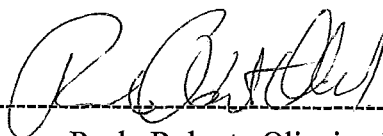


APLICAÇÃO DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES
PRIMAL-DUAL PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Maria de Luján Latorre

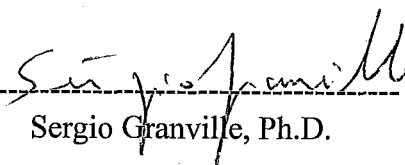
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

Aprovada por:

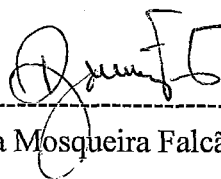


Paulo Roberto Oliveira, Dr. Ing.

(Presidente)



Sergio Granville, Ph.D.



Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1995

Latorre, Maria de Luján

Aplicação do Método de Pontos Interiores Primal-Dual Para a Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo

viii, 75 p, 29.7 cm. (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1995).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1.Fluxo de Potência Ótimo, Pontos Interiores em Otimização, Técnicas de Esparsidade I.COPPE/UFRJ II. Título (série)

A mi mamá y a
mi papá (In memorium)

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho me permitiu um conhecimento maior na área de otimização, tanto no aspecto teórico como prático, e não posso deixar de mencionar aqueles que contribuíram consideravelmente para que isto acontecesse.

Em primeiro lugar a minha mãe e a Mônica pela compreensão e o carinho mostrados durante todo este tempo apesar da distância.

A meu orientador Sergio Granville agradeço especialmente pela dedicação, interesse e carinho que permitiram o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Paulo Roberto Oliveira pela sua co-orientação e a possibilidade do intercâmbio COPPE/Cepel que permitiram a concretização deste trabalho.

Agradeço a Paulo Alexandre Machado e Luis Antonio Cordeiro pela receptividade e por todas aquelas vezes que esclareceram minhas dúvidas.

A Orlando Fernandes Riccieri Junior e Luis Renato Monteiro Regino, DOC/Eletronbras, pelo trabalho conjunto que enriqueceu o desenvolvimento desta tese.

A minha amiga Cândida pelo tempo dedicado durante a fase inicial da implementação do programa.

Ada, Ana, Ana Paula e Talita obrigada pelo carinho e amizade mostrados durante todo este tempo.

Também agradeço a todos aqueles que ajudaram e deram sugestões na digitação, diagramação e que contribuíram na correção da tese.

Não posso deixar de mencionar Graciela e Elisa que despertaram meu interesse na área de Pesquisa Operacional e incentivaram meu aperfeiçoamento na finalização da minha Licenciatura.

Finalmente agradeço ao povo brasileiro pela sua receptividade, à COPPE/UFRJ e ao Cepel pela disponibilidade de suas instalações e ao CNPq e Cepel pelo financiamento deste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE PONTOS INTERIORES
PRIMAL-DUAL PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Maria de Luján Latorre

Março, 1995

Orientadores: Sergio Granville

Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho descreve os aspectos teóricos e práticos da aplicação do método de pontos interiores primal-dual para a resolução do problema elétrico de Fluxo de Potência Ótimo. A motivação desta aplicação deve-se ao bom desempenho mostrado pelos métodos de pontos interiores em programação linear de grande porte, assim como em programação quadrática e convexa. Existe hoje um consenso geral considerando o método de pontos interiores primal-dual como o mais apropriado e eficiente entre os métodos de pontos interiores existentes. O algoritmo implementado resolve o sistema de equações resultante da formulação primal-dual pelo método de Newton-Raphson com critérios específicos de convergência e ajuste do parâmetro barreira. Técnicas de esparsidade que exploram as características próprias dos sistemas elétricos foram utilizadas de forma a viabilizar a implementação do algoritmo permitindo ganhos no tempo de processamento e a aplicação do programa no planejamento e operação de sistemas de potência.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

APPLICATION OF PRIMAL-DUAL INTERIOR POINT
METHOD FOR SOLVING THE OPTIMAL POWER FLOW

PROBLEM

Maria de Luján Latorre

March, 1995

Thesis Supervisors: Sergio Granville

Paulo Roberto Oliveira

Department: Systems and Computation Engineering

This work describes the theoretical and practical aspects of an application of a primal-dual interior point method for solving the Optimal Power Flow electrical problem. The motivation for this application was the computational efficiency of the interior point method in large scale linear programming as well as in quadratic and convex programming. Nowadays, the primal-dual interior point method is considered as the more appropriate and efficient among the existent interior point methods. The development algorithm solves the equation system based on a Newton method using specific criterion of convergence and barrier parameter updates. Sparsity techniques have been utilized, reducing the computational cost and making the program suitable for power systems planning and operation activities.

ÍNDICE

Capítulo 1	Introdução	1
Capítulo 2	Fluxo de Potência Ótimo (FPO)	2
2.1	Introdução	2
2.1.1	Fluxo de Potência	2
2.1.2	Histórico do FPO	5
2.1.3	Aplicações do FPO	7
2.2	Modelagem do Problema de FPO	7
2.2.1	Variáveis	8
2.2.2	Funções Objetivo	8
2.2.3	Restrições de Igualdade	12
2.2.4	Restrições de Desigualdade	14
Capítulo 3	Pontos Interiores em Otimização	17
3.1	Introdução	17
3.2	Programação Linear	18
3.2.1	Função Barreira Logarítmica e Centro Analítico	18
3.2.2	Trajectoria Central	19
3.2.3	Formulação Primal-Dual	20
3.2.4	Resolução do Sistema de Equações e Atualização	22
3.2.5	Algoritmo de Solução	24
3.2.6	Gap de Dualidade-Parâmetro Barreira	25
3.3	Programação Não Linear	27
3.3.1	Método Barreira	27
3.3.2	Problemas Convexos	28
3.3.3	Problemas Não Convexos	29
3.3.4	Trajectoria Central	30
3.3.5	Problema de Condicionamento Associado à Aplicação da Função Barreira	31
Capítulo 4	Pontos Interiores Primal-Dual em FPO	38
4.1	Formulação do Problema - Barreira Logarítmica	38
4.1.1	Condições de Otimalidade	39

4.1.2	Resolução do Sistema de Equações	39
4.1.3	Passo Primal-Dual	41
4.1.4	Atualização do Parâmetro Barreira	41
4.1.5	Algoritmo de Solução	42
4.2.	Características do Algoritmo	43
4.2.1	Inicialização	43
4.2.2	Critério de Convergência	43
4.2.3	Inviabilidade	43
4.2.4	Robustez	44
4.3	Estrutura da Matriz	44
4.3.1	Estrutura da HB	46
4.3.2	Estrutura da LB	47
4.3.3	Estrutura Complementar da HB	51
4.3.4	Monitoramento de Circuitos	52
4.3.5	Esparsidade da Matriz	54
4.3.6	Resolução do Sistema de Equações	54
Capítulo 5	Resultados Numéricos	56
5.1	Aspectos Computacionais	56
5.2	Casos Testes	57
Capítulo 6	Conclusões	71
6.1	Introdução	71
6.2	Conclusões	71
6.3	Estudos Futuros	72
Referências Bibliográficas	73

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Esta tese tem por objetivo a implementação de um Método de Pontos Interiores Primal-Dual para a resolução do problema básico de Fluxo de Potência Ótimo (FPO).

Durante o seu desenvolvimento serão apresentados os aspectos teóricos e práticos que justificam o método de solução e dão a motivação para sua aplicação ao caso específico do FPO. Para isso a tese foi estruturada em seis capítulos e a seguir será dada uma pequena descrição de cada um deles.

O Capítulo 2 apresenta a formulação básica do problema de FPO, suas funções objetivo, variáveis e restrições físicas e operacionais. Uma breve resenha histórica mostra os principais métodos de resolução já desenvolvidos para o FPO.

O Capítulo 3 descreve o estudo do Método de Pontos Interiores no contexto utilizado para a resolução do FPO. Como motivação para o desenvolvimento de um algoritmo para o problema não linear de FPO, a primeira parte do capítulo formula o método de pontos interiores primal-dual no contexto de programação linear. Inicialmente, é introduzida a função barreira logarítmica associada à definição de centro analítico e trajetória central. Depois, são apresentados os passos que levam ao problema primal-dual e algumas propriedades que sugerem estratégias para a construção de um algoritmo de solução eficiente. A segunda etapa fornece as justificativas teóricas para a aplicação dos métodos de pontos interiores em programação não linear convexa e não convexa. Para finalizar, o capítulo apresenta uma discussão sobre o problema de mal condicionamento inerente à utilização da função barreira em otimização.

O Capítulo 4 trata da implementação do Método de Pontos Interiores Primal-Dual ao problema de FPO. Em primeiro lugar, é apresentada a formulação primal-dual do FPO mediante a inclusão de variáveis de folga e barreira logarítmica à formulação matemática descrita no capítulo 2. O sistema de equações resultante das condições de otimalidade é resolvido via um método de Newton-Raphson e a formulação do algoritmo de solução é baseada em alguns critérios de convergência e atualização do parâmetro barreira como estudado no caso linear. Por outro lado, a esparsidade dos sistemas elétricos viabiliza a resolução do sistema de equações mediante a utilização de critérios de ordenação e fatoração específicos. Para isso, é descrita em detalhes a estrutura da matriz e o critério de ordenação-fatoração que será utilizado.

O Capítulo 5 contém os resultados numéricos de três casos testes de diferentes dimensões de pequeno a grande porte, mostrando a evolução do processo iterativo em duas funções objetivo escolhidas dentro das várias possibilidades que ele pode apresentar. As tabelas de convergência mostram a evolução do processo iterativo e o compromisso de alcançar a viabilidade simultaneamente com a otimalidade.

Para finalizar, no Capítulo 6, são resumidas as características do algoritmo que puderam ser observadas depois de sucessivos testes numéricos e alguns temas de pesquisa para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

2.1 Introdução

O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) pode ser definido como sendo a determinação do estado de uma rede elétrica que otimiza uma determinada função objetivo e satisfaz um conjunto de restrições físicas e operacionais. Ele é caracterizado matematicamente como um problema de programação não linear com centenas a milhares de variáveis e restrições e pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } g(x) &= 0 \\ h(x) &\leq 0 \\ l &\leq x \leq u \end{aligned} \tag{2.1}$$

As restrições de igualdade correspondem basicamente às equações de balanço de potência ativa e reativa em cada nó da rede e, dependendo da aplicação, a outras restrições auxiliares. As desigualdades são restrições funcionais, monitoramento de fluxo em circuitos por exemplo, e restrições de canalização que representam limites físicos e operacionais do sistema. A seção 2.2 deste capítulo contém uma descrição detalhada de cada elemento que compõe o FPO.

Antes de apresentar uma breve resenha histórica dos principais métodos desenvolvidos para a resolução do FPO, será dada, a seguir, uma introdução ao problema de fluxo de potência que define as equações básicas do FPO (ver Monticelli [30] para maiores detalhes).

2.1.1 Fluxo de Potência

O cálculo do fluxo de potência em uma rede de energia elétrica consiste essencialmente na determinação do estado da rede. A modelagem do sistema é estática, significando que a rede é representada por um conjunto de equações e inequações algébricas.

Os componentes de um sistema de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos: os componentes externos tais como geradores e cargas que são modelados através de injeções de potência nos nós da rede e os componentes internos como linhas de transmissão, transformadores, defasadores, reatores e capacitores que são modelados por equações algébricas que representam o fluxo de potência que flui por estes equipamentos.

As equações básicas de fluxo de potência correspondem à Primeira Lei de Kirchhoff que estabelece que a potência líquida injetada em cada nó da rede deve ser igual à soma das potências nos componentes internos que tem o nó especificado como um de

seus extremos. Isto corresponde a impor a conservação das potências ativa e reativa em cada nó da rede.

Na formulação básica do fluxo de potência, a cada barra da rede são associadas quatro variáveis:

- θ_i ângulo de tensão na barra i
- V_i módulo de tensão na barra i
- P_i geração líquida (geração menos carga) de potência ativa na barra i
- Q_i geração líquida de potência reativa na barra i

Na resolução do problema, duas delas entram como dados e duas como incógnitas. Dependendo de quais variáveis são fixadas, podem ser definidos três tipos de barras:

- PQ são dados P_i e Q_i e calculados V_i e θ_i
- PV são dados P_i e V_i e calculados Q_i e θ_i
- V θ (barra de referência) são dados V_i e θ_i e calculados P_i e Q_i

Seguindo esta convenção, as variáveis podem ser classificadas em variáveis de controle u (dados) e variáveis de estado x (incógnitas). Assim, o problema geral de fluxo de potência pode ser formulado através de um conjunto de equações e inequações algébricas da seguinte forma:

$$g(x,u) = 0 \tag{2.2}$$

$$h(x,u) \leq 0 \tag{2.3}$$

O conjunto de restrições de igualdade (2.2) é formado por duas equações para cada barra:

$$\sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} = P_i \tag{2.4}$$

$$\sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} = Q_i + V_i^2 b_{sh_i} \tag{2.5}$$

onde

Ω_i conjunto de barras ligadas à barra i

P_{ij} fluxo ativo no circuito i - j

Q_{ij} fluxo reativo no circuito i-j

b_{shi} susceptância shunt na barra i

As expressões gerais dos fluxos de potência ativa e reativa em linhas de transmissão, transformadores e defasadores são:

$$P_{ij} = a_{ij}^2 V_i^2 g_{ij} - a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (2.6)$$

$$P_{ji} = V_j^2 g_{ij} - a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (2.7)$$

$$Q_{ij} = -a_{ij}^2 V_i^2 (b_{ij} + b_{shij}) - a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (2.8)$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 (b_{ij} + b_{shij}) + a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (2.9)$$

onde: θ_{ij} diferença angular $\theta_i - \theta_j$

a_{ij} tap do transformador i-j

φ_{ij} ângulo de defasamento no circuito i-j

g_{ij} condutância série no circuito i-j

b_{ij} susceptância série no circuito i-j

b_{shij} susceptância shunt no circuito i-j

A diferença angular θ_{ij} que aparece na formulação das equações (2.6)-(2.9) faz necessário fixar uma barra de referência, caso contrário o sistema resultaria indeterminado. A seguinte convenção de sinais foi adotada nas respectivas equações: uma injeção de potência é considerada positiva quando entra na barra (geração) e negativa quando sai dela (carga). Por outro lado, os fluxos em circuitos são positivos quando saem da barra e negativos quando entram.

O conjunto de inequações associadas a (2.3) são as restrições operacionais:

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max} \quad (2.10)$$

$$Q_i^{\min} \leq Q_i \leq Q_i^{\max} \quad (2.11)$$

Normalmente os algoritmos para resolução do problema de fluxo de potência podem ser divididos em duas partes. A primeira corresponde a um processo iterativo que resolve o sistema de equações (2.4)-(2.5) pelo método de Newton-Raphson por exemplo. A segunda parte leva em consideração a atuação dos dispositivos de controle e da representação dos limites de operação do sistema. As duas partes são resolvidas alternadamente intercalando a solução das equações básicas com a representação dos controles e limites de operação.

2.1.2 Histórico do FPO

A primeira formulação matemática do FPO surgiu em 1962 com Carpentier [6]. Desde então, uma série de métodos foram propostos para a sua resolução. Por exemplo, em 1968 foi apresentado por Dommel-Tinney [10] um método de “gradiente reduzido” onde as variáveis do problema são divididas em variáveis independentes que são os controles (geração de potência ativa, tensão em barras de geração, taps entre outros) e as variáveis de estado ou dependentes (ângulo de módulo de tensão nas barras e tensão em barras de carga). As restrições funcionais e as restrições de canalização sobre as variáveis de estado são incluídas na função objetivo através de penalização externa. A direção de descida é o gradiente reduzido nas variáveis de controle e os limites sobre os controles são tratados através de um gradiente projetado. Uma vez obtido os valores das variáveis independentes, os valores das variáveis de estado são conhecidos resolvendo um sistema de equações correspondente às restrições de igualdade (fluxo de potência). A maior dificuldade do método está relacionada à determinação do valor correto do parâmetro de penalidade no processo iterativo, de forma tal a não interferir demasiadamente na solução ótima do problema original por um lado ou não perder a viabilidade por outro. Outro aspecto importante é a degradação do condicionamento da matriz Hessiana como consequência do uso da função de penalidade.

Um método de Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), considerado como uma extensão do gradiente reduzido a problemas não lineares, foi proposto pela primeira vez por Abadie-Carpentier (ver Gill-Murray e Wright [15]). As variáveis são divididas em variáveis dependentes e independentes, e uma linearização das restrições ativas é considerada como uma aproximação do conjunto viável. A cada iteração, é calculado o gradiente reduzido nas variáveis independentes e resolvido um sistema de igualdade para achar o incremento nas variáveis dependentes. Dado que o novo ponto é somente viável nas restrições linearizadas, uma correção na direção de descida na busca linear é considerada de tal forma a viabilizar a solução e assegurar um decréscimo da função objetivo. Quando o problema inclui restrições de desigualdade, como é o caso do FPO, uma estratégia de conjunto ativo é implementada. Um algoritmo específico baseado no GRG para resolução do FPO, o “Método de Injeções Diferenciais”, foi implementado pelo próprio Carpentier [7]. Este método considera uma partição do conjunto ativo similarmente ao gradiente reduzido de Dommel-Tinney. O algoritmo é dividido em duas etapas que são resolvidas alternadamente. Na primeira delas, é formulado um subproblema reduzido do problema original onde se obtém a direção de descida nas variáveis de controle via um método de GRG. Na etapa seguinte, as variáveis de estado são calculadas resolvendo-se um fluxo de potência convencional.

O problema de FPO pode ser resolvido também por técnicas de programação linear considerando linearizações sucessivas. Existem fortes argumentos teóricos [21] para a aplicação de programação linear sucessiva a problemas de programação não linear em forma geral, onde as linearizações são consideradas válidas dentro de uma região de confiança. Em aplicações práticas, uma das dificuldades encontradas é a determinação de tal região a cada iteração. Entre as técnicas de programação linear para resolver o FPO, a versão dual [1] com relaxação das restrições, intercalada com a resolução de um fluxo de potência, é considerada como uma das mais eficientes.

Um avanço importante nos problemas de FPO deve-se aos problemas quadráticos. Um dos primeiros métodos de segunda ordem foi o método de “Lagrangeano aumentado projetado” proposto por Burchett [5]. O algoritmo resolve a cada iteração um problema aproximado, onde a função objetivo é o Lagrangeano aumentado e as restrições são linearizadas. As variáveis são divididas em variáveis básicas (dependentes), super-básicas (independentes) e não básicas (restrições ativas). Esta partição do conjunto de variáveis pode ser alterada durante o processo iterativo a medida que algumas variáveis são fixadas e outras relaxadas de seus limites. A direção de descida nas variáveis independentes é obtida através do método de Quase-Newton no espaço reduzido. Os valores das variáveis dependentes são calculados resolvendo-se um sistema de equações correspondente às restrições de igualdade linearizadas. Um excessivo tempo de processamento, dada a densidade da matriz Hessiana aproximada, foi sua principal desvantagem. Aperfeiçoamentos deste método foram propostos pelo próprio Burchett [4] utilizando Programação Quadrática Sequencial (PQS) (com aproximação quadrática da função objetivo e linearização das restrições). Neste caso, o problema original é transformado numa sequência de problemas quadráticos. A cada iteração, estes problemas são resolvidos utilizando uma estratégia de conjunto ativo baseada na formulação IQP e a direção de descida é escolhida utilizando um algoritmo de Quase-Newton similarmente ao caso descrito acima.

Trabalhos mais recentes, Sun e outros [36,8], resolvem o problema de FPO formulado como um problema de programação quadrática sequencial pelo método de Newton-Raphson com um cálculo exato da matriz Hessiana. Um tratamento especial da matriz de fatoração através de técnicas de esparsidade e uma estratégia para a identificação do conjunto ativo (EQP) são implementadas. A dificuldade apresentada por este método reside na determinação (“predição”) a cada iteração do conjunto de variáveis que fazem parte do conjunto ativo.

Os métodos conhecidos para a resolução dos problemas de FPO podem ser divididos em duas categorias dependendo do uso ou não, durante o processo iterativo, de um problema de fluxo de potência. Entre aqueles que utilizam o fluxo de potência como uma ferramenta, encontram-se os métodos de gradiente (Dommel-Tinney e “Método de Injeções Diferenciais”) e os algoritmos baseados em programação linear dual. Por outro lado, estão o método de “Lagrangeano aumentado projetado” e os métodos de PQS com diferentes estratégias de conjunto ativo (IQP-EQP). Uma das dificuldades observadas nos algoritmos baseados na resolução de um fluxo de potência quando aplicados a redes sobrecarregadas é que decisão tomar quando o fluxo de potência em si não converge.

