



MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO EM ESPAÇOS DE HILBERT

Afonso Norberto da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Paulo Sérgio Marques dos
Santos

Rio de Janeiro
Março de 2013

MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO
EM ESPAÇOS DE HILBERT

Afonso Norberto da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Ing.

Prof. Paulo Sérgio Marques dos Santos, D.Sc.

Prof. Jurandir de Oliveira Lopes, D.Sc.

Prof. Ronaldo Malheiros Gregório, D.Sc.

Prof. Ernesto Prado Lopes, Ph.D.

Prof. Orizon Pereira Ferreira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2013

Silva, Afonso Norberto da

Métodos de Regularização para o Problema de Equilíbrio em Espaços de Hilbert/Afonso Norberto da Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XI, 45 p. 29, 7cm.

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 42 – 45.

1. problema de equilíbrio. 2. regularização tipo-Tikhonov. 3. convergência fraca. 4. método ponto proximal interior. 5. distância proximal ϕ -divergência.
I. Oliveira, Paulo Roberto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*À minha esposa Jeanne e aos
meus filhos Bruna, Bianca e
Breno.*

À minha mãe Joaquina.

*À memória do meu pai
Raimundo e do Professor
Marcílio.*

Agradecimentos

Ao "Senhor do Universo" todo poderoso, por ter me dado saúde, disposição, coragem e sabedoria para vencer mais uma etapa que a mim foi destinada.

Ao Prof. Paulo Roberto Oliveira pela orientação, confiança, seu apoio constante, encorajamentos, muitas sugestões proveitosas durante este projeto, e especialmente, pela dedicação na realização do Dinter UFRJ/UESPI/UFPI.

Ao Prof. Paulo Sérgio Marques dos Santos por ter aceitado me orientar e pelo incentivo, apoio, amizade e confiança com que pude contar na realização deste trabalho.

Aos Professores Jurandir de Oliveira Lopes, Ernesto Prado Lopes, Ronaldo Malleiros Gregório e Orizon Pereira Ferreira por terem aceito participar da banca de defesa desta tese de doutorado e pelas sugestões acrescentadas a este trabalho.

À minha esposa Jeanne Jesus, a minhas queridas filhas Bruna Giovanna e Bianca Jordanna, ao meu querido filho Breno Afonso e demais familiares pela compreensão, incentivo, paciência e, em especial, por todo o amor e apoio através de toda minha vida.

Ao Instituto Dom Barreto, por minha liberação durante o período em que estive no Rio de Janeiro e pelo apoio à continuidade dos meus estudos.

Ao casal Joel e Ceomara por me receberem e acolherem de forma cordial em todas as viagens que fiz ao Rio de Janeiro.

Aos amigos de turma, em especial, Arnaldo, Pedro, Jesus Ossian e Benício por todo o apoio, amizade e pela ajuda em todas as ocasiões.

Aos amigos da UESPI, do IDB e da UFPI por toda a estrutura disponibilizada e pela amizade de longos anos.

A todos os professores e funcionários do PESC/COPPE pelos conhecimentos transmitidos, incentivo e amizade.

Ao Professor João Xavier da Cruz Neto pelo apoio e empenho para a realização do DINTER.

À CAPES e UESPI, pelo apoio financeiro e institucional.

A todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Muito obrigado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO EM ESPAÇOS DE HILBERT

Afonso Norberto da Silva

Março/2013

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Paulo Sérgio Marques dos Santos

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, consideramos o problema de equilíbrio geral definido em um conjunto convexo e fechado. Apresentamos o problema, seus casos particulares e algumas de suas aplicações. Obtemos resultados sobre a existência de soluções para os problemas regularizados. Propomos uma regularização tipo-Tikhonov e um algoritmo ponto proximal interior com ϕ -divergência para resolver o problema de equilíbrio. No primeiro caso, mostramos que um método de regularização tipo-Tikhonov pode ser estendido para o problema de equilíbrio, no qual estabelecemos a equivalência entre a existência de soluções do problema original e a limitação da sequência gerada pelos problemas regularizados. No segundo caso sob hipóteses razoáveis, provamos que a sequência gerada pelo algoritmo converge para uma solução do problema de equilíbrio, quando os parâmetros de regularização são limitados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

REGULARIZATION METHODS FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN
HILBERT SPACES

Afonso Norberto da Silva

March/2013

Advisors: Paulo Roberto Oliveira

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this paper, we consider the problem of general equilibrium on a closed convex set. We present the problem, its particular cases and some from applications. We obtain results about the existence of solutions of the regularized problems. We propose a Tikhonov-type regularization and an interior proximal point algorithm with ϕ -divergence for solve the equilibrium problem. In the first case, we show a Tikhonov-type regularization method that can be extended for the equilibrium problem, where we establish the equivalence between the existence of solution of the original problem and the boundedness of the sequence generated by regularized problems. Following, under reasonable assumptions, we prove that the sequence generated by the algorithm converges to a solution of the equilibrium problem, when the regularization parameters are bounded.

Sumário

Introdução	1
1 Definições e Resultados Preliminares	5
1.1 Definições Básicas	5
1.2 Métodos de Regularização	8
1.3 Distância ϕ -divergente	9
1.4 Fejér Convergência	11
1.5 O Problema de Equilíbrio	12
1.5.1 Casos Particulares	13
1.5.2 Aplicações	16
2 Uma Regularização Tipo-Tikhonov para o Problema de Equilíbrio	20
2.1 Caso monótono	20
2.2 Caso não monótono	24
3 O Método do Ponto Proximal para o Problema de Equilíbrio	28
3.1 Um Algoritmo para Problema de Equilíbrio(Moudafi e Théra, 1999) .	28
3.2 Algoritmo Inexato(Konnov, 2003)	29
3.3 Algoritmo Exato(Noor, 2004)	30
3.4 Algoritmo Exato(Iusem e Sosa, 2010)	31
3.5 Algoritmo Extragradiante Proximal Interior(Nguyen e Jean-Jaques, 2009)	31
4 Um Método Ponto Proximal Interior com ϕ-divergência para Problemas de Equilíbrio	33
4.1 Boa Definição dos Subproblemas	33
4.2 Análise de Convergência	36
5 Conclusões e Trabalhos Futuros	40
5.1 Resolução Numérica dos Subproblemas	40
5.2 Estudo do Caso Quase-convexo	40
5.3 Algoritmo Proximal Inexato para o Problema $PE(f, C)$	41

Notações

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano de dimensão n .
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert real.
$P(\mathcal{H})$	Conjunto das partes de \mathcal{H} .
$B(0, n)$	Bola de raio n centrada na origem.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno.
$\ \cdot\ $	Norma.
C	É um conjunto convexo, fechado e não vazio.
$int(C)$	Interior de C .
$PE(f, C)$	Problema de Equilíbrio.
$S(f, C)$	Conjunto das soluções do $PE(f, C)$.
$S^d(f, C)$	Conjunto solução do problema dual.
PMC	Problema de Minimização Convexa.
PPF	Problema do Ponto Fixo.
PDV	Problema de Desigualdade Variacional.
PC	Problema de Complementaridade.
PEN	Problema de Equilíbrio de Nash.
\rightarrow	Convergência forte.
\rightharpoonup	Convergência fraca.
$dom(T)$	Domínio do operador T .
$G(T)$	Gráfico do operador T .
$\partial_2 f(x, \hat{x})$	Subdiferencial de $f(x, \cdot)$ em \hat{x} .
$d_\phi(x, y)$	Distância proximal ϕ -divergente.
$D_\phi(x, y)$	Função tipo-distância.
$\nabla_1 D_\phi(x, p)$	Gradiente de $D_\phi(\cdot, p)$ em x .

Introdução

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert real, cujo produto interno e norma são denotados por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$, respectivamente. Tome um conjunto $C \subset \mathcal{H}$ não vazio, convexo, fechado e $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio, isto é, $f(x, x) = 0$ para todo $x \in C$. O Problema de Equilíbrio $PE(f, C)$ consiste em:

$$PE(f, C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \end{array} \right. \quad (1)$$

O Problema de Equilíbrio foi primeiro considerado e introduzido por Ky Fan em [12], mas problemas de equilíbrio aparecem com este nome no trabalho de Blum e Oettli em 1994, veja [5].

Este problema é muito geral no sentido que ele inclui, entre seus casos particulares, problemas de minimização convexo, problemas de desigualdade variacional, problemas de equilíbrio de Nash, e outras aplicações, veja por exemplo [5, 16] e suas referências. O interesse deste problema é que ele unifica todos esses problemas específicos de uma forma conveniente. Além disso, muitos métodos destinados a resolver um destes problemas pode ser estendido, com as modificações adequadas, para resolver o problema de equilíbrio geral.

Resultados de existência de soluções para problemas de equilíbrio têm sido bastante estudados, como pode ser visto em [5, 15, 16, 22].

Neste trabalho, propomos uma Regularização tipo-Tikhonov e um Método Ponto Proximal Interior com ϕ -divergência para resolver o problema de equilíbrio.

Inicialmente desenvolvemos uma regularização tipo-Tikhonov para o Problema de Equilíbrio, em espaços de Hilbert. Este é um método bem conhecido que é amplamente utilizado em otimização convexa e estudos de desigualdades variacionais monótonas para lidar com problemas mal-postos. A ideia principal do método de regularização tipo-Tikhonov para a desigualdade variacional monótona é que ele acrescenta um operador fortemente monótono, dependendo de um parâmetro de regularização para obter uma desigualdade variacional fortemente monótona. O problema regularizado resultante tem então uma única solução, dependendo do parâmetro de regularização. Quando o operador é pseudomonótono, a monotonicidade

dade do problema regularizado pode falhar ou não ocorrer.

Métodos de regularização para problemas de equilíbrio, sem hipóteses monotonicidade, têm sido considerados em alguns trabalhos recentes, veja [21, 22, 23] e suas referências.

Em [13], um esquema tipo-Tikhonov foi proposto para resolver problemas de equilíbrio em dimensão finita. O problema regularizado seguinte é considerado:

$$\text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que } f_\lambda(x^*, y) := f(x^*, y) + \lambda g(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (2)$$

onde g é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona em C , $\lambda > 0$ e g satisfaz a condição

$$\exists \delta > 0, \hat{x} \in C : |g(x, y)| \leq \delta \|x - \hat{x}\| \|y - x\| \quad \forall x, y \in C. \quad (3)$$

Contudo, esta condição é bastante restritiva (por exemplo, ela implica que $g(\hat{x}, y) = 0$ para todo $y \in C$).

Neste trabalho, estendemos o esquema (2) para resolver problemas de equilíbrio em espaços de Hilbert. Também, substituímos a condição (3) por

$$\limsup_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{|g(x, y)|}{\|y - x\|} < +\infty \quad \forall x \in C, \quad (4)$$

apresentando um meio prático para construir bifunções g fortemente monótonas satisfazendo (4).

Vale destacar que os resultados obtidos nesta parte da Tese foram publicados na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [39].

Na segunda parte do trabalho, desenvolvemos um Método Ponto Proximal Interior com ϕ -divergência para resolver o problema de equilíbrio. Em anos recentes, métodos para resolver o Problema de Equilíbrio têm sido muito pesquisados. Uma abordagem comumente utilizada é o método do ponto proximal. Este método foi introduzido por Martinet [30] para desigualdades variacionais e foi então estendido por Rockafellar [40] para encontrar o zero de um operador monótono maximal $T : \mathcal{H} \rightarrow P(\mathcal{H})$. O algoritmo gera uma sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$, a partir de algum $x^0 \in \mathcal{H}$, onde x^{k+1} é o único zero do operador T^k definido por

$$T^k(x) = T(x) + \lambda_k(x - x^k),$$

com $\{\lambda_k\}$ sendo uma sequência limitada de números reais positivos, chamados coeficientes de regularização. Tem sido provado em [40] que para um T monótono maximal, a sequência $\{x^k\}$ é fracamente convergente para um zero de T , quando T tem zeros, e é ilimitada em caso contrário. Tal convergência fraca é global, ou seja,

o resultado anunciado é, na verdade para qualquer $x^0 \in \mathcal{H}$.

Moudafi [32] estendeu o método do ponto proximal para problemas de equilíbrio monótonos. Konnov [21] usou o método do ponto proximal para resolver o Problema (1) com f sendo uma bifunção de equilíbrio fracamente monótona.

Outros métodos têm sido desenvolvidos para resolver o problema de equilíbrio, tais como o método extragradiente [35], subgradiente projetado [41], função gap [31] e o princípio do problema auxiliar [36]. Para mais detalhes, veja por exemplo, [4] e suas referências.

Em [14, 21] os autores propõem um algoritmo para resolver o $PE(f, C)$, que gera uma sequência, $\{x^k\} \subset C$, onde dado $x^0 \in C$, o ponto x^{k+1} é obtido como uma solução para o seguinte problema regularizado

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \lambda_k \langle x - x^k, y - x \rangle \quad (5)$$

com $\lambda_k \in (\theta, \bar{\lambda})$, $\theta \geq 0$, $\bar{\lambda} > 0$.

