele entende a causa do erro, ao que o estudante responde:

> Ah, deve ser pelo jeito dele traçar os gráficos, ligar os pontos. Tem alguma coisa a ver com isso.

A situação de conflito ocorreu espontaneamente, mas Tiago reagiu com indiferença. Ele atribuiu a causa do erro ao computador com firmeza, mas se não mostrou interessado em entendê-lo em maiores detalhes. O conflito não gerou mudanças de estratégia ou opinião, mas serviu para confirmar sua concepção sobre as limitações do computador.

Entrevista T3 Tiago explica sua concepção da função blancmange:

> A gente pegou várias funções módulo e somou. [...] Somou várias assim [...] funções que, primeiro tem um bico, a primeira só teria um bico, aí a segunda teria dois, quatro, e assim por diante. [...] Aí se percebe que é 2^n, cada vez vai aumentando isso daí, a quantidade de bicos. E como a gente quer n tendendo

> a infinito, essa função ficaria [...] todo ponto seria um bico. [...] Mas para você pensar em bico, você tem que ter uma parte de função que seja tipo [...] contínua assim, pelo menos um mínimo intervalo contínua. [...] Não é um segmento. Não é contínua, eu usei o termo errado. Seria um segmento, dois segmentos para formar esse bico. E no caso, esse segmento não existe, mas assim tem o bico. E nessa função, o estranho é que não tem esse intervalo.

Quando perguntamos o que ele espera ver no processo de magnificação local, ele responde que não consegue visualizar e acrescenta:

> É muito difícil de imaginar. Uma coisa ser um bico e não possuir a característica do bico, que são as duas retinhas ou espacinhos delimitando aquele bico.

Quando o computador exibe uma poligonal, Tiago afirma que, embora ele não soubesse ao certo o que esperar, não acredita que fosse algo como aquilo, mas uma coisa mais irregular. Explicamos que o computador utiliza um truncamento da função blancmange. Tiago comenta:

> Então essa aí não é a verdadeira, ela não é tão estranha. Ela tem tipo bicos normais, bem definidos.

Perguntamos então como seria a 'verdadeira' blancmange. O estudante pensa um pouco e responde:

> Acho que no caso dela, na verdade não daria para falar em termos de bicos. Ela não é derivável, mas é outro tipo [...] outro tipo de coisa, de aspecto. Não dá para falar de bicos, como na função módulo e essa aí. [*aponta a tela*] [...] Ela seria uma coisa mais abstrata, não dá para imaginar mesmo, nem dá para desenhar.

O conflito ocorreu espontaneamente, provocou confusão leve e motivou Tiago a pensar em uma nova idéia: *a função blancmange não é formada por 'bicos'*. O conflito atuou ainda para reforçar a idéia de Tiago sobre o caráter abstrato da curva.

Bloco TII

Entrevista T4 Tiago esboça os gráficos de g_1, g_2 e g_3. No caso de g_1, ele identifica uma descontinuidade removível em lugar de uma assíntota (marcando uma pequena bola aberta no gráfico). Os gráficos de g_2 e g_3 são traçados corretamente, com identificação das assíntotas verticais, mas não a assíntota inclinada de g_2. Ao ver o gráfico de g_1 na tela do computador, Tiago se dá conta imediatamente de seu erro e o corrige.

Em seguida, Tiago prevê que o gráfico de g_1 deverá ficar parecido com uma reta horizontal ao afastar a janela gráfica. Ao observar o gráfico adquirindo esta aparência, o estudante explica que a função está ficando parecida com a sua assíntota. Ele diz que não sabe o que esperar dos outros dois gráficos, pois as funções não possuem assíntotas. Ao ver o gráfico de g_2 ficar parecido com uma reta, Tiago diz não saber a explicação. Perguntamos então se agora ele teria alguma idéia do que aconteceria com g_3 ao se afastar a janela gráfica. O estudante afirma que espera ver algo parecido com a função módulo. Ao perguntarmos por que, ele responde:

> Porque você vai perder a noção da assíntota, ela vai sumir com a janela grande, e você vai ter duas tendências a $+\infty$. O limite de x, x tendendo a $+\infty$, a função vai tender a $+\infty$ e x tendendo a $-\infty$ também. Então você vai ter [...] um 'V' tipo, seria o módulo de x.

Ao ver a curva ficando parecida com uma parábola, ele pensa em silêncio por alguns instantes e formula uma explicação algébrica:

> Se eu dividir as duas, o numerador e o denominador por x, todas as parcelas por x, no final eu vou ter x ao quadrado, que me levaria a uma parábola.

Perguntamos se ele estava certo de sua explicação e ele afirma que sim. Perguntamos então se ele poderia prever o que aconteceria ao afastarmos as janelas gráficas para o caso das funções $\frac{x^4}{x-1}$ e $\frac{x^4}{x^2-1}$. Tiago responde rapidamente que veria uma função do terceiro grau e uma do segundo grau, respectivamente. Indagamos se ele gostaria de verificar sua conjectura no computador e ele responde que não:

> Eu já entendi. É só dividir em cima e em baixo, que a gente vê. Não precisa botar no computador.

Tiago vivenciou espontaneamente uma situação de conflito quando o gráfico de g_3 ficou diferente do esperado. O conflito gerou confusão, mas motivou Tiago a formular método para determinar a aparência de funções racionais ao afastar-se a janela gráfica no computador. Ele se convence da validade deste método com tal segurança, que não sente necessidade de testá-lo para outros casos.

Entrevista T5 Tiago desenha os gráficos de f_1, f_2 e f_3, identificando corretamente os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. Em seguida, ele desenha os gráficos no computador e comenta:

> Ele botou uma assíntota nesse aqui que não deveria botar.

Perguntamos por que e ele explica:

> Próximo do 1, eles estão vindo tanto pela direita quanto pela esquerda de $+\infty$. Ele tenta ligar os dois infinitos. Ele traça o gráfico ligando os pontos e pronto.

Pedimos então que Tiago acrescentasse o comando 'discont=true'. Ao ver a reta vertical desaparecer, ele explica:

> Aqueles dois pontos que ele tinha ligado lá em ∞, ele percebeu que aquilo lá era um erro.

Pedimos que Tiago examinasse o gráfico de f_3 no computador. Ele comenta:

> Ele não botou a bolinha aberta em $x = 1$. Porque ele ligou como ele estava ligando os outros pontos do gráfico.

Ele pergunta espontaneamente se o comando 'discont=true' provocaria algum efeito no gráfico. Ao verificar que não, Tiago comenta:

> Não dá para ele pular só um ponto. Ele não consegue de jeito nenhum.

Perguntamos, finalmente, se ele acha que as funções são melhor representadas pelos seus gráficos ou pelos do computador. O estudante exclama:

> Acho que o meu!

Tiago justifica:

> Porque tem algo a mais aqui. [...] Está mostrando um detalhe do gráfico que não está mostrando ali.

Nesta entrevista, Tiago experimenta espontaneamente duas situações de conflito: ao ver uma assíntota vertical no gráfico de f_1 que, segundo ele, não deveria estar presente e ao observar que o computador não indica a descontinuidade de f_3. Ele entende ambas as situações imediatamente e os conflitos atuam reforçando a consciência de Tiago das limitações do computador.

Entrevista T6 Tiago afirma que ambas as funções teriam derivada, pois não havia nada nas expressões algébricas que sugerisse o contrário. Mesmo quando chamamos sua atenção para o gráfico, Tiago mantém sua opinião. Assim, não verificamos ocorrência de conflitos nesta entrevista.

Evolução de episódios de conflito

Nas duas primeiras entrevistas baseadas em tarefas, Tiago reage com indiferença às situações de conflito. Aparentemente, sua certeza em relação à teoria é tal, que ele não considera que a compreensão dos conflitos tenha algo a acrescentar, portanto ele simplesmente não se preocupa com isto.

Na entrevista T3, a situação é diferente: a função é misteriosa para ele. Suas reações ao conflito, neste caso, são de confusão e dúvida. Embora ele não demonstre interesse em entender mais profundamente a causa da erro no resultado do computador em si, o fato deste resultado errôneo haver ocorrido motiva-o a pensar mais profundamente na própria função blancmange. O fato do computador haver mostrado 'bicos', mas esse resultado ser sabidamente errôneo, parece haver sugerido a Tiago uma nova explicação para o comportamento da função: *ela não pode ser pensada em termos de 'bicos', é alguma coisa mais abstrata.*

Na entrevista T4, a teoria envolvida não é tão obscura para Tiago quanto no caso anterior, mas também não tão óbvia quanto em T1 e T2. Ele reage inicialmente com confusão e dúvida, como em T3, mas, depois de algum tempo, consegue formular uma explicação teórica, com apoio da observação da descrição computacional. Neste momento, ele dá a tarefa por encerrada e se recusa a continuar usando o computador, mesmo quando sugerimos que ele o fizesse. Em entrevista T5, a teoria envolvida também é clara para Tiago, mas ele se surpreende com os conflitos ocorridos. Ele pensa em explicações para os conflitos e os compreende rapidamente.