O bom desempenho do método de pontos interiores em programação linear de grande porte, quando comparado com o Simplex assim como em programação quadrática e convexa, sugere a extensão a problemas gerais de programação não linear e como um caso particular ao FPO a qual será a finalidade deste trabalho.

2.1.3 Aplicações do FPO

O FPO pode ser considerado como um problema isolado com inúmeras aplicações ou como uma ferramenta para aplicações em tempo real, expansão ótima de fontes de potência reativa, análise de confiabilidade, etc.

O FPO pode ser utilizado em aplicações em tempo real auxiliando ao operador na tomada de decisões. A disponibilidade de diversas funções objetivo e controles permitem determinar as medidas corretivas para correção de violações operativas (subtensões e sobretensões nas barras, sobrecarregamentos nos circuitos, etc.) no sistema tanto em estado normal (caso base) como em situações de contingências (quebra de equipamentos). Um estudo detalhado do FPO com restrições de segurança é encontrado em Stott-Alsaç-Monticelli [35]. O trabalho de Monticelli-Pereira-Granville [31] descreve um método de solução do problema de despacho econômico com restrições de segurança, baseado na decomposição de Benders não linear (ver Geoffrion [13]).

A expansão ótima de fontes de potência reativa consiste na determinação de um plano de investimentos de mínimo custo em equipamentos de compensação reativa (capacitores, reatores, compensadores estáticos, etc.) de tal forma a viabilizar a operação do sistema tanto no caso base como em situações de contingências. Um método de otimização em planejamento de fontes de potência reativa se baseia em uma estrutura hierárquica em três níveis (subproblema de investimentos, subproblema de operação do caso base e subproblema de operação nas contingências). Os subproblemas de operação correspondem a um problema de despacho ótimo de reativo que é um caso particular do FPO (ver Granville-Lima [20]).

Ná Análise de Confiabilidade, o FPO é utilizado como uma ferramenta na avaliação dos cenários críticos tanto no caso base como em situações de contingências. A avaliação dos cenários críticos é feita através de uma minimização de cortes de carga que é um caso particular do FPO (ver [28]).

2.2 Modelagem do Problema de FPO

Como já foi mencionado, o FPO é um problema de programação não linear e pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } g(x) &= 0 \\ h(x) &\leq 0 \\ l &\leq x \leq u \end{aligned}$$

onde:

- z vetor de variáveis do sistema
- $g(z)$ restrições de igualdade
- $h(z)$ restrições de desigualdade (funcionais)
- u, l limites superior e inferior sobre os controles

2.2.1 Variáveis

As variáveis mais comuns num problema de Fluxo de Potência Ótimo são:

- θ_i ângulo de tensão na barra i
- V_i módulo de tensão na barra i
- PG_i geração ativa no gerador i
- QG_i geração reativa no gerador i
- a_{ij} tap do transformador i - j
- φ_{ij} ângulo de defasamento no circuito i - j
- QC_i potência reativa alocada capacitiva na barra i
- QI_i potência reativa alocada indutiva na barra i
- PA_i potência ativa alocada na barra i
- FC_i fração de carga efetiva na barra i (em pu)
- IT_i intercâmbio da área i
- b_{shi} controle de susceptância shunt em banco de capacitor/indutor na barra i
- x_{ij} controle de reatância de capacitor série no circuito i - j

2.2.2 Funções Objetivo

A classe de funções objetivo que serão apresentadas incluem funções lineares ou não lineares. Dependendo do tipo de aplicação, o problema pode ser formulado combinando uma ou mais funções objetivo ao mesmo tempo. Em seguida, serão apresentadas as funções objetivo mais comuns e seus modelos matemáticos.

Mínimo Custo de Geração Ativa

$$f = \sum_{i \in I_G} CP_i PG_i$$

onde: I_G conjunto de geradores controláveis de potência ativa

CP_i custo de geração ativo do gerador i

PG_i geração ativa no gerador i

Mínimo Custo de Geração Reativa

$$f = 1/2 \sum_{i \in I_G} CQ_i QG_i^2$$

onde: I_G conjunto de geradores controláveis de potência reativa

CQ_i custo de geração reativo do gerador i

QG_i geração reativa no gerador i

Mínima Alocação de Potência Reativa

$$f = \sum_{i \in IQ_C} CQ_{C_i} QC_i + \sum_{i \in IQ_I} CQ_{I_i} QI_i$$

onde: IQ_C conjunto de barras de alocação capacitiva de potência reativa

CQ_{C_i} custo de alocação de potência reativa capacitiva na barra i

QC_i potência reativa alocada capacitiva na barra i

IQ_I conjunto de barras de alocação indutiva de potência reativa

CQ_{I_i} custo de alocação de potência reativa indutiva na barra i

QI_i potência reativa alocada indutiva na barra i

Mínima Alocação de Potência Ativa

$$f = 1/2 \sum_{i \in I_P} CP_i PA_i$$

onde: I_P conjunto de barras de alocação de potência ativa

CP_i custo de alocação de potência ativa na barra i

PA_i potência ativa alocada na barra i

Mínima Perda:

$$f = \sum_{i,j \in I_C} (P_{ij} + P_{ji})$$

onde: I_C conjunto de circuitos do sistema

P_{ij}, P_{ji} fluxo ativo nos circuitos $i-j$ e $j-i$

Note que $P_{ij} + P_{ji}$ é igual a perda no circuito $i-j$. As expressões dos fluxos P_{ij} e P_{ji} são relativas às fórmulas (2.6) e (2.7) respectivamente.

Mínimo Corte de Carga

$$f = \sum_{i \in I_C} C_{FC_i} (1 - FC_i) PL_i$$

onde: I_C conjunto de barras de carga

C_{FC_i} custo de corte de carga na barra i

FC_i fração de carga efetiva na barra i (em pu)

PL_i carga original da barra i

Observe que $FC_i PL_i$ representa a carga efetiva na barra i enquanto que $(1-FC_i)PL_i$ é o corte de carga nessa barra.

Mínimo Desvio de Potência Ativa Gerada

$$f = 1/2 \sum_{i \in I_G} \rho (PG_i - \overline{PG_i})^2$$

onde: I_G conjunto de geradores controláveis de potência ativa

ρ peso associado ao desvio de potência ativa

PG_i geração ativa no gerador i

$\overline{PG_i}$ geração ativa inicial no gerador i

Mínimo Desvio de Ângulo de Defasamento

$$f = 1/2 \sum_{i,j \in I_\varphi} \rho (\varphi_{ij} - \bar{\varphi}_{ij})^2$$

onde: I_φ conjunto de barras com controle de ângulo de defasamento

ρ peso associado ao desvio de ângulo de defasamento

φ_{ij} ângulo de defasamento no circuito i-j

$\bar{\varphi}_{ij}$ ângulo de defasamento inicial no circuito i-j

Mínimo Desvio de Tensão

$$f = 1/2 \sum_{i \in I} \rho (V_i - \bar{V}_i)^2$$

onde: I conjunto de barras do sistema

ρ peso associado ao desvio de tensão

V_i tensão na barra i

\bar{V}_i tensão inicial na barra i

Mínimo Desvio de Tap

$$f = 1/2 \sum_{i,j \in I_T} \rho (a_{ij} - \bar{a}_{ij})^2$$

onde: I_T conjunto de transformadores controláveis

ρ peso associado ao desvio de tap

a_{ij} tap do transformador i-j

\bar{a}_{ij} tap inicial no transformador i-j

Mínimo Desvio de Intercâmbio

$$f = 1/2 \sum_{i \in J_I} \rho (IT_i - \bar{IT}_i)^2$$

onde: J_I conjunto de áreas de intercâmbio
 ρ peso associado ao intercâmbio entre áreas
 IT_i intercâmbio da área i
 \overline{IT}_i intercâmbio inicial da área i

Mínimo Desvio de Ponto de Operação

Esta função objetivo é uma combinação das funções objetivo de desvio apresentadas anteriormente.

2.2.3 Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade básicas do FPO correspondem as equações (2.4)-(2.5) do fluxo de potências como estabelecidas na seção 2.1.1 deste capítulo. Dependendo do tipo de aplicação, novas equações podem ser acrescentadas ao FPO como as relativas ao intercâmbio líquido entre áreas ou outras restrições adicionais a critério do usuário.

A seguir, serão apresentadas as restrições acima mencionadas em sua forma geral. Cada problema a ser estudado é um caso particular, tendo um objetivo específico, portanto alguns dos controles podem ser considerados fixos, assim como algumas das variáveis zeradas dependendo da rede analisada.

Equações de Balanço de Potência Ativa

$$\sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} = PG_i - FC_i(1 - A_i - B_i - A_i V_i - B_i V_i^2) PL_i + PA_i \quad (2.12)$$

onde: Ω_i conjunto de barras ligadas à barra i
 P_{ij} fluxo ativo no circuito i - j
 PG_i potência ativa gerada na barra i
 PL_i carga ativa na barra i
 FC_i fator de carga (em pu) na barra i
 A_i fator de carga (em pu) da variação linear da carga ativa em relação à tensão
 B_i fator de carga (em pu) da variação quadrática da carga ativa em relação à tensão

PA_i alocação de potência ativa na barra i

As expressões dos fluxos P_{ij} e P_{ji} correspondem as equações (2.6)-(2.7) respectivamente.

Restrições de Balanço de Potência Reativa

$$\sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} = QG_i + QC_i - QI_i + V_i^2 b_{sh_i} - FC_i (1 - C_i - D_i - C_i V_i - D_i V_i^2) QL_i \quad (2.13)$$

onde: Ω_i conjunto de barras ligadas à barra i

Q_{ij} fluxo reativo no circuito $i-j$

QG_i potência reativa gerada na barra i

QC_i alocação de potência reativa capacitiva na barra i

QI_i alocação de potência reativa indutiva na barra i

V_i módulo de tensão na barra i

b_{sh_i} shunt na barra i

QL_i carga reativa na barra i

FC_i fator de carga (em pu) na barra i

C_i fator de carga (em pu) da variação linear da carga reativa em relação à tensão

D_i fator de carga (em pu) da variação quadrática da carga reativa em relação à tensão

Nas equações apresentadas, é incluído um fator de variação das cargas em relação à tensão. Não considerar esta hipótese é equivalente a declarar $A_i=B_i=C_i=D_i=0$ em cada barra da rede. As expressões dos fluxos Q_{ij} e Q_{ji} correspondem as equações (2.8)-(2.9) respectivamente.

Intercâmbio Líquido entre Áreas

$$IT_1 = \sum_{I_1} P_{ij} + \sum_{I_2} P_{ji} - \sum_{I_3} P_{ij} - \sum_{I_4} P_{ji}$$

- onde: IT_l intercâmbio líquido na área l
- P_{ij} fluxo ativo no circuito $i-j$
- I_1 conjunto de circuitos de interligação $i-j$ tal que
1. a medição é realizada no nó i
 2. o nó $i \in l$
- I_2 conjunto de circuitos de interligação $i-j$ tal que
1. a medição é realizada no nó j
 2. o nó $j \in l$
- I_3 conjunto de circuitos de interligação $i-j$ tal que
1. a medição é realizada no nó i
 2. o nó $i \notin l$
- I_4 conjunto de circuitos de interligação $i-j$ tal que
1. a medição é realizada no nó j
 2. o nó $j \notin l$

2.2.4 Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade correspondem às restrições de canalização nas variáveis e restrições funcionais do tipo máximo carregamento nos circuitos. Estas restrições refletem limites de operação dos equipamentos ou alguma política operativa específica.

Módulo de Tensão:

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max}$$

onde: V_i^{\min} valor mínimo permitido para a tensão na barra i

V_i^{\max} valor máximo permitido para a tensão na barra i

Potência Ativa Gerada:

$$PG_i^{\min} \leq PG_i \leq PG_i^{\max}$$

onde: PG_i^{\min} limite inferior para a geração de potência ativa no gerador i

PG_i^{\max} limite superior para a geração de potência ativa no gerador i

Potência Reativa Gerada:

$$QG_i^{\min} \leq QG_i \leq QG_i^{\max}$$

onde: QG_i^{\min} limite inferior para a geração de potência reativa no gerador i

QG_i^{\max} limite superior para a geração de potência reativa no gerador i

Potência Reativa Alocada Capacitiva:

$$0 \leq QC_i \leq QC_i^{\max}$$

onde: QC_i^{\max} limite superior para a alocação de potência reativa capacitiva

Potência Reativa Alocada Indutiva:

$$0 \leq QI_i \leq QI_i^{\max}$$

onde: QI_i^{\max} limite superior para a alocação de potência reativa indutiva

Potência Ativa Alocada:

$$0 \leq PA_i \leq PA_i^{\max}$$

onde: PA_i^{\max} limite superior para a alocação de potência ativa

Tap do Transformador:

$$a_{ij}^{\min} \leq a_{ij} \leq a_{ij}^{\max}$$

onde: a_{ij}^{\min} valor mínimo permitido para o tap do transformador no circuito i-j

a_{ij}^{\max} valor máximo permitido para o tap do transformador no circuito i-j

Ângulo de Defasamento:

$$\varphi_{ij}^{\min} \leq \varphi_{ij} \leq \varphi_{ij}^{\max}$$

onde: φ_{ij}^{\min} valor mínimo permitido para o ângulo de defasamento no circuito i-j

φ_{ij}^{\max} valor máximo permitido para o ângulo de defasamento no circuito i-j

Rejeição de Carga:

Existem algumas situações como por exemplo sistemas com problemas de tensão ou carregamento nos circuitos onde pode ser necessário diminuir a carga em determinadas barras de forma a viabilizar o sistema. Estes cortes de carga são modelados matematicamente através do fator (FC_i) presente nas equações de balanço ativo e reativo e o qual encontra-se entre os limites:

$$0 \leq FC_i \leq 1$$

Observar que $FC_i = 1$ significa que a carga total da barra é considerada enquanto $FC_i = 0$ anula o valor de sua carga.

Intercâmbio entre Áreas:

$$IT_1^{\min} \leq IT_1 \leq IT_1^{\max}$$

onde: IT_1^{\min} limite inferior para a intercâmbio líquido na área 1

IT_1^{\max} limite superior para a intercâmbio líquido na área 1

Máximo Carregamento nos Circuitos

O máximo carregamento de fluxo num circuito i-j pode ser considerado como:

$$P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \leq S_{ij}^{\max}$$

onde S_{ij}^{\max} é o máximo carregamento do circuito em termos de potência aparente.

Alternativamente, o carregamento pode ser especificado em termos de potência ativa como segue:

$$-S_{ij}^{\max} \leq P_{ij} \leq S_{ij}^{\max}$$

CAPÍTULO 3

PONTOS INTERIORES EM OTIMIZAÇÃO

3.1 Introdução

Este capítulo tem por finalidade introduzir o método de pontos interiores como passo prévio à apresentação do algoritmo de pontos interiores primal-dual para a resolução do problema de FPO que será tema do próximo capítulo. Em primeiro lugar, é descrito um algoritmo de pontos interiores primal-dual para problemas lineares. Numa segunda parte, é estudado o método barreira para a resolução de problemas de programação não linear convexa e não convexa.

Desde os anos 40 quando Dantzig publicou o “Método Simplex” para a resolução de problemas de programação linear, inúmeros aperfeiçoamentos e novas técnicas foram desenvolvidas para a resolução destes problemas. Apesar do Método Simplex ser muito eficiente na prática, ele apresenta complexidade exponencial no pior caso. Este fato foi provado por Klee-Minty [23] que apresentaram um exemplo onde o número de iterações cresce exponencialmente com o número de variáveis do problema.

Durante muitos anos, foi questionada a existência de um algoritmo polinomial para resolver os problemas de programação linear. A resposta veio com a apresentação por Khachiyam [22] de um algoritmo que utiliza o método da elipsóide, com complexidade $O(n^4L)$ operações aritméticas onde L é uma medida do tamanho do problema. Este resultado apesar de teoricamente significativo, não teve implicações práticas. O método de Khachiyam não era competitivo com o Simplex em problemas reais de programação linear.

Mais recentemente, em 1984, Karmarkar publicou um algoritmo de “Métodos Projetados” o qual requer $O(n^{3.5}L)$ operações aritméticas e $O(nL)$ iterações no pior caso. A grande diferença entre o método de Karmarkar e o método Simplex reside em como a região viável é percorrida. Enquanto o Simplex caminha pelos vértices, o algoritmo de Karmarkar acha soluções viáveis no interior do politopo, evitando desta forma a complexidade combinatória derivada dos vértices de solução. Neste sentido, ele também é chamado de “Método de Pontos Interiores”.

O artigo original de Karmarkar forneceu justificativas teóricas rigorosas para o possível bom desempenho do Método de Pontos Interiores e isto provocou um esforço no estudo de tais algoritmos, tanto no aspecto teórico como em aplicações práticas.

Existe hoje uma experiência acumulada que permite dizer que o Método de Pontos Interiores é superior ao Simplex numa vasta quantidade de problemas práticos de programação linear. Uma ampla variedade de algoritmos de pontos interiores foram desenvolvidos e como mencionado em Mc Shane-Monma-Shanno [27], eles podem ser agrupados nas seguintes categorias:

- 1) Métodos Projetados: eles surgiram com o algoritmo de Karmarkar e, posteriormente, foram estudados por Anstreicher [2] e Gonzaga [17] entre outros.
- 2) Métodos Afim Escala: originalmente propostos por Dikin [9] e estudados também por Barnes [3] e Vanderbei-Mekeson-Freedman [39].
- 3) Métodos de Trajetória Central: estudados por Gonzaga [16], Kojima [24], Monteiro-Adler [29], Renegar [34] e Ye [41] entre outros.

Para um estudo mais detalhado dos métodos de pontos interiores, ver Gonzaga [18]. O artigo analisa em profundidade os métodos de trajetória central no contexto de programação linear e apresenta uma introdução aos métodos afim escala e o método projetado de Karmarkar. Hoje existe um consenso geral que computacionalmente o método primal-dual é, pelo menos no contexto de programação linear, o mais apropriado e eficiente entre os métodos de pontos interiores existentes. O fato de trabalhar ao mesmo tempo com variáveis primais e duais permite se ter uma estimativa do gap de dualidade (que está relacionado com o parâmetro barreira) em cada iteração e, com isto, pôde-se desenvolver um critério eficiente de convergência.

Nas próximas seções, será feita uma descrição dos métodos de trajetória central. Inicialmente, será introduzida a função barreira logarítmica em conjunto com a idéia de centro analítico que são a base de motivação deste método. Em seguida, serão apresentados os problemas primal e dual em programação linear, chegando à formulação do método de pontos interiores primal-dual, suas propriedades e um algoritmo de solução baseado no algoritmo proposto por Mc Shane-Monma-Shanno [27]. Além de programação linear, métodos de pontos interiores já foram considerados no contexto de programação quadrática e convexa em geral. Gonzaga [18] apresenta, no seu artigo, uma breve revisão bibliográfica das principais incursões dos métodos de pontos interiores em programação convexa e quadrática. Entretanto, propriedades teóricas de métodos de pontos interiores em programação não linear são bem menos conhecidas que no caso linear. A seção 3.3 deste capítulo apresenta alguns resultados teóricos dos métodos barreira logarítmica no contexto de programação convexa e não convexa. Estes resultados fornecem as condições gerais de convergência dos métodos de pontos interiores no contexto de programação não linear. O capítulo finaliza com uma discussão sobre o problema de mal condicionamento inerente à aplicação da função barreira em otimização.

3.2 Programação Linear

3.2.1 Função Barreira Logarítmica e Centro Analítico

Como já foi mencionado, o bom desempenho dos métodos de tipo Karmarkar deve-se à forma como é evitada a fronteira da região viável. Isto é possível com a ajuda de um recurso clássico de programação não linear estudado pela primeira vez por Frish [12], a função barreira logarítmica:

$$x \in \mathbb{R}_+^n \rightarrow p(x) = -\sum_{i=1, n} \log x_i$$

Considerando o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e definindo o conjunto viável:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

pode-se observar que a função barreira logarítmica cresce indefinidamente a medida que um ponto aproxima-se da fronteira de S .

Um conceito associado à função barreira é o de centro analítico do polítopo S . Ele é definido como o ponto que minimiza a função barreira logarítmica $p(x)$:

$$\begin{aligned} \chi &= \arg \min p(x) \\ &x \in S^\circ \end{aligned}$$

onde $S^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x > 0\}$ é o interior relativo de S .

