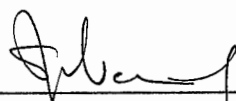


FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE PROBLEMAS
DE FLUXO EM REDE:
ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA

Clícia Valladares Peixoto Friedmann

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS.

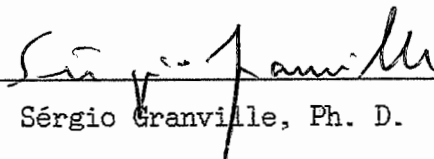
Aprovada por



Prof.ª Susana Scheimberg de Makler, Dr. Sc.



Prof. Paulo Roberto de Oliveira, Dr. Ing.



Sérgio Granville, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1995

FRIEDMANN , CLICIA VALLADARES PEIXOTO

Formulação Variacional de Problemas de Fluxo em Redes :

Análise teórica e numérica .

VIII , 92 p. , 29,7 cm (COPPE/UFRJ , M. Sc. em Engenharia de Sistemas e Computação , 1995)

Tese : Universidade Federal do Rio de Janeiro , COPPE

1- Inequações variacionais

2- Problemas de fluxo em redes

I- COPPE/UFRJ

II - Título (série)

AGRADECIMENTOS

"Recordar o bem recebido é fazer-se merecedor de tudo o que amanhã nos pode ser oferecido"

(Carlos Bernardo Gonzalez Pecotche)

À professora Suzana Scheimberg de Makler pela orientação dedicada e séria, pelo carinho e respeito com que fui tratada e por tudo que fez por mim, não havendo palavras que possam expressar a profundidade de minha gratidão.

Aos professores Paulo Roberto de Oliveira e Sérgio Granville pela participação na banca de tese.

Ao professor Luiz Torres pela utilização de alguns de seus trabalhos na elaboração desta tese.

Ao colega Plácido Rogério Pinheiro que muito me auxiliou no aprendizado do Matlab, cedendo generosamente parte de seu tempo de estudo.

Ao professor Eliseu Monteiro Chaves Filho pela sugestão do editor de texto utilizado.

À professora e colega Stella Kaufman pelo incentivo e pelo exemplo de dinamismo e luta em torno de um ideal.

Às amigas Maria Tereza Baldas, Maria de Lujan Latorre, Hsing Pei Chin e Ana Paula Costa, pelo companheirismo e por terem tornado as horas de estudo mais agradáveis.

Ao professor Renato Valladares pelo exemplo de seriedade e ética na condução de sua vida profissional.

Às colegas de trabalho Dilma, Miriam e Djanira que me possibilitaram dispor de mais tempo para a elaboração da tese.

A Heloisa Friedman de Gusmão pela ajuda na versão para o inglês da introdução da tese.

Aos professores e funcionários do programa de Engenharia de Sistemas por todas as orientações educativas e administrativas recebidas.

À tia Isa, às minhas irmãs Cynthia, Júnia e Cássia pelo apoio recebido, minimizando as dificuldades de meu dia-a-dia, dando-me mais tranquilidade para estudar.

A Everardo pela compreensão e pelo desprendimento de me proporcionar os recursos materiais que me possibilitaram conciliar minha vida profissional com minhas obrigações familiares.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE PROBLEMAS DE FLUXO EM REDE :
Análise teórica e numérica

Clicia Valladares Peixoto Friedmann
abril de 1995

Orientador : Susana Scheimberg de Makler
Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

O objetivo central desta tese foi o de apresentar o problema de equilíbrio de tráfego urbano com demanda fixa no contexto das inequações variacionais , bem como o estudo detalhado e a implementação de um algoritmo para resolvê-lo .

O algoritmo escolhido resultou da combinação do método de projeção e do método de decomposição simplicial restrita , os quais foram estudados detalhadamente dando ênfase aos resultados relacionados à convergência , principalmente no esquema geral de Dafermos (método de projeção) com a formulação mais rigorosa das hipóteses do teorema de convergência .

Foram apresentados o modelo matemático e os resultados da implementação numérica do algoritmo , com a finalidade de verificar a influência da variação do parâmetro ρ e de algumas escolhas da matriz G (ambos relacionados com o esquema de Dafermos) e a variação do número de pontos extremos escolhidos na decomposição simplicial

*Dedico às duas Clarisses
de minha vida: minha
mãe e minha filha.*

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

VARIATIONAL FORMULATION TO NETWORK FLOWS PROBLEMS :
theoretical and numerical analysis

Clicia Valladares Peixoto Friedmann
april 1995

Thesis supervisor : Susana Scheimberg de Makler

The principal purposes of this thesis were to present the equilibrium traffic problem with a fixed demand in a variational inequality context and a detailed study and implementation of an algorithm to solve this problem.

The chosen algorithm was a combination of two methods : the projection method (Dafermo's scheme) and the restricted simplicial decomposition . The hypothesis of the convergency theorem (projection method) were reformed to be more precise .

A mathematical model of the traffic problem and its variational formulation were presented . The influency of some choices of the parameter ρ and the matrix G (projectin method) and different numbers of extreme points (restricted simplicial decompositon) were verified by the results of the numerical implementation .

1 - INTRODUÇÃO

O objetivo geral desta tese é apresentar o problema de equilíbrio de tráfego com demanda fixa no contexto das inequações variacionais, bem como o estudo detalhado e a implementação de um algoritmo que possa resolvê-lo.

No capítulo 2 são apresentados os principais resultados da Teoria de Inequações Variacionais, destacando aqueles que mostram a equivalência entre problemas de otimização e de inequação variacional.

No capítulo 3 apresenta-se o esquema geral descrito por Dafermos em [2] para a solução de um problema de inequação variacional, explicitando com detalhes o teorema de convergência e mostrando com maior rigor as hipóteses nele consideradas. A seguir é apresentado o método de projeção como um caso particular do esquema de Dafermos, fazendo uma comparação entre o algoritmo geral e o algoritmo particular (método de projeção).

No capítulo 4 é mostrado o algoritmo de decomposição simplicial e são vistos detalhadamente a sua versão restrita (RSD) e a convergência deste tipo de algoritmo.

No capítulo 5 é estudado o modelo matemático para o problema de tráfego com demanda fixa e sua formulação variacional, o qual normalmente é um problema de grande porte. Para resolvê-lo é feita uma combinação do método de projeção e do método da decomposição simplicial restrita, que trabalha na envoltória convexa de alguns pontos extremos do conjunto dos pontos viáveis. O algoritmo resultante dessa combinação é convergente, pertencendo a uma família mais abrangente de métodos descrita por Scheimberg-Nguyen-Strodiot em [16]. Na seção 5.3 deste capítulo, apresentam-se os resultados da implementação numérica do algoritmo, através de dois exemplos. Em cada um deles tem-se: a análise e algumas escolhas para o parâmetro p e a matriz G mencionados no método de projeção segundo Dafermos, as diferentes escolhas para o número de pontos extremos no método de decomposição simplicial e a comparação entre os resultados obtidos pela implementação do algoritmo com aqueles apresentados nos textos onde se encontram os exemplos e no capítulo 6 tem-se as conclusões.

Finalmente apresenta-se um anexo onde são enunciados conceitos e resultados matemáticos utilizados no desenvolvimento desta tese. As referências do anexo são precedidas pela letra *a* minúscula e, normalmente, as notações adotadas estão enunciadas nele. A fim de facilitar a compreensão do texto sem a necessidade de consulta do anexo são ressaltadas as seguintes notações:

- $x^t y = \langle x, y \rangle$: produto interno canônico em \mathbb{R}^n ; $x, y \in \mathbb{R}^n$
 $\|.\|$: norma de um vetor em \mathbb{R}^n
 $\|.\|_2$: norma euclideana
 $\|.\|$: operador - norma de uma matriz
 $\|.\|_G$: norma induzida pela matriz simétrica definida positiva G
 $\nabla f(.)$: gradiente de f
 $f'(x, h)$: derivada direcional de f(.) em x na direção h

ABSTRACT OF THESIS

The principal purposes of this thesis are to present the equilibrium traffic problem with a fixed demand in a variational inequality context and a detailed study and implementation of an algorithm to solve this problem.

The most important results of the Variational Inequalities Theory, emphasizing the equivalency between optimization problems and variational inequalities are in the second chapter.

The third chapter studies an iterative scheme for variational inequalities which is introduced by Dafermos in [2]. The convergency theorem is detailed and its hypothesis are reformed to be more precise. After that, the projection method is introduced as a special case of Dafermo's scheme; this general algorithm is compared with the particular algorithm (projection method).

In the fifth chapter the mathematical model of the traffic problem and its variational formulation are presented. Generally, this problem is a major one. It is solved by a combination of two methods: the projection method and the restricted simplicial decomposition, which works in the convex hull of some extreme points, chosen in the feasible region. This combination of the two methods is convergent and belongs to a general family of methods introduced by Scheimberg-Nguyen-Strodiot in [16]. The 5.3 section of this chapter presents the result of the numerical implementation of the algorithm through two examples. In each one of these some choices of the parameter ρ and matrix G (mentioned by Dafermos in [2]) are analysed, different choices to the numbers of extreme points are tested, and finally a comparison is made between the algorithm implementation and the results presented in the papers in which the examples are found and in the sixth chapter there are the conclusions.

At the end of this thesis there is an annex with mathematical definitions and results which appear throughout the work.

Frequently the notations of this thesis are in the annex and a result number is preceded by the small letter a. The most important notations are listed in order to make the comprehension of this text easier without the need to consult the annex.

$x^t y = \langle x, y \rangle$: usual inner product on \mathbb{R}^n ; $x, y \in \mathbb{R}^n$
 $\|.\|$: an arbitrary norm on \mathbb{R}^n
 $\|.\|_2$: euclidean norm
 $\|.\|$: operator - norm of an matrix
 $\|.\|_G$: norm of an symmetric, positive definite matrix G
 $\nabla f(.)$: gradient of f
 $f(x, h)$: directional derivative of f(.) on x in the
direction h .

ÍNDICE

Dedicatória	II
Agradecimentos	III
1 - Introdução (Português)	IV
Introdução (Inglês)	VI
2 - Inequações Variacionais	1
2.1 - Problemas de Otimização	1
2.2 - Problemas de Complementariedade	2
2.3 - Condições para a Existência e Unicidade de Solução para um Problema de Inequação Variacional	3
3 - O Método de Projeção	8
3.1 - O Esquema de Dafermos	9
3.1.1 - O Algoritmo	9
3.1.2 - Condições para que o Algoritmo seja Convergente	10
3.2 - Método de Projeção	18
O Método de Projeção como um Caso Particular do Esquema de Dafermos	20
4 - Decomposição Simplicial Restrita	23
4.1 - Método da Decomposição Simplicial	23
4.1.1 - Preliminares	23
4.1.2 - Algoritmo Clássico de Decomposição Simplicial (SD)	24
4.1.3 - Algoritmo de Decomposição Simplicial Restrita (RSD)	25
4.2 - Convergência Global do RSD	26
4.2.1 - Convergência Finita do RSD	31
5 - Problema de Tráfego	40
5.1 - Modelo	40
5.2 - Algoritmo	44
5.2.1 - Esquema	45
5.3 - Testes Numéricos	47
5.3.1 - Observações Gerais	47
5.3.2 - Exemplo I	48
5.3.2.1 - Conclusões do Exemplo I	50
5.3.3 - Exemplo II	52
5.3.3.2 - Conclusões do Exemplo II	60
6 - Conclusões	68

Anexo	
Principais Conceitos e Resultados	69
a.1 - Ponto Interior e Ponto Aderente	70
a.2 - Conjunto Convexo em \mathbb{R}^n	70
a.3 - Conjuntos Fechados e Abertos	70
a.4 - Norma, Produto Interno e Operador-Norma	70
a.4.1 - Norma	70
a.4.2 - Produto Interno	71
a.4.3 - Operador-Norma.....	71
a.5 - Matriz Simétrica Definida Positiva	71
a.5.1 - Produto Interno, Norma e Operador-Norma Relativos a uma Matriz Simétrica Definida Positiva	72
a.6 - Dual de \mathbb{R}^n	73
a.7 - Conjunto Limitado	73
a.8 - Conjunto Compacto	74
a.9 - Monotonicidade e Coercividade de um Operador	74
a.10 - Operador Continuamente Diferenciável	75
a.11 - Função G-Diferenciável	75
a.12 - Função Hemicontínua	75
a.13 - Função F-Diferenciável	75
a.14 - Principais Resultados sobre Funções Continuamente Diferenciáveis, G-Diferenciáveis ou F-Diferenciáveis	76
a.15 - Derivada Direcional	76
a.16 - Função de Classe C^p	77
a.17 - Matriz Hessiana de uma Função	77
a.18 - Função Convexa	77
a.19 - Função Pseudo-Convexa e Pseudo-Convexa Estrita	78
a.19.1 - Propriedades	78
a.20 - Envoltória Convexa de um Conjunto	78
a.21 - Direção Viável	78
a.22 - P-Simplex	79
a.22.1 - Propriedades	79
a.23 - Operador-Gradiente (Potencial)	79
a.24 - Teoremas do Valor Médio para Operadores G-Diferenciáveis	80
a.25 - Fórmula Generalizada de Lagrange	81
Bibliografia	81

2 - INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

A bibliografia utilizada neste capítulo é o livro de Kinderlehrer e Stampacchia [13]

Dado um operador $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um conjunto K convexo e fechado não vazio de \mathbb{R}^n ; o problema de INEQUAÇÕES VARIACIONAIS consiste em determinar um vetor $x^* \in K$, tal que satisfaça a seguinte relação:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K. \quad (5)$$

Dentre os problemas vinculados à inequações variacionais pode se destacar os PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO e de COMPLEMENTARIEDADE.

2.1 - PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma funcional G -diferenciável, $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado não vazio e $F(x) = \nabla f(x)$. Então são válidos os seguintes resultados:

TEOREMA 1: Suponha que exista um $x^* \in K$ tal que:

$$f(x^*) = \min_{x \in K} f(x)$$

Então x^* é uma solução para a inequação variacional

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K.$$

Demonstração: Por hipótese $f(\cdot)$ é G -diferenciável então pela observação dada em a.15,

$$f'(x^*, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1/t [f(x^* + td) - f(x^*)] = \langle \nabla f(x^*), d \rangle$$

Dado $x \in K$, K um conjunto convexo, tem-se que:

$$x^* + t(x - x^*) \in K, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Como por hipótese, $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in K$ então

$$f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) \geq 0, \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

Considere $d = x - x^*$

$$\text{Logo, } f'(x^*, x - x^*) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1/t [f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)] = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$$

Como $F(x^*) = \nabla f(x^*)$ tem-se que x^* satisfaz a inequação variacional $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$

C. Q. D.

TEOREMA 2: Supõe-se que $f(\cdot)$ seja convexa e que exista $x^* \in K$ tal que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$$

para todo $x \in K$ então

$$f(x^*) = \min_{x \in K} f(x).$$

Demonstração: Por hipótese $f(\cdot)$ é convexa e $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ para todo $x \in K$, tem-se então que:

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$$

ou para todo $x \in K$

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle F(x^*), x - x^* \rangle$$

Logo para todo $x \in K$

$$f(x) \geq f(x^*)$$

Então para todo $x \in K$

$$f(x^*) = \min_{x \in K} f(x)$$

C. Q. D.

2. 2 - PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIEDADE

Considere K um cone convexo e fechado, $0 \in K$; $K \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$. O problema de complementariedade se resume em encontrar $x^* \in K$ tal que:

$$F(x^*) \in K' \quad e \quad \langle F(x^*), x^* \rangle = 0 \tag{6}$$

onde $K' = \{ y \in \mathbb{R}^n / \langle y, x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K \}$

Em particular, se $K = \mathbb{R}_+^n$ então $K' = \mathbb{R}_+^n$ e o problema (6) se reduz a:

Encontrar $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$F(x^*) \in \mathbb{R}_+^n \quad e \tag{7}$$

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0$$

Conforme já foi mencionado, existe uma relação estreita entre a solução de um problema de complementariedade e a solução de um problema de inequação variacional dada pelo seguinte teorema:

TEOREMA 3: O ponto $x^* \in K$ é uma solução para o problema de complementariedade se e somente se

$$x^* \in K : \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K. \quad (8)$$

Demonstração: \implies Admite-se que $x^* \in K$ seja uma solução para o problema de complementariedade então satisfaz a (6). Pela definição de K' , verifica-se que

$$\langle F(x^*), x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K \quad (9)$$

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle, \text{ para todo } x \in K$$

Portanto, de (6) e (9) se deduz que x^* é solução de (8).

\Leftarrow Seja $x^* \in K$ uma solução para o problema (8). Considere $x = 2x^* \in K$

então:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0 \quad (10)$$

Seja $x = 0 \in K$ então

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), -x^* \rangle \geq 0 \quad (11)$$

Portanto por (10) e (11) tem-se que:

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0 \quad (12)$$

Resta mostrar que $F(x^*) \in K'$. De fato tem-se que:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K$$

então

$$\langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0 \quad (13)$$

Conclui-se por (12) e (13) que

$$\langle F(x^*), x \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K. \text{ Logo } F(x^*) \in K'.$$

C. Q. D.

2.3 - CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE INEQUAÇÃO VARIACIONAL

Nem sempre um problema de inequação variacional conforme (5) tem solução. Para que isto aconteça é necessário estabelecer condições que garantam a existência da solução; que serão estabelecidas posteriormente a partir do teorema 5.

Primeiramente será considerado o seguinte resultado, que está demonstrado em [13]

TEOREMA 4: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e convexo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua.

Então

existe $x' \in K$ tal que $\langle F(x), x - x' \rangle \geq 0$, para todo $x \in K$.

No problema (5), por hipótese, K é um conjunto convexo fechado não necessariamente compacto. Considere então $K_R = K \cap B[0, R]$, sendo $B[0, R]$ a bola fechada de raio R e centro $0 \in \mathbb{R}^n$. Assim sendo o conjunto K_R é compacto e convexo e pelo teorema 4 pode se afirmar que existe pelo menos um $x_R \in K_R$ tal que:

$$\langle F(x_R), x - x_R \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K_R \quad (14)$$

TEOREMA 5: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e convexo e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Uma condição necessária e suficiente para que o problema (5) tenha solução é que exista um raio $R > 0$ tal que uma solução $x_R \in K_R$ de (14) satisfaça a seguinte relação:

$$\|x_R\| < R$$

Demonstração: \Rightarrow Supõe-se que exista x' que seja solução para o problema (5), então $x' \in K$, $K \subset \mathbb{R}^n$; sendo K um conjunto convexo e fechado. Logo existe $R > 0$ tal que $\|x'\| < R$, portanto $x' \in K_R$ e é solução de (14).

\Leftarrow Seja $x_R \in K_R$ tal que x_R seja solução de (14) e que $\|x_R\| < R$; $R > 0$. Dado $x \in K$ $x \neq x_R$, considerar o vetor $w = x_R + \varepsilon(x - x_R)$. Deseja-se encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $w \in K_R$, ou seja, $\|w\| \leq R$; mas isto acontece se

$$\|w\| \leq \|x_R\| + \varepsilon \|x - x_R\| \leq R$$

Portanto é suficiente exigir que:

$$\varepsilon \leq (R - \|x_R\|) / \|x - x_R\|$$

Logo dado $x \in K$, $x \neq x_R$ então w pertencerá a K_R se:

$$\varepsilon \leq \min \{1, ((R - \|x_R\|) / \|x - x_R\|)\}$$

Como x_R satisfaz a (14), isto é,

$$\langle F(x_R), w - x_R \rangle \geq 0$$

então

$$\langle F(x_R), \varepsilon (x - x_R) \rangle \geq 0$$

quer dizer:

$$\varepsilon \langle F(x_R), x - x_R \rangle \geq 0$$

Logo, $\langle F(x_R), x - x_R \rangle \geq 0$ para todo $x \in K$. Então x_R também é uma solução para o problema (5).

C. Q. D.

A partir do teorema anterior poderão ser estabelecidas condições suficientes para a existência de solução para o problema (4); dentre as quais pode se destacar a seguinte:

TEOREMA 6: Seja $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua que satisfaça a condição de coercividade dada em a.9 item (IV) para algum $x_0 \in K$ então o problema (5) tem solução.