Na entrevista T6, o participante fica convencido sobre a conclusão da tarefa com base na descrição algébrica, a ponto de descartar completamente a descrição computacional. Em conseqüência, ele não se dá conta de qualquer incoerência, portanto, não ocorrem conflitos. O comportamento do participante na entrevista T6 tem similaridades com aquele da entrevista T1, mas com uma fundamental diferença: no caso de T6, ele está errado. Em nossa interpretação, este resultado está associado com uma supervalorização da descrição algébrica. Portanto, uma abordagem desenhada para explorar limitações de descrições dessa natureza poderia ser indicada para o seu caso.

	ORIGEM	REAÇÕES	EFEITOS
T1	*Conflito:*	*A função h é diferenciável, mas no computador parece não ser.*	
	induzido	compreensão indiferença	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
T2	*Conflito:*	*A parábola é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece não ser.*	
	espontâneo	indiferença	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
T3	*Conflito:*	*A função blancmange não é diferenciável, mas quando magnificada no computador parece ser.*	
	espontâneo	confusão dúvida	reforço da concepção da natureza abstrata da função blancmange e da impossibilidade de desenhá-la
T4	*Conflito:*	*O gráfico g_3 não fica parecido com a função módulo em janelas gráficas grandes.*	
	espontâneo	confusão dúvida	nova idéia: *Para determinar o aspecto de uma função racional em janelas gráficas grandes, basta dividir o numerador e o denominador por um termo convenientemente escolhido.*
T5	*Conflito:*	*O computador exibe a 'assíntota' para f_1, mas não para f_2.*	
	espontâneo	surpresa compreensão rápida	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
	Conflito:	*O computador não indica a descontinuidade de f_3.*	
	espontâneo	surpresa compreensão imediata	reforço da consciência de limitações de descrições computacionais
T6	***Ausência de Conflitos:***	*Tiago está convencido sobre a diferenciabilidade das funções e não considera a descrição computacional.*	

Figura 5.12: Mapa de evolução de episódios de conflito de Tiago.

5.6.3 Comparação de resultados

O mapa de evolução de discurso do participante indica a reformulação da idéia de não diferenciabilidade a partir da entrevista G1: ele passa a admitir a existência de dois tipos de funções não diferenciáveis, as que têm bicos e as que possuem curvatura muito acentuada. Nossa interpretação é de que este efeito de reformulação esteja relacionado com o conflito vivenciado na entrevista T3. De fato, este é o único efeito da vivência de conflitos detectado no mapa de evolução de discurso do participante.

Nossa conclusão para o caso de Tiago é de que ele simplesmente descarta as descrições computacionais sempre que pode basear suas conclusões em descrições simbólicas algébricas. Ele recorre ao computador quando não está completamente seguro sobre a teoria. Nessas ocasiões, a ocorrência de conflitos pode ter efeitos em sua imagem de conceito (como foi o caso do efeito de reconstrução acima), mas, de forma geral, ele tenta evitá-los e não se preocupa em entendê-los. Ele também usa referências ao computador ocasionalmente para ilustrar propriedades matemáticas conhecidas. Na entrevista G2, por exemplo, o participante refere-se a *janelas pequenas* para ilustrar a aproximação de uma função por retas, mas, mesmo assim, se preocupa em deixar claro que a curva não *se transforma* na reta, mas sim *fica muito parecida* com ela.

Como ele próprio afirma algumas vezes ao longo das entrevistas genéricas, Tiago acredita que o computador pode ser uma ferramenta útil para a aprendizagem de matemática somente quando não comete erros e seus resultados não apresentam contradições com a teoria. Para Tiago, os resultados do computador não são parte da matemática, e sim uma ferramenta que pode eventualmente ser usada para ilustrá-la, um apêndice que só deve ser acionado quando não criar problemas, ou, segundo suas próprias palavras, 'um enfeite'.

Capítulo 6

Discussão de resultados globais

A elegância pode provir do sentimento do imprevisto, pelo encontro inesperado de objetos dos quais não estamos acostumados a nos aproximar. [. . .] Para obter um resultado que tenha um valor real, não basta colocar as coisas em ordem. Não é apenas a ordem, é a ordem inesperada que vale alguma coisa.

Henri Poincaré, (POINCARÉ, 1908b), tradução nossa [1]

Neste texto, conceituamos *conflito* como a constatação por um indivíduo de aparentes contradições (em relação a sua própria imagem de conceito). Tais contradições estão associadas a limitações (omissões, ênfases ou diferenças) de uma ou mais descrições para um conceito matemático. Um conflito é portanto um fenômeno de natureza subjetiva, o que de fato pode ser constatado através dos resultados de nosso estudo. Por diversas vezes, situações semelhantes geraram episódios de conflito (reações e efeitos) consideravelmente diferentes para participantes diferentes. Mais do que isso, as próprias limitações disparadoras das situações de conflito se manifestam de formas subjetivas – aquilo que é omitido ou enfatizado, os aspectos de uma dada descrição que apelam à atenção de um estudante podem ser ignorados por outros. Por exemplo, na entrevista T4, o que gera o conflito para Francisco e Tiago é a *omissão* de um aspecto esperado por eles: o fato da função g_3 *não ficar* parecida com semi-retas em janelas gráficas grandes. Mas, para Antônio é a *ênfase* de um aspecto não esperado por ele que detona o conflito: o fato da função g_3 *ficar* parecida com uma parábola.

[1] L'élégance peut provenir du sentiment de l'imprévu par la rencontre inattendue d'objets qu'on n'est pas accoutumé. [. . .] Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle, il ne suffit pas de mettre les choses en ordre; ce nest pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose.

Alguns dos resultados de pesquisa citados, por exemplo (MONAGHAN et al., 1994; HUNTER et al., 1993; VINNER, 1983b), sugerem que uma abordagem em que uma certa descrição é usada em excesso e situações de conflito são evitadas pode propiciar o fenômeno que chamamos de efeito de estreitamento: o processo em que as limitações de uma descrição se convertem em limitações nas imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes. Nossa hipótese inicial foi de que, se situações de conflito são valorizadas, dentro de uma abordagem pedagógica cuidadosamente desenhada, as limitações associadas às descrições envolvidas podem ter um papel pedagógico positivo, isto é, propiciar efeitos de expansão de imagens de conceito, em lugar de estreitamento. Os resultados relatados no capítulo anterior mostram que a vivência de conflitos surtiu efeitos positivos significativos para cinco dos participantes. Em diversas ocasiões as situações de conflito motivaram os estudantes a adotar atitudes investigativas, na busca da compreensão teórica mais profunda. Esses resultados confirmam aqueles relatados por diversos dos autores citados, por exemplo (ARCAVI, 2000; BELFORT & GUIMARÃES, 1998; DOERR & ZANGOR, 2000; HADAS et al., 2000). No caso particular de Marcelo, segundo nossa interpretação, os resultados negativos estão ligados a uma questão de transparência do meio computacional (MEIRA, 1998). A falta de familiaridade com o aparato aliada à insegurança no conteúdo constituíram um ambiente desfavorável, em que o estudante não foi capaz de estabelecer o computador como um meio com a potencialidade de representar matemática. A menção do caso de Marcelo neste trabalho é de fundamental importância para indicar restrições deste tipo de abordagem. Note-se em particular que esse não pode ser considerado um efeito de estreitamento, segundo nossa conceituação, pois não há evidência de que a imagem de conceito de Marcelo haja sido sequer afetada pelos conflitos. Assim, este não é um caso nem de expansão nem de estreitamento.

Neste capítulo, traçaremos um panorama global baseado nos resultados individuais analisados no capítulo anterior. Procuraremos, então, identificar efeitos de estreitamento e efeitos positivos (que consideramos como expansões de imagens de conceito) associados à experiência de conflitos. O número de entrevistas baseadas em tarefas em que não foi verificada a ocorrência de conflitos, ou mesmo conflitos induzidos, é relativamente baixo. Na maioria dos casos, os participantes se dão conta espontaneamente de alguma contradição. Identificamos efeitos de estreitamento em pelo menos três das situações em que não ocorreram conflitos (discutidos na seção 6.1). Por outro lado, não foram identificados efeitos de estreitamento em nenhuma das situações em que *ocorreram* conflitos. Isto é, em nosso estudo a ocorrência de conflitos está associada a efeitos de expansão (discutidos em 6.2) ou, pelo menos, a situações em que não houve efeitos significativos para as imagens de conceito dos participantes. Em nossa interpretação, este resultado está fortemente relacionado com o fato de que a abordagem pedagógica nas entrevistas foi especificamente planejada para explorar situações de conflito. Em nosso papel de professor, durante as entrevistas baseadas em tarefas, procuramos encorajar os participantes a refletirem sobre as contradições percebidas. Além disso, é importante lembrar que no primeiro curso de cálculo dos participantes foi adotada uma abordagem semelhante. Assim, no início do processo de entrevistas, eles já tinham alguma familiaridade com o uso do computador no ensino e, em particular, com suas limitações.

