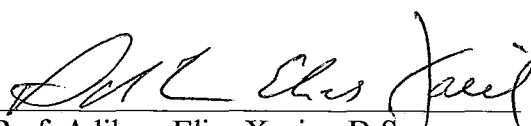


SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA APLICADA NO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO
DE ESTAÇÕES DE RÁDIO BASE

José André de Moura Brito

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

Aprovada por:



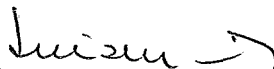
Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.



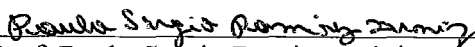
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.



Prof. Henrique Pacca Loureiro Luna, D.Sc.



Prof. Luiz Costa da Silva, D.Sc.



Prof. Paulo Sergio Ramirez Diniz, D.Sc.



Prof. Maria Helena Cautiero Horta Jardim, D.Sc.



Prof. Carlile Campos Lavor, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JUNHO DE 2004

BRITO, JOSÉ ANDRÉ DE MOURA

Suavização Hiperbólica Aplicada no Problema
de Localização de Estações de Rádio Base
[Rio de Janeiro] 2004

XXII, 118 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2004)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Suavização
2. Penalização Hiperbólica
3. Localização de Estações de Rádio Base
I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA APLICADA NO PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE ESTAÇÕES DE RÁDIO BASE

José André de Moura Brito

Junho/2004

Orientador: Adilson Elias Xavier

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, consideramos uma nova metodologia de solução para o problema de localização de estações de rádio base. A formulação matemática para solução deste problema está associada a modelo min-max-min que, além da sua natureza intrinsecamente multinível, tem a significativa característica de ser não-diferenciável. Com a finalidade de contornar estas dificuldades, desenvolvemos uma estratégia de suavização, utilizando uma função suavizadora especial da classe C^∞ . A solução final é obtida pela solução de uma seqüência de subproblemas diferenciáveis, que se aproximam gradualmente do problema original. O uso desta técnica, chamada Suavização Hiperbólica, permite contornar as principais dificuldades apresentadas no problema original. Um algoritmo contendo as essencialidades do método é apresentado. Para fins de ilustração da solução do problema e das potencialidades da metodologia, um conjunto de resultados computacionais é apresentado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

HIPERBOLIC SUAVIZATION APPLIED IN THE BASE STATION LOCATION PROBLEM

José André de Moura Brito

June/2004

Advisor: Adilson Elias Xavier

Department: Systems Engineering and Computer Science

This work considers a new solution methodology for the base station location problem. The mathematical formulation for the solution of this problem is associated with the min-max-min problem which, in addition to its intrinsic multi-level nature, has the significant characteristic of being non-differentiable. In order to overcome these difficulties, we have developed a smoothing strategy, using a special smoothing function of class C^∞ . The final solution is obtained by solving a sequence of differentiable subproblems, which gradually approach the original problem. The use of this technique, called Hyperbolic Smoothing, allows us to overcome the main difficulties presented by the original problem. An algorithm containing the essentialities of the method is presented. For purposes of illustrating the solution of the problem and the potentialities of the method, a set of computational results is presented.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus consolador e das vitórias, nosso “ajudador” em todos os momentos de adversidade.

“Fiz o melhor que pude na corrida, cheguei até o fim, conservei a fé”. (2Tm 4.7)

À querida Luciana, esposa, amiga, companheira e “ajudadora” de todos os momentos.

À minha mãe e meu pai, pela vida, pelo amor e por todos os ensinamentos.

À Selma e Milton, pelo amor e incentivo.

Aos queridos tios, Cauby e Atalá.

À minha irmã e a todos os meus familiares.

À amiga Fátima, pela sua eterna e inexorável presteza.

Ao prezado professor Antônio de Oliveira, pelo seu auxílio em questões da tese.

Ao estimadíssimo professor Adilson Elias Xavier, pela orientação incansável e ética em toda a tese, por sua amizade e pela transmissão de seus ensinamentos e conhecimentos, que nunca estiveram restritos à esfera acadêmica.

Ao singular e estimadíssimo professor Nelson Maculan, mestre, orientador e amigo em todos os momentos, pela simplicidade, pelo conhecimento transmitido e pela amizade.

A todos os funcionários e colegas do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação.

AO CNPq, pelo financiamento de minha pesquisa.

À Belinha e Mel.

Índice

1 . Introdução	1
2 . Conceitos Básicos de Telefonia Celular	6
2.1 Sistemas de Comunicação Genéricos.....	6
2.2 Elementos de um Sistema de Comunicação.....	6
2.3 Configuração do Sistema de Comunicação via Rádio.....	7
2.4 Estrutura de um Sistema Celular.....	9
2.5 O Conceito de Célula e Área de Cobertura.....	10
2.6 Antenas Utilizadas no Sistema Celular.....	12
2.7 Padrões de Distribuição de Células.....	12
2.8 Propagação de Sinais	13
3. Detalhamento do Problema	14
3.1 Definição do Problema	14
3.2 Panorama do Problema	17
3.2.1 Introdução.....	17
3.2.2 Modelagens para o Problema de Localização de ERB's.....	17
4. Detalhamento da Metodologia.....	24
4.1 Introdução.....	24
4.2 Fundamentos da Suavização Hiperbólica.....	24
4.2.1 Programação Não-Diferenciável.....	24
4.2.2 Suavização.....	27
4.2.3 Penalização Hiperbólica.....	33
4.3 Modelagem Proposta.....	36
4.4 Aspectos Teóricos da Modelagem.....	47
4.4.1 Condições de 1ª Ordem.....	47
4.4.2 Análise dos Gradientes.....	50
4.4.3 Estudo do Aspecto de Quasi-Concavidade.....	57
4.5 Variações da Modelagem Proposta.....	63
5. Resultados Computacionais.....	76
5.1 Programa de Geração dos Dados.....	76
5.2 Programa de Resolução das Modelagens.....	78
5.3 Resultados da Modelagem M0: Cobertura Total (Mod. Básica).....	78
5.4 Resultados da Modelagem M1: Agrupamento de Estações.....	90
5.5 Resultados da Modelagem M2: Estações com Localização.....	94
Pré-Definida	
5.6 Resultados da Modelagem M3: Conjunto de Pontos Candidatos	100
para Instalação de ERB's	
5.7 Resultados da Modelagem M4: Potências de Transmissão.....	104
Diferenciadas	
6. Conclusões.....	110
7. Bibliografia.....	114

1. Introdução

A grande explosão tecnológica ocorrida nas últimas décadas trouxe a disponibilidade de serviços cada vez mais baratos, eficientes e de grande utilidade. Para qualquer setor da economia que se olhe ou qualquer segmento social que se analise, é possível ver as marcas deste desenvolvimento tecnológico, através dos novos automóveis, computadores, eletrodomésticos, sistemas de comunicação, etc.

Em particular, numa época onde há uma necessidade cada vez maior dos meios de comunicação para troca de informações, dados, etc, os sistemas de telefonia vêm desempenhando um papel de grande importância no cenário mundial. A utilização destes sistemas pode estar associada a serviços de Internet, telefonia móvel, transmissão de dados, bibliotecas, telefonia convencional, teleconferência, etc.

Para essa diversidade tão grande de serviços, as empresas operadoras estão trabalhando com desafios cada vez maiores para prestar um atendimento eficiente e aderente às necessidades de cada um dos usuários de seus sistemas. Num mundo, então, cada vez mais dinâmico e complexo, deve-se buscar um aperfeiçoamento cada vez maior desses sistemas de telefonia.

Com o aperfeiçoamento desses sistemas, surge uma nova geração de sistemas de comunicação, baseados na telefonia móvel e celular e, com esses, os conceitos de mobilidade e portabilidade. O usuário é capaz de transportar seu próprio meio de comunicação para onde quer que vá e se comunicar com outro usuário onde quer que esteja. Temos, então, o crescimento das redes de telefonia celular, cujo planejamento está associado a três grandes desafios:

- O razoável aumento do número de usuários faz com que as operadoras da rede tenham a necessidade de replanejar e otimizar seus sistemas, a fim de que sejam capazes de trabalhar com uma enorme demanda por serviços.

- A utilização e o aproveitamento dos sistemas de terceira geração na rede (Stuber[2] e Mateus[3]) (caracterizados por serviços de comunicação rápida, incluindo voz, fax e Internet), depende de critérios de planejamento baseados nas demandas por serviços, visto que a área de cobertura de um sistema (Stuber[2] e Mateus[3]) depende simultaneamente das características de propagação das ondas de rádio e da densidade de usuários.

- Os órgãos reguladores dos sistemas de telefonia estão forçando cada vez mais as novas operadoras de rede a reduzirem o tempo de planejamento necessário para colocar em funcionamento os serviços de telefonia com um bom nível de qualidade para todos os usuários da rede.

Dessa forma, as companhias têm que desenvolver metodologias de planejamento rápidas e eficientes para garantir a satisfação dessas exigências. Torna-se necessário o desenvolvimento de ferramentas automáticas de planejamento que gerem possíveis configurações de funcionamento para rede.

Observa-se, então, que a tarefa central no planejamento de um sistema celular está associada ao desenvolvimento de uma rede com os menores custos possíveis e que atenda a todas necessidades dos usuários. Da necessidade de realização destas tarefas surge, entre outros, o problema de localização de estações de rádio base (ERB's), que é um dos pontos chave no planejamento de uma rede de telefonia celular.

Para uma certa região em estudo, deve-se definir subconjuntos de células (*clusters*) (Stuber[2]), considerando que cada uma destas células delimitará, do ponto de vista de topologia e utilização de serviços, uma certa parte da região original. Em seguida, efetuam-se medidas de propagação do sinal de rádio (Mateus[3]), visando a determinar a qualidade deste sinal em cada ponto da região. Esta qualidade estará associada a fatores externos como presença de montanhas, construções e outros transmissores próximos, já existentes nesta área (Stuber[2]). Todo este conjunto de atividades é normalmente efetuado pela equipe de planejamento da empresa.

Definida a qualidade do sinal, via mapas de propagação, *ad hoc*, o planejamento determinará, inicialmente, um conjunto de possíveis pontos desta região, candidatos a terem instaladas as estações de rádio base (ERB's). Deve-se, então, selecionar deste conjunto um subconjunto de estações, que serão instaladas de forma que as necessidades por serviços dos clientes sejam atendidas e que os custos com equipamentos sejam os menores possíveis. Esta seqüência de procedimentos caracteriza o problema de localização de estações de rádio base.

Normalmente, para este processo, não há nenhum modelo de programação matemática que determine quais ERB's devem ser instaladas na região em estudo. E sendo assim, o planejamento faz uso apenas de modelos de propagação de sinais (Stuber[2] e Mateus[3]).

Dependendo, então, da dimensão da região em estudo, ou seja, do número de pontos a serem atendidos (usuários) na região e do número de ERB's candidatas à instalação, o número de soluções possíveis, implementáveis pelo planejamento, pode ser razoavelmente grande. E em virtude disto, o processo de determinação de localização das ERB's utilizado pelo planejamento pode fornecer uma solução apenas razoável, comprometendo em alguns casos a qualidade e os custos com equipamentos e serviços, visto que pode tornar-se impossível enumerar todas as possíveis soluções para o problema, ou seja, subconjuntos de ERB's que podem ser instaladas nesta região. Face a essa dificuldade e à necessidade de uma rápida resolução deste problema, várias abordagens baseadas em técnicas de programação inteira (Beasley[4],

Maculan[6] e Wolsey[9]), metaheurísticas e heurísticas (Reeves[10], Viana[31] e Maculan[41]), programação não-linear (Martinez[26] e Simmons[42]) e teoria dos grafos (Swarcfiter[28] e Boaventura[32]) têm sido utilizadas para tal fim.

Desta forma, devido às dificuldades intrínsecas a esse problema, mesmo com a utilização dessas técnicas, a determinação de soluções exatas (Maculan[6] e Wolsey[9]) pode ser muito difícil, acarretando apenas na obtenção de soluções viáveis (Maculan[6] e Wolsey[9]). Estas soluções dependem diretamente das características consideradas no problema e da própria ferramenta de otimização utilizada.

Propomos, então, neste trabalho, uma nova abordagem para auxiliar na resolução do problema de localização de estações de rádio base. Essa abordagem está baseada num modelo, de certa forma clássico, cujo desenvolvimento produz um problema $min - max - min$. Esse problema, por possuir 3 níveis, e por ser não-linear, não-diferenciável e normalmente de grande porte é extremamente difícil.

A sua resolução nesse trabalho será efetuada através da utilização em conjunto das técnicas de suavização (Chaves[12][13]) e penalização hiperbólica (Xavier[7]).

Deve ser destacado que, além da própria estrutura intrínsecamente não-diferenciável do problema $min - max - min$, a função objetivo utilizada nesse problema é a função distância euclidiana, que possui notadamente pontos de não-diferenciabilidade (Santos[8]).

Para um melhor entendimento do aspecto de não-diferenciabilidade associado à modelagem $min - max - min$ e da teoria aplicada à solução deste problema, fazemos uma rápida apresentação sobre o problema de programação não-diferenciável. Em seguida, apresentamos os conceitos da técnica de suavização proposta nos trabalhos de Chaves[12][13] e que será aplicada para a solução do problema $min - max - min$. A suavização deste problema nos conduz a uma seqüência de problemas diferenciáveis com restrições, que se aproximam gradativamente do problema original (Chaves[12][13]).

Porém, ao invés de utilizarmos um dos métodos associados a problemas de programação não-linear (Martinez[26], Simmons[42]) com restrições, utilizamos a técnica de penalização hiperbólica desenvolvida por Xavier[7]. Nessa, a obtenção da solução é produzida através da resolução de uma seqüência de problemas de otimização sem restrições, que podem ser resolvidos mediante a aplicação de métodos de otimização não-linear diferenciáveis (Santos[8], Martinez[26], Simmons[42]), mais robustos e eficientes, tais como Gradiente e Newton, ou seja, a combinação das técnicas de suavização e penalização hiperbólica evita a necessidade da utilização de métodos de programação não-diferenciável, tais como o Subgradiente ou Feixes (Santos[8] e Campos[30]).

O desenvolvimento de nosso trabalho de tese está dividido em cinco partes:

Na primeira parte, abordamos os principais conceitos associados ao funcionamento e às características de uma rede de telefonia celular. A finalidade desse item é o de fornecer um embasamento mínimo para o entendimento do problema de localização de estações de rádio base.

Na segunda parte, fazemos uma descrição detalhada do problema de localização de estações de rádio base e apresentamos a revisão bibliográfica efetuada ao decorrer desse trabalho. Ou seja, é feita uma exposição geral das abordagens atualmente existentes para este problema e para problemas correlatos, considerando as modelagens e técnicas de otimização baseadas no *Branch and Bound* e na *Relaxação Lagrangeana* (Maculan[6], Wolsey[9]), metaheurísticas como *Simulated Annealing* (Reeves[10], Viana[31]) e algumas abordagens baseadas na teoria de programação não-linear (Martinez[26], Simmons[42]) e na teoria dos grafos (Swarcfter[28], Boaventura[32]).

Na terceira parte, a espinha dorsal de nosso trabalho de tese, temos uma apresentação das contribuições que obtivemos durante o processo de estudo do problema de localização de ERB's e do desenvolvimento da metodologia *min - max - min*, baseada na combinação das técnicas de suavização e penalização hiperbólica, e que é proposta para resolução desse problema. A seguir, apresentamos as contribuições deste trabalho:

- A construção / exposição detalhada da modelagem *min - max - min* proposta para resolução do problema de localização de ERB's, destacando seus aspectos diferenciadores em relação às modelagens existentes e de quatro modelagens derivadas da análise e observação desta modelagem *min - max - min* e dos aspectos intrínsecos ao problema de localização de ERB's.

Nestas modelagens consideramos parâmetros tais como: a distância máxima entre as estações, considerando que estas estações estão agrupadas; proximidade de ERB's de pontos pré-determinados; seleção de locais (pontos) para instalação de ERB's e definição de potências de transmissão diferenciadas (raios de cobertura) para as ERB's.

- O desenvolvimento de um algoritmo para resolução da nova modelagem proposta e das quatro modelagens derivadas da mesma. Na execução deste algoritmo, consideramos várias instâncias do problema de localização de ERB's, ou seja, variação do número de ERB's e do número de pontos a serem cobertos.

- O estudo das condições de 1ª ordem para a modelagem *min - max - min*.

- Uma análise das expressões dos gradientes associados às restrições de recobrimento, definidas pela função $\phi(\cdot)$.
- O estudo do aspecto de quasi-concavidade de cada função $\phi(\cdot)$ que compõe as restrições desta modelagem.

Na quarta parte, descrevemos o funcionamento do programa confeccionado para geração de dados e do programa que resolve a modelagem *min – max – min* básica e as quatro modelagens variantes.

Temos também, um conjunto de tabelas, que contemplam informações de vários problemas testes, tais como: número de estações utilizadas para resolver o problema, número de pontos a serem cobertos, tempo de resolução do problema, valores dos parâmetros utilizados no algoritmo de suavização hiperbólica, etc. E conjuntamente com estas tabelas, temos a apresentação de figuras que representam a solução gráfica de alguns problemas testes resolvidos pelas cinco modelagens.

Concluindo nossa exposição, temos considerações sobre o trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2. Conceitos Básicos de Telefonia Celular

Este capítulo tem como objetivo básico dar subsídios para o entendimento do funcionamento e das características do sistema de telefonia celular. Inicialmente, faremos uma rápida descrição dos sistemas de comunicação em geral. Em seguida, abordaremos o sistema de telefonia celular, de uma forma mais detalhada, cobrindo suas principais características de estrutura e funcionamento. A apresentação desses conceitos auxiliará no entendimento do problema de localização de estações de rádio base.

2.1 Sistemas de Comunicação Genéricos

Uma cadeia de comunicação é formada por três elementos básicos : a fonte de informação, o sistema de comunicação e o destino.

A fonte de informação é, como o nome sugere, a origem da mensagem ou informação transmitida. Essa informação normalmente é representada na forma de sons, imagens ou textos. O destino é onde a informação será utilizada.

2.2 Elementos de um Sistema de Comunicação

A finalidade do sistema de comunicação é transportar a informação da fonte até o destino, preservando ao máximo suas características originais. Na figura 1, destacamos os elementos de um Sistema de Comunicação.

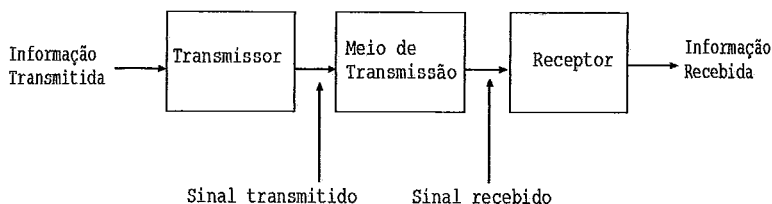


Figura 1 - Diagrama em blocos de um sistema de comunicação

O transmissor tem a finalidade de transformar a informação nele aplicada em um sinal adequado, para vencer a distância que o separa do receptor (Nascimento[1]). Na figura 1, o fluxo do sinal é representado pelas setas.

O meio de transmissão é responsável pelo transporte do sinal do transmissor até o receptor, sendo, com certeza, o elemento que isoladamente exerce maior influência sobre o desempenho do sistema de comunicação, que determina, inclusive, o tipo de transmissor e receptor utilizados.

Por fim, cabe ao receptor a tarefa de resgatar a informação presente no sinal recebido, devolvendo-lhe o formato original.

2.3 Configuração do Sistema de Comunicação via Rádio

Um sistema de comunicação via rádio é composto por, pelo menos, duas estações de rádio, sendo uma transmissora e outra receptora (figura 2).

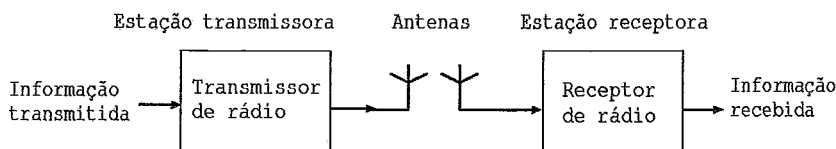


Figura 2 - Diagrama em blocos de um sistema de comunicação via rádio

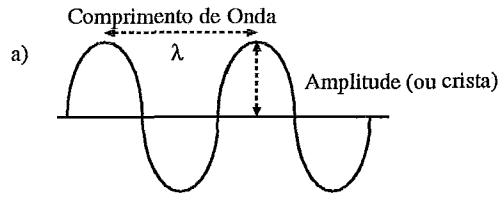
Cada estação é composta por um equipamento de rádio, uma linha de transmissão e uma antena. A função dos equipamentos de rádio é, no caso do transmissor, gerar sinais de radiofrequência (Nascimento[1]) e, no caso do receptor, recebê-los; a da linha de transmissão é conduzir o sinal de radiofrequência do transmissor até a antena ou da antena até o receptor. Finalmente, a função da antena é gerar ou captar ondas eletromagnéticas.

Devido à existência de um grande número de estações transmissoras, cada antena receptora irá captar inúmeros outros sinais, além do sinal desejado. Desta forma, antes de recuperar a informação contida num determinado sinal, é necessário separá-lo. Para que isso possa ser realizado, o sinal (onda eletromagnética) precisa possuir alguma característica que permita diferenciá-lo dos demais. Esta característica é a sua frequência. Além da frequência, uma onda possui amplitude e fase.

A amplitude de uma onda pode ser definida como a perturbação máxima sofrida durante um ciclo de vibração (sinal analógico - figura 3.a) ou como a diferença de voltagem para o degrau entre 0 e 1 (caso de um sinal digital- figura 3.b). Iniciando na voltagem zero, essa onda cresce, atinge sua amplitude, decresce, se anula, atinge sua amplitude negativa e volta a crescer até se anular novamente. Esta seqüência compõe um ciclo. A frequência f de uma onda corresponde ao número de ciclos por segundo, sendo $f = \frac{1}{T}$, e T corresponde ao período. A amplitude também é definida pela altura da crista (o ponto mais alto da onda).

A teoria ondulatória estabelece que a distância, em metros, entre duas cristas define o comprimento de onda λ (figura 3a), sendo $\lambda = v.T$ ou $\lambda = \frac{v}{f}$ (v = velocidade de propagação da onda).

Sinal Analógico



Sinal Digital

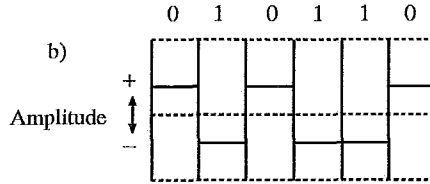


Figura 3 - Ondas de Sistemas Analógicos e Digitais

O intervalo entre duas frequências define uma banda; a diferença entre a maior e a menor frequência caracteriza a largura da banda que, por conseguinte, determina a capacidade em (bit/s) de um canal definido entre essas duas frequências. Deve-se observar que a comunicação via rádio atua num espectro de frequências que, varia de 30 KHz a 300 GHz (tabela 1).

Tabela 1 - Espectro de Frequências

<i>Intervalo de Frequência</i>	<i>Sigla</i>	<i>Classificação</i>
30-300 KHz	LF	Low Frequency
300 KHz - 3 MHz	MF	Medium Frequency
3-30 MHz	HF	High Frequency
30-300 MHz	VHF	Very High Frequency
300 MHz - 3 GHz	UHF	Ultra High Frequency
3-30 GHz	SHF	Super High Frequency
30-300 GHz	EHF	Extremely High Frequency

A conexão transmissor/receptor pode ser efetuada por diversos tipos de ondas. As ondas terrestres, ou de superfície, seguem a superfície ou curvatura da terra. Já as ondas diretas viajam em linha reta e seu alcance é limitado ao horizonte óptico (Nascimento[1]). Podemos também destacar as ondas celestiais que usam a camada da ionosfera como meio de transporte.

A transmissão/recepção das ondas eletromagnéticas de uma localidade para outra, ou seja, o alcance das ondas, depende do meio (relevo, construções, etc) e da altura das antenas transmissoras e receptoras.

Cada ERB está conectada por uma linha física dedicada a uma Central de Controle e Comutação (CCC) que, por sua vez, está conectada a uma Rede de Telefonia Pública Comutada (RTPC). A CCC é responsável pelo controle de várias ERB's e pela monitoração de chamadas e do processo de *handoff* (Nascimento[1], Stuber[2]), que é um mecanismo que se caracteriza pela mudança automática de chamada de uma célula para outra, à medida que o usuário se desloca. Em outras palavras, o enlace de rádio frequência do telefone celular é redirecionado para uma ERB mais próxima com a finalidade de melhorar a transmissão. O *handoff* é necessário, quando o telefone celular se afasta em demasia da ERB com a qual está em contato ou quando o telefone celular entra numa região de sinal fraco (Nascimento[1], Mateus[3]). Em ambas as situações, a intensidade do sinal proveniente do telefone celular, na antena da ERB, pode cair abaixo de -100dbm ou a relação sinal/ruído pode se tornar inaceitável (Nascimento[1], Stuber[2]).

A conexão entre uma ERB e uma unidade móvel é disponibilizada por um canal de comunicação (Nascimento[1]). Nos sistemas mais antigos, havia um canal específico para cada usuário; já para os novos sistemas baseados, por exemplo, no CDMA (*Code Division Multiplexing Access*) (Nascimento[1], Mateus[3]), todos os canais são disponibilizados para todos os usuários do sistema. Os canais são liberados por ordem de chegada dos usuários e serão atendidos tantos usuários quantos forem os canais disponíveis na ERB. Com isso, é razoável a necessidade de uma eficiente distribuição de frequências entre as ERB's.

O deslocamento de longa distância, com mudança de área metropolitana, exige também o redirecionamento de chamadas via *roaming*, mecanismo que permite a um telefone celular operar fora de sua área de habilitação, como, por exemplo, em outra cidade. O *roaming* (visitante) acontece quando um telefone celular entra na área de cobertura (Nascimento[1], Stuber[2]) de um outro sistema celular, controlado por uma Central de Controle e Comutação diferente daquela em que normalmente opera. Para que o *roaming* seja executado, é necessário que o usuário habilite essa opção, uma vez que este tipo de procedimento no sistema envolve custos extras. É necessário, também, que a operadora de origem e a operadora visitada pertençam ambas à rede nacional de *roaming*, responsável pela troca de todas as informações necessárias entre as Centrais de Controle e Comutação.

2.5 O Conceito de Célula e Área de Cobertura

Uma célula é uma área geográfica atendida ou coberta por uma ERB (Estação de Rádio Base). Uma ERB é caracterizada pela presença de uma ou mais antenas fixas que estão instaladas em torres e têm o objetivo de atender às demandas oriundas de outras estações ou unidades móveis, dentro de sua área de cobertura. Em outro sentido, a célula corresponde à área de abrangência de uma ERB, ou seja, a todo ponto onde o sinal de rádio emitido pela ERB é aceitável (está dentro de um padrão limite de ruídos e interferências). As células não têm forma definida. Idealmente

seriam circulares, mas na prática, podem assumir formas totalmente irregulares, dependendo do relevo e da topografia da área. Para fins conceituais e de simplificação, nos modelos de cobertura de rádio foi adotada a geometria dos hexágonos para representar as células, uma vez que o hexágono permite uma análise fácil e acessível do sistema celular.

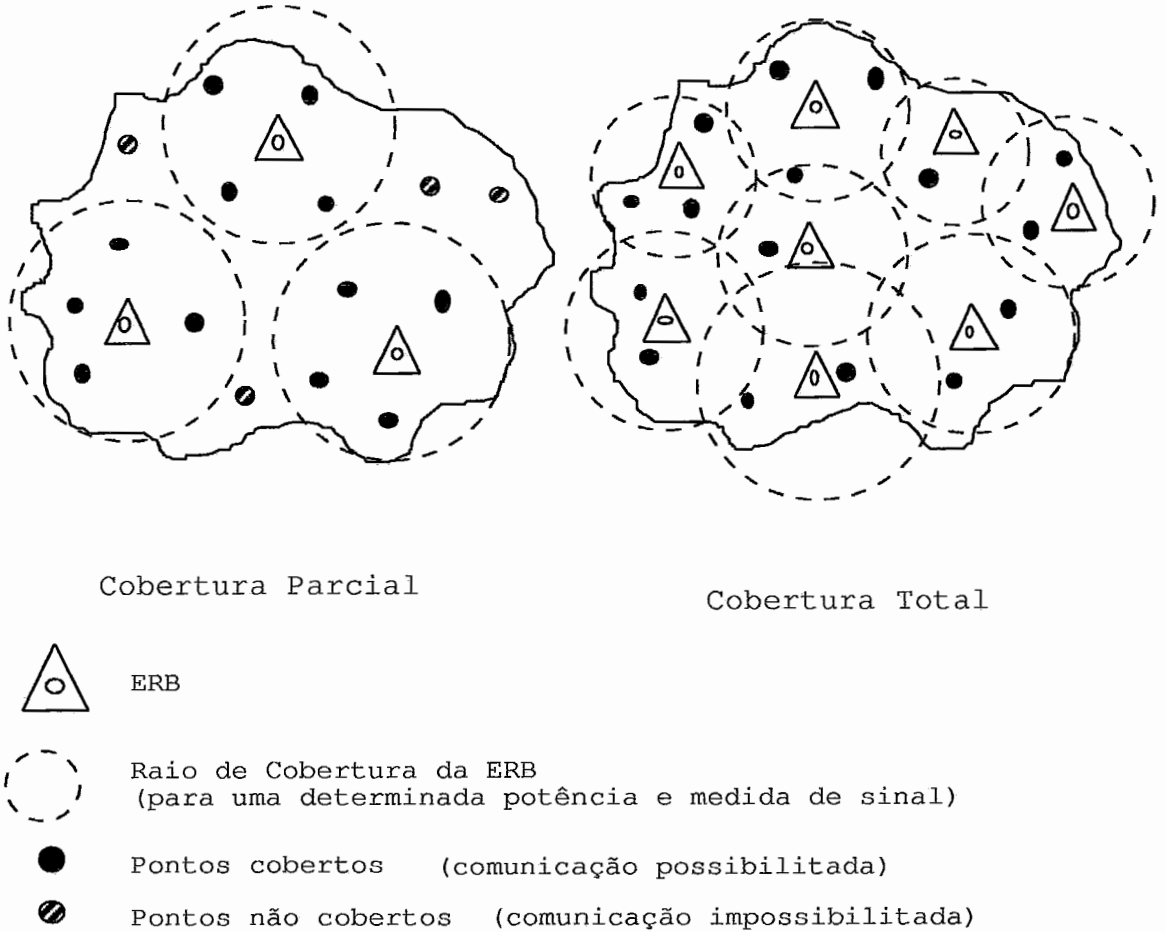


Figura 5 - Exemplos de Coberturas de uma Região

No sistema de telefonia celular, o termo "área de cobertura" refere-se à área geográfica em que uma unidade móvel (celular) pode ser atendida pelo equipamento de rádio de uma ERB (figura 5). Para cada área geográfica com uma certa demanda por serviços, são efetuadas medidas de qualidade de sinal (Stuber[2]) pela área de planejamento da companhia. Através destas medidas, pode-se definir o número necessário de ERB's que serão instaladas nesta área. O alcance dos sinais de rádio emitidos por cada uma destas ERB's depende das características do meio de propagação (construções, montanhas, etc), dos tipos de antenas que irão compor cada ERB e da potência de transmissão destas antenas.

O nível de alcance desses sinais define o que chamamos de raio de cobertura das ERB's. Quando o raio de cobertura das ERB's é pequeno, significa que o alcance dos sinais de rádio emitidos pela ERB está limitado a uma área de poucos quilômetros ou até de metros (Mateus[3]), ou seja, os usuários só podem se utilizar destas ERB's se não estiverem muito distantes de seus pontos de localização. Já as ERB's com grande raio de cobertura se caracterizam por emitirem sinais que têm alcance de muitos quilômetros, ou seja, mesmo que o usuário esteja distante, poderá utilizar os serviços destas ERB's.

Conforme descrito nos trabalhos de Stuber[2] e Mateus[3], entre outros, a área de cobertura de um sistema celular pode ser ampliada com o aumento na potência de transmissão das ERB's já instaladas ou com a instalação de novas ERB's nesta área.

2.6 Antenas utilizadas no Sistema Celular

As antenas são utilizadas como transmissores e receptores de sinais de rádio, sendo projetadas em relação aos comprimentos de onda. Assim, frequências elevadas com pequenos comprimentos de onda exigem antenas menores. Baixas frequências com grandes comprimentos de onda tornam as antenas maiores. Essa relação pode ser modificada pelo uso de indutores (Nascimento[1]), capazes de reduzir a dimensão das antenas.

No sistema celular são utilizadas as antenas omnidirecionais e setorizadas. As omnidirecionais transmitem sinais em todas as direções simultaneamente, já as antenas setorizadas cobrem pequenos setores dentro de uma célula e não propagam sinais em todas as direções, mas em um feixe direcionado que define o setor (Nascimento[1]). Normalmente, uma estação de rádio base é constituída por 3 antenas.

2.7 Padrões de Distribuição de Células

Em um sistema celular, cada célula é formada ou coberta por uma ERB localizada em seu centro. As células formam agrupamentos (*clusters*) com o objetivo de dividir o volume de tráfego telefônico da região. O agrupamento mais comum é composto por sete células.

