

REPRESENTAÇÃO DE VARIEDADES COMBINATÓRIAS DE DIMENSÃO  $n$

André Luiz Pires Guedes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



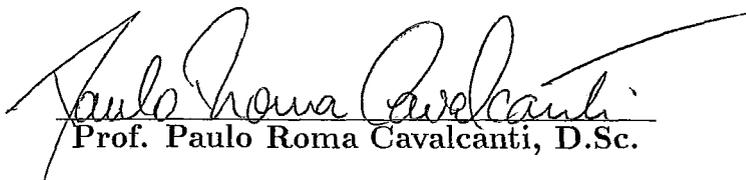
---

Prof. Ronaldo César Marinho Persiano, D.Sc.  
(Presidente)



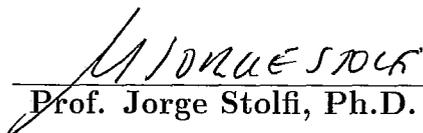
---

Prof. Antônio Alberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.



---

Prof. Paulo Roma Cavalcanti, D.Sc.



---

Prof. Jorge Stolfi, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
ABRIL DE 1995

GUEDES, ANDRÉ LUIZ PIRES

Representação de Variedades Combinatórias de Dimensão  $n$  [Rio de Janeiro] 1995.

ix, 72 p. 29,7 cm (COPPE/ UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1995)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Computação Gráfica

I. COPPE/UFRJ    II. Título (série).

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

## REPRESENTAÇÃO DE VARIEDADES COMBINATÓRIAS DE DIMENSÃO $n$

André Luiz Pires Guedes  
ABRIL, 1995

Orientador: Prof. Ronaldo César Marinho Persiano  
Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Representar objetos combinatórios de dimensão  $n$  tem grande importância na solução de problemas complexos em física, matemática e engenharia. Portanto o estudo destas representações merece atenção.

Neste trabalho apresentaremos uma estrutura de dados para representar variedades combinatórias de dimensão  $n$ , juntamente com operadores de modificação e criação. Faremos também uma comparação com outras representações.

Apresentaremos a definição de variedade combinatória, e veremos que nem sempre podemos dizer se uma certa estrutura é uma variedade. Discutiremos a validade da representação, no sentido de estar ou não representando uma variedade, e sua completude, em relação aos operadores.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Science (M.Sc.).

## REPRESENTING $n$ -DIMENSIONAL COMBINATORIAL MANIFOLDS

André Luiz Pires Guedes  
APRIL, 1995

Thesis Supervisor: Prof. Ronaldo César Marinho Persiano  
Department: Engenharia de Sistemas e Computação

Representing  $n$ -dimensional combinatorial objects has an important role in solving complex problems in physics, mathematics and engineering. Therefore we suggest that effort should be put in the design of such representations.

This work reports on a data structure for representing  $n$ -dimensional combinatorial manifolds, and operators aimed at the creation and the modification of the structure. We compare such a structure with other representation schemes.

A definition of combinatorial manifold is presented, stressing the fact that not always a combinatorial structure is a combinatorial manifold. We discuss the validity of such a representation, whether it describes a manifold or not, and its completeness in relation to the operators.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>3</b>
2.1	Topologia Geral . . . . .	3
2.2	Topologia Combinatória . . . . .	5
2.2.1	Complexos . . . . .	6
2.2.2	Complexo Dual . . . . .	12
2.2.3	Complexo CW . . . . .	14
2.2.4	Orientabilidade . . . . .	16
2.2.5	O Grafo de Incidência . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Álgebra de Incidência</b>	<b>19</b>
3.1	As Definições . . . . .	19
3.2	Álgebra e Casamentos . . . . .	23
3.3	Complexos e Álgebras de Incidência . . . . .	24
3.3.1	1-complexos . . . . .	25
3.3.2	2-complexos . . . . .	26
3.3.3	3-complexos e $n$ -complexos . . . . .	27
3.3.4	Desmontando uma Álgebra de Incidência . . . . .	31
3.4	Variedades combinatórias e Álgebras de incidência . . . . .	33
3.5	Álgebras de Incidência Padrão . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Representações de Complexos</b>	<b>40</b>
4.1	Sistemas de relações . . . . .	40
4.2	Estrutura de dados DCEL . . . . .	42
4.3	Álgebra de arestas . . . . .	43
4.4	Estrutura de dados Facet-Edge . . . . .	46
4.5	O Grafo de Incidência . . . . .	48
4.6	$n$ -G-maps . . . . .	49

4.7	Estrutura de dados Cell-Tuple . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Construção</b>	<b>52</b>
5.1	Operadores de Modificação . . . . .	52
5.2	Operadores de Criação . . . . .	58
5.3	Compleitude dos operadores . . . . .	59
5.4	Comparando com outros operadores . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>66</b>
6.1	Implementação . . . . .	67
6.2	Próximos passos . . . . .	67
6.3	Considerações finais . . . . .	67

# Lista de Figuras

2.1	Exemplos de simplexes . . . . .	6
2.2	Rotulação de um complexo para criar outro . . . . .	9
2.3	Estrela $Es(v)$ e cinta $Ci(v)$ de $v$ . . . . .	10
2.4	Estrela de $v$ não é uma bola . . . . .	10
2.5	Não-variedade combinatória . . . . .	11
2.6	Complexos recursivos: (a) 1-complexo não-recursivo; (b) 2-complexo recursivo; (c) 2-complexo não-recursivo; (d) 2-complexo recursivo . . . . .	13
2.7	Dual de um complexo . . . . .	14
2.8	Células abertas de um complexo CW. (a) aresta circular, (b) faceta com auto-intersecção na fronteira combinatória. . . . .	15
2.9	2-face com arestas soltas no interior . . . . .	16
2.10	Grafo de incidência . . . . .	18
3.1	Complexos de dimensão 1: (a) genérico; (b) com ciclos. . . . .	25
3.2	Função $\varphi_1$ . . . . .	26
3.3	Identificação de arestas. . . . .	27
3.4	Identificação de faces . . . . .	28
3.5	Significado de $\varphi_3$ . . . . .	29
3.6	Álgebra de Incidência Padrão de ordem 8 . . . . .	36
4.1	Exemplo de subdivisão . . . . .	41
4.2	Estrutura DCEL . . . . .	42
4.3	Funções da Álgebra de arestas . . . . .	44
4.4	Circulação em torno de uma aresta . . . . .	46
4.5	2-G-map . . . . .	49
5.1	Trocas nos pares definidos por $F$ . . . . .	54
5.2	Casamento $C_{k,d}$ preservado . . . . .	56
5.3	Passo 2 do Algoritmo 1 . . . . .	59
5.4	$Splice_{k+1}^n(B, e, g \varphi_{k+1})$ . . . . .	63

5.5  $Spl_{k}^n(Spl_{k+1}^n(B, e, g \varphi_{k+1}), g, e \varphi_{k+1}) \dots \dots \dots 63$

# Agradecimentos

Durante o período em que estive trabalhando nesta tese, muitos fatores ajudaram e outros atrapalharam a elaboração do texto. Deixando de lado os fatores negativos, gostaria de agradecer aos responsáveis, diretos ou indiretos, pelos fatos positivos deste período.