As comparações dos mapas de evolução de discurso sobre derivada e de episódios de conflito, feitas no capítulo anterior, revelaram alguns efeitos da vivência de conflitos. Entretanto, há outros efeitos importantes – talvez mais sutis – que não se refletem claramente nos mapas de evolução de discurso. Pudemos observar mudanças substanciais nas atitudes dos participantes durante as entrevistas baseadas em tarefas que não estão associadas a mudanças em seu discurso. Isto é, algumas mudanças não ocorrem na forma como eles *se referem* à derivada, mas na forma como eles *operam* com o conceito. Consideramos que a forma de operar com o conceito também é constituinte da forma de concebê-lo, sendo portanto um atributo da imagem de conceito. Sendo assim, nas seções as seguir, trataremos dos efeitos refletidos nos mapas de evolução de discurso e também daqueles identificados diretamente a partir dos mapas de evolução de episódios de conflito.

6.1 Ausência de conflitos, conflitos induzidos e efeitos de estreitamento

O primeiro caso em que identificamos um efeito de estreitamento foi a entrevista T1 de Júlio. Nessa situação, o participante fixa-se em uma característica da descrição algébrica da função h – a presença da raiz quadrada – para concluir que deve haver um módulo envolvido, o que acarretaria na não diferenciabilidade da função. Assim, a presença da raiz quadrada foi enfatizada em excesso por Júlio, atuando como uma limitação da descrição algébrica que ofuscou outras características da função (figura 6.1). Também verificamos um efeito de estreitamento na entrevista T3 de Júlio. Ele acredita que a soma de funções não diferenciáveis terá um efeito suavizador nos 'bicos' das parcelas. Quando a imagem na tela coincide com esta concepção, ele transfere facilmente o gráfico mostrado pelo computador para a sua própria imagem de conceito, como um modelo para o comportamento da função. Note-se que, em ambas as situações, os gráficos mostrados pelo computador coincidiam com as suposições (errôneas) do estudante. Portanto, a crença de Júlio no computador como critério de verdade matemática, colaborou fortemente para os dois efeitos de estreitamento.

DESCRIÇÃO ALGÉBRICA *Há um sinal de raiz quadrada na fórmula da função.*	$\longrightarrow$	IMAGEM DE CONCEITO DE JÚLIO *A função não é diferenciável.*
DESCRIÇÃO COMPUTACIONAL *A função blancmange apresenta 'bicos' isolados.*	$\longrightarrow$	IMAGEM DE CONCEITO DE JÚLIO *A função blancmange apresenta 'bicos' isolados.*

Figura 6.1: Efeitos de estreitamento da imagem de conceito de Júlio.

Na entrevista T4 de Júlio, em que também não ocorrem conflitos, não identificamos efeitos de estreitamento. Neste caso, o participante foi capaz de prever com precisão a aparência que os gráficos assumiriam em janelas grandes, tendo como base a análise das expressões algébricas. O resultado do computador veio a confirmar a suposição do estudante, que neste caso estava correta (ao contrário das entrevistas T1 e T3). É verdade que não consideramos este caso como um estreitamento porque a suposição de Júlio, confirmada pelo computador, vinha a estar correta. Assim, isto sugere que a confiança excessiva de Júlio nos resultados da máquina ainda poderia ser uma fonte potencial de efeitos de estreitamento. No entanto, a evolução da concepção do participante, refletida ao longo das três entrevistas genéricas, mostra que a vivência de conflitos atuou para por esta confiança em cheque, evitando efeitos de estreitamento semelhantes no futuro.

O terceiro efeito de estreitamento identificado ocorre na entrevista T6 de Tiago. O estudante se mostra fortemente convencido de que as funções u_1 e u_2 são diferenciáveis, com base no fato de que as fórmulas de derivação poderiam ser aplicadas às expressões algébricas 6.2. No caso de Júlio, a supervalorização da descrição computacional contribuiu para os efeitos de estreitamento. No caso de Tiago, por outro lado, é a supervalorização da descrição algébrica, em detrimento da descrição computacional, que atua nesse sentido. Segundo nossa interpretação, o participante já está suficientemente ciente de limitações das descrições computacionais, mas deposita confiança excessiva em descrições algébricas. Isto sugere que uma abordagem pedagógica que explorasse limitações de descrições algébricas poderia ser efetiva para o caso de Tiago, colaborando para contrabalançar este efeito de estreitamento.

Descrição Algébrica		Imagem de Conceito de Tiago
As fórmulas de derivação podem ser aplicadas às funções.	$\longrightarrow$	*A função são diferenciáveis.*

Figura 6.2: Um efeito de estreitamento da imagem de conceito de Tiago.

Como já comentamos, não identificamos efeitos de estreitamento na ausência de conflitos nas entrevistas de Marcelo, pois não parece ter havido qualquer efeito em sua imagem de conceito. Este também é o caso da entrevista T6 de Francisco. O estudante não tem qualquer intuição sobre o comportamento das funções, o que faz com que a experiência no computador seja inócua para ele. Em particular, não ocorrem conflitos.

Na entrevista T1, Carlos experimenta um conflito induzido. Seguindo nossa sugestão ele passa a investigar a situação em maiores detalhes, o que levou à mudança da argumentação baseada exclusivamente na descrição computacional para uma combinação de descrições algébrica e computacional, além da identificação de limitações da descrição computacional. Até então, ele afirmava acreditar que a imprecisão de resultados do computador se deviam a falhas do usuário. Assim, esta primeira situação de conflito, juntamente com as que se sucederam, teve um efeito fundamental na imagem de conceito do participante. Embora este não seja, é claro, um caso de efeito de estreitamento, consideramos o exemplo relevante para a compreensão da relação entre ausência de conflitos e estreitamento. Considerando-se a concepção de Carlos na ocasião da entrevista, não é absurdo supor que, sem nossa intervenção, seria muito provável não ocorressem conflitos e a situação desencadearia um efeito de estreitamento. Porém, o conflito *induzido* atuou justamente na direção contrária. Assim, nossa interpretação é que a indução do conflito evitou um estreitamento prestes a se concretizar e disparou um efeito altamente positivo para Carlos.

6.2 Conflitos e efeitos de expansão

Aproveitando em parte a nomenclatura descrita na página 121, discutiremos cinco tipos de efeitos considerados positivos para as imagens de conceito dos participantes: *confirmação*, *reformulação*, *reconstrução*, *inclusão* e *reversão*. É importante ressaltar que nossa pretensão não é estabelecer uma tipologia rígida de efeitos de expansão, mas identificar similaridades entre as situações de conflito e destacar exemplos relevantes de efeitos de expansão.

6.2.1 Confirmação

Antônio, Francisco e Tiago demonstravam consciência das limitações do computador e de que estas poderiam ser responsáveis por resultados aparentemente contraditórios. As situações de conflito experimentadas por eles nas duas primeiras entrevistas baseadas em tarefas, nas quais a situação teórica era bem conhecida, serviu para *confirmar* essa consciência, tornando-a mais fundamentada. Isto é, eles tiveram contato com situações que mostravam concretamente que resultados fornecidos pelo computador não poderiam ser aceitos descuidadamente, confirmando sua crença prévia. Em nossa interpretação, esta perspectiva foi importante para o desempenho dos três participantes nas entrevistas subseqüentes, quando a situação teórica em alguns casos não era mais tão familiar.

Chamaremos de *expansão de imagem de conceito por confirmação* a efeitos como este, em que os conflitos atuam para confirmar uma crença anterior do estudante, fornecendo-lhe fundamentos teóricos ou subsídios concretos, de forma a criar terreno para novas expansões e desenvolvimentos futuros de imagem de conceito.

Outro caso de efeito de confirmação pode se observado na entrevista T1 de Francisco. Ele verifica que o gráfico mostrado na tela e a expressão algébrica da função h sugerem coisas diferentes e decide investigar se h é ou não linear quando restrita a algum intervalo. Para tal, ele recorre à estratégia de verificar se a derivada da função é ou não constante em algum intervalo. A escolha de Francisco por esta estratégia denota que o fato da derivada ser constante estar relacionado com a primitiva ser linear já era de conhecimento do estudante. No entanto, o conflito levou-o a uma situação em que ele pode acionar seu conhecimento e vê-lo aplicado a uma situação concreta.