Alguns pesquisadores têm considerado a possibilidade de substituir a distância euclideana usada em (5) por outros tipos de distâncias, tais como distâncias de Bregman, veja [28] para o caso de dimensão finita e [8, 17] para um método em espaços de Banach.

Em [34] um método extragradiente proximal interior é discutido para problemas de equilíbrio em que o conjunto viável é um poliedro e o termo quadrático é substituído pela função distância proximal logarítmica quadrática, isto é,

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(x^k, y) + \lambda_k D_\phi(y, x^k)\},$$

onde f é contínua em $C \times C$, satisfazendo

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|y - x\|^2 - c_2 \|z - y\|^2, \forall x, y, z \in C, \quad (6)$$

com $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$.

Neste trabalho, propomos um método ponto proximal interior para resolver o problema de equilíbrio, substituindo o termo de regularização quadrático usado em (5) por uma distância proximal ϕ -divergente dada em [34], que será detalhada no capítulo 4.

Vale a pena ressaltar qual a principal vantagem da distância proximal ϕ -divergente em relação a (5); é que ela força as iteradas x^k a permanecerem no interior de C . Esta propriedade pode não ser assegurada quando usamos (5), como pode ser visto em [1, 3].

O principal objetivo, neste segundo momento, é estabelecer que a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo nosso algoritmo está bem definida e converge para uma solução

do problema, quando os parâmetros λ_k satisfazem

$$\lambda_k \subset (\theta, \bar{\lambda}), \theta \geq 0, \bar{\lambda} > 0;$$

além disso, f não exige a condição (6) nem continuidade em C .

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, recordamos conceitos e resultados básicos que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho; apresentamos o problema de equilíbrio e algumas de suas aplicações. No capítulo 2, apresentamos um método de regularização tipo-Tikhonov para problemas de equilíbrio e mostramos nossos principais resultados. No capítulo 3, abordamos o Método do Ponto Proximal para o problema de equilíbrio. No capítulo 4, mostramos um resultado de existência de nossa bifunção regularizada, definimos o algoritmo e fizemos a análise de convergência, onde mostramos um algoritmo ponto proximal interior e resultados de convergência para uma solução do Problema de Equilíbrio. Finalmente no capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e propostas de continuidade de pesquisa.

Capítulo 1

Definições e Resultados

Preliminares

Neste capítulo, relembremos definições conhecidas e apresentamos resultados que são importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. A partir de agora, \mathcal{H} denota um espaço de Hilbert real, cujo produto interno e norma são denotados por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ respectivamente e $C \subset \mathcal{H}$ é um conjunto não vazio, convexo e fechado.

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1.1 *Uma sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ é fortemente convergente para $x \in \mathcal{H}$ ($x^k \rightarrow x$) se, e somente se,*

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k - x, x^k - x \rangle.$$

Definição 1.1.2 *Uma sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ é fracamente convergente para $x \in \mathcal{H}$ ($x^k \rightharpoonup x$) se, e somente se,*

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k - x, y \rangle$$

para todo $y \in \mathcal{H}$.

Teorema 1.1.1 *Se $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ é limitada, então $\{x^k\}$ tem uma subsequência fracamente convergente.*

Prova. Veja [42]. ■

Definição 1.1.3 *Dizemos que uma função $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua superior no ponto $x \in C$, quando para qualquer sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ tal que $x^k \rightharpoonup x$, tem-se*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} h(x^k) \leq h(x).$$

Definição 1.1.4 Dizemos que uma função $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua inferior no ponto $x \in C$, quando para qualquer sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ tal que $x^k \rightharpoonup x$, tem-se

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} h(x^k) \geq h(x).$$

Definição 1.1.5 Uma bifunção $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser:

(i) fortemente monótona em C com módulo $\beta > 0$ se

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

(ii) monótona em C se

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \quad \forall x, y \in C.$$

(iii) pseudomonótona em C se

$$\forall x, y \in C : f(x, y) \geq 0, \text{ então } f(y, x) \leq 0.$$

Claramente, (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii).

Definição 1.1.6 Uma função $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se para cada par de pontos $x, y \in \mathcal{H}$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Definição 1.1.7 Seja $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Dizemos que $\eta \in \mathcal{H}$ é um subgradiente de f no ponto $x \in \mathcal{H}$ se

$$f(y) \geq f(x) + \langle \eta, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

O conjunto de todos os subgradientes de f em x se chama o subdiferencial de f em x ; que será denotado por $\partial f(x)$.

Definição 1.1.8 O subdiferencial diagonal de f , $\partial_2 f : C \times C \rightarrow \mathcal{H}$, é definido como:

$$\partial_2 f(x, x) := \{\eta \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle \eta, y - x \rangle + f(x, x) \quad \forall y \in \mathcal{H}\}.$$

Definição 1.1.9 O domínio e o gráfico de um operador T são definidos como:

$$\text{dom}(T) := \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) \neq \emptyset\},$$

$$G(T) := \{(x, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid x \in \text{dom}(T), v \in T(x)\}.$$

Definição 1.1.10 Um operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é fortemente monótono com módulo $\beta > 0$ se, e somente se,

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.1.11 Um operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é monótono se, e somente se,

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.1.12 Um operador monótono é dito ser monótono maximal quando seu gráfico não está propriamente contido no gráfico de outro operador monótono.

Definição 1.1.13 Sejam Y um subconjunto de \mathcal{H} e $S : Y \rightarrow P(\mathcal{H})$ uma aplicação ponto conjunto. Se para todo $y \in Y$, $S(y)$ é fracamente fechado em \mathcal{H} , então S é dita ser uma aplicação KKM se uma envoltória convexa de qualquer conjunto finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de Y , denotada por $co\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, está contida na $\bigcup_{i \in I} S(y_i)$.

Os Lemas seguintes serão usados para a existência de soluções dos problemas regularizados quando f é uma bifusão pseudomonótona, estudada no capítulo 2.

Lema 1.1.1 Sejam K, C subconjuntos de \mathcal{H} , convexos e fechados. Considere uma função convexa $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$ convexa para $x \in C$.

- (i) Se \bar{x} minimiza h em $C \cap K$ e pertence ao interior de K , então \bar{x} minimiza h em C .
- (ii) Se \bar{x} resolve o $PE(f, C \cap K)$ e pertence ao interior de K , então \bar{x} resolve $PE(f, C)$.

Prova. Veja [18, Proposição 3.3]. ■

Lema 1.1.2 (Fan-KKM Lema) Sejam Y um subconjunto de \mathcal{H} e $S : Y \rightarrow P(\mathcal{H})$ uma aplicação KKM. Se $S(y_0)$ é fracamente compacto para algum $y_0 \in Y$, então $\bigcap_{y \in Y} S(y) \neq \emptyset$.

Prova. Veja [11, Lema 1]. ■

1.2 Métodos de Regularização

A ideia de regularização surgiu em conexão com problemas mal-postos. Dado um problema da forma

$$L(f) = 0 \tag{1.1}$$

onde f é um elemento de um conjunto X e $L : X \rightarrow X$ é um operador. Dizemos que (1.1) é mal-posto quando ele não tem solução, ou tem mais de uma solução, ou tem uma única solução, mas esta solução não depende de um modo contínuo de alguns parâmetros do operador L . A ideia é substituir L por um operador regularizado $L + \lambda M$ (com $\lambda \in \mathbb{R}$, $M : X \rightarrow X$), onde M é tal que o problema

$$L(f) + \lambda M(f) = (L + \lambda M)(f) = 0 \tag{1.2}$$

é bem-posto(isto é, ele não é mal-posto) para qualquer $\lambda > 0$. Em tal caso, (1.2) tem uma solução única f_λ , e espera-se que como λ se aproxima de 0, f_λ fornece algum tipo de aproximação de uma solução de (1.1), veja [20, 44] e suas referências.

Métodos de regularização para Problemas de Equilíbrio dependem de um esquema de solução bem conhecido já desenvolvidos para equações não-lineares, problemas de otimização e desigualdades variacionais. A ideia principal é resolver uma sequência de problemas de equilíbrio auxiliares cujas soluções convergem para uma solução do $PE(f, C)$. Mais precisamente, na análise da k -ésima iteração os métodos de regularização encontram uma solução exata ou aproximada do problema de equilíbrio auxiliar:

Encontrar $x^* \in C$ tal que

$$f(x^*, y) + \lambda_k \langle x^* - u^k, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

onde $\lambda_k > 0$ e $u^k \in C$ são os parâmetros cuja escolha determina os diferentes algoritmos. O termo adicional é chamado regularização porque permite reforçar as propriedades de monotonicidade da bifunção original f . De fato,

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \lambda_k \langle x - u^k, y - x \rangle$$

é fortemente monótona se f é monótona. A sequência das soluções dos problemas auxiliares converge para uma solução do $PE(f, C)$, sob monotonicidade generalizada ou suposições sobre coercividade de f . Vamos apresentar dois métodos de regularização para o Problema de Equilíbrio: uma regularização tipo-Tikhonov, em espaços de Hilbert, e um método ponto proximal interior com ϕ -divergência, em \mathbb{R}^n . Na primeira subclasse, os parâmetros $\lambda_k \rightarrow 0$ e u^k independem das iterações anteriores, enquanto na segunda $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$ e u^k depende das iterações anteriores.

1.3 Distância ϕ -divergente

Nesta seção, assumimos que C é um conjunto poliedral definido por

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

onde A é uma matriz $m \times n$ ($m \geq n$) de posto completo, com a_i denotando as linhas de A , e b é um vetor em \mathbb{R}^m , cujas linhas serão denotadas por b_i . Além disso, vamos assumir que o interior de C , denotado por $\text{int}(C)$, é não vazio.

A seguir apresentamos a definição de ϕ -divergência e algumas de suas propriedades básicas. Esta classe de medida foi introduzida por Csiszár [10] como uma medida generalizada de informações. No contexto de métodos proximais, ϕ -divergências foram estudadas por Teboulle [43], onde várias de suas propriedades são apresentadas. Para mais detalhes, veja [1, 7] e suas referências.

A função tipo-distância, denotada por $D_\phi(x, y)$, é construída a partir de uma classe de funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ da forma

$$\phi(t) = \mu h(t) + \frac{\nu}{2}(t - 1)^2,$$

onde $\nu > \mu > 0$ e h é uma função convexa, própria e fechada satisfazendo as seguintes propriedades adicionais:

- i. h é duas vezes continuamente diferenciável sobre $\text{int}(\text{dom}(h)) = (0, +\infty)$.
- ii. h é estritamente convexa sobre seu domínio.
- iii. $\lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = -\infty$.
- iv. $h(1) = 0$ e $h''(1) > 0$, e
- v. Para $t > 0$, $1 - t^{-1} \leq h'(t) \leq t - 1$.

Entre todas as funções h satisfazendo as propriedades (i – v), mencionamos a seguinte:

$$h(t) = \begin{cases} t - \ln t - 1, & \text{se } t > 0, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A correspondente função ϕ é denominada função logarítmica quadrática. Ela possui propriedades atraentes para o desenvolvimento de algoritmos eficientes (veja por exemplo, [2, 3]).

Outra função h que também é frequentemente usada na literatura (veja por exemplo, [6, 38] é:

$$h(t) = \begin{cases} t \ln t - t + 1, & \text{se } t > 0, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Associada com ϕ , consideremos a distância proximal ϕ -divergente

$$d_\phi(x, y) = \sum_{j=1}^n y_j^2 \phi\left(\frac{x_j}{y_j}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{++}^n,$$

e para qualquer $x, y \in \text{int}(C)$, definimos a função tipo-distância D_ϕ por

$$D_\phi(x, y) = d_\phi(l(x), l(y)) \quad \forall x, y \in \text{int}(C),$$

onde $l(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$ e $l_j(x) = b_j - \langle a_j, x \rangle$, $j = 1, \dots, n$.

A partir da definição de D_ϕ , note que para todo $x, y \in \text{int}(C)$, temos:

$$\begin{aligned} D_\phi(x, y) &= \sum_{j=1}^n l_j^2(y) \phi\left(\frac{l_j(x)}{l_j(y)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n l_j^2(y) \left[\mu h\left(\frac{l_j(x)}{l_j(y)}\right) + \frac{\nu}{2} \left(\frac{l_j(x)}{l_j(y)} - 1\right)^2 \right] \\ &= \mu \sum_{j=1}^n l_j^2(y) h\left(\frac{l_j(x)}{l_j(y)}\right) + \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^n (l_j(x) - l_j(y))^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

De (1.3), segue que

$$D_\phi(x, y) = \mu D_h(x, y) + \frac{\nu}{2} \|A(x - y)\|^2.$$

Como A tem posto completo, a função $(x, y) \rightarrow \langle A^T A x, y \rangle$ define um produto interno em \mathbb{R}^n , que denotamos por $\langle x, y \rangle_A$ com $\|x\|_A := \|Ax\| = \langle Ax, Ax \rangle^{\frac{1}{2}}$, assim podemos escrever:

$$D_\phi(x, y) = \mu D_h(x, y) + \frac{\nu}{2} \|(x - y)\|_A^2. \quad (1.4)$$

O próximo resultado é importante para a análise de convergência do Algoritmo 4.2.1 estudado no capítulo 4.