Agradeço inicialmente ao meu orientador. Não há como descrever sua ajuda. O tempo todo discutíamos detalhes da tese como se fossem temas únicos de sua pesquisa. Isso me fez dar mais importância ao trabalho.

Aos amigos do LCG/COPPE agradeço inicialmente pela paciência em tentar compreender do que eu estava falando, e mais ainda pelas inúmeras atividades festivas que quebravam o ritmo com ritmo. Pelas referências encontradas em momentos importantes, não posso deixar de ser grato à Helena e ao Luis Paulo. Também não posso deixar de mencionar os galhos quebrados por todos, principalmente pela Valéria, pelo Adailton e pelo Zé Maria, incursionando pela secretaria do programa de Sistemas fazendo matrículas, entregando documentos, e etc.

Aos amigos do Instituto de Matemática, pelo apoio. Principalmente ao companheiro Milton, ao amigo Gregorio e ao grande Luiz Carlos.

À minha família, por terem feito um pouco mais do que esperar, entendendo a minha ausência de casa mesmo nos raros momentos em que estava na cidade. Agradeço ao meu tio Gilson que, mesmo não podendo ver o resultado, acreditou em mim.

Agradeço a Curitiba! Embora distante do Rio de Janeiro, me ofereceu um ambiente bom para trabalhar e me distrair, sem que com isso uma coisa atrapalhasse a outra.

Aos amigos do Departamento de Informática da UFPR, que nunca me deixaram esquecer que eu tinha uma tese para acabar, e que me deram todo o apoio necessário. Em especial ao Renato, pois fez um belo esforço para compreender o que eu estava escrevendo, dando significativas sugestões quando eram necessárias. E ao Alexandre, pelas conversas em português! Ao Marcos, Heraldo e Tânia, pela amizade durante quase todo o período.

Aos alunos, que me faziam pensar em outras coisas quase o tempo todo!

Aos alunos, que se tornaram meus amigos e continuaram me fazendo pensar em outras coisas.

Agradeço aos meus amigos de “derrubadas”, com os quais esquecia da tese. Mesmo! A Blumenau e a *Oktoberfest*, ao carnaval, a todas as festas!

# Capítulo 1

## Introdução

“... under the sun there neither exists nor *can* exist any work more thoroughly dignified — more supreme noble than this very poem — this poem *per se* — this poem which is a poem and nothing more — this poem written solely for the poem’s sake.”

Edgar Allan Poe — The Poetic Principle

O objetivo deste trabalho é a representação de objetos de dimensão qualquer. Estes objetos são representados de forma combinatória e sem muita preocupação com posição, forma e tamanho. Estas informações podem ser facilmente incluídas associando coordenadas e “forma” aos elementos combinatórios.

Cada objeto é particionado em elementos simples (subdivisão) que formam um complexo. A estrutura deste complexo é armazenada na forma de relações de incidência entre os seus elementos.

Um dos resultados é uma formalização de representações já utilizadas, e métodos para a construção de objetos. A formalização permite provar ou não a validade de certo modelo, auxiliando na criação de objetos complexos.

Quando tentarmos limitar a representação às variedades combinatórias, encontraremos problemas em dimensões maiores que 3, pois não conseguimos caracterizar de modo apropriado o que são as variedades combinatórias destas dimensões. Em compensação, temos certeza de que no caso bi-dimensional sempre teremos variedades combinatórias. Podemos chegar a um método onde temos o controle sobre o que estamos construindo em dimensão 3. E, embora ainda não se tenha uma classificação para as 3-variedades, podemos construir e estudar estes objetos de forma mais concreta.

A estrutura apresentada é a álgebra de incidência, que agrega informações de adjacência de forma concisa e homogênea. O principal resultado será a completude dos operadores apresentados para modificação da álgebra de incidência.

No capítulo 2 apresentaremos algumas definições, em particular a de *variedade combinatória*, e um resultado importante sobre a estrutura destes objetos [Moi77, Mun84, Zee79, Lim82, Jam55], que permitirá garantir certas propriedades, tais como a existência de ciclos em torno de elementos topológicos. Faremos uma preparação

para introduzir o conceito de *Álgebra de Incidência*, que será apresentado no capítulo 3. Neste capítulo discutiremos diversas propriedades das Álgebras de Incidência, inclusive apresentando o conceito de álgebra minimal.

A Álgebra de Incidência pode ser usada como estrutura de dados para representar os objetos em questão, e estruturas equivalentes já foram introduzidas em outros trabalhos, como em [Lie89], utilizando as chamadas *n-G-maps* e [Bri90] (ou [Bri89]). Anteriormente [GS85] e [DL89] apresentaram estruturas de dimensões 2 e 3, respectivamente. Comentaremos sobre estes trabalhos no capítulo 4.

Apresentaremos alguns operadores de manipulação no capítulo 5, procurando sempre manter as propriedades das Álgebras de Incidência. Estes operadores serão locais, sem muito significado global, mas podem ser usados como base na construção de outros operadores. A questão da completude destes operadores será estudada e apresentaremos um resultado que garante esta completude para dimensões até 4.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Este capítulo, embora tenha o título acima, não contém somente conceitos elementares. Ele tem este título por tratar de conceitos que, embora complexos, formam a base para os demais capítulos.

Primeiramente apresentamos alguns conceitos de topologia, e em seguida, alguns resultados importantes para a construção do eixo principal deste trabalho.

Algumas definições e resultados apresentados aqui podem ser encontrados em bibliografia da área, entretanto aparecem definições e resultados novos.

Na seção 2.1 apresentamos conceitos clássicos de topologia geral, enquanto que na seção 2.2 introduzimos alguns conceitos de topologia combinatória, incluindo alguns resultados que serão usados no decorrer do trabalho. Nesta seção apresentamos o conceito de complexo (em várias versões) e o grafo de incidência, e definimos orientabilidade.

### 2.1 Topologia Geral

Precisamos de algumas noções de topologia geral, já que este trabalho busca a representação de variedades.

Começaremos pela definição de alguns *espaços* e algumas propriedades relacionadas com eles. Maiores detalhes sobre este assunto pode ser encontrado em [Lim70], [Lim82] e [Men62].