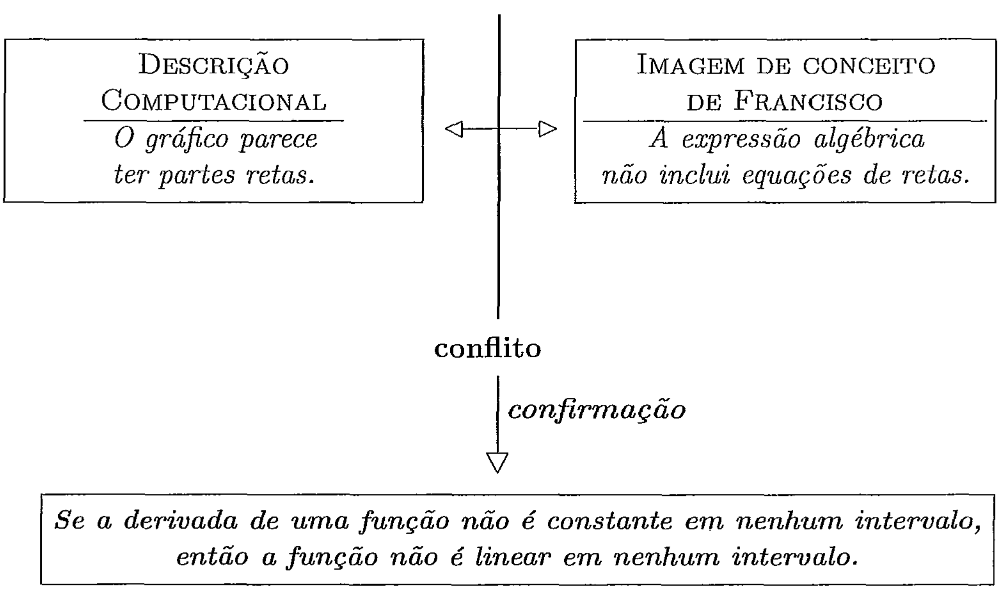


Figura 6.3: Um efeito de expansão da imagem de conceito de Francisco por confirmação.

6.2.2 Reformulação

Na ocasião da entrevista T3, Tiago tinha uma concepção vaga, relacionando não diferenciabilidade com variação brusca. Antes de começar o processo de magnificação local da função blancmange, ele não sabia o que esperar, pois não conseguia imaginar um gráfico que tenha 'bicos' em todos os pontos. Quando o computador mostra uma figura formada por 'bicos' isolados, ele se mostra confuso. A partir da informação de que aquela não seria 'a verdadeira blancmange', mas um truncamento da série infinita, ele conclui que 'a verdadeira blancmange' não pode ser formada por 'bicos'. Isto é, existem funções não diferenciáveis cujos gráficos não podem ser caracterizados como uma sucessão de 'bicos'. Em conseqüência, Tiago *reformula* sua concepção de não diferenciabilidade: ele passa a conceber pelo menos duas classes de funções não diferenciáveis, aquelas formadas por bicos e as que têm curvatura muito acentuada (na qual se incluiria a blancmange). Assim, a nova idéia de Tiago pode ser vista como um refinamento da anterior (figura 6.4).

DESCRIÇÃO POR MEIO DE RETIDÃO LOCAL		IMAGEM DE CONCEITO DE TIAGO
O gráfico mostrado no computador é formado por 'bicos' isolados.	◁—▷	*A função blancmange não tem derivada em nenhum ponto.*

conflito

↓ *reformulação*

Existem funções não diferenciáveis cujos gráficos não são formados por 'bicos'.

Figura 6.4: Um efeito de expansão da imagem de conceito de Tiago por reformulação.

Chamaremos de *expansão de imagem de conceito por reformulação* casos em que os conflitos atuam refinando concepções anteriores dos estudantes. Nesses casos, os aspectos das concepções anteriores são preservados, mas podem ser melhor compreendidos ou generalizados, ou ainda, novos aspectos podem ser acrescentados.

Efeitos de expansão por reformulação foram razoavelmente comuns em nosso estudo. Outro exemplo ocorre quando Carlos generaliza sua concepção de assíntota horizontal para assíntotas inclinadas quaisquer em virtude do conflito vivenciado na entrevista T5.

Também verificamos um exemplo nas crenças de Antônio sobre o próprio computador. No começo do estudo, ele afirma considerar que os erros do computador tornam seus resultados 'não confiáveis'. Na entrevista G2, o estudante comenta que os erros do computador podem ajudar a aprendizagem de matemática. Consideramos este como um efeito de reformulação, pois os aspectos da concepção de Antônio são preservados e refinados – ele não passa a considerar os resultados do computador 'confiáveis', mas vê uma nova perspectiva para esta 'não confiabilidade'.

6.2.3 Reconstrução

Assim como Antônio, Francisco e Tiago, Júlio manifesta consciência sobre as limitações desde o começo do estudo. Entretanto, mesmo com esta consciência, ele inicialmente acredita que o computador pode ser usado como um critério de verdade em matemática. Tal concepção certamente contribuiu para o efeito de estreitamento ocorrido na entrevista T1, mas podemos constatar que sua reformulação ocorreu rapidamente, pois o participante passa a considerar que a verificação de resultados no computador está sujeita aos erros da máquina. Porém, na entrevista G2, constatamos claramente que Júlio havia *substituído* sua idéia inicial por uma oposta: os resultados do computador devem ser verificados pela teoria matemática (figura 6.5). Atribuímos este efeito ao conjunto de situações vivenciadas pelo estudante ao longo das entrevistas baseadas em tarefas.

Chamaremos de *expansão de imagem de conceito por reconstrução* casos em que os estudantes substituem concepções anteriores por novas, que sejam contraditórias com as primeiras e que as eliminem de suas imagens de conceito.

Assim como reformulações, efeitos de reconstrução foram comumente observados. Como Júlio, Carlos reconstrói sua concepção sobre o uso do computador. Ele considerava que seria possível ter certeza sobre a diferenciabilidade de uma função a partir da visualização na máquina. A partir do conflito experimentado na entrevista T1, ele passa a considerar que isto não é possível devido às limitações do aparato. Este efeito de reconstrução ocorre em paralelo com outro importante para Carlos: ele deixa de conceber incoerências de resultados gerados pelo computador como deficiências de observação do usuário e passa a considerá-las como limitações da própria máquina.

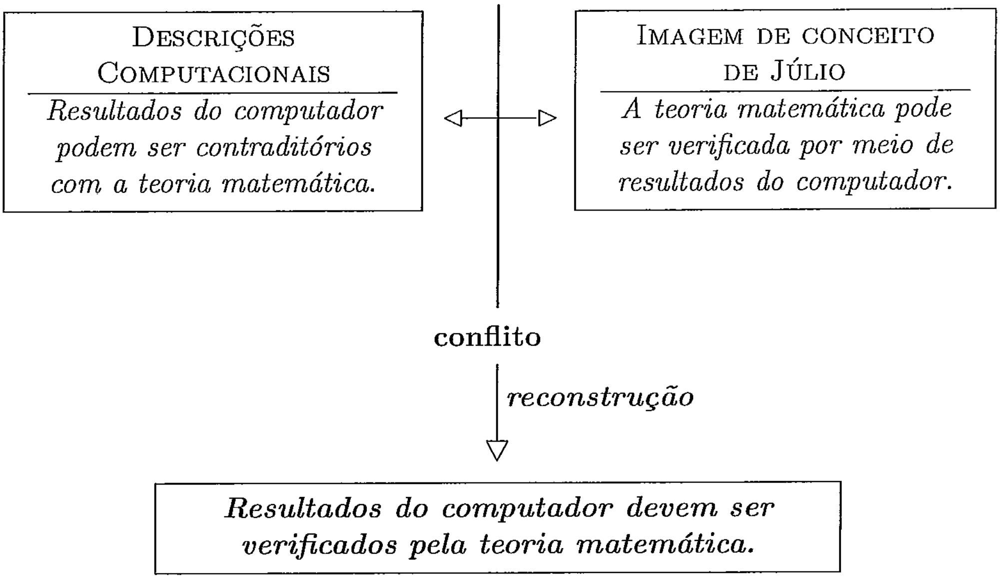


Figura 6.5: Um efeito de expansão da imagem de conceito de Júlio por reconstrução.

Na entrevista T4, tanto Francisco quanto Tiago esperam que a função $g_3 = \frac{x^3-1}{x}$ fique parecida com um par de semi-retas em janelas gráficas grandes. A partir do conflito vivenciado, os dois participantes reconstroem esta idéia, formulando e verificando novas conjecturas sobre o comportamento de funções racionais, que invalidam as anteriores.

Na entrevista T6, Antônio experimenta um conflito ao investigar as funções u_1 e u_2. As fórmulas sugerem ao estudante que ambas sejam diferenciáveis, mas os gráficos que não sejam. Em conseqüência, Antônio reconstrói seu critério de verificação de diferenciabilidade de função. Ele deixa de acreditar que a aplicação das fórmulas de derivação seja um critério absoluto e passa a crer que a única forma de se ter certeza absoluta se uma função é ou não derivável é a aplicação da definição.