Demonstração: Como $F(\cdot)$ é contínua e pela condição de coercividade, tem-se que para algum $x \in K$ resulta:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = \infty, \text{ para algum } x_0 \in K, \text{ isto é.}$$

Para cada $H > 0$, existe $L = L(H)$ tal que

$$\|x\| > L, x \in K \Rightarrow \langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geq H \|x - x_0\| \quad (15)$$

Seja H tal que $\|F(x_0)\| < H$ então existe $L = L(H)$ que satisfaz a (15).

$$\text{Considere } R \text{ tal que } R > \max \{L, \|x_0\|\} \geq 0. \quad (16)$$

Tem-se por (15) e (16) que

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0 \rangle \geq H \|x - x_0\|, \text{ para } \|x\| \geq R, x \in K.$$

(17)

Então

$$\langle F(x), x - x_0 \rangle \geq H \| x - x_0 \| + \langle F(x_0), x - x_0 \rangle$$

Mas pela desigualdade de Cauchy-Scharwarz

$$| \langle F(x_0), x - x_0 \rangle | \leq \| F(x_0) \| \| x - x_0 \|$$

Então

$$\begin{aligned} \langle F(x), x - x_0 \rangle &\geq H \| x - x_0 \| - \| F(x_0) \| \| x - x_0 \| \\ &= [H - \| F(x_0) \|] \| x - x_0 \| \quad ; \quad \| x \| \geq R, \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle F(x), x - x_0 \rangle \geq [H - \| F(x_0) \|] [\| x \| - \| x_0 \|] > 0$$

$$\text{se } x \neq x_0 \text{ e } \| x \| \geq R \quad (18)$$

Em particular a desigualdade acima é válida para todo $x \in K$ tal que $\| x \| = R$.

Seja x_R solução para (14), isto é

$$x_R \in K_R \text{ e } \langle F(x_R), x - x_R \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K_R \text{ e } \| x_R \| \leq R.$$

Por hipótese,

$$\| x_0 \| < R \text{ e } x_0 \in K$$

então

$$\langle F(x_R), x_0 - x_R \rangle \geq 0$$

ou ainda,

$$- \langle F(x_R), x_0 - x_R \rangle = \langle F(x_R), x_R - x_0 \rangle \leq 0$$

Mas por (18), tem-se que $\| x_R \| \neq R$, isto é, $\| x_R \| < R$ e pelo teorema anterior o problema (5) tem solução.

C. Q. D.

Observação: Se a função for estritamente monótona, assegura-se a unicidade da solução para o problema (5).

De fato, sejam x' e x'' soluções para (5). Logo

$$\langle F(x'), x - x' \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K \quad (19)$$

$$\langle F(x''), x - x'' \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K \quad (20)$$

Se $x = x'$ em (19) e $x = x''$ em (20) então

$$\langle F(x'), x'' - x' \rangle \geq 0 \quad (21)$$

$$\langle F(x''), x' - x'' \rangle \geq 0 \quad (22)$$

Somando (21) e (22), obtém-se

$$\langle F(x') - F(x''), x' - x'' \rangle \leq 0 \quad (23)$$

Se $F(\cdot)$ satisfaz a condição de ser estritamente monótona, tem-se que

$$\langle F(x') - F(x''), x' - x'' \rangle > 0, \text{ para todo } x', x'' \in K; \quad x' \neq x''. \quad (24)$$

Portanto, de (23) e (24), deduz-se que $x' = x''$; isto é, a solução é única.

3 - O MÉTODO DE PROJEÇÃO

O objetivo deste capítulo é inscrever o método de projeção em um contexto mais geral. Será apresentado um esquema iterativo genérico para a resolução de inequações variacionais, o qual se encontra no artigo "An iterative scheme for variational inequalities". [4]

Coloca-se de maneira mais rigorosa o trabalho apresentado por Dafermos [4] em relação às hipóteses por ela consideradas e apresenta-se com detalhes as demonstrações que aparecem no mesmo.

Dentre os algoritmos mais eficientes utilizados para resolver o problema de inequações variacionais dado por (5) encontra-se o método de projeção, que corresponde a este tipo de esquema. Este método gera uma seqüência $\{x_m\}$ em K , que é convergente sob algumas restrições, principalmente a de que o operador $F(\cdot)$ é estritamente monótono estabelecendo-se estimativas de contração do tipo:

$$\|x_{m+1} - x_m\|_G \leq \lambda \|x_m - x_{m-1}\|_G \quad ; \quad 0 < \lambda < 1,$$

onde $\|\cdot\|_G$ é a norma fixa descrita em 3.5.1.

Pode se apresentar um esquema iterativo para resolver o problema de inequação variacional não mais utilizando uma norma fixa $\|\cdot\|_G$ e sim considerando uma seqüência de normas em \mathbb{R}^n , $\{\|\cdot\|_m\}$, sendo as mesmas induzidas por matrizes simétricas definidas positivas G_m permitindo um ajuste da norma em cada passo do algoritmo e tendo como consequência a convergência do método sob hipóteses mais fracas.

Nesse caso as estimativas de contração serão do tipo:

$$\|x_{m+1} - x_m\|_m \leq \lambda \|x_m - x_{m-1}\|_{m-1} \quad ; \quad 0 < \lambda < 1.$$

3.1 - O ESQUEMA DE DAFERMOS

3.1.1 - O ALGORITMO

Seja K um subconjunto convexo e compacto não vazio de \mathbb{R}^n e $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável em um conjunto convexo e aberto $D \supset K$. Deseja-se determinar $x^* \in K$ que satisfaça a inequação variacional (5).

Considere uma função $g: D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ com as seguintes características:

- I) $g(x, x) = F(x)$.
- II) $g(\cdot, y)$ é G-diferenciável em D , para cada $y \in D$ fixo.
- III) $g(x, \cdot)$ é G-diferenciável em D , para cada $x \in D$ fixo.
- IV) A matriz Jacobiana $g_x(x, y)$ para todos x, y fixos pertencentes a D é simétrica definida positiva de ordem n e contínua como função de (x, y) em $D \times D$.
- V) $g_y(x, y)$ é contínua em $D \times D$.

Qualquer função $g(x, y)$ que possua as características acima gera o seguinte algoritmo :

PASSO 0: Inicializar com $x_0 \in K$

PASSO k : ($k = 1, 2, \dots$). Determinar x_k solução da inequação variacional

$$\langle g(x_k, x_{k-1}), x - x_k \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K \quad (25)$$

Pelas características (II) e (IV) da função $g(x, y)$, por 2.23 e pelas observações de 2.18 verifica-se que $g(\cdot, y)$ é um operador-potencial que define uma funcional $f(x, y): D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

para y fixo, $y \in D$ a função $f(\cdot, y)$ é estritamente convexa em D e

$$g(x, y) = f_x(x, y) \quad \text{e} \quad g_x(x, y) = f_{xx}(x, y) \quad (26)$$

Para $y = x_{k-1}$, tem-se que

$g(x, x_{k-1}) = f_x(x, x_{k-1})$ e pelo teorema 2 da seção 2.1, a inequação variacional (25) é equivalente ao problema de programação matemática convexa

$$\min_{x \in K} f(x, x_{k-1})$$

Existe, portanto uma única solução x_k para (25). Se a seqüência $\{x_k\}$ é convergente, isto é;

$$x_k \rightarrow x^* \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ então}$$

$$x_{k-1} \rightarrow x^* \text{ e } g(x, x_{k-1}) \rightarrow g(x^*, x^*) = F(x^*).$$

De (25) tem-se então que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle g(x_k, x_{k-1}), x - x_k \rangle \geq 0 ; \text{ para todo } x \in K$$

ou seja

$$\langle g(x^*, x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K.$$

Logo

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K.$$

Portanto x^* é a solução para o problema dado por (5).

3.1.2 - CONDIÇÕES PARA QUE O ALGORITMO SEJA CONVERGENTE

Antes de enunciar e demonstrar o teorema da convergência, cabe a observação de que os principais resultados matemáticos usados na demonstração do mesmo encontram-se no anexo e foram baseados nos livros de Ortega & Rheinboldt [17] e Vainberg [23].

TEOREMA 7: Caso se verifique

$$\| \| g_x^{-1/2}(x_1, y_1) g_y(x_2, y_2) g_x^{-1/2}(x_3, y_3) \| \| < 1 \quad (27)$$

para todo $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in K$. Então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo algoritmo é convergente.

Demonstração: Dado $k \in \mathbb{N}$, seja a inequação variacional dada em (25)

$$\langle g(x_k, x_{k-1}), x - x_k \rangle \geq 0; \text{ para todo } x \in K$$

Assuma-se que $x_k \neq x_{k-1}$ para todo k , caso contrário $x^* = x_k = x_{k-1}$ seria a solução do problema variacional.

Considerar na inequação acima, primeiro $k = m$ e $x = x_{m+1}$ e posteriormente $k = m+1$ e $x = x_m$.

Tem-se então que:

$$\langle g(x_m, x_{m-1}), x_{m+1} - x_m \rangle \geq 0 \quad (28)$$

$$\langle g(x_{m+1}, x_m), x_m - x_{m+1} \rangle \geq 0 \quad (29)$$

Mas (28) e (29) são equivalentes respectivamente a:

$$\langle g(x_m, x_{m-1}), x_{m+1} \rangle - \langle g(x_m, x_{m-1}), x_m \rangle \geq 0 \quad (30)$$

$$\langle g(x_{m+1}, x_m), x_m \rangle - \langle g(x_{m+1}, x_m), x_{m+1} \rangle \geq 0 \quad (31)$$

Somando (30) e (31) obtém-se

$$\langle g(x_m, x_{m-1}) - g(x_{m+1}, x_m), x_{m+1} - x_m \rangle \geq 0$$

Que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\langle g(x_{m+1}, x_m) - g(x_m, x_m), x_{m+1} - x_m \rangle \leq \\ &\langle g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m), x_{m+1} - x_m \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

Como, pela hipótese (II), $g(\cdot, y)$ é G-diferenciável então pela fórmula geral de Lagrange (a.25), considerando $\Phi(x) = g(x, x_m)$, $h = x_{m+1} - x_m$ e $x = x_m$, para $y = x_m$ fixo, tem-se:

$$\begin{aligned} &\langle g(x_{m+1}, x_m) - g(x_m, x_m), (x_{m+1} - x_m) / \|x_{m+1} - x_m\| \rangle = \\ &= \langle (x_{m+1} - x_m) / \|x_{m+1} - x_m\|, [g_x(x_m + t_1(x_{m+1} - x_m), x_m)](x_{m+1} - x_m) \rangle \end{aligned} \quad (33)$$

para algum $0 < t_1 < 1$.

Isto é,

$$\begin{aligned} &\langle g(x_{m+1}, x_m) - g(x_m, x_m), x_{m+1} - x_m \rangle = \\ &= \langle x_{m+1} - x_m, [g_x(x_m + t_1(x_{m+1} - x_m), x_m)](x_{m+1} - x_m) \rangle \end{aligned} \quad (34)$$

Seja

$$G_m = g_x(x_m + t_1(x_{m+1} - x_m), x_m)$$

Por (IV), G_m é uma matriz simétrica definida positiva de ordem n e (34) poderá ser reescrita sob a seguinte forma:

$$\langle g(x_{m+1}, x_m) - g(x_m, x_m), x_{m+1} - x_m \rangle = \langle x_{m+1} - x_m, G_m (x_{m+1} - x_m) \rangle \quad (35)$$

Substituindo (35) em (32)

$$\langle x_{m+1} - x_m, G_m (x_{m+1} - x_m) \rangle \leq \langle g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m), x_{m+1} - x_m \rangle \quad (36)$$

Como $I_n = G_m^{-1} G_m$, a desigualdade acima é equivalente a:

$$\begin{aligned} \langle x_{m+1} - x_m, G_m (x_{m+1} - x_m) \rangle &\leq \\ &\langle G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)], G_m (x_{m+1} - x_m) \rangle \end{aligned} \quad (37)$$

Mas por a.5.1

$$\begin{aligned} \langle G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)], G_m (x_{m+1} - x_m) \rangle &= \\ \langle G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)], x_{m+1} - x_m \rangle_m \end{aligned} \quad (38)$$

Que corresponde ao produto escalar definido pela matriz G_m . Analogamente, tem-se que:

$$\langle (x_{m+1} - x_m), G_m (x_{m+1} - x_m) \rangle = \|x_{m+1} - x_m\|_m^2 \quad (39)$$

Substituindo (38) e (39) na inequação (37) verifica-se que:

$$\|x_{m+1} - x_m\|_m^2 \leq \langle G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)], x_{m+1} - x_m \rangle_m \quad (40)$$

E pela desigualdade de Scharwartz

$$\begin{aligned} \langle G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)], x_{m+1} - x_m \rangle_m &\leq \\ \|G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)]\|_m \cdot \|x_{m+1} - x_m\|_m \end{aligned} \quad (41)$$

Portanto de (40) e (41) conclui-se que:

$$\|x_{m+1} - x_m\|_m \leq \|G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)]\|_m \quad (42)$$

Mas por a. 5.1(1)

$$\begin{aligned}
 & \| G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)] \|_m = \\
 & = \| G_m^{1/2} [G_m^{-1} (g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m))] \| \\
 & = \| G_m^{-1/2} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)] \| \quad (43) \\
 & = \| G_{m-1}^{1/2} [G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} (g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m))] \|
 \end{aligned}$$

Aplicando a. 5.1(1) resulta:

$$\begin{aligned}
 & \| G_m^{-1} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)] \|_m = \\
 & = \| [G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} (g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m))] \|_{m-1} \quad (44)
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo (44) no segundo membro da desigualdade (42), obtém-se

$$\| x_{m+1} - x_m \|_m \leq \| [G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} (g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m))] \|_{m-1} \quad (45)$$

Fixando $x = x_m$, constroeu-se a função

$$H(y) = G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} g(x_m, y)$$

Como a função $g(x, \cdot)$ é G-diferenciável em D então $H(y)$ é também G-diferenciável em D, logo existe a matriz Jacobiana $H'(y)$ de $H(y)$, que está definida por:

$$H'(w) = G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} g_y(x_{m-1}, w), \quad w \in D \quad (46)$$

Em relação à função $H(y)$ pode se aplicar o Teorema do Valor Médio dado em a. 24.2 nos pontos x_{m-1} e x_m , considerando a norma $\| \cdot \|_{m-1}$, isto é,

$$\| H(x_{m-1}) - H(x_m) \|_{m-1} \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \| \| H'(s x_{m-1} + (1-s) x_m) \| \|_{m-1} \cdot \| x_{m-1} - x_m \|_{m-1} \quad (47)$$

Mas

$$\begin{aligned}
 H(x_{m-1}) - H(x_m) & = [G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} g(x_m, x_{m-1})] - [G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} g(x_m, x_m)] \\
 & = G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)] \quad (48)
 \end{aligned}$$

Substituindo (46) e (48) em (47), tem-se que:

$$\begin{aligned} & \| G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)] \|_{m-1} \leq \\ & \sup_{0 \leq s \leq 1} \| G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} (g_y(x_m, s x_{m-1} + (1-s)x_m)) \|_{m-1} \cdot \| x_{m-1} - x_m \|_{m-1} \end{aligned} \quad (49)$$

Mas por a. 5.1 (3)

$$\begin{aligned} & \| G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} (g_y(x_m, s x_{m-1} + (1-s)x_m)) \|_{m-1} = \\ & = \sup_{0 \leq s \leq 1} \| G_m^{-1/2} g_y(x_m, s x_{m-1} + (1-s)x_m) G_{m-1}^{-1/2} \| \end{aligned} \quad (50)$$

Então substituindo (50) no segundo membro de (49), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \| G_{m-1}^{-1/2} G_m^{-1/2} [g(x_m, x_{m-1}) - g(x_m, x_m)] \|_{m-1} \leq \\ & \sup_{0 \leq s \leq 1} \| G_m^{-1/2} g_y(x_m, s x_{m-1} + (1-s)x_m) G_{m-1}^{-1/2} \| \cdot \| x_{m-1} - x_m \|_{m-1} \end{aligned} \quad (51)$$

De (42) até (51) conclui-se que

$$\| x_{m-1} - x_m \|_m \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \| G_m^{-1/2} g_y(x_m, s x_{m-1} + (1-s)x_m) G_{m-1}^{-1/2} \| \quad (52)$$

Considere

$$x_1 = x_m + t_1 (x_{m+1} - x_m), \quad y_1 = x_m, \quad (t_1 \in [0, 1] \text{ fixo; relacionado com } G_m)$$

$$x_2 = x_m, \quad y_2 = s x_{m-1} + (1-s)x_m, \quad \text{para cada } s \in [0, 1]$$

$$x_3 = x_{m-1} + t_2 (x_m - x_{m-1}), \quad y_3 = x_{m-1},$$

$$(t_2 \in [0, 1] \text{ fixo; relacionado com } G_{m-1})$$

Como x_m, x_{m+1}, x_{m-1} pertencem a K e K é convexo então $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ também pertencem a K .

Logo, a desigualdade (52) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \| x_{m-1} - x_m \| \leq \\ \sup_{s \in [0, 1]} \| g_x^{-1/2}(x_1, y_1) g_y(x_2, s x_{m-1} + (1-s)x_m) g_x^{-1/2}(x_3, y_3) \| \cdot \| x_{m-1} - x_m \|_{m-1} \end{array} \right.$$

Mas, como pela hipótese, $g_X(\cdot, \cdot)$ e $g_Y(\cdot, \cdot)$ são contínuas em $K \times K$ então $g_X^{-1/2}(\cdot, \cdot)$ também é contínua. Dado que a norma $\| \cdot \|$ é uma função contínua e o conjunto K é compacto e pelo resultado citado em a. 8 tem-se que:

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in [0, 1]} \| g_X^{-1/2}(x_1, y_1) g_Y(x_2, s x_{m-1} + (1-s)x_m) g_X^{-1/2}(x_3, y_3) \| \cdot \| x_{m-1} - x_m \|_{m-1} \\ & \leq \sup_{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in K} \| g_X^{-1/2}(x_1, y_1) g_Y(x_2, y_2) g_X^{-1/2}(x_3, y_3) \| = \\ & = \| g_X^{-1/2}(x^*_1, y^*_1) g_Y(x^*_2, y^*_2) g_X^{-1/2}(x^*_3, y^*_3) \| \end{aligned}$$

Portanto resulta:

$$\| x_{m+1} - x_m \|_m \leq \lambda \| x_m - x_{m-1} \|_{m-1} \quad (53)$$

Mas

$$\| x_{m+1} - x_m \|_m \leq \lambda \| x_m - x_{m-1} \|_{m-1} \leq \dots \leq \lambda^m \| x_1 - x_0 \|_0 \quad (54)$$

Por outro lado, usando as mesmas propriedades anteriores, tem-se que:

$$\min_{(x, y) \in K \times K} \| g_X(x, y) \| = \| g_X(x^*, y^*) \| = \beta^2, \quad (x^*, y^*) \in K \times K$$

sendo β^2 o menor auto-valor de $g_X(x^*, y^*)$, que por hipótese, é definida positiva, logo $\beta^2 > 0$

Portanto

$$\max_{(x, y) \in K \times K} \| g_X^{-1/2}(x, y) \| = \| g_X^{-1/2}(x^*, y^*) \| = \beta^{-1}$$

Como $G_m^{-1/2} = g_X^{-1/2}(t_1 x_m + (1-t_1)x_{m+1} + 1, x_m)$, tem-se então que

$$\| G_m^{-1/2} \| \leq \beta^{-1} \quad (55)$$

Mas, dado $x \in K$, $m \in \mathbb{N}$

$$\| x \| = \| G_m^{-1/2} G_m^{1/2} x \| \leq \| G_m^{-1/2} \| \cdot \| G_m^{1/2} x \| \quad (56)$$

Por (55) e (56) tem-se que

$$\| x \| \leq \beta^{-1} \| G_m^{1/2} x \| \quad (57)$$

Mas por a. 5.1(i), verifica-se que:

$$\| x \| \leq \beta^{-1} \| x \|_m \quad (58)$$

Pela propriedade (III) da norma $\| \cdot \|$, tem-se que:

$$\| x_{k+r} - x_k \| \leq \sum_{m=k}^{k+r+1} \| x_{m+1} - x_m \|$$

Finalmente, por (55) e (57)

$$\begin{aligned} &\leq \beta^{-1} \sum_{m=k}^{k+r+1} \| x_{m+1} - x_m \| \leq \beta^{-1} \| x_1 - x_0 \| \sum_{m=k}^{k+r+1} \lambda^m \leq \\ &\leq \beta^{-1} \| x_1 - x_0 \| \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \beta^{-1} \| x_1 - x_0 \| \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \end{aligned}$$

O que mostra que a seqüência $\{x_k\}$ é de Cauchy, logo é convergente em \mathbb{R}^n .