Cada ERB presente nestas células utiliza um número específico de canais de frequência, ou seja, as frequências disponíveis são distribuídas pelas ERB's. A distribuição destes canais de frequência é planejada de forma que não ocorra interferência nos canais usados por células circunvizinhas. Para isso, as frequências usadas nas células circunvizinhas precisam ser diferentes. Quanto maior a distância que separa duas células com o mesmo grupo de canais de frequência, menor será o grau de interferência existente. Como desvantagem disto, menor será a capacidade do tráfego do sistema celular.

Na distribuição dos canais de frequência pelas ERB's, dois tipos de interferências são consideradas importantes: a interferência co-canal, que ocorre devido ao uso dos mesmos canais de frequência por ERB's presentes em células circunvizinhas, e a interferência adjacente, que é provocada pela utilização de canais adjacentes por uma mesma ERB, ocorre quando os canais de frequência distribuídos para uma ERB não são separados entre si por um número mínimo de canais (distância entre canais). Nos trabalhos de Stuber[2] e Mateus [3], o problema de interferência de canais é apresentado detalhadamente.

2.8 Propagação de Sinais

Um dos principais problemas no desenvolvimento de sistemas móveis é prever qual será o comportamento dos sinais eletromagnéticos utilizados na comunicação entre as estações e as partes móveis do sistema. Com isso, se faz necessário utilizar modelos matemáticos que permitam simular o comportamento dos sinais eletromagnéticos, de forma a permitir aos projetistas testar várias configurações de sistema até encontrar uma que satisfaça os requisitos funcionais, de desempenho e de custos.

Um modelo matemático para predição de sinais deve combinar, de uma forma equilibrada, as características do ambiente de propagação da onda, tais como a presença de folhagens, edificações e montanhas, para ambientes externos, e a presença de móveis, folhagens, pessoas e divisórias, no caso de ambientes internos. Além disso, devem ser considerados os três mecanismos de propagação da onda: reflexão, difração e refração (Mateus[3]).

Caso se construa um modelo muito completo, procurando considerar todos os itens que influenciam na propagação do sinal, corre-se o risco de desenvolver um modelo muito complicado e de difícil solução. Porém, o uso de modelos muito simplificados pode levar o projetista a erros, durante a fase de planejamento do sistema. Com isso o projetista deverá selecionar qual o grau de detalhamento do processo de propagação de sinais é o mais adequado ao seu projeto.

3. Detalhamento do Problema

3.1 Definição do Problema

O Problema de Localização de Estações de Rádio Base (ERB's) aparece como um dos pontos chave no planejamento e desenvolvimento de redes de telefonia celular. Na maioria dos casos, a localização das ERB's é efetuada de uma forma *ad hoc* pela inspeção de mapas de propagação de sinais (Stuber[2], Mateus[3] e Guedes[46]) relacionados à área de estudo. Fornecida uma lista de locais potenciais dessa área de estudo onde as estações podem ser localizadas, a idéia é utilizar o conhecimento das características de propagação das ondas de rádio nessa área, de forma a maximizar a cobertura e minimizar os custos.

O Problema de Localização de Estações de Rádio Base (ERB's) (figura 6) consiste em selecionar, dentro de um conjunto de locais candidatos à instalação de uma ERB, um subconjunto de custo mínimo e sujeito à cobertura da área em estudo, ao atendimento da demanda e a uma exploração eficiente do espectro de frequências (Stuber[2]), considerando fatores conflitantes como a área de cobertura de uma ERB e os usuários suportados por ela ou a área de cobertura de uma ERB e suas taxas de transmissão de dados. Quanto menor o número de ERB's instaladas, menor será o custo. Por outro lado, o atendimento da demanda e a qualidade de serviço podem ser prejudicados.

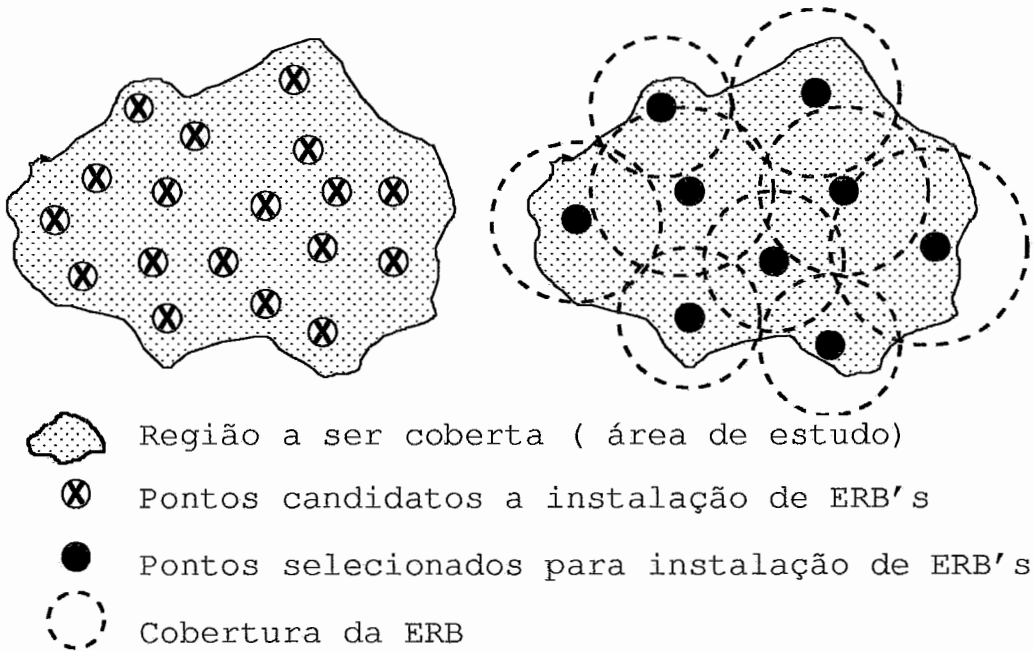


Figura 6 - Problema de Localização das ERB's.

A localização das estações de rádio base pode estar relacionada a três diferentes objetivos: a cobertura total ou cobertura máxima, o máximo aproveitamento espectral e o máximo número de canais por usuário. Pode-se, ainda, considerar o retorno financeiro e a qualidade de serviço específica por usuário.

A cobertura total consiste em associar a cada ponto da área de estudo pelo menos uma ERB em condições de oferecer um sinal com nível mínimo, que permita a conversação ou a transmissão de dados nesta área.

O máximo aproveitamento espectral busca solucionar as deficiências expostas anteriormente, limitando a área de cobertura de cada ERB. Nesse caso, a localização das estações de rádio base e suas respectivas potências de transmissão são definidas conjuntamente.

Como último objetivo, procura-se maximizar o número de canais disponíveis por usuários em cada ERB.

A determinação dos locais de uma dada região onde há possibilidade de instalação de ERB's pode ser feita mediante a utilização de um sistema de predição de propagação de sinais (Mateus[3]). O método de escolha das ERB's envolve três passos. Inicialmente, as ERB's candidatas são criadas pelo sistema. Parâmetros como altura das antenas, potência de transmissão e localização física da ERB são definidos. O sistema simula, então, a propagação de sinal (Mateus[3]) de cada ERB ao longo da área de estudo, gerando um mapa de perdas de sinal em cada ponto dessa, para cada ERB.

No passo seguinte é feita uma composição dos sinais das diversas ERB's candidatas. Esta composição atribui a cada ponto da área de estudo a ERB de melhor sinal. No terceiro e último passo, as ERB's selecionadas na etapa de composição são submetidas a um algoritmo de alocação de canais (Stuber[2] e Mateus[3]), que leva a demanda de cada ponto em consideração. Na fase inicial do projeto, não há uma limitação no número de estações de rádio base que podem ser instaladas na região. O que existe é uma preocupação com a qualidade do atendimento prestado. A redução desse número de estações é feita numa fase de pós-processamento.

No caso deste trabalho, será estudada uma variação do Problema de Localização de ERB's: Dado um número pré-fixado de q ERB's que serão utilizadas para atender às demandas da área em estudo, deve-se determinar as coordenadas de localização destas estações de forma a prover a cobertura total para área em estudo, utilizando a menor potência de transmissão possível, isto é, o menor raio de cobertura.

Caso o valor do raio de cobertura não esteja adequado às necessidades de serviço da região em estudo, o valor inicial do parâmetro q pode ser aumentado ou reduzido até que seja atingido um patamar pré-estabelecido de qualidade de cobertura.

Além do aspecto de cobertura total que será abordado na modelagem básica M_0 , descrita no capítulo 3, apresentamos no capítulo 4 um conjunto de modelagens variantes que encapsulam as seguintes restrições relacionadas ao posicionamento das estações de rádio base: A distância máxima entre as estações (formação de agrupamentos), a proximidade de algumas estações de rádio base de locais candidatos a instalação pré-definidos, a definição de conjuntos compostos por locais candidatos para uma possível instalação das ERB's e a utilização potências de transmissão (raios de cobertura) diferenciadas. Observando, que em todas estas modelagens, é considerado também o aspecto de cobertura total.

3.2 Panorama do Problema

3.2.1 Introdução

A proposta desta seção é a de fazer uma exposição concisa e ao mesmo tempo esclarecedora sobre as várias abordagens desenvolvidas para resolução do Problema de Localização de Estações de Rádio Base e alguns problemas correlatos, a fim entender melhor as dificuldades e limitações observadas na solução deste problema.

Com base na exposição dessas abordagens, será possível estabelecer um paralelo com a nova metodologia de solução que propomos neste trabalho e entender o seu aspecto diferenciador em relação às abordagens que atualmente vêm sendo desenvolvidas para este problema.

Observamos, que essas abordagens estão baseadas na utilização de técnicas de Programação Inteira (Beasley[4], Maculan[6] e Wolsey[9]), Metaheurísticas (Reeves[10] e Viana[31]), Programação Não-Linear (Martinez[26] e Simmons[42]) e Teoria dos Grafos (Szwarcfiter[28], Boaventura[32]).

3.2.2 Modelagens para o Problema de Localização de ERB's

Como uma primeira abordagem para o problema de localização de ERB's, apresentamos abaixo o modelo de programação inteira proposto por Mateus[3]. Para a aplicação deste modelo, a região em estudo a ser coberta pelos serviços de telefonia celular é discretizada num conjunto de M pequenas quadrículas (subregiões que representam as células), de dimensão de 50 x 50 metros até 500 x 500 metros. Para este modelo, os parâmetros de entrada considerados são: número N de estações base candidatas para se instalar na região em estudo, a medida do sinal recebido em cada quadrícula e originário de cada ERB. Segundo Stuber[2] e Mateus[3], esta medida pode ser a perda de sinal ou potência em cada ponto, o custo de instalação da ERB i definido por c_i , o valor mínimo para medida do sinal capaz de viabilizar a comunicação definido por T e a estimativa do sinal da ERB i no ponto j definida por a_{ij} .

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in N} c_i \cdot y_i$$

Sujeito a

$$\sum_{i \in N} a_{ij} \cdot x_{ij} \geq T, \quad \forall j \in M \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in M \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_i, \quad \forall i \in N, \forall j \in M \quad (3)$$

$$y_i, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in M \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = 1 \text{ se a ERB } i \in N \text{ é localizada (instalada)} \\ y_i = 0 \text{ caso contrário} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} = 1 \text{ se um ponto } j \in M \text{ da região é coberto pela ERB } i \in N \\ x_{ij} = 0 \text{ caso contrário.} \end{array} \right\}$$

A função objetivo minimiza o custo de instalação das ERB's. A restrição (1) garante que pelo menos uma ERB atende à qualidade do sinal no nível mínimo estipulado. A restrição (2) associa a cada ponto da região a ser coberto uma ERB. A restrição (3) permite esta associação, somente se uma ERB for instalada e a (4) representa as restrições de integralidade. Observamos que esta formulação nos conduz a um problema com elevado número de variáveis ($|N| + |N| \cdot |M|$).

Com uma modelagem similar, porém mais compacta, Tutschku[11], associa o problema de localização de ERB's a um problema de recobrimento:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{j \in J} x_j$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq 1, \quad \forall i \in I \quad (1)$$

Nessa formulação, I corresponde ao conjunto de pontos da região que deverão ser atendidos pelas ERB's e $N_i = \{j | f_{ij} \leq PL\}$ o conjunto de estações base j que podem cobrir os pontos i da região, considerando que a "atenuação" (perda) do sinal da ERB j no ponto i não ultrapasse um certo patamar PL (Stuber[2] e Mateus[3]).

Convencionando que $x_j = 1$, corresponde a ERB j ser instalada e $x_j = 0$ caso contrário, então a função objetivo minimiza o número de estações necessárias para cobrir a região e a restrição (1) garante que, numa solução viável (Maculan[6] e Wolsey[9]), cada ponto da região é coberto por pelo menos uma estação de rádio base.

Esse modelo é mais simples, tendo em vista que o número de variáveis inteiras torna-se muito reduzido, mas como observado inicialmente, está associado a um problema de recobrimento, conhecidamente NP-completo (Swarcfiter[28] e Viana[31]). No entanto, a matriz formada pelos f_{ij} pode ser muito esparsa, levando-se em conta que nenhuma ERB cobre toda a região. Esta característica torna a implementação do problema mais próxima à realidade, principalmente em aplicações para

as regiões de baixa demanda por comunicação ou projetos iniciais de atendimento. Uma variante destes dois modelos é limitar o número de pontos da região cobertos por cada ERB.

Em instâncias grandes do problema de localização de ERB's, ou seja, considerando uma região com muitos pontos a serem cobertos e muitas ERB's candidatas, a ação e a eficiência do método de *Branch and Bound* (Maculan[6] e Wolsey[9]) pode ficar limitada, ainda que consideremos o progresso dos últimos anos nos códigos (programas) de programação inteira e simplex. Ou seja, o problema pode ser insolúvel do ponto de vista exato (Maculan[6] e Wolsey[9]). Deve-se, então, procurar uma combinação destas técnicas com outras técnicas alternativas como, por exemplo, a *Relaxação Lagrangeana* (Beasley[4] e Maculan[6]).

Mazzini e Mateus[15] apresentam uma modelagem para o problema de planejamento de uma rede de comunicação móvel em três níveis e utilizam uma combinação do *Branch and Bound* e da *Relaxação Lagrangeana*. O primeiro nível da modelagem considera a localização das estações de rádio base, o segundo considera a alocação do espectro de frequências (Stuber[2] e Mateus[3]) e o terceiro considera a conexão das estações à rede fixa (*Network Design*). A função objetivo a ser minimizada no problema agrega os custos de instalação das ERB's e a soma dos custos fixos de conexão de cada ERB à rede fixa.

A *Relaxação Lagrangeana* aplicada neste modelo agrega à função objetivo restrições associadas aos três níveis da problemática de planejamento de redes. Com a aplicação dessa relaxação foram observados bons limites inferiores para algumas instâncias deste problema, sendo observados em alguns casos limites a 8% do ótimo, enquanto que para a Relaxação Linear foram observados valores a 22% do ótimo.

Stamatelos[16] considera o ajuste da localização e da potência (Stuber[2]) das ERB's em ambientes internos. Para a localização das ERB's, divide-se o ambiente em estudo (pavimentos / andares) em retângulos (malha de pontos), com as unidades móveis tomando posição somente nos pontos da malha, exceto em pontos associados a paredes e outros obstáculos. O número de ERB's nesta área é N , sendo estas ERB's localizadas nos pontos $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ da malha ou não (aproximação contínua), ou seja, pode-se tomar valores entre x_{i-1}, x_i e y_{i-1}, y_i . A determinação do raio de cobertura de cada ERB e sua área de interferência é baseada na utilização de Modelos Estatísticos de Atenuação, conforme os modelos apresentados em Stuber[2].

Neste trabalho, as soluções ótimas ou quase ótimas (Maculan[6] e Wolsey[9]) foram obtidas através da aplicação de dois diferentes enfoques de otimização, um sobre o contínuo e o outro discreto. Sobre o espaço contínuo, as coordenadas de localização (x_i, y_i) de cada uma das ERB's tiveram variação entre $(0, 0)$ e (x_{MAX}, y_{MAX}) (MAX =maiores coordenadas de x e y) e a potência variou

de 0 a P_{MAX} . A função objetivo desta abordagem é da forma:

$$F(x_1, y_1, p_1, \dots, x_N, y_N, p_N) = \alpha U + (1 - \alpha)I$$

sendo (x_i, y_i) as coordenadas de localização das ERB's, p_i potência de transmissão de cada ERB i , U o tamanho da área não coberta e I tamanho da área de interferência de cada ERB ($\alpha \in [0, 1]$). Limites de localização, potência e conjunto de pontos obstruídos definem um problema de otimização restrito.

Porém, estas restrições são incorporadas a função objetivo na forma de penalidades, e o problema é resolvido através do método do gradiente (Martinez[26] e Simmons[42]), por exemplo.

Para otimização sobre o espaço discreto, ou seja, com as estações de rádio base localizadas em pontos (x_i, y_i) da malha, temos um problema de otimização combinatória. Então, a solução ótima pode ser encontrada pela simples enumeração de todas as possíveis soluções. Sendo K o número de soluções temos,

$$K = C_{((x_{MAX} \cdot y_{MAX} - |PP|) \cdot |P|)}^N$$

com N representando o número de estações base, $|PP|$ o número de pontos onde a ERB não pode ser localizada e $|P|$ o número de valores observados para potência.

Hanif[19] apresenta uma modelagem para o problema de localização de ERB's considerando a propagação do sinal de cada ERB numa região $Q \in \mathbb{R}^3$. Nesta modelagem, é estabelecida uma representação numérica, na forma de pesos, que considera a qualidade e perda de sinal sobre o espaço de planejamento como uma função da localização de cada ERB. Esses pesos são agregados à função objetivo na forma de uma combinação convexa (Mangasarian [29]) das funções Soma Mínima e Minimax.

O modelo resulta num problema de programação não-linear restrito, composto por uma função objetivo que minimiza a perda de sinal e dois tipos de restrições: (1) restrições "fáceis" associadas à qualidade da cobertura e (2) restrições "difíceis", que definem as localizações das ERB's restritas a um subconjunto de Q . Especializações dos três algoritmos de programação não-linear, nominalmente, método de Hooke e Jeeves, método de Quasi-Newton e método dos Gradientes Conjugados (Martinez[26]), são desenvolvidos para resolver este problema, fornecendo bons resultados.

Smallwood[17], utilizando uma formulação minimax propõe uma solução para o problema de localizar n estações de detecção, de forma a maximizar a probabilidade de que pelo menos uma delas possa detectar um evento inimigo, ocorrendo

num ponto (x, y) da sua região. Na solução deste problema, utiliza-se uma função probabilidade de detecção $p(r_i)$, que representa a probabilidade de detecção pela i -ésima estação de um ponto (x, y) a uma distância r_i desta estação. A probabilidade de que nenhuma das estações possa detectar um evento inimigo em (x, y) é representada por:

$$Q(x, y) = [1 - p(r_1)].[1 - p(r_2)]...[1 - p(r_n)]$$

É considerado que o inimigo tem completo conhecimento das estações e tem interesse em maximizar a sua probabilidade de escapar da detecção. O evento inimigo pode ocorrer num ponto onde a probabilidade $Q(x, y)$ de não detecção é máxima.

Desta forma, para a detecção desses eventos, deve-se minimizar o valor de Q , ou seja, se $(Q = \max_{x,y} Q(x, y))$. Então, o problema consiste em minimizar o máximo Q de $Q(x, y)$:

$$Q_0 = \min Q = \min [\max_{x,y} Q(x, y)]$$

A solução deste problema foi obtida mediante a aplicação de uma técnica de busca local, conhecida como técnica de *Hill Climbing*, apresentada Smallwood[17] e Simmons[42].

Bhaskar[5], baseado na aplicação de metaheurísticas como *Simulated Annealing*, Busca Tabu e Algoritmos Genéticos (Reeves[10] e Viana[31]), propõe novas soluções para o problema de localização de ERB's. Para a aplicação destas metaheurísticas foi considerada a seguinte função custo:

$$f = k \frac{N_{BTS}}{R^\beta},$$

sendo N_{BTS} o número de estações de rádio base selecionadas, entre as candidatas, para cobrirem a região, R é a cobertura de rádio, isto é, percentagem de pontos da região que são cobertos por pelo menos uma ERB, para um certo número N_{BTS} de ERB's selecionadas; β é um peso associado à maximização da cobertura, em detrimento da redução do número de estações base, e k é um fator de escala.

Handler[33] propõe um algoritmo para a solução do problema do p-centro no plano baseado na utilização do critério minimax e considerando a seguinte formulação:

$$r^* = \min_{X_p \subset E^2} \max_{i=1, \dots, n} \{ \min_{j=1, \dots, p} w_{ij} \sqrt{(a_i - x_j)^2 + (b_i - y_j)^2} \}$$

Sendo (a_i, b_i) pontos de demanda (clientes), $X_p = (x_j, y_j)$, $j = 1, \dots, p$ um vetor associado aos centros dos círculos (centrais de serviço) localizados otimamente, w_{ij} um peso que associa cada central j a um ponto de demanda i e r^* é o raio ótimo.

Num outro trabalho similar, Handler[34] propõe um método de relaxação para o problema minimax de localização-alocação no espaço euclidiano. A solução desse problema foi obtida mediante a combinação de um algoritmo de set-covering (Maculan[41]) e conceitos de minimax (Pillo[24] e Chaves[12]).

Através da utilização de um conjunto de propriedades de geométricas dos triângulos e do círculo, Vijay[35] resolve um seqüência de problemas de p-cobertura no plano. Sendo definido inicialmente um conjunto M de pontos a serem cobertos e que será particionado arbitrariamente em p subconjuntos m_i , tal que $\cup_{i=1}^p m_i = M$. Para cada um destes subconjuntos é determinado o círculo mínimo, ou seja, obtemos os círculos de menores raios r_i que cobrem os p subconjuntos m_i .

Com a finalidade de determinar o número mínimo de ERB's que proporcione uma cobertura satisfatória para uma certa área de serviços, ou seja, que atenda a todos os usuários dessa área, Chamaret e Lanloy[36] desenvolveram uma modelagem baseada em grafos para determinar o máximo conjunto independente (MCI). Este máximo conjunto independente está associado ao problema de localização de transmissores (ERB's) em uma rede celular.

Para se obter o MCI e, por conseqüência, a determinação da localização dos transmissores, são aplicadas heurísticas gulosas (Maculan[41]) e algoritmos genéticos (Reeves[10]). Observamos que tanto nessas heurísticas, quanto nos algoritmos genéticos, os parâmetros de entrada considerados são: uma lista L de locais candidatos à instalação das ERB's e as informações de propagação dos sinais de rádio (Stuber[2] e Mateus[3]).

White[37] dá um panorama sobre problemas de cobertura e localização de centrais de facilidade. O problema de cobertura envolve a localização de um número mínimo de centrais de forma que cada ponto de demanda seja coberto por pelo

menos uma nova facilidade (central). O problema de localização de centrais consiste em determinar um certo número de novas centrais em relação a um número finito de locais (pontos de demanda) de forma que a soma das distâncias entre as centrais e esses pontos seja mínima. Para os dois grupos de problemas são apresentadas formulações de programação inteira (Maculan[6] e Wolsey[9]).

Wright[38] considera o problema específico de otimizar a localização de estações de rádio base, através da utilização de uma função objetivo que considera alguns parâmetros tais como: o conjunto de coordenadas para localização das ERB's, a altura ou a potência das antenas e a cobertura (vide capítulo 2) de cada estação de rádio base.

Tendo em vista que a utilização de alguns destes parâmetros produz descon- tinuidades ou não-diferenciabilidade na função objetivo, no processo de minimização é utilizado o método de Nelder-Mead (Simmons[42]). Este método faz uso unica- mente dos valores da função objetivo, sem a necessidade da informação da derivada.

Em sua tese de doutorado, Stamm[39] desenvolve um algoritmo e um software para a determinação do alcance dos sinais de rádio e localização de ERB's. Para mo- delar e resolver este problema, foi utilizada uma instância da cobertura de conjuntos mínima (Maculan[41]), sendo aplicados dois algoritmos gulosos (Maculan[41]).

Podemos também destacar o interessante trabalho de Guedes[40] que trata do problema de sobreposição de células (Mateus[3]) com restrição de cobertura. Neste trabalho é feita um proposta para se estimar mais precisamente a proporção de áreas sobrepostas, ou seja, cobertas por mais de uma estação de rádio base, considerando que essas estações trabalhem com potências diferenciadas.

Encerrando nossa exposição, destacamos o pioneiro e excelente trabalho de Oli- veira[27], que estuda o Problema de Recobrimento Contínuo Ótimo, apresentando vários resultados de grande importância teórica.

4. Detalhamento da Metodologia

4.1 Introdução:

Nesta seção, propomos uma nova abordagem de solução para o Problema de Localização de Estações de Rádio Base (ERB's), com base no estudo do problema de recobrimento ótimo de uma região do plano por um número pré-fixado de q círculos. A modelagem deste último nos conduz a um problema $\min - \max - \min$ (Chaves[12][13] e Martinez[26]), que é intrinsecamente não-diferenciável (Santos[8] e Campos[30]) e possui três níveis.

Para este problema $\min - \max - \min$, obtemos uma solução, utilizando a técnica de suavização apresentada nos trabalhos de Chaves[12][13]. A idéia básica desta técnica, que também é apresentada em Santos[8], é a de substituição de um problema não-diferenciável, em 3 níveis por uma alternativa diferenciável em um único nível. Isso é feito através da resolução de uma seqüência de problemas diferenciáveis, que se aproximam gradativamente do problema original (Chaves[13]).

Muitos pesquisadores têm abordado a problemática de suavização. A resolução do problema $\min - \max$ finito, bem conhecido da literatura, em geral não-diferenciável, tem sido uma motivação para o desenvolvimento desses métodos, como, por exemplo, as alternativas apresentadas por Bertsekas[22], Polyak[23], Pillo[24] e Song Xu[14].

Com intuito de facilitar o entendimento da descrição da modelagem $\min - \max - \min$ e das modelagens variantes derivadas da mesma, faremos inicialmente uma exposição concisa e ao mesmo tempo geral, sobre os conceitos de problema de programação não-diferenciável, de suavização e de penalização hiperbólica. Ferramentas de otimização que constituíram o arcabouço sobre o qual nos baseamos para o desenvolvimento deste trabalho de tese.

4.2 Fundamentos da Suavização Hiperbólica

4.2.1 Programação Não-Diferenciável:

Em relação a estrutura, podemos classificar os problemas de programação matemática como: Irrestritos (P1) e Restritos (P2). Abaixo ilustramos estes problemas.

$$(P1) \text{ Minimizar } f(x)$$

$$x \in \mathfrak{R}^n$$

(P2) *Minimizar* $f(x)$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g_i(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

Quando a função $f(x)$ associada a (P1) é não-diferenciável em um ponto ou em vários pontos do seu domínio, temos um problema de programação não-diferenciável irrestrito (PNDI). Já para problemas da forma (P2), quando $f(x)$ e/ou as funções $g_i(x)$ e $h_j(x)$ são não-diferenciáveis em um ou vários pontos de seu domínio, temos um problema de programação não-diferenciável restrito (PNDR).

Conceitualmente (Lages[51]), diremos que uma função $F : U \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U \subset \mathfrak{R}^n$, quando existirem as suas derivadas parciais $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(a)$ e, além disso, quando para todo vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que para $a + \alpha \in U$, tivermos:

$$F(a + \alpha) = F(a) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) \cdot \alpha_1 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(a) \cdot \alpha_n + r(\alpha), \text{ com } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha)}{\|\alpha\|} = 0.$$

Segundo os trabalhos de Lemarechal[43], Fletcher[44], Bertsekas[22] e Zowe [45] as funções não-diferenciáveis aparecem em muitos problemas de programação matemática. Estas funções podem aparecer na fase de modelagem do problema ou, algumas vezes, são introduzidas artificialmente durante o processo de resolução do modelo. Este último caso está associado a alguma forma de decomposição aplicada para resolução de um problema inicialmente diferenciável (Campos[30]).

Em seguida (figuras 7 e 8), apresentamos dois exemplos de funções não-diferenciáveis, sendo $f_1 : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ e $f_2 : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definidas por:

$$f_1(x) = |x - 2| + 2 \cdot |x + 4|$$

$$f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Na função $f_1(x)$, observamos dois pontos de não-diferenciabilidade $x = -4$ e $x = 2$ e em $f_2(x)$ observamos apenas um ponto de não-diferenciabilidade $(x, y) = (0, 0)$. Qualquer problema que englobe $f_1(x)$ ou $f_2(x, y)$, por exemplo, seja na função objetivo, seja nas restrições, será um problema de programação não-diferenciável.

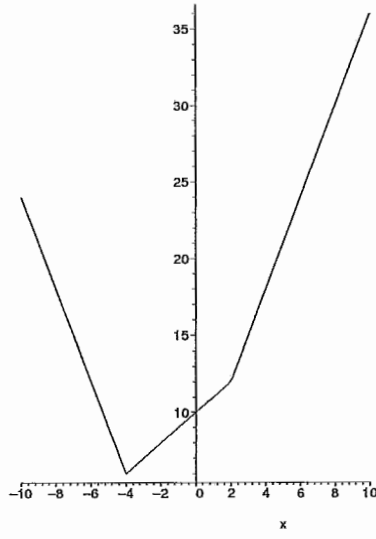


Figura 7 - Exemplo de Função Não-Diferenciável

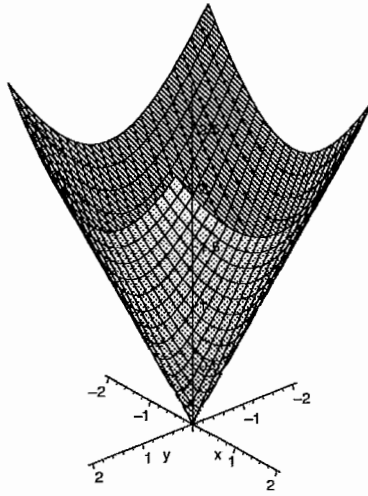


Figura 8 - Exemplo de Função Não-Diferenciável

4.2.2 Suavização:

De acordo com os trabalhos de Santos[8] e Chaves[12][13], entre outros, o processo de suavização consiste em substituir a resolução de um problema não-diferenciável $P(x)$, como definido no item anterior, pela resolução de uma seqüência de problemas $\tilde{P}_k(x)$ diferenciáveis, em princípio mais fáceis e que gradativamente se aproximam do problema original $P(x)$.

A racionalidade da substituição da resolução de $P(x)$ por $\tilde{P}(x)$ (aproximado ao problema original e diferenciável) está na viabilização do uso de métodos de otimização consagradamente mais robustos, que se fundamentam nas informações do gradiente e da hessiana (Lages[51]), tais como, o método de Newton, Quase-Newton ou Gradientes Conjugados, como pode ser visto, por exemplo, em Martinez[26] e Simmons[42].

Observamos que $\tilde{P}(x) \neq P(x)$ e desta forma, o valor de uma solução \tilde{x} de um problema suavizado deve ser diferente do valor de uma solução x^* do problema original, isto é, $f(\tilde{x}) \neq f(x^*)$. Procura-se resolver então uma seqüência de problemas $\tilde{P}_k(x)$, de forma que esta seqüência se aproxime gradativamente do problema original, com a expectativa de que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = x^*$ (Santos[8] e Chaves[13]).

Definição do Problema Suavizado

Seja $P(x)$, o problema original não-diferenciável:

$$P(x) : \text{Minimizar } f(x)$$
$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g_i(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

onde f, g_i e h_j são funções contínuas, mas podendo ser não-diferenciáveis.

Escolhendo funções \tilde{f}, \tilde{g}_i e \tilde{h}_j funções diferenciáveis e, a priori, razoáveis aproximações de f, g_i e h_j , sendo $\tau \geq 0$ o parâmetro auxiliar que viabiliza essa aproximação, podemos definir o problema suavizado $\tilde{P}(x)$ associado ao problema original, da seguinte forma:

$$\tilde{P}(x) : \text{Minimizar } \tilde{f}(x, \tau)$$
$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \tilde{g}_i(x, \tau) \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ \tilde{h}_j(x, \tau) = 0, & j = 1, \dots, p \\ (x, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

Deve-se ressaltar, no entanto, que resolver $\tilde{P}(x)$ não significa resolver $P(x)$. Por esse motivo, resolve-se uma seqüência de subproblemas $\tilde{P}_k(x)$ suavizados, gerada pela diminuição monótona do parâmetro de suavização τ até zero, de uma maneira que os problemas suavizados vão gradativamente se aproximando do problema original, ou seja,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{P}(x, \tau) \rightarrow P(x).$$

Conforme descrito nos trabalhos de Santos[8] e Chaves[13], a perspectiva é de que a seqüência das soluções dos problemas suavizados convirja para um ponto de mínimo do problema $P(x)$ (não-diferenciável). Observamos que o parâmetro τ está associado ao grau de desvio entre as funções suavizadas e originais.

A seguir, apresentaremos cada uma das funções não-diferenciáveis que estão encapsuladas na nova modelagem proposta neste trabalho de tese, bem como a sua forma suavizada. Trabalhando com as formas suavizadas, ou seja, utilizando as funções suavizadas no lugar das funções não-diferenciáveis, poderemos tranpor o obstáculo produzido pelas funções não-diferenciáveis ao uso de métodos clássicos de minimização para funções suaves, que têm propriedades superiores, quer sob o ponto de vista teórico, quer sob o ponto de vista computacional.