6.2.4 Inclusão

Quando Antônio entende, na entrevista T3, a razão do conflito, isto é, o motivo pelo qual o computador não mostrava a magnificação do gráfico da função blancmange como o esperado, ele reage com visível excitação. O estudante exterioriza uma série de idéias, envolvendo fundamentalmente o infinito e as limitações para conhecê-lo. Dentre estas, ele afirma que *existem muito mais funções do que aquelas de que se conhecem informações.* Antônio afirma também que *não é possível somar nada até o* *infinito, porque haverá sempre uma infinidade faltando* – o que de fato corresponde a uma importante distinção entre conjuntos finitos e infinitos. A grande excitação do participante indica que se tratavam de idéias realmente novas para ele, que eram *incluídas* naquele momento em sua imagem de conceito (figura 6.6).

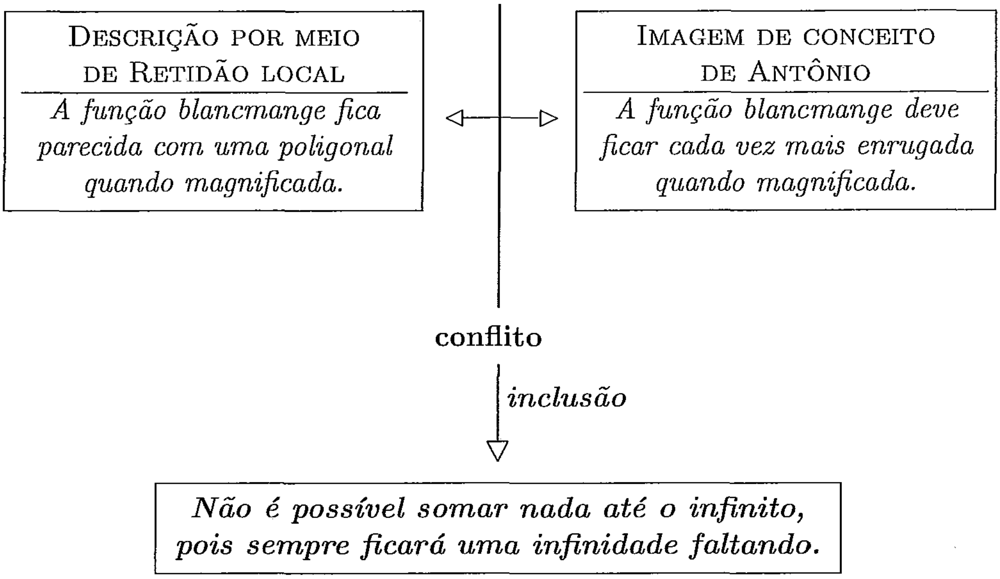


Figura 6.6: Um efeito de expansão da imagem de conceito de Antônio por inclusão.

Chamaremos de *expansão de imagem de conceito por inclusão* a ocasiões em que um estudante sintetiza ou formula uma nova idéia, que passa a ser um atributo de sua imagem de conceito. Não queremos dizer que tais idéias novas não tenham relação com as antigas, isto é, que expansão por inclusão seja a simples adivinhação de uma idéia desconectada da imagem de conceito prévia. Ao contrário, expansão por inclusão é a produção de uma idéia nova, que não seja uma reformulação ou reconstrução direta de qualquer idéia anterior isoladamente, mas que esteja embasada em toda uma gama de atributos da imagem de conceito prévia. É claro que o grau de novidade das idéias exteriorizadas será necessariamente uma questão de interpretação, que, no caso acima, traçamos com base nas fortes reações de entusiasmo do estudante.

6.2.5 Reversão

Carlos experimentou uma situação de conflito na entrevista T5, ao observar que o *Maple* não representava a descontinuidade da função $f_3(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, mesmo com o comando que faz a análise simbólica da expressão. Ele compreende a situação imediatamente, atribuindo o resultado ao algoritmo computacional para traçar gráficos por interpolação. Podemos considerar este como um efeito de confirmação, dado que àquela altura, o estudante já havia desenvolvido uma consciência considerável das limitações da máquina. Mas o conflito tem um segundo efeito: Carlos comenta também que o desenho feito por ele próprio no papel também é limitado, pois não é possível desenhar 'uma bolinha do tamanho de um ponto'. Isto é, o conflito detonado a princípio pela constatação de que a descrição computacional era limitada, quando comparada à descrição gráfica, fez com que o estudante se desse conta não só de limitações da descrição computacional, mas também da descrição gráfica (figura 6.7).

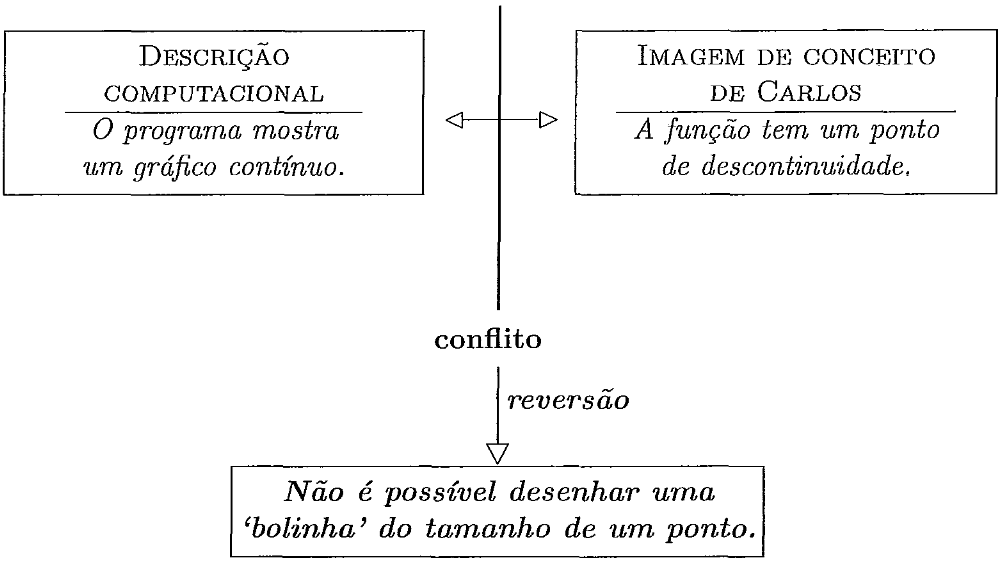


Figura 6.7: Um efeito de expansão da imagem de conceito de Carlos por reversão.

Chamaremos efeitos como este de *expansão de imagem de conceito por reversão*: um conflito detonado pelas limitações de uma certa descrição atua despertando a consciência para as limitações de outras descrições.

No caso de Carlos, o episódio motivou afirmação de que qualquer representação para um conceito matemático terá alguma 'imperfeição'. Alguns autores citados, por exemplo (GOLDENBERG, 1987; GUIN & TROUCHE, 1999; HILEL et al., 1999), ressaltam que muitos estudantes têm dificuldade em distinguir objetos matemáticos de suas representações. O caso de Carlos sugere que efeitos de reversão podem ter um papel particularmente importante contribuindo para esta distinção.

6.3 Alguns comentários finais

Uma constatação clara de nosso estudo é a de que a consciência das limitações do computador, por si só, não determina a influência destas limitações na forma como os estudantes utilizam o aparato em tarefas de aprendizagem de matemática. No começo do processo de entrevistas, Carlos se mostrava ciente de que o computador poderia gerar resultados aparentemente incoerentes, mas atribuía essas incoerências a limitações do usuário, não da máquina. Em conseqüência, o estudante investia no computador um papel de verificação de verdades matemáticas. Júlio estava ciente de que os resultados incoerentes gerados pelo computador se deviam a limitações da própria máquina. Mas mesmo assim, acreditava que resultados matemáticos poderiam ser verificados pelo computador – da mesma forma que Carlos. Observamos que a vivência de conflitos teve efeitos substanciais nas atitudes em relação ao computador para ambos os estudantes, refletidas tanto em seus mapas de evolução de discurso quanto nos mapas de evolução de episódios de conflito. Antônio, Francisco e Tiago, por outro lado, demonstravam consciência das limitações do computador e também do fato de que este não poderia fornecer critérios de verdade matemática. Para Antônio, as situações de conflito também propiciaram uma mudança de atitude – ele passou a ver as limitações como um fator potencialmente positivo para a aprendizagem de matemática – além de haverem motivado a formulação e a exploração de idéias matemáticas. No caso de Francisco, os conflitos atuaram em ressonância com a própria atitude investigativa do estudante, para criar um ambiente de aprendizagem propício para o aprofundamento de idéias. Para o caso de Tiago, interpretamos que uma confiança excessiva em descrições de natureza simbólica algébrica se constituiu em um obstáculo para um maior aproveitamento das situações de conflito.