C. Q. D.

TEOREMA 8: Uma condição necessária para que (27) seja satisfeita é que a função F seja estritamente monótona em K .

Demonstração: Supor que seja válida a condição (27) e que $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = x_3 = y_3 = x$ e dado que $F(x) = g(x, x)$, o Jacobiano de F , denotado por F_x é:

$$F_x(x) = g_x(x, x) + g_y(x, x)$$

A condição descrita por (27) equivalerá a:

$$\begin{aligned} &1 > \|\| g_x^{-1/2}(x, x) g_y(x, x) g_x^{-1/2}(x, x) \|\| = \\ &= \|\| g_x^{-1/2}(x, x) (F_x(x) - g_x(x, x)) g_x^{-1/2}(x, x) \|\| = \\ &= \|\| g_x^{-1/2}(x, x) F_x(x) g_x^{-1/2}(x, x) - g_x^{-1/2}(x, x) g_x(x, x) g_x^{-1/2}(x, x) \|\| \\ &= \|\| g_x^{-1/2}(x, x) F_x(x) g_x^{-1/2}(x, x) - I \|\| \\ &= \|\| I - g_x^{-1/2}(x, x) F_x(x) g_x^{-1/2}(x, x) \|\| \end{aligned} \tag{59}$$

Seja

$$G = g_x^{-1/2}(x, x) F_x(x) g_x^{-1/2}(x, x)$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\| I - G \|\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|(I - G)x\|^2 \\ &= \sup_{x^t x = 1} \{x^t (I - G)^t (I - G)x\} \\ &= \sup_{x^t x = 1} \{1 - x^t (G^t + G)x + x^t G^t G x\} < 1 \end{aligned}$$

Portanto

$$- x^t (G^t + G) x + x^t G^t G x < 0$$

Logo

$$x^t (G^t + G) x > x^t G^t G x \geq 0, \forall x \in K, x \neq 0.$$

Isto é, se $(G^t + G)$ é definida positiva para todo $x \in K, x \neq 0$, que é condição necessária e suficiente para a matriz G (possivelmente não simétrica) ser definida positiva em K ; o que acarreta que $F(x)$ seja definida positiva também, isto é, $F(x)$ é estritamente monótona.

C. Q. D.

Se F é uma função estritamente monótona então pelas observações feitas em 2.3, a inequação variacional (5) possui uma única solução. Sob a condição dada por (27), a seqüência $\{x_k\}$ converge para a única solução do problema proposto.

3.2 - MÉTODO DE PROJEÇÃO

Nesta seção descreve-se o método de projeção para resolver numericamente o problema de inequação variacional apresentado em (5), seguindo o trabalho de Pang e Chan [18]. O método projeção é focalizado como sendo parte do esquema iterativo descrito anteriormente em 3.1 .

O problema de inequação variacional denotado por PIV (K, F) pode ser resolvido numericamente utilizando métodos iterativos que o aproximem sucessivamente por problemas com soluções mais fáceis de serem calculadas. Estes métodos seguem o seguinte esquema:

"- Dado $x_k \in K$, encontrar $x_{k+1} \in K$, que resolva o problema variacional PIV(K, F^k) sendo F^k uma aproximação do operador F no ponto x_k ."

Se o problema de inequação variacional PIV(K, F^k) for de tal forma que:

$$F^k(x) = F(x_k) + A(x_k)(x - x_k) \quad (60)$$

então o método é classificado como de aproximação linear, onde $A(x_k)$ é uma matriz de ordem n.

Incluídos nessa família de métodos aparecem:

- I. Método de Newton em que o operador F é diferenciável e $A(x_k) = \nabla F(x_k)$ para cada k.
- II. Método de Quasi-Newton em que $A(x_k)$ é uma aproximação para $\nabla F(x_k)$.
- III. Métodos de Relaxação Sucessiva (SOR) nos quais $A(x_k) = L(x_k)$, (ou $U(x_k) + D(x_k) / w^*$), sendo w^* o parâmetro de relaxação ($0 < w^* < 2$) e $D(x_k)$, $L(x_k)$ e $U(x_k)$ são respectivamente as partes diagonal, estritamente inferior e superior de $\nabla F(x_k) = F_x(x_k)$.
- IV. Método de Jacobi em que $A(x_k) = D(x_k)$ e finalmente
- V. Método de projeção em que $A(x_k) = A$, para todo k, sendo A alguma matriz simétrica definida positiva.

Dentre os métodos de aproximação linear citados será desenvolvido o Método de Projecção, que tem estreita relação com o esquema geral de Dafermos apresentado em 3.1.

Assim sendo (60) ficará sob a seguinte forma:

$$F^k(x) = F(x) = F(x_k) + 1/\rho A(x - x_k) \quad (61)$$

onde ρ é um escalar positivo apropriadamente escolhido e A é uma matriz simétrica definida positiva.

Deseja-se então encontrar $x_{k+1} \in K$ convexo e compacto que resolva o problema PIV(K, F^k) isto é:

$$\langle F(x_k) + 1/\rho A(x - x_k), x - x_k \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \in K.$$

Para que o problema acima seja equivalente a um problema de programação matemática, de acordo com o que foi visto na seção 2.1, necessita-se encontrar uma funcional $f : D \subset K \rightarrow \mathbb{R}$, (D um conjunto aberto) G -diferenciável de tal forma que $F(x) = \nabla f(x)$, para $x \in K$. De fato, $F(x)$ é o gradiente da seguinte função:

$$f(x) = \langle F(x_k), x \rangle - 1/\rho \langle A x_k, x \rangle + 1/2\rho \langle x, A x \rangle$$

A função $f(\cdot)$ é estritamente convexa, contínua, e diferenciável em K e portanto o problema PIV(K, F^k) é equivalente a encontrar x_{k+1} que seja solução do seguinte problema:

$$\min_{x \in K} [1/2\rho \langle x, A x \rangle + \langle F(x_k) - 1/\rho A x_k, x \rangle] \quad (62)$$

$$= \frac{1}{\rho} \min_{x \in K} [1/2 \langle x, A x \rangle + \langle A A^{-1} \rho F(x_k) - A x_k, x \rangle]$$

$$= \frac{1}{\rho} \min_{x \in K} [1/2 \langle x, A x \rangle + \langle \rho A^{-1} F(x_k) - x, A x_k \rangle] \quad (63)$$

$$= \frac{1}{\rho} \min_{x \in K} [1/2 \|x\|_A^2 - \langle -\rho A^{-1} F(x_k) + x_k, x \rangle_A]$$

Este problema é equivalente a:

$$\min_{x \in K} [1/2 \|x\|_A^2 - \langle x_k - \rho A^{-1} F(x_k), x \rangle_A + 1/2 \|x_k - \rho A^{-1} F(x_k)\|_A^2] \quad (64)$$

E a expressão (64) reescreve-se:

$$\min_{x \in K} \|x - [x_k - \rho A^{-1} F(x_k)]\|_A^2 \quad (65)$$

De (63) e (65), o problema PIV(K, F^k) corresponde a encontrar $x_{k+1} \in K$ que seja solução de (65), significando que:

x_{k+1} é a projeção de $[x_k - \rho A^{-1} F(x_k)]$ sobre o conjunto K em relação a A -norma,

$$\text{isto é, } x_{k+1} = \text{proj}_K^A [x_k - \rho A^{-1} F(x_k)] \quad (66)$$

Observa-se então que o algoritmo de projeção consiste na resolução de uma seqüência de problemas de programação quadrática.

3.3 - O MÉTODO DE PROJEÇÃO COMO UM CASO PARTICULAR DO ESQUEMA DE DAFERMOS .

Conforme já mencionado, o método de projeção introduzido em 3.1 pode ser pensado como um caso particular do esquema iterativo de Dafermos, observando-se que a função apresentada em (61), com a notação utilizada por Dafermos, ficará sob a seguinte forma:

$$g(x, y) = F(y) + 1/\rho A (x - y), \quad \rho > 0$$

E a condição de convergência dada por (27), será:

$$\| \rho^{-1/2} A^{-1/2} [F_y(y) - 1/\rho A] \rho^{-1/2} A^{-1/2} \| < 1, \text{ para todo } x, y \in K$$

Ou ainda, de acordo com (59) e dado que a expressão anterior só depende de uma variável que pode voltar a ser denominada x ; resulta:

$$\| I - \rho A^{-1/2} F_x(x) A^{-1/2} \| < 1, \quad x \in K \quad (67)$$

que será satisfeita para valores ρ suficientemente pequenos.

Sabe-se que a matriz $B(x) = A^{-1/2} F_x(x) A^{-1/2}$ é definida positiva para todo $x \in K$ e como K é compacto tem-se que:

$$\mu y^t y \leq y^t B(x) y$$

$$y^t B(x)^t B(x) y \leq M y^t y, \quad \mu, M > 0; \quad x \in K, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sendo μ : menor auto-valor de $B(x)$ para todo $x \in K$.

M : maior auto-valor de $B(x)^t B(x)$ para todo $x \in K$.

Mas

$$\begin{aligned} \|I - \rho B(x)\|^2 &= \sup_{\|y\| = 1} \|I - \rho B(x) y\|^2 \\ &= \sup_{y^t y = 1} \{y^t (I - \rho B(x))^t (I - \rho B(x)) y\} \\ &= 1 - 2\rho y^t B(x) y + \rho^2 y^t B^t(x) B(x) y \\ &= 1 - 2\rho\mu + \rho^2 M < 1 \end{aligned} \tag{68}$$

Mas (68) será satisfeita, se $\rho < \frac{2\mu}{M}$.

A condição dada por (67) corresponde àquela determinada no trabalho de Pang para ρ igual a um.

A seguir é apresentada uma tabela que mostra de forma compacta o método de projeção como um caso particular do esquema geral apresentado por Dafermos.

TABELA 1

<p align="center">DAFERMOS (Algoritmo genérico)</p>	<p align="center">MÉTODO DE PROJEÇÃO (Algoritmo particular)</p>
<p>$g(x,y) K \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$; $g(x,x) = F(x)$</p>	<p>$g(x,y) = F(y) + (1/\rho) A (x - y)$; $g(x,x) = F(x)$</p> <p>sendo $\rho > 0$ e A uma matriz simétrica definida positiva de ordem n.</p>
<p>$E_x(x,y)$ uma matriz simétrica definida positiva de ordem n.</p>	<p align="center">$E_x(x,y) = (1/\rho) A$</p>
<p align="center">Iteração k: Considerar $g(x,x_k)$</p>	<p align="center">Iteração k: [aproximação linear do operador F no ponto x]. Considerar $F^k(x) = F(x_k) + (1/\rho) A(x - x_k)$</p>
<p>[Problema de inequação variacional - PIV($K, g(x,x_k)$)] Encontrar $x_{k+1} \in K$: $\langle g(x_{k+1}, x_k), x - x_{k+1} \rangle \geq 0$, para todo $x \in K$</p>	<p>[Problema de inequação variacional - PIV (K, F^k)] Encontrar $x_{k+1} \in K$: $\langle F^k(x_{k+1}), x - x_{k+1} \rangle \geq 0$, para todo $x \in K$</p>
<p>$f(x,y) = \int g(x,y) dx$, sendo $f(x,y): K \times K \rightarrow \mathbb{R}$.</p>	<p>$f(x,y) = \int g(x,y) dy$ $f(x,y) = \langle F(y), x \rangle - (1/\rho) \langle Ay, x \rangle + (1/2\rho) \langle x, Ax \rangle$</p>
<p>[Problema de programação matemática equivalente ao PIV($K, g(x,x_k)$)] $\min_{x \in K} f(x,x_k)$</p>	<p>[Problema de programação matemática equivalente ao PIV($K, F^k(x)$)] $\min_{x \in K} \ x - [x_k - \rho A^{-1} F(x_k)] \ _A^2$</p>
<p>[Condição de convergência do algoritmo] $\ \ E_x^{-1/2}(x_1,y_1) E_y(x_2,y_2) E_x^{-1/2}(x_3,y_3) \ \ < 1$ para todo $x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 \in K$</p>	<p>[Condição de convergência do algoritmo] $\ \ I - \rho A^{-1/2} F_x(x) A^{-1/2} \ \ < 1$ para todo $x \in K$</p>

4 - DECOMPOSIÇÃO SIMPLICIAL RESTRITA

A finalidade essencial deste capítulo é apresentar o "Método da decomposição Simplicial Restrita (RSD)", o que compreende a apresentação dos algoritmos de decomposição simplicial clássica; o RSD propriamente dito, e os teoremas e resultados que demonstram a convergência do mesmo.

A bibliografia básica consultada constituiu-se dos artigos "Finiteness Simplicial Decomposition" [11] e "Restricted Simplicial Decomposition - Computation and Extensions" [12].

4.1- MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO SIMPLICIAL

A Decomposição Simplicial é um método para resolver problemas de otimização pseudo-convexa de grande porte, onde as restrições são lineares. O método resolve alternadamente um subproblema linear e um subproblema não linear ("problema principal").

O subproblema linear é obtido a partir do problema original fazendo uma aproximação linear da função objetivo; já o problema não-linear resulta da construção de um poliedro mais simples (com um número menor de vértices), o qual está contido no conjunto viável do problema original. Os pontos extremos (vértices) deste poliedro são gerados pelo problema linear ao longo de sucessivas iterações.

O Método Simplicial clássico apresenta o inconveniente de o tamanho do problema crescer conforme se aumenta o número de iterações e desta forma passa a considerar um número excessivo de pontos. Para que isto não ocorra há uma versão restrita da decomposição simplicial, onde o usuário pode controlar o tamanho do problema através de um parâmetro r , o qual limita o número de vértices, definindo o simplex atualizado em cada iteração.

4.1.1 - PRELIMINARES

Considera-se o seguinte problema:

$$(P1) : \min \{f(x) / Bx = b, x \geq 0\}$$

Sendo

B : matriz $m \times n$ ($m \leq n$ e posto de $B = m$)

$b \in \mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$

$f(x)$ uma função pseudo-convexa estrita continuamente diferenciável

S : região dos pontos viáveis, isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Bx = b, x \geq 0\}$$

Inicialmente, S é considerada limitada, o que permite que qualquer elemento de S possa ser expresso como combinação convexa de seus pontos extremos e o problema (P1) possa ser reescrito sob a seguinte forma:

$$(P2) : \min \{f(A\beta) / \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, N\}$$

onde

N = número de pontos extremos (vértices) de S

a_i = coluna da matriz A que corresponde ao i -ésimo vértice de S .

A fim de introduzir os algoritmos de decomposição Simplicial, tanto a versão clássica quanto a restrita, cabe ressaltar a seguinte notação auxiliar:

$|W|$: cardinalidade de um conjunto arbitrário W

W_S^k : conjunto de vértices de S considerados na iteração $(k-1)$

$$W_S^k \subseteq \{y^0, \dots, y^i, \dots, y^{k-1}\}$$

onde y^i é a solução do problema linear correspondente a i -ésima iteração para $i = 0, \dots, k-1$.

W_x^k : conjunto que pode ser vazio ou conter um único elemento, o qual de certa forma, funciona como sendo a memória dos pontos eliminados de W_S^k para manter a cardinalidade deste conjunto no limite estipulado pelo parâmetro r .

W^k : conjunto de vértices do poliedro considerado no problema principal na iteração $(k-1)$.

4.1.2 - ALGORITMO CLÁSSICO DE DECOMPOSIÇÃO SIMPLICIAL (SD)

PASSO 0 : (inicialização) Seja x^0 um ponto viável,

$$W_S^0 = \emptyset, k = 0$$

PASSO 1 : (subproblema linear)

Calcule $y^k \in \arg \min \{ \langle \nabla f(x^k), y \rangle, y \in S \}$

Se $\langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle \geq 0$

então x^k é uma solução. Pare.

Caso contrário

$$W_S^{k+1} := W_S^k \cup \{y^k\}$$

PASSO 2 : (problema principal)

Calcule $\bar{x}^{k+1} = \arg \min \{f(x) / x \in \text{Co}(W^{k+1}_S)\}$

Seja $\bar{x}^{k+1} = \sum \beta_i z_i$, $\sum \beta_i = 1$, $\beta_i \geq 0$, $z_i \in W^{k+1}_S$

$W^{k+1}_S = W^k_S - \{z_i \in W^k_S / \beta_i = 0\}$

Faça $k := k + 1$ e vá para o PASSO 1.

4.1.3 - ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO SIMPLICIAL RESTRITA (RSD)

PASSO 0 : (inicialização)

Seja x^0 um ponto viável,

Coloque $W^0_S = \emptyset$, $W^0_x = W^0 = \{x^0\}$, $I^0 = \{0\}$, $k := 0$

PASSO 1 : (subproblema linear)

Calcule $y^k \in \arg \min \{\langle \nabla f(x^k), y \rangle, y \in S\}$

Se $\langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle \geq 0$

então x^k é uma solução. Pare.

Caso contrário

I) Se $|W^k_S| < r$ então

faça $W^{k+1}_S := W^k_S \cup \{y^k\}$

$W^{k+1}_x = W^k_x$

II) Se $|W^k_S| = r$ então

Considere $x^k = \sum_{i \in I^k} \beta_i z_i$

Seja $\beta_j = \min \{\beta_i / z_i \in W^k_S\} =$

$= \min \{\beta_i / z_i = y^i \in W^{k+1}_S\}$

Faça $W^{k+1}_S = (W^k_S - \{y^j\}) \cup \{y^k\}$

$W^{k+1}_x = \{x^k\}$

Faça $W^{k+1} = W^{k+1}_S \cup W^{k+1}_x$

$I^{k+1} = \{i / z_i \in W^{k+1}\}$

Vá para o PASSO 2.

PASSO 2 : (problema principal)

Calcule $\bar{x}^{k+1} = \arg \min \{f(x) / x \in Co(W^{k+1})\}$

Seja $\bar{x}^{k+1} = \sum_{i \in I^{k+1}} \beta_i z_i$

Para $i \in I^{k+1}$

Se $\beta_i = 0$ então

Se $z_i \in W^{k+1}_S$ então $W^{k+1}_S = W^{k+1}_S - \{z_i\}$

$I^{k+1} = I^{k+1} - \{i\}$

Caso contrário $W^{k+1}_x \neq \emptyset$

Faça $k := k + 1$ e vá para o PASSO 1.

4.2 - CONVERGÊNCIA GLOBAL DO RSD

Pelo algoritmo apresentado na seção anterior pode se observar que a região viável do problema principal $Co(W^{k+1})$ sempre contém a iteração corrente \bar{x}^k e o vértice que entra y^k . Quando \bar{x}^k não é solução então $(y^k - \bar{x}^k)$ é uma direção de descida $(f'(\bar{x}^k), y^k - \bar{x}^k) = \langle \nabla f(\bar{x}^k), y^k - \bar{x}^k \rangle < 0$, assegurando uma diminuição no valor da função objetivo na nova iteração \bar{x}^{k+1} .

LEMA 1: Se \bar{x}^k não é solução ótima para (P1) então

$$f(\bar{x}^{k+1}) < f(\bar{x}^k)$$

Demonstração : Pelo algoritmo RSD, o ponto \bar{x}^k é viável para o problema principal e \bar{x}^{k+1} resolve o mesmo; logo:

$$f(\bar{x}^{k+1}) \leq f(\bar{x}^k)$$

Tem-se ainda que \bar{x}^k e $y^k \in Co(W^{k+1})$.

Se $f(\bar{x}^{k+1}) = f(\bar{x}^k)$ então \bar{x}^k também é um ponto de mínimo e pelo teorema 1 do capítulo 2.

$$\langle \nabla f(\bar{x}^k), y - \bar{x}^k \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in Co(W^{k+1})$$

Mas como $y^k \in Co(W^{k+1})$ isto gera uma contradição e \bar{x}^{k+1} não seria gerado (pelo teste de parada o algoritmo teria finalizado em \bar{x}^k). Logo :

$$f(\bar{x}^{k+1}) < f(\bar{x}^k).$$

C.Q.D.