Um **Espaço Métrico** é um conjunto  $X$  dotado de uma *métrica*  $d$ . Uma **Métrica** definida em um conjunto  $X$  é uma função  $d : X^2 \mapsto \mathcal{IR}$  com as seguintes propriedades:

**M1:** (*positiva*)

$$d(a, a) = 0, a \in X$$

$$d(a, b) > 0, a \neq b, \text{ e } a, b \in X$$

**M2:** (*reflexiva*)

$$d(a, b) = d(b, a), a, b \in X$$

**M3:** (*desigualdade triangular*)

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c), a, b, c \in X$$

Uma **bola aberta** de raio  $\epsilon > 0$ , centrada em um ponto  $x$  de um espaço métrico<sup>1</sup>  $(X, d)$  de dimensão  $k$ , é o conjunto definido por  $B_\epsilon^k(x) = \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\}$ . Uma **esfera**, de raio  $\epsilon > 0$ , centrada em um ponto  $x \in X$ , é o conjunto  $S_\epsilon^k(x) = \{p \in X \mid d(p, x) = \epsilon\}$ .

Um conjunto  $U \subseteq X$  é dito **aberto em  $X$**  se, para qualquer ponto  $p \in U$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon^k(p) \subseteq U$ .

Por outro lado, um conjunto é dito **fechado** se o seu complemento é *aberto*.

Uma **vizinhança** de um ponto  $p$  é um conjunto aberto que contém  $p$ . Normalmente, quando falamos de vizinhança, estamos nos referindo a um conjunto “pequeno”, de acordo com a necessidade.

De um conjunto  $U \subseteq X$ , podemos definir o *interior*, o *fecho* e a *fronteira* de  $U$ .

**Interior** de  $U$  é o conjunto

$$Int(U) = \{p \in U \mid \exists \epsilon > 0, B_\epsilon^k(p) \subseteq U\},$$

**fecho** de  $U$  é o conjunto

$$\bar{U} = \{p \in X \mid \forall \epsilon > 0, B_\epsilon^k(p) \cap U \neq \emptyset\},$$

e **fronteira** de  $U$ , o conjunto

$$\partial U = \bar{U} - Int(U).$$

Vale notar que uma esfera  $S_\epsilon^k(x)$  é a fronteira  $\partial B_\epsilon^k(x)$  da bola  $B_\epsilon^k(x)$ .

Um **Espaço Topológico** é um par  $(X, \mathcal{O})$  onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{O}$  é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de  $X$ . Estes conjuntos abertos podem ser *induzidos* por uma métrica, no sentido descrito na definição de *aberto*. Desta forma, um espaço métrico  $(X, d)$  induz um espaço topológico  $(X, \mathcal{O})$ , onde

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq X \mid \forall p \in U, \exists \epsilon > 0, B_\epsilon^k(p) \subseteq U\},$$

sendo  $k$  a dimensão de  $X$ .

O conjunto de abertos  $\mathcal{O}$  é denominado uma **topologia** do conjunto  $X$ , e possui as seguintes propriedades, consistentes com as propriedades dos conjuntos abertos em espaços métricos:

**T1:**  $X$  e o subconjunto vazio  $\emptyset$  estão em  $\mathcal{O}$ ;

**T2:** a união de uma família qualquer de elementos de  $\mathcal{O}$  está em  $\mathcal{O}$ ;

**T3:** a intersecção de quaisquer dois elementos de  $\mathcal{O}$  está em  $\mathcal{O}$ .

<sup>1</sup>trataremos um conjunto como espaço métrico quando for evidente qual a métrica

Um **Espaço de Hausdorff** é um espaço topológico onde para qualquer par de pontos  $x$  e  $y$  existem abertos  $U$  e  $V$  disjuntos que são vizinhanças de  $x$  e  $y$  respectivamente.

Dados dois espaços topológicos<sup>2</sup>,  $X$  e  $Y$ , uma função  $f : X \mapsto Y$  é dita **contínua** se, para todo aberto  $V \in Y$ ,  $f^{-1}(V) = U$ , onde  $U$  é um aberto, ou seja, uma função é contínua se a imagem inversa de abertos são abertos. Com  $f^{-1}(V)$  queremos representar o conjunto

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}.$$

Uma função  $f : X \mapsto Y$  é dita um **homeomorfismo** entre  $X$  e  $Y$ , se  $f$  é contínua, possui inversa e sua inversa também é contínua. Neste caso notaremos  $f : X \leftrightarrow Y$ .

Note que pelo fato de  $f : X \mapsto Y$  ser um homeomorfismo, existe uma bijeção entre a topologia de  $X$  e a de  $Y$ .

Dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são ditos **homeomorfos** se existir um homeomorfismo entre eles. Neste caso notaremos  $X \approx Y$ .

Uma função  $h : X \mapsto Y$ , tal que  $h : X \leftrightarrow h(X) \subset Y$ , é dita uma **imersão** de  $X$  em  $Y$ .

Um espaço topológico  $M$  no qual, fixado um inteiro  $n$ , todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  é dito uma **variedade** de dimensão  $n$ , ou uma  **$n$ -variedade**. No restante deste trabalho trataremos de uma classe especial de variedades, as *variedades trianguláveis*.

## 2.2 Topologia Combinatória

A topologia combinatória é extremamente importante neste trabalho, já que é através dela que conseguimos tratar computacionalmente elementos de topologia geral como as variedades. É graças a seus conceitos que conjuntos infinitos podem ser representados por estruturas finitas.

Alguns espaços topológicos podem ser triangulados, o que significa que podem ser subdivididos em *pedaços simples* e (o que é muito importante) em um número finito deles.

Primeiramente veremos o que são os *pedaços simples* nos quais os espaços topológicos são divididos.

Um **simplexo** de dimensão  $k$  (ou  $k$ -simplexo) é o mais simples conjunto convexo que possui dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Definindo de forma mais precisa, é o fecho convexo de  $k + 1$  vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \leq n$ , tais que os vetores  $v_i - v_0$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sejam *linearmente independentes*.

Um 1-simplexo é um segmento de reta; um 2-simplexo é um triângulo; um 3-simplexo é um tetraedro; e etc (ver figura 2.1).

---

<sup>2</sup>Trataremos um espaço topológico como um conjunto, omitindo a topologia quando não causar confusão

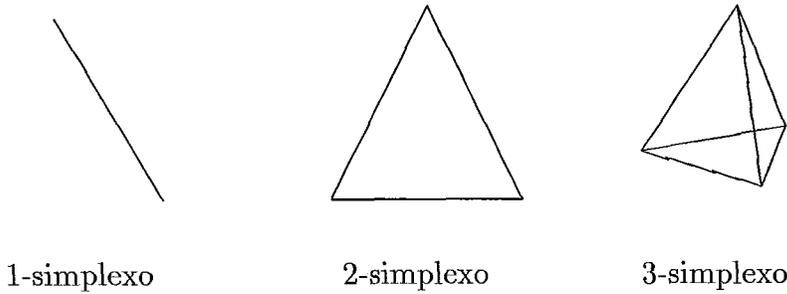


Figura 2.1: Exemplos de simplejos

Um  $k$ -simplexo  $\sigma^k = v_0 v_1 \dots v_k$  tem como suas **faces** todos os simplejos formados por subconjuntos não vazios, de seus vértices, e se  $\sigma_1$  é uma das faces de  $\sigma_2$ , então  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são ditos incidentes, e escreveremos  $\sigma_1 < \sigma_2$ , e se  $\sigma_1$  é um  $(k - 1)$ -simplexo e  $\sigma_2$  um  $k$ -simplexo, então escreveremos  $\sigma_1 \prec \sigma_2$ .