Como primeira função não diferenciável (figura 9) presente em nossa modelagem temos,

$$f(x, \lambda) = \lambda \left(\frac{x - a + |x - a|}{2} \right)$$

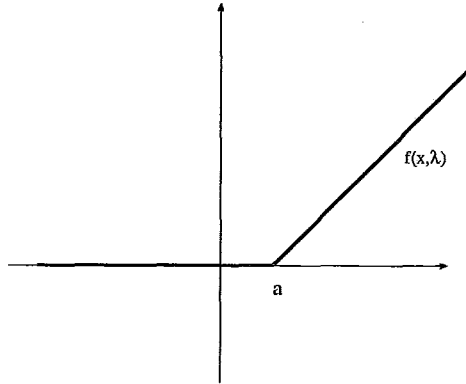


Figura 9 - Função Não-Diferenciável $f(\cdot)$

que notadamente possui os pontos da forma $x = a$ como pontos de não diferenciabilidade, ou seja, a derivada de $f(x)$ não existe nestes pontos. O parâmetro λ dá a inclinação da função à direita do ponto a .

Esta função será aproximada por uma forma suavizada, também chamada de função suavizadora (figura 10):

$$\phi(y, \lambda, \tau_1) = \frac{\lambda}{2} [(y - a) + \sqrt{(y - a)^2 + \tau_1^2}],$$

onde τ_1 é o parâmetro de suavização.

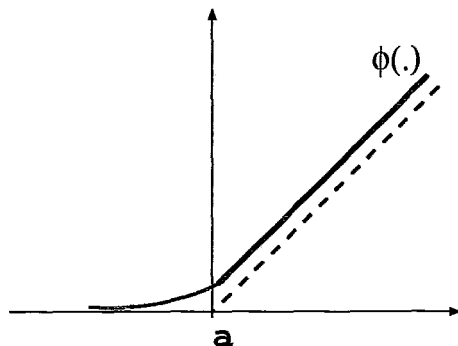


Figura 10 - Função Suavizadora $\phi(\cdot)$

A função $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ (figura 10) apresenta as seguintes propriedades:

- i) $\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \phi(y, \lambda, \tau_1) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq a \\ f(x, \lambda) & \text{se } y > a \end{cases}$
- ii) $\phi(\cdot)$ é continuamente diferenciável em y
- iii) $\phi(\cdot)$ é convexa e monotonamente crescente em y

Complementando os arquétipos de funções não-diferenciáveis que são contempladas na nova modelagem proposta, temos a função:

$$g(x) = \sqrt{x^2}$$

que representa a função norma euclidiana. Utilizando a mesma idéia básica da primeira função, podemos aproximar $g(x)$ pela forma suavizada $\theta(y, \tau_2)$ (figura 11).

$$\theta(y, \tau_2) = \sqrt{y^2 + \tau_2^2}$$

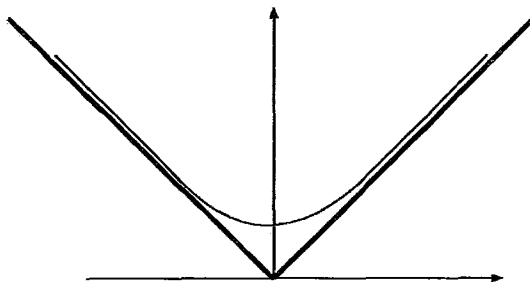


Figura 11 - Função Suavizadora $\theta(\cdot)$

A função $\theta(y, \tau_2)$ apresenta as seguintes propriedades:

- i) Quando $\lim_{\tau_2 \rightarrow 0} \theta(y, \tau_2) = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ -y & \text{se } y < 0 \end{cases}$
- ii) $\theta(\cdot)$ é continuamente diferenciável em y
- iii) $\theta(\cdot)$ é convexa em y

A propriedade (i), observada para as duas formas suavizadas, mostra que a diferença entre $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ e $f(x)$ ou entre $\theta(y, \tau_2)$ e $g(x)$, pode ser feita tão pequena quanto se desejar, através da manipulação dos parâmetros τ_1 e τ_2 . Esses parâmetros introduzidos nos modelos de suavização estão associados ao desvio máximo entre as funções $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ e $f(x)$ e entre as funções $\theta(y, \tau_2)$ e $g(x)$, respectivamente a metade do desvio máximo e próprio desvio máximo. Além disso, como τ_1 e τ_2 são parâmetros externos, é possível controlar totalmente o nível de desvio produzido pela suavização. A propriedade (ii), referente à diferenciabilidade infinita, permitirá o uso dos algoritmos de minimização irrestrita mais robustos e eficientes que utilizam as informações das derivadas primeira e segunda (Martinez[26]).

Observamos que a utilização da suavização tem sua fundamentação em um conjunto de resultados teóricos e na consideração inicial da hipótese básica da Técnica de Suavização.

Voltamos a destacar, que ao aplicarmos o processo de suavização, estaremos resolvendo uma seqüência de problemas gerados por uma seqüência decrescente de valores $\{\tau^k\}$, tais que $\tau^{k+1} < \tau^k$.

Hipótese Básica de Suavização : É suposto que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists K(\epsilon) > 0 \text{ tal que } \forall k \geq K(\epsilon),$$

ou equivalentemente

$$0 \leq \tau^k \leq \tau^{K(\epsilon)} = \bar{\tau}(\epsilon),$$

são observadas as desigualdades:

$$|f(x) - \tilde{f}(x, \tau^k)| \leq \epsilon$$

Como hipótese subjacente é assumido que no limite as funções se igualam, ou seja:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{f}(x, \tau) = f(x), \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

A seguir, enunciamos um teorema que estabelece que se o problema $P(x)$ tem um ponto de mínimo local estrito x^* com uma certa vizinhança, então, cada problema suavizado $\tilde{P}_k(x)$ também tem um ponto de mínimo local \tilde{x}^k situado dentro da vizinhança de x^* . O que o teorema estabelece é que, ao se resolver uma seqüência de problemas suavizados, resolve-se o problema original, uma vez que se pode determinar que o ponto obtido pode se situar numa vizinhança de x^* , considerando uma distância tão pequena quanto se queira entre x^* e \tilde{x}^k .

A demonstração completa deste teorema é apresentada em Santos[8].

Teorema: Seja x^* ponto de mínimo local estrito com vizinhança ϵ para o problema $P(x)$, então para todo $\delta, \epsilon \geq \delta > 0$ existe um valor $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\delta)$ tal que para todo $0 \leq \tau^k < \bar{\tau}$ a função objetivo suavizada $\tilde{f}(x, \tau^k)$ tem um ponto de mínimo local \tilde{x}^k situado numa vizinhança δ de x^* , ou seja,

$$\|\tilde{x}^k - x^*\|_2 < \delta$$

Desta forma, a resolução da seqüência de problemas originados pelas utilização das formas suavizadas $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ e $\theta(y, \tau_2)$, anteriormente propugnadas, atendem às condições de convergência especificadas no teorema acima.

Concluimos a nossa apresentação sobre a técnica de suavização, destacando que existem outras alternativas de suavização na literatura. Polyak[23], estudando o problema *minimax*, utiliza-se de uma função exponencial para suavizá-lo. Pillo[24] também resolve o problema *minimax* e propõem um método de suavização para esse problema. Em seu livro sobre métodos de multiplicadores, Bertsekas[22] apresenta uma associação entre estes métodos e a suavização de problemas não-diferenciáveis. Já Song Xu[14] utiliza-se de um novo método de suavização para resolver o problema *minimax* através de uma função suavizadora, que combina as funções exponencial e o logaritmo.

Vale destacar que a utilização da suavização possui a grande vantagem de não necessitar de qualquer controle sobre as questões associadas à natureza de não-diferenciabilidade do problema original, ou seja, não há necessidade de controle sobre os pontos próximos a pontos de não-diferenciabilidade ou de viabilidade, o que em contrapartida, ocorre nos métodos de subgradiente ou feixes, de acordo com Santos[8].

Além disso, com a aplicação da suavização, tem-se uma expectativa, que a busca do mínimo (máximo) global torna-se mais fácil, pois transformamos a função objetivo original em uma função suavizada sem perder a estrutura inicial da mesma. E a prática indica que removemos mínimos locais "insignificantes", ou seja, com vizinhança limitada, similarmente ao observado com a técnica de suavização da transformação gaussiana apresentada no trabalho de Moré[47].

4.2.3 Penalização Hiperbólica

Concluindo a exposição do conjunto de técnicas de otimização não-linear que utilizamos para resolução do modelo $\min - \max - \min$ proposto em nosso trabalho, apresentamos a técnica penalização hiperbólica, desenvolvida por Xavier[7]. A aplicação dos conhecimentos de programação não-diferenciável e suavização no modelo $\min - \max - \min$ (apresentado na próxima seção) nos conduz a um problema de programação não-linear diferenciável, com restrições de desigualdade. A resolução deste último problema é obtida mediante a aplicação da técnica de penalização, descrita ao longo desta seção.

Considere o problema geral de Programação Não-Linear:

$$(P) : \text{Minimizar } f(x)$$
$$\text{Sujeito a } \begin{cases} g_i(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

A característica comum aos métodos das penalidades é a transformação do problema de minimização com restrições num problema sem restrições

$$\text{Minimizar } F(x) = f(x) + P(x)$$

com a função penalidade $P(x)$ incorporando as restrições $g(x)$ e $h(x)$

A idéia intuitiva por trás de todos os métodos das penalidades é que a função penalidade possua o poder de aumentar fortemente os valores fora da região viável (Martinez[26]) e, simultaneamente, tenha influência desprezível dentro desta região, de forma que o ponto ótimo do problema modificado esteja aceitavelmente próximo do ponto ótimo do problema original.

A maioria dos métodos de penalização obtém o ponto ótimo através da solução de uma seqüência de problemas de minimização, obtida pela variação controlada de um parâmetro externo, que faz com que se aumente progressivamente o grau em que o problema sem restrições se aproxima do original.

Ao contrário dos outros métodos que trabalham com apenas um parâmetro, a técnica de penalização hiperbólica, que aplicamos ao nosso problema, trabalha com dois parâmetros: um ângulo α e uma distância d . Embora tenhamos dois parâmetros neste método, isto não traz maiores problemas no desempenho do método, uma vez que esses parâmetros são manipulados separadamente, em duas diferentes fases do algoritmo (Xavier[7]).

A função penalidade utilizada neste problema apresenta a característica de ser completamente diferenciável. Outra característica importante é que qualquer ponto inicial pode ser escolhido para se iniciar o algoritmo, além de não haver necessidade de qualquer controle sobre a localização dos pontos intermediários dentro de cada minimização sem restrições.

Apresentação da Função Penalidade e do Algoritmo

O algoritmo proposto é aplicado ao seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a } \begin{cases} g_i(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \end{aligned}$$

A solução para o problema é obtida através da resolução de uma seqüência de minimizações sem restrições da função original $f(x)$, acrescida de um termo $P(g(x), \alpha, d)$ correspondente à penalidade. A função minimizada é :

$$F(x, \alpha, d) = f(x) + P(g(x), \alpha, d) = f(x) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \alpha, d)$$

$$P(y, \alpha, d) = -\left(\frac{1}{2}\tan(\alpha)\right)y + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\tan(\alpha)\right)^2 y^2 + d^2}$$

com $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $d \geq 0$.

A idéia básica do algoritmo é a seguinte: Inicialmente aumenta-se o ângulo α da assíntota a função penalidade, provocando significativo aumento da penalização fora da região viável e reduzindo simultaneamente a penalização para pontos dentro da região viável. O processo continua até que se obtenha um ponto viável. Em seguida, mantém-se α constante e diminui-se seqüencialmente o valor de d . Dessa forma, a penalização interior (Xavier[7] e Martinez[26]) torna-se cada vez mais irrelevante, mantendo-se o mesmo nível de proibitividade fora da região viável.

Algoritmo de Penalização Hiperbólica (PH)

1) Faça $k = 0$, $\alpha^1 = \alpha^0$, $d^1 = d^0$ sendo, $0 < \alpha^0 < \frac{\pi}{2}$ e $d^0 > 0$

e tome o ponto inicial x^0

2) Faça $k = k + 1$

3) Resolva o problema de minimização sem restrições da função

$$F(x, \alpha^k, d^k) = f(x) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \alpha^k, d^k),$$

a partir do ponto inicial x^{k-1} , achando o ponto ótimo x^k .

4) Teste se x^k é viável. Se sim \Rightarrow vá para o passo 6.

5) Faça $\alpha^{k+1} = \rho_1 \alpha^k + (1 - \rho_1) \frac{\pi}{2}$, $0 < \rho_1 < 1$ e $d^{k+1} = d^k$ e vá para o passo 2.

6) Regra de Parada - Teste se x^k é aceitável. Se sim \Rightarrow vá para o passo 8.

7) Faça $d^{k+1} = \rho_2 d^k$, $0 < \rho_2 < 1$, $\alpha^{k+1} = \alpha^k$ e vá para o passo 2.

8) x^k é a solução.

9) Fim

4.3 Modelagem Proposta

Considere uma região em estudo para a qual se deve instalar um conjunto de estações de rádio base (ERB's), a fim de prover para cada ponto desta região um bom nível de cobertura (Stuber[2] e Mateus[3]), associado a serviços de telefonia móvel / celular, e ao mesmo tempo, reduzir os custos de equipamento (minimizar o número de ERB's).

Do ponto de vista da nova modelagem proposta para este problema, definimos esta região a ser coberta por S , sendo $S \subset \mathfrak{R}^2$; por conseguinte, cada ponto a ser coberto é definido por s tal que $s \in S$. Definimos, também, as coordenadas $x_i \in \mathfrak{R}^2$ ($i = 1, \dots, q$) que representam os centros dos círculos que cobrirão a região S . Estes centros estão associados aos pontos de localização das ERB's e serão obtidos no decorrer do processo de resolução do problema. Vale ressaltar que a medida dos raios dos círculos, também obtida na resolução do problema, representará o raio de cobertura de cada ERB. Esse raio é, por sua vez, função da potência de transmissão da antena (Stuber[2]).

Observamos que essa modelagem terá um caráter de primeira aproximação para o problema de localização de ERB's e, ao mesmo tempo, um ponto de partida para as modelagens subseqüentes que propomos para este problema.

Fornecido, então, um ponto genérico s da região S , devemos calcular inicialmente a distância deste ponto ao centro do círculo mais próximo, ou seja, qual a estação de rádio base que está mais próxima deste ponto.

$$d(s, x) = \min_{i=1, \dots, q} (\|s - x_i\|_2) \quad (1)$$

A distância $d(s, x)$ fornece uma medida da cobertura de um ponto $s \in S$. Uma medida da qualidade da cobertura da região S pelos q círculos (ERB's) é dada pela maior distância $d(s, x)$, ou seja, qual ponto tem sua estação mais próxima situada a uma maior distância (cobertura mais crítica).

$$D(x) = \max_{s \in S} d(s, x) \quad (2)$$

A localização ótima das estações de rádio base deve representar a melhor qualidade de cobertura da região S , isto é, deve minimizar a cobertura mais crítica, ou seja, não devemos ter pontos $s \in S$ descobertos.

$$\min_x D(x) \quad (3)$$

Após esta análise, temos então o seguinte problema:

$$\min_x \max_{s \in S} \min_{i=1, \dots, q} (\|s - x_i\|_2) \quad (4)$$

Resolução do Problema

Para que seja obtida a solução numérica de (4), devemos discretizar a região S em um conjunto finito de m pontos s_j , $j = 1, \dots, m$, que são os pontos da região que serão atendidos pelas ERB's. Desta maneira, obtemos então o seguinte problema:

$$\min_x \max_{j=1, \dots, m} \min_{i=1, \dots, q} (\|s_j - x_i\|_2) \quad (5)$$

Observamos que no nível mais interno de (5), para cada ponto s_j , $j = 1, \dots, m$ da região S , devemos resolver o subproblema:

$$\min_{i=1, \dots, q} (\|s_j - x_i\|_2) \quad (6)$$

Denominamos por $z_j(x)$ a solução de (6) associada a um ponto s_j :

$$z_j(x) = \min_{i=1, \dots, q} (\|s_j - x_i\|_2), \quad (7)$$

ou seja, para cada ponto s_j da região S , deve-se definir a sua estação de rádio base associada mais próxima, com coordenadas x_i e o seu raio de cobertura $z_j(x)$.

Dessa forma, $z_j(x)$ deve satisfazer necessariamente ao conjunto de desigualdades:

$$z_j(x) - \|s_j - x_i\|_2 \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (8)$$

No nível intermediário de (5), temos o seguinte subproblema:

$$\max_{j=1,\dots,m} z_j(x), \quad (9)$$

que corresponde à medida da pior cobertura associada ao posicionamento x do conjunto de estações.

Considerando $z(x)$ como valor ótimo deste problema, temos:

$$z(x) \geq z_j(x), \quad j = 1, \dots, m \quad (10)$$

Observamos que no nível mais externo de (5) não há alteração se dissociamos z e x . Desta forma, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (11)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} z_j = \min_{i=1,\dots,q} \|s_j - x_i\|_2, & j = 1, \dots, m \\ z \geq z_j, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad \begin{matrix} (11.1) \\ (11.2) \end{matrix}$$

Com base nas restrições de (8) e (11), definimos o seguinte problema com restrições:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (12)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} z_j - \|s_j - x_i\|_2 \leq 0, & j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, q \\ z \geq z_j, & j = 1, \dots, m \end{cases} \quad \begin{matrix} (12.1) \\ (12.2) \end{matrix}$$

Porém, devemos observar que o problema (12) não equivale ao problema (5), uma vez que as desigualdades (12.1) não garantem estritamente o cumprimento das igualdades (7). Além disso, como as variáveis z_j estão livres inferiormente, pode-se verificar facilmente que a solução do problema (12) é ilimitada inferiormente.

Sendo assim, precisamos modificar o problema (12), de forma que seja considerada a observância estrita das restrições de igualdade (7).

Nesta parte do desenvolvimento, baseando-se nos trabalhos de Chaves[12][13], introduzimos a seguinte função auxiliar:

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda \cdot \text{máximo} \{0, x\} \quad (13)$$

Sendo $\lambda \geq 1$, o parâmetro que representa a inclinação da função $\varphi(\cdot)$.

Se as desigualdades de (8) são válidas, então, necessariamente deve ser observada a restrição:

$$\sum_{i=1}^q \varphi(z_j - \|s_j - x_i\|_2, \lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (14)$$

Na figura 12 apresentada a seguir, temos a representação do gráfico dos componentes adicionados na equação (14) como uma função de z_j , levando em consideração que as distâncias $d_i = \|s_j - x_i\|_2$, $i = 1, \dots, q$ estão em ordem crescente.

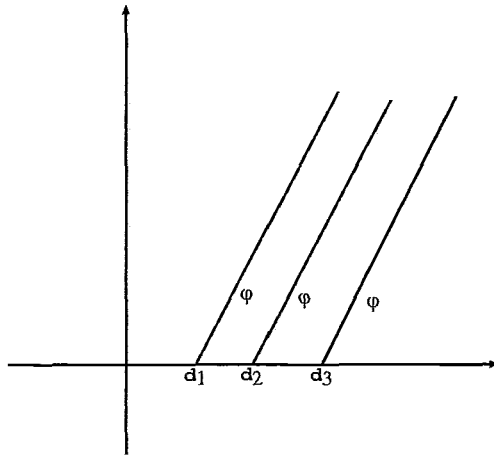


Figura 12 - Componentes da Equação 14

Com a substituição das desigualdades (12.1) por (14) no problema (12), obtemos um problema equivalente, que mantém a característica de ser ilimitado inferiormente. Ou seja, pela forma de definição da função objetivo e das restrições 14 e 12.2, ao resolvermos o problema (12) teremos $z < 0$ e conseqüentemente $z_j < 0$, $j = 1, \dots, m$, o que do ponto de vista da aplicação real que abordamos é

inaceitável. Desta forma, para contornar este aspecto intrínseco ao problema (12), vamos definir o seguinte problema:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (15)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \sum_{i=1}^q \varphi(z_j - \|s_j - x_i\|_2, \lambda) > 0, & j = 1, \dots, m, & (15.1) \\ z \geq z_j, & j = 1, \dots, m. & (15.2) \end{cases}$$

Ou, de uma forma alternativa, podemos perturbar a inequação (15.1) e definir o seguinte problema:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (16)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \sum_{i=1}^q \varphi(z_j - \|s_j - x_i\|_2, \lambda) \geq \epsilon > 0, & j = 1, \dots, m & (16.1) \\ z \geq z_j, & j = 1, \dots, m & (16.2) \end{cases}$$

Poderíamos, também, gerar uma seqüência decrescente de valores $\{\epsilon^k\}$ pela perturbação do parâmetro ϵ .

Desde que o problema (15) é o limite de (16) quando $\epsilon \rightarrow 0_+$, podemos resolver o problema (15), através da resolução de uma seqüência de problemas do tipo (16) onde $\epsilon = \epsilon_k \rightarrow 0$.

A seguir, apresentamos um conjunto de resultados teóricos associados à resolução do problema (15) e da sua equivalência com o problema (11), no que concerne a solução ótima.

Teorema 1 : Os problemas (11) e (15) têm o mesmo valor ótimo:

Seja z^* o valor ótimo do problema (15) e $(z^{**}, (z_j^{**}, j = 1, \dots, m), (x_i^{**}, i = 1, \dots, q))$ uma solução ótima do problema (11). Define-se também para um dado $j \in \{1, \dots, m\}$ o conjunto $I_j = \{i \in \{1, \dots, q\} \mid z_j^{**} = \|s_j - x_i^{**}\|_2\}$

Observe que para um dado $\epsilon > 0$, $(z^{**} + \epsilon, (z_j^{**} + \epsilon, j = 1, \dots, m), (x_i^{**}, i = 1, \dots, q))$ é uma solução viável de (15) desde que:

$$\sum_{i=1}^q \varphi(z_j^{**} + \epsilon - \|s_j - x_i^{**}\|_2, \lambda) = \quad (17)$$

$$\sum_{\{i \mid z_j^{**} + \epsilon > \|s_j - x_i^{**}\|_2\}} (z_j^{**} + \epsilon - \|s_j - x_i^{**}\|_2) \geq \sum_{\{i \in I_j\}} (z_j^{**} + \epsilon - \|s_j - x_i^{**}\|_2) \quad (18)$$

$$\#(I_j) \cdot \epsilon \geq \epsilon > 0 \quad (19)$$

para um dado $j \in \{1, \dots, m\}$ e $z^{**} + \epsilon \geq z_j^{**} + \epsilon$.

Assim, para todo $\epsilon > 0$, o problema (15) tem uma solução viável com a sua função objetivo assumindo valores $z^{**} + \epsilon$, o que implica em $z^* \leq z^{**}$.

Num outro sentido, para uma solução viável \bar{z} , ($\bar{z}_j, j = 1, \dots, m$), \bar{x}_i , ($i = 1, \dots, q$) de (15) existe ($\bar{i} \in \{1, \dots, q\} \mid \bar{z}_j \geq \|s_j - \bar{x}_{\bar{i}}\|_2$), caso contrário $\sum_{i=1}^q \varphi(\bar{z}_j - \|s_j - \bar{x}_i\|_2) = 0$.

Isto é equivalente a dizer que $\bar{z}_j \geq \min_i (\|s_j - \bar{x}_i\|_2)$ e $\bar{z} > \bar{z}_j$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, e a seguinte relação vale:

$$\bar{z} \geq \max_j \bar{z}_j \geq \max_j (\min_i (\|s_j - \bar{x}_i\|_2)) \geq \quad (20)$$

$$\min_{(x_i, i=1, \dots, q)} \max_j \min_i \|s_j - x_i\|_2 = z^{**} \quad (21)$$

Desta forma, z^{**} é um limite inferior para o valor de z numa solução viável de (15), o que imediatamente nos leva a $z^* \geq z^{**}$. Assim, a desigualdade oposta é também válida, e z^* e z^{**} são iguais, completando a prova \square .

Conseqüentemente, $(z^*, (z_j^*, j = 1, \dots, m), (x_i^*, i = 1, \dots, q))$ pode representar uma solução ótima para o problema (15).

Agora observe que como $\varphi(\cdot)$ é uma função não-decrescente e $z^* \geq z_j^*$, $j = 1, \dots, m$, então:

$$\sum_{i=1}^q \varphi(z^* - \|s_j - x_i^*\|_2, \lambda) \geq \sum_{i=1}^q \varphi(z_j^* - \|s_j - x_i^*\|_2, \lambda) > 0, \quad (22)$$

$$j = 1, \dots, m$$

Conseqüentemente, podemos substituir todos z_j^* , $j = 1, \dots, m$, por z^* e ainda ter uma solução viável em (15), que pode obviamente ser ótima. Esta observação, que constitui a proposição a seguir, torna possível reduzir consideravelmente a dimensão do problema.

Proposição 1: Em pelo menos uma das soluções ótimas do problema (15), todos os raios ótimos são iguais, ou seja:

$$z_j^* = z^*, \quad j = 1, \dots, m \quad (23)$$

Agora, vamos considerar o problema abaixo:

$$\text{Minimizar}_{z,x} z \quad (24)$$

$$\text{Sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^q \varphi(z - \|s_j - x_i\|_2, \lambda) > 0, \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (24.1)$$

Devemos destacar que o problema (24) é definido num espaço de dimensão $(2q + 1)$, que é muito menor do que o espaço do problema (15), que tem dimensão $(2q + m + 1)$. Isto é, no novo problema, o número de variáveis é da ordem do número de ERB's que se deseja instalar na região em estudo, e não mais do número de pontos de discretização da região S , que foram escolhidos para ser cobertos, número esse que pode assumir um valor muito grande, conforme observado em Mateus[3] e em algumas das abordagens apresentadas no capítulo 3.

Baseado no Teorema 1 e na Proposição 1, temos a seguir, um Teorema que estabelece a equivalência entre os problemas (15) e (24).

Teorema 2: A solução do problema (24) corresponde à solução do problema (15) e vice-versa.

Se $x^*, z^*, z_j^*, j = 1, \dots, m$, é uma solução ótima do problema (15), então x^*, z^* é um ponto viável para o problema (24), pois de acordo com a definição da função $\varphi(\cdot)$, satisfazer as restrições (15), implica que as restrições de (24) são também satisfeitas.

No outro sentido, seja x^{**}, z^{**} uma solução ótima do problema (24). Definindo:

$$z_j^{**} = z^{**}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (25)$$

$x^{**}, z^{**}, z_j^{**}, j = 1, \dots, m$, é um ponto viável para o problema (15), completando a prova \square .

A despeito da vantagem de ter uma dimensão reduzida, o problema (24) tem como espaço viável um conjunto aberto, inviabilizando a aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker (Martinez[26]). Ademais, possui uma estrutura muito rígida, não-diferenciável. Observando a definição da função $\varphi(\cdot)$, temos que a mesma não é diferenciável nos pontos da forma $z = \|s_j - x_i\|_2$ e a própria função $\|s_j - x_i\|_2$ é não diferenciável nos pontos $s_j = x_i$.

Para resolver numericamente o problema (24), ao invés dos métodos ortodoxos associados à programação não-diferenciável (Campos[30]), utilizamos a idéia de suavização apresentada por Chaves[13] (vide seção 4.2.2).

Dentro dessa linha de raciocínio, utilizamos as funções suavizadoras $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ e $\theta(y, \tau_2)$ apresentadas na seção 4.2.2. Observamos que além das propriedades já vistas para $\phi(y, \lambda, \tau_1)$, temos:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \phi(y, \lambda, \tau_1) = \frac{\lambda y + \lambda |y|}{2} = \lambda \cdot \text{máximo}\{0, x\} = \varphi(x, \lambda)$$

Ou seja, $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ constitui uma aproximação de $\varphi(x, \lambda)$ (figura 13).

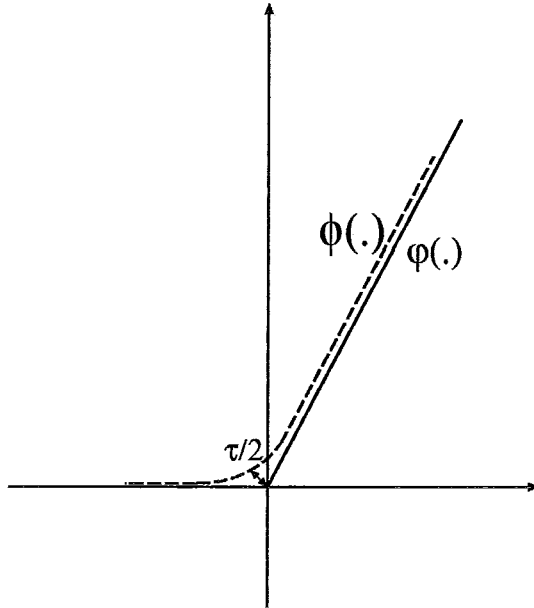


Figura 13 - Função original $\varphi(\cdot)$ e a função suavizadora $\phi(\cdot)$

Usando, então, as propriedades de $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ e a modelagem alternativa (16), substituímos a resolução de (24) pela resolução de uma seqüência de problemas (26), abaixo, que se aproximam gradativamente do problema (24), através da redução dos parâmetros τ_1 , τ_2 e ϵ . E além disso, o problema (26) não mais apresenta os dois aspectos complicadores destacados para problema (24):

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (26)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\|s_j - x_i\|_2, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, & (26.1) \\ j = 1, \dots, m \end{cases}$$

sendo $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ os pontos a serem atendidos pelas estações de rádio base e $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ os seus respectivos centros. Podemos então, reescrever (26) da seguinte forma:

Minimizar_{x,z} z (27)

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \frac{\lambda}{2} \left(z - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2 + \tau_2^2} + \sqrt{\left[z - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2 + \tau_2^2} \right]^2 + \tau_1^2} \right) \geq \epsilon, \quad (27.1)$$

$$j = 1, \dots, m$$

A seguir, apresentamos o algoritmo desenvolvido para a resolução de (27).

Algoritmo de Suavização Hiperbólica

- 1) Faça $k = 0$ e defina valores iniciais para $z^0, x^0, \lambda, \tau_1^1, \tau_2^1, \epsilon^1, \delta$
- 2) Defina valores para ρ_1, ρ_2 tais que $0 < \rho_2 \leq \rho_1 < 1$
- 3) Repita
- 4) Faça $k = k + 1$
- 5) Defina os valores iniciais de d e α (parâmetros de Penalização)
- 6) Resolva o problema (27) através da Penalização Hiperbólica, com x^{k-1} e z^{k-1} , como ponto inicial, obtendo o ponto de mínimo intermediário x^k e z^k
- 7) Faça $\tau_1^{k+1} = \rho_1 \cdot \tau_1^k$
- 8) Faça $\tau_2^{k+1} = \rho_1 \cdot \tau_2^k$
- 9) Faça $\epsilon^{k+1} = \rho_2 \cdot \epsilon^k$
- 10) Até $(|z^{k+1} - z^k| \leq \delta)$ (Fim-Repita)
- 11) Fim

Essencialmente, no algoritmo apresentado, é resolvida uma seqüência de problemas de programação não-linear restritos no passo 6. No primeiro e segundo passos do algoritmo, definimos valores iniciais para a solução (raios e centros) e para os parâmetros de suavização τ_1 , τ_2 e ϵ e de tolerância δ .

No passo 10, temos a condição de parada do algoritmo de suavização hiperbólica associada a redução do raio de cobertura. No passo 5, definimos os parâmetros que serão utilizados na penalização hiperbólica. Nos passos 7, 8 e 9 efetuamos a redução gradativa dos parâmetros τ_1 , τ_2 e ϵ .

Dessa forma, ao longo da seqüência de iterações temos $(\tau_1, \tau_2, \epsilon) \rightarrow 0$, acarretando que as restrições suavizadas associadas aos subproblemas P^k resolvidos em (27) se aproximem das restrições do problema (24).

O algoritmo assume que (x^{k-1}, z^{k-1}) é ponto associado a um ponto de ótimo local do subproblema suavizado P^k . Sobre essa hipótese e a propriedade de continuidade de todas as funções utilizadas no problema, a seqüência $\{x^k, z^k\}$, gerada pelos subproblemas P^k , tende a um valor ótimo local (24).

4.4 Aspectos Teóricos da Modelagem

Nesta seção, com base no estudo das propriedades das funções $\phi(\cdot)$, $\theta(\cdot)$ e na teoria de convexidade (Mangasarian[29]) vamos explicitar as condições de 1ª ordem para o problema $\min - \max - \min$ suavizado, fazer uma análise das expressões dos gradientes, levando em consideração os pontos da região S e os valores de τ_1 , τ_2 e verificar que as funções $\phi(\cdot)$ associadas a cada uma das restrições do problema $\min - \max - \min$ são quasi-côncavas.

4.4.1 Condições de 1ª Ordem

Considere o problema abaixo:

$$\text{Minimizar}_{x,z} f(\mathbf{x}) = z \quad (28)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \quad (28.1)$$

onde z e $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ são as variáveis associadas respectivamente ao raio de cobertura de cada uma das q estações e seus centros e $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ são os pontos associados a região S que deve ser coberta pelas q estações.