LEMA 2: Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo RSD; então não pode existir uma subsequência $\{x^k\}$, $k \in N_1 \subset \mathbb{N}$ com as seguintes propriedades:

$$I) x^k \rightarrow x^\infty, k \in N_1$$

$$II) y^k \rightarrow y^\infty, k \in N_1$$

$$III) \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty - x^\infty \rangle < 0$$

Demonstração: Suponha que exista uma subsequência que satisfaça as propriedades acima; portanto existe $\Gamma > 0$ tal que

$$\langle \nabla f(x^\infty), y^\infty - x^\infty \rangle < -\Gamma \quad (67)$$

Define-se a seguinte função:

$$h(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$h(x, y) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

A função acima é contínua em \mathbb{R}^{n+n} e em particular em (x^∞, y^∞) . Logo dado $\varepsilon = \frac{\Gamma}{2}$, existe $\bar{k} \in N_1$ tal que

$$|h(x^k, y^k) - h(x^\infty, y^\infty)| < \varepsilon \quad \text{para todo } k \geq \bar{k}, k \in N_1$$

isto é,

$$-\frac{\Gamma}{2} < h(x^k, y^k) - h(x^\infty, y^\infty) < \frac{\Gamma}{2}, \text{ para todo } k \geq \bar{k}, k \in N_1$$

ou seja,

$$-\frac{\Gamma}{2} < \langle \nabla f(x^k), x^k - y^k \rangle - \langle \nabla f(x^\infty), x^\infty - y^\infty \rangle < \frac{\Gamma}{2}$$

mas por (67) tem-se que

$$\langle \nabla f(x^k), x^k - y^k \rangle < \frac{\Gamma}{2} - \Gamma, \text{ para todo } k \geq \bar{k}, k \in N_1$$

então,

$$\langle \nabla f(x^k), x^k - y^k \rangle < -\frac{\Gamma}{2}, \text{ para todo } k \geq \bar{k}, k \in N_1$$

(68)

Define-se a função

$$H(. . . .) : \mathbb{R}^{n+n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x, y, t) : \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle$$

Tem-se que $H(. . . .)$ é contínua em \mathbb{R}^{n+n+1} e em particular em $(x^\infty, y^\infty, 0)$, portanto dado $\varepsilon = \frac{3}{4} \Gamma$ existem constantes positivas δ_1, δ_2, ϕ ; tal que se

$$\|x - x^\infty\| < \delta_1, \quad \|y - y^\infty\| < \frac{\delta_2}{2} \text{ e } |t| < \phi \text{ então}$$

$$|H(x, y, t) - H(x^\infty, y^\infty, 0)| < \varepsilon$$

logo

$$|\langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle - \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty - x^\infty \rangle| < \varepsilon$$

ou ainda

$$\langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle < \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty - x^\infty \rangle + \frac{3}{4} \Gamma$$

e por (67) tem-se que

$$\langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle < -\frac{\Gamma}{4} \quad (69)$$

para todo (x, y, t) tal que $\|x - x^\infty\| < \delta_1, \|y - y^\infty\| < \delta_2$ e $0 < t < \phi$

Como $x^k \rightarrow x^\infty, y^k \rightarrow y^\infty, k \in \mathbb{N}_1$ resulta que:

Dados $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_1$ tal que

$$\|x^k - x^\infty\| < \delta_1, \text{ para todo } k \geq k_1, k \in \mathbb{N}_1 \quad (70)$$

$$\|y^k - y^\infty\| < \delta_2, \text{ para todo } k \geq k_2, k \in \mathbb{N}_1$$

Pela definição de x^{k+1} no PASSO 2 do algoritmo, tem-se que existe $\sigma > 0$ tal que

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k + t(y^k - x^k)) \text{ para todo } t \in (0, \sigma) \quad (71)$$

Seja $t^* \in (0, \min(\phi, \sigma))$ e pela expansão de Taylor tem-se que:

$$f(x^k + t^*(y^k - x^k)) = f(x^k) + \langle \nabla f(x^k + \alpha t^*(y^k - x^k)), t^*(y^k - x^k) \rangle \quad (72)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Como $t^* \in (0, \sigma)$ de (72) e (71), verifica-se que

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k + \alpha t^* (y^k - x^k)), t^* (y^k - x^k) \rangle \quad (73)$$

Tendo em vista que $0 \leq \alpha \leq 1$ e que $0 \leq \alpha t^* \leq \phi$ define-se $k' = \max\{\bar{k}, k_1, k_2\}$. De (69), (70) e (72) deduz-se que

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - t^* \frac{\Gamma}{4}, \text{ para todo } k \geq k', k' \in N_1 \quad (74)$$

Como f é contínua então $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^\infty)$, $k \in N_1$; logo dado $\epsilon = t^* \cdot \frac{\Gamma}{8}$ existe $k' \in N_1$ tal que

$$|f(x^k) - f(x^\infty)| < \epsilon$$

ou seja,

$$f(x^k) > f(x^\infty) - \epsilon, \text{ para todo } k \geq k', k' \in N_1$$

$$f(x^\infty) > f(x^k) - t^* \cdot \frac{\Gamma}{8}, \text{ para todo } k \geq k', k' \in N_1 \quad (75)$$

Mas de (75) e (74), tem-se

$$f(x^\infty) > f(x^k) - t^* \cdot \frac{\Gamma}{8} > f(x^k) - t^* \cdot \frac{\Gamma}{4} \geq f(x^{k+1})$$

Então

$$f(x^\infty) > f(x^{k+1})$$

Porém como $\{f(x^k)\}$ é uma sequência decrescente então $f(x^\infty) \leq f(x^{k+1})$ e desta forma se obtém uma contradição.

C. Q. D.

TEOREMA 9: I) Se o algoritmo RSD finaliza em x^k então o mesmo é a solução do problema (P1).

II) Se o algoritmo RSD gera uma sequência infinita $\{x^k\}$ então todo ponto de aderência da sequência é solução do problema (P1).

Demonstração: I) Por hipótese, admite-se que o RSD finaliza em x^k . Pelo algoritmo, sabe-se que

$$y^k \in \arg \min \{ \langle \nabla f(x^k), y \rangle, y \in S \}$$

E que y^k verifica o teste de parada, isto é,

$$\langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle \geq 0 \quad (76)$$

$$\langle \nabla f(x^k), y^k \rangle \geq \langle \nabla f(x^k), x^k \rangle$$

Supõe-se, que x^k não seja solução (P1) então pelo Teorema 1 do capítulo 2, existe $y \in S$ tal que:

$$\langle \nabla f(x^k), y - x^k \rangle < 0$$

$$\langle \nabla f(x^k), y \rangle < \langle \nabla f(x^k), x^k \rangle \quad (77)$$

Por (76) e (77), verifica-se que

$\langle \nabla f(x^k), y \rangle < \langle \nabla f(x^k), x^k \rangle$, o que é um absurdo pela própria construção de y^k ; logo x^k é a solução para o problema (P1).

II) Supõe-se, por hipótese, que o RSD gera uma sequência infinita $\{x^k\}$, portanto tem-se que

$$\langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle < 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \quad (78)$$

O conjunto de pontos de aderência de $\{x^k\}$ é não vazio, já que S é um conjunto compacto.

Seja x^∞ ponto aderente de $\{x^k\}$, isto é, existe uma subsequência de $\{x^k\}$, denotada por $\{x_{k_j}\}_{k_j \in K_1}$, $K_1 \subseteq \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^\infty, \quad k \in K_1 \quad (79)$$

Como S é um conjunto compacto e $\{y^k\} \subset S$ então existe uma subsequência de $\{y^k\}$, designada por $\{y^{k_j}\}_{k_j \in K_2}$, $K_2 \subseteq K_1$ convergente, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y^\infty, \quad k \in K_2 \quad (80)$$

De (79) e (80), verifica-se que

$$y^k \rightarrow y^\infty, \text{ para todo } k \in K_2 \subseteq \mathbb{N}$$

$$x^k \rightarrow x^\infty, \text{ para todo } k \in K_2 \subseteq \mathbb{N}$$

De (78) e sabendo-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x^k) = \nabla f(x^\infty)$, $k_2 \in K_2$

Tem-se que

$$\langle \nabla f(x^\infty), y^\infty - x^\infty \rangle \leq 0 \quad (81)$$

Como $\{x^k\}$ foi gerada pelo RSD, então pelo LEMA 2

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty - x^\infty \rangle &= 0, \text{ ou seja,} \\ \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty \rangle &= \langle \nabla f(x^\infty), x^\infty \rangle \end{aligned} \quad (82)$$

Por outro lado, pela construção de y^k , sabe-se que

$$\langle \nabla f(x^k), y^k \rangle \leq \langle \nabla f(x^k), y \rangle, \text{ para todo } y \in S, k \in \mathbb{N}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x^k), y^k \rangle &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x^k), y \rangle, \text{ para todo } y \in S, k \in K_2 \subseteq \mathbb{N} \\ \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty \rangle &\leq \langle \nabla f(x^\infty), y \rangle, \text{ para todo } y \in S \end{aligned} \quad (83)$$

Se x^∞ não for solução para o problema (P1), então pelo Teorema 1 do capítulo 2, tem-se que existe $y \in S$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x^\infty), (y - x^\infty) \rangle &< 0 \\ \langle \nabla f(x^\infty), y \rangle &< \langle \nabla f(x^\infty), x^\infty \rangle \end{aligned} \quad (84)$$

De (82) e (84) tem-se que

$$\langle \nabla f(x^\infty), y \rangle < \langle \nabla f(x^\infty), y^\infty \rangle \quad (85)$$

Mas (85) contradiz (83), portanto x^∞ é solução para (P1).

C. Q. D.

4.2.1 - CONVERGÊNCIA FINITA DO RSD

Considere x^* a única solução para o problema (P2), portanto x^* é também solução ótima para (P1).

Define-se

- I) $I^* = \{a_i / \langle \nabla f(x^*), a_i - x^* \rangle = 0 ; i = 1, 2, \dots, N\}$ e
- II) $Co(I^*)$ como sendo a face ótima da região de pontos viáveis S para o subproblema linear, onde $S = Co(a_1, a_2, \dots, a_N)$.

OBSERVAÇÕES :

I) O conjunto $I^* \neq \emptyset$ (86)

De fato, pelo PASSO 1 do algoritmo RSD, o problema $\min \{ \langle \nabla f(x^*), y \rangle, y \in S \}$ é linear e como S é limitado, atinge uma solução pelo menos em um vértice a_j . (página 111 da referência [2]).

Logo

$$\langle \nabla f(x^*), a_j \rangle \leq \langle \nabla f(x^*), y \rangle, \text{ para todo } y \in S$$

Se $y = x^*$

$$\langle \nabla f(x^*), a_j \rangle \leq \langle \nabla f(x^*), x^* \rangle$$

Ou seja,

$$\langle \nabla f(x^*), a_j - x^* \rangle \leq 0$$

Como x^* é a solução ótima, então, pelos teorema 1 (capítulo 2)

$$\langle \nabla f(x^*), (a_j - x^*) \rangle = 0$$

II) Pela definição de I^* e pelos teorema 1 (capítulo 2), verifica-se que:

$$\langle \nabla f(x^*), (a_j - x^*) \rangle > 0, \text{ para todo } a_j \notin I^* \quad (87)$$

LEMA 3 : Seja $x'' = \arg \min \{ f(x) / x \in \text{Co}(z_1, z_2, \dots, z_p) \}$; sendo

$$x'' = \sum_{i=1}^p \beta_i z_i ; z_i \in S ; \sum_{i=1}^p \beta_i = 1 \text{ e } \beta_i \geq 0 ; i = 1, 2, \dots, p$$

então

$$\langle \nabla f(x''), z_j - x'' \rangle > 0 \text{ implica que } \beta_j = 0$$

Demonstração : Suponha por hipótese que

$$\langle \nabla f(x''), z_j - x'' \rangle > 0 \quad (88)$$

e admita que $\beta_j > 0$ (89)

Defina

$$\begin{aligned} z &= x'' + \beta_j [x'' - z_j] / (1 - \beta_j) \\ &= x'' / (1 - \beta_j) - \beta_j z_j / (1 - \beta_j) \end{aligned}$$

Logo

$$z = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \beta_i z_i (1 - \beta_j) \quad e \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \beta_i = 1 - \beta_j$$

portanto $z \in \text{Co}(z_1, z_2, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_p)$ e $d = (z - x'')$ é uma direção viável a partir de x'' para (P2) (e conseqüentemente para (P1)); pois para todo $t \in (0, 1)$ verifica-se que

$$x'' + td = x'' + t(z - x'') = [(1 - t)x'' + tz] \in \text{Co}(z_1, z_2, \dots, z_p)$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x''), z - x'' \rangle &= \langle \beta_j \nabla f(x''), x'' - z_j \rangle / (1 - \beta_j) \\ &= \langle -\beta_j \nabla f(x''), (z_j - x'') \rangle / (1 - \beta_j) \end{aligned} \quad (90)$$

Logo por (88), (89) e (90) tem-se que

$\langle \nabla f(x''), z - x'' \rangle < 0$, isto é, $\langle \nabla f(x''), d \rangle < 0$, ou seja, d é uma direção de descida, o que é uma contradição (pois x'' é solução), portanto deve se ter $\beta_j = 0$.

C. Q. D.

LEMA 4 : Seja $\{x^k\}$ uma seqüência infinita convergindo para x^* , solução ótima para o problema (P2), (portanto para o problema (P1)). Se $f(x)$ é continuamente diferenciável então existe um número inteiro ρ , tal que para todo $k > \rho$, verifica-se que:

$$\text{I) } \langle \nabla f(x^k), a_j - x^k \rangle > 0, \text{ para todo } a_j \notin I^*$$

$$\text{II) } \min \{ \langle \nabla f(x^k), y - x^k \rangle / y \in S \} = \min \{ \langle \nabla f(x^k), y - x^k \rangle / y \in I^* \}$$

Demonstração : I) Se x^* é solução para (P2) então pelo teorema 1 (capítulo 2) tem-se que:

$$\langle \nabla f(x^*), a_j - x^* \rangle \geq 0, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, N$$

Se $a_j \notin I^*$, então pela observação II da definição de I^* , tem-se que

$$\langle \nabla f(x^*), a_j - x^* \rangle > 0, \text{ para } j \in J$$

Sendo $J = \{j / a_j \notin I^*, j = 1, 2, \dots, N\}$.

Conforme foi visto na demonstração do LEMA 2, a função $h(x,y) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ é contínua, portanto para $a_j \notin I^*$, tem-se que:

$$1^a) \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla f(x^k), a_j - x^k \rangle = \langle \nabla f(x^*), a_j - x^* \rangle = \Gamma_j > 0 \quad e$$

2^a) para todo $\varepsilon_j = \Gamma_j - \sigma$, $0 < \sigma < \Gamma'$ $\Gamma' = \min \{\Gamma_j\}_{j \in J}$ existe $\rho_j \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sigma < \langle \nabla f(x^k), a_j - x^k \rangle < 2\Gamma_j - \sigma, \text{ para todo } k > \rho_j$$

ou seja

$$\langle \nabla f(x^k), a_j - x^k \rangle > \sigma$$

Considere, portanto $\rho = \max \{\rho_j / j \in J\}$. Logo, como $\sigma > 0$ então tem-se que

$$\langle \nabla f(x^k), a_j - x^k \rangle > 0, \text{ para todo } a_j \notin I^*$$

II) Por hipótese e pelo RSD, sabe-se que quando x^k não é solução ótima então $\langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle < 0$, logo pelo item I, cada $a_j \notin I^*$ não pode ser solução para o subproblema linear, portanto devido ao fato de o mínimo ser atingido em um vértice do poliedro, verifica-se que

$$\begin{aligned} \min \{ \langle \nabla f(x^k), y - x^k \rangle / y \in S \} &= \\ &= \min \{ \langle \nabla f(x^k), y - x^k \rangle / y \in \text{Co}(I^*) \} = \\ &= \min \{ \langle \nabla f(x^k), y - x^k \rangle / y \in I^* \} \end{aligned}$$

C. Q. D.

Assume-se que o subproblema linear do (RSD) é resolvido de maneira tal que y^x é um vértice de S (por exemplo, o método simplex).

TEOREMA 10: Se o algoritmo RSD gera uma seqüência infinita $\{x^k\}$ convergindo para x^* , então existe um número natural ρ , tal que para todo $k > \rho$, verifica-se

I) $y^k \in I^*$, sendo y^k o vértice obtido na k -ésima iteração.

II) W_S^k é um subconjunto de I^* .

Demonstração: I) Conseqüência direta do item II do lema anterior, considerando $\rho = \max \{\rho_j / j \in J\}$.

II) Observa-se no RSD que a expressão definitiva do conjunto W^k é obtida no final do PASSO 2 do algoritmo na iteração $(k - 1)$, isto é,

$$x^k := \arg \min \{f(x) / x \in \text{Co}(W_S^k \cup W_x^k)\}$$

e

$$x^k := \sum \beta_i z_i, \sum \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i \in I^k$$

$$W_S^k = W_S^k - \{z \in W_S^k / \beta_i = 0\}$$

Conforme foi assumido, y^i é um vértice de S , isto é, existe j , $1 \leq j \leq N$, tal que $y^i = a_j$.

Supõe-se que para algum $k > p$, na iteração k , $W_S^k \not\subseteq I^*$. Ou seja, existe $y^i = a_j \in W_S^k$ tal que $y^i \notin I^*$. Mas pelo LEMA 4 (I), tem-se que:

$$\langle \nabla f(x^k), y^i - x^k \rangle > 0$$

E pelo LEMA 3, $\beta_i = 0$. Mas como W_S^k está relacionado com a iteração $(k - 1)$ e $\beta_i = 0$ na expressão de x^k então $y^i \notin W_S$, obtendo-se uma contradição.

Logo:

$$W_S^k \subseteq I^*$$

C.Q.D.

LEMA 5: Seja $H = \text{Co}(z_0, z_1, \dots, z_p)$ um p -simplex, $H \subseteq S$.

Considere $\bar{x} = \arg \min \{f(x) / x \in H\}$,

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^p \beta_i z_i, \sum_{i=0}^p \beta_i = 1, \beta_i > 0 \quad i = 0, 1, \dots, p$$

Se $\bar{x} \neq \arg \min \{f(x) / x \in S\}$ então

existe um $y \in S$ tal que $\langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle < 0$ e $\text{Co}(z_0, z_1, \dots, z_p, y)$ é um $(p+1)$ simplex.

Demonstração: Se $\bar{x} \neq \arg \min \{f(x) / x \in S\}$ então pelo teorema 1 (capítulo 2), tem-se que existe $y \in S$ tal que

$$\langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle < 0$$

Supõe-se que $Co(z_0, z_1, \dots, z_p, y)$ não seja um $(p+1)$ simplex; isto é, $z_1 - z_0, z_2 - z_0, \dots, z_p - z_0, y - z_0$ não são linearmente independentes; mas por hipótese; $Co(z_0, z_1, \dots, z_p)$ é um p -simplex, logo

$$\begin{aligned} y - z_0 &= \sum_{i=1}^p \alpha_i (z_i - z_0) \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i - \sum_{i=1}^p \alpha_i z_0 \\ &= (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) z_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i \end{aligned}$$

A expressão anterior pode ser reescrita sob a seguinte forma:

$$y = \alpha_0 z_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i \quad \text{onde} \quad \alpha_0 = (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) \quad (91)$$

Como por hipótese, $\bar{x} = \arg \min \{f(x) / x \in H\}$, então pela condição dada pelo teorema 1 (capítulo 2), tem-se que

$$\langle \nabla f(\bar{x}), w - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } w \in H \text{ ou ainda}$$

$$\langle \nabla f(\bar{x}), z_i - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, p$$

Pelo **LEMA 3** e pela hipótese de $\beta_i > 0$, para todo $i, 0 \leq i \leq p$, conclui-se que

$$\langle \nabla f(\bar{x}), z_i - \bar{x} \rangle = 0 \quad (92)$$

Por (91) e (92), tem-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle &= \langle \nabla f(\bar{x}), \sum_{i=0}^p \alpha_i z_i - \bar{x} \rangle \\ &= \sum_{i=0}^p \alpha_i [\langle \nabla f(\bar{x}), z_i - \bar{x} \rangle] = 0 \end{aligned}$$

Logo $\langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle = 0$, o que contradiz a primeira parte da demonstração, portanto $Co(z_0, z_1, \dots, z_p, y)$ é um $(p+1)$ simplex.

C. Q. D.

TEOREMA 11 : No RSD o conjunto $\text{Co}(W^k)$ é um simplex para todo $k \geq 0$.

Demonstração : (por indução)

Quando $k = 0$, no RSD, tem-se que

$$W^0_x = \{x^0\}, W^0_S = \emptyset \quad \text{e} \quad W^0 = \{x\}$$

Portanto $\text{Co}(W^0) = \{x^0\}$ é 0-simplex.