### 2.2.1 Complexos

O tipo de agregados destes objetos simples que nos interessam, são os complexos. Um **complexo simplicial**  $\mathcal{K}$  (veja [Moi77]) é um conjunto de simplejos tais que

- K1:**  $\mathcal{K}$  contém todas as faces de seus elementos;
- K2:** se  $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ , e  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ , então  $\sigma \cap \tau$  é uma face de  $\sigma$  e  $\tau$ ;
- K3:** todo  $\sigma \in \mathcal{K}$  está em um aberto  $U$  que intersepta um número finito de elementos de  $\mathcal{K}$ .

Os elementos de um complexo  $\mathcal{K}$  são chamados de **faces**. Um  $k$ -simplexo de  $\mathcal{K}$  é denominado uma  **$k$ -face** de  $\mathcal{K}$ . As  $(k - 1)$ -faces de uma  $k$ -face  $\sigma$  formam um conjunto denominado **subfaces** de  $\sigma$ , e as  $(k + 1)$ -faces de  $\mathcal{K}$  que têm  $\sigma$  como face (subface) formam o conjunto das **superfaces** de  $\sigma$ . Notaremos o conjunto das subfaces de  $\sigma$  por  $\mathcal{S}_b(\sigma)$  e o conjunto das superfaces por  $\mathcal{S}^p(\sigma)$ , e

$$\mathcal{S}^p(\sigma) = \{\tau \mid \sigma \prec \tau\},$$

$$\mathcal{S}_b(\sigma) = \{\tau \mid \tau \prec \sigma\}.$$

Observe que a relação  $<$  é uma ordem parcial no complexo, e que  $\prec$  é a única relação tal que se  $a \prec b$  então  $a < b$  e não existe  $x$  tal que  $a < x < b$ . Ou seja, não existe nada entre  $a$  e  $b$ .

Um **espaço topológico triangulado** [Moi77] é um complexo simplicial  $\mathcal{K}$ , tal que,  $|\mathcal{K}|$  seja um espaço topológico, onde  $|\mathcal{K}|$  é a união de todas as faces de  $\mathcal{K}$  e é denominado **poliedro** de  $\mathcal{K}$ .

Um outro tipo de complexo, que é mais genérico, é o celular. Uma  **$k$ -célula** (célula de dimensão  $k$ ) é um conjunto homeomorfo a um  $k$ -simplexo, em um espaço

topológico. As **faces** de uma  $k$ -célula  $\sigma$  são  $d$ -células, com  $d < k$ , que estão na fronteira de  $\sigma$ , ou a própria  $\sigma$ .

Um **complexo celular**  $\mathcal{C}$  é um conjunto de células de um espaço topológico tais que

- C1:** a fronteira de toda célula  $\sigma \in \mathcal{C}$  é a união de uma coleção de células de  $\mathcal{C}$ ;
- C2:** se  $\sigma, \tau \in \mathcal{C}$ , e  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ , então  $\sigma \cap \tau$  é um conjunto de células que são faces de  $\sigma$  e  $\tau$ ;
- C3:** todo  $\sigma \in \mathcal{C}$  está em um aberto  $U$  que intersepta um número finito de elementos de  $\mathcal{C}$ .

Neste tipo de complexo, as faces são células (fechadas), e as definições de subfaces, superfícies e poliedro são as mesmas, além de que um complexo simplicial é um complexo celular.

De agora em diante, a menos que especificado outro tipo, um complexo será celular.

A dimensão de um complexo é a maior das dimensões de suas faces. Para generalizar alguns conceitos sobre complexos, vamos usar duas faces fictícias chamadas o *todo* e o *nada*. Estas duas faces são uma  $(n + 1)$ -face e uma  $(-1)$ -face, onde  $n$  é a dimensão do complexo. Chamaremos estas faces, respectivamente, de  $\omega$  e  $\varepsilon$ . Por convenção, todas as 0-faces (vértices) do complexo são incidentes a  $\varepsilon$ , e todas as  $n$ -faces são incidentes a  $\omega$ . Observe que estas faces não pertencem realmente aos complexos, são apenas uma notação.

Chamaremos de  $p$ -**esqueleto** [Mun84] de um complexo  $\mathcal{K}$ , o complexo  $\mathcal{K}^p \subset \mathcal{K}$  que contém as faces de  $\mathcal{K}$  com dimensão menor ou igual a  $p$ .

Sejam  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{L}$  dois complexos tais que  $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$ , e toda face de  $\mathcal{L}$  é uma união de faces de  $\mathcal{K}$ . Então  $\mathcal{K}$  é dito uma **subdivisão** de  $\mathcal{L}$ .

Dois complexos,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{C}$ , são ditos **isomorfos** se existe um função bijetora  $\Psi : \mathcal{K} \mapsto \mathcal{C}$  tal que se  $\sigma_i$  é uma  $i$ -face de  $\mathcal{K}$ , então  $\Psi(\sigma_i)$  é uma  $i$ -face de  $\mathcal{C}$ , e se  $\sigma_i, \sigma_j \in \mathcal{K}$  e  $\sigma_i < \sigma_j$ , então  $\Psi(\sigma_i) < \Psi(\sigma_j)$ . Neste caso notaremos  $\mathcal{K} \equiv \mathcal{C}$ .

Se  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{L}$  são complexos, com subdivisões  $\mathcal{K}'$  e  $\mathcal{L}'$ , e  $\mathcal{K}' \equiv \mathcal{L}'$  então  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{L}$  são **combinatoriamente equivalentes**.

Quando representarmos complexos, na verdade estaremos representando uma classe de equivalência definida pela relação de *isomorfismo*. Por isso é interessante definirmos o conceito de complexo abstrato, que traduz simplesmente a estrutura combinatória de um complexo, ou seja, é a representação da classe de equivalência. Desta forma, um complexo abstrato não contém informações a respeito de uma possível *realização geométrica* (imersão em algum espaço), é apenas um conjunto (de células) com algumas relações entre seus elementos.