Lema 1.3.1 Para todo $x, y \in \text{int}(C)$ e $z \in C$, ocorre que

i. $D_\phi(\cdot, y)$ é diferenciável e fortemente convexa sobre $\text{int}(C)$ com módulo ν , isto é,

$$\langle \nabla_1 D_\phi(x, p) - \nabla_1 D_\phi(y, p), x - y \rangle \geq \nu \|x - y\|_A^2 \quad \forall p \in \text{int}(C),$$

onde $\nabla_1 D_\phi(x, p)$ denota o gradiente de $D_\phi(\cdot, p)$ em x ,

ii. $D_\phi(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,

iii. $\nabla_1 D_\phi(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$,

iv. $\langle \nabla_1 D_\phi(x, y), x - z \rangle \geq (\frac{\nu+\mu}{2})(\|x - z\|_A^2 - \|y - z\|_A^2) + (\frac{\nu-\mu}{2})\|x - y\|_A^2$.

Prova. Veja [3, Proposição 2.1] e [9, Lema 2.1]. ■

1.4 Fejér Convergência

A seguir recordamos a definição de Fejér convergência para uma sequência. Consideremos A uma matriz $m \times n$, $m \geq n$, com posto completo. Como A tem posto completo, a função $(u, v) \rightarrow \langle A^T A u, v \rangle$ define um produto interno em \mathbb{R}^n , que denotamos por $\langle u, v \rangle_A$ com $\|u\|_A := \|A u\| = \langle A u, A u \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Definição 1.4.1 Uma sequência $\{z^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é dita Fejér Convergente para um conjunto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ com relação à distância $\|\cdot\|_A$, se para cada $u \in U$, verifica-se

$$\|z^{k+1} - u\|_A \leq \|z^k - u\|_A, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

No que segue, apresentamos um resultado que será importante para obter a convergência da sequência gerada pelo Algoritmo 4.2.1 estudado no capítulo 4.

Lema 1.4.1 Se $\{z^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é Fejér Convergente para um conjunto não vazio $U \subset \mathbb{R}^n$ com relação à distância $\|\cdot\|_A$, então $\{z^k\}$ é limitada. Além disso, se um ponto de acumulação z de $\{z^k\}$ pertence a U , então $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z$.

Prova. Note que (1.5) implica que $\|z^k - u\|_A \leq \|z^0 - u\|_A$ para todo $u \in U$, assim a sequência $\{z^k\}$ está contida em uma bola de centro u e raio $\|z^0 - u\|_A$, e portanto, ela é limitada. Para a segunda afirmação, considere $\{z^{k_j}\}$ como sendo uma subsequência de $\{z^k\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{k_j} = z$. Uma vez que $z \in U$, por (1.5) temos que a sequência $\{\|z^k - z\|\}$ é decrescente e não negativa, e, além disso, ela possui uma subsequência $(\{\|z^{k_j} - z\|_A\})$ que converge para zero. Então a sequência converge para zero, isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z\|_A = 0$, implicando que $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z$. ■

1.5 O Problema de Equilíbrio

Seja $C \subset \mathcal{H}$ um conjunto não vazio, convexo, fechado e $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção tal que para todo $x \in C$, $f(x, x) = 0$. O Problema de Equilíbrio $PE(f, C)$ consiste em:

$$PE(f, C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

O conjunto solução do $PE(f, C)$ será denotado por $S(f, C)$.

A teoria de Problemas de Equilíbrio nos fornece uma estrutura unificada, natural e inovadora para estudar uma ampla classe de problemas decorrentes em finanças, economia, análise de rede, transporte, elasticidade e otimização. Esta teoria tem testemunhado um crescimento expansivo em avanços teóricos e aplicativos em todas as disciplinas de ciências pura e aplicada.

Este problema contém como casos particulares, o problema de minimização convexa, o problema do ponto fixo, o problema de desigualdade variacional, o problema de complementaridade, o problema de equilíbrio de Nash, dentre outros.

Observação 1.5.1

- *Juntamente com o $PE(f, C)$, podemos considerar sua formulação dual (veja por exemplo [25]), que é encontrar um ponto $x^* \in C$ tal que $f(y, x^*) \leq 0 \quad \forall y \in C$.*
- *Denotaremos por $S^d(f, C)$ o conjunto solução do problema dual.*

Observação 1.5.2 *Em [12], tem sido estabelecido que se $f(., y)$ é fracamente semi-contínua superior para todo $y \in C$, $f(x, .)$ é convexa para todo $x \in C$ e C é fracamente compacto, então $S(f, C)$ é não vazio.*

Por todo o trabalho, vamos assumir que C é ilimitado, pois pelo resultado de Ky Fan (observação 1.5.2) temos que $S(f, C)$ é não vazio quando C é limitado.

1.5.1 Casos Particulares

Apresentaremos, a seguir, alguns casos particulares do $PE(f, C)$, veja por exemplo [5, 15]:

Problema de Minimização Convexa

Seja $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. O Problema de minimização convexa é definido como:

$$PMC(\varphi, C) \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ \varphi(x^*) \leq \varphi(y) \quad \forall y \in C. \end{cases} \quad (1.7)$$

Proposição 1.5.1 *Seja $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$ para todo $x, y \in C$. O ponto x^* é uma solução do $PMC(\varphi, C)$ se, e somente se, x^* for uma solução do $PE(f, C)$.*

Prova. Observe que:

$$x^* \in C \text{ é uma solução do } PMC(\varphi, C) \Leftrightarrow \varphi(x^*) \leq \varphi(y), \forall y \in C \Leftrightarrow f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C \Leftrightarrow x^* \text{ é solução do } PE(f, C). \quad \blacksquare$$

Problema do Ponto Fixo

Seja $T : C \rightarrow C$ uma aplicação dada. O Problema do ponto fixo é definido como:

$$PPF(T, C) \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ x^* = Tx^*. \end{cases} \quad (1.8)$$

Proposição 1.5.2 *Seja $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) := \langle x - Tx, y - x \rangle$ para todo $x, y \in C$. O ponto x^* é uma solução do $PPF(T, C)$ se, e somente se, x^* for uma solução do $PE(f, C)$.*

Prova. Seja $x^* \in C$ uma solução do $PPF(T, C)$. Assim, por definição, temos que $x^* = Tx^*$ e $f(x^*, y) := \langle x^* - Tx^*, y - x^* \rangle = 0$ para todo $y \in C$. Isto implica que $x^* \in S(f, C)$. Reciprocamente, se $x^* \in S(f, C)$, então

$$0 \leq f(x^*, y) = \langle x^* - Tx^*, y - x^* \rangle, \forall y \in C. \quad (1.9)$$

Fazendo $y = Tx^*$ em (1.9), obtemos:

$$0 \leq f(x^*, y) = \langle x^* - Tx^*, y - x^* \rangle = \langle x^* - Tx^*, Tx^* - x^* \rangle = -\|x^* - Tx^*\|^2 \leq 0. \quad (1.10)$$

Segue de (1.10) que $x^* = Tx^*$ e portanto x^* resolve o $PPF(T, C)$. ■

Problema de Desigualdade Variacional

Seja $T : C \rightarrow \mathcal{H}$ uma aplicação dada. O Problema de desigualdade variacional é definido como:

$$PDV(T, C) \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ \langle Tx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \end{cases} \quad (1.11)$$

Proposição 1.5.3 *Seja $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) := \langle Tx, y - x \rangle$ para todo $x, y \in C$. O ponto $x^* \in C$ é uma solução do $PDV(T, C)$ se, e somente se, x^* for uma solução do $PE(f, C)$.*

Prova. Observe que:

$$x^* \text{ é uma solução do } PDV(T, C) \Leftrightarrow \langle Tx^*, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C \Leftrightarrow f(x^*, y) \geq 0, \\ \forall y \in C \Leftrightarrow x^* \text{ é uma solução do } PE(f, C). \quad \blacksquare$$

Problema de Complementaridade

Seja C um cone convexo fechado, com $\bar{C} := \{\bar{x} \in \bar{\mathcal{H}} \mid \langle \bar{x}, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C\}$ denotando seu cone polar, onde $\bar{\mathcal{H}}$ é o espaço dual de \mathcal{H} . Seja $T : C \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ uma aplicação dada. O problema de complementaridade é definido como:

$$PC(T, C) \begin{cases} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ Tx^* \in \bar{C}, \langle Tx^*, x^* \rangle = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Proposição 1.5.4 *Seja $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) := \langle Tx, y - x \rangle$ para todo $x, y \in C$. O ponto $x^* \in C$ é uma solução do $PC(T, C)$ se, e somente se, x^* for uma solução do $PE(f, C)$.*

Prova. De fato, se vale $PE(f, C)$ faça $y = 2x^*$ e em seguida tome $y = 0$ para obter $\langle Tx^*, x^* \rangle = 0$ e dessa forma $\langle Tx^*, y \rangle \geq 0, \forall y \in C$, valendo então o $PC(T, C)$. Reciprocamente, se vale o $PC(T, C)$ então temos:

$$x^* \in C, Tx^* \in \bar{C}, \langle Tx^*, x^* \rangle = 0.$$

Ou seja,

$$\langle Tx^*, y - x^* \rangle = \langle Tx^*, y \rangle.$$

Como $Tx^* \in \bar{C}$, segue que $\langle Tx^*, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C$. Concluimos, dessa forma, que

$$f(x^*, y) := \langle Tx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

valendo assim o $PE(f, C)$. ■

Problema de Equilíbrio de Nash

Seja I um conjunto finito de índices que representa um conjunto de jogadores. Para cada $i \in I$, chamamos de C_i o conjunto de estratégias do i -ésimo jogador.

Seja $C := \prod_{i \in I} C_i$ o conjunto de todas as estratégias possíveis. Para cada $i \in I$, defina $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a função perda do i -ésimo jogador, dependendo das estratégias de todos jogadores. Para $x := (x_i)_{i \in I} \in C$ definimos $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Assim temos que $x = (x^i, x_i)$. O ponto $x^* = (x_i^*)_{i \in I} \in C$ é chamado ponto de Equilíbrio de Nash se, para todo $i \in I$ vale

$$f_i(x^*) \leq f_i(x^{*i}, y_i) \quad \forall y_i \in C_i. \quad (1.13)$$

Proposição 1.5.5 *Seja $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) := \sum_{i \in I} (f_i(x^i, y_i) - f_i(x)).$$

Então x^ é um ponto de Equilíbrio de Nash se, e somente se, x^* for uma solução do $PE(f, C)$.*

Prova. Se (1.13) é satisfeita para todo $i \in I$ é imediato que x^* é solução do $PE(f, C)$. Reciprocamente, se x^* é solução do $PE(f, C)$, tomemos para cada $i \in I$, $y = (x^{*i}, y_j)$ onde

$$y_j = \begin{cases} y_i \in C_i, & \text{se } i = j \\ x_i^*, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.14)$$

Assim, para cada $i \in I$, teremos:

$$0 \leq f(x^*, y) = \sum_{i \in I} (f_i(x^{*i}, y_i) - f_i(x^*)) = f_i(x^{*i}, y_i) - f_i(x^*).$$

Portanto, (1.13) é verificada para todo $i \in I$. ■

1.5.2 Aplicações

O Problema de Equilíbrio fornece uma abordagem unificada para vários problemas que aparecem em Economia, Física Matemática, Pesquisa Operacional, dentre outros campos.

Para ilustrar a aplicabilidade do $PE(f, C)$, apresentaremos três exemplos.

O Problema de poluição de uma bacia hidrográfica (sugerido em [27])

Consideremos três jogadores, $j = 1, 2, 3$, localizados ao longo de um rio. Cada agente é comprometido com uma atividade econômica em um nível escolhido x_j , no qual os jogadores devem satisfazer as circunstâncias ambientais ajustadas por uma autoridade local.

Os poluentes podem ser expelidos no rio, onde se dispersam. Duas estações de monitoração, $l = 1, 2$, são situadas ao longo do rio, em que a autoridade local ajustou níveis de concentração máximos dos poluentes.

A restrição, na poluição, imposta pela autoridade local, na localização l , é:

$$q_l(x) = \sum_{j=1}^3 u_{jl} e_j x_j \leq K_l, l = 1, 2,$$

na qual os u_{jl} são coeficientes de deterioração e do transporte do jogador j para a localização l , e e_j é o coeficiente de emissão do jogador j , ambos são tabelados.

Dessa forma, o conjunto das restrições é definido como:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : q_l(x) \leq K_l, l = 1, 2\}.$$

As constantes econômicas d_1 e d_2 determinam a lei inversa da demanda e são tabeladas assim como os valores para as constantes c_{1j} e c_{2j} e $K_l = 100, l = 1, 2$.