Admite-se que $\text{Co}(W^k)$ seja um p -simplex, para $k \geq 0$ e deseja-se mostrar que $\text{Co}(W^{k+1})$ é simplex. Sem perda de generalidade, considera-se que:

$$W^k_x = \{x'\} \quad \text{e}$$

$$W^k_S = \{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}\} \quad \text{portanto}$$

$$W^k = W^k_S \cup W^k_x \quad \text{então}$$

$$W^k = \{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, x'\} \quad \text{e por hipótese assumida, tem-se que}$$

$$\text{Co}(W^k) = \text{Co}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, x') \quad \text{é um } p\text{-simplex} \quad (93)$$

Observa-se que os elementos de W^k com pesos convexos nulos em x' são eliminados no final do PASSO 2 do algoritmo na iteração anterior e que todos os seus elementos restantes devem ter pesos positivos no início do PASSO 1.

Assume-se que $\langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle < 0$, pois do contrário, W^{k+1} não seria gerado; então considera-se que tanto o PASSO 1 (I) quanto o PASSO 1 (II) possam ser executados.

I) Quando o PASSO 1 (I) é executado; tem-se que

$$W^{k+1} = W^k \cup \{y^k\} \quad \text{e pelo LEMA 5 verifica-se que } \text{Co}(W^{k+1}) \text{ é } (p+1)\text{-simplex.}$$

II) Se o PASSO 1 (II) é executado, observa-se que:

$$W^{k+1} = \{a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, y^k, a_{i+1}, \dots, a_{p-1}, x^k\} \quad \text{onde } a_i \text{ tem o peso mínimo na expressão de } x^k.$$

(94)

De (93) e pelo LEMA 5, tem-se que

$$\text{Co}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, x', y^k) \quad \text{é um } (p+1)\text{-simplex.}$$

Pela propriedade 2.22.1 - I, tem-se que

$$\text{Co}(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, x^k, y^k) \quad \text{é um } (p+1)\text{-simplex.}$$

E pela propriedade **a. 22. 1 - II**

$\text{Co}(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{p-1}, x^k, y^k)$ é um p -simplex, logo por (94) verifica-se que W^{k+1} define um simplex.

Pelo RSD, no final do PASSO 2, os elementos de W^{k+1} com pesos nulos são eliminados e a propriedade assegura que os elementos restantes formam um conjunto cuja a envoltória é um simplex. Como W^{k+1} no final do PASSO 2 é o mesmo do início do PASSO 1 da próxima iteração, então em qualquer circunstância o teorema fica demonstrado.

C. Q. D.

TEOREMA 12 : Seja x^* a única solução para (P2); portanto para (P1); e $r \geq \dim \text{Co}(I^*) + 1$, o RSD converge para o x^* após um número finito de execuções do PASSO 1.

Demonstração : Admite-se que $r \geq \dim \text{Co}(I^*) + 1$. Assume-se, por contradição, que o RSD gere uma seqüência infinita $\{x^k\}$. Devido a unicidade de x^* pode se afirmar que $\{x^k\} \rightarrow x^*$. Pelo teorema anterior, sabe-se que $\text{Co}(W^k)$ é um simplex e portanto pela propriedade **a. 22. 1. II**, tem-se que:

$$W_S^k \text{ define um simplex, para todo } k \geq 0 \quad (95)$$

De acordo com o **TEOREMA 10**, existe um número natural ρ , tal que para todo $k \geq \rho$

$$y^k \in I^* ; W_S^k \subseteq I^*, \text{ ou seja, } [W_S^k \cup \{y^k\}] \subseteq I^* \quad (96)$$

Por hipótese assumida, o RSD não pára em nenhuma iteração $k > \rho$, isto é, no PASSO 1 do algoritmo tem-se que $\langle \nabla f(x^k), (y^k - x^k) \rangle < 0$.

Logo de (95) e do **LEMA 5**, verifica-se que:

$$\text{Co}(W_S^k \cup \{y^k\}) \text{ é um simplex} \quad (97)$$

Por (95), (96), (97) e pela definição de simplex, tem-se que

$$\begin{aligned} |W_S^k| - 1 &= \dim \text{Co}(W_S^k) \\ &< \dim \text{Co}(W_S^k \cup \{y^k\}) \\ &\leq \dim \text{Co}(I^*) \end{aligned}$$

isto é, $|W_S^k| < \dim \text{Co}(I^*) + 1 \leq r$

Portanto, $|W_S^k| < r$, significando com isto que o PASSO 1 (II) nunca é executado após a ρ -ésima-iteração, logo

$$W_X^k = W_X^0$$

ou

(98)

$$W_X^k = \emptyset$$

Então, por (98) e (96) conclui-se que

$$W^k \subseteq (I^* \cup W_X^0), \text{ para todo } k \geq \rho \quad (99)$$

Além do mais; pelo LEMA 1, tem-se que os valores da função objetivo decrescem estritamente e portanto o conjunto W^k não pode ser repetido na seqüência $\{W^k\}$; $k > \rho$, mas isto é impossível, pois por hipótese $\dim \text{Co}(I^*) \leq r - 1$; podendo concluir que o número de elementos distintos de I^* é menor ou igual a r e portanto o número de elementos distintos de $(I^* \cup W_X^0)$ é menor ou igual a $(r + 1)$. Logo existe um número finito de subconjuntos distintos de tamanho menor ou igual a $(r + 1)$ e por (99) conclui-se então que o RSD converge para x^* após um número finito de iterações.

C.Q.D.

5 - PROBLEMA DE TRÁFEGO

Formula-se a seguir um modelo geral de equilíbrio, usado para descrever um problema de tráfego em uma rede de transporte de uma área urbana. Existem várias formulações equivalentes para este tipo de modelo como um problema de inequações variacionais [6,5] Neste trabalho apresenta-se a sua formulação de acordo com [9], [19] e [10].

Uma rede de transportes em uma área urbana pode ser pensada como uma estrutura de arcos (ruas) e nós (interseções). Serão considerados a demanda fixa e um único meio de transporte.

5.1 - MODELO

Seja $D = (N, A)$ uma rede finita e orientada sendo N o número de nós e A o conjunto de arcos.

Considera-se:

I : o conjunto de pares de origem-destino O/D .

f_a : o fluxo do tráfego sobre o arco $a \in A$.

c_a : o custo de viagem sobre o arco $a \in A$.

d_i : a demanda de viagem de usuários associada ao i -ésimo par origem-destino, distribuída entre os diferentes caminhos que ligam este par i ; e portanto gerando fluxo.

observação: Um caminho é formado por um conjunto de arcos.

h_k : o fluxo de tráfego sobre o caminho $k \in K_i$, sendo K_i o conjunto dos caminhos disponíveis para cada par $i \in I$ de origem-destino.

f : o vetor de fluxo dos arcos que agrupa os f_a ; isto é:

$$f = (f_a)_{a \in A}$$

c : o vetor de custo que agrupa os c_a ; isto é: $c = (c_a)_{a \in A}$

h : o vetor de fluxo de todos os caminhos da rede; isto é,

$$h = (h_k)_{\substack{k \in \cup \\ i \in I} K_i}$$

Considera-se o caso geral em que o custo de viagem do usuário sobre qualquer arco dependa do fluxo sobre todos os arcos da rede $C_a = C_a(f)$, ou seja, $c(f) = (c_a(f))_{a \in A}$.

O vetor de fluxo h é denominado viável, se for não negativo e satisfizer as equações de conservação dos fluxos dadas por:

$$\sum_{k \in K_i} h_k = d_i, \quad i \in I \quad (100)$$

Este vetor h induz o fluxo nos arcos, através da seguinte equação:

$$f_a = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} h_k, \quad a \in A \quad (101)$$

onde

$$\delta_{ak} = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ é um arco do caminho } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (102)$$

O custo de viagem do usuário através do caminho k é definido por:

$$c_k(h) = \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a(f), \quad k \in K_i \quad (103)$$

Os usuários escolhem suas rotas de acordo com o Princípio de otimização do usuário dado por Wardrop, que diz que uma distribuição de tráfego na rede h^* , está em equilíbrio quando nenhum usuário pode reduzir seu custo de viagem mudando unilateralmente de rota [21]. Formalmente este princípio segue a seguinte definição:

"Para cada par origem-destino, os custos de viagem sobre todas as rotas usadas são iguais e também menores ou iguais aos custos de viagem que experimentaria um único veículo sobre qualquer outra rota não usada."

Da definição acima, em situação de equilíbrio, os caminhos que ligam qualquer par origem-destino podem ser divididos em dois grupos: um com caminhos que levam fluxos e custos de viagens iguais e o outro com caminhos que não levam fluxos e custos de viagens maiores ou iguais aos custos do primeiro grupo.

Assim sendo, o vetor de fluxo h^* nos caminhos está em equilíbrio (e o vetor de fluxo nos arcos f^* , induzido por h^*). Segundo o princípio de Wardrop, se para cada par i de origem-destino e para cada caminho k ligando i , tem-se

$$C_k(h^*) - u_i^* \begin{cases} \geq 0 & \text{se } h_k^* = 0 \\ = 0 & \text{se } h_k^* > 0 \end{cases} \quad k \in K_i, i \in I \quad (104)$$

sendo u_i^* o custo mínimo dos caminhos relativos ao par i de origem-destino.

Cada caminho $k \in K_i$ e cada fluxo viável h verifica as condições de equilíbrio de tráfego (104), que podem ser reescritas sob a seguinte forma:

$$(C_k(h^*) - u_i^*)(h_k - h_k^*) \geq 0 \quad (105)$$

Isto é, (105) e (104) são equivalentes.

Com efeito, sejam $k \in K_i$ e h_k um fluxo viável, se em (104), $h_k^* = 0$ então

$$C_k(h^*) - u_i^* \geq 0 \quad \text{e} \quad (h_k - h_k^*) \geq 0 \quad \text{logo (105) é satisfeita.}$$

Por outro lado, se em (104) $h_k^* > 0$ então

$$C_k(h^*) - u_i^* = 0, \text{ acarretando a validade de (105).}$$

Supõe-se que (105) seja válida. Se $h_k^* = 0$ tem-se que $(C_k(h^*) - u_i^*) \geq 0$.

Se $h_k^* > 0$, como a desigualdade vale para todo h viável então em particular é válida para $h = h_k = 0$ (o fluxo h_k é redistribuído nos outros caminhos) então resulta que $C_k(h^*) - u_i^* = 0$. Logo (105) acarreta (104).

Somando todos os caminhos $k \in K_i$ relativos ao i -ésimo par origem-destino em (105) tem-se que:

$$\sum_{k \in K_i} C_k(h^*)(h_k - h_k^*) - \sum_{k \in K_i} u_i^*(h_k - h_k^*) \geq 0$$

Por (100) e pelo fato de a demanda ser fixa para cada par origem-destino, resulta que:

$$\sum_{k \in K_i} u_i^*(h_k - h_k^*) = u_i^* \sum_{k \in K_i} (h_k - h_k^*) = 0$$

e portanto tem-se

$$\sum_{k \in K_i} C_k(h^*)(h_k - h_k^*) \geq 0 \quad (106)$$

Como esta desigualdade deve ser satisfeita para cada par i , somando em (106) todos os pares origem-destino, obtém-se:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} C_k(h^*)(h_k - h_k^*) \geq 0 \quad (107)$$

E substituindo (103) em (107)

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \sum_{a \in A} S_{ak} c_a(f^*) (h_k - h_k^*) \geq 0 \quad (108)$$

Trocando a ordem dos somatórios em (108) e usando a expressão (101), obtém-se

$$\sum_{a \in A} c_a(f^*) (f_a - f_a^*) \geq 0 \quad (109)$$

Portanto escrevendo (109) de forma compacta as condições de equilíbrio de tráfego (104) têm a estrutura do problema de inequação variacional (P).

$$(P) = \begin{cases} \text{encontrar } f^* \in T \text{ tal que} \\ c(f^*)' (f - f^*) \geq 0, f \in T \end{cases}$$

onde

$$T = \left\{ f = (f_a)_{a \in A}, f_a = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} h_k, d_i = \sum_{k \in K_i} h_k, i \in I \right\}$$

Assume-se que no problema (P) exista ao menos um tráfego viável, que o conjunto das soluções viáveis seja convexo e compacto e que a função $c(f)$ seja contínua e monótona. Sob estas condições o problema de inequações variacionais (P) apresenta uma única solução. (Cap. 2 - seção 2.1)

5.2 - ALGORITMO

A partir do problema (P), conforme o capítulo 2 seção 2.1, obtém-se uma aproximação regular para o mesmo através do operador auxiliar

$$g(\cdot, \cdot) : T \times T \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ definido por:} \quad (110)$$

$$g(f, f') = c(f') + \frac{1}{\rho} G(f - f')$$

onde $\rho > 0$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz simétrica definida

Quando se fixa $f' \in T$, $g(\cdot, f')$ então $T \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função potencial. De fato

$$g(f, f') = \nabla_f F(f, f')$$

Sendo $F(f, f')$ a seguinte função quadrática

$$F(f, f') = \frac{1}{2} \left\| f - (f' - \rho G^{-1} c(f')) \right\|_{G/\rho}^2 \quad (111)$$

Portanto pode se considerar o seguinte método iterativo para resolver o problema (P):

Inicialização : Seja $f^1 \in T$, $k = 1$

Processo iterativo : Dado $f^k \in T$, resolver a aproximação regular de (P) dada por:

encontrar $f^{k+1} \in T$ tal que

$$g(f^{k+1}, f^k)^t (f - f^{k+1}) \geq 0, \text{ para todo } f \in T$$

Mas por (111), tem-se que o problema acima é equivalente a:

$$(P_k) = \begin{cases} \text{encontrar } f^{k+1} \text{ solução de :} \\ \min \frac{1}{2} \left\| f - (f^k - \rho G^{-1} c(f^k)) \right\|_{G/\rho}^2 \\ f \in T \end{cases}$$

ou seja,

f^{k+1} = projecção de $(f^k - \rho G^{-1} c(f^k))$ sobre o conjunto T com respeito à norma G/ρ .

Logo, combinando a aproximação considerada do operador $c(\cdot)$ e um método de decomposição para o conjunto T , obtém-se uma nova aproximação para o problema (P).

Embora tenha se analisado a convergência de ambos os métodos separadamente, é interessante ressaltar que o algoritmo que surge da combinação dos dois métodos acima citados enquadra-se em uma família mais abrangente de métodos considerados por Scheimberg-Ngugen-Strodiot em [20]. Neste contexto o sub-problema a ser resolvido é:

$$(P_k) \begin{cases} \text{encontrar } f^{k+1} \text{ solução de} \\ \text{minimizar } \frac{1}{2} \left\| f - (f^k - \rho G^{-1} c(f^k)) \right\|_{G/\rho}^2 \\ f \in T_k \end{cases}$$

onde cada T_k é um subconjunto de T , obtido e atualizado nas iterações anteriores.

É possível ainda flexibilizar o sub-problema (P_k) permitindo que em cada iteração possa variar a matriz G e o parâmetro ρ :

$$(\bar{P}_k) \begin{cases} \text{encontrar } f^{k+1} \text{ solução de :} \\ \text{mín } \frac{1}{2} \left\| f - (f^k - \rho_k G_k^{-1} c(f^k)) \right\|_{G_k/\rho_k}^2 \\ f \in T_k \end{cases}$$

5.2.1 - ESQUEMA

PASSO 0 : (inicialização)

Seja f^0 um fluxo viável,

Coloque $W_T^0 = \emptyset$, $W_F^0 = W^0 = \{f^0\}$, $I^0 = \{0\}$, $k := 0$

PASSO 1 : (subproblema linear)

Calcule $\bar{f}^k \in \arg \min \{ \langle c(f^k), f \rangle, f \in T \}$

Se $\langle c(\bar{f}^k), (f^k - \bar{f}^k) \rangle \geq 0$

Caso contrário

I) Se $|W^k_T| < r$ então

$$\text{faça } W^{k+1}_T := W^k_T \cup \{\bar{f}^k\}$$

$$W^{k+1}_f = W^k_f$$

II) Se $|W^k_T| = r$ então

$$\text{Considere } f^k = \sum_{i \in I^k} \beta_i z_i$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } \beta_j &= \min \{ \beta_i / z_i \in W^k_T \} = \\ &= \min \{ \beta_i / z_i = \bar{f}_i \in W^{k+1}_T \} \end{aligned}$$

$$\text{Faça } W^{k+1}_T = (W^k_T - \{\bar{f}_j\}) \cup \{\bar{f}^k\}$$

$$W^{k+1}_f = \{f^k\}$$

$$\text{Faça } W^{k+1} = W^{k+1}_T \cup W^{k+1}_f$$

$$I^{k+1} = \{i / z_i \in W^{k+1}\}$$

Vá para o PASSO 2.

PASSO 2 : (problema principal)

$$\begin{aligned} \text{Calcule } f^{k+1} &= \arg \min \{ \langle c(f^k), f \rangle + \\ &+ 1/2p \langle f, Gf \rangle / f \in \text{Co}(W^{k+1}) \} \end{aligned}$$

$$\text{Seja } f^{k+1} = \sum_{i \in I^k} \beta_i z_i$$

Para $i \in I^{k+1}$

Se $\beta_i = 0$ então

$$\text{Se } z_i \in W^{k+1}_T \text{ então } W^{k+1}_T = W^{k+1}_T - \{z_i\}$$

$$I^{k+1} = I^{k+1} - \{i\}$$

Caso contrário $W^{k+1}_f = \emptyset$

Faça $k := k + 1$ e vá para o PASSO 1.

5.3 - TESTES NUMÉRICOS

5.3.1 - OBSERVAÇÕES GERAIS

Foi implementado o algoritmo dado em 5.2.1, aplicado a dois exemplos. O primeiro corresponde ao apresentado por Dafermos em [6] e o segundo encontra-se em Bertsekas-Gafni [1]. Em ambos os casos realizaram-se diversos testes variando o parâmetro ρ e a matriz G e os resultados apresentados foram comparados com os que constam nos trabalhos acima citados.

Foi utilizado o 386 MATLAB versão 3.5K em um computador PC 486 para realizar os testes numéricos; inclusive trabalhou-se com a rotina QP, a qual resolve problemas quadráticos. Na mesma, cada restrição com igualdade necessita ser transformada em duas desigualdades; o que acarreta a singularidade da matriz de restrições. Alguns elementos da matriz das restrições, tanto do problema linear (passo 1 do algoritmo) quanto do problema principal (passo 2), sofreram perturbações da ordem de 10^{-6} . Com este recurso foram evitados muitos problemas numéricos ou mesmo impossibilidade de execução de alguns testes.

Foram feitos testes em que a constante ρ permaneceu fixa em todas as iterações e testes nos quais ρ variou de iteração para iteração, atingindo um valor mínimo (ou máximo) pré-fixado. No primeiro caso, isto é, ρ fixo, foram considerados valores diferentes, variando de 0.6 até 1. Já no segundo caso ρ variou de 0.6 a 1 ou 0.8 a 1 ou 0.8 a 0.9, segundo seqüências crescentes ou decrescentes em que a variação foi de 10^{-2} ou 10^{-1} por iteração.

Observou-se também que, apesar de nos trabalhos teóricos o operador auxiliar se encontrar sob a forma descrita por [4], foram evitados problemas numéricos, obtendo-se melhores resultados; quando utilizou-se a forma equivalente dada por:

$$g(f, f') = \rho c(f') + G(f-f') \quad (112)$$

O algoritmo não trabalha com todos os vértices da região viável e sim na envoltória determinada por alguns deles. Foram feitos testes para verificar a influência do número de pontos considerados (designado por r e também denominado tamanho do problema) sobre os resultados.

5.2.2 - EXEMPLO 1

O exemplo 1 encontra-se no artigo intitulado "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities" [18].