Um **Complexo Abstrato** é um conjunto parcialmente ordenado  $A$ , com mínimo  $\varepsilon$ , e tal que, dado  $a \in A$ , todas as seqüências  $a_0, a_1, \dots, a_n = a$ , com  $a_i \in A$ , onde

$$\varepsilon \prec a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_n = a$$

têm o mesmo tamanho ( $n + 1$ ). Os complexos abstratos que apresentaremos terão também um máximo  $\omega$ .

Observe que a relação  $\prec$  acima, embora não seja a relação usada para comparar faces de um complexo, é a única relação derivada da ordem do conjunto  $A$ , do mesmo modo como a outra era, ou seja, se  $a \prec b$  então  $a < b$  e não existe  $x$  tal que  $a < x < b$ .

A dimensão de  $a \in A$ ,  $Dim(a)$ , é  $n$ , se existe uma seqüência  $a_0, a_1, \dots, a_n = a$ , com  $a_i \in A$ , onde

$$\varepsilon \prec a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_n = a,$$

e  $Dim(\varepsilon) = -1$ . A dimensão do complexo abstrato  $A$  é a maior dimensão de seus elementos.

Chamaremos os elementos de  $A$  com dimensão  $k$  de  $k$ -faces, e a relação  $\prec$  terá o mesmo significado que nos complexos celulares, embora sejam distintas<sup>3</sup>. Desta forma, a definição de isomorfismo vale para complexos abstratos.

Uma **realização geométrica** de um complexo abstrato  $A$ , é um complexo celular  $C$  tal que  $A \equiv C$ . Denominaremos de **complexo celular abstrato** um complexo abstrato que possui uma realização geométrica.

Sejam os complexos abstratos  $A$  e  $T$ . Se existem  $C$  e  $K$  realizações geométricas de  $A$  e  $T$ , respectivamente, tais que  $C$  é subdivisão de  $K$ , então  $A$  é **subdivisão** de  $T$ .

Em uma realização geométrica de um complexo abstrato  $A$ , associamos as faces de  $A$  com as faces de um complexo  $C$ . No complexo  $C$ , estas faces devem ser células, e por isso têm uma configuração de subfaces adequada, ou seja, a estrutura combinatória do conjunto de subfaces de uma certa face de  $C$  deve ser uma das possíveis estruturas combinatórias de uma esfera de mesma dimensão.

Uma **rotulação** de um complexo abstrato  $A$  é uma distribuição de índices (rótulos) entre as faces do complexo. Uma rotulação é dita **conforme** se duas faces de  $A$ ,  $\sigma$  e  $\tau$ , só têm o mesmo rótulo quando são de mesma dimensão e existir uma relação entre as faces de  $\sigma$  e  $\tau$  que faz as faces relacionadas terem o mesmo rótulo (obviamente distintos do rótulo de  $\sigma$  e  $\tau$ ).

Uma rotulação conforme pode ser usada para identificar grupos de faces de um complexo abstrato, gerando um outro complexo abstrato. Veja na figura 2.2 como podemos fazer isso. Os vértices foram rotulados com números e as arestas com letras. Perceba que as arestas com mesmo rótulo têm seus vértices extremos também com rótulos iguais.

Considere um complexo  $\mathcal{X}$  e uma rotulação  $\psi : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{K}$ , onde  $\mathcal{K}$  é um conjunto de rótulos. Suponha que  $\psi$  é sobrejetora. Então  $\mathcal{K}$  será um complexo abstrato, com a ordem parcial  $<$  definida por: se  $\sigma$  e  $\tau \in \mathcal{X}$  e  $\sigma < \tau$  então  $\psi(\sigma) < \psi(\tau)$ . É fácil ver que esta relação é uma ordem parcial em  $\mathcal{K}$ . Observe também que temos que incluir a face  $\varepsilon$  em  $\mathcal{X}$  para que  $\mathcal{K}$  seja realmente um complexo abstrato.

---

<sup>3</sup>atuam em conjuntos distintos

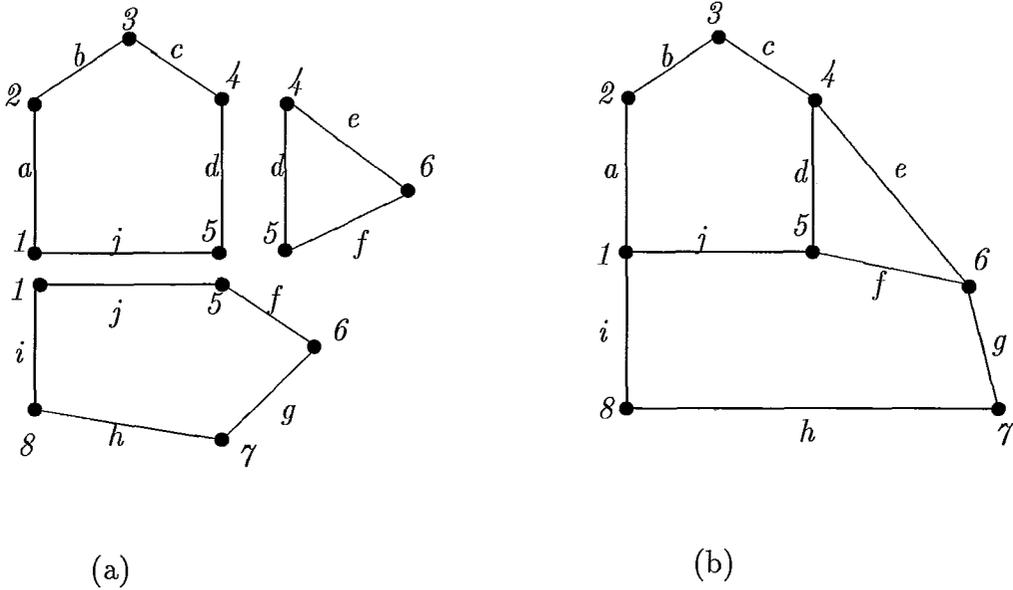


Figura 2.2: Rotulação de um complexo para criar outro

Uma outra forma de gerar um complexo a partir de outro é por subdivisão de suas faces. A notação que apresentamos agora tem relação com esta operação, e será usada mais adiante. Dados dois pontos (vértices),  $w$  e  $v$ , de um espaço topológico  $\mathcal{X}$ ,  $w * v$  é uma 1-célula (aresta) de  $\mathcal{X}$  que tenha  $w$  e  $v$  como fronteira (obviamente esta célula não é única). Dada uma célula  $\sigma$  e um vértice  $w$  não pertencente a  $\sigma$ , em um espaço topológico  $\mathcal{X}$  (de dimensão maior que a de  $\sigma$ ), a célula  $w * \sigma$  de  $\mathcal{X}$  tem como subfaces  $\sigma$ , as células  $w * \tau$ , para  $\tau \in \mathcal{S}_b(\sigma)$ , e  $w$ .