O rendimento para o jogador j é:

$$R_j(x) = [d_1 - d_2(x_1 + x_2 + x_3)]x_j$$

com despesa

$$F_j(x) = (c_{1j} + c_{2j}x_j)x_j.$$

Assim, o lucro líquido para o jogador j é:

$$\begin{aligned} f_j(x) &= R_j(x) - F_j(x) \\ &= [d_1 - d_2(x_1 + x_2 + x_3) - c_{1j} - c_{2j}x_j]x_j. \end{aligned}$$

A bifunção de equilíbrio, neste caso, é dada por:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sum_{j=1}^3 (f_j(x^j, y_j) - f_j(x)) \\
 &= [d_1 - d_2(y_1 + x_2 + x_3) - c_{11} - c_{21}y_1]y_1 \\
 &+ [d_1 - d_2(x_1 + y_2 + x_3) - c_{12} - c_{22}y_2]y_2 \\
 &+ [d_1 - d_2(x_1 + x_2 + y_3) - c_{13} - c_{23}y_3]y_3.
 \end{aligned}$$

A seguir, apresentaremos dois exemplos na área de economia, pois a origem do estudo do Problema de Equilíbrio veio da Economia, onde podemos citar, como exemplo clássico, o problema de encontrar o ponto de equilíbrio receita-custo e oferta-demanda. Os gráficos de equilíbrio são frequentemente utilizados na Administração e na Economia para analisar as implicações de várias decisões de fixação de preços e de produção.

Receita e Custo

Na Figura 1.5.1 seguinte, a reta RT representa a receita total da firma para diferentes quantidades vendidas, e a reta CT representa o custo total, enquanto CF e CV indicam respectivamente o custo fixo e custo variável de produção. O ponto PE , que é o ponto onde as retas RT e CT se intersectam, é o **ponto de equilíbrio**, e sua abscissa indica a receita mínima (RM) necessária para se ter lucro nulo. A importância desse ponto está no fato de que, qualquer que seja a receita, estando ela à esquerda dele, tem-se prejuízo, ao passo que, estando à direita, tem-se lucro.

Se $LT(x)$ é o lucro total obtido com produção e venda de x unidades de um produto, então $LT(x) = RT(x) - CT(x)$.

Interpretando o ponto de equilíbrio como um minimizador do $|LT|$, percebe-se que x^* é um ponto de equilíbrio se, e somente se, x^* for solução do problema de equilíbrio definido pela bifunção $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = |LT(y)| - |LT(x)| \quad \text{e } C = \mathbb{R}_+.$$

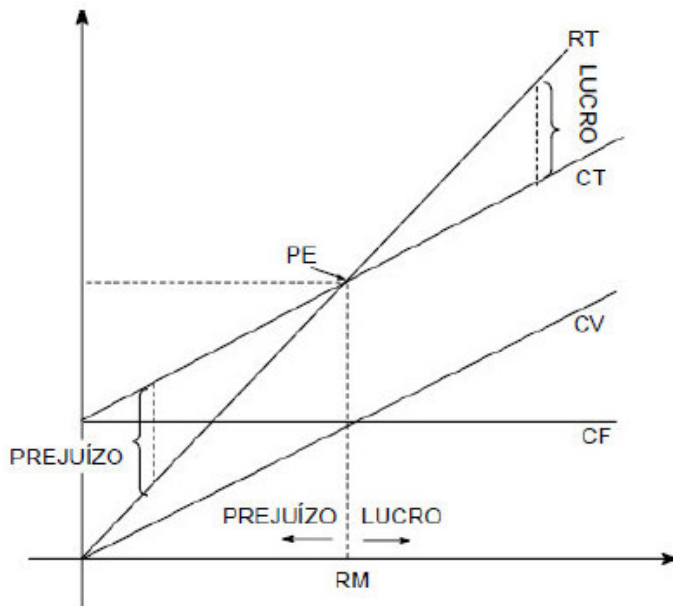


Figura 1.5.1: Ponto de Equilíbrio entre receita e custo.

Oferta e Demanda (veja por exemplo [29])

O mercado para uma certa mercadoria consta da indústria e dos consumidores da mercadoria (que podem incluir empresas, governo e consumidores individuais). A equação de oferta do mercado é determinada a partir das equações de oferta das companhias integrantes da indústria, e a equação de demanda do mercado é determinada através das equações de demanda de todos os consumidores. A seguir, mostraremos como determinar o preço de equilíbrio e a quantidade de equilíbrio de um mercado.

O Equilíbrio de Mercado ocorre quando a quantidade de mercadoria demandada, a um dado preço, é igual à quantidade de mercadoria oferecida àquele preço. Isto é, o equilíbrio de mercado ocorre quando tudo que é oferecido para a venda de um determinado produto é comprado.

Quando ocorre o equilíbrio de mercado, a quantidade de mercadoria produzida é chamada quantidade de equilíbrio e o preço da mercadoria é chamado preço de equilíbrio. A quantidade de equilíbrio e o preço de equilíbrio são determinados, resolvendo-se simultaneamente as equações de demanda e oferta do mercado.

Na figura 1.5.2 seguinte, vamos supor que o preço da mercadoria fosse p_1 ; então a indústria planejaria vender x_{S_1} unidades, e os consumidores planejariam comprar x_{D_1} unidades, e assim faltariam $(x_{D_1} - x_{S_1})$ unidades aos consumidores. Isto forçaria o preço a subir para p_E e a quantidade oferecida cresceria para x_E unidades. Con-

tudo, se o preço fosse p_2 , os consumidores planejavam comprar x_{D_2} unidades e a indústria planejaria vender x_{S_2} unidades. Consequentemente, restariam à indústria $(x_{S_2} - x_{D_2})$ unidades não vendidas e assim o preço teria que cair para p_E , e a quantidade ofertada seria reduzida a x_E unidades.

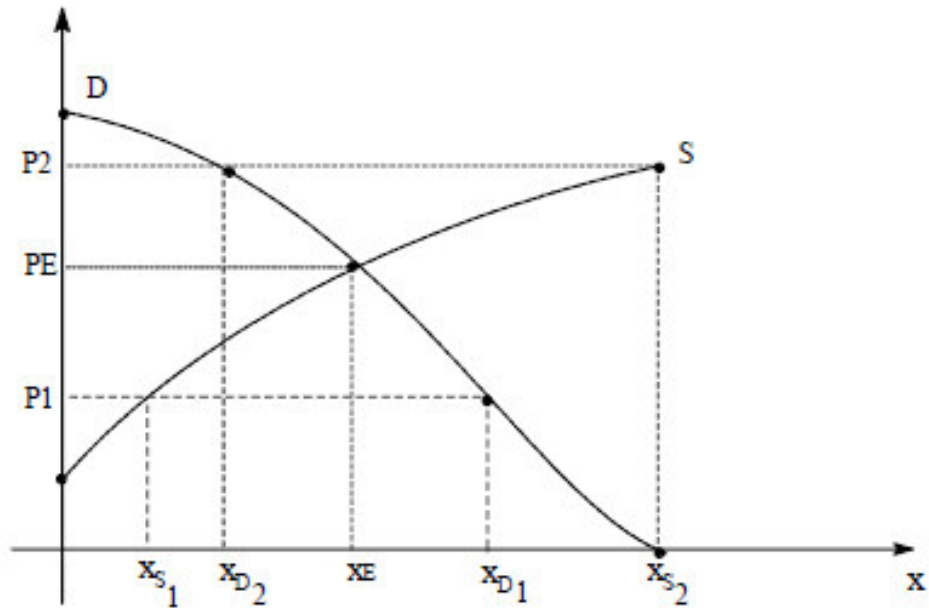


Figura 1.5.2: Ponto de Equilíbrio entre oferta e demanda.

Capítulo 2

Uma Regularização Tipo-Tikhonov para o Problema de Equilíbrio

Neste capítulo, vamos mostrar que a regularização tipo-Tikhonov, dada por [13], pode ser estendida para o $\text{PE}(f, C)$ em dimensão infinita. Inicialmente, apresentamos nossas hipóteses básicas para uma bifunção $\psi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$:

- H1.** $\psi(\cdot, y) : C \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua superior para todo $y \in C$.
- H2.** $\psi(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e fracamente semicontínua inferior para todo $x \in C$.
- H3.** $\psi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é fortemente monótona com módulo $\beta > 0$.
- H4.** $\limsup_{\|y\| \rightarrow \infty} \frac{|\psi(x, y)|}{\|y - x\|} < +\infty \quad \forall x \in C$.
- H5.** Para qualquer sequência $\{x^n\} \subset C$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\| = +\infty$, existem $u \in C$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(x^n, u) \leq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Agora, definimos nosso procedimento de regularização para o problema $\text{PE}(f, C)$. Para isto, consideremos $\lambda > 0$ e tomemos uma bifunção de equilíbrio $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ com módulo $\beta > 0$, fortemente monótona.

A partir de [13], definimos a bifunção regularizada $f_\lambda : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f_\lambda(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y). \quad (2.1)$$

Note também que $f_\lambda(x, x) = 0 \quad \forall x \in C$, isto é, f_λ é uma bifunção de equilíbrio.

2.1 Caso monótono

A seguir, mostraremos que o $\text{PE}(f_\lambda, C)$ tem uma única solução, quando f é monótona. Primeiro, relembremos um importante resultado

Teorema 2.1.1 *Assuma que ψ é pseudomonótona, satisfazendo H1, H2 e H5, então $S(\psi, C)$ é não vazio.*

Prova. Veja [16, Teorema 4.3]. ■

Teorema 2.1.2 *Assuma que f é monótona e satisfaz H1-H2 e g satisfaz H1-H3. Então para qualquer $\lambda > 0$, $PE(f_\lambda, C)$ tem uma única solução.*

Prova. Segue facilmente de (2.1) que f_λ satisfaz H1-H2. Além disso, como f é monótona e g satisfaz H3, temos que f_λ é fortemente monótona, em particular, f_λ é pseudomonótona. Para aplicar o Teorema 2.1.1, devemos mostrar que f_λ satisfaz a hipótese H5. Para isto, considere uma sequência $\{x^n\} \subset C$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\| = +\infty$. Mostraremos que existem $u \in C$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_\lambda(x^n, u) \leq 0 \quad \forall n \geq n_0$. Como C é não vazio, tome $u \in C$.

Note que:

$$f_\lambda(x^n, u) = f(x^n, u) + \lambda g(x^n, u). \quad (2.2)$$

Usando o fato que f é monótona e g satisfaz H3, segue de (2.2) que:

$$f_\lambda(x^n, u) \leq -[f(u, x^n) + \lambda g(u, x^n)] - \lambda \beta \|x^n - u\|^2. \quad (2.3)$$

Para cada $x \in C$, defina $h_x : C \rightarrow \mathbb{R}$ com $h_x(y) = h(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Note que $h(x, \cdot)$ é convexa e fracamente semicontínua inferior. Assim, (2.3) resulta em:

$$f_\lambda(x^n, u) \leq -h(u, x^n) - \lambda \beta \|x^n - u\|^2. \quad (2.4)$$

Tome qualquer elemento (\bar{x}, \bar{v}) no gráfico do subdiferencial ∂h_u que é não vazio, uma vez que ∂h_u é monótono maximal. Pela definição de subdiferencial, temos:

$$\langle \bar{v}, x^n - \bar{x} \rangle \leq h_u(x^n) - h_u(\bar{x}) = h(u, x^n) - h(u, \bar{x}). \quad (2.5)$$

(2.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} -h(u, x^n) &\leq \langle \bar{v}, \bar{x} - x^n \rangle - h(u, \bar{x}) \\ &\leq \|\bar{v}\| \|\bar{x} - x^n\| - h(u, \bar{x}) \\ &\leq \|\bar{v}\| \|\bar{x} - u\| + \|\bar{v}\| \|u - x^n\| - h(u, \bar{x}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned} f_\lambda(x^n, u) &\leq \|\bar{v}\| \|\bar{x} - u\| + \|\bar{v}\| \|u - x^n\| - h(u, \bar{x}) - \lambda \beta \|x^n - u\|^2 \\ &= \|x^n - u\| [\|\bar{v}\| - \lambda \beta \|x^n - u\|] + \|\bar{v}\| \|\bar{x} - u\| - h(u, \bar{x}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Uma vez que $\|x^n\| \rightarrow +\infty$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - u\| = +\infty$; assim, segue de (2.7) que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\lambda(x^n, u) = -\infty$, porque $\lambda\beta > 0$. Portanto, para n bastante grande, segue que $f_\lambda(x^n, u) \leq 0$. Com isto, mostramos que f_λ satisfaz todas as hipóteses do Teorema 2.1.1, portanto, $S(f_\lambda, C)$ é não vazio.