Para as restrições do tipo (28.1), definimos uma função $g_j(\mathbf{x})$, sendo

$$\mathbf{x} = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_q^1, x_q^2, z)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) + \epsilon$$

$$j = 1, \dots, m$$

Podemos então representar o problema (28) da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar}_x, f(\mathbf{x}) = z \quad (29)$$

$$\text{Sujeito a } \left\{ g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \right. \quad (29.1)$$

onde $g_j(\mathbf{x}) : \mathfrak{R}^{2q+1} \rightarrow \mathfrak{R}$

Definição 1:

Para cada $\mathbf{x} \in \Omega \equiv \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{2q+1} \mid g(\mathbf{x}) \leq 0\}$, chamamos de restrições ativas em \mathbf{x} àquelas para as quais $g_j(\mathbf{x}) = 0$. Analogamente, chamamos restrições inativas em \mathbf{x} àquelas para as quais $g_j(\mathbf{x}) < 0$ (Martinez[26] e Simmons[42]).

Definição 2:

Chamaremos de ponto regular a um ponto \mathbf{x} de Ω onde os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes (Martinez[26] e Simmons[42]).

Tendo em vista estas considerações, a literatura de programação matemática apresenta as conhecidas condições de Karush, Kuhn e Tucker para o problema (29) da seguinte forma:

Condições Necessárias de 1ª Ordem para o Problema (29)

Seja \mathbf{x}^* um minimizador local regular de (29). E seja J o conjunto ativo nesse ponto tal que:

$$J = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(\mathbf{x}^*) = 0\} \quad (30)$$

Se os gradientes associados às restrições ativas $\{\nabla g_j(\mathbf{x}^*), j \in J\}$ definem um conjunto linearmente independente, então existem únicos $\mu_j \in \mathfrak{R}$, $\mu_j \geq 0$, $j \in J$ tais que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (31)$$

No problema em questão, o minimizador local $\mathbf{x}^* = (x_1^{1*}, x_1^{2*}, \dots, x_q^{1*}, x_q^{2*}, z^*)$ representa respectivamente as coordenadas de localização ótima das estações de rádio base e o seu raio de cobertura.

Abaixo, temos descritas explicitamente as funções $f(\mathbf{x}^*)$ e $g_j(\mathbf{x}^*)$:

$$f(\mathbf{x}^*) = z^* \quad (32)$$

$$(32.1)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) = -\sum_{i=1}^q \frac{\lambda}{2} \left\{ z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2} + \sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2} \right\} + \epsilon$$

Efetuando o cálculo dos gradientes de $f(\cdot)$ e $g_j(\cdot)$ em relação às variáveis (x_i^1, x_i^2) , $(i = 1, \dots, q)$ e z^* temos:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = (0, 0, 0, 0, \dots, 1) \quad (33)$$

$$(34)$$

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^1} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}} \left(1 + \frac{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]}{\sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2}} \right) \right)$$

$$i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, m$$

$$(35)$$

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^2} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}} \left(1 + \frac{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]}{\sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2}} \right) \right)$$

$$i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, m$$

$$(36)$$

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_z = \frac{\lambda}{2} \left\{ \sum_{i=1}^q \left(-1 + \frac{-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}}{\sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2}} \right) \right\}$$

$$j = 1, \dots, m$$

Considerando os elementos $j \in J$, a equação (31) e as equações (34), (35) e (36), temos então as equações associadas às condições necessárias para o problema representado pelas equações (32) e (32.1), ou seja:

(37)

$$\sum_{j \in J} \mu_j \cdot \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}} \left(1 + \frac{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]}{\sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2}} \right) \right\} = 0$$

$$i = 1, \dots, q$$

(38)

$$\sum_{j \in J} \mu_j \cdot \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}} \left(1 + \frac{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]}{\sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2}} \right) \right\} = 0$$

$$i = 1, \dots, q$$

(39)

$$1 + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^q \left(-1 + \frac{-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}}{\sqrt{[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_2^2}]^2 + \tau_1^2}} \right) = 0$$

4.4.2 Análise dos Gradientes:

Agora, vamos analisar os valores dos gradientes das equações (34), (35) e (36) quando os parâmetros τ_1, τ_2 se aproximam de zero, isto é, $\lim_{\tau_1, \tau_2 \rightarrow 0}$, levando em consideração o posicionamento dos pontos $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ em relação a cada um dos círculos (estações de rádio base) de centros $x_i^* = (x_i^{1*}, x_i^{2*})$ e com raio de cobertura z^* , que cobrem a região S . Observando que para fins de simplificação, vamos considerar $\tau_1 = \tau_2$.

Caso 1 : Pontos na fronteira do círculo ($z^* = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}$)

Uma vez determinado \mathbf{x}^* , vamos analisar os gradientes das equações (34), (35) e (36) em um particular ponto $s_j = (s_j^1, s_j^2)$, em relação a um particular centro de círculo $x_i^* = (x_i^{1*}, x_i^{2*})$. Considerando a expressão (34), podemos escrever o gradiente de uma restrição ativa em relação à primeira variável x_i^{1*} , de uma forma mais conveniente a essa análise,

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^1} = m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)}, \quad (40)$$

sendo

$$m(\tau_1) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{x_i^{1*} - s_j^1}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_1^2}} \right) \quad (41)$$

$$h(\tau_1) = \frac{\lambda}{2} (x_i^{1*} - s_j^1) \left(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_1^2} \right) \quad (42)$$

$$w(\tau_1) = \left(\sqrt{\left[z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_1^2} \right]^2 + \tau_1^2} \right) \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_1^2} \quad (43)$$

Calculando o limite desse gradiente quando $\tau_1 \rightarrow 0$ temos inicialmente:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \left[m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} \right] = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{x_i^{1*} - s_j^1}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \right) + \frac{0}{0} \quad (44)$$

Observando que temos então uma indeterminação na parcela $\frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)}$, vamos aplicar a Regra de L'Hopital para determinar o valor do limite para esta parcela.

Calculando $\frac{h'(\tau_1)}{w'(\tau_1)}$ e efetuando todas as simplificações possíveis temos que:

(45)

$$\frac{h'(\tau_1)}{w'(\tau_1)} = -\frac{\lambda}{2}(x_i^{1*} - s_j^1) \left(\frac{\sqrt{z^{*2} - 2z^* \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2} + \sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + 2\tau_1^2}}{-3z^* \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2} + \tau_1^2 + 3 \cdot \{(x_i^{k*} - s_j^k)^2\} + 4\tau_1^2 + z^{*2}} \right)$$

Temos então,

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{h'(\tau_1)}{w'(\tau_1)} = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{\sqrt{z^{*2} - 2z^* + z^{*2}}}{-3z^* \cdot z^* + 3z^{*2} + z^{*2}} \right) = \frac{0}{z^{*2}} = 0 \quad (46)$$

Ou seja:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^1} = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \right) \quad (47)$$

Efetuando cálculos análogos para $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^2}$ temos:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^2} = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \right) \quad (48)$$

Caso 2 : Pontos interiores ao círculo ($z^* > \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}$)

Novamente, vamos associar a expressão do gradiente em relação a variável x_i^1 com as funções $m(\tau_1)$, $h(\tau_1)$, $w(\tau_1)$, definidas no caso 1, temos:

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^1} = m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} \quad (49)$$

Calculando o limite desse gradiente quando $\tau_1 \rightarrow 0$, temos inicialmente:

(50)

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \left[m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} \right] = \frac{\lambda}{2} \frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \left\{ 1 + \frac{(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})}{(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})} \right\}$$

Simplificando a expressão anterior temos:

(51)

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^1} = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \left[m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} \right] = \lambda \left(\frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \right)$$

Efetando os mesmos cálculos para $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^2}$, temos

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} :$$

(52)

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} = \frac{\lambda}{2} \frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \left\{ 1 + \frac{(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})}{(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})} \right\}$$

Ou seja:

(53)

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)_{x_i^2} = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \left[m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)} \right] = \lambda \frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}$$

Caso 3 : Pontos exteriores ao círculo ($z^* < \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}$)

Associando $\nabla g_j(x^*)_{x_i^1}$ a $[m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)}]$ (definidas no caso 1) temos:

(54)

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} [m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)}] = \frac{\lambda}{2} \frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \left\{ 1 + \frac{(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})}{(-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})} \right\} = 0$$

Efetuando os mesmos cálculos para $\nabla g_j(x^*)_{x_i^2}$ temos:

(55)

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} [m(\tau_1) + \frac{h(\tau_1)}{w(\tau_1)}] = \frac{\lambda}{2} \frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} \left\{ 1 + \frac{(z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})}{(-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2})} \right\} = 0$$

Devemos observar que a análise de $\nabla g_z(\mathbf{x}^*)$ corresponde a uma compilação dos casos 1, 2 e 3, pois $\nabla g_z(\mathbf{x}^*)$ é definido por uma expressão, que além do próprio z engloba todas as variáveis x_i^* .

No cálculo do limite $\lim_{\tau_1 \rightarrow 0}$ para $\nabla g_z(\mathbf{x}^*)$, vamos associar expressão (36) a:

$$\frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^q \left(-1 + \frac{w_i(\tau_1)}{m_i(\tau_1)} \right) \right) \quad (56)$$

sendo

$$w_i(\tau_1) = -z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_1^2} \quad (57)$$

$$m_i(\tau_1) = \sqrt{\sum_{k=1}^2 [z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2 + \tau_1^2}]^2 + \tau_1^2} \quad (58)$$

Agora, vamos analisar as parcelas $\frac{w_i(\tau_1)}{m_i(\tau_1)}$, nos reportando aos casos 1, 2 e 3, que foram anteriormente explicitados, considerando novamente, um particular ponto s_j em relação a um particular centro x_i .

Se $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ estiver na fronteira do círculo, teremos:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{w_i(\tau_1)}{m_i(\tau_1)} = 0 \quad (59)$$

Se $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ for interior ao círculo, teremos:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{w_i(\tau_1)}{m_i(\tau_1)} = \frac{-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}{z^* - \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} = -1 \quad (60)$$

Se $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ for exterior ao círculo, teremos:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{w_i(\tau_1)}{m_i(\tau_1)} = \frac{-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}{-z^* + \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}} = 1 \quad (61)$$

Dessa forma, com base na expressão (56) e nos valores obtidos nas expressões (59),(60) e (61), temos que $\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \nabla g_z(\mathbf{x}^*)$ será expresso por:

$-\frac{\lambda}{2}$, para pontos s_j na fronteira do círculo;

$-\lambda$, para pontos s_j no interior do círculo;

0, para pontos s_j exteriores ao círculo.

No quadro a seguir sintetizamos as informações sobre o gradiente das funções restrição $\phi(\cdot)$, considerando $\lim_{\tau_1 \rightarrow 0}$:

Tabela 2 - Gradientes das Restrições.

Posição do ponto s_j	$\nabla g_j(x^*)_{x_i^1}$	$\nabla g_j(x^*)_{x_i^2}$	$\nabla g_j(x^*)_z$
Fronteira : $z^* = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}$	$\frac{\lambda}{2} \frac{x_i^{1*} - s_j^1}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}$	$\frac{\lambda}{2} \frac{x_i^{2*} - s_j^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}$	$-\frac{\lambda}{2}$
Interior : $z^* > \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}$	$\lambda \frac{(x_i^{1*} - s_j^1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}$	$\lambda \frac{(x_i^{2*} - s_j^2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}}$	$-\lambda$
Exterior : $z^* < \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^{k*} - s_j^k)^2}$	0	0	0

Analisando a tabela acima, observamos que a contribuição de cada um dos gradientes $\nabla g_j(\cdot)$ associados aos pontos s_j esta diretamente relacionada ao posicionamento dos círculos de centro x_i (estações de rádio base) sobre a região S .

Dessa forma, para pontos s_j exteriores a um particular círculo de centro x_i , observamos que $\nabla g_j(\cdot)$ é "insensível", ou seja, o gradiente de $g(\cdot)$ tem contribuição nula para estes pontos. Em contra partida, o gradiente $\nabla g_j(\cdot)$ relacionado aos pontos s_j que estão no interior do círculo tem contribuição, em módulo, duas vezes maior em relação ao gradiente dos pontos s_j que estão na fronteira do círculo de centro x_i .

4.4.3 Estudo do Aspecto de Quasi-Concavidade

Nesta seção, com base no estudo das propriedades das funções $\phi(y, \lambda, \tau_1)$, $\theta(y, \tau_2)$ e em conceitos de convexidade, vamos verificar que cada uma das funções $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ presentes nas restrições da modelagem *min - max - min* básica são quasi-concavas, observando que a verificação desta propriedade independe dos parâmetros τ_1 e τ_2 .

Consideremos a formulação abaixo:

$$\text{Min}_{x,z} f(\mathbf{x}) = z \quad (62)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi\left(z - \theta\left(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2\right), \lambda, \tau_1\right) \geq \epsilon \quad (62.1)$$

$$j = 1, \dots, m$$

onde z , $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ $i = 1, \dots, q$, são variáveis do problema, que representam, respectivamente, o raio de cobertura e os centros das estações, a fim de cobrir os pontos $s_j = (s_j^1, s_j^2)$, localizados na região S .

Para fins de análise, vamos considerar um dado raio z , um centro $x_1 = (x_1^1, x_1^2)$ e um ponto $s_1 = (s_1^1, s_1^2)$ da região S . Com o sentido de facilitar essa análise, vamos definir a seguinte função:

$$l(\mathbf{x}) = z - \sqrt{(x_1^1 - s_1^1)^2 + (x_1^2 - s_1^2)^2 + \tau_2^2} \quad (63)$$

$$\mathbf{x} = (x_1^1, x_1^2, z)$$

Dessa forma, uma restrição genérica do problema pode ser escrita como a composição da função $\phi(y, \lambda, \tau_1) = \frac{\lambda}{2}(y + \sqrt{y^2 + \tau_1^2})$ com $l(\mathbf{x})$:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2}[l(\mathbf{x}) + \sqrt{l(\mathbf{x})^2 + \tau_1^2}] \quad (64)$$

Agora, iremos mostrar que $g(\mathbf{x})$ é quasi-côncava, utilizando o fato de $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ ser crescente em relação à variável y e na verificação de que $l(\mathbf{x})$ é côncava. Para isto, relembremos a definição de concavidade:

Definição 1: Uma função $\alpha(\cdot)$ definida num conjunto Ω é côncava se e somente se:

$$\left\{ (1-t).\alpha(x_1) + t.\alpha(x_2) \leq \alpha((1-t).x_1 + t.x_2), \forall x_1, x_2 \in \Omega, 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

Aplicando esta definição em relação a função $l(\mathbf{x})$, se $l(\mathbf{x})$ for côncava a desigualdade

$$(1-t).l(x_1) + t.l(x_2) \leq l((1-t).x_1 + t.x_2) \quad (65)$$

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega, 0 \leq t \leq 1$$

deve ser verdadeira.

Considerando a definição de $l(\mathbf{x})$ dada por (63) e explicitando a desigualdade (65), deve ser verdadeiro que:

$$(1-t).z_1 - (1-t).\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_1^k - s_1^k)^2 + \tau_2^2} + t.z_2 - t.\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_2^k - s_1^k)^2 + \tau_2^2} \leq \quad (66)$$

$$(1-t).z_1 + t.z_2 - \sqrt{(x_1^1.(1-t) + x_2^1.t - s_1^1)^2 + (x_1^2.(1-t) + x_2^2.t - s_1^2)^2 + \tau_2^2}$$

Analisando ambos lados da desigualdade (66), podemos observar, que os termos associados às variáveis z_1 e z_2 são equivalentes, sendo assim, deve ser verdadeiro:

$$-(1-t).\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_1^k - s_1^k)^2 + \tau_2^2} - t.\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_2^k - s_1^k)^2 + \tau_2^2} \leq \quad (67)$$

$$-\sqrt{(x_1^1 \cdot (1-t) + x_2^1 \cdot t - s_1^1)^2 + (x_1^2 \cdot (1-t) + x_2^2 \cdot t - s_2^1)^2 + \tau_2^2}$$

Fazendo $v(x_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_1^k)^2 + \tau_2^2}$, a desigualdade (67) é equivalente à ,

$$-1\{(1-t) \cdot v(x_1) + t \cdot v(x_2)\} \leq -1\{v((1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2)\} \quad (68)$$

Observando que $v(x_i)$ é uma função convexa (Mangasarian [29]), então, $\{-v(x_i), x_i \in \Omega\}$ é côncava, e desta forma, as desigualdades (67) e (66) são satisfeitas. O que implica que a desigualdade (65) também seja satisfeita, ou seja, $l(\mathbf{x})$ é côncava \square .

Definição 2: Uma função $\alpha(\cdot)$ definida em um conjunto Ω é quasi-côncava (figura 14) se e somente se:

$$\{ \alpha(x_1) \leq \alpha(x_2) \Rightarrow \alpha(x_1) \leq \alpha((1-t) \cdot x_1 + t \cdot x_2), x_1, x_2 \in \Omega, 0 \leq t \leq 1 \}$$

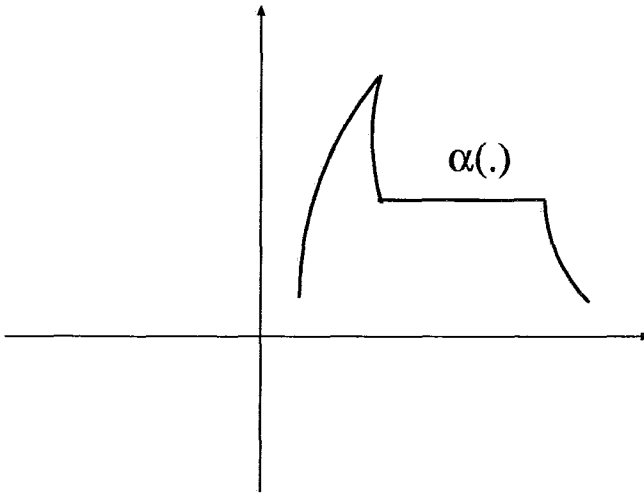


Figura 14 - Exemplo de Função Quasi-Côncava em \mathbb{R}

Considerando válida a hipótese acima para a função $g(\mathbf{x})$, vamos supor

$$g(\mathbf{x}_1) \leq g(\mathbf{x}_2) \quad (69)$$

sendo $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, z_1)$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, z_2)$

Para a análise da questão de quasi-concavidade para a função $g(\mathbf{x})$, vamos assumir que tem-se dois pontos \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 em que é observada a desigualdade

$$l(\mathbf{x}_1) + \sqrt{l(\mathbf{x}_1)^2 + \tau_1^2} \leq l(\mathbf{x}_2) + \sqrt{l(\mathbf{x}_2)^2 + \tau_1^2} \quad (70)$$

Lembrando que $\phi(y, \lambda, \tau_1)$ é monotonamente crescente em relação à variável y , a validade de (70) implica em:

$$l(\mathbf{x}_1) \leq l(\mathbf{x}_2) \quad (71)$$

Considerando ademais que $l(\mathbf{x})$ é côncava, temos:

$$(1-t).l(\mathbf{x}_1) + t.l(\mathbf{x}_2) \leq l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2) \quad (72)$$

ou

$$l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)) \leq l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2) \quad (73)$$

Ou seja, $\forall \mathbf{x}_1 \in \Omega$, $\forall \mathbf{x}_2 \in \Omega$ e $0 \leq t \leq 1$, definimos valores γ_1 e γ_2 tais que:

$$\gamma_1 = l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)) \quad (74)$$

$$\gamma_2 = l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2)$$

Considerando a desigualdade (73) e substituindo os valores da equação (74) na função $\phi(y, \lambda, \tau_1) = \frac{\lambda}{2}(y + \sqrt{y^2 + \tau_1^2})$, temos:

$$\gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + \tau_1^2} \geq \gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + \tau_1^2}, \quad (75)$$

ou seja

$$l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2) + \sqrt{l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2)^2 + \tau_1^2} \geq \quad (76)$$

$$l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)) + \sqrt{(l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)))^2 + \tau_1^2}$$

Agora, considerando a desigualdade (71), vemos que equivale a:

$$l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1) \geq 0 \quad (77)$$

Em seguida, multiplicando ambos os termos de (77) por t , $0 \leq t \leq 1$, a desigualdade permanece válida, ou seja,

$$t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)) \geq 0 \quad (78)$$

Finalmente, somando $l(\mathbf{x}_1)$ de ambos os lados de (78), teremos:

$$l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)) \geq l(\mathbf{x}_1) \quad (79)$$

$$\forall \mathbf{x}_1 \in \Omega, \forall \mathbf{x}_2 \in \Omega$$

Substituindo o termo à esquerda e à direita da desigualdade (79) na função $\phi(y, \lambda, \tau_1)$, produzimos a seguinte desigualdade:

(80)

$$l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)) + \sqrt{(l(\mathbf{x}_1) + t.(l(\mathbf{x}_2) - l(\mathbf{x}_1)))^2 + \tau_1^2} \geq l(\mathbf{x}_1) + \sqrt{l(\mathbf{x}_1)^2 + \tau_1^2}$$

Através desta última desigualdade e da desigualdade (76), podemos concluir então,

(81)

$$l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2) + \sqrt{l((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2)^2 + \tau_1^2} \geq l(\mathbf{x}_1) + \sqrt{l(\mathbf{x}_1)^2 + \tau_1^2}$$

que implica

(82)

$$g(\mathbf{x}_1) \leq g((1-t).\mathbf{x}_1 + t.\mathbf{x}_2)$$

Então, $g(\mathbf{x})$ é quasi-côncava, implicando que cada uma das funções restrições $\phi(\cdot)$ são quasi-côncavas, completando a prova \square .

4.5 Variações da Modelagem Proposta

Nesta seção, apresentaremos 4 novas modelagens que foram motivadas pelo estudo das características do Problema de Localização de ERB's e na modelagem $\min - \max - \min$ básica desenvolvida na seção 4.3.

A resolução numérica da modelagem $\min - \max - \min$ básica fornece os valores de x_i e z . Os valores x_i , conforme já abordado, representam os pontos de localização das ERB's e a variável z representa o raio de cobertura de cada uma das ERB's. Este raio está normalmente associado ao alcance e à qualidade de recepção dos sinais emitidos pelas antenas (potência do sinal) que compõem cada ERB. Devemos observar que há uma relação entre o número de estações e o raio de cobertura z de cada uma das estações. Com o aumento do parâmetro q , associado ao número de estações, há uma redução do tamanho do raio de cobertura z de cada estação e vice-versa.

Se o valor z obtido para o raio de cobertura não estiver adequado às necessidades de serviço da região, o valor inicial do parâmetro q (número de estações) pode ser aumentado ou reduzido, até que seja atingido um patamar pré-estabelecido de qualidade de cobertura. Esse procedimento pode ser facilmente efetuado através de uma busca binária no valor de q , de forma que o valor de z respeite os limites de cobertura associados ao problema real ($z_{\text{mínimo real}} \leq z \leq z_{\text{máximo real}}$).

Observamos que esta modelagem inicial dá uma visão geral da distribuição das estações de rádio base sobre a região S . Todavia, com intuito de tornar a solução desta problemática mais aderente a realidade, isto é, considerando as características intrínsecas ao problema de localização de ERB's, numa dada região S , tais como: a diversidade na propagação e alcance dos sinais de rádio, a distribuição dos usuários, a presença de obstáculos e a variação de relevo, desenvolvemos 4 modelagens variantes.

Nessas modelagens, apresentadas a seguir, encapsulamos o importante aspecto da distância máxima entre as estações, priorizamos pontos candidatos a instalação das ERB's, definimos agrupamentos de locais candidatos para instalação de ERB's e trabalhamos com raios de cobertura diferenciados (potências de transmissão).

Com a utilização dessas modelagens ou de uma combinação das mesmas, podemos ter uma idéia bem melhor para a distribuição do sistema como um todo. Além disso, podemos fazer uma nova modelagem ou novas modelagens, derivadas da composição da cinco modelagens iniciais, isto é, podemos agregar numa única modelagem características adicionais para o problema de localização de ERB's.

A seguir, começaremos a apresentar as novas modelagens, relembrando a modelagem $\min - \max - \min$ básica.

Modelagem M0: Cobertura Total (Modelagem Básica)

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (83)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \quad (83.1)$$

Sendo z e $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ ($i = 1, \dots, q$) variáveis associadas respectivamente ao raio de cobertura e aos centros de cada uma das q estações e $s_j = (s_j^1, s_j^2)$, $j = 1, \dots, m$, os pontos associados a região S , que deve ser coberta pelas q estações. Isto é, cada ponto s_j pode representar um usuário ou conjunto de usuários que devem ser atendidos pelos serviços de telefonia.

Modelagem M1: Agrupamento de Estações

Nesta primeira modelagem alternativa, vamos considerar que as q estações de rádio base, sejam distribuídas em n agrupamentos disjuntos. Ou seja, se Q é o conjunto de todas as estações, temos: $Q = Q_1 \cup Q_2 \dots \cup Q_n$. Sendo $|Q_r|$, $r = 1, \dots, n$, o número de estações de rádio base em cada agrupamento.

Na figura 15, apresentamos um exemplo desta modelagem, considerando $n = 3$, e $|Q_1| = 3$, $|Q_2| = 4$, $|Q_3| = 2$.

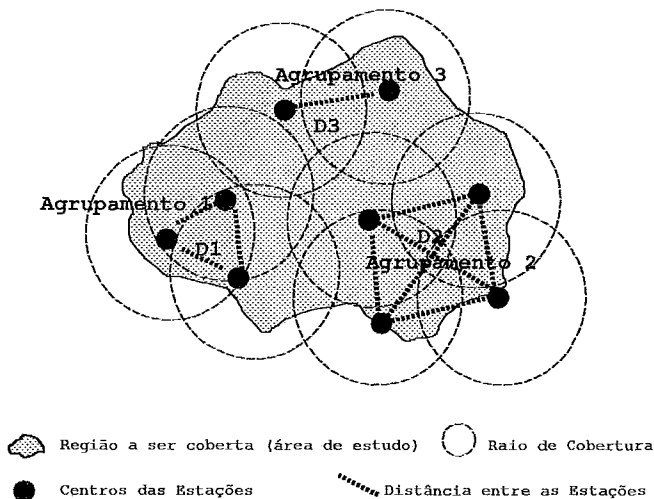


Figura 15 - Exemplo da Modelagem M1

Para cada agrupamento Q_r , ($r = 1, \dots, n$), definimos uma medida D_r , que representa a distância máxima entre os centros das estações, duas a duas.

A racionalidade da formação de agrupamentos de estações de rádio base com distâncias diferenciadas está associada às questões de utilização do espectro de frequências e a densidade de usuários.

Conforme descrito nos trabalhos de Nascimento[1], Stuber[2] e Mateus[3], o espectro de frequências disponível para o serviço de telefonia celular é limitado. E além disso, em áreas urbanas, há uma grande concentração de usuários do serviço de telefonia. Desta forma, o espectro de frequências deve ser utilizado de uma forma parcimoniosa.

Para se atender às demandas dos grandes centros urbanos, podemos então, formar mais agrupamentos de estações de rádio base, colocando estas estações mais próximas umas das outras e disponibilizar para cada um destes agrupamentos um conjunto de canais de frequência menor e que poderá ser reaproveitado (Nascimento[1], Stuber[2]) para outros agrupamentos vizinhos, sem que haja interferência de canais (vide capítulo 2) entre as estações e de forma que todos os usuários sejam atendidos.

Já para as áreas pouco povoadas, áreas rurais, etc, podemos definir um número menor de agrupamentos com as estações mais distanciadas, tendo em vista que o número de usuários é bem menor.

Deseja-se então, que as q estações sejam distribuídas em n agrupamentos, tal que para estações de centros x_l e x_u pertencentes a um mesmo agrupamento tenhamos:

$$\|x_l - x_u\|_2 \leq D_1 \quad \text{primeiro agrupamento} \quad (84)$$

$$l = 1, \dots, |Q_1| - 1, \quad u = l + 1, \dots, |Q_1|$$

...

$$\|x_l - x_u\|_2 \leq D_p \quad p - \text{ésimo agrupamento} \quad (1 < p \leq n)$$

$$l = \left(\sum_{r=1}^{p-1} |Q_r| \right) + 1, \dots, \left(\sum_{r=1}^p |Q_r| \right) - 1, \quad u = l + 1, \dots, \sum_{r=1}^p |Q_r|$$

Considerando, então, essas novas restrições, temos a seguinte modelagem:

$$\text{Minimizar}_{x,z} \quad z \quad (85)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \quad (85.1)$$

$$\|x_l - x_u\|_2 \leq D_1 \quad \text{primeiro agrupamento} \quad (85.2)$$

$$l = 1, \dots, |Q_1| - 1, \quad u = l + 1, \dots, |Q_1|$$

...

$$\|x_l - x_u\|_2 \leq D_p \quad p\text{-ésimo agrupamento} \quad (1 < p \leq n)$$

$$l = \left(\sum_{r=1}^{p-1} |Q_r|\right) + 1, \dots, \left(\sum_{r=1}^p |Q_r|\right) - 1, \quad u = l + 1, \dots, \sum_{r=1}^p |Q_r|$$

Todavia, como cada restrição do tipo (85.2) está associada à função distância euclidiana, que notadamente possui pontos de não-diferenciabilidade, vamos novamente introduzir a função auxiliar $\theta(\cdot)$, no sentido de obter um problema completamente diferenciável. Assim, escrevendo então as restrições do tipo (85.2) temos:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (86)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \quad (86.1)$$

$$\theta(\sqrt{(x_l^1 - x_u^1)^2 + (x_l^2 - x_u^2)^2}, \tau_2) \leq D_1 \quad \text{primeiro agrupamento} \quad (86.2)$$

$$l = 1, \dots, |Q_1| - 1, \quad u = l + 1, \dots, |Q_1|$$

...

$$\theta(\sqrt{(x_l^1 - x_u^1)^2 + (x_l^2 - x_u^2)^2}, \tau_2) \leq D_p \quad p - \text{ésimo agrupamento} \quad (1 < p \leq n)$$

$$l = \left(\sum_{r=1}^{p-1} |Q_r|\right) + 1, \dots, \left(\sum_{r=1}^p |Q_r|\right) - 1, \quad u = l + 1, \dots, \sum_{r=1}^p |Q_r|$$

Nesta modelagem, as restrições (86.1) garantem que todos os pontos $s_j \in S$ serão cobertos por alguma estação de rádio base e as restrições (86.2) definem as distâncias máximas entre estações que estão em um mesmo agrupamento.

Observamos que a despeito das restrições (86.2), o problema sempre será viável, independente dos valores que venha a se definir para o parâmetro D_r , ou seja, a redução de D_r será compensada pelo aumento do raio z e vice-versa.

Modelagem M2: Estações com Localização Pré-definida

Nesta modelagem, será contemplada a situação em que algumas das estações têm a localização pré-definida. Dessa forma, considere que para a região S a ser coberta, escolhamos um conjunto $y_r = (y_r^1, y_r^2)$ de pontos ($r = 1, \dots, \bar{q} \leq q$). Ou seja, vamos escolher alguns pontos y_r que estão na região S e dos quais as estações de rádio base deverão estar a uma certa distância pré-definida. Isto é, as estações deverão estar localizadas (instaladas) numa vizinhança dos pontos y_r .

Normalmente, a escolha desses locais é feita ad-hoc pela área de planejamento da companhia e está diretamente correlacionada à análises de propagação de sinal, ao relevo da região, aos tipos de construção, à densidade de usuários e a alguns obstáculos, conforme descrito por Nascimento[1], Stuber[2] e Mateus[3].

Na figura 16, apresentamos um exemplo com $q = 4$, $\bar{q} = 3$, isto é, temos três estações que deverão estar numa vizinhança de especificados pontos s_1, s_2, s_3 e uma estação com posicionamento livre.

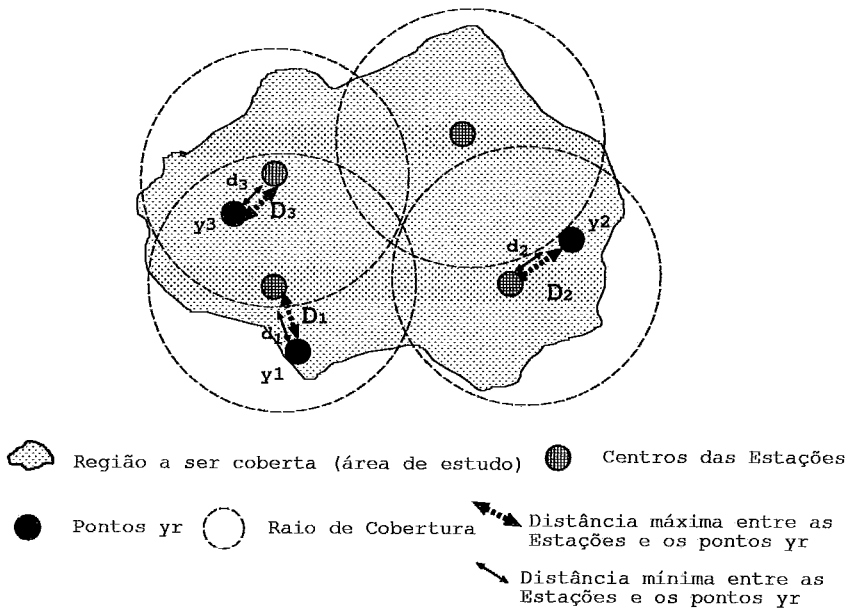


Figura 16 - Exemplo da Modelagem M2

Associemos a cada ponto $y_r = (y_r^1, y_r^2)$, definido para esta região, um ponto $x_r = (x_r^1, x_r^2)$ que representará o centro de uma das \bar{q} estações, de tal forma que a distância entre cada ponto y_r e o seu respectivo centro x_r seja maior ou igual que um valor d_r e menor ou igual a um valor D_r , ambos definidos a priori.