Dado um complexo  $K$  e um vértice  $w$  não pertencente a  $|K|$ , o complexo  $w * K$  é formado pelas células  $w * \sigma$ , onde  $\sigma \in K$ , mais suas subfaces.

Seja  $V$  um conjunto de vértices com uma relação bijetora com as faces de  $K$ , ou seja, cada face  $\sigma$  de  $K$  está representada univocamente por um vértice  $\hat{\sigma}$  de  $V$ . O complexo simplicial  $K'$  formado por todos os simplexes da forma  $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \cdots \hat{\sigma}_p$ , onde  $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \cdots \prec \sigma_p$  é chamado de **subdivisão baricêntrica**<sup>4</sup> de  $K$ .

Para chegarmos até as variedades, primeiro precisamos definir a sua forma combinatoria. Desta forma passamos a relacioná-las com os complexos.

A **estrela**  $Es(v)$  do vértice  $v$  de um complexo  $\mathcal{K}$  é o menor complexo que contém todos os elementos de  $\mathcal{K}$  que tem  $v$  como face. Pela propriedade **C1**,  $Es(v)$  contém as faces dos elementos que tem  $v$  como face. O complexo  $Ci(v)$  formado pelas faces de  $Es(v)$  que não são incidentes a  $v$  é denominado **cinta** de  $v$  (veja figura 2.3). Estas definições são equivalentes às encontradas em [Moi77, pag. 5], e um pouco diferente das encontradas em [Mun84].

Um complexo  $\mathcal{K}$  é uma  **$n$ -variedade combinatoria** se  $|K|$  for uma  $n$ -variedade e, para cada vértice  $v$  de  $\mathcal{K}$ ,  $Es(v)$  for homeomorfo a uma  $n$ -célula [Moi77, pag. 5].

<sup>4</sup>Normalmente os vértices de  $V$  são definidos como o baricentro das faces de  $K$ .

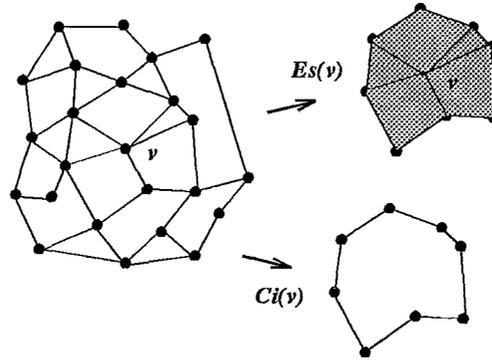


Figura 2.3: Estrela  $Es(v)$  e cinta  $Ci(v)$  de  $v$

Observe que em alguns casos podemos ter uma variedade com uma subdivisão que não é uma variedade combinatória (figura 2.4), e em outros casos um objeto pode parecer uma variedade e ser “desmascarado” por uma subdivisão que não é uma variedade combinatória, como o objeto construído a partir de uma pirâmide de base quadrada, identificando as faces triangulares opostas duas a duas. O resultado se assemelha a um toro (figura 2.5).

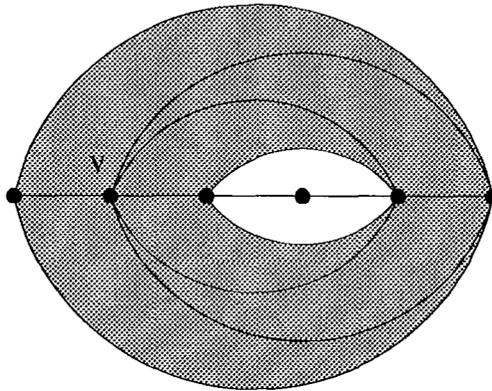


Figura 2.4: Estrela de  $v$  não é uma bola

Vamos agora começar a analisar a estrutura recursiva das variedades combinatórias.

**Lema 2.1** *Seja o complexo celular  $\mathcal{K}$  tal que  $|\mathcal{K}|$  seja uma  $n$ -variedade,  $n > 0$ . Qualquer  $(n - 1)$ -face de  $\mathcal{K}$  é fronteira de exatamente 2 (duas)  $n$ -faces de  $\mathcal{K}$ .*

**Prova:** *Seja  $\sigma \in \mathcal{K}$  uma  $(n - 1)$ -face, e  $p \in \text{Int}(\sigma)$  um ponto. Como  $|\mathcal{K}|$  é uma  $n$ -variedade, existe uma vizinhança  $U \approx \mathbb{R}^n$  de  $p$  contida em  $|\mathcal{K}|$ . Podemos fazer  $U$  tão pequeno quanto quisermos, a ponto de  $U \cap |\mathcal{K}^{n-1}| \subset \text{Int}(\sigma)$  (onde  $\mathcal{K}^{n-1}$  é o  $(n - 1)$ -esqueleto de  $\mathcal{K}$ ), e por isso,  $U \cap \sigma \subset \text{Int}(\sigma)$ . Faça  $V = U \setminus \sigma$ . Como  $\text{Int}(\sigma) \approx \mathbb{R}^{n-1}$  então  $V \approx \mathbb{R}^n \setminus \pi_{n-1}$ , onde  $\pi_{n-1}$  é um hiperplano de dimensão  $n - 1$ . Logo  $V$  é composto de 2 (duas) componentes conexas  $V_1$  e  $V_2$  disjuntas. Como  $V \cap |\mathcal{K}^{n-1}| = \emptyset$ , cada  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ , está inteiramente contida no interior de uma  $n$ -face, ou seja,  $V_i \subseteq \text{Int}(\rho_i)$ ,  $i = 1, 2$ , com  $\rho_1$  e  $\rho_2$  duas  $n$ -faces de  $\mathcal{K}$ . Como  $\mathcal{K}$  é celular,*

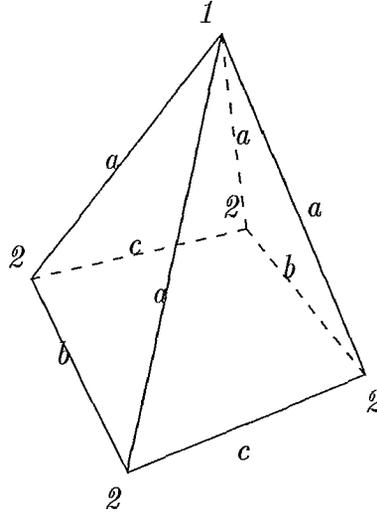


Figura 2.5: Não-variedade combinatória

$\rho_1 \neq \rho_2$ . Se existisse uma terceira  $n$ -face,  $\rho_3$ , adjacente a  $\sigma$  então  $U \cap \rho_3 \neq \emptyset$  e  $V$  teria mais que duas componentes conexas, o que não é verdade. Logo  $\sigma$  tem exatamente 2 (duas)  $n$ -faces adjacentes a ela.  $\square$