Mostraremos agora que a solução é única. Suponha que \tilde{x} e \hat{x} são soluções do $PE(f_\lambda, C)$. Segue de (2.1) que:

$$0 \leq f_\lambda(\tilde{x}, \hat{x}) = f(\tilde{x}, \hat{x}) + \lambda g(\tilde{x}, \hat{x}). \quad (2.8)$$

$$0 \leq f_\lambda(\hat{x}, \tilde{x}) = f(\hat{x}, \tilde{x}) + \lambda g(\hat{x}, \tilde{x}). \quad (2.9)$$

Adicionando (2.8) com (2.9) e usando o fato que f é monótona e g satisfaz $H3$, obtemos:

$$0 \leq f(\tilde{x}, \hat{x}) + f(\hat{x}, \tilde{x}) + \lambda[g(\tilde{x}, \hat{x}) + g(\hat{x}, \tilde{x})] \leq -\lambda\beta\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 \leq 0. \quad (2.10)$$

Segue de (2.10) que $\lambda\beta\|\tilde{x} - \hat{x}\| = 0$, portanto, $\hat{x} = \tilde{x}$, pois $\lambda\beta > 0$. ■

Consideremos uma sequência de parâmetros de regularização positivos $\{\lambda_k\}$ e construa uma sequência de soluções $\{x^k\} := \{x(\lambda_k)\} \subset C$, do problema $PE(f_{\lambda_k}, C)$, com $f_{\lambda_k} : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_{\lambda_k}(x, y) = f(x, y) + \lambda_k g(x, y). \quad (2.11)$$

Denotemos por $S(f_{\lambda_k}, C)$ o conjunto solução do problema $PE(f_{\lambda_k}, C)$.

Abaixo, mostraremos nosso principal resultado para o caso monótono.

Teorema 2.1.3 *Suponha que f é monótona e satisfaz $H1-H2$ e g satisfaz $H1-H4$. Se $\{x^k\}$ é uma sequência de soluções dos problemas $PE(f_{\lambda_k}, C)$ e $\lambda_k \rightarrow 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A sequência $\{x^k\}$ é limitada.*

(ii) *$S(f, C)$ é não vazio.*

Prova. Do Teorema 2.1.2 com $\lambda = \lambda_k$, segue que a sequência $\{x^k\}$ está bem definida.

Primeiro, assumamos que $\{x^k\}$ é limitada. Então, temos que existe uma subsequência $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ que converge fracamente para algum $\bar{x} \in C$, isto é, $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, com $f_{\lambda_{k_j}}(x^{k_j}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$. Assim, temos:

$$0 \leq f_{\lambda_{k_j}}(x^{k_j}, y) = f(x^{k_j}, y) + \lambda_{k_j} g(x^{k_j}, y). \quad (2.12)$$

Passando ao limite em (2.12) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} [f(x^{k_j}, y) + \lambda_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} f(x^{k_j}, y) + \limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_{k_j} g(x^{k_j}, y). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como $\lambda_{k_j} \rightarrow 0$, usando *H1*, segue de (2.13) que

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Portanto $S(f, C) \neq \emptyset$.

Tome agora $x^k \in S(f_{\lambda_k}, C)$ e $\bar{x} \in S(f, C)$. Assim temos:

$$0 \leq f_{\lambda_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \lambda_k g(x^k, \bar{x}) \quad e \quad (2.14)$$

$$0 \leq f(\bar{x}, x^k). \quad (2.15)$$

Adicionando (2.14) com (2.15) e usando a monotonicidade de f , obtemos:

$$0 \leq f(\bar{x}, x^k) + f(x^k, \bar{x}) + \lambda_k g(x^k, \bar{x}) \leq \lambda_k g(x^k, \bar{x}). \quad (2.16)$$

Por outro lado, sabemos que g é fortemente monótona com módulo $\beta > 0$. Assim (2.16) implica que:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \|x^k - \bar{x}\|^2 &\Rightarrow \frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \leq -\beta \|x^k - \bar{x}\| \\ &\Rightarrow -\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \geq \beta \|x^k - \bar{x}\| \\ &\Rightarrow \frac{|g(\bar{x}, x^k)|}{\|x^k - \bar{x}\|} \geq \beta \|x^k - \bar{x}\|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Suponha que $\{x^k\}$ não é limitada. Neste caso existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j}\| = +\infty$. Segue de (2.17) que

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{|g(\bar{x}, x^{k_j})|}{\|x^{k_j} - \bar{x}\|} \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} \beta \|x^{k_j} - \bar{x}\| = +\infty. \quad (2.18)$$

Note que (2.18) contradiz *H4*. Concluimos, portanto, que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. ■

2.2 Caso não monótono

No caso de f monótona, o problema perturbado $PE(f_\lambda, C)$ é fortemente monótono. Assim $PE(f_\lambda, C)$ tem uma única solução. Quando f é pseudomonótona, o problema regularizado pode não ser fortemente monótono, ou até mesmo não pseudomonótono.

A partir de agora, C_n denotará a interseção de C com a bola $B(0, n)$ de raio n centrada em 0 . Note que C_n é fracamente fechado e também limitado, porque está contido na bola $B(0, n)$, portanto C_n é fracamente compacto, veja por exemplo, [26].

Lema 2.2.1 *Assuma que f e g satisfazem H1-H2. Então para cada $\lambda > 0$, existe $\bar{x} \in C_n$ tal que $f_\lambda(\bar{x}, y) \geq 0$, para todo $y \in C_n$.*

Prova. Fixe $\lambda > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Segue de (2.1) que f_λ satisfaz H1-H2.

Defina $S_n(y) : C_n \rightarrow P(\mathcal{H})$ como $S_n(y) := \{x \in C_n : f_\lambda(x, y) \geq 0\}$. Note que é suficiente mostrar que $\bigcap_{y \in C_n} S_n(y) \neq \emptyset$.

Mostraremos agora que $S_n(y)$ é fracamente compacto. Observe que $S_n(y)$ é fracamente fechado em vista de H1, e limitado porque está contido em C_n . Assim $S_n(y)$ é fracamente compacto para todo $y \in C_n$.

Abaixo, provaremos que $S_n(y) : C_n \rightarrow P(\mathcal{H})$ é uma aplicação KKM.

Seja $\{y_i : i \in I\}$ um subconjunto finito de C_n , onde $I \subset \mathbb{N}$ e seja $\xi \in \text{co}\{y_i : i \in I\}$; então $\xi = \sum_{i \in I} \mu_i y_i$, com $\mu_i \geq 0$ e $\sum_{i \in I} \mu_i = 1$.

Suponha que $f_\lambda(\xi, y_i) < 0$ para todo $i \in I$. Uma vez que nem todos $\mu_i = 0$, temos que

$$\sum_{i \in I} \mu_i f_\lambda(\xi, y_i) < 0.$$

Agora,

$$0 = f_\lambda(\xi, \xi) \leq \sum_{i \in I} \mu_i f_\lambda(\xi, y_i) < 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, $f_\lambda(\xi, y_i) \geq 0$ para algum $i \in I$.

Assim, $\xi \in S_n(y_i)$ para algum $i \in I$. Como $\xi \in \text{co}\{y_i : i \in I\}$ foi arbitrário, segue que $\text{co}\{y_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} S_n(y_i)$.

Como isto, ocorre para qualquer subconjunto não vazio $I \subset \mathbb{N}$ e $S_n(y_i)$ é fracamente compacto, segue pelo Lema 1.1.2 que $\bigcap_{y \in C_n} S_n(y) \neq \emptyset$. ■

No teorema seguinte, vamos mostrar que $S(f_\lambda, C)$ é não vazio, quando f é não monótona.

Teorema 2.2.1 *Assuma que f satisfaz H1, H2, H5 e g satisfaz H1-H4. Então para qualquer $\lambda > 0$, $S(f_\lambda, C)$ é não vazio.*

Prova. É imediato que f_λ satisfaz *H1-H2*. Tome $\lambda > 0$, $\{x^n\} \subset C$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\| = +\infty$ e $u \in C$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x^n, u) &= f(x^n, u) + \lambda g(x^n, u) \\
&\leq f(x^n, u) - \lambda g(u, x^n) - \lambda \beta \|x^n - u\|^2 \\
&= f(x^n, u) + \lambda \|x^n - u\| \left[\frac{-g(u, x^n)}{\|x^n - u\|} - \beta \|x^n - u\| \right] \\
&\leq f(x^n, u) + \lambda \|x^n - u\| \left[\frac{|g(u, x^n)|}{\|x^n - u\|} - \beta \|x^n - u\| \right]. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Tomando o limite em (2.19) com $n \rightarrow \infty$ e usando *H4* e *H5*, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x^n, u) \leq 0$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(u, x^n)|}{\|x^n - u\|} < +\infty$; assim $f_\lambda(x^n, u) \leq 0 \quad \forall n \geq n_0$. Portanto, para cada $\lambda > 0$, temos que f_λ satisfaz *H5*.

Pelo Lema 2.2.1, vimos que existe $x^n \in C_n$ tal que $f_\lambda(x^n, y) \geq 0$ para todo $y \in C_n$, portanto x^n resolve $PE(f_\lambda, C_n)$.

Vamos agora analisar dois casos:

(i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^n\| < n$. Neste caso, $x^n \in \text{int}(B(0, n))$, e pelo Lema 2.2.1 x^n resolve $PE(f_\lambda, C_n) = PE(f_\lambda, C \cap B(0, n))$. Pelo item (ii) do Lema 1.1.2, segue que x^n resolve $PE(f_\lambda, C)$.

(ii) $\|x^n\| \rightarrow +\infty$. Neste caso, *H5* assegura a existência de $u \in C$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_\lambda(x^n, u) \leq 0, \forall n \geq n_0. \quad (2.20)$$

Tome $\bar{n} \geq n_0$ tal que $\|u\| < \bar{n}$. Então $u \in C \cap B(0, \bar{n}) = C_{\bar{n}}$ e uma vez que $x^{\bar{n}}$ resolve $PE(f_\lambda, C_{\bar{n}})$, segue que

$$f_\lambda(x^{\bar{n}}, u) \geq 0. \quad (2.21)$$

Comparando (2.20) e (2.21), obtemos

$$f_\lambda(x^{\bar{n}}, u) = 0. \quad (2.22)$$

De (2.22), temos

$$f_\lambda(x^{\bar{n}}, u) = 0 \leq f_\lambda(x^{\bar{n}}, y), \forall y \in C_{\bar{n}}. \quad (2.23)$$

Agora consideremos a função convexa $f_\lambda^{\bar{n}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_\lambda^{\bar{n}}(y) = f_\lambda(x^{\bar{n}}, y)$. Como $u \in C \cap B(0, \bar{n}) = C_{\bar{n}}$, u minimiza $f_\lambda^{\bar{n}}$ em $C_{\bar{n}}$, por (2.23). Uma vez que $\|u\| < \bar{n}$, $u \in \text{int}B(0, \bar{n})$. Segue pelo item (i) do Lema 1.1.2 que u minimiza $f_\lambda^{\bar{n}}$

em C . Segue de (2.22) que:

$$\begin{aligned} 0 = f_\lambda(x^{\bar{n}}, u) &= f_\lambda^{\bar{n}}(u) \\ &\leq f_\lambda^{\bar{n}}(y) \\ &= f_\lambda(x^{\bar{n}}, y), \forall y \in C, \end{aligned} \quad (2.24)$$

De (2.24), concluímos que $x^{\bar{n}}$ resolve $PE(f_\lambda, C)$. ■

No próximo teorema, estabelecemos nosso principal resultado para o caso não monótono.

Teorema 2.2.2 *Suponha que f é pseudomonótona e satisfaz $H1, H2, H5$, e g satisfaz $H1-H4$. Se $\{x^k\}$ é uma sequência de soluções de (2.11) e $\lambda_k \rightarrow 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A sequência $\{x^k\}$ é limitada.*

(ii) *$S(f, C)$ é não vazio.*

Prova. Pelo Teorema 2.2.1 com $\lambda = \lambda_k$, temos que a sequência $\{x^k\}$ está bem definida. A limitação de $\{x^k\}$ implica que deve existir ao menos uma subsequência $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ convergindo fracamente para algum $\bar{x} \in C$.

Como $f(\cdot, y)$ e $g(\cdot, y)$ satisfazem $H1$ e usando o fato que $\lambda_k \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} f_{\lambda_{k_j}}(x^{k_j}, y) &= \limsup_{j \rightarrow \infty} [f(x^{k_j}, y) + \lambda_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} f(x^{k_j}, y) + \limsup_{j \rightarrow \infty} [\lambda_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq f(\bar{x}, y), \forall y \in C. \end{aligned} \quad (2.25)$$

De (2.25), temos que $S(f, C) \neq \emptyset$.

Agora, tome $\bar{x} \in S(f, C)$. Vamos mostrar que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. Como $x^k \in S(f_{\lambda_k}, C)$, temos:

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0 \quad e \quad f_{\lambda_k}(x^k, \bar{x}) \geq 0. \quad (2.26)$$

De (2.26) concluímos que $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$, porque f é pseudomonótona.