Uma melhor compreensão desta afirmação pode-se obter da análise da função logaritmo. Do fato de $p(x)$ ser uma função estritamente convexa ($\nabla^2 p(x) = X^{-2}$ é definida positiva em S° , onde X^{-2} é uma matriz diagonal $n \times n$ com elementos diagonais x_i^{-2}) em uma região convexa, o ponto de mínimo em S° é único e não existe ambiguidade na definição de χ . Por outro lado, o centro analítico do polítopo fornece uma boa idéia do centro do polítopo já que a função $p(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 0$, e conseqüentemente, na otimização de $p(x)$, os pontos se afastam da fronteira de S .

3.2.2 Trajetória Central

Com a definição de centro analítico de um polítopo, a próxima etapa é combinar os dois objetivos: tratar de diminuir custos e, ao mesmo tempo, caminhar longe da fronteira. A forma natural como isto pode ser implementado é através da composição de duas funções em uma forma tradicional conhecida como função penalizada interna:

$$\mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+^n \rightarrow f_\mu(x) = c^T x + \mu p(x)$$

Nesta função aparece um parâmetro, o “parâmetro barreira”, o qual introduz um peso associado à função barreira logarítmica. Para cada μ , seja $x(\mu)$ o único ponto tal que:

$$\begin{aligned} x(\mu) &= \arg \min f_\mu(x) \\ &x \in S^\circ \end{aligned}$$

Este ponto é o “ponto central” e a curva definida por ele:

$$\mu \in \mathbb{R} \rightarrow x(\mu)$$

é denominada “trajetória central”. Esta curva tem a importante propriedade de que quando μ decresce ($\mu \rightarrow 0$), $x(\mu) \rightarrow x(0)$ que é a solução ótima de (3.1).

Para entender melhor o significado de $x(\mu)$, observe que ele também pode ser definido como:

$$x(\mu) = \arg \min_{x \in S^0} \{p(x) / c^T x = c^T x(\mu)\}$$

ou seja, para cada parâmetro, tem-se um ponto que nada mais é que o centro analítico na curva de nível associada ao custo constante $c^T x(\mu)$. Desta forma, conclui-se que a trajetória central é a curva formada pelos centros analíticos de cada curva de custo constante.

A trajetória central fornece, então, uma medida de como é possível obter “bons” pontos na região viável e o ideal seria construir um algoritmo que gerasse pontos pertencentes a tal curva. Apesar disto ser computacionalmente inviável, existem bons argumentos teóricos que permitem achar a cada iteração soluções “próximas” dela.

3.2.3 Formulação Primal Dual

Considerando o problema linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s. a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

e seu dual :

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s. a.} \quad & A^T y + z = c \\ & z \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uma solução ótima x de (3.2) e uma solução ótima y de (3.3) devem satisfazer:

$$c^T x - b^T y = 0 \tag{3.4}$$

Por substituição direta mostra-se que o lado esquerdo de (3.4) é equivalente a $(x^T z)$ o qual é conhecido como “Teorema de Complementariedade de Folga”.

Analisando as restrições dos problemas primal e dual do item anterior, observa-se que as únicas restrições de desigualdade que aparecem são do tipo de canalização (“ ≥ 0 ”). Este tipo de restrições serão incluídas na função objetivo através da função barreira logarítmica.

A parametrização da curva (no espaço primal) que definirá o problema de pontos interiores primal-dual é a seguinte:

$$f_{\mu}(x) = c^T x + \mu p(x) \quad (3.5)$$

Seja, então, o problema de barreira associado ao problema primal (3.2):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \mu p(x) \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analogamente, o problema de barreira associado ao dual (3.3) é:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y - \mu p(z) \\ \text{s.a.} \quad & A^T y + z = c \end{aligned} \quad (3.7)$$

As funções Lagrangeanas associadas aos problemas (3.6) e (3.7) são:

$$LP(x, \lambda) = c^T x + \mu p(x) - \lambda^T (Ax - b)$$

$$LD(y, z, \pi) = b^T y - \mu p(z) - \pi^T (A^T y + z - c)$$

Considerando que, na solução ótima $\lambda=y$ e $\pi=x$, as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) impostas em LP e LD resultam:

$$(\nabla_x LP) \quad c - \mu X^{-1} e - A^T y = 0 \quad (3.8)$$

$$(\nabla_{\lambda} LP) \quad Ax - b = 0 \quad (3.9)$$

$$(\nabla_y LD) \quad b^T - x^T A^T = 0 \quad (3.10)$$

$$(\nabla_z LD) \quad \mu Z^{-1} e - x = 0 \quad (3.11)$$

$$(\nabla_{\pi} LD) \quad A^T y + z - c = 0 \quad (3.12)$$

Onde X e Z são matrizes diagonais nxn cujos elementos diagonais são as componentes dos vetores x e z respectivamente e $e^t = (1, \dots, 1)$.

Observe que (3.9) e (3.10) são redundantes e a substituição de (3.11) em (3.8) implica em (3.12). Com isto, o sistema (3.8) - (3.12) é equivalente a:

$$XZ = \mu e \quad (3.13)$$

$$Ax = b \quad (3.14)$$

$$A^T y + z = c \quad (3.15)$$

Estas três equações que determinam a otimalidade dos dois problema são interessantes, pois estabelecem relação entre os problemas primal e dual.

Observe-se que as duas últimas equações asseguram viabilidade primal e dual respectivamente, enquanto (3.13) impõe um vínculo direto entre o parâmetro barreira e o gap de dualidade, propriedade pela qual o método recebe a denominação primal-dual.

A otimalidade do problema original será alcançada quando o gap de dualidade torna-se zero ou, equivalentemente, quando $\mu=0$. Por este motivo, durante o processo iterativo, será imposto um decréscimo no parâmetro barreira ($\mu_{k+1} < \mu_k$) de forma tal que $\mu_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$.

3.2.4 Resolução do Sistema de Equações e Atualização

No algoritmo primal-dual, a direção de busca em cada iteração é obtida a partir da aplicação do método de Newton-Raphson ao sistema (3.13)-(3.15). Assumindo que um ponto interior primal e dual viável (x,y,z) é conhecido e portanto (3.14) e (3.15) são satisfeitas, uma iteração do método de Newton aplicado ao sistema (3.13)-(3.15) para determinar $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ corresponde a :

$$\begin{aligned} Z\Delta x + X\Delta z &= -XZe + \mu e \\ A\Delta x &= 0 \\ A^T \Delta y + \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Depois de resolvido este sistema, novos valores de x, y e z são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \alpha \Delta x \\ \bar{y} &= y + \alpha \Delta y \\ \bar{z} &= z + \alpha \Delta z \end{aligned} \quad (3.17)$$

O tamanho do passo α é escolhido tal que x e z permaneçam positivos.

Independentemente do valor ótimo da função objetivo, soluções primais e duais são sempre conhecidas, sendo possível se computar a cada passo o gap de dualidade $c^T x - b^T y$. Por substituição direta pode ser demonstrado que:

$$c^T \bar{x} - b^T \bar{y} = c^T x - b^T y - ((c^T x - b^T y) - n\mu)\alpha \quad (3.18)$$

A escolha do parâmetro barreira μ e do tamanho do passo α no algoritmo estão diretamente relacionados ao requisito de decréscimo no gap de dualidade. Primeramente seja μ , tal que:

$$c^T x - b^T y - n\mu > 0$$

e, para μ fixo, escolhe-se o maior α que assegura a positividade de x e z , produzindo assim o maior decréscimo no gap de dualidade (ver (3.18)).

Varias estratégias para a escolha do parâmetro de barreira foram propostas na literatura. Por exemplo, Monteiro-Adler [29] escolheram o parâmetro barreira inicial $\mu_0 = 2^{O(L)}$ (onde L é uma medida do tamanho do problema) e reduziram μ a cada etapa por:

$$\mu_{k+1} = (1 - 0.1 / \sqrt{n})\mu_k$$

Com esta estratégia, chegaram a excelentes resultados teóricos com $O(\sqrt{nL})$ iterações e $O(n^3)$ operações aritméticas por iteração (resultado da inversão da matriz) dando um tempo total $O(n^{3.5}L)$. O algoritmo é um algoritmo de passos curtos o qual assegura proximidade à trajetória central e mostrou-se consideravelmente lento na prática.

No trabalho de Shanno e outros [27], foi utilizada a seguinte correção do parâmetro barreira:

$$\mu_k = (c^T x - b^T y) / n^2$$

Com esta atualização obtém-se de (3.18):

$$c^T \bar{x} - b^T \bar{y} = (c^T x - b^T y)(1 - \alpha + \alpha / n)$$

o qual garante também um decréscimo no gap de dualidade. Observe que para valores de α próximos de 1, o gap de dualidade se reduz por um fator de n em cada iteração. Este critério de atualização do parâmetro barreira juntamente com a escolha separada dos passos primal e dual:

$$\begin{aligned} \alpha_P &= \min(x_i + \alpha_i \Delta x_i \geq 0) \\ \alpha_i &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_D &= \min(z_i + \alpha_i \Delta z_i \geq 0) \\ \alpha_i &> 0 \end{aligned}$$

tem dado melhores resultados computacionais que a consideração de um único α primal e dual. Nesse caso, as atualizações correspondentes são:

$$\begin{aligned} x &= x + \gamma \alpha_P \Delta x \\ y &= y + \gamma \alpha_D \Delta y \\ z &= z + \gamma \alpha_D \Delta z \end{aligned}$$

onde $\gamma = 0.9995$ é uma constante utilizada para evitar as singularidades na proximidade da barreira logarítmica.

Uma opção alternativa seria não exigir que a cada passo o gap decresça por um fator de n . Por exemplo seja:

$$\mu_k = \beta (c^T x - b^T y) / n$$

onde $\beta < 1$

e conseqüentemente:

$$\begin{aligned} c^T \bar{x} - b^T \bar{y} &= (c^T x - b^T y)(1 - \alpha + \beta \alpha) \\ &= (c^T x - b^T y)(1 - (1 - \beta) \alpha) \end{aligned}$$

Esta estratégia assegura uma diminuição mais lenta do gap de dualidade e produz maior estabilidade, principalmente nas primeiras iterações, onde o fator de n pode exigir diminuição muito acelerada do gap quando o problema ainda está longe do ótimo.

3.2.5 Algoritmo de Solução

Dada a impossibilidade de computar um ponto central $x(\mu)$ exatamente, a idéia dos métodos de pontos interiores primal-dual é avançar por pontos “próximos” da trajetória central. A cada iteração um ponto $y(\mu)$ é encontrado o qual é uma boa aproximação ao ponto $x(\mu)$. Na próxima iteração o valor de μ decresce e o processo iterativo é repetido até que o gap de dualidade seja suficientemente pequeno. O tamanho do passo dos algoritmos de trajetória central é controlado pela escolha do parâmetro β ($\mu_{k+1} = (1 - \beta)\mu_k$) o qual determina com que velocidade o parâmetro μ tende a zero.

Outro ponto importante para a formulação do algoritmo e que ainda não foi mencionado é a obtenção de uma solução inicial viável. Existem diferentes estratégias para tal. Alguns criterios foram apresentados por Mc Shane-Monma-Shanno [27] e Lustig-Marsten-Shanno [26], onde alterações e relaxações são consideradas de forma a trabalhar com soluções iniciais viáveis. Para fins de apresentação do algoritmo, supõe-se que uma solução inicial primal-dual viável (x_0, y_0, z_0) esta disponível.

Em termos gerais o algoritmo de solução consiste em:

1. Dada (x_0, y_0, z_0) uma solução primal-dual viável
2. Resolva o sistema de equações (3.16) para $\Delta^k x$, $\Delta^k y$ e $\Delta^k z$
3. Escolha os passos primal e dual e o parâmetro barreira

$$\alpha_P = \min(x_i + \alpha_i \Delta x_i \geq 0) \\ \alpha_i > 0$$

$$\alpha_D = \min(z_i + \alpha_i \Delta z_i \geq 0) \\ \alpha_i > 0$$

$$\mu_{k+1} = \beta \text{ gap}^k/n$$

4. Atualização

$$x_{k+1} = x_k + 0.9995 \alpha_P \Delta x^k$$

$$y_{k+1} = y_k + 0.9995 \alpha_D \Delta y^k$$

$$z_{k+1} = z_k + 0.9995 \alpha_D \Delta z^k$$

5. Teste de otimalidade

Se ($\text{gap} < \varepsilon$ e $\mu < \varepsilon$)

então

PARE

senão

VOLTE ao passo 2

3.2.6 Gap de Dualidade-Parâmetro Barreira

Neste paragrafo será dada a relação entre o parâmetro barreira e o gap de dualidade para o problema linear na forma:

$$\min c^T x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ l \leq x \leq u$$

Com a inclusão de variáveis de folga, este problema resulta equivalente a:

$$\min c^T x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ x - s_1 = l \\ x + s_2 = u \\ s_1, s_2 \geq 0 \tag{3.19}$$

e seu dual:

$$\begin{aligned}
& \max \mathbf{b}^T \lambda + \mathbf{l}^T \pi_1 + \mathbf{u}^T \pi_2 \\
& \text{s.a. } \mathbf{A}^T \lambda + \pi_1 + \pi_2 = \mathbf{c} \\
& \quad \pi_1 \geq 0, \quad \pi_2 \leq 0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Por outro lado considerando a função barreira logarítmica para o problema primal:

$$\begin{aligned}
& \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{i=1,n} \log s_{1i} - \mu \sum_{i=1,n} \log s_{2i} \\
& \text{s.a. } \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \quad \mathbf{x} - \mathbf{s}_1 = \mathbf{l} \\
& \quad \mathbf{x} + \mathbf{s}_2 = \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

e impondo as condições de KKT a (3.21) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} - \mathbf{A}^T \lambda - \pi_1 - \pi_2 &= 0 \\
\mu / s_1 - \pi_1 &= 0 \\
\mu / s_2 + \pi_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

com (λ, π_1, π_2) viável para o problema (3.20). Agora por substituição direta chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbf{s}_1^T \pi_1 - \mathbf{s}_2^T \pi_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - (\mathbf{b}^T \lambda + \mathbf{l}^T \pi_1 + \mathbf{u}^T \pi_2) \tag{3.23}$$

que é o gap de dualidade para o problema (3.19)-(3.20).

Por outro lado, de (3.22) é fácil ver:

$$\mathbf{s}_1^T \pi_1 - \mathbf{s}_2^T \pi_2 = 2n\mu$$

Desta forma o gap de dualidade resulta:

$$\text{gap} = \mathbf{s}_1^T \pi_1 - \mathbf{s}_2^T \pi_2 = 2n\mu \tag{3.24}$$

obtendo uma relação para o parâmetro barreira:

$$\mu = \frac{\mathbf{s}_1^T \pi_1 - \mathbf{s}_2^T \pi_2}{2n}$$

Na construção de um algoritmo de solução uma diminuição do parâmetro barreira será considerada a cada iteração, tal que:

$$\mu = \beta \frac{(\mathbf{s}_1^T \pi_1 - \mathbf{s}_2^T \pi_2)}{2n} \tag{3.25}$$

com $\beta=0.1$ por exemplo, de forma análoga como analisado no paragrafo 3.2.4.

3.3 Programação Não Linear

3.3.1 Método Barreira

Originalmente os métodos barreira foram formulados para problemas de programação não linear somente com restrições de desigualdade, da forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $f(\cdot)$ e $h_i(\cdot)$ $i = 1, \dots, m$ são duas vezes diferenciáveis e a região viável tem interior não vazio (ver Frish [12] para maiores detalhes).

Considerando a função barreira logarítmica, o método barreira transforma o problema original numa sequência de problemas sem restrições parametrizados pelo parâmetro barreira μ , da forma:

$$\min B(x, \mu) \quad (3.27)$$

onde: $B(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1, m} \log(h_i(x))$

$h_i(x)$ estritamente positiva $\forall i=1, \dots, m$.

O algoritmo de solução para o método barreira pode ser resumido nos seguintes passos:

1. Seja x_0 estritamente viável e $\mu_0 > 0$
2. Calcule $x(\mu_k)$ solução de $B(x, \mu_k)$
3. Teste de Otimalidade:

Se x_k é solução para o problema (3.26)

então

PARE

senão

$$x_{k+1} = x_k$$

Escolha $\mu_{k+1} < \mu_k$

VOLTE ao passo 2

Na prática o cálculo de $x(\mu_k)$ é obtido aproximadamente com poucas iterações de algum método de otimização irrestrita, no entanto para fins teóricos é assumido que $x(\mu_k)$ é a solução exata de (3.27).

Em seguida serão apresentados os resultados teóricos de convergência do algoritmo para problemas convexos e não convexos. Ver Fiacco-McCormick [11] e M.Wright [40] para detalhes de demonstração.

3.3.2 Problemas Convexos

Um problema da forma (3.26) é convexo se a função $f(x)$ é convexa e cada uma das restrições $h_i(x) \geq 0$ é côncava para $i = 1, \dots, m$. Observe que esta definição inclui como um caso especial os problemas lineares.

Seja o seguinte resultado prévio ao enunciado do teorema principal:

Teorema 1:

Dado o problema convexo:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

tal que $S = \{x / h_i(x) > 0 \quad i = 1, \dots, m\}$

$$M = \{x / f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S\}$$

sejam não vazios e M é limitado. Então para todo $\mu_k > 0$, o conjunto de nível da função barreira:

$$S(c, \mu_k) = \{x \in S / B(x, \mu_k) \leq c\}$$

é compacto.

Teorema 2:

Seja o problema convexo com as hipóteses do Teorema 1, tal que o conjunto de pontos estritamente viáveis e não vazio e o conjunto de minimizadores é não vazio e limitado. Seja também μ_k uma subsequência decrescente de parâmetros positivos tal que $\mu_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ e f^* o valor ótimo de f . Então:

- 1) Para cada μ_k a função penalizada $B(\cdot, \mu_k)$ tem um mínimo em S .
- 2) Qualquer sequência $\{y_k\}$ de minimizadores de $B(\cdot, \mu_k)$ tem uma subsequência convergente, tal que cada ponto limite da subsequência é um ponto de mínimo local do problema original.
- 3) Seja $\{x_k\}$ subsequência de $\{y_k\}$ dada por 2), então:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f^*$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B(x_k, \mu_k) = f^*$$

3.3.3 Problemas Não Convexos

Nos problemas de programação não convexa, hipóteses mais fortes são necessárias para garantir convergência.

A propriedade dada pelo Teorema 1 na qual os conjuntos de nível da função barreira são limitados caso o conjunto de minimizadores seja limitado, não se verifica no caso não convexo. Um exemplo disto pode ser encontrado em M.Wright [40]. Uma definição prévia será introduzida antes da apresentação do teorema de convergência.

Definição:

Um conjunto M^* tal que $M^* \subset M \subset \mathbb{R}^n$ é dito separável de M se existe um conjunto fechado F tal que $M^* \subset F^0$ (onde F^0 é o interior de F) e $M \cap F = M^*$.

Teorema 3:

Dado o problema não linear:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Seja $S = \{x / h_i(x) > 0 \quad i = 1, \dots, m\}$ o conjunto de pontos estritamente viáveis, M o conjunto de minimizadores e f^* o valor da função objetivo na solução ótima. Seja $\{\mu_k\}$ uma sequência decrescente de parâmetros positivos tal que $\mu_k \rightarrow 0$ como $k \rightarrow +\infty$. Assumindo que:

- a) Existe um conjunto de minimizadores locais M^* separável de M .
- b) $M^* \cap \bar{S}$ é não vazio (onde \bar{S} é o fecho do conjunto de pontos estritamente viáveis).

Então os seguintes resultados se verificam:

- 1) Para μ suficientemente pequeno, $B(\cdot, \mu_k)$ tem um mínimo no interior relativo de S e qualquer sequência $\{y_k\}$ de minimizadores tem uma subsequência $\{x_k\}$ convergente.
- 2) Seja $\{x_k\}$ uma subsequência dada por 1), então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \text{ com } x^* \in M^*$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(x_k, \mu_k) = f^*$$

Observe neste teorema a hipótese sobre M^* . Considerar M^* um subconjunto separável de M com interseção não vazia com o fecho de S assegura a existência de um mínimo não isolado da região viável. Por definição o algoritmo do método barreira encontra a cada iteração um ponto estritamente viável e pelo teorema existe uma subsequência (x_k) convergente a um ponto de ótimo (x^*) . Portanto o ponto de acumulação da sequência gerada pelo algoritmo não pode ser um ponto isolado isto é, em cada vizinhança de x^* existe um ponto estritamente viável.