Apresentaremos agora um resultado importante, que garante a consistência dos próximos passos na direção de definir a estrutura de dados [Bri90, corolário 4.3, pag. 36]

**Teorema 2.2** *Seja  $\mathcal{K}$  um complexo celular tal que  $|\mathcal{K}|$  é uma  $n$ -variedade. Considere  $\sigma_{k-1}$ ,  $\sigma_k$  e  $\sigma_{k+1}$  faces de  $\mathcal{K}$  (onde  $\sigma_k$  é uma  $k$ -face), tais que  $\sigma_{k-1} \prec \sigma_k \prec \sigma_{k+1}$ , com  $0 \leq k \leq n$  (para  $k = 0$  e  $k = n$ , precisaremos usar as faces fictícias  $\varepsilon$  e  $\omega$ ), então*

$$\mathcal{S}^p(\sigma_{k-1}) \cap \mathcal{S}_b(\sigma_{k+1}) = \{\sigma_k, \sigma'_k\}$$

onde  $\sigma'_k$  é uma  $k$ -face de  $\mathcal{K}$  distinta de  $\sigma_k$ .

**Prova:** Se  $k = n$ ,

$$\mathcal{S}^p(\sigma_{k-1}) \cap \mathcal{S}_b(\omega) = \mathcal{S}^p(\sigma_{k-1})$$

que pelo lema 2.1 contém exatamente 2 elementos, sendo que um deles é  $\sigma_k$  e o outro uma  $n$ -face diferente de  $\sigma_k$ .

Se  $k = 0$ ,

$$\mathcal{S}^p(\varepsilon) \cap \mathcal{S}_b(\sigma_{k+1}) = \mathcal{S}_b(\sigma_{k+1})$$

que são os 2 (dois) vértices da aresta  $\sigma_{k+1}$ , que por definição são distintos.

Como a fronteira de toda  $(k+1)$ -face  $\sigma_{k+1}$  é uma  $k$ -variedade combinatória  $\partial\sigma_{k+1}$  (fronteira),  $k > 0$ , onde vale o lema 2.1, então

$$S^p(\sigma_{k-1}) \cap S_b(\sigma_{k+1}) = S^p(\sigma_{k-1}) \text{ restrita a } \partial\sigma_{k+1}$$

que, pelo lema 2.1 e pela hipótese, é  $\{\sigma_k, \sigma'_k\}$ . Logo, vale para  $0 \leq k \leq n$ .  $\square$

Este resultado garante que existe uma relação bijetora entre as faces de uma variedade combinatória, quando estas estão acompanhadas de um contexto, ou seja, quando associadas a faces de dimensões imediatamente acima e abaixo.

Baseados neste resultado podemos definir um tipo especial de complexo, o **complexo recursivo**, que satisfaz as condições do teorema 2.2, mesmo se seu poliedro não for uma variedade.

Todo complexo de dimensão 1 é dito **recursivo** se cada vértice  $v$  é incidente a exatamente duas arestas. Um complexo de dimensão  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{X}$ , será chamado de **complexo recursivo** se existir um complexo recursivo de dimensão  $n-1$ ,  $\mathcal{K}$ , com uma relação bijetora entre suas componentes conexas e as  $n$ -faces de  $\mathcal{X}$ , e uma rotulação conforme  $\psi$  que identifica as  $(n-1)$ -faces de  $\mathcal{K}$  duas a duas, e ao identificarmos as faces com mesmo rótulo chegamos a  $\mathcal{X}^{n-1}$  (o  $(n-1)$ -esqueleto de  $\mathcal{X}$ ). Chamaremos  $\mathcal{K}$  de **desagregação** de  $\mathcal{X}$  e a rotulação  $\psi$  de **agregação**. Veja a figura 2.6 para alguns exemplos.

Observe que no caso de complexos celulares, a relação mencionada na definição de rotulação conforme deve ser um isomorfismo.

Pelo teorema 2.2 uma variedade combinatória é um complexo recursivo.

### 2.2.2 Complexo Dual

O **complexo dual**  $\bar{\mathcal{K}}$  de um complexo abstrato  $\mathcal{K}$  de dimensão  $n$  é um complexo de dimensão  $n$  definido da seguinte forma:

**D1:** existe  $\Phi : \mathcal{K} \mapsto \bar{\mathcal{K}}$  bijetora, tal que se  $\sigma_k \in \mathcal{K}$  for uma  $k$ -face, então  $\Phi(\sigma_k)$  é uma  $(n-k)$ -face de  $\bar{\mathcal{K}}$ .

**D2:** se  $\sigma_i, \sigma_j \in \mathcal{K}$  e  $\sigma_i < \sigma_j$ , então  $\Phi(\sigma_i) > \Phi(\sigma_j)$ .

O complexo dual é um complexo abstrato, pois não definimos quais são as faces de  $\bar{\mathcal{K}}$ . Se existir uma relação entre as faces de dois complexos celulares que sejam realizações geométricas de  $\mathcal{K}$  e  $\bar{\mathcal{K}}$ , então estes complexos serão duais. Obviamente, para que  $\bar{\mathcal{K}}$  seja um complexo abstrato,  $\mathcal{K}$  deve ter um máximo,  $\omega$ , que estará relacionado com o mínimo de  $\bar{\mathcal{K}}$  por  $\Phi$ .

Apesar de não termos um único complexo dual, todos eles são isomorfos, diferindo apenas no conjunto de faces usado. Portanto vamos considerá-lo único, bastando para isso usar o mesmo conjunto do complexo original e usar a identidade como  $\Phi$ , invertendo apenas a relação de ordem.