Note que:

$$\begin{aligned} 0 \leq f_{\lambda_k}(x^k, \bar{x}) &= f(x^k, \bar{x}) + \lambda_k g(x^k, \bar{x}) \\ &\leq \lambda_k g(x^k, \bar{x}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

De (2.27) obtemos que $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$. Usando H3, temos

$$g(x^k, \bar{x}) + g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \|x^k - \bar{x}\|^2. \quad (2.28)$$

Uma vez que $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, segue de (2.28) que $g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \|x^k - \bar{x}\|^2$.

A conclusão que $\{x^k\}$ é limitada é obtida usando o mesmo argumento da prova da segunda parte do Teorema 2.1.3. \blacksquare

Observação 2.2.1 Em [13] tem sido proposto um método de regularização tipo (2.11) em \mathbb{R}^n , onde é assumido que a bifunção g satisfaz a seguinte condição:

$$\exists \delta > 0, \hat{x} \in C : |g(x, y)| \leq \delta \|x - \hat{x}\| \|y - x\|, \forall x, y \in C. \quad (2.29)$$

Note que, (2.29) implica H4. A seguir, apresentamos um exemplo onde a bifunção g satisfaz H4, mas não satisfaz (2.29).

Exemplo 2.2.1 Consideremos $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x(y - x) + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$, onde $C := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. De fato, temos que

$$\limsup_{|y| \rightarrow \infty} \frac{|g(x, y)|}{|y - x|} = \limsup_{|y| \rightarrow \infty} \left[\frac{x(y - x)}{|y - x|} + \frac{\ln(x)}{|y - x|} - \frac{\ln(y)}{|y - x|} \right] = x,$$

portanto, g satisfaz H4.

Por outro lado, assuma que g verifica (2.29) para algum $\delta > 0$ e $\hat{x} \geq 1$. Obtemos que $|g(\hat{x}, y)| = 0$, $\forall y \in C$, mas

$$\limsup_{|y| \rightarrow \infty} |g(\hat{x}, y)| = \limsup_{|y| \rightarrow \infty} |(y - \hat{x})[\hat{x} + \ln\left(\frac{\hat{x}}{y}\right)]| = +\infty,$$

o que é uma contradição.

Observação 2.2.2 Agora, apresentamos uma classe de bifunções g fortemente monótona satisfazendo H4. Para chegar ao nosso objetivo, consideremos um operador $T : C \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ fortemente monótono e uma função $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{\|y\| \rightarrow +\infty} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{\|y - x\|} < +\infty.$$

Então, defina $g(x, y) := \langle T(x), y - x \rangle + \phi(x) - \phi(y)$. De fato, nossa conclusão segue da desigualdade triangular e desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Capítulo 3

O Método do Ponto Proximal para o Problema de Equilíbrio

Neste capítulo, fazemos uma breve revisão bibliográfica sobre o Método do Ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilíbrio. A seguir, apresentaremos a versão exata do algoritmo conhecido [14, 17, 21, 24, 33, 37] como o Algoritmo do Ponto Proximal para resolver o $PE(f, C)$.

Algoritmo do Ponto Proximal para o Problema de Equilíbrio (APPPE)

1. Dado $x^0 \in C$, $k := 0$. Considere $\{\lambda_k\} \subset (0, +\infty)$;
2. Dado $x^k \in C$, encontre $x^{k+1} \in C$ tal que:

$$f(x^{k+1}, y) + \lambda_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.1)$$

Nas seções subsequentes, descrevemos as variantes do APPPE encontradas na literatura.

3.1 Um Algoritmo para Problema de Equilíbrio (Moudafi e Théra, 1999)

De acordo com nossa pesquisa bibliográfica em [33], pela primeira vez, foi proposto o Algoritmo Proximal para resolver o Problema de equilíbrio.

Algoritmo 3.1.1 Dados $\rho_k \in \mathbb{R}_+$ e $x^k \in C \subset \mathcal{H}$, obtenha $x^{k+1} \in C$ tal que:

$$f(x^{k+1}, y) + \langle G(x^k) + \rho_k^{-1}(h'(x^{k+1}) - h'(x^k)), y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (3.2)$$

onde h' é a derivada de uma função estritamente convexa sobre C e $G : C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua.

Observe que para $G \equiv 0$ e $h(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ em (3.2) temos o seguinte **Algoritmo do Ponto Proximal para o PE(f, C)**:

Dado $x^k \in C$, encontre $x^{k+1} \in C$ tal que:

$$\rho_k f(x^{k+1}, y) + \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

A seguir apresentamos um resultado de convergência para o Algoritmo 3.1.1:

Teorema 3.1.1 *Seja $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção monótona, hemicontínua superior tal que $f(x, \cdot)$ é convexa e semicontínua inferior para todo $x \in C$. Seja h fortemente convexa sobre C (com módulo α) e sua derivada, h' , é Lipschitz contínua (com módulo β). Suponhamos que G é coerciva sobre C (com módulo γ), isto é, existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq \gamma \|G(x) - G(y)\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

Então, existe uma única solução x^{k+1} para (3.2). Além disso, se $0 < \rho < 2\alpha\gamma$, então a sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para uma solução do PE(f, C).

Prova. Veja [33, Teorema 1]. ■

3.2 Algoritmo Inexato(Konnov, 2003)

Em [21], foi apresentado o seguinte esquema iterativo para resolver o PE(f, C) com $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$.

Algoritmo 3.2.1

$$\text{Escolha } x^0 \in C, k := 0. \tag{3.3}$$

Dado $x^k \in C$, obtenha:

$$x^{k+1} \in C, \|x^{k+1} - \tilde{x}^{k+1}\| \leq \delta_{k+1}, \tag{3.4}$$

onde

$$\delta_{k+1} > 0, \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty, \tag{3.5}$$

$$f(\tilde{x}^{k+1}, y) + \lambda_k \langle \tilde{x}^{k+1} - x^k, y - \tilde{x}^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{3.6}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$

Observação 3.2.1

Note que cada iteração x^{k+1} é uma aproximação da solução exata \tilde{x}^{k+1} definida por (3.4).

No que segue, incluímos o principal resultado de convergência obtido em [21].

Teorema 3.2.1 *Assuma as seguintes hipóteses:*

- (i.) $C \subset A$, onde A é um conjunto convexo e aberto em \mathbb{R}^n .
- (ii.) $f : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma bifunção contínua e $f(x, \cdot)$ é convexa para cada $x \in A$.
- (iii.) O problema de Equilíbrio Dual tem solução.
- (iv.) A sequência $\{x^k\}$ gerada por (3.4)-(3.6) é infinita.

Então:

1. $\{x^k\}$ tem pontos de acumulação e todos estes pontos pertencem a $S(f, C)$.
2. $S(f, C) = S^d(f, C) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^* \in S(f, C)$.

Prova. Veja [21, Teorema 2.1]. ■

3.3 Algoritmo Exato(Noor, 2004)

Em [37], foi apresentado o seguinte método proximal para resolver o problema de equilíbrio em espaços de Hilbert de dimensão finita, isto é, com $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$.

Algoritmo 3.3.1 *Para um dado $x^0 \in \mathcal{H}$, calcule a solução aproximada x^{k+1} pelo esquema iterativo*

$$f(x^{k+1}, y) + \lambda_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C$$

O próximo teorema estabelece a convergência do Algoritmo 3.3.1.

Teorema 3.3.1 *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão finita. Assuma também que f é uma bifunção pseudomonótona. Se x^{k+1} é a solução aproximada obtida do Algoritmo 3.3.1 e $x^* \in C$ é solução do $PE(f, C)$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$*

Prova. Veja [37, Teorema 3.2]. ■

Observação 3.3.1 *Apesar de não mencionada nas hipóteses, percebe-se que a continuidade da bifunção f é assumida na prova de convergência do Teorema 3.2 de [37].*

3.4 Algoritmo Exato(Iusem e Sosa, 2010)

Em [14], foi analisado um método proximal exato para o problema de equilíbrio em espaços de Hilbert. O principal resultado mostra que a sequência gerada pelo algoritmo proposto converge fracamente para uma solução do $PE(f, C)$.

Algoritmo 3.4.1 Escolha $x^0 \in C$ e construa a sequência $\{x^k\} \subset C$ como segue:

Dado x^k , obtenha x^{k+1} tal que

$$f(x^{k+1}, y) + \lambda_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (3.7)$$

com $\{\lambda_k\} \subset (\theta, \bar{\lambda})$; $\theta \geq 0$; $\bar{\lambda} > 0$.

O resultado abaixo estabelece a convergência do Algoritmo 3.4.1.

Teorema 3.4.1 Assuma as seguintes hipóteses:

- (i.) $f(\cdot, y)$ é semicontínua superior para cada $y \in C$.
- (ii.) $f(x, \cdot)$ é convexa e semicontínua inferior para cada $x \in C$.
- (iii.) Para $x, y \in C$, se $f(x, y) \geq 0$ então $f(y, x) \leq 0$.
- (iv.) Existe $\theta \geq 0$ tal que $f(x, y) + f(y, x) \leq \theta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C$.
- (v.) O $PE(f, C)$ tem solução. Então:

1. A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo algoritmo 3.4.1 é limitada e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

2. $\{x^k\} \subset C$ é uma sequência tal que $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y) \geq 0 \quad \forall y \in C$.

Além disso, se $f(\cdot, y)$ é fracamente semicontínua superior para todo $y \in C$, então $\{x^k\}$ é fracamente convergente para alguma solução \hat{x} do $PE(f, C)$.

Prova. Veja [14, Teorema 1]. ■

A seguir, apresentamos um algoritmo extragradiante para o Problema de Equilíbrio. Este método baseia-se em um termo quadrático proximal interior que substitui o termo quadrático habitual. Isto leva a um algoritmo do tipo extragradiante proximal interior.

3.5 Algoritmo Extragradiante Proximal Interior(Nguyen e Jean-Jaques, 2009)

Em [34], foi proposto um algoritmo extragradiante proximal interior para resolver o Problema de Equilíbrio, em \mathbb{R}^n . Neste algoritmo, cada passo é obtido resolvendo um problema de minimização irrestrito.

Algoritmo 3.5.1

0. Tome $x^0 \in C$, escolha $c_0 > 0$ e um par de parâmetros positivos (ν, μ) tal que $\nu > \mu$ e defina $k = 0$. A correspondente função distância será denotada por D_ϕ . (Veja capítulo 4).

1. Resolva o programa convexo proximal interior

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \{c_k f(x^k, y) + D_\phi(y, x^k)\},$$

para obter sua única solução y^k . Se $y^k = x^k$, então pare: x^k é uma solução do $PE(f, C)$. Do contrário vá para o passo 2.

2. Resolva o programa convexo proximal interior

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \{c_k f(y^k, y) + D_\phi(y, x^k)\},$$

para obter sua única solução x^{k+1} .

3. Faça $k := k + 1$, escolha $c_k > 0$ e volte para o passo 1.

O teorema seguinte mostra a convergência do Algoritmo 3.5.1.

Teorema 3.5.1 *Assuma que $\nu > 5\mu$ e que existem dois parâmetros positivos c_1 e c_2 tal que*

$$\forall x, y, z \in C \quad f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|y - x\|^2 - c_2 \|z - y\|^2.$$

Então ocorre as seguintes afirmações:

(i) Se $x^* \in S^d(f, C)$, então

$$\Delta(x^k) - \Delta(x^{k+1}) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2\mu + c_k c_1}{\nu - \mu}\right) \|y^k - x^k\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu + c_k c_2}{\nu - \mu}\right) \|x^{k+1} - y^k\|^2,$$

$$\text{onde } \Delta(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\nu - \mu}\right) \|x - x^*\|^2;$$

(ii) Se $0 < c \leq c_k < \min \left\{ \frac{\nu - 5\mu}{2c_1}, \frac{\nu - 3\mu}{2c_2} \right\}$, então a sequência $\{x^k\}$ é limitada e todo ponto acumulação de $\{x^k\}$ é uma solução do $PE(f, C)$. Em adição, se $S^d(f, C) = S(f, C)$, então a sequência $\{x^k\}$ converge para uma solução do $PE(f, C)$.

Prova. Veja [34, Teorema 2.2]. ■

Capítulo 4

Um Método Ponto Proximal Interior com ϕ -divergência para Problemas de Equilíbrio

Neste Capítulo, assumimos que C é um conjunto poliedral definido por

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

onde A é uma matriz $m \times n$ ($m \geq n$) de posto completo, b é um vetor em \mathbb{R}^m , além disso, vamos também assumir que o $\text{int}(C)$ é não vazio.

Na próxima seção mostraremos um resultado que garante a boa definição da sequência gerada pelo Algoritmo 4.2.1.

4.1 Boa Definição dos Subproblemas

A desvantagem da formulação dada pelo Problema (1), é que, em geral, o $\text{PE}(f, C)$, pode não ter solução, e se tiver, pode não ser única. Para evitar essa situação, podemos substituir o problema (1) por outro regularizado.