A racionalidade de se definir que os centros das estações estejam numa vizinhança dos pontos y_r é a de garantir que essas estações estejam a uma distância máxima D_r de: hospitais, grandes centros de informação, centrais de emergência, etc, que também estão numa vizinhança dos pontos y_r .

Todavia, além da existência desses pontos de demanda, podemos ter obstáculos como transmissores, construções, etc, também próximos de y_r . A fim de garantir que esses obstáculos não interfiram na comunicação para pontos de demanda próximos de y_r , definimos um distância d_r , como a medida de distância mínima, isto é, afastamento mínimo que a estação deve estar do ponto y_r , a fim de evitar interferência e conseqüentemente a perda de comunicação.

Assim, do ponto de vista de modelagem, definidos os valores D_r e d_r e os seus respectivos pontos y_r , ($r = 1, \dots, \bar{q}$) devemos estabelecer que:

$$\|y_r - x_r\|_2 \leq D_r, \quad r = 1, \dots, \bar{q} \leq q \quad (87)$$

$$\|y_r - x_r\|_2 \geq d_r, \quad r = 1, \dots, \bar{q} \leq q \quad (88)$$

Observamos, que no limite, podemos até mesmo fixar um ponto, considerando $D_r = 0$, na restrição (87) e excluindo a restrição (88).

Considerando então estas novas restrições e observando a característica de não-diferenciabilidade das funções associadas às mesmas, temos a seguinte modelagem:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (89)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \quad (89.1)$$

$$\theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_r^k - y_r^k)^2}, \tau_2) \leq D_r, \quad r = 1, \dots, \bar{q}, \quad \bar{q} \leq q \quad (89.2)$$

$$\theta\left(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_r^k - y_r^k)^2}, \tau_2\right) \geq d_r, \quad r = 1, \dots, \bar{q}, \quad \bar{q} \leq q \quad (89.3)$$

Observamos que as restrições (89.1) garantem que todos os pontos $s_j \in S$ serão cobertos por alguma estação de rádio base e as restrições (89.2) e (89.3) garantem que cada uma das estações de centro x_r estarão numa vizinhança dos pontos y_r .

Analogamente ao problema anterior, temos que o problema (89) sempre será viável.

Modelagem M3: Conjuntos de Pontos Candidatos para Instalação de ERB's

Nesta modelagem, vamos considerar que sejam definidos a priori q conjuntos de pontos candidatos à instalação das estações de rádio base (figura 17). Cada um destes conjuntos será designado por H_r , $r = 1, \dots, q$, contendo $|H_r|$ pontos candidatos $h_{rl} = (h_{rl}^1, h_{rl}^2)$, $l = 1, \dots, |H_r|$, $\cap_{r=1}^q H_r = \emptyset$.

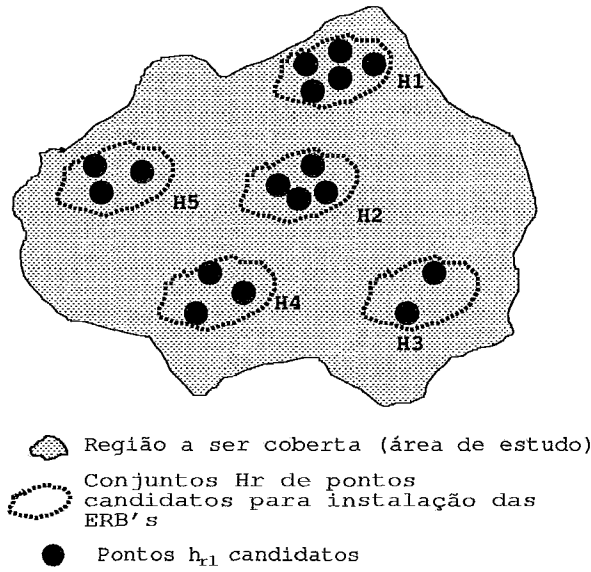


Figura 17 - Exemplo da Modelagem M3

Conforme descrito em Mateus[3], os pontos h_{rl} associados a cada um dos conjuntos H_r são definidos a priori pela área de planejamento da companhia prestadora de serviços através de análises de propagação de sinal, relevo, etc.

Desta forma, vamos considerar, que para cada um dos conjuntos H_r , $r = 1, \dots, q$, será selecionado apenas um ponto h_{rl} para a instalação das ERB's. Ou seja, teremos então, um total de q pontos associados às ERB's de centros (x_1, x_2, \dots, x_q) .

Para cada ponto $h_{rl} \in H_r$, $r = 1, \dots, q$, $l = 1, \dots, |H_r|$, podemos definir, então, uma função que representará a distância entre os pontos h_{rl} e suas respectivas estações:

$$\bar{d}_{rl} = \sqrt{(x_r^1 - h_{rl}^1)^2 + (x_r^2 - h_{rl}^2)^2} \quad (90)$$

$$r = 1, \dots, q, \quad l = 1, \dots, |H_r|$$

Como para cada conjunto H_r deve-se selecionar apenas um ponto h_{rl} , então, definido um número q de estações, devemos ter pontos h_{rl} e, conseqüentemente, centros $x_r = (x_r^1, x_r^2)$, tais que $\bar{d}_{rl} = 0$, $r = 1, \dots, q$.

Para auxiliar a apresentação do problema, vamos definir a seguinte função produto intra-grupo:

$$p_r(x_r) = \bar{d}_{r1} * \bar{d}_{r2} * \dots * \bar{d}_{r|H_r|}, \quad (91)$$

$$r = 1, \dots, q,$$

ou seja, cada uma das funções $p_r(x_r)$ representa o produto das distâncias entre uma estação de centro x_r e os seus respectivos pontos $h_{rl} \in H_r$.

A fim de garantir que o centro x_r de uma estação estará associado a apenas um dos pontos de H_r , podemos definir uma tolerância $\delta_r \geq 0$ convenientemente para cada grupo e as seguintes restrições:

$$p_r(x_r) \leq \delta_r, \quad (92)$$

$$r = 1, \dots, q$$

Devemos observar que cada uma das funções \bar{d}_{rl} que estão agregadas aos produtórios representados pelas funções $p_r(\cdot)$, apresentam pontos de não-diferenciabilidade. Desta forma, vamos introduzir a função $\theta(y, \tau_2)$.

Considerando essas restrições e as restrições de cobertura da modelagem *min - max - min* básica temos então a seguinte a modelagem:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z \quad (93)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^q \phi(z - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad (93.1)$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\prod_{l=1}^{|H_r|} \sqrt{\bar{d}_{rl}^2 + \tau_2^2} \leq \delta_r \quad (93.2)$$

$$r = 1, \dots, q$$

Observamos que o parâmetros δ_r são definidos de forma conveniente, levando em conta o número de pontos candidatos em cada conjunto H_r e a escala de representação destes pontos.

As restrições (93.1) garantem a cobertura total da região S e as restrições (93.2) garantem que em cada conjunto H_r será selecionado apenas um ponto h_{rl} .

Devemos ainda ressaltar, que esta modelagem pode ser convenientemente manipulada de forma a convergir para as modelagens de programação inteira ortodoxas, que são utilizadas para o problema de localização de ERB's, sem o uso explícito de variáveis $(0, 1)$.

Isto é, conforme já descrito no capítulo 3, nessas modelagens definimos um conjunto de q pontos candidatos para instalação de ERB's e partir desse conjunto selecionamos um subconjunto de \bar{q} pontos para instalar as ERB's, sendo idealmente $\bar{q} < q$.

Modelagem M4: Potências de Transmissão Diferenciadas

Nessa modelagem, vamos considerar, que as estações trabalhem com raios de cobertura (potências de transmissão) diferenciados (figura 18). Observando que a racionalidade de se trabalhar com raios de cobertura diferenciados está baseada no fato de que, nas áreas de serviço associadas a grandes centros urbanos existe grande diversidade sob diversos aspectos tais como: distribuição dos usuários, constituição do relevo, tipos de construções e de transmissores.

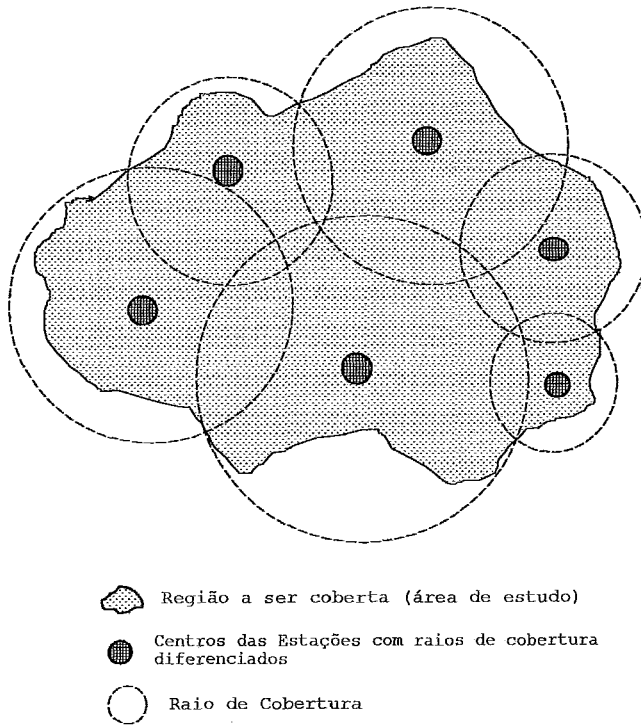


Figura 18 - Exemplo da Modelagem M4

Para os centros urbanos, trabalha-se com raios de cobertura menores, com o intuito de instalar um maior número de antenas com potências de transmissão menores e de forma a permitir o reaproveitamento espectral, isto é, possibilitar um atendimento satisfatório para mais usuários simultaneamente e evitar a ocorrência de interferências co-canal e adjacente, oriundas de outros transmissores (vide capítulo 3).

Voltamos a lembrar, que a preocupação com a boa utilização do espectro de frequências deve ser permanente, tendo em vista a limitação do mesmo. Para os centros urbanos, poucas antenas, com muitos canais distribuídos ou uso de antenas com potências de transmissão muito elevadas, pode implicar em problemas de indisponibilidade de serviço ou interferências na comunicação.

Em contrapartida, para áreas rurais ou pouco povoadas, pode-se utilizar um número menor de antenas com potências de transmissão maiores, ou seja, as estações podem estar mais separadas e em menor número.

Com base nessas informações, considere que seja definido um conjunto de q estações para atender a uma determinada região S . Em seguida, definimos para cada uma dessas estações raios de cobertura z_i . Isto é, para cada estação, teremos $z_i = w_i * z_o$, sendo os valores w_i obtidos pelos determinantes de natureza eletrônica associados à aplicação, ou seja, em função de potência de transmissão, de altura das antenas e de capacidade dos equipamentos da rede de telefonia. Os valores w_i podem representar então, a ampliação do alcance de sinal.

Devemos obter, então, para esse problema o menor raio de cobertura z_o , ou seja, potência de transmissão inicial instalada, tal que as q estações atendam a todos os pontos $s_j \in S$, $j = 1, \dots, m$.

A modelagem M0 pode ser facilmente adaptada às especificidades do novo problema da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar}_{x,z} z_o \quad (94)$$

$$\sum_{i=1}^q \phi(z_o \cdot w_i - \theta(\sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_i^k - s_j^k)^2}, \tau_2), \lambda, \tau_1) \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, m \quad (94.1)$$

Observamos então, que temos encapsulados nas restrições (94.1) a questão da cobertura total e a questão da potência de transmissão diferenciada.

Concluindo a apresentação das quatro modelagens propostas para auxiliar na resolução da problemática de localização de ERB's, podemos fazer algumas considerações que permeiam totalmente este trabalho:

- Nas quatro modelagens propostas, conseguimos atender a algumas das características associadas ao problema de localização de ERB's trabalhando com algumas restrições adicionais de desigualdade, sem alterar a estrutura da modelagem *min - max - min* básica, que foi inicialmente apresentada para resolver o problema de localização de ERB's. Desta forma, podemos utilizar o mesmo algoritmo de suavização hiperbólica apresentado na seção 4.3.

- Podemos ainda observar, que dependendo então das necessidades de planejamento e por conseguinte, do grau de detalhamento que se deseja considerar na resolução desse problema, é possível agregar de forma simples, numa única modelagem, algumas das modelagens propostas para o problema localização de ERB's.

5. Resultados Computacionais

Introdução

Neste capítulo, faremos uma exposição dos resultados numéricos/computacionais obtidos para a modelagem $min - max - min$ básica, para as modelagens variantes propostas no capítulo 4, bem como uma descrição dos programas de geração de dados e de resolução dos modelos. Estes programas foram implementados utilizando a linguagem de programação Delphi 6.0 e processados em um microcomputador modelo IBM-PC dotado de um processador Pentium IV (1.6 Mhz) com 256 MB de memória.

O desenvolvimento deste capítulo está dividido em sete seções: Na seção 1 descrevemos o programa de geração de dados, na seção 2 o programa de resolução dos modelos e o algoritmo de suavização hiperbólica, e nas seções de 3 a 7 apresentamos um conjunto de tabelas e figuras que contemplam os resultados obtidos para as cinco modelagens que propomos neste trabalho de tese.

5.1 Programa de Geração dos Dados

Esse programa é constituído por rotinas que têm a finalidade de gerar um conjunto de informações que nos permitem emular um ambiente de telefonia celular. Inicialmente, o programa lê um conjunto de pontos (x, y) de um arquivo, com cada um desses pontos representando as coordenadas dos vértices de uma poligonal associada ao contorno do mapa de uma dada região (bairro, município, estado, país).

Em seguida, o programa gera para o interior dessa poligonal, uma malha, conjunto de pontos equidistantes, que pode ter uma maior ou menor densidade (subdivisões), com cada ponto s_j dessa malha representando um conjunto de usuários que devem ser atendidos pelas estações de rádio base (figura 19).

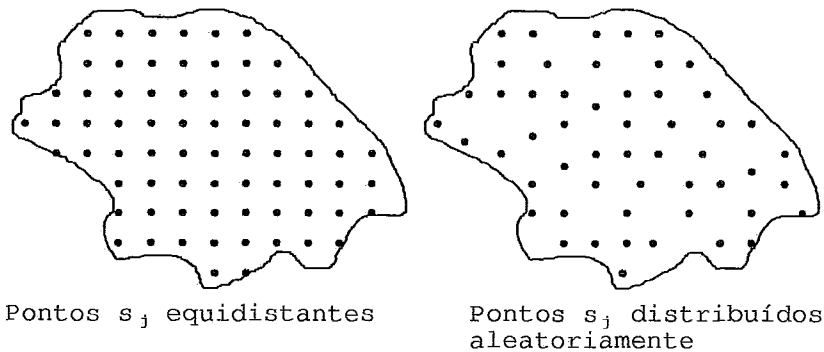


Figura 19 - Exemplo da Distribuição dos pontos s_j na região S

Alternativamente, pode-se também gerar os pontos no interior da poligonal aleatoriamente, isto é, sem que os pontos s_j estejam equidistantes como no caso da malha. Em qualquer dos dois casos, o número de pontos s_j é definido pelo usuário (figura 19).

Completando o conjunto de dados de entrada do programa, é solicitado ao usuário o número q de ERB's (círculos) que serão utilizadas para cobrir a região S . Com posse desse número, o programa gera de forma aleatória, os centros (coordenadas) x_i , ($i = 1, \dots, q$) das ERB's, exigindo apenas que estes centros $x_i = (x_i^1, x_i^2)$, pertençam ao interior da região S . E finalmente, define-se um raio inicial z^0 associado a cada centro x_i tal que $z^0 = diam(S)$ (Lages[50]), onde $diam(S)$ representa o diâmetro da região S , que corresponde à maior distância entre dois pontos quaisquer dessa região.

Considerando então, todas essas informações, é gerado um arquivo de saída que contém os pontos $s_j = (s_j^1, s_j^2)$ delimitados pela poligonal, o número de ERB's necessárias para atender a demanda da região S , as coordenadas iniciais x_i , $i = 1, \dots, q$ das ERB's e o seu raio inicial de cobertura z^0 .

Destacamos que, os procedimentos descritos e aplicados neste trabalho, para geração dos dados e dos pontos para cada uma das regiões em questão, estão baseados nos trabalhos de Guedes[40] e Matheus[15].

Ainda utilizando o programa de geração de dados, é possível considerar, para o interior da poligonal (região S), os parâmetros associados às 4 modelagens variantes. Na tabela 3 abaixo, apresentamos esses parâmetros.

Tabela 3 - Parâmetros considerados no Programa de Geração de Dados.

Modelagem	Parâmetros
M1 : Agrupamento de Estações	<ul style="list-style-type: none"> • Número de agrupamentos n • Número de estações por agrupamento • Distância D_r entre estações de cada agrupamento
M2 : Estações com Localização Pré-Definida	<ul style="list-style-type: none"> • Pontos y_r, $r = 1, \dots, \bar{q} \leq q$, dos quais a ERB ficará próxima • Distância máxima D_r de uma ERB ao ponto y_r • Distância mínima d_r de uma ERB ao ponto y_r
M3 : Conjunto de Pontos Candidatos para Instalação de ERB's	<ul style="list-style-type: none"> • Número de conjuntos H_r, $r = 1, \dots, q$ com pontos candidatos • Pontos h_{rl}, $l = 1, \dots, H_r$ em cada conjunto H_r
M4 : Potências de Transmissão Diferenciadas	<ul style="list-style-type: none"> • Valores de ampliação de alcance w_i, $i = 1, \dots, q$

5.2 Programa de Resolução das Modelagens

Para a implementação dos algoritmos associados às cinco modelagens propostas neste trabalho, fizemos uso de uma biblioteca de rotinas de programação não-linear, disponibilizada na internet por Debord[48]. Nessa pinçamos o algoritmo de minimização irrestrita que implementa um método Quase-Newton com atualização BFGS (Martinez[26]).

Em seguida, baseados no trabalho de Dennis e Schnabel[49], efetuamos adaptações em alguns dos procedimentos presentes nessa biblioteca, com a finalidade de utilizá-los no algoritmo de suavização hiperbólica. Nesse algoritmo temos um conjunto de funções associadas ao processo de suavização, de penalização hiperbólica e do cálculo dos gradientes.

Devemos ainda observar que todas as funções implementadas para suavização e penalização foram validadas através da utilização do pacote matemático Maple 6.0. As expressões analíticas dos gradientes foram validadas através do seu cálculo aproximado, mediante a aplicação do método das diferenças centrais, descrito, por exemplo, em Dennis, Mangasarian e Schnabel[49].

Os dados de entrada comuns fornecidos para essas modelagens foram: os pontos s_j contidos na região S , o raio de cobertura z e as coordenadas iniciais x_i $i = 1, \dots, q$ das estações de rádio base, os parâmetros de suavização τ_1, τ_2 , o parâmetro ϵ e os parâmetros de penalização d e α . Além desses, foram fornecidos os parâmetros particulares de cada uma das modelagens variantes, apresentados na tabela 3.

5.3 Resultados da Modelagem M0: Cobertura Total (Modelagem Básica)

Nesta seção, apresentamos um conjunto de tabelas e figuras com informações relativas à modelagem *min-max-min* básica, que contém unicamente as restrições que garantem a cobertura de todos os pontos s_j da região S pelas q estações de rádio base. Para essa modelagem, temos os resultados associados a um conjunto de 20 problemas teste, tabelas 4 a 6, considerando os pontos $s_j \in S$ equidistantes.

Ainda considerando a modelagem *min-max-min* básica, nas tabelas de 8 a 10, temos as mesmas informações das tabelas de 4 a 6 para um conjunto de sete problemas teste, sendo que os pontos s_j foram distribuídos aleatoriamente no interior da região S .

Na tabela 4, apresentada a seguir, temos segundo a ordem das colunas: o nome do problema teste, o número de ERB's, o número de pontos $s_j \in S$ cobertos pelas ERB's, o raio de cobertura das ERB's, o total de iterações do método BFGS e o tempo de processamento, em segundos, gasto para resolver o problema.

Tabela 4 - Informações gerais sobre os problemas teste

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
AF40	2	910	208.5254	191	22
AF80	4	3389	139.4151	320	149
AF100	6	5248	108.6673	337	289
AF120	7	7524	105.9838	369	559
AF130	9	8824	90.7043	382	839
AF160	11	13309	79.4751	387	1648
AF180	17	16814	65.2308	360	3530
BH60	9	1937	90.5348	331	179
BH70	6	2579	111.6290	279	129
BH75	39	2942	42.0479	336	2081
BH80	33	3323	46.5409	384	2025
BH90	12	4164	76.0836	343	526
BH100	13	5115	73.6650	356	738
BH120	86	7301	26.7952	453	27900
BH150	30	11328	48.4354	409	6275
BH300	7	44872	164.7743	381	1285
BH420	4	87776	144.0751	413	3323
RJ100	50	4668	36.0037	379	5583
RJ170	6	13295	111.2607	342	748
RJ200	17	18341	96.5032	398	1580

Pela tabela 4, podemos observar, que a modelagem *min - max - min* básica mostrou-se eficiente para problemas teste com um substancial número de variáveis e restrições, destacando dentre esses, os problemas: **BH120** com 173 variáveis e 7301 restrições, **BH420** com 9 variáveis e 87776 restrições e **RJ100** com 101 variáveis e 4668 restrições.

Na tabela 5, temos os valores iniciais e finais dos parâmetros de suavização τ_1, τ_2 e do parâmetro ϵ , considerando que os valores finais associados aos parâmetros ϵ, τ_1, τ_2 , são fruto da observação do critério de parada $|z^k - z^{k-1}| \leq \delta$, implementado no algoritmo de suavização hiperbólica.

Podemos ainda observar, que os valores finais associados a esses parâmetros produzem um raio z que satisfaz ao conjunto de restrições de cobertura, ou seja, os valores de z proporcionam a cobertura de todos os pontos $s_j \in S$.

Tabela 5 - Valores iniciais e finais dos parâmetros de suavização τ_1, τ_2, ϵ

Problema	τ_1^0, τ_2^0	ϵ^0	τ_1^*, τ_2^*	ϵ^*
AF40	5.000E-01	1.000E+00	5.000E-07	1.563E-08
AF80	5.000E-01	2.000E+00	5.000E-07	1.280E-10
AF100	2.000E-01	1.200E+00	2.000E-07	1.875E-08
AF120	2.000E-01	1.400E+00	2.000E-07	1.190E-11
AF130	1.500E-01	1.350E+00	1.500E-07	2.540E-12
AF160	5.000E-01	5.500E+00	5.000E-07	3.520E-10
AF180	2.000E-01	3.400E+00	2.000E-07	2.176E-10
BH60	1.000E+00	9.000E+00	1.000E-06	3.686E-08
BH70	1.000E+00	6.000E+00	1.000E-06	9.375E-08
BH75	1.000E-01	4.000E+00	1.000E-07	6.250E-08
BH80	2.000E-01	6.600E+00	2.000E-07	1.611E-09
BH90	2.000E-01	2.400E+00	2.000E-07	3.292E-09
BH100	2.000E-01	2.600E+00	2.000E-07	3,567E-09
BH120	1.000E-01	8.600E+00	1.000E-07	8.600E-12
BH150	3.000E-01	9.000E+00	3.000E-07	1.929E-10
BH300	5.000E-01	1.500E+00	5.000E-07	3.662E-10
BH420	5.000E-01	2.000E+00	2.000E-07	7.629E-12
RJ100	2.000E-01	1.000E+01	2.000E-07	6.400E-10
RJ170	2.000E-01	1.200E+00	2.000E-07	2.930E-10
RJ200	4.000E-01	3.200E+00	4.000E-07	2.048E-10

Na tabela 6, segundo a ordem das colunas temos: o nome do problema teste, o valor da função penalidade $P(x^*)$ que agrega as restrições da modelagem *min - max - min* básica, a razão entre a função penalidade e a função objetivo do problema original e os valores inicial e final da função objetivo.

Os valores pouco significativos (pequenos) de $P(x^*)$, observados para todos os problemas teste, indicam a redução do efeito da penalização interna associada à segunda fase do algoritmo de penalização hiperbólica. Enquanto do ponto de vista do problema de localização de ERB's, isto indica que todos os pontos $s_j \in S$ são cobertos por alguma estação de rádio base.

Observamos que para todos os problemas teste apresentados nas tabelas deste capítulo, os valores iniciais dos parâmetros α e d , associados à penalização hiperbólica, foram definidos respectivamente por $\frac{\pi}{3}$ e 1.

Tabela 6 - Valor da função penalidade, razão entre o valor da função penalidade e função objetivo e raio inicial e final dos problemas teste.

Problema	$P(x^*)$	$P(x^*)/f(x^*)$	$f(x^0)$ (raio inicial)	$f(x^*)$ (raio final)
AF40	5.493E-05	2.634E-07	2112.2252	208.5249
AF80	1.870E-05	1.341E-07	1440.0456	139.4151
AF100	7.230E-04	6.653E-06	1140.2400	108.6673
AF120	4.491E-05	4.237E-07	1149.0287	105.9838
AF130	1.103E-04	1.216E-06	947.5823	90.7043
AF160	2.409E-05	3.032E-07	836.4359	79.4751
AF180	2.018E-05	3.094E-07	671.1974	65.2308
BH60	3.056E-05	3.376E-07	1051.0590	90.5348
BH70	6.023E-05	5.396E-07	1188.8172	111.6290
BH75	1.758E-05	4.180E-07	441.5339	42.0479
BH80	2.470E-05	5.308E-07	486.5278	46.5409
BH90	1.394E-03	1.832E-05	1051.0590	76.0836
BH100	1.877E-05	2.548E-07	769.9768	73.6650
BH120	3.518E-04	1.313E-05	304.1792	26.7952
BH150	2.508E-05	5.178E-07	584.4130	48.4354
BH300	1.002E-03	6.084E-06	1692.9560	164.7743
BH420	4.732E-04	4.732E-05	1471.3938	144.0751
RJ100	3.714E-05	1.032E-06	397.6972	36.0037
RJ170	2.303E-05	2.070E-07	1164.5614	111.2607
RJ200	9.234E-05	9.568E-07	1018.9543	96.5032

Na tabela 7, apresentamos o problema AF40 (selecionado da tabela 4) em detalhes. Temos os valores do raio z e dos centros $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ associados às estações de rádio base, sendo k o número da iteração do algoritmo de suavização hiperbólica.

Nessa tabela, podemos primeiramente observar um aspecto de estabilidade no algoritmo, no que concerne a variação nas coordenadas x_i das estações, ou seja, à medida que o raio z se aproxima do raio ótimo local, as estações ficam como que imobilizadas. Simultaneamente, podemos também observar que a convergência é muito rápida, a partir da iteração 4 praticamente não há mudança de solução.

Tabela 7 - Problema AF40, apresentando o raio e os centros das ERB's

k	z	x_1^1	x_1^2	x_2^1	x_2^2
1	2054.53766090	10.00000000	10.00000000	20.00000000	20.00000000
2	238.21751741	31.01530949	95.01710797	328.61926810	305.59685818
3	235.33529500	36.62221292	94.67608355	328.64644556	305.58554896
4	234.75791770	76.76962931	95.64366338	328.64578330	305.58511121
5	227.81789839	163.55405328	134.29279987	346.36649612	313.97519559
6	208.52862233	213.49582050	176.48121621	382.79690847	346.40211440
7	208.52544139	213.49580186	176.48122044	382.79690847	346.40211440

Descatacamos ainda, que em todos os problemas teste utilizados na modelagem M0 básica, foi observada uma rápida redução no valor do raio z .

Além disso, há uma boa indicação de que o algoritmo de suavização hiperbólica para esses problemas tem ordem de convergência linear (Martinez[26]). Esta observação é empírica, pois foi baseada na análise das seqüências de pontos z^k (raios) e x^k (coordenadas) gerados em cada iteração para cada um dos problemas teste.

Ou seja, para cada seqüência gerada pelo algoritmo de suavização hiperbólica, foi observada sempre a seguinte desigualdade:

$$\frac{|z^{k+1} - z^*|}{|z^k - z^*|} < 1,$$

onde z^{k+1} e z^k são os raios obtidos respectivamente na $(k + 1)$ -ésima e k -ésima iteração e z^* o raio final.

Nas tabelas 8, 9 e 10 apresentadas a seguir, temos informações equivalentes às das tabelas 4, 5 e 6, considerando agora a distribuição aleatória dos pontos $s_j \in S$. Para essas tabelas, cabem as mesmas observações feitas em relação às tabelas 4, 5 e 6.

Em particular, na tabela 8, considerando o número de variáveis e restrições, podemos destacar os problemas teste: **SG6000** com 15 variáveis e 6125 restrições, **AL10000** com 11 variáveis e 10096 restrições e **AL30000** com 7 variáveis e 30097 restrições.

Tabela 8 - Informações gerais sobre os problemas teste

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
SG2000	2	2125	216.5918	359	61
SG4000	4	4125	146.6143	366	164
SG6000	7	6125	104.0437	329	350
AL8000	6	8097	143.4479	302	361
AL10000	5	10096	146.2957	296	358
AL30000	3	30097	196.7092	335	731
SP5000	3	5122	175.0237	298	129

Tabela 9 - Valores iniciais e finais dos parâmetros τ_1 , τ_2 , ϵ .

Problema	τ_1^0, τ_2^0	ϵ^0	τ_1^*, τ_2^*	ϵ^*
SG2000	5.000E-01	1.000E+00	2.384E-07	5.852E-09
SG4000	2.500E-01	1.000E+00	1.192E-07	5.852E-09
SG6000	2.000E-01	1.400E+00	6.343E-07	8.194E-09
AL8000	2.000E-01	1.200E+00	6.343E-07	7.023E-09
AL10000	2.500E-01	1.250E+00	9.537E-07	7.316E-09
AL30000	4.000E-01	1.200E+00	1.526E-06	7.023E-09
SP5000	3.000E-01	9.000E-01	1.144E-06	5.267E-09

Tabela 10 - Valor da função penalidade, razão entre o valor da função penalidade e função objetivo e raio inicial e final dos problemas teste.

Problema	$P(x^*)$	$P(x^*)/f(x^*)$	$f(x^0)$ (raio inicial)	$f(x^*)$ (raio final)
SG2000	2.151E-05	9.932E-08	2263.2112	216.5918
SG4000	5.094E-06	3.475E-08	1582.1336	146.6143
SG6000	4.048E-06	3.890E-08	556.1894	104.0437
AL8000	6.569E-06	4.580E-08	897.2981	143.4479
AL10000	3.198E-06	2.186E-08	738.2998	146.2957
AL30000	1.202E-05	6.112E-08	997.2244	196.7092
SP5000	6.107E-06	3.489E-08	885.6703	175.0237

As figuras de 19 a 24, apresentadas a seguir, correspondem as representações geométricas de seis soluções para o recobrimento de Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Gonçalo e Alemanha.

Os resultados apresentados nessas figuras vêm a reforçar as considerações feitas anteriormente sobre os aspectos de robustez e estabilidade do modelo. Ou seja, foram resolvidos problemas considerando um razoável número de ERB's e de pontos a serem cobertos, sem violar as restrições de cobertura do problema.