3.3.4 Trajetória Central

Sob determinadas condições, o conjunto de minimizadores da função barreira pode ser visto como uma função da variável independente μ traçando uma trajetória de pontos $x^*(\mu)$ convergentes a x^* . As hipóteses necessárias para definir uma única trajetória são mais fortes que aquelas necessárias para garantir convergência.

Teorema 4:

Dado o problema não linear como em (3.26):

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

tal que o conjunto de pontos estritamente viáveis S é não vazio. Seja x^* um ponto de mínimo do problema restrito tal que:

- Existe λ^* com (x^*, λ^*) satisfazendo as condições de KKT com complementaridade estrita.
- A Hessiana da função Lagrangeana em (x^*, λ^*) é definida positiva no espaço nulo das restrições ativas.
- O gradiente das restrições ativas é linearmente independente.

Então:

- Existe uma subsequência $\{x_k\}$ de minimizadores de $B(\cdot, \mu_k)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*$$
- Para tal subsequência $\{x_k\}$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k / h^i(x_k) = \lambda_i^k \quad i = 1, \dots, m$$

- 3) Existe uma única curva continuamente diferenciável $x(\mu)$ de minimizadores de $B(\cdot, \mu)$ numa vizinhança de $\mu=0$, com:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(\mu) = x^*$$

3.3.5 O Problema de Condicionamento Associado à Aplicação da Função Barreira

Nesta seção serão analisados os aspectos de mal condicionamento associados à aplicação da função barreira.

Seja:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.28)$$

o problema de otimização original, e:

$$\min B(x, \mu) \quad (3.29)$$

onde: $B(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1, m} \log(h_i(x))$

o subproblema com função barreira associado.

A aplicação do método de Newton ao problema (3.29) implica na resolução de um sistema de equações:

$$\nabla^2 B(x, \mu) v = w \quad (3.30)$$

onde $\nabla^2 B(x, \mu)$ é a Hessiana da função barreira.

Observe que:

$$\nabla^2 B(x, \mu) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1, m} \mu / h_i(x) \nabla^2 h_i(x) + \mu A^T H^{-2} A \quad (3.31)$$

onde: A é o Jacobiano das restrições ($m \times n$)

H é a matriz diagonal ($m \times m$), com elementos diagonais $h_i(x)$

Seja agora λ^* multiplicador de Lagrange associado ao ponto x^* solução do problema original. Sob as hipóteses do Teorema 4, pode-se mostrar que (ver M. Wright [40]):

$$\mu / h_i(x) \rightarrow \lambda^* \text{ quando } \mu \rightarrow 0$$

$$\mu / h_i^2(x) \rightarrow 0 \text{ quando } \mu \rightarrow 0 \text{ nas restrições inativas em } x^*$$

$$\mu / h_i^2(x) \rightarrow +\infty \text{ quando } \mu \rightarrow 0 \text{ nas restrições ativas em } x^*$$

Observando a equação (3.31) resulta de imediato que as dois primeiros termos convergem à Hessiana da Lagrangeana do problema original quando $\mu \rightarrow 0$. Portanto problemas de mal condicionamento ocasionados pela função barreira são provenientes do termo:

$$\mu A^T H^{-2} A$$

Seja $\lambda_i = \mu / h_i(x)$ para $i=1, \dots, m$, então:

$$\mu A^T H^{-2} A = A^T (\Lambda^2 / \mu) A = A^T D A \quad (3.32)$$

onde Λ a matriz diagonal ($m \times m$) cujos elementos diagonais são λ_i e seja Λ^* a matriz limite de Λ .

Sendo m o número de restrições ativas em x^* , os seguintes casos são considerados:

- 1) Se $m = 0$ ou seja não existem restrições ativas, $D \rightarrow 0$ e a Hessiana da função barreira converge à Hessiana do problema original.
- 2) Se $m = n$, na hipóteses de complementaridade estrita, o condicionamento da Hessiana depende do condicionamento de $A^T (\Lambda^*)^2 A$ (a matriz restrita às restrições ativas). Portanto a Hessiana será bem condicionada caso A^T e Λ^* o sejam apesar dos elementos diagonais tenderem a infinito no limite.
- 3) Se $0 < m < n$, no limite a matriz D contém m elementos não limitados e $(n-m)$ elementos iguais a zero. Isto implica que assintoticamente a matriz $A^T D A$ é não limitada e tem posto incompleto. Murray [32] mostrou que a matriz $\nabla^2 B(x, \mu)$ tem m autovalores não limitados, correspondentes aos autovetores no espaço imagem de A^T e $(n-m)$ autovalores limitados, correspondentes aos autovetores no espaço nulo de A . Neste caso a Hessiana da função barreira torna-se mal condicionada numa vizinhança da solução ótima e singular no limite.

Como já foi mencionado os métodos barreira surgiram inicialmente para resolver problemas de programação não linear somente com restrições de desigualdade onde a região viável tivesse interior não vazio. Uma das maiores dificuldades apresentada por eles é o mal condicionamento da matriz Hessiana, como analisado anteriormente, provocando problemas numéricos na prática. Um novo interesse nos métodos barreira foi provocado pelo algoritmo de pontos interiores projetado de Karmarkar. Gill-Murray e outros [14] provaram a equivalência deste método com um método barreira projetado onde a barreira é somente considerada nas restrições de canalização.

Mais especificamente, o problema (3.28) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h_i(x) - s_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ s_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.33)$$

e o subproblema barreira associado:

$$\begin{aligned} \min B(x, \mu) \\ \text{s.a. } h_i(x) - s_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde: $B(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1, m} \log s_i$

Observe que enquanto o problema (3.29) é irrestrito, o problema (3.34) tem restrições não lineares de igualdade. As condições de otimalidade de primeira ordem associadas ao problema (3.34) são:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \sum_{i=1, m} \lambda_i \nabla h_i(x) &= 0 \\ -\mu S^{-1} e + \lambda &= 0 \\ -h(x) + s &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde S é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são as componentes do vetor s e $e^t = (1, \dots, 1)$.

A aplicação do método de Newton para a resolução do sistema (3.35) implica na resolução do seguinte sistema de equações:

$$H(x, s, \mu) v = w \quad (3.36)$$

onde:

$$H(x, s, \mu) = \begin{bmatrix} W(x, \mu) & 0 & -A^T(x) \\ 0 & \mu S^{-2} & 1 \\ -A(x) & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(x, \mu) = \nabla f(x) - \sum_{i=1, m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x)$$

$$A(x) = \nabla h(x)$$

S é a matriz diagonal $m \times m$ com elementos diagonais as componentes de s

Observe que com esta formulação as contribuições dos termos barreira se restringem à diagonal da matriz associada ao sistema. Apesar da matriz $H(x,s,\mu)$ poder se tornar mal condicionada a medida que $\mu \rightarrow 0$, pode-se verificar que a solução do sistema (3.36) é mais estável da que do sistema (3.30). A vantagem numérica da formulação (3.33) pode ser melhor compreendida com um exemplo. Seja para isso o seguinte problema quadrático (considerando a formulação (3.28)):

Problema 1

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

e o subproblema barreira associado:

$$\min(x_1^2 + x_2^2) - \mu \log(x_1 + x_2 - 1) - \mu \log x_1 - \mu \log x_2 \tag{3.38}$$

As condições de otimalidade para (3.38) são:

$$2 x_1 - \mu / (x_1 + x_2 - 1) - \mu / x_1 = 0$$

$$2 x_2 - \mu / (x_1 + x_2 - 1) - \mu / x_2 = 0$$

A resolução deste sistema de equações por Newton-Raphson resulta em:

$$\begin{bmatrix} 2 + \mu/x_1^2 + K & K \\ K & 2 + \mu/x_2^2 + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

onde $K = \mu / (x_1+x_2-1)^2$

Observe que na solução ótima ($x_1 = x_2 = 1/2$), o número de restrições ativas ($m = 1$) é menor que o número de variáveis do problema ($n = 2$) e portanto a matriz torna-se mal condicionada na proximidade da solução e singular no limite como analisado anteriormente. Por outro lado, seja agora o mesmo problema formulado como em (3.33):

Problema 2

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - s = 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & s \geq 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

e o subproblema barreira associado:

$$\begin{aligned} \min(x_1^2 + x_2^2) - \mu \log x_1 - \mu \log x_2 - \mu \log s \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 - s = 1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

As condições de KKT de (3.41) são:

$$\begin{aligned} 2x_1 - \lambda - \mu/x_1 &= 0 \\ 2x_2 - \lambda - \mu/x_2 &= 0 \\ \lambda - \mu/s &= 0 \\ x_1 + x_2 - s - 1 &= 0 \end{aligned}$$

A resolução deste sistema de equações pelo método de Newton-Raphson resulta em:

$$\begin{bmatrix} 2 + \mu/x_1^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 + \mu/x_2^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mu/s^2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Observe que na solução ótima ($x_1 = x_2 = 1/2, s = 0$), o número de restrições ativas m é igual a 1 e da mesma forma que no problema 1 a matriz de solução é mal condicionada no limite. Apesar disso o fato dos termos barreira aparecerem só na diagonal torna a solução do sistema de equações (3.42) mais estável que a do sistema (3.39) como será analisado a seguir.

Quando $\mu \rightarrow 0$, a matriz do sistema (3.39) se aproxima assintoticamente a uma matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} 2 + K & K \\ K & 2 + K \end{bmatrix}$$

onde $K \rightarrow +\infty$. Considere o lado direito fixo e seja a resolução do seguinte sistema de equações para valores crescentes de K .

$$\begin{bmatrix} 2 + K & K \\ K & 2 + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A seguinte tabela mostra a evolução do erro relativo ($er = \|x-v\|/\|x\|$) a medida que K cresce, onde x é a solução matemática do sistema (3.43) e v é obtido usando Matlab num PC 486 de 66 Mhz com aritmética de dupla precisão.

Valor de K	Erro Relativo
1.0e+01	3.05e-16
1.0e+03	2.17e-14
1.0e+05	9.37e-14
1.0e+07	1.09e-10
1.0e+09	2.77e-08
1.0e+11	3.87e-06
1.0e+13	2.80e-04
1.0e+15	7.80e-04

Tabela 3.1 - Erro relativo (problema 1)

Da forma análoga é resolvido o seguinte sistema de equações para o problema 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & K & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

onde a matriz foi aproximada assintoticamente quando $\mu \rightarrow 0$. A seguinte tabela, da mesma forma que no caso anterior, mostra a variação do erro relativo para valores crescentes de K.

Valor de K	Erro Relativo
1.0e+01	0(e-17)
1.0e+03	1.53e-17
1.0e+05	3.70e-17
1.0e+07	1.11e-16
1.0e+09	1.11e-16
1.0e+11	0(e-17)
1.0e+13	1.11e-16
1.0e+15	1.28e-16

Tabela 3.2 - Erro relativo (problema 2)

Observe que na Tabela 3.1 o erro relativo cresce quando K aumenta ao contrário do que acontece na Tabela 3.2 onde ele permanece praticamente invariável. Desta forma observa-se que a contribuição dos termos barreira fora da diagonal fazem com que as perdas ocasionadas pela aritmética de precisão finita, na resolução do sistema de

equações, não possam ser consideradas desprezíveis. Para um análise em profundidade deste aspecto para problemas quadráticos em forma geral ver Ponceleón [33].

CAPÍTULO 4

PONTOS INTERIORES PRIMAL-DUAL EM FPO

Neste capítulo são tratados os aspectos computacionais do método de pontos interiores primal-dual na resolução do FPO. Em primeiro lugar é formulado o método barreira associado ao FPO e apresentado o algoritmo de solução. A segunda etapa corresponde ao estudo da estrutura da matriz e os critérios de ordenação e fatoração.

No estudo do método de pontos interiores primal-dual para problemas de programação não linear podemos citar o trabalho de Lasdon-Plammer-Gang [25]. O algoritmo proposto neste capítulo tem alguns pontos em comuns com o desenvolvido por eles, principalmente no tratamento das variáveis primais e duais e na resolução do sistema de equações via o método de Newton. Características próprias do problema elétrico de FPO serão exploradas de forma a viabilizar a resolução do sistema de equações, como será analisado no decorrer do capítulo. Por outro lado este trabalho se baseia no método de pontos interiores proposto por Granville [19] para a resolução do problema de despacho ótimo de reativo que é um caso particular do FPO, contendo alguns pontos em comuns principalmente na formulação do problema e nos critérios de atualização e convergência. Entretanto a necessidade de se considerar os vários tipos de controles, funções objetivo e restrições que compõem o problema geral de FPO implicou em uma série de avanços em termos de implementação computacional no método básico apresentado em [19].

4.1 Formulação do Problema - Barreira Logarítmica

Sem perda de generalidade o problema de FPO apresentado na equação (2.1) pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h(x) &= 0 \\ l &\leq x \leq u \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde:

$h(x)$ inclui as equações de balanço e as restrições funcionais

l, u limites sobre as variáveis de controle, variáveis de estado e folgas associadas às restrições funcionais

Com a inclusão de variáveis de folga nas restrições de desigualdade, o sistema (4.1) resulta equivalente a:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a. } h(x) &= 0 \\ x - s_1 &= l \\ x + s_2 &= u \\ s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

As restrições de desigualdade foram agora transformadas em variáveis não negativas podendo assim ser tratadas através de penalização interna. Com a inclusão da barreira logarítmica na função objetivo, o problema original é transformado em uma sequência de problemas parametrizados pelo parâmetro barreira (μ) como segue:

$$\begin{aligned} \min f(x) - \mu \sum_{i=1,n} \log s_{1i} - \mu \sum_{i=1,n} \log s_{2i} \\ \text{s.a. } h(x) = 0 \\ x - s_1 = 1 \\ x + s_2 = u \end{aligned} \quad (4.3)$$

Observe que para cada valor do parâmetro barreira, resolver (4.3) é equivalente a achar o ponto sobre a trajetória central no interior da região viável com relação às restrições de canalização.

4.1.1 Condições de Otimalidade

Pelas condições de otimalidade de primeira ordem de KKT existem multiplicadores de Lagrange λ , $\pi_1 \geq 0$ e $\pi_2 \leq 0$ tal que a função Lagrangeana associada a (4.3):

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \pi_1, \pi_2, s_1, s_2) = f(x) - \mu \sum_{i=1,n} \log s_{1i} - \mu \sum_{i=1,n} \log s_{2i} - \\ \lambda^T h(x) - \pi_1^T (x - s_1 - 1) - \pi_2^T (x + s_2 - u) \end{aligned} \quad (4.4)$$

tem em $(x, \lambda, \pi_1, \pi_2, s_1, s_2)$ um ponto estacionário satisfazendo:

$$(\nabla L_x) \quad \nabla f(x) - \lambda^T \nabla h(x) - \pi_1 - \pi_2 = 0 \quad (4.5)$$

$$(\nabla L_\lambda) \quad h(x) = 0 \quad (4.6)$$

$$(\nabla L_{\pi_1}) \quad x - s_1 + 1 = 0 \quad (4.7)$$

$$(\nabla L_{\pi_2}) \quad x + s_2 - u = 0 \quad (4.8)$$

$$(\nabla L_{s_1}) \quad \mu e = S_1 \pi_1 \quad (4.9)$$

$$(\nabla L_{s_2}) \quad \mu e = -S_2 \pi_2 \quad (4.10)$$

com:

∇f : gradiente da função objetivo em x

∇h : gradiente das restrições de igualdade em x

S_1 : matriz diagonal com valores diagonais as componentes do vetor s_1

S_2 : matriz diagonal com valores diagonais as componentes do vetor s_2

Observe que os critérios de sinal em π_1 e π_2 são deduzidos de (4.9)-(4.10) dada a positividade de S_1 , S_2 e μ .

4.1.2 Resolução do Sistema de Equações

A aplicação do método de Newton-Raphson ao sistema de equações (4.5)-(4.10) resulta no seguinte sistema de equações de segunda ordem:

$$(\nabla^2 f(x) - \lambda^T \nabla^2 h(x)) \Delta x - \nabla h(x) \Delta \lambda - \Delta \pi_1 - \Delta \pi_2 = -t \quad (4.11)$$

$$\nabla^T h(x) \Delta x = -h(x) \quad (4.12)$$

$$\Delta x - \Delta s_1 = -(x - s_1 - l) \quad (4.13)$$

$$\Delta x + \Delta s_2 = -(x + s_2 - u) \quad (4.14)$$

$$-\Pi_1 \Delta s_1 - S_1 \Delta \pi_1 = -(\mu e - S_1 \pi_1) \quad (4.15)$$

$$\Pi_2 \Delta s_2 + S_2 \Delta \pi_2 = -(\mu e + S_2 \pi_2) \quad (4.16)$$

com:

$$t = \nabla f(x) - \lambda^T \nabla h(x) - \pi_1 - \pi_2$$

Considerando em (4.13) e (4.14) que os pontos são viáveis com relação às restrições de canalização, resulta:

$$\Delta s_1 = \Delta x \quad (4.17)$$

$$\Delta s_2 = -\Delta x \quad (4.18)$$

Sustituindo estas equações em (4.15) e (4.16) obtém-se:

$$\Delta \pi_1 = -S_1^{-1}(\mu e - S_1 \pi_1 - \Pi_1 \Delta x) \quad (4.19)$$

$$\Delta \pi_2 = -S_2^{-1}(\mu e + S_2 \pi_2 + \Pi_2 \Delta x) \quad (4.20)$$

Finalmente desta forma as incógnitas do problema são Δx , $\Delta \lambda$ e os sistemas a serem resolvidos são (4.11)-(4.12). Sustituindo $\Delta \pi_1$, $\Delta \pi_2$ em (4.11) resulta:

$$(\nabla^2 f(x) - \lambda^T \nabla^2 h(x) + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2) \Delta x - \nabla h(x) \Delta \lambda = z \quad (4.21)$$

$$-\nabla^T h(x) \Delta x = h(x) \quad (4.22)$$

com:

$$z = -(\nabla f(x) - \lambda^T \nabla h(x)) + \mu(S_1^{-1} e - S_2^{-1} e)$$

Agora (4.21)-(4.22) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} H & -J^T \\ -J & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ h(x) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

com:

$$H = \nabla^2 f(x) - \lambda^T \nabla^2 h(x) + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J = \nabla h(x)$$

Uma vez calculados $(\Delta x, \Delta \lambda)$, $(\Delta s_1, \Delta s_2)$ são obtidas a partir de (4.17)-(4.18) e $(\Delta \pi_1, \Delta \pi_2)$ a partir de (4.19)-(4.20).

Observe que H e z representam a Hessiana e o Jacobiano da função Lagrangeana associada ao problema só com restrições $h(x) = 0$, mais um termo contendo informação correspondente ao termo barreira sendo: $(S_1^{-1}\Pi_1 - S_2^{-1}\Pi_2)$ em H e $\mu(S_1^{-1}e - S_2^{-1}e)$ em z .

4.1.3 Passo Primal-Dual

As variáveis do problema na formulação (4.2) contém variáveis primais (x, s_1, s_2) e variáveis duais (λ, π_1, π_2) . Considerando os passos primal e dual separadamente, o maior incremento até a barreira logarítmica resulta:

$$\alpha_P = \min \left[\min_{\Delta s_{1i} < 0} \frac{s_{1i}}{|\Delta s_{1i}|}, \min_{\Delta s_{2i} < 0} \frac{s_{2i}}{|\Delta s_{2i}|}, 1.0 \right]$$

$$\alpha_D = \min \left[\min_{\Delta \pi_{1i} < 0} \frac{\pi_{1i}}{|\Delta \pi_{1i}|}, \min_{\Delta \pi_{2i} < 0} \frac{\pi_{2i}}{|\Delta \pi_{2i}|}, 1.0 \right]$$

onde α_P e α_D são limitados também pelo passo de Newton. O parâmetro $\sigma = 0.9995$ é considerado de forma a evitar as singularidades da barreira logarítmica. Sendo $(\Delta x, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2)$ os passos resultantes da resolução do sistema (4.11)-(4.16), o novo ponto será:

$$x = x + \sigma \alpha_P \Delta x$$

$$s_1 = s_1 + \sigma \alpha_P \Delta s_1$$

$$s_2 = s_2 + \sigma \alpha_P \Delta s_2$$

$$\lambda = \lambda + \sigma \alpha_D \Delta \lambda$$

$$\pi_1 = \pi_1 + \sigma \alpha_D \Delta \pi_1$$

$$\pi_2 = \pi_2 + \sigma \alpha_D \Delta \pi_2$$

4.1.4 Atualização do Parâmetro Barreira

A atualização do parâmetro barreira será feita baseando-se na relação dele com o gap de dualidade na formulação primal-dual para o problema linear. A razão disso seja a seguir o problema primal que corresponde à linearização das restrições em (4.2):

$$\min c^T x$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$x - s_1 = l$$

$$x + s_2 = u$$

$$s_1, s_2 \geq 0$$

Observe que esta formulação corresponde ao problema (3.19) do capítulo anterior. Como analisado naquele capítulo, o gap de dualidade (gap) e o parâmetro barreira (μ)

podem ser corrigidos a cada iteração segundo as equações (3.24)-(3.25), mais especificamente:

$$\text{gap} = s_1^T \pi_1 - s_2^T \pi_2 \quad (4.24)$$

$$\mu = \beta \frac{(s_1^T \pi_1 - s_2^T \pi_2)}{2n} \quad (\beta < 1). \quad (4.25)$$

Como observado, a fórmula (4.25) será utilizada para a atualização do parâmetro barreira no caso do FPO. No capítulo 5, como abuso de linguagem, denominaremos gap de dualidade à relação (4.24) (observe que o FPO é um problema de programação não linear e em geral não convexo).