É importante ressaltar que os resultados deste estudo foram obtidos a partir de uma abordagem pedagógica com um objetivo específico: explorar conflitos teórico-computacionais e utilizar limitações de descrições computacionais como fatores positivos para a aprendizagem de matemática. Tanto o planejamento das tarefas quanto nosso papel de entrevistador-professor foram orientados por este objetivo. Neste sentido, os resultados não são genéricos, mas aplicáveis a contextos com características semelhantes.

Em nossa avaliação, este estudo fornece subsídios para o planejamento de uma pedagogia com esta perspectiva. Restrições são assinaladas pelo caso de Marcelo. Os resultados dos demais participantes mostram que uma abordagem com esta orientação pode atuar de forma efetiva nas imagens de conceito dos estudantes, levando a desdobramentos não só nas concepções dos objetos matemáticos, mas também – talvez de forma mais significativa – nas concepções da própria atividade de aprender matemática.

Perspectivas

A opção por uma abordagem pedagógica implica na opção (implícita ou não) por uma concepção de objeto de ensino. Isto é, a questão *como ensinar* deve ser precedida pela questão *o que ensinar* – a primeira não faz sentido sem a segunda. Ao escolhermos que aspectos de um dado conceito enfatizar ou omitir, estamos estabelecendo e delimitando um objeto de ensino. Desta forma, a matemática que ensinamos reflete nossa concepção da matemática que deve ser aprendida. É no âmbito da concepção da matemática ensinada, da delimitação do objeto de ensino, que situamos os resultados deste trabalho. Nosso objetivo não é esmiuçar os mecanismos cognitivos do sujeito aprendiz aos quais a concepção da pedagogia deva estar subordinada, tampouco a estrutura técnica da matemática que deva determinar a organização dos conteúdos – pois não acreditamos que nem a estrutura cognitiva nem a estrutura matemática estejam *a priori* da atividade de aprender. Desta forma, não visamos descobrir formas eficientes de assimilação de matemática. Ao contrário, buscamos ambientes que motivem a produção de matemática e a produção de novas formas de aprender.

Uma pedagogia que procure reproduzir, de forma tão fiel quanto possível, a estrutura formal da matemática existente concebe o objeto matemático de ensino indistinto do objeto matemático técnico. O objeto de ensino é desvinculado do contexto histórico e epistemológico da própria matemática e independente do contexto social do ambiente pedagógico. É a fotografia de um instante congelado da matemática. E o objetivo do ensino é transmitir a técnica; aprender é assimilar a técnica. Por outro lado, uma pedagogia que busque exclusivamente a otimização da estrutura cognitiva do aprendiz concebe o objeto matemático de ensino como uma representação. Ensinar é escolher e expor a melhor representação: a mais clara e mais suave representação. Aprender é um ato fisiológico que mantém o sujeito mas não o transforma.

A teoria de imagens de conceito distingue o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico ao estabelecer o enriquecimento da imagem de conceito como objetivo do ensino e ao afirmar que a assimilação da estrutura formal é necessária, mas não suficiente para a aprendizagem. Por outro lado, a identificação de obstáculos epistemológicos na evolução da matemática indica pontos de resistência da matéria às investidas do conhecimento. Neste sentido, o ato de produzir matemática é um movimento contrário a um conhecimento anterior. Uma organização formal é portanto um estado da matemática, que nega um estado passado e será surpreendido por um estado futuro. A identificação de obstáculos epistemológicos na aprendizagem de matemática mostra que a compreensão do estado presente é um passo inevitável, mas não um objetivo final.

Considerando o panorama exposto acima, encaramos esta tese como um ponto de partida – um direcionamento de linhas de pesquisa. Sendo assim, neste trabalho desejamos dar início a uma discussão sobre parâmetros para o planejamento de uma abordagem pedagógica cuja concepção de objeto de ensino inclua não só os pontos fortes, mas as limitações das diferentes formas de descrever matemática, de forma a apresentar uma matemática enriquecida pela totalidade de suas descrições e, ao mesmo, tempo transcendente a cada uma delas. Em particular, visamos por um lado evidenciar a importância da organização formal, não como um estado permanente, mas como um estado presente, produto de um desenvolvimento passado e possibilitador de desenvolvimentos futuros. Por outro lado, não objetivamos a cristalização de uma forma ótima de aprendizagem, mas a criação de novas formas individuais de aprender. Sobretudo, defendemos uma pedagogia em que aprender matemática seja um ato de produção.

Referências

ABRAHÃO, A.M.C. 1998. *O Comportamento de Professores frente a Alguns Gráficos de Funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Obtidos com Novas Tecnologias*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ARCAVI, A. 1994. Symbol sense: Informal sense making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **14** (3), pp. 24-35.

ARCAVI, A. 2000. Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **5**, pp. 25-45.

ARCAVI, A & HADAS, N. 1999. *On Geometrical Change and Graphs*. The Weizmann Institute of Science.

ARCAVI, A. & & SCHOENFELD, A. 1992. Mathematics tutoring through a constructivist lens: The chanlenges of sense-making. *Journal of Mathematical Behavior*, **11**, pp. 321-335.

ARTIGUE, M. 1990. Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10** (2/3), pp. 241-286.

ARTIGUE, M. 1991. Analysis. In D.O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 167-198.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D. & HANESIAN, H. 1968. *Educational Psychology: A Cognitive View*. Holt, Rinehart & Winston, London.

BACHELARD, G. 1996. *A Formação do Espírito Científico: Contribuição para uma Psicanálise do Conhecimento*. Contraponto, Rio de Janeiro. [Título Original: *La Formation de l'Esprit Scientifique: Contribution à une Psychanalyse de la Connaissance*, Librarie Philosophique J. Vrin, Paris, 1938.]

BARNARD, T. 1999. Compressed units of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior*, **17** (4), pp. 401-404.

BARNARD, T. & TALL, D. 1997. Cognitive units, connections and mathematical proof. *Proceedings of the 21st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Finland, **2**, pp. 41-48.

BALACHEFF, N. 1993. The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proff. In A.J. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. Van Dormolen (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growing Through Teaching*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 175-192.

BELFORT, E. 2002. Utilizando o computador na capacitação de professores. In Carvalho, L.M. & Guimarães, L.C. (eds.), *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, **1**, pp. 35-44.

BELFORT, E.; CARVALHO, L.M. & GIRALDO, V. 2003. Conflitos teórico-computacionais em geometria dinâmica. *3º Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, regional Rio de Janeiro, Vassouras, Brasil.

BELFORT, E. & GUIMARÃES, L.C. 1998. O papel do software Educativo na formação continuada de professores de matemática. *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Leopoldo, Brasil, vol. II, pp. 104-107.

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L.C. & BARBASTEFANO, R. 1999. Geometria dinâmica e demonstrações na formação continuada de professores. *Anais do Cabri World 99*, vol. eletrônico, PUC/SP, São Paulo, Brasil.

BERLINSKY, D. 1995. *A Tour of the Calculus*. Mandarin, London.

BLOCKLAND, P.; GIESSEN, C. & TALL, D. 2000. *Graphic Calculus for Windows*, computer program. Available on: www.vusoft.nl

BOURBAKI, N. 1939. *Theory of Sets*. Hermann, Paris.

BOYER, C.B. 1939. *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo.

BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **4** (2), pp. 165-198.

BROUSSEAU, G. 1986. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Thèse d'Etat, Université de Bordeaux, France.

CALUDE, C.S. & CHAITIN, G.J. 1999. Randomness everywhere. *Nature*, **400**, pp. 319-320.

CARVALHO, L.M. & GIRALDO, V. 2000. Funções e novas tecnologias, algumas perguntas. *Anais do III Seminário: A Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro*, **1**, pp. 24-29, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, regional Rio de Janeiro, Campos dos Goytacazes, Brasil.

CARVALHO, L.M. & GIRALDO, V. 2001. Funções e novas tecnologias. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, **3** (1), pp. 111-119.

CARVALHO, L.M. & GIRALDO, V. 2002. Algumas Ferramentas Teóricas para a Pesquisa em Ensino de Matemática. In Carvalho, L.M. & Guimarães, L.C. (orgs.), *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, **1**, pp. 89-103.

CARVALHO, L.M. & GIRALDO, V. 2003. Raiz cognitiva, novos obstáculos e novos atos. *XI Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau, Brasil.

CASTANEDA, C. 1974. *Porta para o Infinito.* Record, Rio de Janeiro.

CHAZAN, D. 1993. Instructional implications of students' understanding of differences between empirical verification and mathematical proof. In. Schwartz, Yerushalmy & Wilson (eds.) The Geometric Supposer: What is it a Case of?, pp. 107-116.

CLEMENT, J. 2000. Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. Chapter 20 in A.E. Kelly & R.A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 547-589.

COHEN, D. 1996. *Precalculus: A Problems-Oriented Approach.* West Publishing, New York.

CONFREY, J. & DOERR, H. 1996. Changing the curriculum to improve student understandings of function. In D.F. Treagust, R. Duit & B.J. Fraser (eds.), *Improving Teaching and Learning in Science and Mathematics*, Teachers College Press, New York, pp. 162-171.