Agora, definimos o nosso procedimento de regularização para o problema $\text{PE}(f, C)$, usando a distância dada por (1.4). Para isto, consideremos $\lambda > 0$ e $\bar{x} \in \text{int}(C)$. Para qualquer f associaremos outra bifunção $\bar{f} : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ que será chamada uma regularização de f . Definimos a bifunção regularizada $\bar{f} : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(x, \bar{x}), y - x \rangle, \quad (4.1)$$

onde $\nabla_1 D_\phi(x, \bar{x})$ denota o gradiente de $D_\phi(\cdot, \bar{x})$ em x . O Problema de Equilíbrio para a bifunção \bar{f} será denotado por $\text{PE}(\bar{f}, C)$ e indicaremos seu conjunto solução por $S(\bar{f}, C)$. Note também que $\bar{f}(x, x) = 0 \quad \forall x \in C$, isto é, \bar{f} é uma bifunção de

equilíbrio.

Apresentamos agora nossas hipóteses básicas para a bifunção $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$:

A1. $f(\cdot, y) : C \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superior para todo $y \in C$.

A2. $f(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e semicontínua inferior para todo $x \in C$.

A3. Se $f(x, y) \geq 0$ com $x, y \in C$, então $f(y, x) \leq 0$.

A4. Para qualquer sequência $\{z^k\} \subset C$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k\| = +\infty$, existem $u \in C$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z^k, u) \leq 0 \quad \forall k \geq k_0$.

A5. Existe $\theta > 0$ tal que $f(x, y) + f(y, x) \leq \theta \langle \nabla_1 D_\phi(x, p) - \nabla_1 D_\phi(y, p), x - y \rangle \quad \forall x, y \in \text{int}(C)$ e $p \in \text{int}(C)$.

Observação 4.1.1 *A hipótese A5 é mais fraca do que a monotonicidade de f . Em [14] esta condição é denotada por θ sub-monotonicidade, usando a distância euclidiana e em [8] é assumida, considerando distâncias de Bregman.*

O resultado de existência seguinte é importante para assegurar que o $\text{PE}(\bar{f}, C)$ tem solução. Primeiro, lembramos um resultado importante.

Teorema 4.1.1 *Assuma que f satisfaz A1-A4. Então $S(f, C)$ é não vazio.*

Prova. Veja [16, Teorema 4.3]. ■

Teorema 4.1.2 *Assuma que f satisfaz A1-A2 e A5. Fixe $\bar{x} \in \text{int}(C)$ e $\lambda > \theta$. Então $\text{PE}(\bar{f}, C)$ tem uma única solução.*

Prova. Provemos primeiro a existência de soluções. É fácil de ver que a bifunção regularizada \bar{f} satisfaz as hipóteses A1 e A2. Vamos agora mostrar que \bar{f} satisfaz A3. Para isto, note que:

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(x, \bar{x}), y - x \rangle. \quad (4.2)$$

$$\bar{f}(y, x) = f(y, x) + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(y, \bar{x}), x - y \rangle. \quad (4.3)$$

Adicionando (4.2) com (4.3) e usando A5, obtemos:

$$\bar{f}(x, y) + \bar{f}(y, x) \leq (\theta - \lambda) \langle \nabla_1 D_\phi(x, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(y, \bar{x}), x - y \rangle. \quad (4.4)$$

Usando o fato que $\lambda > \theta$ e o item (i) do Lema 1.3.1, segue de (4.4) que

$$\bar{f}(x, y) + \bar{f}(y, x) \leq -\beta \|x - y\|_A^2,$$

onde $\beta = \lambda\nu - \theta\nu$. Isto mostra que \bar{f} é fortemente monótona com módulo $\beta > 0$, em particular, \bar{f} é pseudomonótona e portanto satisfaz A3. Para aplicar o Teorema 4.1.1 devemos mostrar \bar{f} satisfaz a hipótese A4. Para isto, tome $u \in \text{int}(C)$ e considere uma sequência $\{x^k\} \subset \text{int}(C)$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = +\infty$. Note que:

$$\bar{f}(x^k, u) = f(x^k, u) + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(x^k, \bar{x}), u - x^k \rangle. \quad (4.5)$$

Segue de (4.5) que:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x^k, u) &= f(x^k, u) \\ &+ \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(x^k, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), u - x^k \rangle \\ &+ \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), u - x^k \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando A5, (4.6) resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x^k, u) &\leq -f(u, x^k) + \theta \langle \nabla_1 D_\phi(x^k, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), x^k - u \rangle \\ &+ \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(x^k, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), u - x^k \rangle + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), u - x^k \rangle \\ &= -f(u, x^k) + (\theta - \lambda) \langle \nabla_1 D_\phi(x^k, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), x^k - u \rangle \\ &+ \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(u, \bar{x}), u - x^k \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Usando em (4.7) o item (i) do Lema 1.3.1, a desigualdade de Cauchy-Schwartz e o fato que a matriz A tem posto completo, obtemos:

$$\bar{f}(x^k, u) \leq -f(u, x^k) + (\theta - \lambda)\nu \|A^T A\| \|x^k - u\|^2 + \lambda \|\nabla_1 D_\phi(u, \bar{x})\| \|u - x^k\|. \quad (4.8)$$

Tome $\hat{x} \in \text{int}(C)$. Uma vez que $f(u, \cdot)$ é convexa, por A2, seu subdiferencial em \hat{x} , denotado por $\partial f(u, \hat{x})$ é não vazio. Assim, existe $\hat{v} \in \partial f(u, \hat{x})$. Pela definição de subdiferencial, temos:

$$\langle \hat{v}, x^k - \hat{x} \rangle \leq f(u, x^k) - f(u, \hat{x}). \quad (4.9)$$

Segue de (4.9) que:

$$\begin{aligned} -f(u, x^k) &\leq \langle \hat{v}, \hat{x} - x^k \rangle - f(u, \hat{x}) \\ &\leq \|\hat{v}\| \|x^k - \hat{x}\| - f(u, \hat{x}) \\ &\leq \|\hat{v}\| \|u - \hat{x}\| + \|\hat{v}\| \|x^k - u\| - f(u, \hat{x}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Usamos as desigualdades de Cauchy-Schwartz e triangular na segunda e terceira

desigualdades, respectivamente. Substituindo (4.10) em (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x^k, u) &\leq \|\hat{v}\| \|u - \hat{x}\| + \|\hat{v}\| \|x^k - u\| - f(u, \hat{x}) \\
&+ (\theta - \lambda)\nu \|A^T A\| \|x^k - u\|^2 + \lambda \|\nabla_1 D_\phi(u, \bar{x})\| \|u - x^k\| \\
&= \|x^k - u\| [\|\hat{v}\| + (\theta - \lambda)\nu \|A^T A\| \|x^k - u\| + \lambda \|\nabla_1 D_\phi(u, \bar{x})\|] \\
&+ \|\hat{v}\| \|u - \hat{x}\| - f(u, \hat{x}). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Assim, como $\theta - \lambda < 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = +\infty$ segue de (4.11) que $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{f}(x^k, u) = -\infty$. Portanto, para k bastante grande, segue que $\bar{f}(x^k, u) \leq 0$. Mostramos assim que \bar{f} satisfaz A4. Como \bar{f} satisfaz todas as hipóteses do Teorema 4.1.1, segue que, $S(\bar{f}, C)$ é não vazío.

Agora, vamos mostrar que a solução é única. Suponha que \tilde{x} e \tilde{x}' são soluções de $PE(\bar{f}, C)$. Segue de (4.1) que:

$$0 \leq \bar{f}(\tilde{x}, \tilde{x}') = f(\tilde{x}, \tilde{x}') + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}, \bar{x}), \tilde{x}' - \tilde{x} \rangle. \tag{4.12}$$

$$0 \leq \bar{f}(\tilde{x}', \tilde{x}) = f(\tilde{x}', \tilde{x}) + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}', \bar{x}), \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle. \tag{4.13}$$

Adicionando (4.12) com (4.13) e usando A5 obtemos:

$$0 \leq \theta \langle \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}', \bar{x}), \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle + \lambda \langle \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}', \bar{x}), \tilde{x}' - \tilde{x} \rangle. \tag{4.14}$$

Segue de (4.14) que

$$0 \leq (\theta - \lambda) \langle \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}', \bar{x}), \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle. \tag{4.15}$$

Como $\theta - \lambda < 0$, e pelo item (i) do Lema 1.3.1, sabemos que

$$\langle \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}, \bar{x}) - \nabla_1 D_\phi(\tilde{x}', \bar{x}), \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle \geq \nu \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|_A^2,$$

obtemos de 4.15 que

$$0 \leq (\theta - \lambda)\nu \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|_A^2 \leq 0 \Rightarrow \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|_A = 0.$$

Como a matriz A tem posto completo, segue que $\tilde{x} = \tilde{x}'$. ■

4.2 Análise de Convergência

Iniciamos esta seção apresentando um método ponto proximal interior com distância ϕ -divergente para problemas de equilíbrio em \mathbb{R}^n . Tome uma sequência de parâmetros de regularização $\{\lambda_k\} \subset (\theta, \bar{\lambda})$.

O algoritmo gera uma sequência $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ como segue, x^0 , é um ponto arbitrário no $\text{int}(C)$, e, dado x^k , x^{k+1} é a solução do PE(f_k, C) com

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \lambda_k \langle \nabla_1 D_\phi(x, x^k), y - x \rangle. \quad (4.16)$$

O Problema de Equilíbrio para a bifunção $f_k : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ será denotado por PE(f_k, C) e indicaremos seu conjunto solução por $S(f_k, C)$. Note também que $f_k(x, x) = 0 \quad \forall x \in C$, isto é, $f_k(x, y)$ é uma bifunção de equilíbrio.

Para analisar a convergência do Algoritmo 4.2.1, assumimos que a sequência de parâmetros positivos $\{\lambda_k\}$, gerada pelo Algoritmo 4.2.1, satisfaz ao seguinte requerimento:

R1. $\theta < \lambda_k \leq \bar{\lambda}$, onde $\theta \geq 0$.

Algoritmo 4.2.1

1. Dado $x^0 \in \text{int}(C)$, escolha $\lambda_0 > 0$, e faça $k := 0$.

2. Dado $x^k \in \text{int}(C)$, encontre $x^{k+1} \in \text{int}(C)$ tal que

$$f(x^{k+1}, y) + \lambda_k \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k+1}, x^k), y - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4.17)$$

3. Se $\|x^k - x^{k+1}\| = 0$, então pare, caso contrário faça $k = k + 1$ e volte para o passo 2.

Observação 4.2.1 Existência e unicidade de x^{k+1} são consequências do Teorema 4.1.2, com $\lambda_k = \lambda > \theta$, $\bar{x} = x^k$ e $\tilde{x} = x^{k+1}$.

Observação 4.2.2 Quando $x^{k+1} = x^k$, a desigualdade (4.17) torna-se

$$f(x^{k+1}, y) \geq -\lambda_k \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k+1}, x^{k+1}), y - x^{k+1} \rangle \quad \forall y \in C.$$

Uma vez que $\langle \nabla_1 D_\phi(x^{k+1}, x^{k+1}), y - x^{k+1} \rangle = 0$, pelo Lema 1.3.1, item (iii), segue que

$$f(x^{k+1}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

isto é, $x^{k+1} \in S(f, C)$.

No que segue, mostraremos que a sequência gerada pelo Algoritmo 4.2.1 é limitada. Para isto assumimos que $S(f, C) \neq \emptyset$, isto é, existe $x^* \in C$ tal que $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C$.

Teorema 4.2.1 Assuma que f satisfaz A1-A3, A5; R1 ocorre, $\nu > \mu$ e $S(f, C) \neq \emptyset$. Então:

1. Para todo $x^* \in S(f, C)$ a sequência $\{\|x^k - x^*\|_A\}$ é convergente.
2. A sequência $\{x^k\}$ é Féjer convergente para $S(f, C)$ com relação a norma $\|\cdot\|_A$.
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\|_A = 0$.