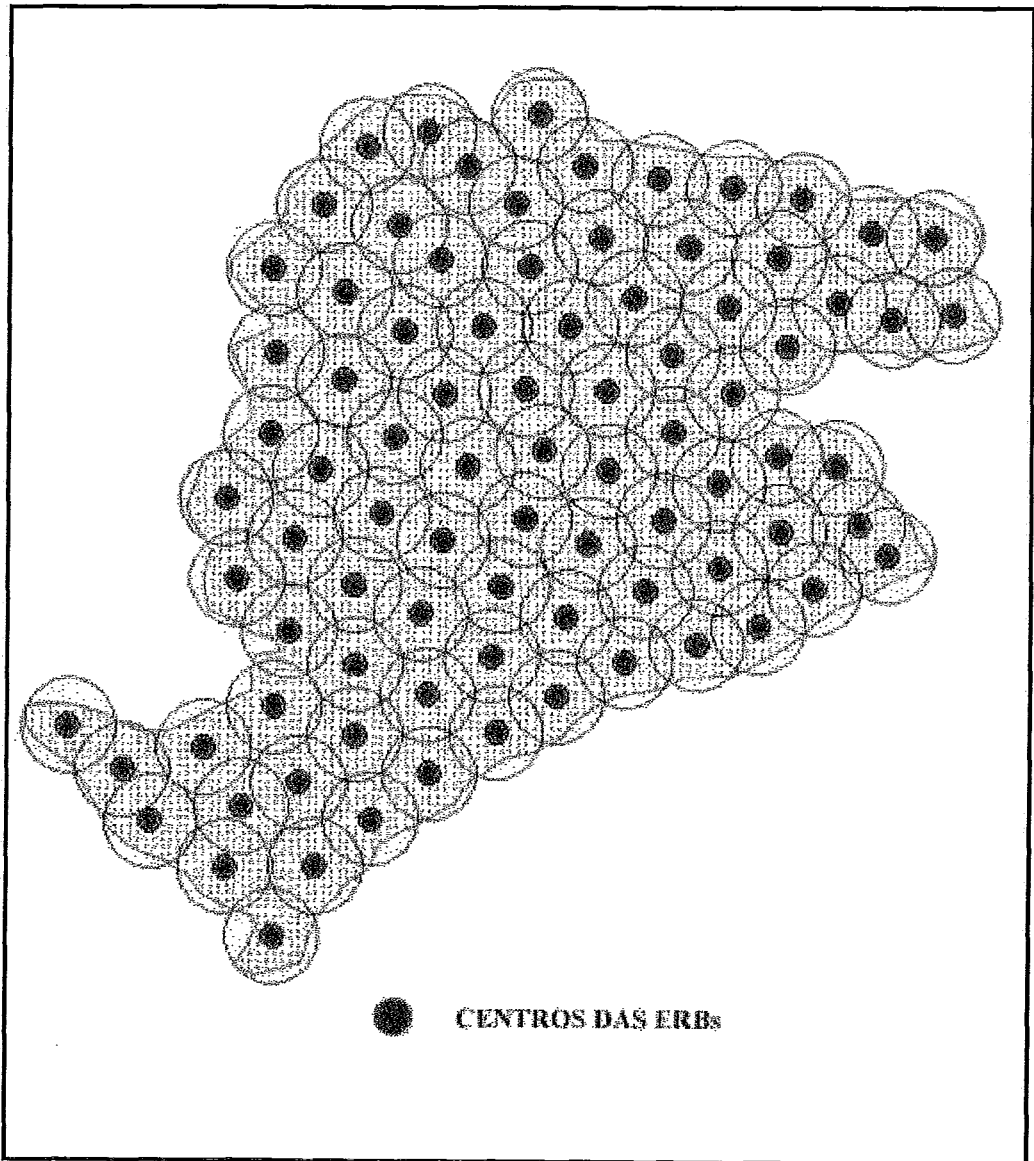


Figura 19 - Problema BH120 : 86 ERBs e 7301 Pontos

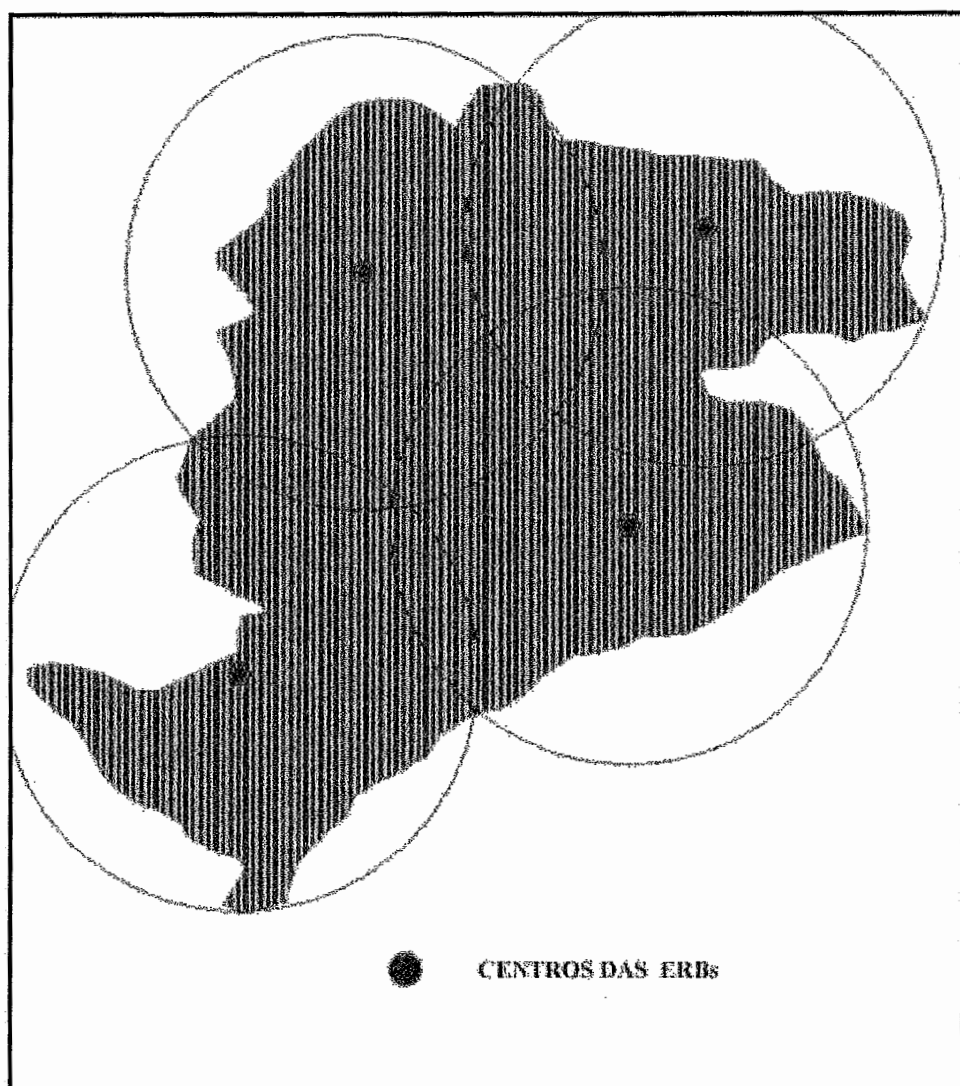


Figura 20 - Problema BH420 : 4 ERBs e 87776 Pontos

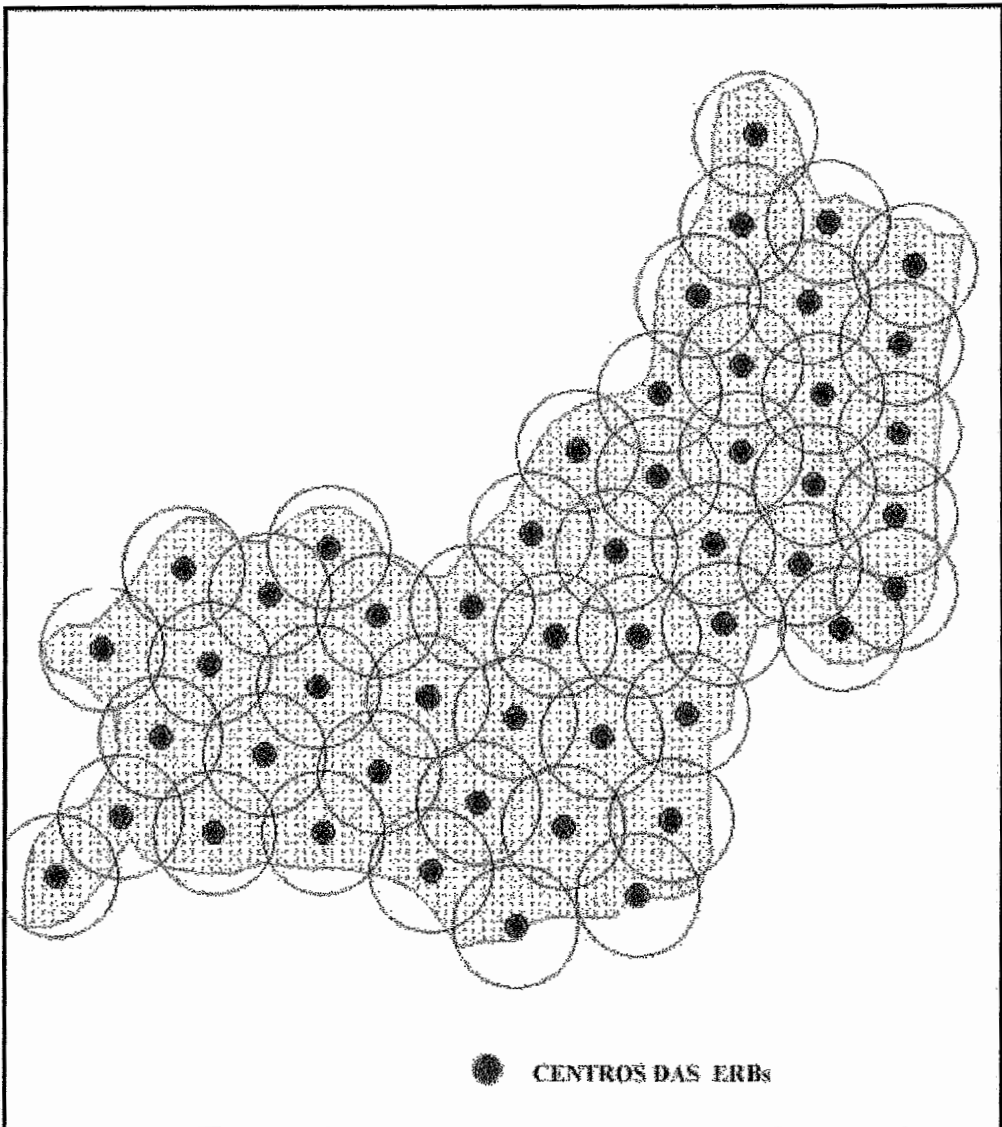


Figura 21 - Problema RJ100 : 50 ERBs e 4668 Pontos

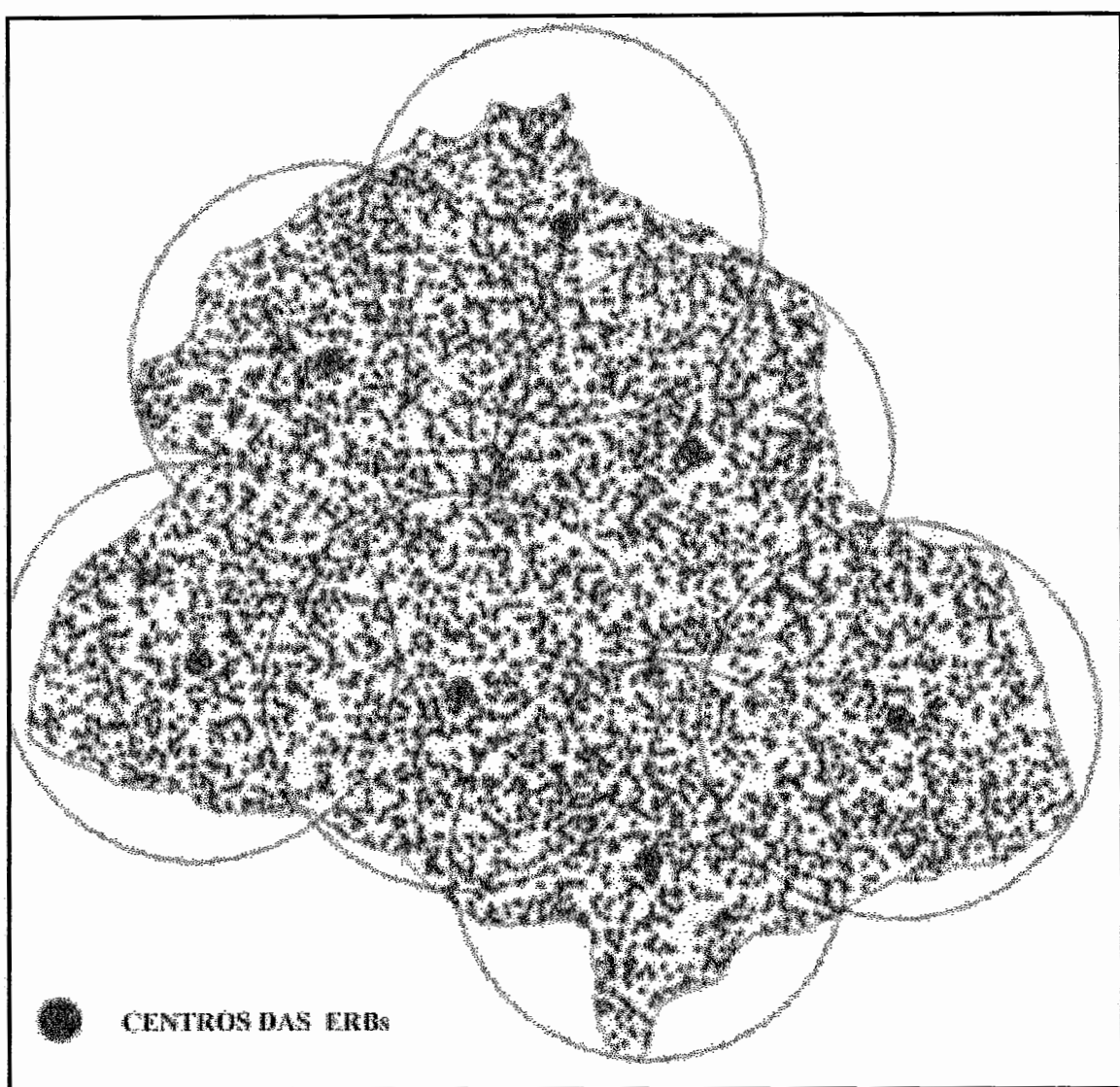


Figura 22 - Problema SG6000 : 7 ERBs e 6125 Pontos

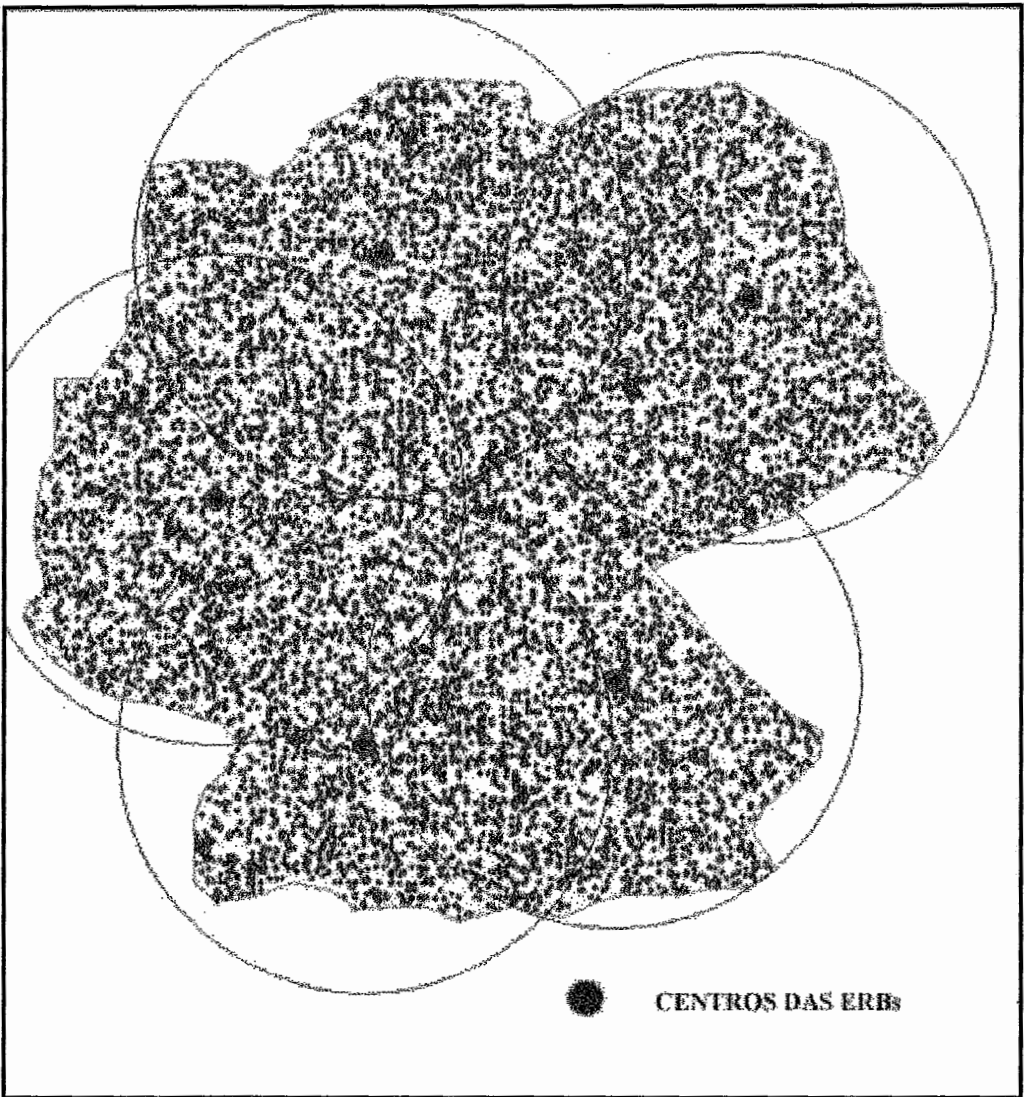


Figura 23 – Problema AL10000 : 5 ERBs e 10096 Pontos

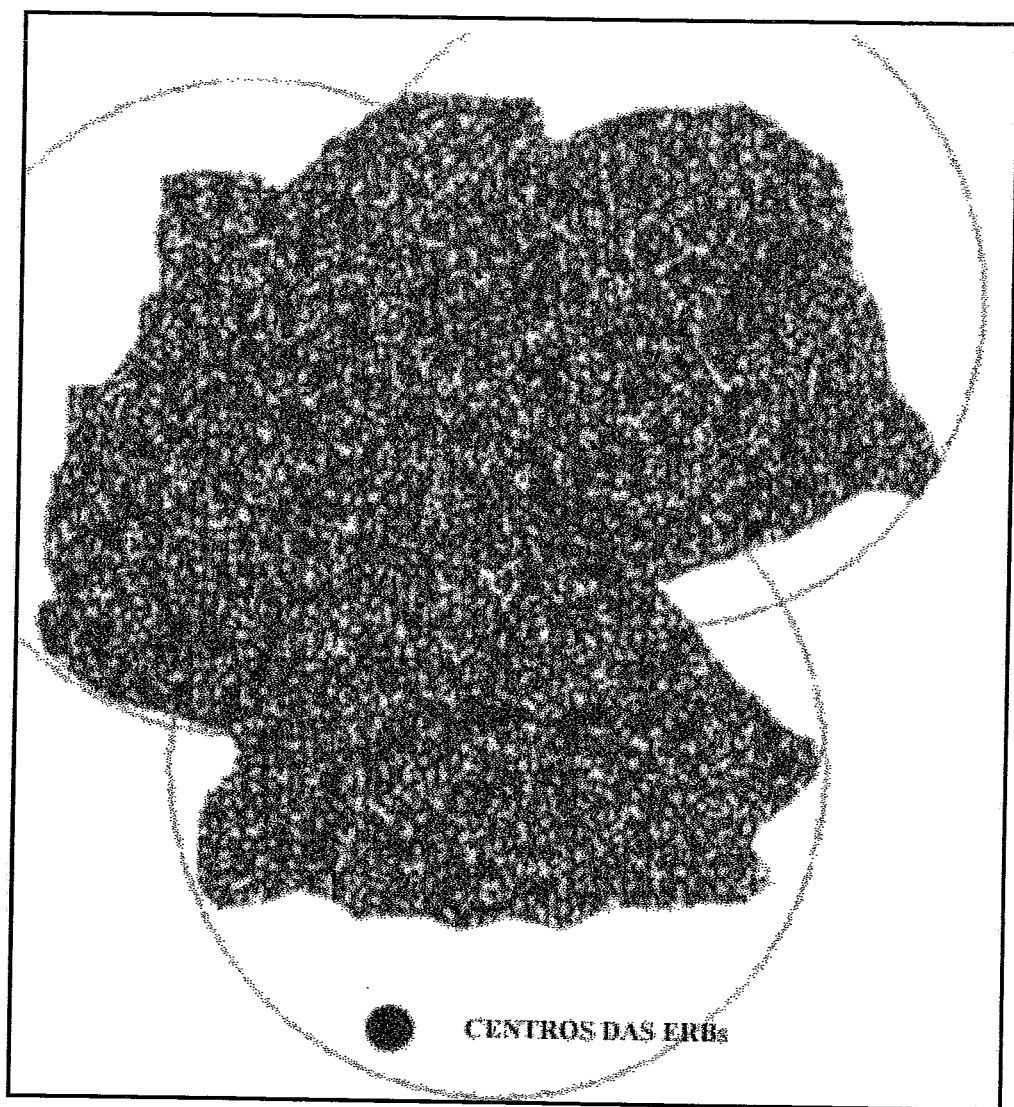


Figura 24 - Problema AL30000 : 3 ERBs e 30097 Pontos

5.4 Resultados da Modelagem M1: Agrupamento de Estações

Nesta seção apresentamos os resultados da modelagem M1. Nessa modelagem as q estações de rádio base, foram distribuídas em n agrupamentos disjuntos. Ou seja, se Q é o conjunto de todas as estações, temos: $Q = Q_1 \cup Q_2 \dots \cup Q_n$. Sendo $|Q_r|$, $r = 1, \dots, n$, o número de estações de rádio base em cada agrupamento.

Para cada agrupamento Q_r , ($r = 1, \dots, n$), foi definida uma medida D_r , que representa a distância máxima entre os centros das estações, duas a duas.

Na tabela 11, segundo a ordem das colunas temos: o nome do problema teste, o número de ERB's e o pontos associados a região S , o raio de cobertura final, o número de iterações do método BFGS e o tempo de CPU em segundos. Na tabela 12, temos o nome dos problemas teste, o número de ERB's por agrupamento, as distâncias máximas D_r entre as estações de um mesmo agrupamento, e, na última coluna, a distância máxima final \bar{D}_r para cada um dos agrupamentos, calculada através da expressão:

$$\bar{D}_1 = \text{Máximo}\{\|x_l - x_u\|_2, \quad l = 1, \dots, |Q_1| - 1, u = l + 1, \dots, |Q_1|\}$$

primeiro agrupamento

...

$$\bar{D}_p = \text{Máximo}\{\|x_l - x_u\|_2, \quad l = \left(\sum_{r=1}^{p-1} |Q_r|\right) + 1, \dots, \left(\sum_{r=1}^p |Q_r|\right) - 1, \quad u = l + 1, \dots, \sum_{r=1}^p |Q_r|\}$$

p - ésimo agrupamento ($1 < p \leq n$)

sendo $|Q_r|$ o número de estações distribuídas em cada agrupamento.

Dessa forma, \bar{D}_r representa a maior das distâncias finais entre as estações de rádio base de um mesmo agrupamento, duas a duas.

Com base no cálculo destes valores máximos \bar{D}_r , podemos observar na tabela 12, que em todos os problemas teste foram respeitadas as distâncias máximas iniciais definidas para cada agrupamento.

Analisando as tabelas 11 e 12 (página seguinte), sob o critério de número de variáveis, restrições e número de agrupamentos, podemos destacar os problemas: **SP160** com 25 variáveis, 12284 restrições e quatro agrupamentos (formados respectivamente por 2, 2, 3 e 5 ERB's) e o problema **IT9000** com 31 variáveis, 9115 restrições e 4 agrupamentos (formados respectivamente por 2, 3, 4 e 6 ERB's).

Tabela 11 - Informações gerais sobre os problemas teste.

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
SP80*	5	3153	154.2000	178	92
SP100*	6	4859	197.5445	210	177
SP120*	9	6950	155.1809	140	255
SP140*	4	9434	186.9103	129	135
SP160*	12	12284	99.2575	401	1672
IT3000**	4	3115	112.7354	342	143
IT5000**	7	5116	126.7501	370	383
IT6000**	9	6116	72.7549	402	605
IT7000**	10	7116	91.5375	442	874
IT9000**	15	9115	86.9445	430	2015

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

Tabela 12 - Número de ERB's por Agrupamento, Distâncias Iniciais e Finais

Problema	Número de ERB's por Agrup.	Distâncias Máximas Iniciais D_r	Distâncias Máximas Finais \bar{D}_r
SP80*	$ Q_1 = 3, Q_2 = 2$	$D_1 = 100, D_2 = 180$	$\bar{D}_1 = 99.99, \bar{D}_2 = 92.24$
SP100*	$ Q_1 = 3, Q_2 = 3$	$D_1 = 40, D_2 = 10$	$\bar{D}_1 = 32.50, \bar{D}_2 = 9.99$
SP120*	$ Q_1 = 2, Q_2 = 3$ $ Q_3 = 4$	$D_1 = 110, D_2 = 80$ $D_3 = 50$	$\bar{D}_1 = 109.99, \bar{D}_2 = 74.29$ $\bar{D}_3 = 47.62$
SP140*	$ Q_1 = 2, Q_2 = 2$	$D_1 = 100, D_2 = 200$	$\bar{D}_1 = 99.99, \bar{D}_2 = 197.48$
SP160*	$ Q_1 = 2, Q_2 = 2$ $ Q_3 = 3, Q_4 = 5$	$D_1 = 100, D_2 = 200$ $D_3 = 80, D_4 = 160$	$\bar{D}_1 = 79.78, \bar{D}_2 = 180.32$ $\bar{D}_3 = 79.99, \bar{D}_4 = 157.96$
IT3000**	$ Q_1 = 2, Q_2 = 2$	$D_1 = 120, D_2 = 210$	$\bar{D}_1 = 108.35, \bar{D}_2 = 204.25$
IT5000**	$ Q_1 = 3, Q_2 = 4$	$D_1 = 140, D_2 = 90$	$\bar{D}_1 = 113.06, \bar{D}_2 = 89.99$
IT6000**	$ Q_1 = 2, Q_2 = 3$ $ Q_3 = 4$	$D_1 = 120, D_2 = 180$ $D_3 = 220$	$\bar{D}_1 = 78.32, \bar{D}_2 = 128.99$ $\bar{D}_3 = 219.64$
IT7000**	$ Q_1 = 4, Q_2 = 6$	$D_1 = 180, D_2 = 120$	$\bar{D}_1 = 179.87, \bar{D}_2 = 119.99$
IT9000**	$ Q_1 = 2, Q_2 = 3$ $ Q_3 = 4, Q_4 = 6$	$D_1 = 110, D_2 = 80$ $D_3 = 40, D_4 = 160$	$\bar{D}_1 = 101.12, \bar{D}_2 = 79.92$ $\bar{D}_3 = 35.86, \bar{D}_4 = 152.86$

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

As figuras 25 e 26 correspondem as representações geométricas de duas soluções de recobrimento de São Paulo e Itália.

Na primeira figura, temos o recobrimento com 12 ERB's divididas em 4 agrupamentos formados respectivamente por 2,2,3 e 5 ERB's e na segunda figura temos o recobrimento com 15 ERB's divididas em 4 agrupamentos formados respectivamente por 2,3,4 e 6 ERB's.

Analisando essas duas figuras, podemos concluir que foram cumpridas as restrições de recobrimento e agrupamento.

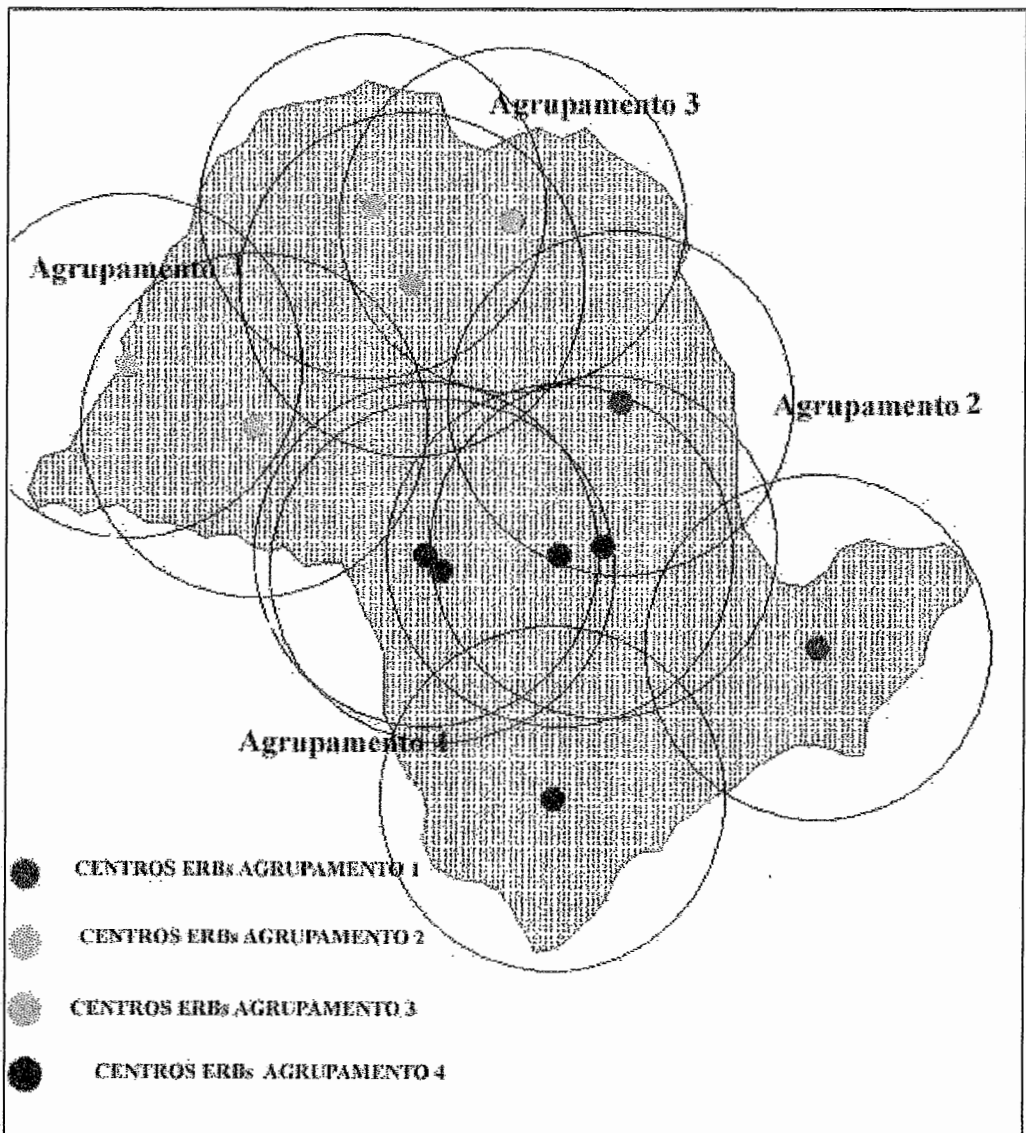


Figura 25 - Problema SP160 : 12 ERB's, 12284 Pontos e 4 Agrupamentos com 2, 2, 3 e 5 ERB's

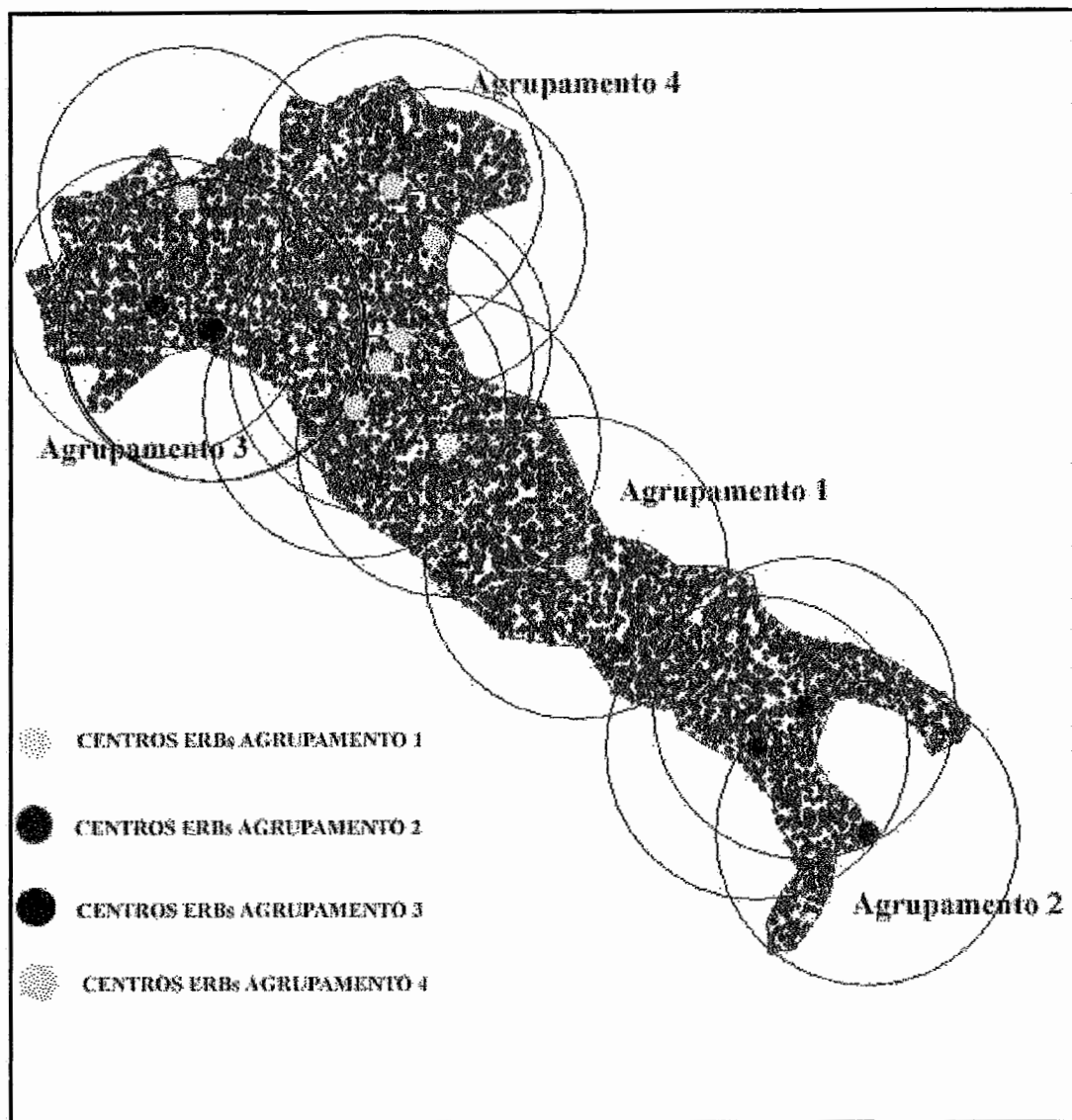


Figura 26 - Problema IT9000 : 15 ERBs, 9115 Pontos e 4 Agrupamentos com 2,3,4 e 6 ERB's

5.5 Resultados da Modelagem M2: Estações com Localização Pré-Definida

Nesta seção apresentamos os resultados da modelagem M2. Nesta modelagem, é contemplada a situação em que algumas das estações têm a localização pré-definida. Dessa forma, considere que para a região S a ser coberta, seja escolhido um conjunto $y_r = (y_r^1, y_r^2)$ de pontos ($r = 1, \dots, \bar{q} \leq q$). Ou seja, vamos escolher alguns pontos y_r que estão na região S e dos quais as estações de rádio base deverão estar a uma certa distancia pré-definida. Isto é, as estações de rádio base devem ser localizadas numa vizinhança de y_r .