4.1.5 Algoritmo de Solução

Partindo-se de um ponto viável com relação às restrições de canalização, o algoritmo de solução resultante dos passos descritos anteriormente pode ser resumido como segue:

1. Inicialização das variáveis primais e duais $(x, s_1, s_2, \lambda, \pi_1, \pi_2)$
2. Cálculo dos termos da matriz $H(x, \lambda)$, $J(x)$, z
3. Resolução do sistema de equações: $(\Delta x, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2)$
4. Escolha dos passos primal e dual: α_p e α_D
5. Atualização:

$$\begin{aligned} x &= x + \sigma \alpha_p \Delta x \\ s_1 &= s_1 + \sigma \alpha_p \Delta s_1 \\ s_2 &= s_2 + \sigma \alpha_p \Delta s_2 \\ \lambda &= \lambda + \sigma \alpha_D \Delta \lambda \\ \pi_1 &= \pi_1 + \sigma \alpha_D \Delta \pi_1 \\ \pi_2 &= \pi_2 + \sigma \alpha_D \Delta \pi_2 \end{aligned}$$

6. Atualização do parâmetro barreira (μ)

7. Teste de otimalidade:

$$\text{Se } (\mu < \varepsilon, |h(x)| < \varepsilon \text{ e } |z| < \varepsilon)$$

então

PARE

senão

VOLTE ao passo 2

Observe que o maior esforço computacional do algoritmo é resolver a cada iteração o sistema (4.23). Antes de entrar a estudar em detalhes a estrutura da matriz e a resolução do sistema de equações serão descritos a seguir alguns critérios adotados na implementação do algoritmo.

4.2 Características do Algoritmo

4.2.1 Inicialização

Dada a não linearidade e dimensões dos problemas de FPO não é conveniente computacionalmente partir de um ponto inicial viável para as restrições de igualdade. A viabilidade com relação as restrições de balanço e funcionais só será atingida na solução ótima. Neste sentido o algoritmo pode ser denominado de “métodos de pontos interiores inviáveis” (ver Todd [38]).

Com relação às restrições de canalização as variáveis são ajustadas na inicialização de tal forma que os limites superior e/ou inferior não estejam violados. Os valores atribuídos inicialmente às variáveis podem ser fornecidos pela rede elétrica ou escolhidos como o “ponto central” na região viável definida pelas restrições de canalização. Esse ponto receberá o nome de “Flat Start”, onde $\theta=0$, $V=1$, $PG=0$, $QG=0$ e $a_{ij}=1$.

Para as variáveis duais ou multiplicadores de Lagrange foi adotado o seguinte critério: λ foi considerado igual a 1 enquanto π_1 e π_2 foram calculados das equações (4.9)-(4.10).

4.2.2 Critério de Convergência

Devida à relaxação considerada nas restrições de igualdade existe um compromisso de alcançar a viabilidade simultaneamente com a otimalidade. Um ponto será considerado ótimo quando o parâmetro barreira tenha atingido uma certa tolerância e ao mesmo tempo sejam satisfeitas as restrições não lineares. Dividindo as restrições em ativas e reativas como mencionado no capítulo 2, os resíduos dos balanços respectivos serão chamados de “mismatch” ativo e “mismatch” reativo sendo considerado 1 MW como tolerância ativa e 1 MVar como tolerância reativa. Este critério mostrou-se mais que satisfatório na prática.

4.2.3 Inviabilidade

Não existe no algoritmo implementado uma forma explícita que permita detectar inviabilidade. Pela experiência acumulada na prática tem-se observado o comportamento do “gap de dualidade” (na aproximação linear observada no item 4.1.4) como um possível preditor de tal situação. Escolhas de passos primais e duais

muitos pequenos acompanhados de um conseqüente não decréscimo do “gap de dualidade” pode ser um indicador da inviabilidade do problema.

4.2.4 Robustez

Dada a não convexidade da região viável pontos de mínimo local poderiam ser achados pelo algoritmo partindo de diferentes pontos iniciais. Este tipo de comportamento não foi observado no FPO quando resolvido via o método de pontos interiores primal-dual. Comparações tomando como ponto de partida o ponto fornecido pela rede com o ponto de “Flat Start” tem conduzido aos mesmos resultados.

Uma outra característica observada neste método é a estabilidade no número de iterações necessárias para a convergência que independe do tamanho do problema.

4.3 Estrutura da Matriz

Analisaremos neste item a estrutura da matriz dada pela equação (4.23). Cada linha ou coluna da matriz corresponde a uma variável x do problema original ou a um multiplicador de Lagrange λ .

Vamos supor que inicialmente as restrições $h(x) = 0$ no problema (4.1) correspondem exclusivamente a equações de balanço de potência ativa e reativa nas barras. Observe então que cada nó da rede contribui com duas equações (uma ativa e uma outra reativa), que por sua parte estão associadas a dois multiplicadores λ_p e λ_q sendo λ_p correspondente à restrição ativa e λ_q relacionado à restrição reativa. Por outro lado, considerando o ângulo nodal θ como variável associada à potência ativa e o módulo de tensão V como variável associada à potência reativa, conclui-se que cada nó da rede está associado a dois pares de variáveis (θ, λ_p) e (V, λ_q) .

Outros tipos de variáveis presentes na formulação básica como taps, geração de potência ativa e reativa, ângulos de defasamento por exemplo, aparecerão na estrutura da matriz sem estar associadas a multiplicadores.

As variáveis que formam parte da estrutura da matriz podem assim ser divididas em aquelas que aparecem associadas a multiplicadores formando blocos diagonais (2x2) e as restantes que entram na estrutura da matriz com blocos diagonais (1x1). Baseado nestas observações e de acordo com Tinney [36], as colunas e linhas da matriz associadas ao sistema (4.23) são permutadas para obter tal agrupamento. Seguindo este critério a matriz pode ser particionada em:

HB (Heavy Border) contendo os blocos (2x2) que correspondem às derivadas de segundo ordem relativas a $\theta, \lambda_p, V, \lambda_q$.

LB (Light Border) contendo os restantes elementos da matriz

Para compreender melhor esta estrutura seja o seguinte sistema elétrico:

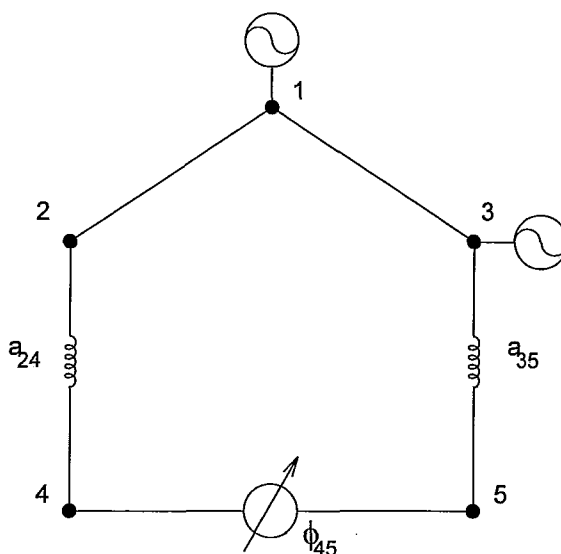


Figura 4. 1 - Sistema de 5 Barras

Observe que neste sistema temos os seguintes controles agrupados na **LB**:

- p_1, p_3 correspondem às gerações de potência ativa nas barras 1 e 3
- q_1, q_3 correspondem às gerações de potência reativa nas barras 1 e 3
- a_{24} e a_{35} representando os taps nos circuitos 2-4 e 3-5
- φ_{45} o ângulo de defasamento no circuito 4-5

Por outro lado como mencionado anteriormente cada barra terá dois pares de variáveis associadas na **HB** $((\theta_i, \lambda p_i)$ e $(V_i, \lambda q_i)$ para $i= 1, 5)$.

Baseado nestas observações e seguindo o critério de permutação de Tinney a estrutura da matriz resultante para o sistema da Figura 4.1 é a mostrada na Figura 4.2, onde h corresponde aos termos da hessiana e j do jacobiano.

$p_1 \ p_3 \ q_1 \ q_3 \ \varphi_{45} \ a_{24} \ a_{35} \ \theta_1 \ \lambda_{p_1} \ V_1 \ \lambda_{q_1} \ \theta_2 \ \lambda_{p_2} \ V_2 \ \lambda_{q_2} \ \theta_3 \ \lambda_{p_3} \ V_3 \ \lambda_{q_3} \ \theta_4 \ \lambda_{p_4} \ V_4 \ \lambda_{q_4} \ \theta_5 \ \lambda_{p_5} \ V_5 \ \lambda_{q_5}$

$ \begin{matrix} h \\ h & \\ & h \\ & & h \\ & & & h \\ & & & & h \end{matrix} $	$ \begin{matrix} j \\ \\ \\ j \end{matrix} $	$ \begin{matrix} \\ \\ h & j & h & j \end{matrix} $	$ \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ h & j & h & j \end{matrix} $	$ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ h & j & h & j \\ h & j & h & j \end{matrix} $	$ \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ h & j & h & j \\ h & j & h & j \end{matrix} $
	$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ \\ & j & & \\ & & h & j \end{matrix} $	$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ j & & j & \\ h & j & h & j \\ j & & j & \end{matrix} $	$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ j & & j & \\ h & j & h & j \\ j & & j & \end{matrix} $		
		$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ \\ & j & & \\ & & h & j \end{matrix} $		$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ j & & j & \\ h & j & h & j \\ j & & j & \end{matrix} $	
			$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ \\ & j & & \\ & & h & j \end{matrix} $		$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ j & & j & \\ h & j & h & j \\ j & & j & \end{matrix} $
				$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ \\ & j & & \\ & & h & j \end{matrix} $	$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ j & & j & \\ h & j & h & j \\ j & & j & \end{matrix} $
					$ \begin{matrix} h & j & h & j \\ \\ & j & & \\ & & h & j \end{matrix} $

Figura 4. 2 - Estrutura da matriz solução para o caso exemplo

4.3.1 Estrutura da HB

Na submatriz HB os seguintes elementos aparecem fora da diagonal:

Elementos relacionados a barras:

$((\theta_i, \lambda_{p_i}), (V_i, \lambda_{q_i}))$ para cada barra i da rede

Elementos relacionados a circuitos:

$((\theta_i, \lambda_{p_i}), (\theta_j, \lambda_{p_j})), ((\theta_i, \lambda_{p_i}), (V_j, \lambda_{q_j})), ((V_i, \lambda_{q_i}), (\theta_j, \lambda_{p_j}))$ e $((V_i, \lambda_{q_i}), (V_j, \lambda_{q_j}))$

para cada circuito i - j da rede

Portanto em um sistema com n barras e m circuitos existirão $(n+4m)$ blocos 2×2 diferentes de zero na triangular superior da HB. Para exemplificar esta estrutura, sejam a seguir os elementos da HB associados ao sistema 4.1.

	θ_1	λ_{p1}	V_1	λ_{q1}	θ_2	λ_{p2}	V_2	λ_{q2}	θ_3	λ_{p3}	V_3	λ_{q3}	θ_4	λ_{p4}	V_4	λ_{q4}	θ_5	λ_{p5}	V_5	λ_{q5}
θ_1	h	j	h	j	h	j	h	j	h	j	h	j								
λ_{p1}		j		j		j		j		j		j								
V_1			h	j	h	j	h	j	h	j	h	j								
λ_{q1}				j		j		j		j		j								
θ_2					h	j	h	j					h	j	h	j				
λ_{p2}						j							j	j						
V_2							h	j					h	j	h	j				
λ_{q2}													j	j						
θ_3									h	j	h	j					h	j	h	j
λ_{p3}										j							j	j		
V_3											h	j					h	j	h	j
λ_{q3}																	j	j		
θ_4													h	j	h	j	h	j	h	j
λ_{p4}														j			j	j		
V_4															h	j	h	j	h	j
λ_{q4}																	j	j		
θ_5																	h	j	h	j
λ_{p5}																		j		
V_5																			h	j
λ_{q5}																				j

Figura 4. 3 - Submatriz da HB para o caso exemplo

Observe que neste sistema por exemplo, a barra 1 está conectada às barras 2 e 3, conseqüentemente os elementos fora da diagonal na linhas associadas a ela $((\theta_1, \lambda_{p1})$ e $(V_1, \lambda_{q1}))$ correspondem aos acoplamento com as variáveis associadas a estes circuitos, $((\theta_2, \lambda_{p2}), (V_2, \lambda_{q2}), (\theta_3, \lambda_{p3})$ e $(V_3, \lambda_{q3}))$.

Dada a simetria em estrutura da matriz somente foram representados os blocos correspondentes à triangular superior da mesma.

4.3.2 Estrutura da LB

Observando as equações de balanço de potência ativa e reativa ((2.12)-(2.13)) os controles presentes na LB podem ser classificados em:

- 1) *Controles Associados a Barras:*

Dependendo do tipo de acoplamento que apresentam com os elementos da HB, estes controles podem ser divididos em:

- a) Controles de Acoplamento Ativo: apresentam somente acoplamento com θ e λ_p e correspondem à potência ativa gerada (PG) e à alocação de potência ativa (PA) nas barras
- b) Controles de Acoplamento Reativo: apresentam somente acoplamento com V e λ_q correspondendo à potência reativa gerada (QG), à alocação de reativo (QA) e à alocação shunt (bsh) nas barras
- c) Controles de Acoplamento Ativo-Reativo: apresentam tanto acoplamento com (θ, λ_p) como com (V, λ_q) e é representado pela rejeição do fator de carga (FC)

2) *Controles Associados a Circuitos:*

O tipo de variáveis da LB associadas a circuitos são o tap (a_{ij}) de um transformador e o ângulo de defasamento (φ_{ij}) num trafo defasador. Dado um circuito i-j, as variáveis associadas a ele (a_{ij} e φ_{ij}) estarão ligadas tanto ao extremo i como ao extremo j do mesmo.

A seguir é apresentada a estrutura da LB considerando cada uma destas subdivisões. Em cada um dos casos são apresentados os elementos fora da diagonal e seus respectivos valores numéricos.

1) *Controles Associados a Barras:*

- a) Controles de Acoplamento Ativo:

	PG_i		θ_i	λ_{p_i}	
PG_i	H		J	

onde:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial PG_i^2} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{p_i} \partial PG_i}$$

	PA_i		θ_i	λ_{p_i}	
PA_i	H		J	

onde:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial PA_i^2} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{p_i} \partial PA_i}$$

b) Controles de Acoplamento Reativo:

Da mesma forma como montadas as linhas para as variáveis ativas, aos controles de reativo correspondem as seguintes estruturas:

	QG _i		V _i		λq _i
QG _i	H		---	J

onde:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial QG_i^2} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{q_i} \partial QG_i}$$

	QA _i		V _i		λq _i
QA _i	H		---	J

onde:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial QA_i^2} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{q_i} \partial QA_i}$$

	bsh _i		V _i		λq _i
bsh _i	H	H₁	---	J₁

onde:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial bsh_i^2} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$H_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial V_i \partial bsh_i}$$

$$J_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{q_i} \partial b_{sh_i}}$$

c) Controles de Acoplamento Ativo-Reativo:

	FC _i	θ _i	λ _{p_i}	V _i	λ _{q_i}	
FC _i	H	J₁	J₂

onde:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial FC_i^2} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{p_i} \partial FC_i}$$

$$J_2 = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{q_i} \partial FC_i}$$

2) Controles Associados a Circuitos

Existem dois tipos de acoplamentos possíveis entre as variáveis do sistema:

Acoplamento na LB : caso o circuito que está sendo considerado seja um transformador defasador.

Acoplamento LB-HB: entre as variáveis associadas a circuitos (a_{ij}, φ_{ij}) e as associadas a seus extremos (θ_i, λ_{p_i}), (V_i, λ_{q_i}), (θ_j, λ_{p_j}), (V_j, λ_{q_j}).

Todas estas possibilidades são representadas a seguir:

	a _{ij}	φ _{ij}	θ _i	λ _{p_i}	V _i	λ _{q_i}	θ _j	λ _{p_j}	V _j	λ _{q_j}
a _{ij}	H	H₅	H₁	J₁	H₂	J₂	H₃	J₃	H₄	J₄
φ _{ij}		H	H₁	J₁	H₂	J₂	H₃	J₃	H₄	J₄

onde na linha de a_{ij}:

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial^2 a_{ij}} + S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$H_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial a_{ij}}$$

$$J_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{p_i} \partial a_{ij}}$$

Os termos da matriz não apresentados são obtidos analogamente combinando as derivadas de segunda ordem das variáveis associadas às linhas com aquelas associadas às colunas.

Existe também a possibilidade de monitoramento de capacitores série em circuitos. A estrutura associada a eles é análoga à já apresentada, podendo existir acoplamento com a_{ij} e/ou φ_{ij} dependendo do tipo de circuito considerado.

4.3.3 Estrutura Complementar da HB

A estrutura básica apresentada pelos balanços do fluxo de potências é independente do tipo de aplicação e já foi descrita no item 4.3.1. Neste item serão analisadas as contribuições na matriz quando considerado o controle de intercâmbio.

Intercâmbio Líquido entre Áreas:

Quando o controle de intercâmbio faz parte da formulação do problema, dada uma área l existirá acoplamento da linha associada à área com as linhas associadas aos circuitos tal que um dos extremos pertence à área l . Assim resulta a seguinte estrutura na HB, considerando que i e j são extremos de algum circuito pertencentes à área l :

	IT_1	λIT_1	θ_i	λp_i	V_i	λq_i	θ_j	λp_j	V_j	λq_j
IT_1	H	J								
λIT_1	J		J₁		J₂		J₃		J₄	

onde:

$$H = S_1^{-1} \pi_1 - S_2^{-1} \pi_2$$

$$J = \frac{\partial^2 L}{\partial IT_1 \partial \lambda IT_1}$$

$$J_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \lambda IT_1}$$

Analogamente são obtidos os outros valores de J_i , combinando as derivadas de segundo ordem dos elementos associados às linhas com aqueles associados às colunas.

No caso que o circuito de intercâmbio seja um transformador defasador, existirá contribuição na LB da seguinte forma:

	a_{ij}	φ_{ij}	IT_1	λIT_1	θ_i	λp_i	V_i	λq_i	θ_j	λp_j	V_j	λq_j
a_{ij}	H	H₅		J	H₁		H₂		H₃		H₄	
φ_{ij}		H		J	H₁		H₂		H₃		H₄	

onde na linha de a_{ij} :

$$H = \frac{\partial^2 L}{\partial^2 a_{ij}}$$

$$J = \frac{\partial^2 L}{\partial a_{ij} \partial \lambda IT_1}$$

$$H_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial a_{ij}}$$

De forma análoga são obtidos os termos restantes na linha de a_{ij} e na linha de φ_{ij} combinado as derivadas de segunda ordem respectivas.

4.3.4 Monitoramento de Circuitos

O monitoramento de fluxo em circuitos será tratado através de restrições funcionais. Cada restrição funcional está associada a uma nova variável e a um novo multiplicador.

Introduzir todas as restrições de circuito inicialmente na estrutura da matriz significaria dobrar o número de linhas da HB (o número de circuitos numa rede elétrica é da ordem de duas vezes o número de barras da mesma). Considerando que na prática são muitos poucos aqueles circuitos cujas restrições serão ativas, um esquema de relaxação será implementado para somente adicionar à estrutura aqueles que realmente estejam atingindo seus limites.

Para fins de exposição vamos supor que o máximo carregamento nos circuitos seja expresso em termos de potência ativa:

$$-S_{ij} \leq P_{ij} \leq S_{ij}$$

Com isto em cada iteração do algoritmo, seleciona-se dentre os circuitos que ainda não estão na estrutura da matriz e que apresentam violações de carregamento, aquele com maior violação.