Considera-se a seguinte rede, mostrada na figura abaixo:

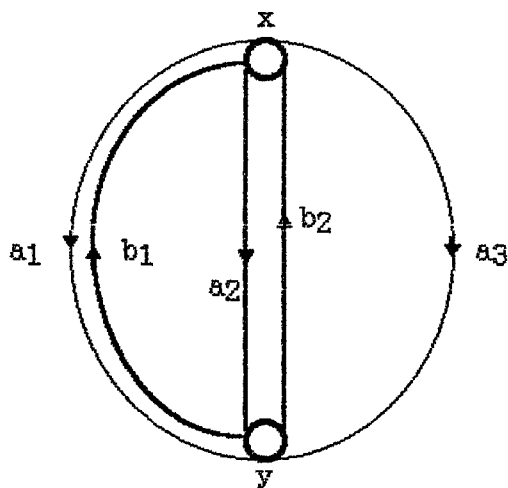


Figura 1

Número de pares origem - destino : 2 $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{array} \right\}$

Valores das demandas: $d_{x,y} = d_1 = 210$

$d_{y,x} = d_2 = 120$

Funções de custo de viagem nos arcos:

$$c_{a1} = 10 f_{a1} + 5 f_{b1} + 1000$$

$$c_{a2} = 15 f_{a2} + 5 f_{b2} + 950$$

$$c_{a3} = 20 f_{a3} + 3000$$

$$c_{b1} = 20 f_{b1} + 2 f_{a1} + 1000$$

$$c_{b2} = 25 f_{b2} + f_{a2} + 1300$$

No caso desta rede, os arcos coincidem com os caminhos, logo o conjunto das restrições T será dado por:

$$f_{a1} = h_{a1}$$

$$f_{a2} = h_{a2}$$

$$f_{a3} = h_{a3}$$

$$f_{b1} = h_{b1}$$

$$f_{b2} = h_{b2}$$

$$h_{a1} + h_{a2} + h_{a3} = d_1 = 210$$

$$h_{b1} + h_{b2} = d_2 = 120$$

$$h_{a1} , h_{a2} , h_{a3} , h_{b1} , h_{b2} \geq 0$$

O fluxo inicial é:

$$f^0 = (f_{a1}^0, f_{a2}^0, f_{a3}^0, f_{b1}^0, f_{b2}^0) = (70, 70, 70, 60, 60)$$

A solução ótima exata é:

$$f^* = (f_{a1}^*, f_{a2}^*, f_{a3}^*, f_{b1}^*, f_{b2}^*) = (120.0, 90.0, 0.0, 70.0, 50.0)$$

A matriz jacobiana das funções de custo é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

A partir da matriz acima foram testadas as seguintes matrizes:

Primeiro caso: Matriz diagonal; onde $(g_{ii})_1 = \max (g_{ij})$ para cada linha de G.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Segundo caso : $(g_{ij})_2 = (g_{ij} + g_{ji}) / 2$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 3.5 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Terceiro caso : $(g_{ij})_3 = \max(g_{ij}, g_{ji})$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO : Em [6] a matriz utilizada foi a G_1 , o valor de ρ escolhido $\rho = 0.3$ e a precisão dos resultados foi de uma casa decimal.

5.3.2.1 - CONCLUSÕES DO EXEMPLO 1

Observou-se que, devido ao fato de o problema ser pequeno a escolha do algoritmo não foi adequada. Tal método, por ter sua estrutura semelhante ao RSD, faz sentido para problemas de grande porte.

Entre os testes realizados com ρ fixo, os melhores resultados foram alcançados quando utilizou-se a matriz G_3 e $\rho = 1$. Chegou-se ao valor ótimo na sexta iteração (com a precisão de uma casa decimal), conforme mostra a tabela 1.

TABELA 1: Resultados do algoritmo, Matriz G_3 , $\rho = 1$

Iteração	fa1	fa2	fa3	fb1	fb2
0	70.0	70.0	70.0	60.0	60.0
1	128.4	40.8	40.8	85.0	35.0
2	116.2	93.8	0.0	66.4	53.6
3	122.0	88.0	0.0	69.7	50.3
4	120.1	89.9	0.0	69.9	50.1
5	120.0	89.9	0.0	70.0	50.0

Com respeito a matriz G_1 , não houve alterações significativas nos seguintes casos:

- ρ fixo, $\rho = 1$ e ρ variando de 0.6 a 1 e
- ρ fixo, $\rho = 0.8$ e ρ variando de 0.8 a 1

Comparando os resultados obtidos por Dafermos com os alcançados na execução do algoritmo, constatou-se que o primeiro pareceu mais eficaz, o que é mostrado na tabela 2.

Observa-se que a comparação dos resultados é superficial, já que não foi implementado o algoritmo de Dafermos; o que é visto é apenas o número de iterações, mas nada se sabe sobre o tempo gasto computacionalmente.

TABELA 2: MATRIZ G_1 , $\rho = 0.3$ $r = 2$

Ite- ração	<i>Dafermos</i>					Ite- ração	<i>Algoritmo implementado</i>				
	fa1	fa2	fa3	fb1	fb2		fa1	fa2	fa3	fb1	fb2
0						0					
1	70.0	70.0	70.0	60.0	60.0	1	70.0	70.0	70.0	60.0	60.0
2	89.4	76.9	43.7	63.6	56.4	2	87.5	61.2	61.2	67.5	52.5
3	102.4	82.2	25.4	65.9	54.1	3	93.1	66.6	50.2	77.0	43.0
4	111.2	86.2	12.6	67.3	52.7	4	104.4	75.3	30.3	74.0	46.0
5	117.2	89.1	3.7	68.2	51.8	5	112.5	81.2	16.2	72.0	48.0
6	119.8	90.2	0.0	68.8	51.2	6	118.3	85.3	6.4	70.6	49.4
7	120.0	90.0	0.0	69.2	50.8	7	122.1	87.9	0.0	69.8	50.2
8	120.1	89.9	0.0	69.5	50.5	8	121.6	88.4	0.0	70.0	50.0
9	120.1	89.9	0.0	69.7	50.3	9	121.1	88.8	0.0	69.9	50.0
10	120.1	89.9	0.0	69.9	50.1	10	120.8	89.2	0.0	69.9	50.0
11	120.0	90.0	0.0	70.0	50.0	11	120.6	89.4	0.0	70.0	50.0
						12	120.4	89.6	0.0	70.0	50.0
						13	120.3	89.7	0.0	70.0	50.0
						14	120.2	89.8	0.0	70.0	70.0
						15	120.1	89.8	0.0	70.0	50.0
						16	120.1	89.9	0.0	70.0	50.0
						17	120.0	89.9	0.0	70.0	50.0
						18	120.0	89.9	0.0	70.0	50.0
						19	120.0	90.0	0.0	70.0	50.0

5.3.3 - EXEMPLO 2

O exemplo 2 encontra-se no artigo "Projection Methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem" [1].

Considere a rede mostrada na figura 2 abaixo. Tal rede pode ser vista como um modelo de rodovia circular. Existem na mesma cinco pares de origem-destino, numerados de 1 a 5, que estão conectados à rodovia através de acessos de entrada e saída. Cada par de origem-destino tem dois caminhos: o caminho que é feito no sentido anti-horário (círculo maior) e outro no sentido horário (círculo menor).

Cabe a observação de que neste exemplo não se trabalha com a idéia de custo de viagem, conforme 5.1, mas sim com a noção de tempo de viagem. As expressões de tempo de viagem para cada tipo de arco são dadas, sendo que nas mesmas o escalar não negativo γ , representa o grau de dependência no tempo de viagem de alguns arcos em relação aos fluxos de outros arcos e é uma medida da assimetria do operador. O problema é equivalente a um problema de otimização se e somente se não há dependência, isto é, γ igual a zero.

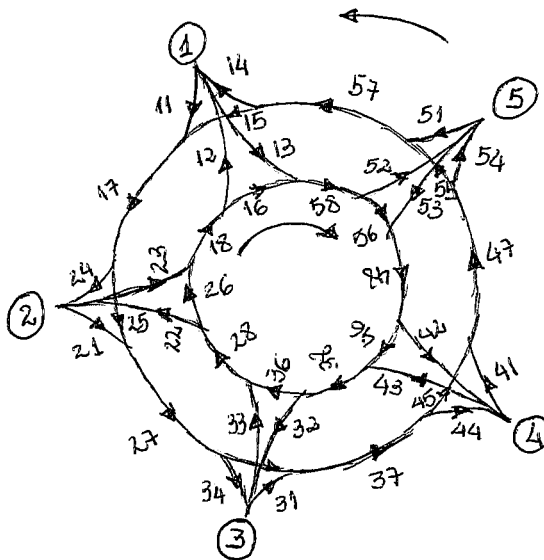


Figura 2

pares de origem-destino: OD(1) : par (1,4)
 OD(2) : par (2,5)
 OD(3) : par (3,1)
 OD(4) : par (4,2)
 OD(5) : par (5,3)

Tipos de arcos:

- (1) arcos da rodovia: 17,27,37,47,57,18,28,38,48,58
- (2) acesso de saída: 14,24,34,44,54,12,22,32,42,52
- (3) acesso de entrada: 11,21,31,41,51,13,23,33,43,53
- (4) arcos de conexão: 15,25,35,45,55,16,26,36,46,56

Expressões de tempo de viagem para cada tipo de arco, sendo

$$g(f) = 1 + f + f^2$$

(1) para arco i da rodovia:

$$10. g(\text{fluxo em } i) + 2.\gamma.g(\text{fluxo na rampa de saída após arco } i)$$

(2) para o acesso i de saída:

$$g(\text{fluxo em } i)$$

(3) para o acesso i de entrada:

$$g(\text{fluxo em } i) + \gamma.g(\text{fluxo no arco de conexão associado a } i)$$

(4) para o arco i de conexão:

$$g(\text{fluxo em } i)$$

Observando a figura 2, pode-se determinar os arcos que compõem cada caminho associado a um par de origem-destino, a saber:

(1) OD(1)

caminho 1 (círculo maior): 11,17,25,27,35,37,44

caminho 2 (círculo menor): 13,58,56, 48,42

(2) OD(2)

caminho 3 (círculo maior): 21,27,35,37,45,47,54

caminho 4 (círculo menor): 23,18,16,58,52

(3) OD(3)

caminho 5 (círculo maior): 31,37,45,47,55,57,14

caminho 6 (círculo menor): 43,38,36,28,22

(4) OD (4)

caminho 7 (círculo maior): 41,47,55,57,15,17,24

caminho 8 (círculo menor): 43,38,36,28,22

(5) OD (5)

caminho 9 (círculo maior): 51,57,15,17,25,27,34

caminho 10 (círculo menor): 53,48,46,38,32

Designando-se por:

f_i : fluxo sobre o arco i , $1 \leq i \leq 40$

T_i : tempo de viagem para o arco i , $1 \leq i \leq 40$

h_k : fluxo no caminho k , $1 \leq k \leq 10$

sendo que $k = 1,2$ correspondem ao par OD(1)

$k = 3,4$ correspondem ao par OD(2)

$k = 5,6$ correspondem ao par OD(3)

$k = 7,8$ correspondem ao par OD(4)

$k = 9,10$ correspondem ao par OD(5)

h : vetor de fluxo nos caminhos $h = (h_1, h_2, \dots, h_{10})$

\bar{T}_k : tempo de viagem para o caminho k

\bar{T} : vetor de tempo total de viagem $\bar{T} = (\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{10})$

d_j : demanda no j -ésimo par OD, $1 \leq j \leq 5$

Explicitando as expressões de tempo de viagem para cada tipo de arco, tem-se que:

(1) arcos de rodovia:

$$T_{17} = 10.g(f_{17}) + 2.\gamma.g(f_{24})$$

$$T_{27} = 10.g(f_{27}) + 2.\gamma.g(f_{34})$$

$$T_{37} = 10.g(f_{37}) + 2.\gamma.g(f_{44})$$

$$T_{47} = 10.g(f_{47}) + 2.\gamma.g(f_{54})$$

$$T_{57} = 10.g(f_{57}) + 2.\gamma.g(f_{14})$$

$$T_{18} = 10.g(f_{18}) + 2.\gamma.g(f_{12})$$

$$T_{28} = 10.g(f_{28}) + 2.\gamma.g(f_{22})$$

$$T_{38} = 10.g(f_{38}) + 2.\gamma.g(f_{32})$$

$$T_{48} = 10.g(f_{48}) + 2.\gamma.g(f_{42})$$

$$T_{58} = 10.g(f_{58}) + 2.\gamma.g(f_{52})$$

(2) acessos de saída:

$$T_{14} = g(f_{14})$$

$$T_{24} = g(f_{24})$$

$$T_{34} = g(f_{34})$$

$$T_{44} = g(f_{44})$$

$$T_{54} = g(f_{54})$$

$$T_{12} = g(f_{12})$$

$$T_{22} = g(f_{22})$$

$$T_{32} = g(f_{32})$$

$$T_{42} = g(f_{42})$$

$$T_{52} = g(f_{52})$$

(3) acessos de entrada:

$$T_{11} = g(f_{11}) + \gamma \cdot g(f_{15})$$

$$T_{21} = g(f_{21}) + \gamma \cdot g(f_{25})$$

$$T_{31} = g(f_{31}) + \gamma \cdot g(f_{35})$$

$$T_{41} = g(f_{41}) + \gamma \cdot g(f_{45})$$

$$T_{51} = g(f_{51}) + \gamma \cdot g(f_{55})$$

$$T_{13} = g(f_{13}) + \gamma \cdot g(f_{16})$$

$$T_{23} = g(f_{23}) + \gamma \cdot g(f_{26})$$

$$T_{33} = g(f_{33}) + \gamma \cdot g(f_{36})$$

$$T_{43} = g(f_{43}) + \gamma \cdot g(f_{46})$$

$$T_{53} = g(f_{53}) + \gamma \cdot g(f_{56})$$

(4) arcos de conexão:

$$T_{15} = g(f_{15})$$

$$T_{25} = g(f_{25})$$

$$T_{35} = g(f_{35})$$

$$T_{45} = g(f_{45})$$

$$T_{55} = g(f_{55})$$

$$T_{16} = g(f_{16})$$

$$T_{26} = g(f_{26})$$

$$T_{36} = g(f_{36})$$

$$T_{46} = g(f_{46})$$

$$T_{56} = g(f_{56})$$

Alguns arcos fazem parte de diferentes caminhos, portanto os fluxos nos diferentes arcos da rede são dados por:

$$\begin{array}{ll}
 f_{11} = h_1 & f_{35} = h_1 + h_3 \\
 f_{12} = h_6 & f_{36} = h_8 \\
 f_{13} = h_2 & f_{37} = h_1 + h_3 + h_5 \\
 f_{14} = h_5 & f_{38} = h_8 + h_{10} \\
 f_{15} = h_7 + h_9 & f_{41} = h_7 \\
 f_{16} = h_4 & f_{42} = h_2 \\
 f_{17} = h_1 + h_7 + h_9 & f_{43} = h_8 \\
 f_{18} = h_4 + h_6 & f_{44} = h_1 \\
 f_{21} = h_3 & f_{45} = h_3 + h_5 \\
 f_{22} = h_8 & f_{46} = h_{10} \\
 f_{23} = h_4 & f_{47} = h_3 + h_5 + h_7 \\
 f_{24} = h_7 & f_{48} = h_2 + h_{10} \\
 f_{25} = h_1 + h_9 & f_{51} = h_9 \\
 f_{26} = h_6 & f_{52} = h_4 \\
 f_{27} = h_1 + h_3 + h_9 & f_{53} = h_{10} \\
 f_{28} = h_6 + h_8 & f_{54} = h_3 \\
 f_{31} = h_5 & f_{55} = h_5 + h_7 \\
 f_{32} = h_{10} & f_{56} = h_2 \\
 f_{33} = h_6 & f_{57} = h_5 + h_7 + h_9 \\
 f_{34} = h_9 & f_{58} = h_2 + h_4
 \end{array}$$

O tempo total de viagem para cada caminho escolhido é determinado somando os tempos de viagem para arcos que compõem o caminho, isto é:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_1 = & (34+2\gamma)h_1^2 + 21h_3^2 + 10h_5^2 + (10+3\gamma)h_7^2 + (21+3\gamma)h_9^2 + 42h_1h_3 + 21h_1h_5 \\
 & + 20h_1h_7 + 42h_1h_9 + 20h_3h_5 + 20h_3h_9 + (20+2\gamma)h_7h_9 + (34+2\gamma)h_1 + 21h_3 + 10h_5 \\
 & + (10+3\gamma)h_7 + (21+3\gamma)h_9 + (34+7\gamma)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_2 = & (23+2\gamma)h_2^2 + (10+3\gamma)h_4^2 + 10h_{10}^2 + 20h_2h_4 + 20h_2h_{10} + (23+2\gamma)h_2 + \\
 & (10+3\gamma)h_4 + 10h_{10} + (23+5\gamma)
 \end{aligned}$$

$$\bar{T}_3 = (21+3\gamma)h_1^2 + (34+2\gamma)h_3^2 + 21h_5^2 + 10h_7^2 + (10+3\gamma)h_9^2 + 42h_1h_3 + 20h_1h_5 + (20+2\gamma)h_1h_9 + 42h_3h_5 + 20h_3h_7 + 20h_3h_9 + 20h_5h_7 + (21+3\gamma)h_1 + (34+2\gamma)h_3 + 21h_5 + 10h_7 + (10+3\gamma)h_9 + (34+7\gamma)$$

$$\bar{T}_4 = 10h_2^2 + (23+2\gamma)h_4^2 + (10+3\gamma)h_6^2 + 20h_2h_4 + 20h_4h_6 + 10h_2 + (23+2\gamma)h_4 + (10+3\gamma)h_6 + (23+5\gamma)$$

$$\bar{T}_5 = (10+3\gamma)h_1^2 + (21+3\gamma)h_3^2 + (34+2\gamma)h_5^2 + 21h_7^2 + 10h_9^2 + (20+2\gamma)h_1h_3 + 20h_1h_5 + 42h_3h_5 + 20h_3h_7 + 42h_5h_7 + 20h_5h_9 + 20h_7h_9 + (10+3\gamma)h_1 + (21+3\gamma)h_3 + (34+3\gamma)h_5 + 21h_7 + 10h_9 + (34+7\gamma)$$

$$\bar{T}_6 = 10h_4^2 + (23+2\gamma)h_6^2 + (10+3\gamma)h_8^2 + 20h_4h_6 + 20h_6h_8 + 10h_4 + (23+2\gamma)h_6 + (10+3\gamma)h_8 + (23+5\gamma)$$

$$\bar{T}_7 = 10h_1^2 + (10+3\gamma)h_3^2 + (21+3\gamma)h_5^2 + (34+2\gamma)h_7^2 + 21h_9^2 + 20h_1h_7 + 20h_1h_9 + (20+2\gamma)h_3h_5 + 20h_3h_7 + 42h_5h_7 + 20h_5h_9 + 42h_7h_9 + 10h_1 + (10+3\gamma)h_3 + (21+3\gamma)h_5 + (34+2\gamma)h_7 + 21h_9 + (34+7\gamma)$$

$$\bar{T}_8 = 10h_5^2 + (23+2\gamma)h_7^2 + (10+3\gamma)h_{10}^2 + 20h_5h_7 + 20h_7h_{10} + 10h_5 + (23+2\gamma)h_7 + (10+3\gamma)h_{10} + (23+5\gamma)$$

$$\bar{T}_9 = 21h_1^2 + 10h_3^2 + (10+3\gamma)h_5^2 + (21+3\gamma)h_7^2 + (34+2\gamma)h_9^2 + 20h_1h_3 + 20h_1h_7 + 42h_1h_9 + 20h_3h_7 + (20+2\gamma)h_5h_7 + 20h_5h_9 + 42h_7h_9 + 21h_1 + 10h_3 + (10+3\gamma)h_5 + (21+3\gamma)h_7 + (34+2\gamma)h_9 + (34+7\gamma)$$

$$\bar{T}_{10} = (10+3\gamma)h_2^2 + 10h_8^2 + (23+2\gamma)h_{10}^2 + 20h_2h_{10} + 20h_8h_{10} + (10+3\gamma)h_2 + 10h_8 + (23+2\gamma)h_{10} + (23+5\gamma)$$

Os resultados apresentados em [1] referem-se a uma medida de convergência normalizada, dada por:

$$\sum_{j=1}^S \frac{\Delta h_j^k}{d_j} \cdot \frac{\Delta \bar{T}_j^k}{\bar{T}_{\min,j}^k}$$

onde Δh_j^k é a parte da demanda que não recai sobre o menor caminho do i -ésimo par OD na iteração k ; $\Delta \bar{T}_j^k$ é a diferença de tempo de viagem entre o maior e o menor caminhos e $\bar{T}_{\min,j}^k$ é o tempo de viagem para o menor caminho. Quando a medida de convergência for próxima a zero, aproxima-se da solução ótima.