CORNU, B. 1981b. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME*, Grenoble, France, pp. 322-326.

CORNU, B. 1981a. *Apprentissage de la Notion de Limite: Conceptions et Obstacles.* Thèse de doctorat de troisième cycle, L'Université Scientifique et Medicale de Grenoble.

CORNU, B. 1991. Limits. In D.O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 153-166.

COURANT, R. & ROBBINS, H. 1941. *What Is Mathematics?* Oxford University Press, New York.

DEMANA & WAITS, 1986. Pitfalls in graphical computation. *College Mathematics Journal*, **19** (2), pp. 177-183.

DENNIS, D. & CONFREY, J. 1996. The creation of continuous exponents: A study of the methods and epistemology of John Wallis. *Research in College Mathematics*, **6**, pp. 33-60.

DOERR, H.M. & ZANGOR, R. 2000. Creating meaning for and with the graphing calculators. *Educational Studies in Mathematics*, **41** (2), pp. 143-163.

DOSTOEVSKY, S. 1961. Notes from the Underground. *The Best Short Stories of Dostoevsky.* University of Chicago Press, Chicago.

DREYFUS, T. & HADAS, N. 1996. Proof as answer to the question why. *International Reviews on Mathematical Education*, **1**, pp. 1-5.

DRIJVERS, P. 1997. What issues do we need to know more about: Questions for the future educational research concerning CAS. In J. Berry, M. Kronfellner & B. Kutzler (eds.) *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, Chartwell-Bratt, Bromley, pp. 190-202.

DRIJVERS, P. 2000. Creating meaning for and with the graphing calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **5**, pp. 189-209.

DRIJVERS, P. & DOORMAN, M. 1997. The graphic calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, **14** (4), pp. 425-440.

DUBINSKY, E. 1991. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D.O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 95-123.

DUGDALE, S.; THOMPSON, P.W.; HARVEY,W.; DEMANA,F.; WAITS, B.K.; KIERAN, C.; McCONNELL, J.W. & CHRISTMAS, P. 1995. Technology and algebra curriculum reform: Current issues, potential directions, and research questions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **14** (3), pp. 325-357.

DUNHAM, D. & DICK, T. 1994. Research on graphing calculators. *The Mathematics Teacher*, **87** (6), pp. 440-445.

DUVAL, R. 1999. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. *Proceedings of the 21st Annual Conference of the PME-NA*, Cuernavaca, Mexico, **1**, pp. 3-26.

FREUDENTHAL, H. 1991. *Revisiting Mathematics Education.* Kluwer, Dordrecht.

GAGNI, R. 1996. *Using Multiple Representations of Functions to Improve Semantics Understanding of Algebraic Expressions.* Unpublished Doctoral Thesis, Haifa University, School of Education, Israel.

GIRALDO, V. 2001a. Magnificação Local e Conflitos Teórico-Computacionais. Exame de Qualificação de Doutorado do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ.

GIRALDO, V. 2001b. *Melhor Reta*, rotina de Maple. Disponível em: www.im.ufrj.br/~victor

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2002a. Magnificação e linearidade local: novas tecnologias no ensino do conceito de derivada. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, **3** (2), pp. 101-110.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2002b. Local magnification and theoretical-computational conflicts. *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, United Kingdom, **1**, p. 277.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2003a. Local straightness and theoretical-computational conflicts: computational tools on the development of the concept image of derivative and limit. *3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italia. Disponível para *download* em: www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft/TG9_draft

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2003b. Descriptions and definitions in the development of the concept image of derivative. *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into Learning Mathematics.* Sheffield, United Kingdom, **23** (1), pp. 19-24.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2003c. Descrições e conflitos teórico-computacionais: o caso da retidão local. *Anais do II Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática.* Santos, Brasil, disponível em *CD-Rom.*

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2004a. The role of computational descriptions and conflicts in the teaching and learning of the concept of derivative. To appear in *Proceedings of the Topic Study Group on Research and Development in the Teaching and Learning of Calculus of the 10th International Conference of Mathematics Education*, Copenhagen, Denmark.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. 2004b. Computational descriptions and conflicts associated with irrational numbers. To appear in *Proceedings of the Topic Study*

Group on The Role and Use of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics of the 10^th^ International Conference of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.

GIRALDO, V.; BELFORT, E. & CARVALHO, L.M. 2004. Descriptions and conflicts in dynamic geometry. To appear in *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M. & TALL, D. 2002a. Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada. In Carvalho, L.M. & Guimarães, L.C. (eds.), *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, **1**, pp. 153-163.

GIRALDO, V.; L.M. CARVALHO, L.M. & TALL, D. 2002b. Theoretical-computational conflicts and the concept image of derivative. *Proceedings of the Conference of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Nottingham, United Kingdom, **22** (3), pp. 37-42.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M. & TALL, D. 2003a. Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. Chapter 5 in Pope, S. and McNamara, O. (eds.) *Research in Mathematics Education, Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics*, **5**, pp. 63-78.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M. & TALL, D. 2003b. Descriptions and definitions in the teaching of elementary calculus. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, USA, **2**, pp. 445-452.

GIRALDO, V. & ROQUE, T., 1996. The concept of function and its relationship with the failure in calculus in a Brazilian university. *II Taller Internacional sobre la Enseñanza de Matematicas para Ingenieria y Arquitectura*, Ciudad de la Habana, Cuba, pp. 436-437.

GIRALDO, V. & ROQUE, T., 1997. O uso do computador no ensino de cálculo e sues pré-requisitos. *Anais do 1º Encontro Estadual de Educação Matemática*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Rio de Janeiro, p. 58.

GOLDENBERG, P. 1987. Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs. *Proceedings of the 11 Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Canada, **1**, pp. 197-204.

GOLDIN, G.A. 2000. A scientific perspective on structured, task-base interviews in mathematics education research. Chapter 19 in A.E. Kelly & R.A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 517-545.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1970. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.* The MIT Press.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1987. What was and what should be the calculus? *Cahiers D'Historie et de Philosophie des Sciencies*, **21**, pp. 116-135.

GRAY, E.M. & PITTA, D. 1997. Changing Emily's images. *Mathematics Teaching*, **161**, pp. 38-51.

GRAY, E. & TALL, D. 1991. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view if the simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, **26** (2), pp. 115-141.

GUIMARÃES, L.C. & BELFORT, E. 1998. Uma experiência com software educativo na formação continuada de professores de matemática. *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, São Leopoldo, Brasil, vol. II, pp. 376-379.

GUIN, D. & TROUCHE, L. 1999. The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **3**, pp. 195-227.

HADAS, H. & HERSHKOWITZ, R. 1998. Proof in geometry as an explanatory and convincing tool. *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Stellenbosch, South Africa, **3**, pp. 25-32.

HADAS, H. & HERSHKOWITZ, R. 1999. The role of uncertainty in construction and proving in computerized environment. *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Haifa, Israel, **3**, pp. 57-64.

HADAS, H.; HERSHKOWITZ, R. & SCHWARZ, B. 2000. The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments *Educational Studies in Mathematics*, **44**, pp. 127-150.

HAIRER, E. & WARNER, G. 1997. *Analysis by Its History.* Springer Verlag, New York.

HAREL, G. & DUBISNKY, E. (eds.) 1992. *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.* Mathematical Association of America, Washington DC.

HAZZAN, O. & GOLDENBERG, E.P. 1997. Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **1**, pp. 263-291.

HEATH, T.L. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Dover, New York.

HEID, L. 1988. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19** (1), pp. 3-25.

HERTZER, K. & MALACA, C. 1997. *Graphmatica para Windows, versão 2.0P.* Disponível para download em: www.angelfire.com/ca/cammac

HILEL, J.; LEE, L.; LABORDE, C. & LINCHEVSKI, L. 1992. Basic functions through the lens of computer algebra systems. *Journal of Mathematical Behavior*, **11**, pp. 119-158.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. & FRAZER LOCK, P. 1998. *Applied Calculus.* John Wiley & Sons, New York.

HUNTER, M., MONAGHAN, J.D. & ROPER, T. 1993. The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking. In R. Sutherland (ed.) *Working Papers* *for ESCR Algebra Seminar*, London University, Institute of Education, London, England.

KATZ, V. 1992. *A History of Mathematics.* Harper Collins, New York.

KAWSI, M. 1997. How CAS and visualization lead to a complete rethinking of an introduction to vector calculus. *Proceedings of the Third International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, volume eletrônico, Koblenz, Germany. Disponível para *download* em: http://math.la.asu.edu/~kawski.

KEY CURRICULUM PRESS. 1996. *The Geometer's Sketchpad, version 3.05.*

KLINE, M. 1954. *Mathematics in Western Culture.* Bradford and Dickens, London.

KLINE, M. 1974. *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math.* Random House, New York.