Prova. Do Teorema 4.1.2 segue que a sequência $\{x^k\}$ está bem definida. Assim, existe $x^{k+1} \in \text{int}(C)$ tal que

$$f_k(x^{k+1}, y) = f(x^{k+1}, y) + \lambda_k \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k+1}, x^k), y - x^{k+1} \rangle \geq 0. \quad (4.18)$$

Tome qualquer $x^* \in S(f, C)$. Fazendo $y = x^*$ em (4.18) obtemos:

$$0 \leq f(x^{k+1}, x^*) + \lambda_k \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k+1}, x^k), x^* - x^{k+1} \rangle. \quad (4.19)$$

Note que $f(x^*, x^{k+1}) \geq 0$, porque $x^* \in S(f, C)$. Como por A3 sabemos que $f(x^{k+1}, x^*) \leq 0$, então (4.19) resulta em:

$$0 \leq -\lambda_k \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k+1}, x^k), x^{k+1} - x^* \rangle. \quad (4.20)$$

Usando o item (iv) do Lema 1.3.1 com $x = x^{k+1}$, $y = x^k$ e $z = x^*$ em (4.20), obtemos que

$$0 \leq -\lambda_k \left(\frac{\nu + \mu}{2} \right) (\|x^{k+1} - x^*\|_A^2 - \|x^k - x^*\|_A^2) - \lambda_k \left(\frac{\nu - \mu}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|_A^2. \quad (4.21)$$

Segue de (4.21) que:

$$0 \leq \lambda_k \left(\frac{\nu + \mu}{2} \right) \|x^k - x^*\|_A^2 - \lambda_k \left(\frac{\nu + \mu}{2} \right) \|x^{k+1} - x^*\|_A^2 - \lambda_k \left(\frac{\nu - \mu}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|_A^2. \quad (4.22)$$

Como $\nu > \mu$, (4.22) resulta em

$$\|x^{k+1} - x^*\|_A^2 \leq \|x^k - x^*\|_A^2. \quad (4.23)$$

De (4.23), segue que a sequência $\{\|x^k - x^*\|_A\}$ é monótona e limitada, assim $\{\|x^k - x^*\|_A\}$ é convergente.

Note agora que (4.23) $\Rightarrow \|x^{k+1} - x^*\|_A \leq \|x^k - x^*\|_A$, pela Definição 1.4.1, segue o item (2).

Tomando o limite em (4.22) com $k \rightarrow \infty$, usando o item (1) deste Teorema, e R1, obtemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\|_A^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\|_A = 0.$$

■

Abaixo, mostraremos que a sequência $\{x^k\}$ converge para a solução do $PE(f, C)$.

Teorema 4.2.2 *Assuma que f satisfaz A1-A3, A5; R1 ocorre, $\nu > \mu$. Então a sequência $\{x^k\}$, gerada pelo Algoritmo 4.2.1, converge para uma solução do $PE(f, C)$.*

Prova. Pelo Lema 1.4.1 e o item (2) do Teorema 4.2.1 temos que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. Portanto, esta sequência tem pontos de acumulação. Seja \bar{x} qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}$. Dessa forma, existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$.

Usando o item (3) do Teorema 4.2.1, temos que

$$x^{k_{j+1}} \rightarrow \bar{x}.$$

Pelo Teorema 4.1.2, sabemos que existe $x^{k_{j+1}} \in \text{int}(C)$ tal que

$$f(x^{k_{j+1}}, y) + \lambda_{k_j} \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k_{j+1}}, x^{k_j}), y - x^{k_{j+1}} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4.24)$$

Segue de (4.24) que

$$f(x^{k_{j+1}}, y) \geq \lambda_{k_j} \langle \nabla_1 D_\phi(x^{k_{j+1}}, x^{k_j}), x^{k_{j+1}} - y \rangle \quad \forall y \in C. \quad (4.25)$$

Usando o item (iv) do Lema 1.3.1, em (4.25), temos para todo $y \in C$ e todo j que

$$f(x^{k_{j+1}}, y) \geq \lambda_{k_j} \left(\frac{\nu + \mu}{2} \right) (\|x^{k_{j+1}} - y\|_A^2 - \|x^{k_j} - y\|_A^2) + \lambda_{k_j} \left(\frac{\nu - \mu}{2} \right) \|x^{k_{j+1}} - x^{k_j}\|_A^2. \quad (4.26)$$

Usando A1, R1 e o fato que $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} x^{k_{j+1}} = \bar{x}$, segue de (4.26) que

$$f(\bar{x}, y) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} f(x^{k_j}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Portanto, $\bar{x} \in S(f, C)$. Pelo Lema 1.4.1 concluímos então que a sequência $\{x^k\}$ converge para uma solução do $PE(f, C)$. ■

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Na primeira parte deste trabalho, foi mostrado que a regularização tipo-Tikhonov, dada por [13], pode ser estendida para problemas de equilíbrio em dimensão infinita. Sob hipóteses razoáveis, estabelecemos a equivalência entre a existência de soluções do problema original e a limitação da sequência gerada pelos problemas regularizados. Em seguida, apresentamos um método do tipo ponto proximal interior com ϕ -divergência, para resolver o problema de equilíbrio. Assumindo pseudomonotonicidade de f , mostramos que a sequência gerada pelo Algoritmo 4.2.1 converge a uma solução do problema, quando os parâmetros de regularização são limitados.

A seguir, apresentaremos uma proposta de continuidade do nosso trabalho.

5.1 Resolução Numérica dos Subproblemas

Nosso objetivo é desenvolver uma estratégia numérica para resolver os subproblemas (4.17) do Algoritmo 4.2.1, realizar experimentos numéricos e fazer comparações com outros Algoritmos existentes na literatura.

5.2 Estudo do Caso Quase-convexo

Resolver o Problema de Equilíbrio no caso em que

$$f(x, \cdot) \text{ é quase-convexa em } C \text{ para todo } x \in C.$$

Para isso, considerar, por exemplo, o seguinte subdiferencial

$$x \in C, \partial_2 f(x, x) = \{\eta \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle \eta, y - x \rangle \text{ se } f(x, y) < 0\}.$$

5.3 Algoritmo Proximal Inexato para o Problema $\text{PE}(f, C)$

Nossa proposta é estender (5) para um algoritmo proximal inexato. Para isto, consideremos o seguinte algoritmo:

Algoritmo 5.3.1

1. Dado $x^0 \in C$, escolha $\lambda_0 > 0, \delta_0, \epsilon_0, \gamma_0 \geq 0, 0 \leq \sigma < 1$ e faça $k := 0$.

2. Dado $x^k \in C$, encontre:

2.1. $x^{k+1} \in C$ e $y^k \in C$

2.2. $\eta^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(y^k, y^k)$

tais que

$$f(x^{k+1}, y) + \gamma_k \langle \eta^k, y - y^k \rangle + \lambda_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle + \delta_k \geq 0, \quad \forall y \in C \quad (5.1)$$

$$e \quad \|y^k - x^{k+1}\| \leq \sigma \|y^k - x^k\| \quad (5.2)$$

3. Se $\|x^k - y^k\| + \|x^{k+1} - y^k\| = 0$ pare.

4. Escolha $\lambda_{k+1} > 0, \gamma_{k+1}, \delta_{k+1}, \epsilon_{k+1} \geq 0$, defina $k := k + 1$ e volte para o passo 2.

A ideia do cálculo inexato consiste na opção de escolher $\eta^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(y^k, y^k)$ onde y^k é algum ponto próximo de x^{k+1} tal que:

$$\|y^k - x^{k+1}\| \leq \sigma \|y^k - x^k\|.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Auslender, A., Teboulle, M., and Ben-Tiba, S., Interior proximal and multiplier methods based on second order homogeneous kernels. *Mathematics of Operations Research*, 24, 1999.
- [2] Auslender, A., Teboulle, M., The log-quadratic proximal methodology in convex optimization algorithms and variational inequalities. In: Daniele, P., Giannessi, F., Maugeri, A. (eds) *Equilibrium Problems and Variational Models. Nonconvex Optimization and its Applications*, vol. 68, pp.19-52. Kluwer Academic publishers, Dordrecht, The Netherlands (2003).
- [3] Auslender, A., Teboulle, M. Interior gradient and epsilon-sugradient descent methods for constrained convex minimization. *Mathematics of Operations Research*, 29, 2004.
- [4] Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando, M., Existence and solution methods for equilibria, Technical Report TR-12-06, Department of computer Science, University of Pisa (2012). <http://compass2.di.unipi.it/TR/Files/TR-12-06.pdf.gz>.
- [5] Blum, E. and Oettli, W., From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems. *The Mathematics Student* 63, 123-145, 1994.
- [6] Bnouhachem, A., An LOP method for pseudomonotone variational inequalities, *Journal Global Optimization*, 36, 351-363 (2006).
- [7] Brito, A.S., Neto, J.X.C., Lopes, J.O., Oliveira, P.R., Interior proximal algorithm for quasiconvex programming problems and variational inequalities with linear constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154, 217-234, 2012.
- [8] Burachik, R., Kassay, G., On a generalizad proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, 75, 6456-6464, 2012.

- [9] Burachik, R.S., Svaiter, B.F., A relative error tolerance for a family of generalized proximal point methods. *Mathematics of Operations Research*, 26,816-831, 2001.
- [10] Csiszár, I., Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*,2, 299-318, 1967.
- [11] Fan, K., A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Mathematische Annalen* 142 (1961) 305-310.
- [12] Fan, K., A minimax inequality and applications, *Inequalities III*, edited O.Shisha, Academic Press, 1972.
- [13] Hung, P.G., Muu, L.D., The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions, *Nonlinear Analysis* (2011) 6121-6129.
- [14] Iusem, A. N. and Sosa, W., On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert Spaces. *Optimization* 59, 1259-1274, 2010.
- [15] Iusem, A. N. and Sosa, W., New existence results for equilibrium problems. *Nonlinear Anal* 52, 621-635, 2003.
- [16] Iusem, A.N., G. Kassay and Sosa, W., On Certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. *Mathematical Programming* 116, 259-273, 2009.
- [17] Iusem, A.N. and Mostafa, N., Inexact proximal point methods for equilibrium problems in Banach spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 28, 1279-1308, 2007.
- [18] Iusem, A.N., On the maximal monotonicity of diagonal subdifferential operators, *Journal of Convex Analysis* 18 (2011).
- [19] Iusem, A.N., Svaiter, B., Teboulle, M. Entropy-like proximal methods in convex programming. *Math. Oper. Res.* 19, 790-814(1994).
- [20] Iusem, A., *Métodos de Ponto Proximal em Otimização*. IMPA, (1995).
- [21] Konnov, I.V., Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Application* 119,317-333, 2003.

- [22] Konnov, I.V. and Dyabilkin, D.A., Nonmonotone equilibrium: coercivity conditions and weak regularization. *Journal of Global Optimization* 49, 2011.
- [23] Konnov, I.V., Regularization methods for nonmonotone equilibrium problems, *Journal Nonlinear Convex Analysis* 10 (2009) 93-101.
- [24] Konnov, I.V., Partial proximal point method for nonmonotone equilibrium problems. *Optimization Methods and Software*. Vol.21. 3, 373-384, 2006.
- [25] Konnov, I.V. and Schaible, S., Duality for Equilibrium Problems under Generalized monotonicity, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 104, 395-408, 2000.
- [26] Kothe, K., *Topological vector spaces*, Springer (1969).
- [27] Krawczyk, Jacek B. and Uryasev, Stanislav, Relaxation algorithms to find Nash equilibria with economic applications. *Environmental modeling and Assessment* 5,63-73, 2000.
- [28] Langenberg, N., Interior point methods for equilibrium problems, *Computational Optimization and Applications*, 53, 453-483, 2012.
- [29] Leithold, L., *Matemática Aplicada à Economia e a Administração*, Harbra (1988).
- [30] Martinet, B., Regularization d'inéquations variationnelles par approximations successives. *Revue Française d'Automatique et d'Informatique Recherche Opérationnelle* 4,154-159, 1970.
- [31] Mastroeni G., Gap function for equilibrium problems. *J. of Global Optimization* 27, 411-426, 2004.
- [32] Moudafi, A., Proximal point algorithm extended to equilibrium problem. *Journal of Natural Geometry* 15, 91-100, 1999.
- [33] Moudafi, A. and Michel Théra, Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 477, 187-201, 1999.
- [34] Nguyen, T.T.V, Strodiot, J.J and Nguyen, V.H., The interior proximal extragradient method for solving equilibrium problems. *Journal of Global Optimization* 44, 175-192, 2009.
- [35] Nguyen, V.H, Tran, D.Q. and Muu, L.D., Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Journal of Global Optimization* 57, 740-776, 2008.

- [36] Noor, M.A., Auxiliary principle technique for equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 122, 371-386, 2004.
- [37] Noor, M.A. and Noor, K.I., On Equilibrium Problems. *Applied Mathematics E-Notes* 4, 125-132, 2004.
- [38] Noor, M.A., Bnouhachem, A., Modified proximal point method for nonlinear complementarity problems. *Journal Computation Applied Mathematics* 197, 395-405 (2006).
- [39] Oliveira, P.R, Santos, P.S.M, and Silva, A.N., A Tikhonov-type regularization for equilibrium problems in Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 401, 336-342, 2013.
- [40] Rockafellar, R.T., *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm*. SIAM. *Journal Control Optimization* 14, 877-898, 1976.
- [41] Santos, P.S.M. and Scheimberg, S., An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems. *Computational and Applied Mathematics* 30, 91-107, 2011.
- [42] Taylor, A.E. e Lay, D.C., *Introduction to Functional Analysis*. J. Wiley, New York, 1980.
- [43] Teboulle, M., Entropic proximal mappings with applications to nonlinear programming. *Mathematics of Operation Research*, 17, 670-690, 1997.
- [44] Thikonov, A., Arsenin, V., *Solution of ill-posed problems*. Winston (1977).