Seja agora (i,j) o circuito com maior violação numa determinada iteração, na iteração seguinte a restrição:

$$P_{ij} - y_{ij} = 0$$

onde:

$$-S_{ij}^{\max} \leq y_{ij} \leq S_{ij}^{\max}$$

é adicionada à estrutura da matriz associada ao multiplicador λy_{ij} .

A nova variável y_{ij} e o multiplicador associado à nova restrição λy_{ij} formarão um novo bloco 2x2 na estrutura da HB. A restrição do circuito (i,j) apresenta derivadas não nulas com relação as seguintes variáveis da HB: θ_i , V_i , θ_j e V_j . A Figura 4.4 mostra a parte da HB correspondente à restrição de circuito.

	y_{ij}	λy_{ij}	θ_i	λp_i	V_i	λq_i	θ_j	λp_j	V_j	λq_j
y_{ij}	h	j										
λy_{ij}	j		j		j				j		j	
θ_i			h		h				h		h	
λp_i												
V_i					h				h		h	
λq_i												
...												
...												
θ_j									h		h	
λp_j												
V_j											h	
λq_j												

Figura 4. 4 - Submatriz da HB com restrição de circuito

Caso o circuito violado seja um trafo-defasador, nas linhas da LB as seguintes contribuições serão feitas:

	a_{ij}	φ_{ij}	y_{ij}	λy_{ij}	θ_i	λp_i	V_i	λq_i	θ_j	λp_j	V_j	λq_j
a_{ij}	H	H		J	H		H		H		H	
φ_{ij}		H		J	H		H		H		H	

No caso do fluxo considerado seja MVA a estrutura resultante é a mesma só os valores serão diferentes.

4.3.5 Esparsidade da Matriz

Como já foi mencionado em uma rede com n barras (nós) e m circuitos existirão $n+4m$ blocos 2×2 diferentes de zero na triangular superior da HB com $m=O(n)$. Em relação às variáveis da LB aquelas associadas a barras, como geradores por exemplo, contribuem com um elemento fora da diagonal enquanto os relacionados a circuitos o fazem com quatro (ver Figura 4.2).

Do observado anteriormente conclui-se que as matrizes associadas aos problemas de FPO são esparsas. Dada as dimensões dos sistemas elétricos a serem resolvidos, esta propriedade deverá ser conservada para viabilizar a resolução dos sistemas de equações. Nos próximos dois itens serão descritos os critérios de fatoração e ordenação implementados.

4.3.6 Resolução do Sistema de Equações

Com o particionamento da matriz em LB e HB, o sistema (4.23) é resolvido de acordo as seguintes etapas:

- 1) São eliminados os elementos abaixo da diagonal correspondentes a LB. Neste processo alguns elementos da HB são alterados numericamente, mais nenhum bloco 2×2 novo é gerado na estrutura da matriz
- 2) É resolvido o sistema de equações correspondente a HB
- 3) A partir da solução do sistema da etapa 2 são calculadas as variáveis correspondentes a LB

A resolução do sistema de equações da etapa 2 é feita através de uma fatoração LU esparsa por blocos 2×2 . Seja:

$$Ax = b \tag{4.26}$$

o sistema correspondente a HB. Como A é simétrica existe uma representação tal que:

$$A = LDL^t$$

com:

L = matriz triangular inferior formada por blocos 2×2 com diagonal unitária

D = matriz diagonal formada por blocos 2×2

Com a fatoração de A a resolução do sistema (4.26) se processa em duas etapas.

1) Em primeiro lugar calcula-se y tal que:

$$LDy=b$$

2) Na segunda etapa resolve-se:

$$L^t x=y$$

por retro substituição.

A ordenação da matriz da HB para a obtenção dos fatores LU esparsos é feita segundo o critério Tinney II [37]. Ele realiza uma fatoração simbólica tal que a cada passo é escolhida a linha com o menor número de elementos na estrutura que está sendo montada durante a fatoração.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados numéricos destacando a evolução do algoritmo com relação à função objetivo, resíduos das restrições não lineares de igualdade (“mismatches”) e o parâmetro de barreira com a finalidade de se mostrar o compromisso de se atingir a otimalidade no processo de convergência.

Foram escolhidos as funções objetivo mínima alocação de potência reativa e mínimo corte de carga como casos exemplos. Observe que em determinados problemas os limites estabelecidos para alguns dos controles como tensão, geração ativa e reativa, tap de transformador entre outros podem não ser suficientes para fechar os balanços. Quando existem violações nos balanços de reativo, a mínima alocação de potência reativa fornece uma ferramenta que permite detectar inviabilidades e expressa a deficiência de reativo do sistema e o valor necessário para reestabelecer a viabilidade (ver equação 2.13). Por outro lado quando o monitoramento de fluxo em circuitos faz parte da formulação do problema pode acontecer que o algoritmo não consiga alterar os controles (despacho ativo nas usinas, por exemplo) de forma a manter os fluxos dentro de seus limites. As inviabilidades nas restrições de circuito são corrigidas com cortes de carga em determinadas barras da rede. Observe que a diminuição de carga nas barras influi diretamente nos balanços de ativo e reativo do sistema diminuindo conseqüentemente o fluxo que flui pelos circuitos (ver equações 2.12-2.13).

5.1 Aspectos Computacionais

Os casos testes foram executados em um PC 486 de 66 MHz com precisão aritmética simples. Seguindo o algoritmo 4.1.5, os seguintes aspectos de implementação foram considerados:

Inicialização:

Nos casos rodados será tomado como ponto inicial o ponto fornecido pela rede elétrica como comentado no parágrafo 4.2.1, com exceção do último sistema onde analisaremos o processo de convergência para o mesmo problema partindo deste ponto e o ponto de “Flat Start”.

Parâmetro Barreira (μ):

O valor inicial de μ é igual a 5 e a cada iteração ele é corrigido por:

$$\mu = \beta \frac{(s_1^T \pi_1 - s_2^T \pi_2)}{2n}$$

onde:

$$\beta = 0.1 \quad \alpha_{\min} > 0.5$$

$$\beta = 0.5 \quad \alpha_{\min} \leq 0.5$$

$$\alpha_{\min} = \min(\alpha_P, \alpha_D)$$

Este critério foi adotado para evitar um decréscimo muito acelerado do parâmetro barreira, principalmente nas primeiras iterações quando o algoritmo está ainda longe de atingir a otimalidade. Além do mais por razões numéricas, μ é sempre mantido entre um limite inferior e superior ($5.0E-04 \leq \mu \leq 10$).

Tolerâncias:

A proximidade à barreira logarítmica é diminuída gradualmente durante o processo iterativo. Inicialmente $\varepsilon = 1.0E-02$ e a cada iteração é diminuído até atingir seu valor mínimo $\varepsilon = 1.0 E-05$. O motivo de tal critério, da mesma forma que no caso anterior é evitar a proximidade da barreira nas iterações iniciais.

Critério de Convergência:

Um ponto será considerado ótimo quando cada um dos seguintes pontos se verifique:

- 1) Os resíduos de ativo e reativo encontram-se dentro de suas tolerâncias: 1 MW e 1 MVAR respectivamente.
- 2) O parâmetro barreira atinga seu limite ($5.0E-04$).

5.2 Casos Testes

Sejam a seguir as dimensões dos sistemas elétricos a serem analisados:

Nº de Sistema	Nº de Barras	Nº de Circuitos	Nº de Geradores	Nº de Transf.
Sistema 1	24	37	11	5
Sistema 2	341	659	52	239
Sistema 3	1653	2377	175	469

Tabela 5. 1 - Sistemas elétricos testes

Observação:

Como já foi mencionado no parágrafo 4.1.4 a atualização do parâmetro barreira é realizada baseada na relação dele com o gap de dualidade para o problema linear. No

caso não linear chamaremos gap de dualidade à relação (4.24) deduzida para o problema linear, mais explicitamente:

$$\text{gap} = (s_1^T \pi_1 - s_2^T \pi_2)$$

De aqui até o final do capítulo as referências ao gap serão neste sentido.

Em cada um dos sistemas testes analisados a seguir serão apresentadas tabelas e gráficos com a evolução do processo iterativo. Dentre as grandezas mostradas note as variações da função objetivo, gap de dualidade e resíduos dos balanços ativo e reativo.

SISTEMA 1:

Mínima Alocação de Potência Reativa:

São especificados os seguintes controles: geração de potência ativa e reativa e controle de tap dos transformadores.

Iter.	α_p	α_D	μ	Gap	Mismatch MW	Mismatch MVar	Func Obj MVar
1	0.70	0.62	0.44	4.4	0.66E+03	61	0.00
2	0.29	0.44	1.3	2.6	0.19E+03	27	0.00
3	0.83	0.51	0.19	1.9	0.13E+03	19	3.8
4	1.0	0.76	0.58E-01	0.58	21.	4.9	49.
5	1.0	0.97	0.66E-02	0.66E-01	0.96E-01	0.14	68.
6	1.0	0.79	0.19E-02	0.19E-01	0.85E-02	0.11E-01	90.
7	1.0	0.94	0.50E-03	0.29E-02	0.53E-01	0.84E-01	37.
8	0.90	0.84	0.50E-03	0.84E-03	0.15E-01	0.38E-01	31.
9	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	0.16	0.36	30.
10	0.58	1.0	0.50E-03	0.50E-03	0.62	4.6	30.
11	1.0	1.0	0.50E-03	0.50E-03	0.35	1.9	30.
12	1.0	1.0	0.50E-03	0.50E-03	0.38E-01	0.44E-01	30.

Tabela 5. 2 - Mínima alocação de potência reativa (sistema 1)

Tempo de CPU (em segundos): 0.43

Restrições no Limite:

Tensão em barra de carga: 1
Tensão em barra PV: 1

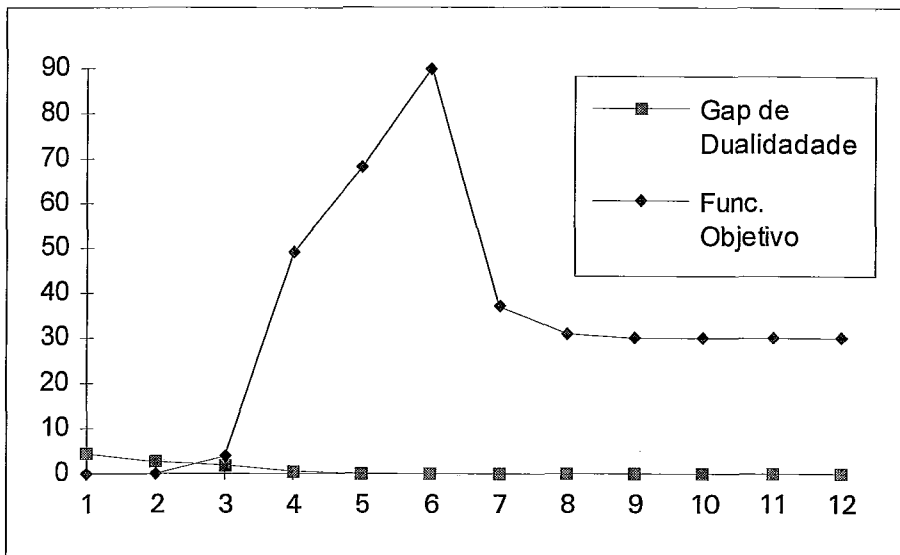


Figura 5. 1 - Mínima alocação de potência reativa (sistema 1)

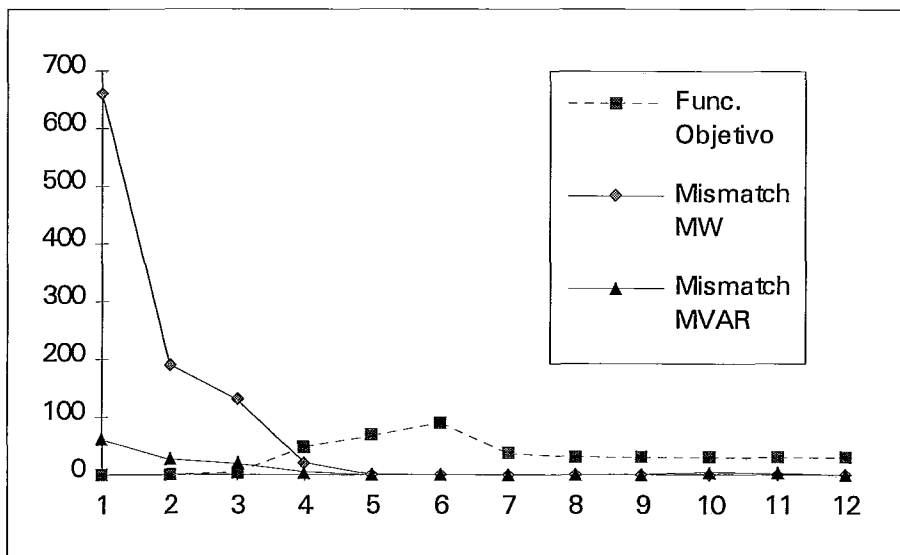


Figura 5. 2 - Mínima alocação de potência reativa (sistema 1)

Observe na tabela 5.2 que na primeira iteração os passos primais e duais foram corrigidos por $\alpha_p = 0.70$ e $\alpha_D = 0.62$ respectivamente. Dado que estes valores são ≥ 0.5 , o fator de β usado no cálculo do parâmetro barreira (μ) é igual a 0.1, como observado no item 5.2. Ao contrário disso, como na segunda iteração as violações foram maiores ($\alpha_p = 0.29$ e $\alpha_D = 0.44$), $\beta = 0.5$. Por outro lado, devido ao compromisso de atingir a viabilidade junto à otimalidade, nas primeiras iterações a função objetivo cresce ao mesmo tempo que os resíduos decrescem. A partir da sétima iteração o problema se estabiliza atingindo seu ótimo em 12 iterações. Esta evolução pode ser melhor visualizada nas figuras 5.1 e 5.2. A solução ótima reflete a deficiência de reativo do sistema representada na alocação de 30 MVAR necessários para fechar seus balanços. Observe também que nas últimas iterações os passos primal e dual coincidem com os passos de Newton ($\alpha_p = \alpha_D = 1$). Esta característica foi uma constante para todos os problemas em forma geral.

Mínimo Corte de Carga:

São especificados os seguintes controles: geração de potência ativa e reativa, controle de tap dos transformadores e considerado monitoramento linear de fluxo em circuitos.

Iter.	α_p	α_D	μ	Gap	Mismatch MW	Mismatch MVar	Func. Obj MW
1	0.74	0.64	0.44	4.4	0.66E+03	60.	57.
2	0.36	0.31	1.5	3.1	0.16E+03	25.	98.
3	1.0	0.52	0.22	2.2	0.11E+03	16.	0.11E+03
4	1.0	0.97	0.25E-01	0.25	0.71	1.5	0.24E+03
5	1.0	0.55	0.12E-01	0.12	0.76E-02	0.16E-01	0.25E+03
6	0.96	0.90	0.23E-02	0.23E-01	0.62E-01	0.17	0.15E+03
7	0.99	0.81	0.58E-03	0.58E-02	0.66E-01	0.14	87.
8	1.0	0.97	0.50E-03	0.70E-03	0.77E-01	0.57	54.
9	1.0	1.0	0.50E-03	0.50E-03	0.18E-01	0.20E-01	50.
10	1.0	1.0	0.50E-03	0.50E-03	0.99	2.3	50.
11	1.0	1.0	0.50E-03	0.50E-03	0.45	0.33	50.

Tabela 5. 3 - Mínimo corte de carga (sistema 1)

Tempo de CPU (em segundos): 0.44

Restrições de Circuitos: 1

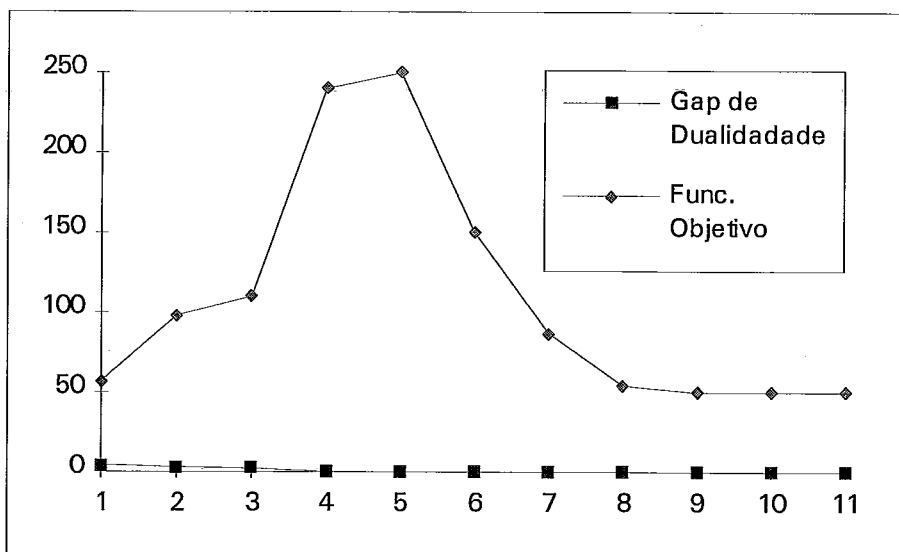


Figura 5. 3 - Mínimo corte de carga (sistema 1)

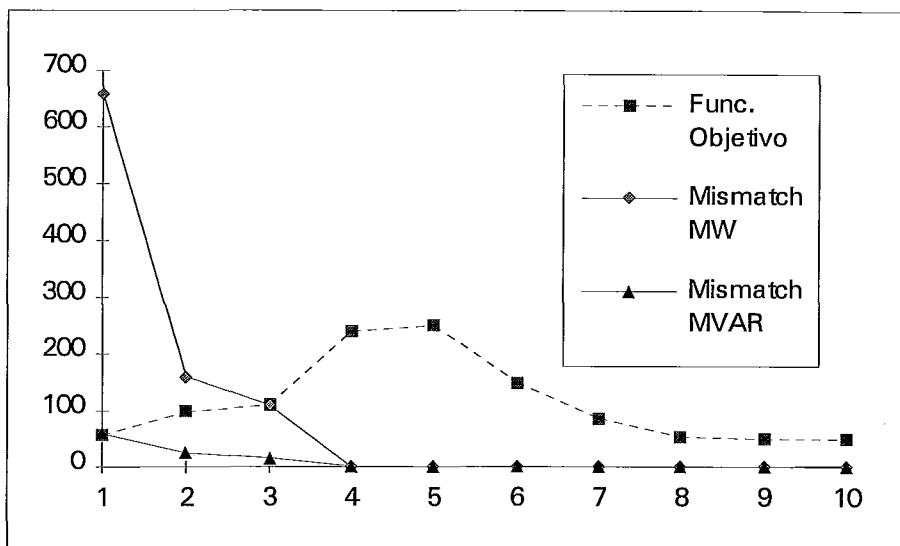


Figura 5. 4 - Mínimo corte de carga (sistema 1)

Observe na tabela 5.3 que o algoritmo para a minimização de corte de carga se comporta de forma análoga ao caso de alocação na evolução da função objetivo nas primeiras iterações. No monitoramento de fluxo em circuitos somente um deles atingiu seu limite, entrando a formar parte das restrições do problema na terceira iteração. Como isto aconteceu no início do processo iterativo não provocou instabilidade na convergência. Da mesma forma que no caso anterior as evoluções da função objetivo relativas ao gap de dualidade e às violações máximas nas restrições, são representadas nas figuras 5.3 e 5.4. Observe que foi necessário um corte de 50 MW de forma a atingir a viabilidade satisfazendo o carregamento máximo nos circuitos.

SISTEMA 2:

Mínima Alocação de Potência Reativa:

São especificados os seguintes controles: geração de potência reativa e controle de tap dos transformadores.

A evolução do processo iterativo é mostrado na Tabela 5.4. A seguir são dados o tempo de processamento e o número de restrições ativas na convergência.