Além disso, é associado a cada ponto $y_r = (y_r^1, y_r^2)$, definido para esta região, um ponto $x_r = (x_r^1, x_r^2)$ que representará o centro de uma das \bar{q} estações, de tal forma que a distância entre cada y_r e o seu respectivo centro x_r seja maior ou igual que um valor d_r e menor ou igual a um valor D_r , ambos definidos a priori.

Na tabela 13, temos os nomes dos problemas teste, o número de ERB's e o número de pontos associados à região S , o raio de cobertura final, o número de iterações do método BFGS e o tempo de CPU em segundos. Na tabela 14, temos o total de ERB's (\bar{q}) com localização pré-definida, as distâncias máximas D_r e mínimas d_r entre o centro $x_r = (x_r^1, x_r^2)$ de cada uma das ERB's e o seu respectivo ponto $y_r = (y_r^1, y_r^2)$ e as distâncias finais entre as ERB's e os pontos y_r .

Analisando as tabelas 13 e 14, segundo o critério de número de variáveis, de restrições e do número de estações com a localização pré-definida \bar{q} , podemos destacar os problemas: **FR100** com 21 váriaveis, 6077 restrições e $\bar{q} = 5$, **FR14000** com 13 váriaveis, 14131 restrições e $\bar{q} = 2$, **FR70** com 11 variáveis, 3041 restrições e $\bar{q} = 5$ e o problema **FR8000** com 17 variáveis, 8130 restrições e $\bar{q} = 4$.

Tabela 13 - Informações gerais sobre os problemas teste.

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
FR50*	3	1619	197.7840	282	156
FR70*	5	3041	157.0017	95	50
FR100*	10	6077	99.3580	414	702
FR140*	7	11811	124.9341	379	833
FR150*	4	13526	201.2486	302	447
FR3000**	2	3131	275.0400	300	94
FR4000**	3	4131	216.5976	219	105
FR6000**	14	6131	78.5018	354	903
FR8000**	8	8130	122.8408	116	222
FR14000**	6	14131	119.9159	387	844

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

Observamos pela última coluna da tabela 14, que, em todos os 10 problemas teste, as restrições de vizinhança associadas aos parâmetros D_r e d_r foram cumpridas, pois esses valores estão compreendidos entre as distâncias mínimas e máximas.

Tabela 14 - Distâncias máximas e mínimas D_r , d_r e distâncias finais d_r^*

Problema	\bar{q}	Distâncias Máximas D_r	Distâncias Mínimas d_r	Distâncias Finais $\ y_r - x_r\ _2 = d_r^*$
FR50*	3	$D_1 = 150, D_2 = 140$ $D_3 = 180$	$d_1 = 50, d_2 = 40$ $d_3 = 35$	$d_1^* = 53.78, d_2^* = 92.09$ $d_3^* = 78.29$
FR70*	5	$D_1 = 210, D_2 = 210$ $D_3 = 180, D_4 = 300$ $D_5 = 200$	$d_1 = 70, d_2 = 70$ $d_3 = 70, d_4 = 100$ $d_5 = 100$	$d_1^* = 86.20, d_2^* = 139.41$ $d_3^* = 173.01, d_4^* = 192.50$ $d_5^* = 199.99$
FR100*	5	$D_1 = 80, D_2 = 90$ $D_3 = 120, D_4 = 200$ $D_5 = 60$	$d_1 = 20, d_2 = 30$ $d_3 = 50, d_4 = 10$ $d_5 = 20$	$d_1^* = 40.72, d_2^* = 57.12$ $d_3^* = 74.42, d_4^* = 140.58$ $d_5^* = 52.23$
FR140*	3	$D_1 = 30, D_2 = 180$ $D_3 = 240$	$d_1 = 10, d_2 = 20$ $d_3 = 40$	$d_1^* = 11.12, d_2^* = 118.60$ $d_3^* = 149.19$
FR150*	1	$D_1 = 120$	$d_1 = 10$	$d_1^* = 86.00$
FR3000**	2	$D_1 = 240, D_2 = 90$	$d_1 = 30, d_2 = 10$	$d_1^* = 30.00, d_2^* = 19.67$
FR4000**	1	$D_1 = 90$	$d_1 = 30$	$d_1^* = 85.20$
FR6000**	2	$D_1 = 400, D_2 = 100$	$d_1 = 10, d_2 = 10$	$d_1^* = 232.53, d_2^* = 94.23$
FR8000**	4	$D_1 = 180, D_2 = 180$ $D_3 = 240, D_4 = 240$	$d_1 = 20, d_2 = 20$ $d_3 = 40, d_4 = 40$	$d_1^* = 116.52, d_2^* = 180.00$ $d_3^* = 45.80, d_4^* = 215.98$
FR14000**	2	$D_1 = 300, D_2 = 400$	$d_1 = 10, d_2 = 10$	$d_1^* = 212.48, d_2^* = 211.41$

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

As figuras 27, 28, 29 e 30 correspondem a representações geométricas de quatro soluções de recobrimento da França. Nessas figuras, os pontos em rosa representam a localização das ERB's e os pontos em azul representam os pontos y_r (descritos na modelagem) dos quais as ERB's devem estar próximas.

Para o recobrimento da figura 27, foram utilizadas 10 ERB's, sendo cinco com a localização pré-definida. Na figura 28, foram utilizadas 6 ERB's, sendo duas com a localização pré-definida. Na figura 29, foram utilizadas 5 ERB's, todas com a localização pré-definida e na figura 30, foram utilizadas 8 ERB's, sendo quatro com a localização pré-definida.

Ainda analisando visualmente essas figuras, podemos verificar que as restrições de recobrimento foram satisfeitas. Igualmente, as restrições de proximidades dos pontos y_r também foram satisfeitas, pois na solução existe sempre uma ERB situada dentro de uma vizinhança mínima especificada.

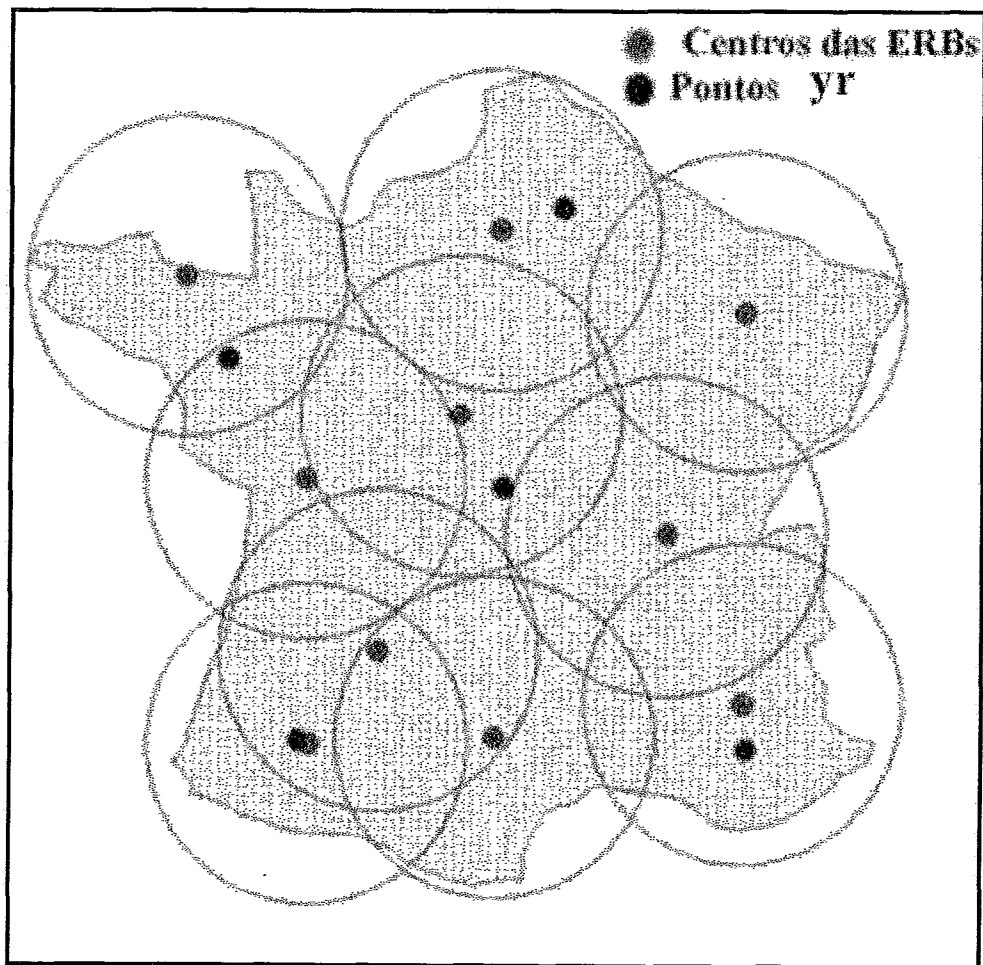


Figura 27 - Problema FR100 : 10 ERBs, 6077 Pontos e 5 ERB's com Localização Pré-Definida

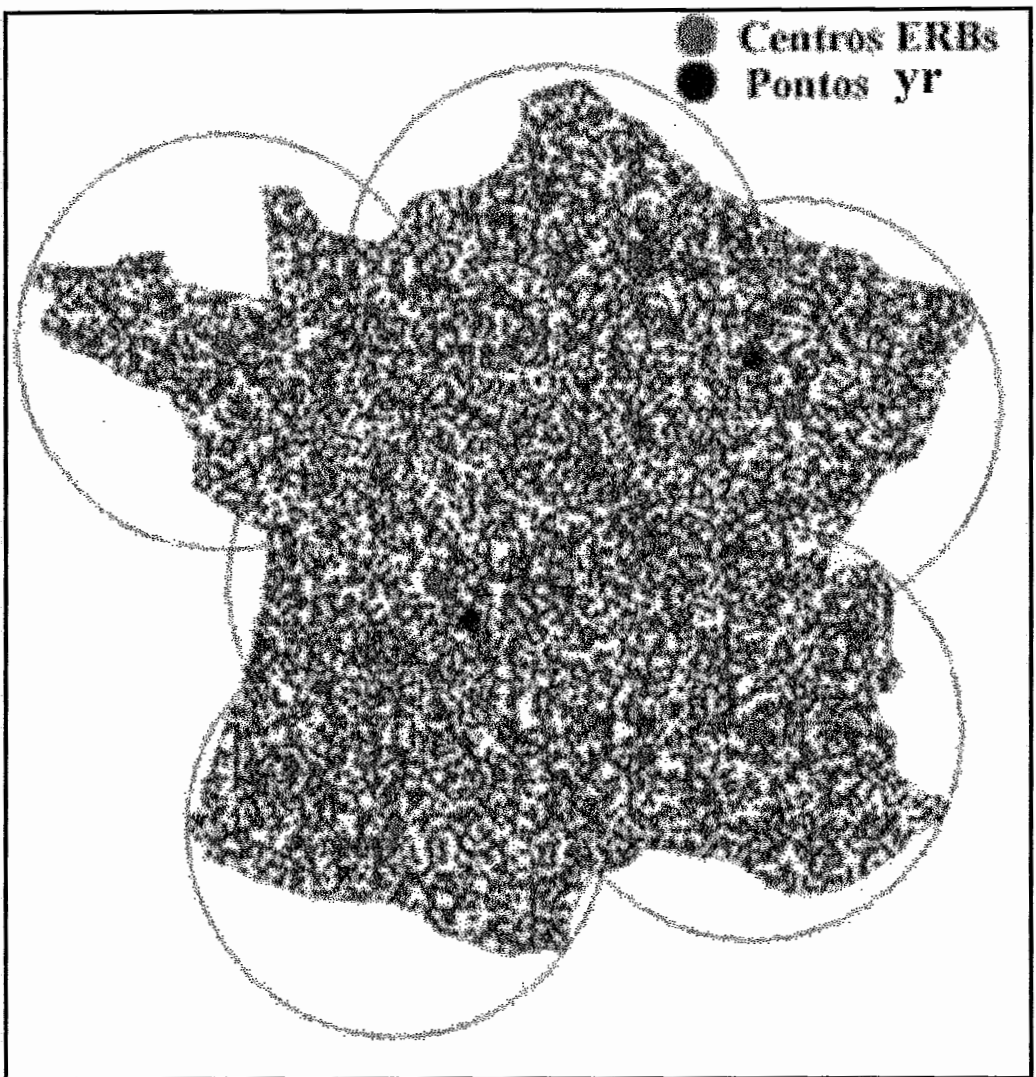


Figura 28 - Problema FR14000 : 6 ERBs , 14131 Pontos e 2 ERB's com Localização Pré-Definida

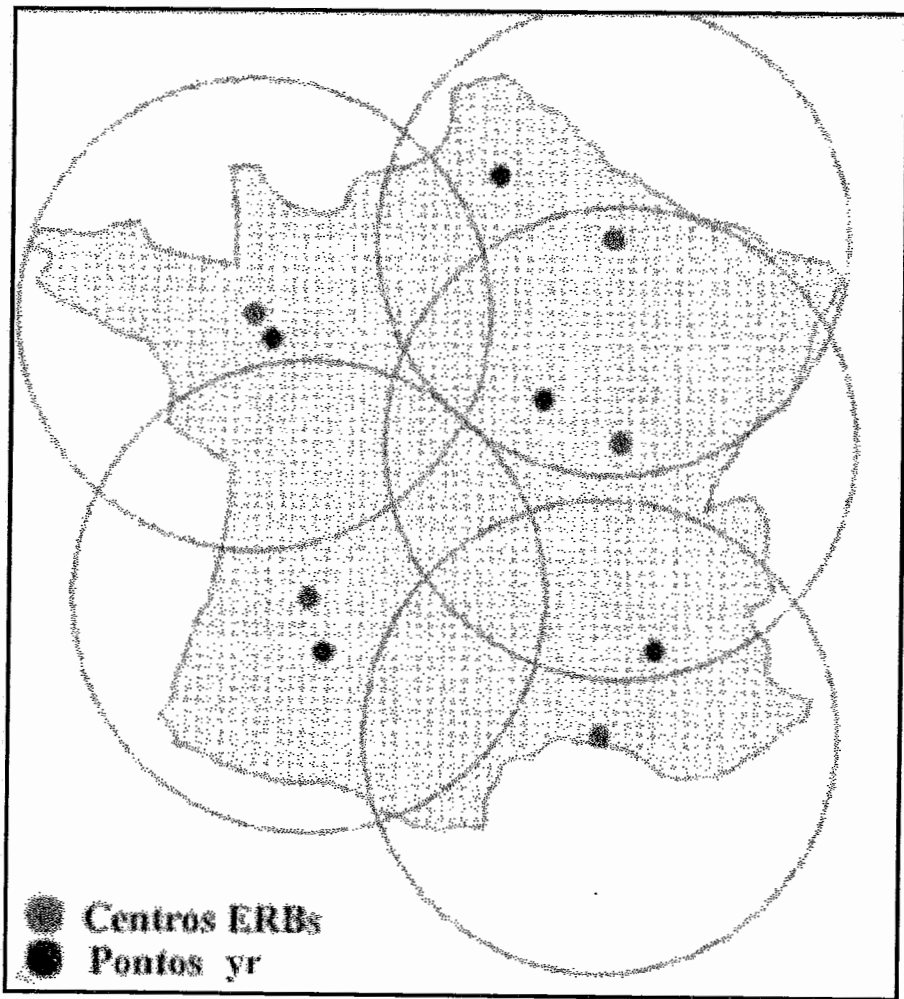


Figura 29 - Problema FR70 : 5 ERBs , 3041 Pontos e 5 ERB's com Localização Pré-Definida

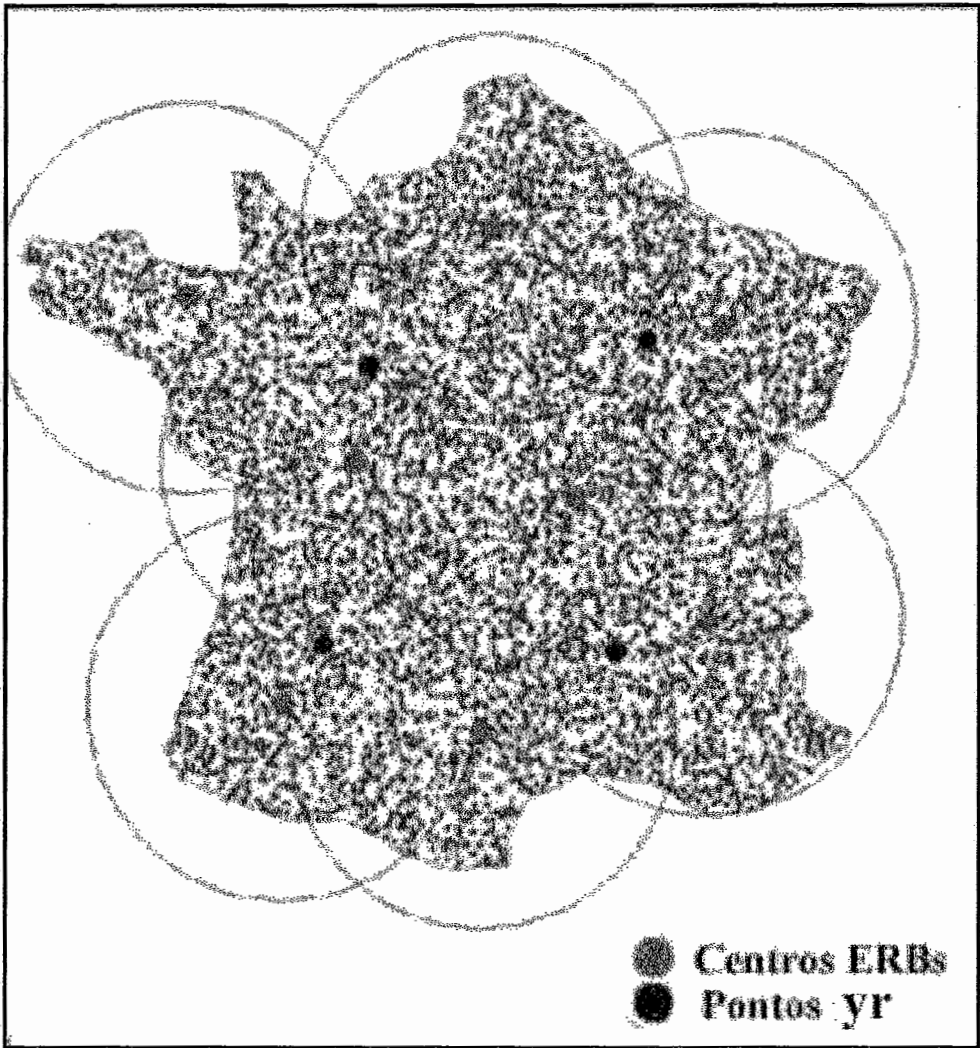


Figura 30 - Problema FR8000 : 8 ERBs , 8130 Pontos
e 4 ERB's com Localização Pré-Definida

5.6 Resultados da Modelagem M3: Conjuntos de Pontos Candidatos para Instalação de ERB's

Nesta seção apresentamos os resultados associados à modelagem M3. Nessa modelagem, são definidos a priori q conjuntos de pontos candidatos à instalação das estações de rádio base, ou seja, a cada estação corresponde um pré-determinado conjunto de pontos candidatos. Cada um desses conjuntos é designado por H_r , $r = 1, \dots, q$ e contém $|H_r|$ pontos candidatos $h_{rl} = (h_{rl}^1, h_{rl}^2)$, $l = 1, \dots, |H_r|$, $\bigcap_{r=1}^q H_r = \emptyset$.

Além disso, para cada um dos conjuntos H_r , $r = 1, \dots, q$, é selecionado apenas um ponto h_{rl} para a instalação das ERB's, ou seja, teremos um total de q pontos associados às ERB's de centros (x_1, x_2, \dots, x_q) .

Na tabela 15, pela ordem das colunas temos: o nome dos problemas teste, o número de ERB's, o número de pontos associados a região S , o raio de cobertura final, o número de iterações do método BFGS e o tempo de CPU em segundos. Na tabela 16, temos o número de conjuntos H_r e o número de pontos em cada um dos conjuntos H_r .

Analisando as tabelas 15 e 16, segundo o critério do número de variáveis, de restrições e de conjuntos H_r , podemos destacar os problemas: **SG120** com 15 variáveis, 8188 restrições e sete conjuntos H_r contendo um total de 28 pontos candidatos para instalação das ERB's e o problema **SG10000** com 17 variáveis, 10125 restrições e oito conjuntos H_r contendo um total de 16 pontos candidatos para instalação das ERB's.

Tabela 15 - Informações gerais sobre os problemas teste.

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
SG50*	3	1518	190.2009	83	35
SG80*	5	3697	177.9515	151	177
SG100*	4	5717	172.2052	107	139
SG120*	7	8188	129.2952	79	278
SG140*	3	11076	214.9794	48	96
SG3000**	2	3125	285.1576	61	30
SG4000**	5	4125	184.2745	142	176
SG6000**	3	6125	208.2367	81	89
SG10000**	8	10125	129.2962	109	498

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

Tabela 16 - Número de conjuntos H_r , Número pontos $h_{r,i}$ em cada conjunto H_r

Problema	Número de Conjuntos H_r	Número de pontos $h_{r,i}$ em cada conjunto H_r
SG50*	3	$ H_1 = 3, H_2 = 4$ $ H_3 = 5$
SG80*	5	$ H_1 = 3, H_2 = 4$ $ H_3 = 6, H_4 = 4$ $ H_5 = 2$
SG100*	4	$ H_1 = 3, H_2 = 4$ $ H_3 = 3, H_4 = 7$
SG120*	7	$ H_1 = 4, H_2 = 4$ $ H_3 = 4, H_4 = 4$ $ H_5 = 4, H_6 = 4$ $ H_7 = 4$
SG140*	3	$ H_1 = 3, H_2 = 3$ $ H_3 = 3$
SG3000**	2	$ H_1 = 4, H_2 = 4$
SG4000**	5	$ H_1 = 5, H_2 = 5$ $ H_3 = 5, H_4 = 5$ $ H_5 = 5$
SG6000**	3	$ H_1 = 2, H_2 = 4$ $ H_3 = 6$
SG10000**	8	$ H_1 = 2, H_2 = 2$ $ H_3 = 2, H_4 = 2$ $ H_5 = 2, H_6 = 2$ $ H_7 = 2, H_8 = 2$

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

As figuras 31 e 32 correspondem a duas representações geométricas do recobrimento de São Gonçalo. Na figura 31, temos 7 conjuntos de pontos candidatos e na figura 32 temos oito conjuntos de pontos candidatos. Nessas figuras, os pontos em vermelho correspondem aos pontos $h_{r,l}$ selecionados em cada um dos conjuntos H_r .

Analisando as figuras 31 e 32, podemos observar que as restrições de recobrimento foram cumpridas.

Igualmente, as restrições de seleção de apenas um ponto candidato em cada conjunto H_r também foram cumpridas.

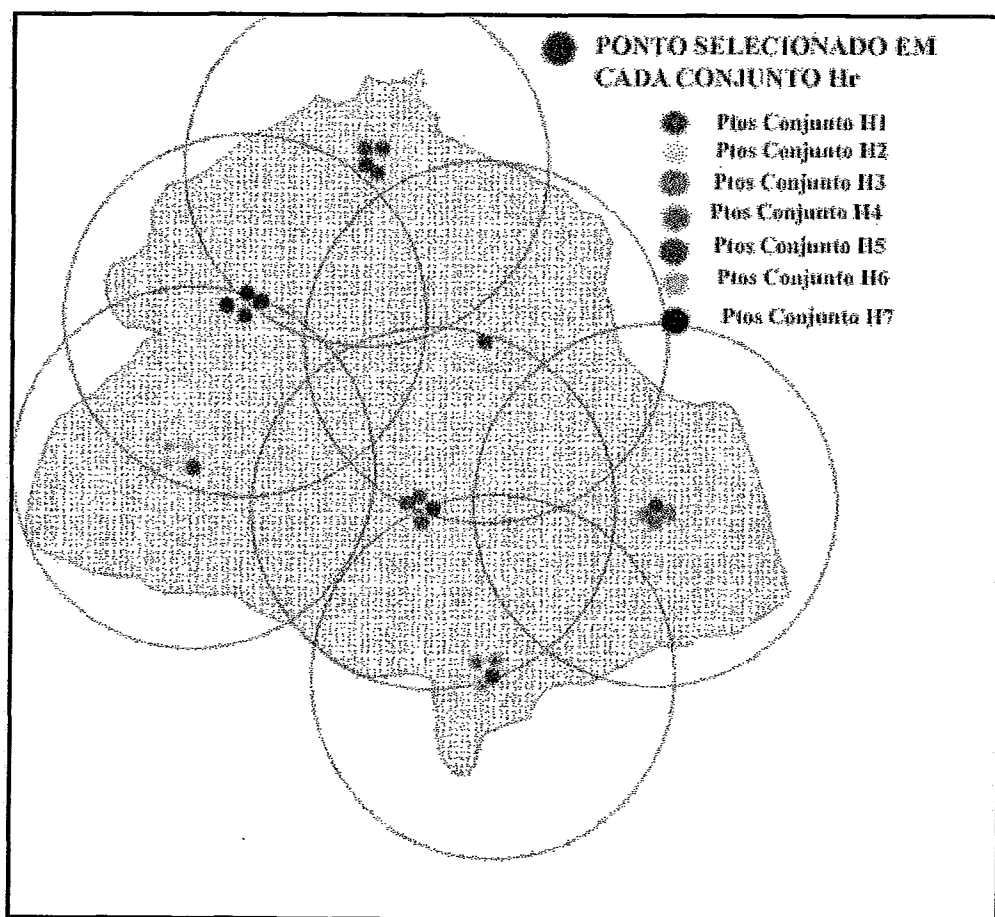


Figura 31 - Problema SG120 : 7 ERB's , 8188 Pontos e Sete Conjuntos de Pontos Candidatos

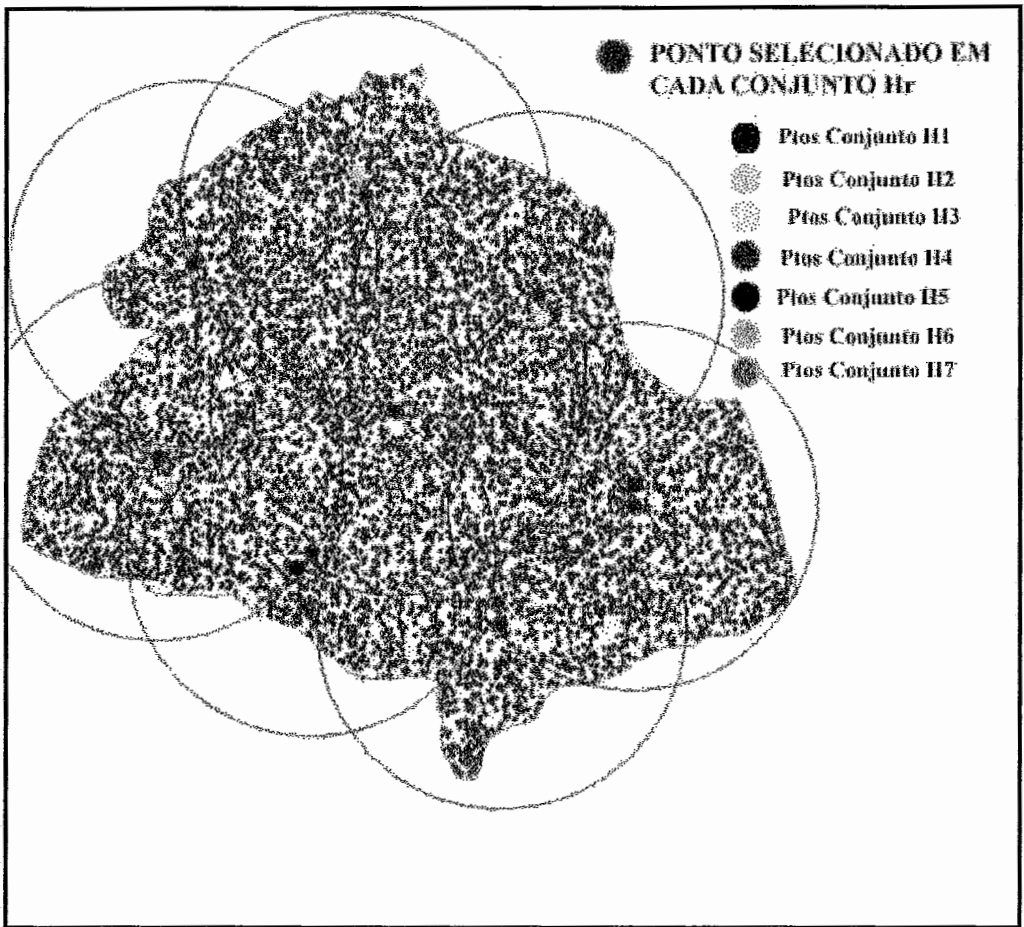


Figura 32 - Problema SG10000 : 8 ERB's, 10125 Pontos e Oito Conjuntos de Pontos Candidatos

5.7 Resultados da Modelagem M4: Potências de Transmissão Diferenciadas

Nesta seção apresentamos os resultados da modelagem M4, que considera que as estações de rádio base trabalhem com potências de transmissão diferenciadas.

Inicialmente, como nos demais casos, é definido um conjunto de q estações para atender a uma determinada região S . Em seguida, definimos para cada uma dessas estações raios de cobertura z_i . Isto é, para cada estação teremos $z_i = w_i * z_0$, sendo os valores w_i obtidos pelos determinantes de natureza eletrônica associados à aplicação, ou seja, em função de potência de transmissão, de altura das antenas e de capacidade dos equipamentos da rede de telefonia.

Devemos obter, então, para esse problema, o menor raio de cobertura z_0 (potência de transmissão inicial instalada) tal que as q estações atendam a todos os pontos $s_j \in S$, $j = 1, \dots, m$.

Na tabela 17, temos as informações sobre o conjunto de problemas teste que utilizamos nesta modelagem M4. Novamente, segundo o critério de número de variáveis e de número de restrições, podemos destacar os problemas teste: **BR120** com 19 variáveis e 6992 restrições, **BR220** com 9 variáveis e 23228 restrições e o problema **BR8000** com 13 variáveis e 8117 restrições.

Tabela 17 - Informações gerais sobre os problemas teste.

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
<i>BR60*</i>	3	1835	126.9466	404	132
<i>BR90*</i>	5	3989	97.3222	326	237
<i>BR120*</i>	9	6992	65.1776	355	757
<i>BR150*</i>	7	10853	79.9597	357	807
<i>BR220*</i>	4	23228	115.8735	413	976
<i>BR2000**</i>	20	2118	46.0225	346	871
<i>BR4000**</i>	3	4118	119.9457	324	157
<i>BR7000**</i>	4	7118	122.9280	378	335
<i>BR8000**</i>	6	8117	93.4060	378	554
<i>BR10000**</i>	2	10118	162.5278	296	205

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

Na tabela 18, temos os valores especificados de w_i e os raios finais z_i obtidos na resolução do problema de otimização. Podemos observar, com base nas segunda e terceira colunas, que esta modelagem mostrou-se versátil, tendo em vista que podemos trabalhar com os mais variados raios de cobertura.

Em particular, observando a variação do parâmetro w_i , bem como o número de valores w_i diferentes, podemos destacar os problemas teste: **BR120** com w_i variando de 1.0 a 1.8 e com cinco raios de cobertura diferentes e o problema **BR2000** com w_i variando de 1.0 a 1.9 e também com seis raios de cobertura diferentes.