LAKATOS, I. 1978. Cauchy and the Continuum. In *Mathematics, Science and Epistemology, the Philosophical Papers of Imre Lakatos.* Cambridge University Press.

LAUDARES, J.B. & LACHINI, J. (2000). O uso do computador no ensino de matemática na graduação. *23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, Caxambu, Brasil. Disponível em: www.anped.org.br

LEIKIN, R. & WINIKI-LANDMAN, G. 2000. On equivalents and non-equivalents definitions: part 2. *For the Learning of Mathematics*, **20** (2), pp. 24-29.

LEINHARDT, G.; ZASLAVSKY, O. & STEIN, M.K. 1990. Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, **60** (a), pp. 1-64.

LOGAL EDUCATION SOFTWARE, 1994. *Geometry Inventor* (computer software), Cambridge, USA.

MALIK, M.A. 1980. Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **4**, pp. 489-492.

MAYES, R. 1997. Current state of research into CAS in mathematics education. In J. Berry, M. Kronfellner & B. Kutzler (eds.) *The State of Computer Algebra in Mathematics Education*, Chartwell-Bratt, Bromley, pp. 171-189.

MEIRA, L. 1998. Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, **29** (2), pp. 121-142.

MILLS, J., TALL, D.O. & WARDLE, M. 1990. A quartic with a thousand roots Mathematical Gazette, 74:339-346

MONAGHAN, J.D., SUN, S. & TALL, D. 1994. Construction of the limit concept with a computer algebra system. Proceedings of the 18^{th} Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisboa, Portugal, **3**, pp. 279-286.

MOSCHKOVICH, J., SCHOENFELD, A. & ARCAVI, A. 1993. Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T.A. Romberg, T.P. Carpenter & E. Fennema (eds.) *Integrating Research on the Graphical Representations of Functions*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, pp. 69-100.

NEWELL, A. & SIMON, H.A. 1972. *Human problem solving.* Prentice Hall, Englewood Cliffs.

ORWELL, G. 1954. *1984.* Penguin, Harmondsworth.

PENGLASE, M. & ARNOLD, S. 1996. The graphics calculator in mathematics education: A critical view of recent research. *Mathematics Education Research Journal*, **8** (1), pp. 58-90.

POINCARÉ, H. 1899. L'ouvre mathématique de Weierstrass. *Acta Mathematica*, **22**.

POINCARÉ, H. 1908a. *Science et Méthode.* Kimé, Paris 1999.

POINCARÉ, H. 1908b. L'avenir des mathématiques. *Rindiconti del circolo matematico di Palermo.* **16**, pp. 162-168.

RESTIVO, S. 1991. *Sociological Worldview.* Basil Blackwell, Cambridge.

ROBERT, A. 1982. L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **3** (3), pp. 307-341.

RHAM, G. 1957. Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *L'Enseignement des Mathématiques*, **3**, pp. 71-72.

ROBINSON, A. 1966. *Non-Standard Analysis.* North Holland, Amsterdam.

RUSSELL, B. 1993. *Introduction to Mathematical Philosophy.* Dover, New York.

SCHWARTZ, B.; YERUSHALMY, M. & HARVEY, W. 1988. *The Function Supposer: Explorations* (computer software), Sunburst Communications.

SFARD, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, pp. 1-36.

SIERPIŃSKA, A. 1985. Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **6** *(1), pp. 5-67.*

SIERPIŃSKA, A. 1987. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* **18**, *pp. 371-397.*

SIERPIŃSKA, A. 1988. Epistemological remarks on functions. *Proceedings of the 12th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vesprem, Hungary, 568-575.

SIERPIŃSKA, A. (1992). On understanding the notion of function. In *The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy.* MAA Notes.

SIERPIŃSKA, A. (1992). *Understanding in Mathematics.* Vol. 2 of *Studies in Mathematics Education Series* The Falmer Press, London.

SKEMP, R.R. 1971. *The Psychology of Learning Mathematics.* Penguin Books, London.

SKEMP, R.R. 1979. *Inteligence, Learning and Action.* Wiley, London.

STEINER, M. 1975. *Mathematical Knowledge.* Cornell University Press, Ithaca.

SKEMP, R.R. 1961. The revolution in mathematics. *America Mathematical Monthly,* **47**, pp. 304-327.

TAKAGI, T. 1903. A simple example of the continuous function without derivative. *Tokio Mathematical Society,* **1**, pp. 176-177.

TALL, D. 1980. The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* **11**, pp. 271-284.

TALL, D. 1982. The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere. *Mathematical Gazette,* **66**, pp. 11-22.

TALL, D. 1986a. *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using a Computer Graphics.* Ph.D. Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, United Kingdom.

TALL, D. 1986b. *Graphic Calculus,* software for BBC compatible computers. Glentop Press, London.

TALL, D. 1989. Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics,* **9** (3), pp. 37-42.

TALL, D. 1992. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws, D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Macmillan, New York, pp. 495-511.

TALL, D. 2000. Biological Brain, Mathematical Mind and Computational Computers. *Proceedings of the 5th Asian Technology Conference in Mathematics,* Chiang Mai, Thailand, pp. 3-20.

TALL, D. 2001. Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal,* **12** (3), pp. 196-218.

TALL, D. 2002. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In Carvalho, L.M. & Guimarães, L.C. (eds.), *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, **1**, pp. 1-27.

TALL, D. & BILLS, L. 1998. Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. *Proceedings of the 22th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Stellenbosch, South Africa, **2**, pp. 104-111.

TALL, D.; BLOCKLAND, P. & KOK, D. 1990. *A Graphic Approach to Calculus*, computer program. Sunburst, New York.

TALL, D. & CROWLEY, L. 1999. The roles of cognitive units, connections and procedures in achieving goals in college algebra. *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Israel, **2**, pp. 225-232.

TALL, D. & DeMAROIS, P. 1999. Function: organizing principle or cognitive root? *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Israel, **2**, pp. 257-264.

TALL, D.; GRAY, E. & PITTA, D. 2000. Objects, actions and images: a perspective on early number development. *Journal of Mathematical Behavior*, **18** (4), pp. 1-13.

TALL, D. & LI, L. 1993. Constructing different concept images of sequences and limits by programming. *Proceedings of the 17th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Japan, **2**, pp. 41-48.

TALL, D. & McGOWEN, M. 1999. Concept maps & schematic diagrams as devices for documenting the growth of mathematical knowledge. *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Israel, **3**, pp. 281-288.

TALL, D.; McGOWEN, M. & DeMAROIS, P. 2000. The function machine as a cognitive root for building a rich concept image of the function concept. *Proceedings of the the 22rd PME-NA Conference*, **1**, pp. 247-254.

TALL, D. & VINNER, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**, pp. 151-169.

TEXAS INSTRUMENTS INC. *Derive, version 5.*

THURSTON, W.P. 1990. Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society*, **37** (7), pp. 844-850.

TIROSH, D. & TSAMIR, P. 1996. The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **27** (6), pp. 33-40.

VAN REEUWIJK, M. 1995. Students' knowledge in algebra. *Proceedings of the 19 Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **11**, 135-160.

VERGNAUD, FG. 1989. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des Mathématiques. In N. Bernard & C. Garnier (orgs.), *Construction des Savoirs: Obstacles et Confltis*, Otawa, Les Éditons Agence d'Arc, pp. 33-40.

VINNER, S. 1983a. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14** (3), pp. 293-305.

VINNER, S. 1983b. Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. *Proceedings of the 6th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Antwerp, Belgium, pp. 24-28.

VINNER, S. 1991. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In D.O. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 65-81.

VINNER, S. & DREYFUS, T. 1991. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20** (5), pp. 356-366.

WATERLOO MAPLE INC. 1998. *Maple V Release 5.*

WILSON, M.R. & KRAPFL, C.M. 1994. The impact of graphing calculators on students' understanding of function. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **13** (3), pp. 252-254.

WINIKI-LANDMAN, G. & LEIKIN, R. 2000. On equivalents and non-equivalents definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, **20** (1), pp. 17-21.

YERUSHALMY, M. 1991. Students perceptions of aspects of algebraic functions using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning*, **7** (1), pp. 42-57.

YERUSHALMY, M. 1991. Generalization in geometry. In. Schwartz, Yerushalmy & Wilson (eds.) The Geomtric Supposer: What is it a Case of?, pp. 57-84.

YERUSHALMY, M. 1997. Reaching the unreachable: Technology and the semantics of asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **2**, pp. 1-25.

YERUSHALMY, M. CHAZAN D. & GORDON, M. 1993. Posing problems: One aspect of bringing inquiry into classrooms. In J. Schmartz, M. Yerushalmy and B. Wilson (eds.), *The Geometry Supposer, What is it a Case of?*, Lawrence Erlbaun, Hillsdale, NJ, pp. 117-142.

YERUSHALMY, M.; MAMAN, H. & KITAI, D. 1995. *Visual Mathematics: Precalculus & Calculus.* Haifa University, School of Education, Israel.