Tempo de CPU (em segundos): 7.91

Restrições no Limite:

Tensão em barra de carga:	4
Tensão em barra PV:	4
Potência reativa gerada:	3

Iter.	α_P	α_D	μ	Gap	Mismatch		Func. Obj
					MW	MVAr	
1	0.95E-01	0.19	10.	0.15E+04	0.53E+04	0.26E+05	0.00
2	0.31E-01	0.18E-01	10.	0.14E+04	0.48E+04	0.24E+05	0.00
3	0.35E-01	0.61	10.	0.58E+03	0.41E+04	0.23E+05	0.00
4	0.12	0.12	10.	0.51E+03	0.39E+04	0.22E+05	0.00
5	0.10	0.31	10.	0.35E+03	0.34E+04	0.19E+05	79.
6	0.31	0.23	10.	0.27E+03	0.30E+04	0.17E+05	0.31E+03
7	1.0	0.46	10.	0.15E+03	0.21E+04	0.12E+05	0.16E+04
8	1.0	0.60	6.6	66.	96.	0.13E+04	0.65E+04
9	1.0	1.0	0.61	6.1	33.	0.49E+03	0.13E+05
10	1.0	1.0	0.60E-01	0.60	0.24	33.	0.17E+05
11	1.0	0.77	0.18E-01	0.18	30.	0.79E+03	0.17E+05
12	0.88	0.74	0.50E-02	0.50E-01	5.1	23.	0.94E+04
13	0.62	0.66	0.21E-02	0.21E-01	24.	0.57E+03	0.19E+04
14	0.67	0.58	0.93E-03	0.93E-02	8.9	0.21E+03	0.73E+03
15	0.55	0.58	0.50E-03	0.45E-02	3.0	71.	0.31E+03
16	0.55	0.52	0.50E-03	0.24E-02	1.4	32.	0.20E+03
17	0.52	0.72	0.50E-03	0.11E-02	1.4	15.	0.15E+03
18	0.63	0.67	0.50E-03	0.72E-03	1.5	12.	0.11E+03
19	0.98	0.74	0.50E-03	0.53E-03	0.95	36.	92.
20	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	0.41	37.	81.
21	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	0.84E-01	2.4	74.
22	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	0.29E-02	0.80E-01	75.

Tabela 5. 4 - Mínima alocação de potência reativa (sistema 2)

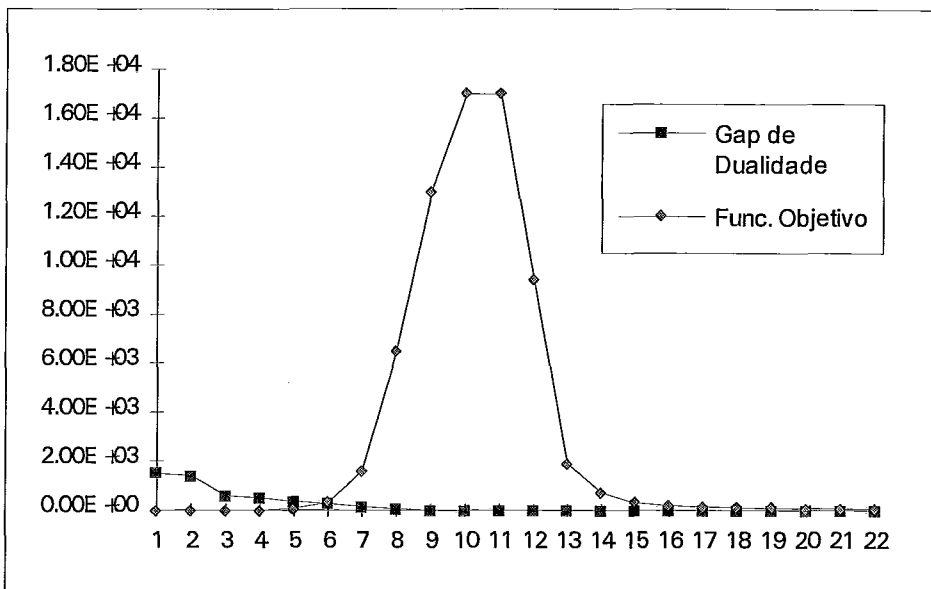


Figura 5. 5 - Mínima alocação de potência reativa (sistema 2)

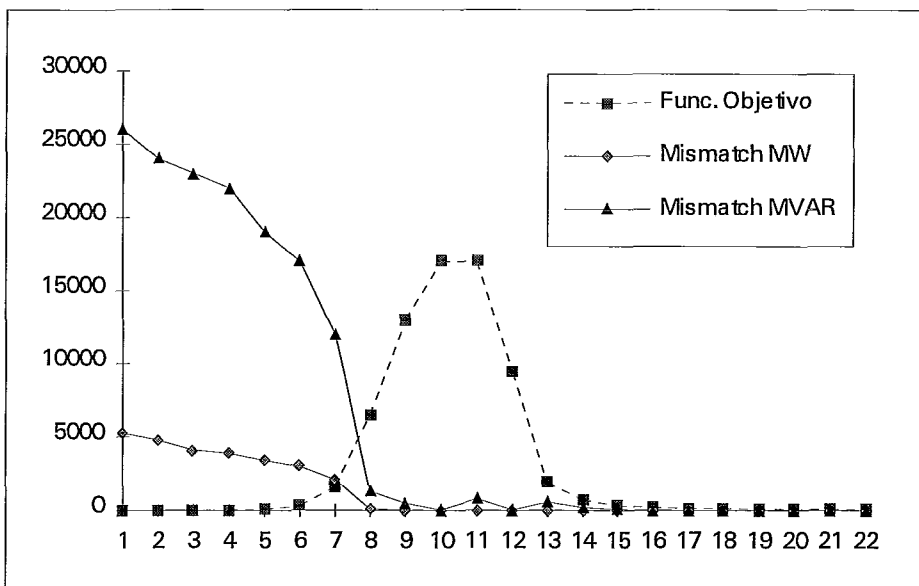


Figura 5. 6 - Mínima alocação de potência reativa (sistema 2)

Neste caso exemplo, melhor que no sistema 1, pode ser observado durante o processo iterativo o compromisso entre diminuir a função objetivo e satisfazer os balanços de ativo e reativo sem violações operativas. Observe nas primeiras iterações que α_p é muito pequeno ($\alpha_p = 0.95E-01$ na primeira iteração) e conseqüentemente o algoritmo não consegue diminuir seu “gap de dualidade”. Isto reflete possivelmente o fato da solução inicial ser “altamente” inviável. Durante estas iterações o parâmetro barreira é mantido no seu limite superior ($\mu = 10$) pois o gap de dualidade é muito alto. Na sétima/oitava iteração o algoritmo começa a evoluir mantendo uma certa instabilidade durante algumas iterações (observe as oscilações dos resíduos e da função objetivo nas figuras 5.5 e 5.6). Depois o algoritmo se estabiliza atingindo seu ótimo na iteração 22, precisando de 75 MVAR de alocação de reativo para fechar seus balanços.

Mínimo Corte de Carga:

São especificados os seguintes controles: geração de potência ativa e reativa e controle de tap dos transformadores.

Iter.	α_p	α_D	μ	Gap	Mismatch MW	Mismatch MVar	Func. Obj MW
1	0.66E-01	0.24E-01	10.	0.31E+04	0.53E+04	0.26E+05	0.35E+03
2	0.33E-01	0.54E-01	10.	0.30E+04	0.50E+04	0.24E+05	0.78E+03
...
10	0.36	0.52E-01	10.	0.15E+03	0.93E+03	0.56E+04	0.77E+04
11	0.46E-01	0.37E-02	10.	0.15E+03	0.59E+03	0.35E+04	0.86E+04
12	0.26E-03	0.73E-01	10.	0.14E+03	0.56E+03	0.34E+04	0.86E+04
13	1.0	0.62	5.9	59.	0.56E+03	0.34E+04	0.86E+04
14	0.81	0.24	10.	47.	13.	0.56E+03	0.10E+05
15	0.99	0.86	1.5	15.	12.	0.16E+03	0.69E+04
16	1.0	0.62	0.65	6.5	22.	83.	0.75E+04
17	0.91	0.80	0.18	1.8	2.3	13.	0.58E+04
18	0.90	0.10	0.81	1.6	5.0	20.	0.45E+04
19	1.0	1.0	0.79E-01	0.79	71.	0.25E+03	0.20E+04
20	0.24	0.68	0.15	0.31	5.7	20.	0.18E+04
21	0.75	0.87	0.17E-01	0.17	29.	0.96E+03	0.15E+04
22	1.0	0.84	0.40E-02	0.40E-01	11.	0.23E+03	0.93E+03
23	1.0	0.31	0.14E-01	0.28E-01	2.3	5.0	0.38E+03
24	0.65	1.0	0.14E-02	0.14E-01	1.6	2.1	0.18E+03
25	0.36	0.67	0.28E-02	0.56E-02	0.61	2.3	0.18E+03
26	0.88	0.88	0.50E-03	0.31E-02	0.59	2.0	0.14E+03
27	0.91	0.75	0.50E-03	0.11E-02	1.0	2.7	0.10E+03
28	0.54	1.0	0.50E-03	0.53E-03	1.9	4.4	69.
29	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	1.1	3.7	64.
30	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	0.73	21.	61.
31	1.0	1.0	0.50E-03	0.49E-03	0.18E-01	0.82E-01	61.

Tabela 5. 5 - Mínimo corte de carga (sistema 2)

Tempo de CPU (em segundos): 10.82

Restrições no Limite:

Tensão em barra de carga: 2

Tensão em barra PV: 2

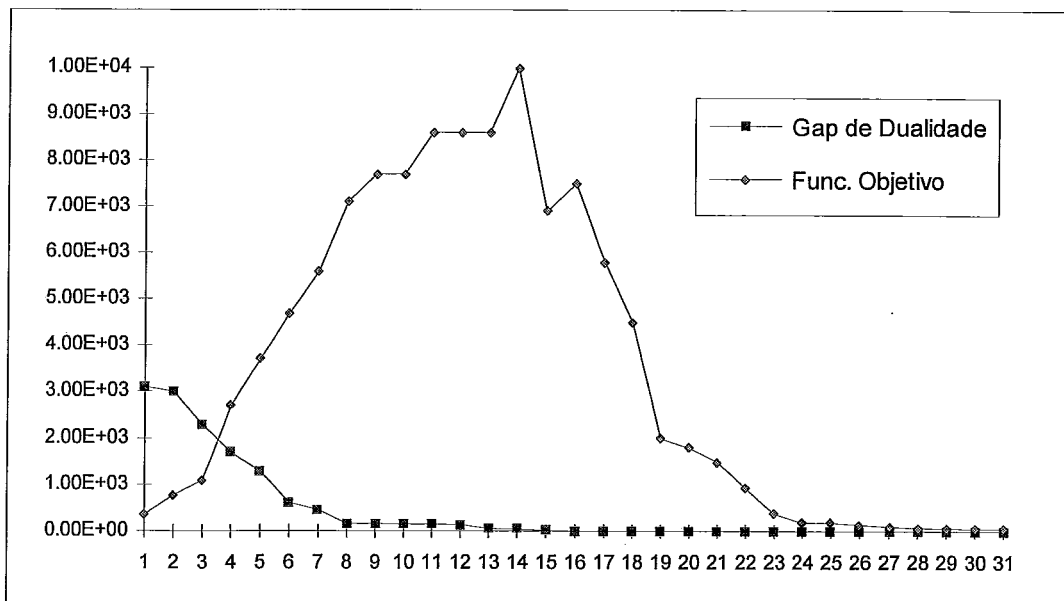


Figura 5. 7 - Mínimo corte de carga (sistema 2)

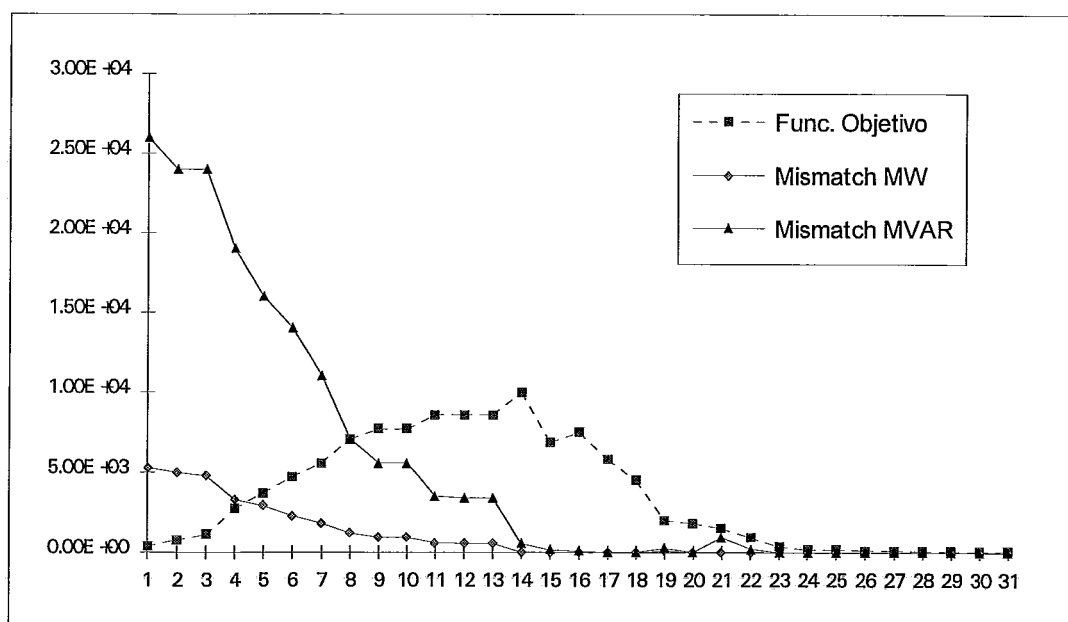


Figura 5. 8 - Mínimo corte de carga (sistema 2)

O sistema 2 com minimização de corte de carga foi rodado sem monitoramento de fluxo em circuitos portanto a evolução do algoritmo não é afetada pela inclusão de novos termos na matriz. Observe na tabela 5.5 que o parâmetro barreira é mantido no seu valor máximo nas primeiras iterações até conseguir diminuir o “gap de dualidade” de forma análoga ao caso anterior. A variação da função objetivo durante o processo iterativo reflete o compromisso do algoritmo em atingir a viabilidade junto á otimalidade (ver figuras 5.7 e 5.8). A convergência é alcançada em 31 iterações precisando cortar 61 MW de carga ativa. A diferença no número de iterações comparada à mínima alocação de reativo deve-se ao acoplamento entre os problemas

de ativo e reativo provocado pela presença do fator de carga. Neste exemplo, como nos casos anteriores, o número de restrições ativas no ótimo é muito pequeno comparado ao total de variáveis do problema (observe que somente duas tensões em barras de carga e duas tensões em barras geradoras atingiram seus limites na solução ótima).

SISTEMA 3:

Mínimo Corte de Carga:

São especificados os seguintes controles: geração de potência ativa e reativa, controle de tap dos transformadores e considerado monitoramento linear de fluxo em circuitos.

Iter.	α_p	α_D	μ	Gap	Mismatch MW	Mismatch MVar	Func. Obj MW
1	0.11E-01	0.53	1.7	3.4	0.20E+04	0.35E+05	0.16E+03
...
5	0.38	0.71	0.58	1.2	0.15E+04	0.49E+04	0.39E+03
6	0.43	0.54	0.42	0.83	0.14E+04	0.30E+04	0.48E+03
7	0.32	0.13	0.39	0.78	0.83E+03	0.17E+04	0.64E+03
8	0.71	0.47	0.29	0.59	0.56E+03	0.12E+04	0.10E+04
9	0.84	0.47	0.22	0.44	0.16E+03	0.31E+03	0.18E+04
10	1.0	0.98	0.21E-01	0.21	25.	0.54E+03	0.20E+04
11	0.92	0.76	0.67E-02	0.67E-01	4.6	43.	0.21E+04
12	0.76	0.56	0.33E-02	0.33E-01	1.7	6.9	0.18E+04
13	0.63	0.54	0.17E-02	0.17E-01	4.0	14.	0.16E+04
14	0.48	0.80	0.24E-02	0.48E-02	7.4	58.	0.15E+04
15	0.52	0.39	0.19E-02	0.38E-02	7.5	30.	0.14E+04
16	0.69	0.71	0.50E-03	0.24E-02	2.9	22.	0.14E+04
17	0.41	0.50	0.73E-03	0.15E-02	2.0	16.	0.13E+04
18	0.45	0.68	0.50E-03	0.97E-03	5.7	12.	0.13E+04
19	0.61	1.0	0.50E-03	0.50E-03	17.	11.	0.13E+04
20	0.96	1.0	0.50E-03	0.48E-03	6.7	4.8	0.13E+04
21	1.0	1.0	0.50E-03	0.48E-03	0.27	1.4	0.13E+04
22	1.0	1.0	0.50E-03	0.48E-03	0.33E-01	0.19	0.13E+04
23	1.0	1.0	0.50E-03	0.48E-03	0.26E-01	0.87E-01	0.13E+04

Tabela 5. 6 - Mínimo corte de carga (sistema 3)

Tempo de CPU (em segundos): 31.14

Restrições no Limite:

Tensão em barra de carga:	3
Tensão em barra PV:	2
Tap:	5
Potência ativa gerada:	15

Restrições de Circuitos: 4

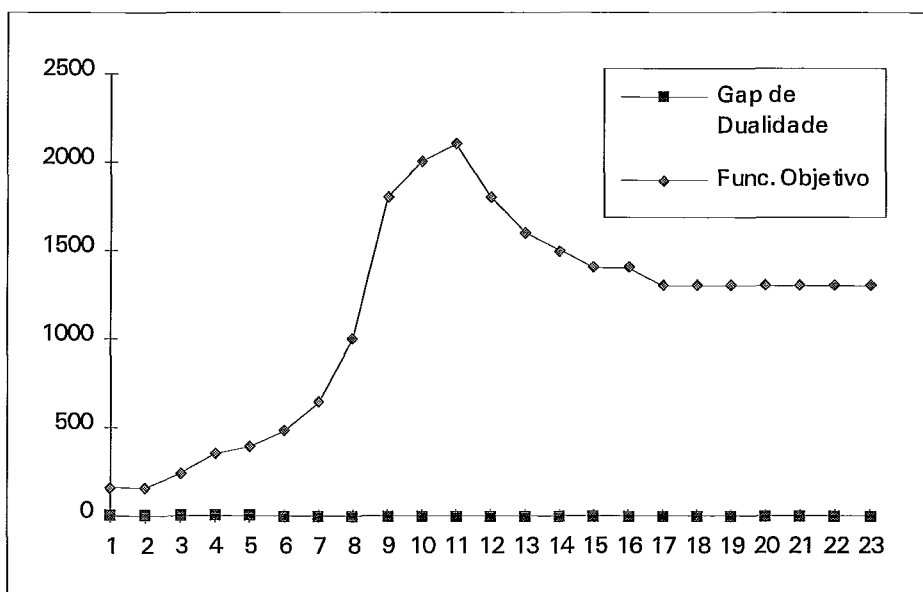


Figura 5. 9 - Mínimo corte de carga (sistema 3)

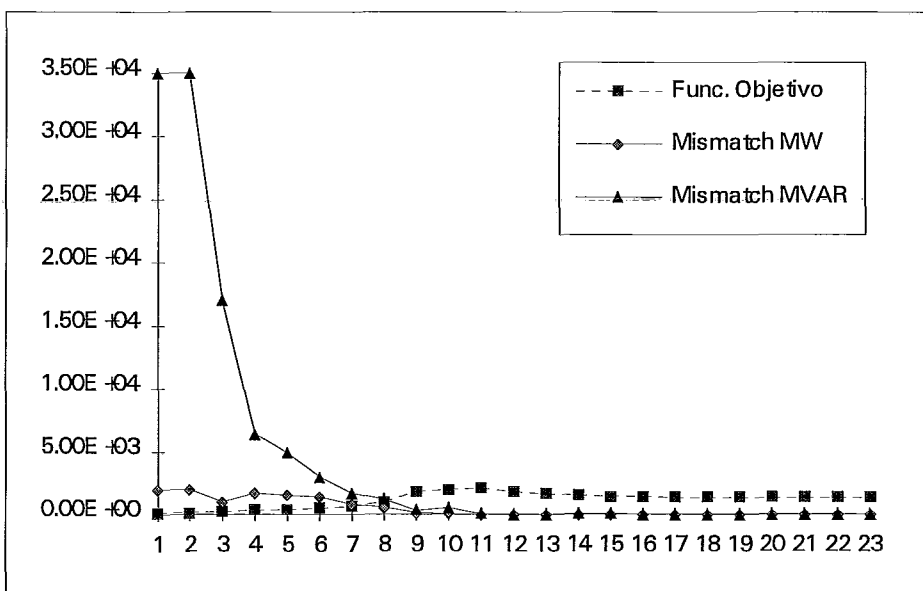


Figura 5. 10 - Mínimo corte de carga (sistema 3)

SISTEMA 3: (FLAT START)

Este caso corresponde à minimização de corte de carga como no exemplo anterior somente que o ponto inicial foi escolhido como Flat Start.