Neste exemplo, a região S dos pontos viáveis não é dada em função dos fluxos viáveis nos arcos, mas sim em função dos fluxos viáveis nos caminhos; portanto, o problema (P) dado em 5.1, tem a seguinte forma:

$$(P') \begin{cases} \text{encontrar } h^* \in S \text{ tal que} \\ \bar{T}(h^*)' (h - h^*) \geq 0, h \in S \end{cases}$$

sendo S determinado por

$$h_1 + h_2 = d_1$$

$$h_3 + h_4 = d_2$$

$$h_5 + h_6 = d_3$$

$$h_7 + h_8 = d_4$$

$$h_9 + h_{10} = d_5$$

$$h_1, h_2, \dots, h_{10} \geq 0$$

O vetor de fluxo inicial escolhido é o pior possível, para o qual a demanda de cada par origem-destino recai sobre o caminho mais longo, ou seja,

$$\begin{aligned} h^0 &= (h_1^0, h_2^0, \dots, h_{10}^0) \\ &= (d_1, 0, d_2, 0, d_3, 0, d_4, 0, d_5, 0) \end{aligned}$$

A partir da matriz Jacobiana J das funções de tempo total de viagem, foram testadas as seguintes matrizes:

I - (matriz diagonal, L_1 sendo $L_1 = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_{10})$ e

$$m_1 = 2 \cdot (34+2\gamma)h_1 + 42h_3 + 20h_5 + 20h_7 + 42h_9 + (34+2\gamma)$$

$$m_2 = 2 \cdot (23+2\gamma)h_2 + 20h_4 + 20h_{10} + (23+2\gamma)$$

$$m_3 = 42h_1 + 2 \cdot (34+2\gamma)h_3 + 42h_5 + 20h_7 + 20h_9 + (34+2\gamma)$$

$$m_4 = 20h_2 + 2 \cdot (23+2\gamma)h_4 + 20h_6 + (23+2\gamma)$$

$$m_5 = 20h_1 + 42h_3 + 2 \cdot (34+2\gamma)h_5 + 42h_7 + 20h_9 + (34+2\gamma)$$

$$m_6 = 20h_4 + 2 \cdot (23+2\gamma)h_6 + 20h_8 + (23+2\gamma)$$

$$m_7 = 20h_1 + 20h_3 + 42h_5 + 2 \cdot (34+2\gamma)h_7 + 42h_9 + (34+2\gamma)$$

$$m_8 = 20h_6 + 2 \cdot (23+2\gamma)h_8 + 20h_{10} + (23+2\gamma)$$

$$m_9 = 42h_1 + 20h_3 + 20h_5 + 42h_7 + 2 \cdot (34+2\gamma)h_9 + (34+2\gamma)$$

$$m_{10} = 20h_2 + 20h_8 + 2 \cdot (23+2\gamma)h_{10} + (23+2\gamma)$$

II - matriz L_2 sendo $L_2 = \text{diag} (n_1, n_2, \dots, n_{10})$

sendo

$$n_1 = (96+8\gamma) + (192+4\gamma)h_1 + 124h_3 + 60h_5 + (60+8\gamma)h_7 + (124+8\gamma)h_9$$

$$n_2 = (43+5\gamma) + (86+4\gamma)h_2 + (40+6\gamma)h_4 + 40h_{10}$$

$$n_3 = (96+8\gamma) + (124+8\gamma)h_1 + (192+4\gamma)h_3 + 124h_5 + 60h_7 + (60+8\gamma)h_9$$

$$n_4 = (43+5\gamma) + 40h_2 + (86+4\gamma)h_4 + (40+6\gamma)h_6$$

$$n_5 = (96+8\gamma) + (60+8\gamma)h_1 + (124+8\gamma)h_3 + (192+4\gamma)h_5 + 124h_7 + 60h_9$$

$$n_6 = (43+5\gamma) + 40h_4 + (86+4\gamma)h_6 + (40+6\gamma)h_8$$

$$n_7 = (96+8\gamma) + 60h_1 + (60+8\gamma)h_3 + (124+8\gamma)h_5 + (192+4\gamma)h_7 + 124h_9$$

$$n_8 = (43+5\gamma) + 40h_6 + (86+4\gamma)h_8 + (40+6\gamma)h_{10}$$

$$n_9 = (96+8\gamma) + 124h_1 + 60h_3 + (60+8\gamma)h_5 + (124+8\gamma)h_7 + (192+4\gamma)h_9$$

$$n_{10} = (43+5\gamma) + 40h_8 + (86+4\gamma)h_{10} + (40+6\gamma)h_2$$

OBSERVAÇÃO : Em [1] a matriz utilizada foi L_2 ; os valores de ρ e γ foram 0.8 e 0 respectivamente, e o vetor demanda $d = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$.

5.3.3.1 - CONCLUSÕES DE EXEMPLO 2

A fim de comparar os resultados encontrados na aplicação do algoritmo com os apresentados em [1], estabeleceu-se como um critério de parada o valor da medida de convergência menor ou igual a 10^{-4} .

Os melhores resultados foram obtidos quando utilizou-se a matriz L_1 , onde a medida de convergência foi da ordem de 10^{-10} na primeira iteração. Com respeito a esta matriz foram feitos testes em que se desprezou o critério de parada mencionado no parágrafo anterior, e verificou-se nesses casos, que para ρ fixo ou variando não apresentou alteração significativa nos resultados, porém quando ρ não permaneceu fixo houve menos problemas computacionais.

Em relação à matriz L_2 , os resultados apresentados em [1] com ρ igual a 0.8 foram melhores do que os resultados obtidos com a aplicação do algoritmo, conforme mostram as tabelas 4 e 5; porém é bom lembrar que em [1] o custo computacional de cada iteração é bem maior pois se considera sempre todo o espaço viável.

TABELA 4: Resultados apresentados em [1], matriz L2 ($\gamma=0$, $\rho=0.8$)

Iteração	medida de convergência
0	0.14417×10^2
1	0.14897×10^1
2	0.39463×10^0
3	0.35901×10^0
4	0.55230×10^{-1}
5	0.80434×10^{-1}
6	0.11485×10^{-1}
7	0.19034×10^{-1}
8	0.26034×10^{-2}
9	0.43683×10^{-2}
10	0.55167×10^{-3}
11	0.10228×10^{-2}
12	0.44825×10^{-3}
13	0.51164×10^{-3}
14	0.39760×10^{-3}
15	0.27834×10^{-3}

TABELA 5: Resultados do algoritmo, matriz L_2 ($\gamma=0$, $r=5$, $\rho=0.8$)

Iteração	medida de convergência
0	0.14417×10^2
1	0.21121×10^1
2	0.42927×10^0
3	0.15503×10^0
4	0.17568×10^0
5	0.58036×10^{-1}
6	0.37372×10^{-1}
7	0.15135×10^{-1}
8	0.62868×10^{-2}
9	0.31021×10^{-2}
10	0.24662×10^{-2}
11	0.21155×10^{-2}
12	0.19976×10^{-2}
13	0.180901×10^{-2}
14	0.16892×10^{-2}
15	0.14843×10^{-2}
-	-
-	-
-	-
30	0.32084×10^{-3}
31	0.28936×10^{-3}
32	0.26096×10^{-3}

Para ρ variando, os melhores resultados foram obtidos quando ρ variou de 1 a 0.9 com uma variação de 10^{-2} por iteração; trabalhando-se com a matriz L_2 e r sendo igual a cinco, conforme mostra a tabela 6.

TABELA 6: Resultados do algoritmo: Matriz L_2 ($\gamma = 0$ $r = 5$, ρ variando)

Iteração	Medida de Convergência			
	1 a 0.9	1 a 0.8	0.9 a 0.8	0.8 a 0.6
0	0.14417×10^2	0.14417×10^2	0.14417×10^2	0.14417×10^2
1	0.97676×10^0	0.97676×10^0	0.14773×10^0	0.21120×10^1
2	0.15386×10^0	0.15385×10^0	0.25581×10^0	0.44156×10^0
3	0.11071×10^0	0.11071×10^0	0.13552×10^0	0.16036×10^0
4	0.49728×10^{-1}	0.49728×10^{-1}	0.59410×10^{-1}	0.19502×10^0
5	0.16903×10^{-1}	0.16903×10^{-1}	0.38581×10^{-1}	0.60331×10^{-1}
6	0.67096×10^{-2}	0.67095×10^{-2}	0.14814×10^{-1}	0.39307×10^{-1}
7	0.36687×10^{-2}	0.36687×10^{-2}	0.11376×10^{-1}	0.16746×10^{-1}
8	0.243813×10^{-2}	0.24813×10^{-2}	0.89280×10^{-2}	0.791454×10^{-2}
.
.
.
17	0.97258×10^{-3}	0.99975×10^{-3}	0.35560×10^{-2}	0.15667×10^{-2}
18	0.86848×10^{-3}	0.813014×10^{-3}	0.31968×10^{-2}	0.14508×10^{-2}
19	0.77485×10^{-3}	0.73389×10^{-3}	0.28759×10^{-2}	0.13446×10^{-2}
.
.
.
30	0.21570×10^{-3}	0.26311×10^{-3}	0.82565×10^{-3}	0.58766×10^{-3}
31	0.19188×10^{-3}	0.23730×10^{-3}	0.74454×10^{-3}	0.54464×10^{-3}
32	0.17066×10^{-3}	0.21401×10^{-3}	0.67141×10^{-3}	0.50473×10^{-3}
33	0.15179×10^{-3}	0.19299×10^{-3}	0.60546×10^{-3}	0.46771×10^{-3}
34	0.13500×10^{-3}	0.17403×10^{-3}	0.54599×10^{-3}	0.43339×10^{-3}

Observou-se que os resultados com ρ variando de 1 a 0.6 foram melhores do que os de ρ igual a 0.8, como pode ser visto na tabela 7.

TABELA 7: Resultados do algoritmo, matriz L_2 ($\gamma=0$, $r=5$)

Iteração	Medida de Convergência	
	$\rho = 0.8$	ρ variando de 1 a 0.9
0	0.14417×10^2	0.14417×10^2
1	0.21121×10^1	0.97676×10^0
2	0.42927×10^0	0.15386×10^0
3	0.15503×10^0	0.11071×10^0
4	0.11756×10^0	0.49728×10^{-1}
5	0.58036×10^{-1}	0.16903×10^{-1}
6	0.37372×10^{-1}	0.67096×10^{-2}
7	0.15135×10^{-1}	0.36688×10^{-2}
8	0.62868×10^{-2}	0.24381×10^{-2}
-	-	-
-	-	-
-	-	-
17	0.12152×10^{-2}	0.97258×10^{-3}
18	0.10986×10^{-2}	0.86848×10^{-3}
19	0.99278×10^{-3}	0.77485×10^{-3}
-	-	-
-	-	-
-	-	-
34	0.21221×10^{-3}	0.13500×10^{-3}

Também foi observado que os resultados para ρ variando em uma seqüência decrescente foram melhores do que para ρ variando segundo a seqüência crescente correspondente, (tabela 8), o que confirma a condição estabelecida por Fukushima em [7].

TABELA 8: Resultados do algoritmo: Matriz L_2 ($\gamma = 0$, $r = 5$)

Iteração	Medida de Convergência	
	ρ variando de 1 a 0.9	ρ variando de 0.9 a 1
0	0.14417×10^2	0.14417×10^2
1	0.97676×10^0	0.14772×10^1
2	0.15386×10^0	0.24061×10^0
3	0.11071×10^0	0.13252×10^0
4	0.49728×10^{-1}	0.56973×10^{-1}
5	0.16903×10^{-1}	0.19354×10^{-1}
6	0.67096×10^{-2}	0.88986×10^{-2}
7	0.36687×10^{-2}	0.84369×10^{-2}
8	0.24381×10^{-2}	0.75418×10^{-2}
.	.	.
.	.	.
.	.	.
17	0.97258×10^{-3}	0.235076×10^{-2}
18	0.86848×10^{-2}	0.20632×10^{-2}
19	0.77485×10^{-3}	0.18107×10^{-2}
.	.	.
.	.	.
.	.	.
30	0.21570×10^{-3}	0.42963×10^{-3}
31	0.19188×10^{-3}	0.37689×10^{-3}
32	0.17067×10^{-3}	0.33062×10^{-3}
33	0.15179×10^{-3}	0.29002×10^{-3}
34	0.13500×10^{-3}	0.25440×10^{-3}

Com respeito ao algoritmo implementado, verificou-se que o tamanho do problema, isto é, o valor de r influencia na qualidade dos resultados. Na maioria dos testes, os resultados foram piores quando o valor de r foi menor do que quatro e não houve melhora significativa para valores de r considerados grandes (r acima de 6), o que pode ser visto nas tabelas 9 (um exemplo para ρ fixo) e 10 (um exemplo para o ρ variando).

TABELA 9: Resultado do algoritmo: Matriz L_2 ($\gamma = 0$) ($\rho = 0.8$)

Iteração	Medida de Convergência		
	$r = 3$	$r = 5$	$r = 7$
0	0.14417×10^2	0.14417×10^2	0.14417×10^2
1	0.21121×10^2	0.21121×10^1	0.21121×10^1
2	0.42927×10^0	0.42927×10^0	0.42927×10^0
3	0.15503×10^0	0.15503×10^0	0.15503×10^0
4	0.11756×10^0	0.11756×10^0	0.11756×10^0
5	0.58036×10^{-1}	0.58036×10^0	0.58036×10^0
6	0.18790×10^{-1}	0.37372×10^{-1}	0.37372×10^{-1}
7	0.11433×10^{-1}	0.15135×10^{-1}	0.15135×10^{-1}
8	0.11433×10^{-1}	0.62868×10^{-2}	0.62868×10^{-2}
9	0.89577×10^{-2}	0.31020×10^{-2}	0.31020×10^{-2}
10	0.77696×10^{-2}	0.24662×10^{-2}	0.24662×10^{-2}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
30	0.12289×10^{-2}	0.32084×10^{-3}	0.32084×10^{-3}
31	0.11343×10^{-2}	0.28936×10^{-3}	0.28936×10^{-3}
32	0.10418×10^{-2}	0.26096×10^{-3}	0.26096×10^{-3}
33	0.95322×10^{-3}	0.23533×10^{-3}	0.23533×10^{-3}
34	0.86957×10^{-3}	0.21221×10^{-3}	0.21221×10^{-3}

TABELA 10: Resultados do algoritmo: Matriz L_2 ($\gamma = 0$, ρ variando de 1 a 0.9)

Iteração	Medida de Convergência		
	$r = 3$	$r = 5$	$r = 7$
0	0.14417×10^2	0.14417×10^2	0.14417×10^2
1	0.97676×10^0	0.97676×10^0	0.97676×10^0
2	0.15386×10^0	0.15386×10^0	0.15386×10^0
3	0.11071×10^0	0.11071×10^0	0.11071×10^0
4	0.49728×10^{-1}	0.49728×10^{-1}	0.49728×10^{-1}
5	0.24450×10^{-1}	0.16903×10^{-1}	0.16903×10^{-1}
6	0.12648×10^{-1}	0.67096×10^{-2}	0.67096×10^{-2}
7	0.75764×10^{-2}	0.36688×10^{-2}	0.36688×10^{-2}
8	0.69180×10^{-2}	0.24381×10^{-2}	0.24381×10^{-2}
9	0.62535×10^{-2}	0.22192×10^{-2}	0.22192×10^{-2}
10	0.56559×10^{-2}	0.20275×10^{-2}	0.20275×10^{-2}
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
30	0.66631×10^{-3}	0.21570×10^{-3}	0.21570×10^{-3}
31	0.59384×10^{-3}	0.19188×10^{-3}	0.19188×10^{-3}
32	0.56996×10^{-3}	0.17067×10^{-3}	0.17067×10^{-3}
33	0.66668×10^{-3}	0.15179×10^{-3}	0.15179×10^{-3}
34	0.58523×10^{-3}	0.13500×10^{-3}	0.13500×10^{-3}

6 - CONCLUSÕES

Foi dado um embasamento teórico de um algoritmo apresentado em [9] e [19] para resolver o problema de fluxo de tráfego em uma rede de transporte, usando a formulação variacional. Este algoritmo combina o método de projeção de métrica variável com o método de decomposição simplicial usando a sua aplicação a problemas de grade porte.

O método foi implementado e aplicado a dois exemplos existentes na literatura. Fizeram-se diversos testes variando o parâmetro ρ e a matriz de projeção G e comparou-se com os resultados obtidos em [6] e [1] para estes problemas; que também usam métodos de projeção. Estas comparações foram um tanto grosseiras desde que foram feitas levando em conta somente o número de iterações e não o custo computacional delas, pois não se teve acesso a este tipo de informação.

Portanto, seria preciso implementar os algoritmos das referências para se fazer uma comparação mais confiável dos métodos, a fim de sugerir, se necessário, eventuais modificações no algoritmo apresentado.

Também pode se observar que seria interessante fazer testes com outros tipos de seqüências do parâmetro ρ a serem sugeridas.

ANEXO

PRINCIPAIS CONCEITOS E RESULTADOS

No que se refere as definições de alguns conjuntos (convexo, fechado, aberto, limitado, compacto), bem como as definições de ponto interior e aderente e envoltória convexa de um conjunto a bibliografia utilizada foi o livro de Elon Lages de Lima [14].

O livro de J. M. Ortega & W. C. Rheinboldt [17] foi a referência básica para a apresentação de matrizes, normas, produto interno, funções (G-diferenciável, F-diferenciável, hemi-contínua, potencial, pseudo-convexa, convexa), gradiente de uma função, os teoremas do Valor Médio para uma função G-diferenciável e a matriz Jacobiana.

A definição de conjunto dual de \mathbb{R}^n e a sua caracterização estão apresentadas no livro de J. C. Burkill & H. Burkill [3]; os conceitos de operador monótono e coercividade de um operador encontram-se no livro de Kinderlehrer & Stampachia [1].

O resultado que relaciona matriz simétrica definida positiva com seus auto-valores encontra-se no livro de Gilbert Strang [22]. A definição de derivada direcional utilizada é a que está no trabalho de Clóvis Gonzaga [8]. A fórmula generalizada de Lagrange, bem como o princípio de Simetria para operadores-potencial são apresentados no livro de M. M. Vainberg [23].

Do livro de D. G. Luenberger [15] foram retiradas as definições de Matriz Hessiana e função de Classe C^p e a direção viável.

As propriedades de um p-simplex estão apresentadas no trabalho de D. W. Hearn, Lawphongpanich, J. A. Ventura [11].

a.1 - PONTO INTERIOR E PONTO ADERENTE

Seja K um subconjunto de \mathbb{R}^n . Um ponto $a \in K$ é um ponto interior de K quando é centro alguma bola aberta contida em K . Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se aderente um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de uma seqüência de pontos desse conjunto.

a.2 - CONJUNTO CONVEXO EM \mathbb{R}^n .

Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para todo $x, y \in K$ e qualquer α , $0 < \alpha < 1$ o ponto $[\alpha x + (1 - \alpha)y] \in K$.

a.3 - CONJUNTOS FECHADOS E ABERTOS EM \mathbb{R}^n .

Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando contém todos os seus pontos aderentes isto é;

se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$; então $a \in K$.

Diz-se que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in K$ existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x, \delta) \subset K$.

a.4 - NORMA, PRODUTO INTERNO E OPERADOR -NORMA

a.4.1 - NORMA

Denomina-se norma a uma aplicação $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

- I) $\| x \| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\| x \| = 0$ se e somente se $x = 0$.
- II) $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- III) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Observação: Equivalência das normas em \mathbb{R}^n :

"Dadas duas normas quaisquer $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|'$ em \mathbb{R}^n , existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que $c_1 \| x \| \leq \| x \|' \leq c_2 \| x \|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$."

a.4.2 - PRODUTO INTERNO

Um produto interno em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições:

- I) $\langle x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$; $\langle x, x \rangle = 0$ se e somente se $x = 0$.
- II) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- III) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$; $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

O produto interno canônico em \mathbb{R}^n é dado por: $\langle x, y \rangle = x^t y = y^t x$ e o mesmo induz à Norma Euclídeana $\|x\|_2 = (\sum (x_i^2))^{1/2}$ sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Um importante resultado relativo ao produto interno canônico e a Norma Euclídeana em \mathbb{R}^n é dado pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

"Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se que: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ".

a.4.3 - OPERADOR-NORMA

Dadas quaisquer duas normas $\|x\|$ e $\|x\|'$ em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m respectivamente e qualquer $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, sendo $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o conjunto de todos os operadores lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . O operador-norma de A com respeito a normas $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|'$ é definido por:

$$\| \| A \| \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|'$$

Se $\| \| \cdot \| \|$ for o operador-norma induzido pela norma $\| \cdot \|$ então é válida a propriedade abaixo:

$$\| Ax \|' \leq \| \| A \| \| \cdot \| x \|$$

a.5 - MATRIZ SIMÉTRICA DEFINIDA POSITIVA

Uma matriz G simétrica ($G = G^t$) de ordem n é definida positiva se:

$$x^t G x > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \neq 0 .$$

Se G é definida positiva então são válidas as seguintes propriedades:

- I) As matrizes G^{-1} e $G^{1/2}$ estão bem definidas e são também simétricas definidas positivas.
- II) Todos os auto-valores de G são reais e positivos.
- III) Se λ_i é auto-valor de G ; $i = 1, 2, \dots, n$ então

$$\frac{1}{\lambda_i} \text{ e } \sqrt{\lambda_i} \text{ são respectivamente os auto-valores de } G^{-1} \text{ e } G^{1/2}.$$

Cabe ainda a observação de que o operador-norma $\| \cdot \|_2$ de uma matriz G simétrica definida positiva induzido pela norma euclídeana em \mathbb{R}^n possui as seguintes propriedades em relação a seus auto-valores λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

- I) $\| G \|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$
- II) $\| G^{-1} \|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} 1 / \lambda_i$
- III) $\| G^{1/2} \|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i}$

a.5.1 - PRODUTO INTERNO, NORMA E OPERADOR-NORMA RELATIVOS À UMA MATRIZ SIMÉTRICA DEFINIDA POSITIVA.