Tabela 18 - Valores w_i e Raio Referencial Básico z_o^*

Problema	Valores w_i	Raio Referencial Básico z_o^*
BR60*	$w_1 = 1.1, w_2 = 1.2, w_3 = 1.4$	$z_o^* = 126.9466$
BR90*	$w_1 = 1.0, w_2 = w_3 = 1.2$ $w_4 = 1.3, w_5 = 1.5$	$z_o^* = 97.3222$
BR120*	$w_{1..3} = 1.0, w_{4..5} = 1.2$ $w_{6..7} = 1.4, w_8 = 1.6, w_9 = 1.8$	$z_o^* = 65.1776$
BR150*	$w_{1..2} = 1.0, w_3 = 1.2$ $w_{4..6} = 1.3, w_7 = 1.4$	$z_o^* = 79.96$
BR220*	$w_1 = 1.1, w_{2..3} = 1.2, w_4 = 1.4$	$z_o^* = 115.8735$
BR2000**	$w_{1..2} = 1.0, w_{3..6} = 1.2$ $w_{7..9} = 1.4, w_{10..11} = 1.6$ $w_{12..15} = 1.8, w_{16..20} = 1.9$	$z_o^* = 46.0225$
BR4000**	$w_1 = 1.1, w_2 = 1.2, w_3 = 1.5$	$z_o^* = 119.9457$
BR7000**	$w_1 = 1.0, w_{2..3} = 1.1, w_4 = 1.5$	$z_o^* = 122.9280$
BR8000**	$w_1 = 1.0, w_2 = 1.1, w_3 = 1.2$ $w_4 = 1.3, w_5 = 1.4, w_6 = 1.5$	$z_o^* = 93.4060$
BR10000**	$w_1 = 1.1, w_2 = 1.4$	$z_o^* = 162.5278$

(*) Pontos equidistantes (**) Pontos distribuídos aleatoriamente

As figuras 33, 34, 35 e 36, correspondem às representações geométricas do recobrimento do Brasil por um conjunto de ERB's com raios de cobertura diferenciados.

Na figura 33, temos cinco raios de cobertura diferentes associados as 9 ERB's; na figura 34, temos três raios de cobertura diferentes associados as 4 ERB's; na figura 35, temos seis raios de cobertura diferentes associados às 6 ERB's e na figura 36, temos seis raios de cobertura diferentes associados às 20 ERB's.

Analisando essas figuras visualmente, podemos verificar que a utilização de raios de cobertura diferenciados, não afeta a questão de recobrimento.

Ao mesmo tempo, devemos destacar, que esta modelagem, provem uma solução alternativa para o problema de localização das ERB's.

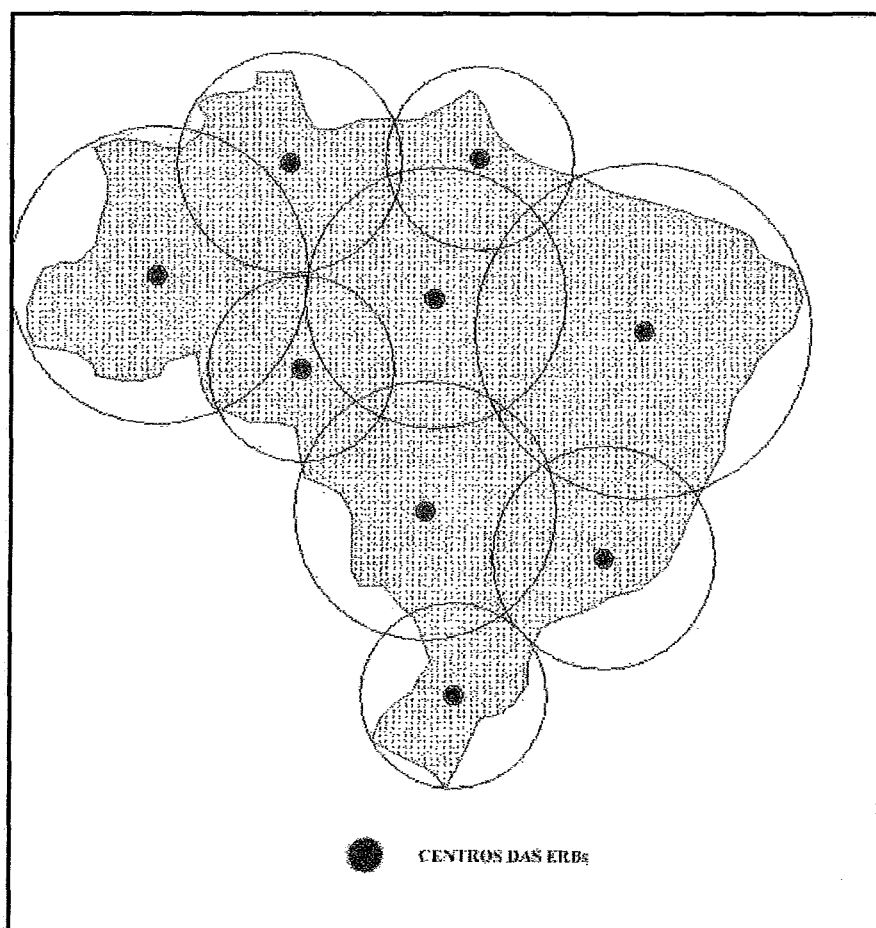


Figura 33 - Problema BR120 : 9 ERB's, 6992 Pontos e Cinco ERB's com Raios de Cobertura Diferentes

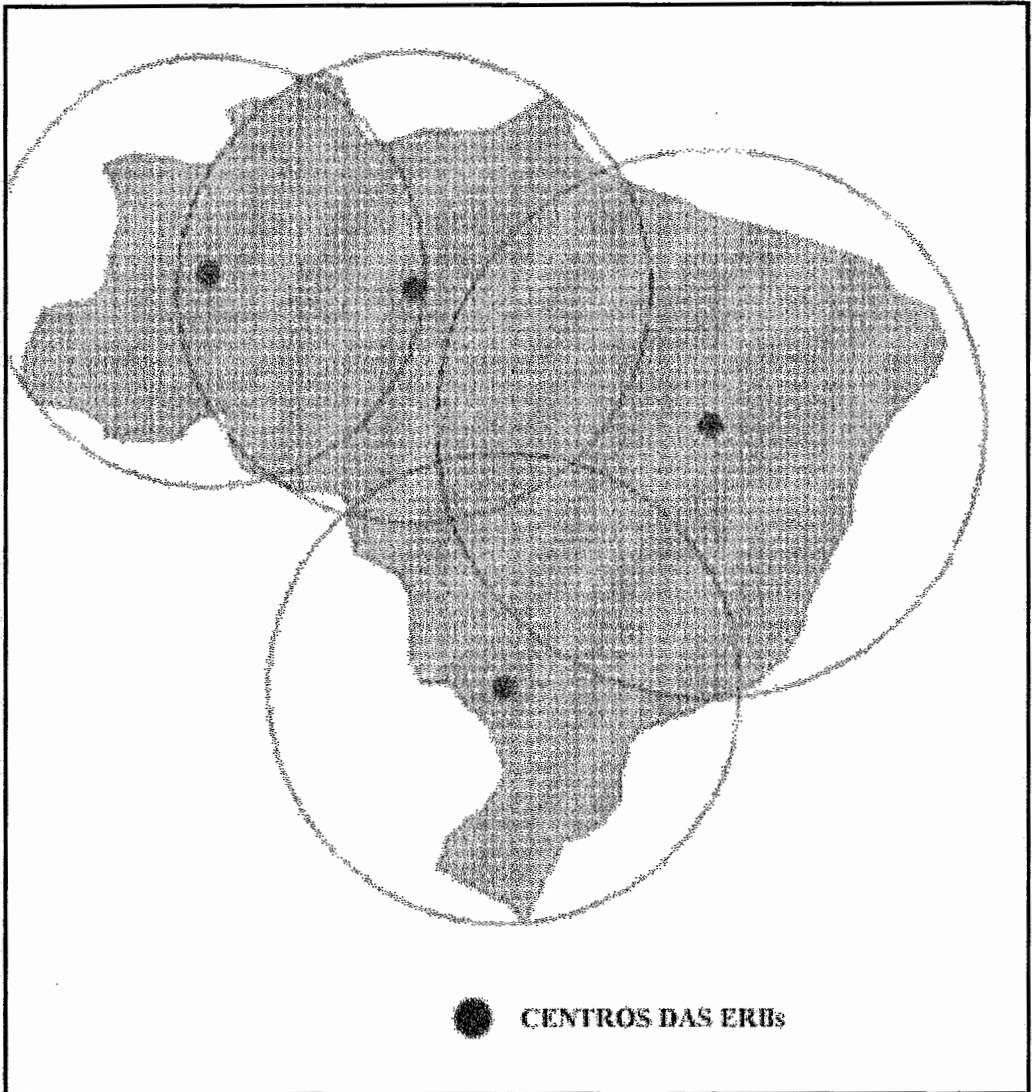


Figura 34 - Problema BR220 : 4 ERBs, 23228 Pontos
e Três ERB's com Raios de Cobertura Diferentes

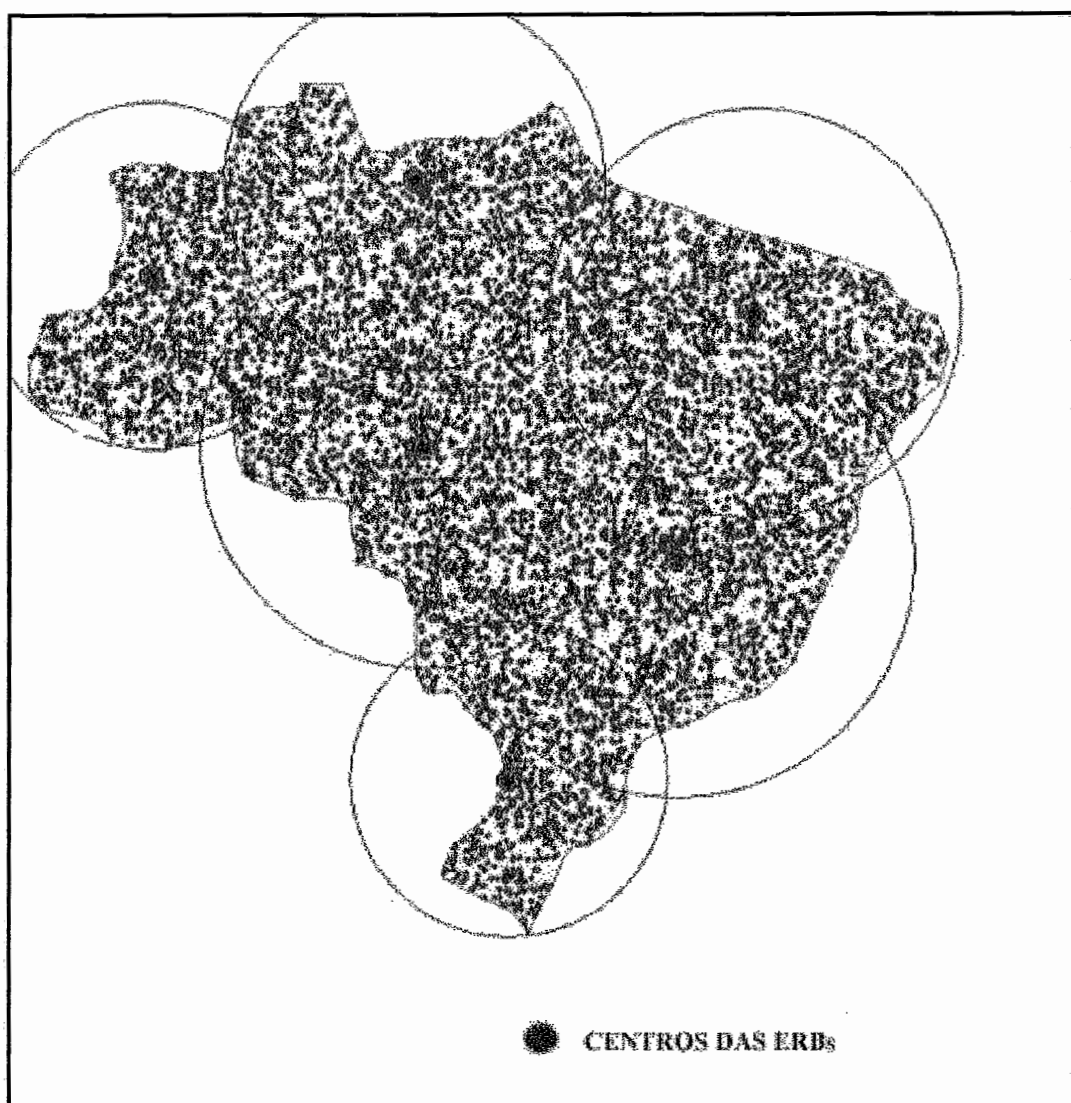


Figura 35 - Problema BR8000 : 6 ERBs, 8117 Pontos
e Seis ERB's com Raios de Cobertura Diferentes

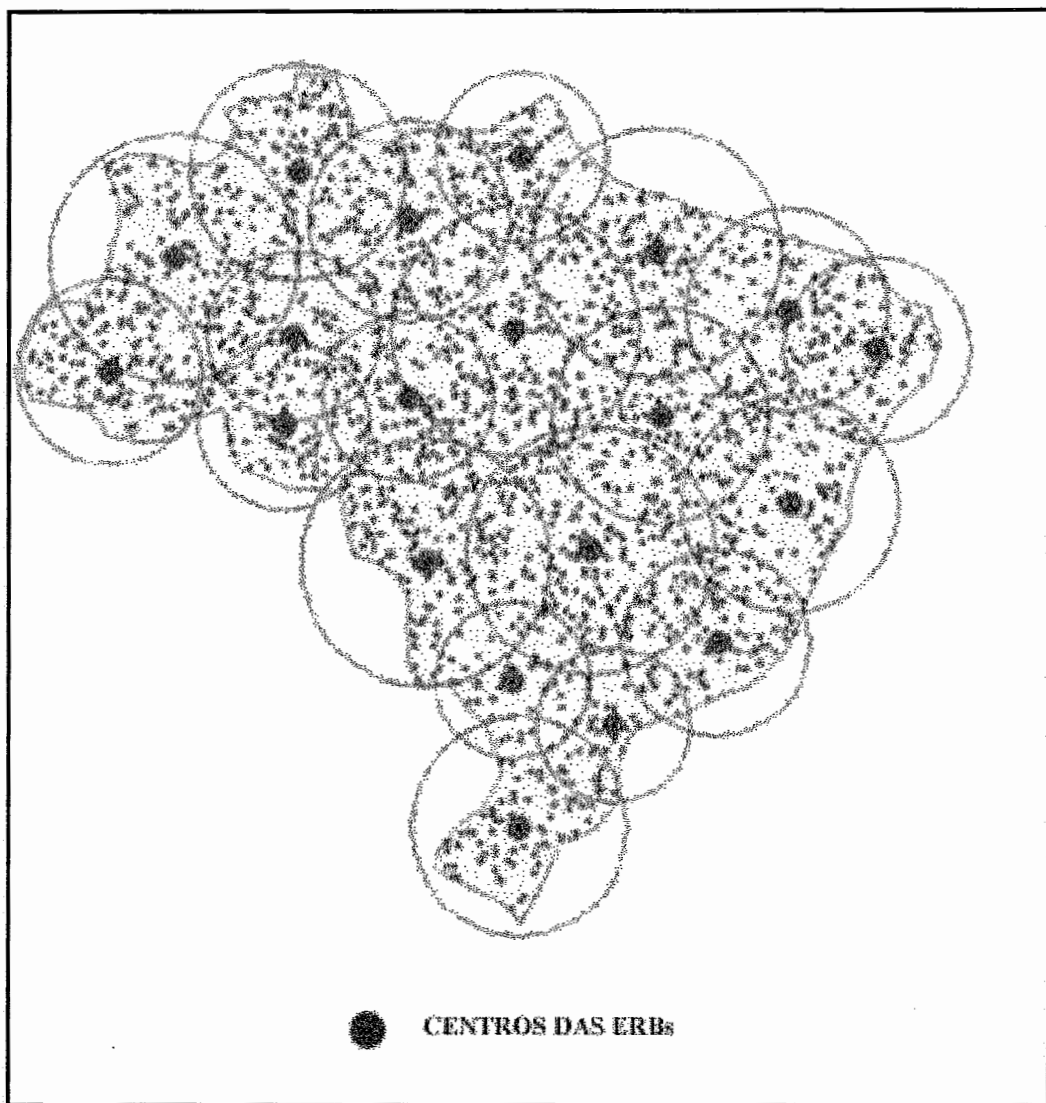


Figura 36 - Problema BR2000 : 20 ERB's , 2118 Pontos
e Seis ERB's com Raios de Cobertura Diferentes

6. Conclusões

Conforme observado ao longo de nossa exposição, o Problema de Localização de ERB's tem sido freqüentemente explorado pelos pesquisadores nos últimos anos, através de abordagens baseadas em Programação Inteira, Metaheurísticas, Programação Não-Linear e Teoria Grafos. Ainda assim, devido às características intrínsecas a este problema, como seu aspecto combinatório, essas abordagens são parcialmente eficientes somente para certas instâncias do mesmo.

Em face a essas dificuldades e com o intuito de auxiliar na solução deste problema, desenvolvemos então, uma nova metodologia de resolução para este problema, baseada numa modelagem *min-max-min* básica e em quatro modelagens derivadas da mesma.

Na modelagem *min-max-min* básica, modelagem M0, garantimos a cobertura de todos os pontos s_j ($j = 1, \dots, m$) da região S sem restrição de posicionamento ou proximidade de um particular ponto. Conforme observado no capítulo 4, caso o raio de cobertura obtido a partir da solução desta modelagem não esteja adequado às necessidades de cobertura da região S , podemos provocar o aumento ou a diminuição desse raio, para cada uma das estações, através, respectivamente, da redução ou do aumento do número de ERB's (círculos). Através desse mecanismo, o raio de cobertura ótimo pode ser determinado através de uma simples busca binária em q .

Na modelagem M1, consideramos o agrupamento de estações, fazendo a distribuição de q estações em n agrupamentos disjuntos. Para cada agrupamento é definida uma distância D_r que representa a distância máxima entre as estações de um mesmo agrupamento r ($r = 1, \dots, q$).

Esta modelagem é importante, tendo em vista que para regiões com muitos usuários, podemos desejar posicionar as ERB's mais próximas uma das outras. Já para regiões pouco povoadas e com poucos usuários, podemos formar agrupamentos com um número menor de ERB's e com uma distância D_r maior entre essas ERB's.

Na modelagem M2, é contemplada a situação em que estações têm localização em vizinhanças pré-definidas. Ou seja, dentre as q estações definidas para cobrir uma região S , podemos escolher um subconjunto de \bar{q} estações ($\bar{q} < q$), tal que cada uma dessas estações estejam, exclusivamente, em uma vizinhança máxima e mínima de pontos y_r , $r = 1, \dots, \bar{q}$. Devemos, assim definir, biunivocamente, uma a uma, distâncias máximas D_r e mínimas d_r , de forma que:

$$d_r \leq \|x_r - y_r\|_2 \leq D_r ,$$

sendo x_r os centros de cada uma das estações com proximidade pré-definida.

Esta modelagem é muito útil, pois podemos posicionar as estações próximas de centrais de emergência ou centros de comunicação e ao mesmo tempo evitar que as estações estejam muito próximas de outros transmissores ou obstáculos.

Na modelagem M3, definimos q conjuntos de pontos candidatos para instalação de ERB's. A especificação destes conjuntos pelas companhias de telecomunicações é normalmente obtida através de uma análise por suas áreas de planejamento. Em cada um dos conjuntos é selecionado um ponto para instalação das ERB's.

Esta modelagem é importante não apenas pela possibilidade da escolha dos pontos de localização das ERB's, mas também por ter uma similaridade com as modelagens ortodoxas de programação inteira, que usualmente são propostas para o problema de localização de ERB's (vide capítulo 3).

Finalmente, temos a quarta e última modelagem variante, proposta para o problema de localização de ERB's. Nesta modelagem é contemplada a situação em que as ERB's têm raios de cobertura diferenciados, associados às potências de transmissão. Esta modelagem é importante, pois considera a diversidade da localização das ERB's. Isto é, em grandes centros urbanos, onde há uma grande concentração de usuários e a existência de muitos obstáculos, trabalhamos com número maior de ERB's e com raios de cobertura menores, enquanto para áreas rurais ou com poucos usuários, podemos trabalhar com menos ERB's e raios de cobertura maiores.

A partir do desenvolvimento dessa modelagem e dos resultados apresentados no capítulo 5, podemos fazer as seguintes considerações:

- A combinação da teoria de programação não-diferenciável com as técnicas de suavização e penalização hiperbólica se mostrou como uma boa alternativa para a resolução da modelagem $\min - \max - \min$, com uma natureza multi-nível e a característica de não-diferenciabilidade.

Com a combinação destas técnicas, podemos transformar o problema $\min - \max - \min$ em um problema diferenciável e, desta forma, podemos utilizar os algoritmos que trabalham com as informações das derivadas de segunda ordem.

- Com a utilização desta modelagem tivemos uma significativa redução no número de variáveis associadas ao problema de localização de ERB's. Ou seja, em nossa modelagem temos $2q + 1$ variáveis e nas modelagens ortodoxas temos normalmente $q.m + q$ variáveis, sendo q o número de ERB's e m o número de pontos a serem cobertos. Com esta redução, temos a possibilidade de resolver problemas com razoável número de ERB's e pontos a serem cobertos.

Em relação a esta última observação, podemos apresentar a seguir alguns dos problemas teste que foram resolvidos, apresentados previamente nas tabelas do capítulo 5. Dentre esses problemas, considerando o tamanho caracterizado pelo número de pontos da região S e do número de ERB's, podemos destacar:

Tabela 19 - Subconjunto de Problemas Teste apresentados no capítulo 5

Problema	Número de ERB's	Número de Pontos	Raio z $f(x^*)$	Iterações BFGS	Tempo CPU
BH120	86	7301	26.7952	453	27900
BH150	30	11328	48.4354	409	6275
BH300	7	44872	164.7743	381	1285
BH420	4	87776	144.0751	413	3323
RJ100	50	4668	36.0037	379	5583
RJ170	6	13295	111.2607	342	748
AL30000	3	30097	196.7092	335	731

- Com o desenvolvimento das quatro modelagens variantes, podemos considerar outros aspectos relevantes associados ao problema de localização de ERB's. Observamos novamente, em relação ao número de ERB's e ao de pontos a serem cobertos, que estas modelagens funcionaram perfeitamente para os mais variados problemas teste (vide capítulo 5). Além disso, em todas as modelagens foi garantida a restrição de cobertura total da região S .

- A análise e desenvolvimento das expressões dos gradientes das funções restrição $\phi(\cdot)$, associada à redução do parâmetro τ_1 , ou seja, a análise do limite $\lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \nabla \phi(\cdot)$, nos deu a possibilidade de verificar o comportamento assintótico do problema de recobrimento.

Esta análise foi baseada considerando um particular ponto s_j da região S , um particular centro de círculo x_i associado às coordenadas de localização de uma estação de rádio base e um determinado raio de cobertura z .

Através desta análise, chegamos à seguinte conclusão:

A contribuição de cada um dos gradientes $\nabla g_j(\cdot)$ associados aos pontos s_j está diretamente relacionada ao posicionamento dos círculos de centro x_i (estações de rádio base) sobre a região S .

Dessa forma, para pontos s_j exteriores a um particular círculo de centro x_i , observamos que $\nabla g_j(\cdot)$ é "insensível", ou seja, o gradiente de $g(\cdot)$ tem contribuição quase nula para estes pontos. Em contra partida, o gradiente $\nabla g_j(\cdot)$ relacionado aos pontos s_j que estão no interior tem contribuição, em módulo,

duas vezes maior em relação ao gradiente dos pontos s_j que estão na fronteira do círculo de centro x_i .

- A análise do aspecto de quasi-concavidade das funções $\phi(\cdot)$ nos dá uma possível direção para o estudo da questão de otimalidade associada a solução deste problema.

Em síntese, pelas observações feitas, podemos concluir que a modelagem *min – max – min*, suas modelagens variantes e a utilização da teoria de suavização hiperbólica, constituem uma ferramenta adequada para a solução do problema de localização de ERB's.

A seguir, descrevemos de forma resumida, os trabalhos que futuramente poderão ser desenvolvidos como desdobramentos desta tese:

- Desenvolvimento de análise do comportamento das funções $\phi(\cdot)$ e da Hessiana da função $\phi(\cdot)$ quando consideramos os limites: $\lim_{\tau_1, \tau_2, \epsilon \rightarrow 0} \phi(\cdot)$ e $\lim_{\tau_1, \tau_2 \rightarrow 0} \nabla_2 \phi(\cdot)$. Com esta análise, pode-se ter informações para o estudo das questões de convexidade deste problema.

- Desenvolvimento de novas modelagens derivadas da modelagem básica *M0* e das quatro modelagens variantes para a consideração de outros aspectos intrínsecos à problemática real. Entre inúmeras possibilidades, pode-se considerar modelagens que encapsulem as restrições associadas às quatro modelagens variantes.

- Desenvolvimento de outras modelagens que considerem aspectos tais como: Alocação do espectro de frequências (Mateus[3]), cobertura de um ponto por duas ou mais ERB's, também chamado de p-recobrimento (Xavier[52]).

- Finalmente, considerando ainda a modelagem básica *min – max – min*, pode-se estudar uma possível aplicação desta modelagem para o problema de localização de satélites geoestacionários (Yasuhiko[53] e Spälti[54]).

7. Bibliografia

- [1] NASCIMENTO, JUAREZ, 2000, *Telecomunicações*, 2ª edição, Makron Books.
- [2] STUBER, GORDON.L, 2000, *Principles of Mobile Communication*, 2ª edição, KAP.
- [3] MATEUS, GERALDO R., 1998, *Introdução à Computação Móvel*, 11ª Escola de Computação.
- [4] BEASLEY, J.E., May 1992, *Lagrangean Relaxation*, The Management School, Imperial College.
- [5] BHASKAR KRISNAMACHARI, *Global Optimization in The Design of Mobile Communication Systems*, M.Sc. Thesis, Cornell University, 1999.
- [6] MACULAN, NELSON e LUCENA, ABÍLIO, *Otimização Linear e Inteira*, Setembro de 2000, COPPE/UFRJ.
- [7] XAVIER, ADILSON ELIAS, *Penalização Hiperbólica: Um Novo Método para Resolução de Problemas de Otimização*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1982.
- [8] SANTOS, ANA BEATRIZ AMARAL, *Problemas de Programação Não-Diferenciável: Uma Metodologia de Suavização*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
- [9] WOLSEY, LAURENCE A., *Notes on Integer Programming*, CORE and Faculty des Sciences Appliquées, Université Catholique de Louvain.
- [10] REEVES, COLIN R., *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, Blackwell Scientific Publications, 1993.
- [11] TUTSCHKU, K., *Demand-based Radio Network Planning of Cellular Mobile Communications Systems*, Technical Report, 1999.
- [12] CHAVES, ANTONIO MARQUES VIEIRA e XAVIER, ADILSON ELIAS, *Problemas Minimax: Uma Alternativa de Resolução Via Suavização*, Relatório Técnico, COPPE/UFRJ, 1998.
- [13] CHAVES, ANTONIO MARQUES VIEIRA, *Resolução de Problemas Minimax Via Suavizações*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1987.

- [14] SONG XU, *Smoothing Method for Minimax Problems*, Research Report: CORR 99-25, 1999.
- [15] MAZZINI, FILLIPE FERREIA E MATEUS, GERALDO ROBSON, *Projeto de Redes de Comunicação Móvel Via Rádio*, UFMG/DCC, 2000.
- [16] STAMATELOS, DIMITRIS and EPHEREMIDES, ANTHONY, "Spectral Efficiency and Optimal Base Placement for Indoor Wireless Networks", *IEEE - Journal on Selected Areas in Communications*, vol 14, n^o 4, pp.651-661, 1996.
- [17] SMALLWOOD, RICHARD D., *Minimax Detection Station Placement*, Stanford University, 1964.
- [18] RICHARD L.FRANCIS, *Some Aspects of a Minimax Location Problem*, Ph. D dissertation, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1966.
- [19] HANIF, D. SHERALI, CHANDRA MOHAN PENDYALA and THEODORE RAPPAPORT, "Optimal Location of Transmitters for Micro-Cellular Radio Communication System Design", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol 14, n^o 4, pp. 662-673, 1996.
- [20] LINDEROTH, J.T, SAVELSBERGH W.P., *A Computational Study of Search Strategies for Mixed Integer Programming*, Technical Report, 1997.
- [21] JOHNSON, ELLIS L., NENHAUSER, GEORGE L. and SAVELSBERGH W. P., *Progress in Linear Programming Based Branch-and-Bound. An Exposition*, Technical Report, 1997.
- [22] BERTSEKAS, D.P, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, San Diego, Academic Press, 1982.
- [23] POLYAK, R.A, "Smooth Optimization Methods for Minimax Problems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, n^o 26, pp. 1274-1286, 1988.
- [24] PILLO, GRIPPO and LUCIDI, "Smooth Method for the Finite Minimax Problem", *Mathematical Programming*, n^o 60, pp 187-214, 1993.
- [25] XAVIER, ADILSON ELIAS, *Recobrimento por Círculos de uma Região do Plano*, Relatório de Pesquisa, COPPE/UFRJ, 2000.
- [26] MARTINEZ, JOSÉ MARIO e SANTOS, SANDRA AUGUSTA, *Métodos Computacionais de Otimização*, 20^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1995.

- [27] OLIVEIRA, ANTÔNIO ALBERTO F., *Recobrimento Contínuo Ótimo*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1980.
- [28] SZWARCFITER, JAYME LUIZ, *Grafos e Algoritmos Computacionais*, 2ª edição, Editora Campus, 1988.
- [29] MANGASARIAN, OLVI L., *NonLinear Programming - Classics in Applied Mathematics*, SIAM, vol 10, 1994.
- [30] CAMPOS, MARIA HELENA JARDIM e SCHEIMBERG, SUSANA DE MAKLER, *Programação Não-Diferenciável*, Escola Brasileira de Otimização, 1988.
- [31] VIANA, VALDÍSIO, *Meta-Heurísticas e Programação Paralela em Otimização Combinatória*, UFC edições, 1988.
- [32] BOAVENTURA, PAULO OSWALDO NETTO, *Teoria e Modelos de Grafos*, Edgard Blücher, São Paulo, 1979.
- [33] HANDLER, G.Y and CHEN, R., "The Conditional p-Center Problem in the Plane", *Naval Research Logistics*, Vol. 40, pp. 117-127, 1993.
- [34] HANDLER, G.Y and CHEN, R., "Relaxation Method for the Solution of the Minimax Location-Allocation Problem in Euclidean Space", *Naval Research Logistics*, vol.34, pp. 775-788, 1987.
- [35] VIJAY, JAMES, "An Algorithm for the p-Center Problem in the Plane", *Transportation Science*, vol.19, nº 3, pp. 235-244, 1985.
- [36] CHAMARET, B. and LANLOY C. CONDEVAUX, *Graph based Modeling for Automatic Transmitter Location in Cellular Network*, Technical Report, Lyon University, 1997.
- [37] WHITE, JOHN A. and CASE, KENETH E., "On Covering Problems and the Central Facilities Location Problem", *Geographical Analysis*, vol 6, pp.282-293, 1980.
- [38] WRIGHT, MARGARET H., *Optimization Methods for Base Station Placement in Wireless Applications*, Technical Report, Bell Laboratories, 1995.
- [39] STAMM, CHRISTOPH, *Algorithms and Software for Radio Signal Coverage Prediction in Terrains*, Phd Thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 20001.

- [40] GUEDES, LEONARDO G. R. e YACOUB, MICHEL DAOUD, "Sobreposição de Células com Restrição de Cobertura", *Journal of Microwaves and Optoelectronics*, vol. I, n^o 1, pp. 10-29, 1997.
- [41] MACULAN, NELSON e CAMPELLO, RUY EDUARDO, *Algoritmos e Heurísticas*, Editora da Universidade Federal Fluminense, 1994.
- [42] SIMMONS, M.D, *Non Linear Programming for Operations Research*, Prentice-Hall, 1975.
- [43] LEMARÉCHAL, C., *Basic Theory in Nondifferentiable Optimization*, North-Holland, pp. 529-572, 1986.
- [44] FLETCHER, R., - *Practical Methods of Optimization* , vol.2, John Wiley and Sons, New York and Toronto, 1991.
- [45] ZOWE, J., - *Nondifferentiable Optimization*, in Computational Mathematical Programming, editor K. Schittkowski - Springer-Verlag - Berlin, 1985.
- [46] GUEDES, LEONARDO G. de R., Curso de Projeto de Telefonia Celular (Notas de Aula), UFGO, 2000.
- [47] MORÉ, JORGE J. and WU, ZHIJUN, *Distance Geometry Optimization for Protein Structures*, Argonne National Laboratory - Mathematics and Computer Science Division, 1996.
- [48] DEBORD, JEAN, *Mathematial Routines*, Laboratoire de Pharmacologie, Faculte de Medecine, Limoges (France).
- [49] DENNIS, J.E. MANGASARIAN and SCHNABEL ROBERT B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and NonLinear Equations - Classics in Applied Mathematics*, vol 16, SIAM, 1994.
- [50] LAGES, ELON L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA - Livros Técnicos e Científicos, 1993.
- [51] LAGES, ELON L., *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA - Livros Técnicos e Científicos, 1991.
- [52] XAVIER, ADILSON ELIAS, "Optimal Order p-Covering of plain domains by circles with Hiperbolic Smoothing Method", *XXI CLAIO*, Concepción/Chile, 2002.

- [53] YASUHIKO, ITO, "Effective Utilization of Geostationary Orbit through Optimization", *IEEE Transactions on Communications*, vol 27, n^o 10, 1979.
- [54] SPÄLTI, SUSAN B., "Modeling the Satellite Placement Problem as a Network Flow problem with onside constraint", *OR Spektrum*, n^o 13, pp. 1-14, 1991.