Iter.	α_p	α_D	μ	Gap	Mismatch MW	Mismatch MVA _r	Func. Obj MW
1	0.60E-01	0.37E-02	1.2	2.4	0.52E+04	0.35E+05	0.16E+03
...
30	0.20	0.11E-01	0.57	1.1	0.17E+04	0.11E+05	0.51E+04
31	0.24	0.14	0.53	1.1	0.13E+04	0.91E+04	0.50E+04
32	0.63E-01	0.91E-01	0.50	1.0	0.10E+04	0.69E+04	0.50E+04
33	0.34	0.17	0.46	0.92	0.95E+03	0.65E+04	0.49E+04
34	0.43	0.36	0.37	0.74	0.62E+03	0.43E+04	0.48E+04
35	0.76	0.41	0.29	0.59	0.36E+03	0.25E+04	0.49E+04
36	1.0	0.41	0.23	0.46	86.	0.56E+03	0.49E+04
37	1.0	0.72	0.29E-01	0.29	1.6	37.	0.48E+04
38	0.59	0.38	0.94E-01	0.19	1.5	26.	0.46E+04
39	0.38E-01	0.20E-01	0.93E-01	0.19	2.9	49.	0.43E+04
40	0.60	0.25	0.81E-01	0.16	8.7	80.	0.42E+04
41	0.40E-01	0.12	0.75E-01	0.15	16.	42.	0.37E+04
42	0.37E-01	0.56E-01	0.73E-01	0.15	0.13E+04	41.	0.37E+04
43	0.26E-01	0.14	0.68E-01	0.14	0.13E+04	49.	0.37E+04
44	0.50	0.31	0.57E-01	0.11	0.12E+04	49.	0.36E+04
45	0.19	0.95E-01	0.54E-01	0.11	0.62E+03	30.	0.31E+04
46	0.19	0.87E-01	0.52E-01	0.10	0.50E+03	30.	0.24E+04
47	0.87E-01	0.12	0.48E-01	0.97E-01	0.41E+03	67.	0.17E+04
48	0.14	0.20	0.43E-01	0.86E-01	0.13E+04	61.	0.15E+04
49	0.22	0.38	0.34E-01	0.69E-01	0.11E+04	54.	0.14E+04
50	0.44	0.50	0.25E-01	0.51E-01	0.89E+03	43.	0.13E+04
51	0.71	1.0	0.24E-02	0.24E-01	0.50E+03	0.19E+03	0.14E+04
52	0.58	0.46	0.71E-02	0.14E-01	0.14E+03	48.	0.15E+04
53	0.86	1.0	0.69E-03	0.69E-02	60.	45.	0.15E+04
54	0.40	0.54	0.18E-02	0.35E-02	8.3	28.	0.14E+04
55	0.81	0.83	0.50E-03	0.20E-02	4.9	23.	0.14E+04
56	0.52	0.57	0.50E-03	0.11E-02	4.1	21.	0.13E+04
57	0.52	0.97	0.50E-03	0.53E-03	14.	13.	0.13E+04
58	0.78	1.0	0.50E-03	0.49E-03	7.4	6.4	0.13E+04
59	1.0	1.0	0.50E-03	0.48E-03	1.7	2.2	0.13E+04
60	1.0	1.0	0.50E-03	0.48E-03	0.18E-01	0.49	0.13E+04
61	1.0	1.0	0.50E-03	0.48E-03	0.15E-01	0.47E-01	0.13E+04

Tabela 5. 7 - Mínimo corte de carga (sistema 3-“Flat Start”)

Tempo de CPU (em segundos): 80.41

Restrições no Limite:

Tensão em barra de carga:	3
Tensão em barra PV:	5
Tap:	5
Potência ativa gerada:	15

Restrições de Circuitos: 3

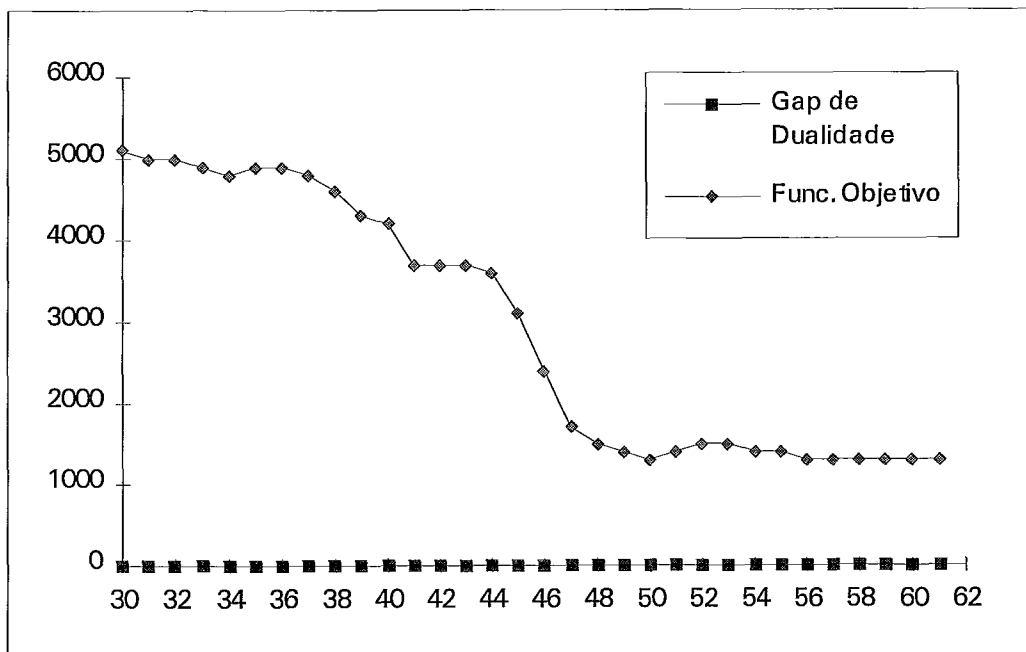


Figura 5. 11 - Mínimo corte de carga (sistema 3-“Flat Start”)

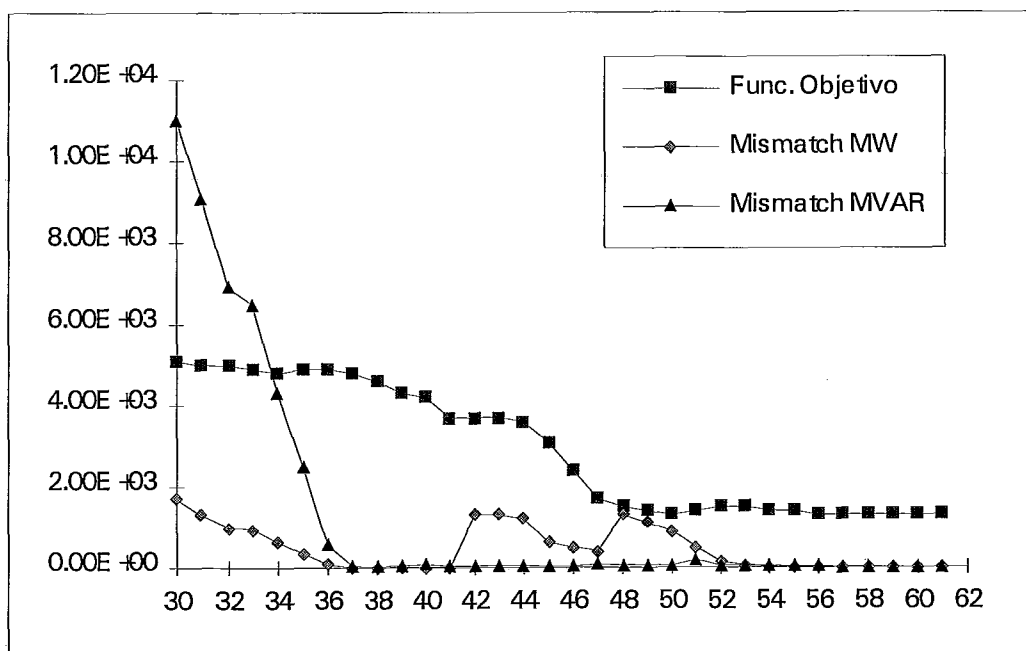


Figura 5. 12 - Mínimo corte de carga (sistema 3-“Flat Start”)

O sistema 3 foi rodado para minimização de corte de carga com monitoramento de fluxo em circuitos partindo de dois pontos diferentes. Em primeiro lugar é representado o processo iterativo tomando como ponto inicial o ponto fornecido pela rede elétrica (ver tabela 5.6). Nas 23 iterações necessárias para a convergência foram incluídos 4 circuitos violados na estrutura da matriz, nas iterações 2, 4, 5, e 6 respectivamente. Como as novas restrições foram incluídas no início do processo iterativo não provocaram grandes alterações na convergência do algoritmo. A partir da décima primeira iteração o problema se estabiliza, observe que este ponto tem 43 MVAR de violação máxima de reativo, 4.3 MW de violação ativa, 2100 MW de corte de carga e o gap de dualidade alcançou o valor 0.67E-01 (ver nas figuras 5.9 e 5.10 a evolução do algoritmo). Na solução ótima foi preciso cortar 1300 MW de carga para conseguir manter os fluxos ativos dentro de seus limites. Analisemos agora o mesmo problema tomando como solução inicial o ponto de Flat Start. Observe na tabela 5.7 que as primeiras 30 iterações não foram representadas devido a que o algoritmo está tentando diminuir as inviabilidades. No monitoramento de fluxo em circuitos foram incluídos 3 circuitos violados na estrutura da matriz nas iterações 2, 42 e 48. Ao contrário do caso anterior as duas últimas restrições que entraram na matriz, alteraram o processo iterativo provocando um aumento de corte de carga de forma a viabilizar o problema. O algoritmo converge em 61 iterações precisando de 3100 MW de corte de carga. Observe que ambos chegaram aos mesmos resultados partindo de pontos diferentes como era esperado. O fato do problema inicializado com Flat Start convergir em mais iterações que o problema inicializado com o ponto fornecido pela rede é uma particularidade deste caso exemplo e não foi observado como uma constante nos demais casos testados durante o desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

6.1 Introdução

Esta tese teve por objetivo o desenvolvimento e implementação computacional de um algoritmo de pontos interiores primal-dual para a resolução do problema básico de FPO. Durante o desenvolvimento do trabalho foram apresentados os aspectos teóricos e práticos que fundamentaram a aplicação do método e permitiram a construção de um algoritmo de pontos interiores para a resolução do problema de FPO. A esparsidade dos sistemas elétricos foi explorada, utilizando técnicas de ordenação e fatoração específicas, para viabilizar a resolução do sistema de equações resultante.

No item seguinte são enumeradas as principais características do método e para finalizar o capítulo são apresentados alguns temas de interesse para pesquisas futuras.

6.2 Conclusões

No desenvolvimento da tese e nos diferentes testes numéricos realizados puderam ser observadas as seguintes características do método de solução:

- 1) Ao trabalhar dentro da caixa determinada pelas restrições de canalização foi evitado o problema de predição do conjunto ativo utilizado por alguns métodos de resolução conhecidos.
- 2) Todas as variáveis do problema, controles e dependentes, são processadas de forma idêntica na resolução do sistema de equações.
- 3) Foi observado na prática, depois de diversos testes numéricos, que o número de iterações independe do tamanho do problema.
- 4) A possibilidade de trabalhar ao mesmo tempo com soluções primais e duais viáveis (na caixa) permite ter uma predição do “gap de dualidade” e com isso um critério de convergência (como uma extensão do caso linear).
- 5) Não é garantido que a cada iteração a direção, calculada pelo método de Newton, seja uma direção de descida (a função objetivo pode ter um pequeno acréscimo entre iterações). Isto deve-se ao compromisso de atingir a viabilidade ao mesmo que a otimalidade. O processo fica estável depois das primeiras iterações.
- 6) A inclusão de circuitos violados na estrutura da matriz geralmente alteram o processo iterativo. Como mencionado no capítulo anterior uma relaxação nestas restrições é considerada. Observe que a inclusão de novas restrições funcionais pode reduzir a região viável e conseqüentemente a convergência do algoritmo poderá sofrer modificações na busca do ótimo.

- 7) Foi observado que trabalhar com passos primais e duais diferentes conduzem a uma melhor convergência que escolhendo um passo comum.
- 8) Pôde ser observado que o algoritmo é bem robusto não alterando a solução do problema começando com “Flat Start” ou com o ponto fornecido pela rede. Uma escolha progressiva das tolerâncias na proximidade à barreira evitam problemas numéricos especialmente nas primeiras iterações.
- 9) Como uma possível extensão do análise de sensibilidade para os problemas quadráticos (ver item 3.3.5) ao caso específico do FPO, não foi observado mal condicionamento na matriz de solução quando a barreira logarítmica é considerada somente nas restrições de canalização.

6.3 Estudos Futuros

Minimização de Controles:

Na versão implementada não existe uma forma de minimizar o número de controles que podem ser alterados. Existe por outro lado um interesse de ordem prático, especialmente para estudos de tempo real, em limitar o número de controles que podem ser alterados na correção de operações operativas.

Esta é uma área interessante para futuros desenvolvimentos a qual merece um estudo mais detalhado.

Restrições de Segurança:

Em aplicações específicas do FPO com restrições de segurança são considerados diferentes cenários de operação do sistema. Cada um destes cenários representa um conjunto de contingências especificadas pelo usuário. A solução ótima nesta situação deve ser tal que:

- 1) Resolva o FPO no caso base, minimizando a função objetivo e viabilizando as restrições do caso base
- 2) Satisfaça todas as restrições nas contingências

Uma possibilidade para a resolução deste problema é utilizar métodos de decomposição tipo Benders. Nesta metodologia as inviabilidades dos subproblemas associados aos diversos cenários são incorporados ao problema de caso base através de restrições lineares construídas a partir dos multiplicadores de Lagrange de cada subproblema.

Uma outra alternativa seria aplicar diretamente o algoritmo de pontos interiores ao problema aumentado caso base-contingências. Neste caso técnicas de esparsidade ou resolução interativa de sistemas de equações teriam que ser desenvolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alsaç O., Bright J., Prais M. e Stott B., "Further Developments in LP-Based Optimal Power Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol 5, 1990
- [2] Anstreicher K.M., "A Monotomic Projective Algorithm for Fractional Linear Programming", Algorithmica 1, 483-498, 1986
- [3] Barnes E.R., "A Variation on Karmarkar's Algorithm for Solving Linear Programming Problems", Mathematical Programming, 36:174-182, 1986
- [4] Burchett R.C., Happ H.H. e Vierath D.R., "Quadratically Convergent Optimal Power Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol 103, No 11, pp:3267-3276, Novembro 1984
- [5] Burchett R.C., Happ H.H. e Wirgau K.A., "Large Scale Optimal Power Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol 101, pp:3722-3732, Outubro 1982
- [6] Carpentier J., "Contribution à L'étude du Dispatching Économique", Bulletin de la Societe Française des Electriciens, SER-8, Vol 3, pp:432-447, 1962
- [7] Carpentier J., "Differential Injections Method: A General Method for Secure and Optimal Load Flows", Proc PICA 1973, pp:255-262
- [8] Cordeiro Pereira L.A., "Implementação de um Programa de Fluxo de Potência Ótimo Utilizando Programação Quadrática Sequencial", Tese de Mestrado Submetida à COPPE/UFRJ, Abril 1991
- [9] Dikin I.I., "Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming", Soviet Mathematics Doklady, 8:674-675, 1967
- [10] Dommel H.W. e Tinney W.F. "Optimal Power Flow Solutions", IEEE Transactions on PAS, Vol 87, pp:1876-1886, Outubro 1968
- [11] Fiacco A.V. e Mc Cormick G.P., "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques", John Wiley and Sons, New York, 1968
- [12] Frish K.R., "The Logarithmic Potencial Method of Convex Programming", Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955
- [13] Geoffrion H.M., "Generalized Benders Decomposition", JOTA, Vol. 10, 1972
- [14] Gill P.E., Murray W., Saunders M.A., Tomlim J.A. e Wright M.H., "On Projected Newton Barrier Method for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method", Mathematical Programming 36:183-209, 1986

- [15] Gill P.E., Murray W. e Wright M.H., "Practical Optimization", Academic Press, London, 1981
- [16] Gonzaga C.C., "An Algorithm for Solving Linear Programming Problems in $O(n^3L)$ Operations", Progress in Mathematical Programming-Interior Point and Related Methods, Cap 1, 1989
- [17] Gonzaga C.C., "Conical Projection Algorithms for Linear Programming", 43:151-173, 1988
- [18] Gonzaga C.C., "Path Following Methods for Linear Programming", SIAM Review 34:167-227, 1992
- [19] Granville S., "Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Method", IEEE/PES, No 93, Fevereiro 1993
- [20] Granville S e Lima M.C.A., "Application of Decomposition Techniques to Var Planning: Methodological & Computational Aspects", IEEE/PES, No 94, Fevereiro 1994
- [21] Jianzhong Zhang, Nae-Heon Kim e Lasdon L., "An Improved Successive Linear Programming Algorithm", Management Science, Vol 31, No 10, Outubro 1985
- [22] Khachiyam L.G., "A Polynomial Algorithm for Linear Programming", Soviet Mathematics Doklady, 20:191-194, 1979
- [23] Klee V. e Minty G., "How Good is the Simplex Algorithm?", In O. Sisha, editor, Inequalities III, Academic Press, New York, NY, 1972
- [24] Kojima M., Mizuno S. e Yoshise A., "A Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming", Progress in Mathematical Programming, Cap 2, 1989
- [25] Lasdon L.S., Plummer J. e Gang Yu, "Primal and Primal-Dual Interior Algorithms for General Nonlinear Programs", artigo submetido à ORSA Jornal on Computing
- [26] Lustig I.J., Marsten R.E. e Shanno D.F., "Computational Experience with a Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming", Linear Algebra and its Applications 152:191-222, 1991
- [27] Mc Shane K.A., Monma C.L. e Shanno D.F., "An Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming", ORSA Jornal on Computing 1:70-83, 1989
- [28] Melo A.C.G., Mello J.C.O., Romero S.P., Oliveira G.C., Morozowski M., Pereira M.V.F., Cunha S.H.F., Fontoura R.N., "Reliability Evaluation of Large Scale Composite Power Systems", III Simposio de Especialistas em Planejamento da Operação e Expansão Elétrica, 1992

- [29] Monteiro R.C. e Adler I., "Interior Path-Following Primal-Dual Algorithms - Part I: Linear Programming", *Mathematical Programming* 44:27-41, 1989
- [30] Monticelli A., "Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica", Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1983
- [31] Monticelli A, Pereira M.V.F. e Granville S., "Security-Constrained Optimal Power Flow with Post-Contingency Corrective Rescheduling", *IEEE Transactions on Power System*, Vol 2, No 1, Fevereiro 1987
- [32] Murray W., "Analytical Expressions for the Eigenvalues and Eigenvectors of the Hessian Matrices of Barrier and Penalty Functions", *J. Optimization Theory and Applications* 7:189-196, 1971
- [33] Ponceleón D.B., "Barrier Methods for Large-Scale Quadratic Programming", Ph.D. thesis, Stanford University, Stanford, California, 1991
- [34] Renegar J., "A Polynomial-Time Algorithm Based on Newton's Method for Linear Programming", *Mathematical Programming* 40:59-94, 1988
- [35] Stott B., Alsac O e Monticelli A., "Security Analysis and Optimization", *Proceedings of the IEEE*, Vol 75, No 12, Dezembro 1987
- [36] Sun D.I., Ashley B.T., Brewer B.J., Hughes B.A. e Tinney W.F., "Optimal Power Flow by Newton Approach", *IEEE Transactions on PAS*, Vol 103, No 10, Outubro 1984
- [37] Tinney W.F. e Walker J.W., "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization Proceed", *IEEE Transactions on PAS* 55:1801-1897, 1967
- [38] Todd M.J., "Theory and Practice for Interior-Point Methods", *ORSA Journal on Computing*, Vol 6, No 1, Inverno 1994
- [39] Vanderbei R.J., Mekeson M.S. e Freedman B.A., "A Modification of Karmarkar's Algorithm", *Algorithmica* 1, 395-409, 1986
- [40] Wright M., "Interior Methods for Constrained Optimization", *Acta Numérica*, pp:341-407, 1991
- [41] Ye Y. e Kojima M., "Recovering Optimal Dual Solutions in Karmarkar's Polynomial Algorithm for Linear Programming", *Mathematical Programming* 39:305-317, 1987