Dada uma matriz G simétrica definida positiva, pode se definir o seguinte produto interno:

$$\langle x, y \rangle_G = \langle x, G y \rangle, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n .$$

E o mesmo induz à norma:

$$\| x \|_G^2 = \langle x, G x \rangle, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n .$$

Tem-se a seguinte relação entre a norma induzida por G e a norma euclideana:

$$\|x\|_G = \|G^{1/2} x\| \quad (1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|x\|_G^2 &= x^t G x \\ &= x^t (G^{1/2})^t (G^{1/2}) x \\ &= (G^{1/2} x)^t (G x) \\ &= \|G^{1/2} x\|^2 \end{aligned}$$

A norma $\|\cdot\|_G$ induz o operador-norma $\|\cdot\|_G$ de uma matriz. Sendo que dada uma matriz quadrada A de ordem n :

$$\begin{aligned} \|A\|_G &= \sup_{\|x\|_G=1} \|Ax\|_G \text{ e por (1) tem-se que} \\ &= \sup_{\|x\|_G=1} \|G^{1/2} Ax\| \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{\|x\|_G=1} \|G^{1/2} A G^{1/2} G^{-1/2} x\| \\ &= \sup_{\|G^{1/2} x\|=1} \|G^{1/2} A G^{-1/2} (G^{1/2} x)\| \\ \|A\|_G &= \|G^{1/2} A G^{-1/2}\| \quad (3) \end{aligned}$$

a.6 - DUAL DE \mathbb{R}^n .

O espaço dual de \mathbb{R}^n , denotado por $(\mathbb{R}^n)'$ corresponde ao próprio \mathbb{R}^n no sentido que dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se $f \in (\mathbb{R}^n)'$ como sendo $f(x) := \langle \alpha, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e que dada $f(\cdot) \in (\mathbb{R}^n)'$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle \alpha, x \rangle$. Logo, identifica-se α com a funcional por ela definida.

a.7 - CONJUNTO LIMITADO

Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in K$.

Observação : Se um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é limitado segundo uma norma $\|\cdot\|$, é limitado para qualquer outra norma devido a equivalência entre as mesmas em \mathbb{R}^n .

a.8 - CONJUNTO COMPACTO

Diz-se que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando for limitado e fechado.

São válidos os seguintes resultados sobre conjuntos compactos:

- I) Toda seqüência de pontos $x_k \in K$ possui uma subseqüência que converge para um ponto de K .
- II) Se $K \subset \mathbb{R}^n$ e $L \subset \mathbb{R}^m$ são compactos então o produto cartesiano $(K \times L) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é compacto.
- III) Toda função real $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ atinge seu máximo e seu mínimo em compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que:
$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \text{ para todo } x \in K.$$

Observação: Como consequência de (III) tem-se que toda aplicação contínua $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n ; $K \subseteq D$ é compacto, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq c$ para todo $x \in K$.

a.9 - MONOTONICIDADE E COERCIVIDADE DE UM OPERADOR

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador e K um conjunto fechado e convexo, $K \subset \mathbb{R}^n$. Serão consideradas as seguintes definições:

- I) f é monótona se
$$\langle f(x) - f(x'), x - x' \rangle \geq 0 \text{ para todo } x, x' \in K.$$
- II) f é estritamente monótona se a igualdade do caso (I) só for válida para $x = x'$.
- III) f é fortemente (uniformemente) monótona se
$$\langle f(x) - f(x'), x - x' \rangle \geq \alpha \|x - x'\|^2 \text{ para todo } x, x' \in K$$

e α uma constante positiva.
- IV) f satisfaz a condição de coercividade se
$$\frac{\langle f(x) - f(x'), x - x' \rangle}{\|x - x'\|} \rightarrow \infty$$

quando $\|x\| \rightarrow \infty$, para algum $x' \in K$.

a.10 - OPERADOR CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEL

Seja D um subconjunto aberto em \mathbb{R}^n . O operador $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$; $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável em D se e somente se cada uma de suas derivadas parciais $(\partial f_i / \partial x_j)$ existe e é contínua em D , sendo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

a.11 - FUNÇÃO G-DIFERENCIÁVEL

Uma aplicação $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Gateaux- (ou G-) diferenciável em x ; sendo x um ponto interior de K , se existir um operador linear $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x + th) - f(x) - tAh\|}{t} = 0$$

Sendo que o limite acima independe da norma escolhida em \mathbb{R}^m , pois quaisquer normas em \mathbb{R}^m são equivalentes.

a.12 - FUNÇÃO HEMICONTÍNUA

Uma aplicação $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é hemicontínua em $x \in K$ se, para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, existir um $\delta = \delta(\varepsilon, h)$ tal que se $|t| < \delta$ e $(x + th) \in K$ então $\|f(x + th) - f(x)\| < \varepsilon$.

a.13 - FUNÇÃO F-DIFERENCIÁVEL

Uma aplicação $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Frechet - (ou F-) diferenciável em x ; sendo x um ponto interior de K , se existir um operador linear $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

Observações: Tanto na definição a.11 como em a.13, o operador A é denotado por $f'(x)$. Se $f(\cdot)$ for G-diferenciável ou F-diferenciável então $f'(x)$ será a G-derivada ou a F-derivada da aplicação $f(\cdot)$.

A representação matricial de $f'(x)$ é dada pela Matriz Jacobiana de f :

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \partial_k f_j(x) = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k}$$

Quando $f(\cdot)$ é uma funcional $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $[f'(x)]^t$ é o gradiente de f em x e normalmente é denotado por $\nabla f(x)$.

A existência da Matriz Jacobiana, isto é, de todas as derivadas parciais não implica que a função $f(\cdot)$ seja G-diferenciável.

Se $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde $K \subset \mathbb{R}^n$, for uma função G- ou F-diferenciável, então $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ são as matrizes Jacobianas em relação a x e y respectivamente.

a.14 - PRINCIPAIS RESULTADOS SOBRE FUNÇÕES CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEIS, G-DIFERENCIÁVEIS OU F-DIFERENCIÁVEIS

A seguir apresenta-se as relações existentes entre os diversos tipos de diferenciabilidade.

- I) Se $f(\cdot)$ é continuamente diferenciável em x então $f(\cdot)$ é F-diferenciável em x .
- II) Se $f(\cdot)$ é F-diferenciável em x então $f(\cdot)$ é G-diferenciável em x .
- III) Se $f(\cdot)$ é G-diferenciável em uma vizinhança aberta de x , e $f'(\cdot)$ é contínua em x então $f(\cdot)$ é F-diferenciável em x .

a.15 - DERIVADA DIRECIONAL

Considere uma funcional $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, onde K é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . A derivada direcional de $f(\cdot)$ em x na direção $h \in \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$f'(x, h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}, \text{ se o limite existir.}$$

Observação: Se $f(\cdot)$ é G-diferenciável em x então

$$f'(x, h) = \langle \nabla f(x), h \rangle = \nabla f(x)^t h$$

a.16 - FUNÇÃO DE CLASSE C^p .

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, onde K é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Diz-se que $f(\cdot) \in C^p$, se a função possui derivadas parciais contínuas de ordem p .

a.17 - MATRIZ HESSIANA DE UMA FUNÇÃO .

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma funcional de classe C^2 ; $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ então a Hessiana de $f(\cdot)$ em x é a matriz de ordem n denotada por $\nabla^2 f(x)$, tal que:

$$\nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Quando } \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} ; \text{ a matriz Hessiana é simétrica.}$$

a.18 - FUNÇÃO CONVEXA .

Uma função $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em um subconjunto convexo $K_0 \subset K$ se:

$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$, para todo $x, y \in K_0$ e $0 < \lambda < 1$.

$f(\cdot)$ é estritamente convexa em K_0 se e somente se a desigualdade acima for válida para todo $x, y \in K$ tal que $x \neq y$.

E $f(\cdot)$ é uniformemente convexa em K_0 se existe uma constante positiva c tal que para todo $x, y \in K_0$ e $0 < \alpha < 1$;

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) - f(\alpha x + [1 - \alpha]y) \geq C \alpha(1 - \alpha) \|x - y\|^2$$

Observação : Se $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for G-diferenciável no conjunto convexo $K_0 \subset K$, f é convexa em K_0 se e somente se

$$(f(y) - f(x)) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \text{ para todo } x, y \in K_0$$

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \text{ para todo } x, y \in K_0$$

Supõe-se que $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tenha segunda G-derivada no conjunto convexo $K_0 \subset K$. Então f é convexa em K_0 se e somente se $\nabla^2 f(x)$ é semi-definida positiva para todo $x \in K_0$; $f(\cdot)$ é estritamente convexa em K_0 se $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva para todo $x \in K_0$ e $f(\cdot)$ é uniformemente convexa em K se e somente se $\nabla^2 f(x)$ é uniformemente definida positiva para todo $x \in K$.

a.19 - FUNÇÃO PSEUDO-CONVEXA E PSEUDO-CONVEXA ESTRITA

Os conceitos aqui apresentados relativos à função pseudo-convexa (estritamente) correspondem aos introduzidos originalmente por Mangasarian [16].

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável

I) f é pseudo convexa se

$$f(x) > f(y) \text{ implica que : } \langle \nabla f(x), (x - y) \rangle \geq 0$$

II) f é estritamente pseudo-convexa

$$f(x) \geq f(y), x \neq y \text{ implica que : } \langle \nabla f(x), (x - y) \rangle > 0$$

a.19.1- PROPRIEDADES

Considera-se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável.

I- Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa (estritamente) então f é também pseudo-convexa (estritamente)

II- Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é pseudo-convexa (estritamente) em um conjunto aberto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ então qualquer ponto crítico de f em K é um mínimo global (único) de f em K .

III- Assuma que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja pseudo-convexa em um conjunto aberto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ então qualquer mínimo local de f em K é um mínimo global de f em K .

Observação: As definições e propriedades anteriores podem ser estendidas para o caso em que as funções não são continuamente diferenciáveis [14].

a.20 - ENVOLTÓRIA CONVEXA DE UM CONJUNTO

Seja K um subconjunto de \mathbb{R}^n . A envoltória convexa de K , denotada por $Co(K)$ é o conjunto de todas as possíveis combinações lineares convexas de pontos de K , isto é,

$$Co(K) = \left\{ x / x = \sum_{i \in I} \beta_i z_i, \sum_{i \in I} \beta_i = 1, \beta_i \geq 0 \text{ e } z_i \in K, I \text{ finito} \right\}$$

a.21 - DIREÇÃO VIÁVEL

Dado $x \in K$, $K \subset \mathbb{R}^n$, o vetor d é uma direção viável a partir de x se existe um $t' > 0$, tal que:

$$(x + t d) \in K, \text{ para todo } t, 0 \leq t \leq t'.$$

a.22 - P - SIMPLEX

Sejam $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_p\}$, $(p + 1)$ pontos distintos de \mathbb{R}^n , com $p \leq n$ tal que os vetores $z_1 - z_0, z_2 - z_0, \dots, z_p - z_0$ sejam linearmente independentes então o conjunto $Co(z_0, z_1, \dots, z_p)$, que é a envoltória convexa de $\{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ é denominado um "p-Simplex" ou "Simplex" em \mathbb{R}^n , sendo que a dimensão do mesmo é p .

Se x é um elemento de um p -simplex, então pode ser unicamente expresso como combinação convexa dos pontos z_0, z_1, \dots, z_p .

$$x = \sum_{i=0}^p \beta_i z_i, \quad \sum_{i=0}^p \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (4)$$

a.22.1 - PROPRIEDADES

- I) Se em (4) o coeficiente (peso) β_i não é nulo, então $Co(z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \dots, z_p)$ é também um p -simplex.
- II) Se $Co(z_0, z_1, \dots, z_i, \dots, z_p)$ é um p -simplex então $Co(z_0, z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_p)$ é um $(p-1)$ simplex.

a.23 - OPERADOR-GRADIENTE (POTENCIAL) .

Uma aplicação $g : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador gradiente ou potencial sobre um subconjunto $K_0 \subset K$ se existir uma funcional $f : K_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \nabla f(x)$ para todo $x \in K_0$.

Observação: Um importante resultado sobre aplicações potencial é o Princípio de Simetria dado por:

"Seja uma aplicação $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ G-diferenciável em um conjunto convexo aberto $K_0 \subset K$ e a derivada direcional $[\nabla f(x)^t h]$ é hemicontínua em x . Então $f(\cdot)$ é um operador potencial em K_0 se e somente se a matriz $\nabla f(x)$ é simétrica para todo $x \in K_0$."

G-DIFERENCIÁVEIS

Existem três generalizações do Teorema do Valor Médio para operadores $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m > 1$) G-diferenciáveis:

a.24.1 - Se $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é G-diferenciável em um conjunto convexo aberto $K_0 \subset K$ e $x, y \in K_0$ então $f(y) - f(x) = B(x, y) (y - x)$

$$\text{sendo } f = (f_1, \dots, f_m) \text{ e } B(x, y) = \begin{bmatrix} f'_1(x + t_1(y - x)) \\ \vdots \\ f'_m(x + t_m(y - x)) \end{bmatrix}$$

$t_i \in (0, 1) ; i = 1, 2, \dots, m .$

Observação : Em geral os t_i são distintos e $B(x, y)$ não é a G-derivada de $f(\cdot)$ em um ponto intermediário.

a.24.2 - Se $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ G-diferenciável em um conjunto convexo $K_0 \subset K$ então para quaisquer $x, y \in K_0$

$$\| f(y) - f(x) \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| f'(x + t(y - x)) \| \| x - y \|$$

a.24.3 - Se $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ G-diferenciável em um conjunto convexo $K_0 \subset K$ então para quaisquer $x, y, z \in K_0$

$$\| f(y) - f(z) - f'(x) (y - z) \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| f'(z + t(y - z)) - f'(x) \| \| y - z \|^2$$

a.25 - FÓRMULA GENERALIZADA DE LAGRANGE.

Seja $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ G-diferenciável em cada ponto de um conjunto convexo K , então para quaisquer x e $(x + h)$ pertencentes ao conjunto K e $v \in \mathbb{R}^m$, $\| v \| = 1$, existe $t \in (0, 1)$ tal que:

$$\langle f(x + h) - f(x), v \rangle = \langle \nabla f(x + t h), v \rangle$$

Observação : O resultado acima se encontra na referência [23], lema 2.2, página 20 para Espaços de Banach.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bertsekas Dimitri P. and Gafni Eli M. - "Projection Methods for Variational Inequalities with Applications to the Traffic Assignment Problem" - Mathematical Programming Study - N^o 17 - pág. 139-159 - North Holland Publishing Company - 1982.
- [2] Bregalda P. F., de Oliveira A. A. F., Bornstein C. T. - Introdução à Programação Linear - 3ª Edição - Rio de Janeiro - Editora Campus - 1988.
- [3] Burkill J. C. & Burkill - A Second Course in Mathematical Analysis
- [4] Dafermos S. - "An Iterative Scheme for Variational Inequalities" - Mathematical Programming 26 (1986) - pág. 40-46 - North Holland Publishing Company.
- [5] Dafermos S., - "Relaxation Algorithms for General Asymmetric Traffic Equilibrium Problem" - Transportation Sciences - Volume 16 - 1982 - pág. 231-240.
- [6] Dafermos S. - "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities - Transportation Science" - volume 14 - N^o 1 - Fev. 1980.
- [7] Fukushima M. - "A Relaxed Projection Method for Variational Inequalities" - Mathematical Programming n^o 35 - 1986 - pág. 58-70.
- [8] Gonzaga Clóvis C. - Algoritmos de Pontos Interiores - 17^o Colóquio Brasileiro de Matemática - Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [9] Guardia Torres L., Maculan N. - Aplicações e Problemas de Equilíbrio - Notas Particulares não Publicadas.
- [10] Harker P. T. and Pang J. S. - "Variational Inequality and Complementarity Problems" - Mathematical Programming 48 - 1990 - pág. 161-220.
- [11] Hearn D.W., Lawphongpanich S., Ventura J.A. - "Restricted Simplicial Decomposition: Computation and Extensions" - Mathematical Programming Study 31 - 1987 - pág. 99-118 - North Holland.

- [12] Hearn D. W., Lawphongpanich S., Ventura J. A. - "Finiteness in Restricted Simplicial Decomposition" - Operational Research Letters - Volume 4 - Number 3 - pág. 125-130.
- [13] Kinderlehrer D. and Stampacchia - "An Introduction to Variational Inequalities and Applications" - Academic Press - New York - 1980.
- [14] Lages de Lima E. - Curso de Análise - volume 2 - Rio de Janeiro - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - 1981.
- [15] Luenberger D. G. - Optimization by vector space methods - John Wiley & Sons, Inc. - 1969.
- [16] Mangasarian O. - "Pseudo Convex Functions" - SIAM J. Control volume 3 - pág. 281-290.
- [17] Ortega J. M. and Rheinbold W. C. - Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables - Academic Press - New York - 1970.
- [18] Pang J. S. and Chang D. - "Iterative Methods for Variational and Complementary Problems" - Mathematical Programming 24 - 1982 - pág. 284-313 - North Holland Publishing.
- [19] Scheimberg S., Guardia Torres L. - "Análise Comparativa de uma Classe de Métodos para um Problema de fluxo em redes" - 5ª CLAIO - México - 1992.
- [20] Scheimberg S., Nguyen V. H. and Strodiot J. S. - "Une Famille de Methodes pour Resoudre Inequations Variationelles" - Journee de la Optimisation - Montreal - 1990.
- [21] Smith M. J. - "The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibrium" - Transportation Research - Vol. 13B - 1979 - pág. 295-304.
- [22] Strang G. - Linear Algebra and its Applications - Terceira edição - Harcourt Brace Jovanovich Publishers - San Diego.
- [23] Vainberg M. M. - Variational Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations - John Wiley & Sons Inc.

**ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE
DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M. Sc.)**

The principal purposes of this thesis were to present the equilibrium traffic problem with a fixed demand in a variational inequality context and a detailed study and implementation of an algorithm to solve this problem.

The chosen algorithm was a combination of two methods: the projection method (Dafermo's scheme) and the restricted simplicial decomposition. The hypothesis of the theorem (projection method) were reformed to be more precise.

A mathematical model of the traffic problem and its variational formulation were presented. The influency of some choices of the parameter ρ and the matrix G (projection method) and different numbers of extreme points (restricted simplicial decomposition) were verified by the results of the numerical implementation.

**RESUMO DA TESE APRESENTADO À COPPE COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)**

O objetivo central desta tese foi o de apresentar o problema de equilíbrio de tráfego urbano com demanda fixa no contexto das inequações variacionais, bem como o estudo detalhado e a implementação de um algoritmo para resolvê-lo.

O algoritmo escolhido resultou da combinação do método de projeção e do método de decomposição simplicial restrita, os quais foram estudados detalhadamente dando ênfase aos resultados relacionados à convergência, principalmente no esquema geral de Dafermos (método de projeção) com a formulação mais rigorosa das hipóteses do teorema de convergência.

Foram apresentados o modelo matemático e os resultados da implementação numérica do algoritmo, com a finalidade de verificar a influência da variação do parâmetro ρ e de algumas escolhas da matriz G (ambos relacionados com o esquema de Dafermos) e a variação do número de pontos extremos escolhidos na decomposição simplicial.