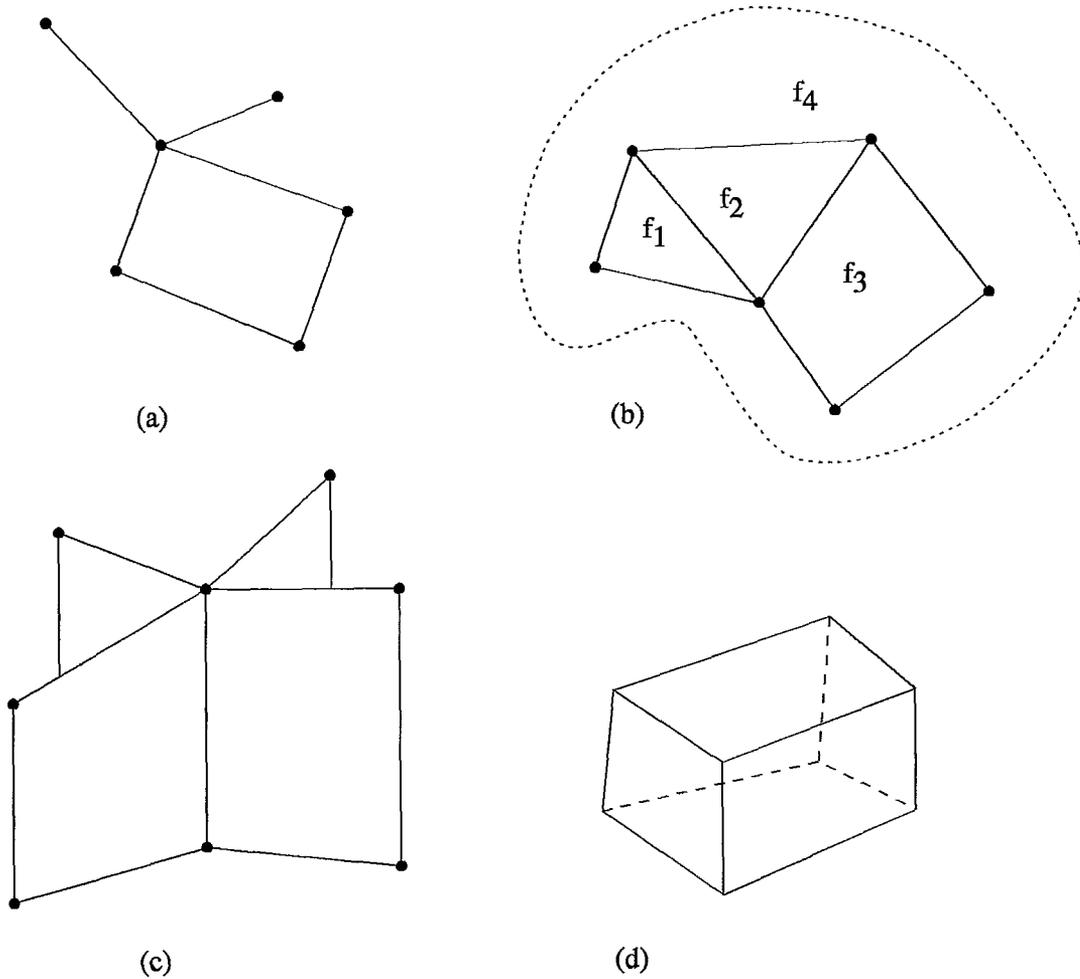


Figura 2.6: Complexos recursivos: (a) 1-complexo não-recursivo; (b) 2-complexo recursivo; (c) 2-complexo não-recursivo; (d) 2-complexo recursivo

O significado do complexo dual é uma troca de dimensões, ou seja, as células de dimensão  $n$  passam a ser vértices, e vice-versa. Uma possível imersão deste complexo seria colocar um vértice no interior de cada  $n$ -célula, e através de cada  $(n - 1)$ -célula que divide duas  $n$ -células, colocar uma aresta ligando os dois vértices correspondentes, e assim sucessivamente, até completar o complexo (ver figura 2.7).

É necessário alertar para o fato de que para alguns complexos, o seu complexo dual não possui uma realização geométrica, por não ter as faces com topologia de esferas.

Podemos enunciar alguns lemas usando o conceito de complexo dual. Primeiramente, o principal lema sobre dualidade:

**Lema 2.3** *O dual do dual de um complexo abstrato  $\mathcal{K}$ , se existir, é o próprio complexo  $\mathcal{K}$ , ou seja,  $\overline{\overline{\mathcal{K}}} \equiv \mathcal{K}$*

**Prova:** *Seja  $\Phi$  a função que relaciona as faces de  $\mathcal{K}$  com as faces de  $\overline{\mathcal{K}}$ . Como  $\Phi$  é bijetora, tem inversa, e a inversa tem o mesmo comportamento que  $\Phi$  em relação às propriedades **D1** e **D2**. Logo o dual de  $\overline{\mathcal{K}}$  é  $\mathcal{K}$ .  $\square$*

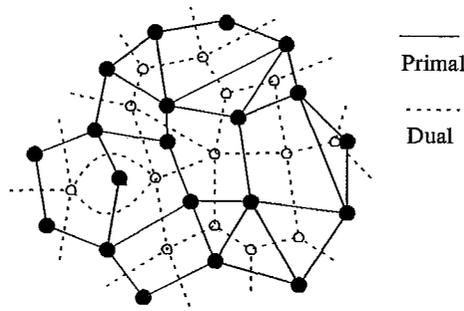


Figura 2.7: Dual de um complexo

Podemos obviamente definir dualidade em complexos celulares, mas para isso precisamos de uma dualidade geométrica entre faces. Existem várias formas de se fazer isso, por exemplo com subdivisão baricêntrica em um complexo simplicial. Vamos supor que existe uma dualidade geométrica no espaço topológico onde os nossos complexos celulares estão imersos. Assim, a operação de dualidade é bem definida e o complexo dual é único (quando existir).

Como vimos, as estrelas de uma  $n$ -variedade combinatória precisam ser homeomorfas a bolas, e o próximo lema relaciona a definição de  $n$ -variedade combinatória com o conceito de dualidade (em complexos celulares), usando o fato de estrelas serem homeomorfas às  $n$ -células do dual.

**Teorema 2.4 (Variedade Combinatória)** *Um complexo  $\mathcal{K}$  é uma  $n$ -variedade combinatória se  $|\mathcal{K}|$  for uma  $n$ -variedade e existir uma realização geométrica  $\mathcal{K}'$  do dual  $\overline{\mathcal{K}}$ . Além disso,  $\mathcal{K}'$  também será uma  $n$ -variedade combinatória.*

**Prova:** *Se existe uma realização geométrica  $\mathcal{K}'$  do complexo abstrato  $\overline{\mathcal{K}}$ , então suas faces são células. Como as estrelas de  $\mathcal{K}$  são homeomorfas às faces de  $\mathcal{K}'$ , então as estrelas de  $\mathcal{K}$  são homeomorfas a células (bolas), logo  $\mathcal{K}$  é uma variedade combinatória. Como o dual de  $\mathcal{K}'$  tem  $\mathcal{K}$  como realização geométrica (pelo lema 2.3), então  $\mathcal{K}'$  também é uma variedade combinatória.  $\square$*

### 2.2.3 Complexo CW

Os *Complexos CW* são coleções de células *abertas* com propriedades semelhantes as dos complexos apresentados anteriormente. Uma célula aberta é um conjunto homeomorfo à uma bola aberta.

Um **Complexo CW**  $\mathcal{X}$  [Mun84, pag. 214] é um conjunto de células abertas disjuntas de um espaço topológico tais que

**X1:**  $|\mathcal{X}|$  é um espaço de Hausdorff,

**X2:** Para cada  $k$ -célula  $\sigma \in \mathcal{X}$ , existe uma função contínua  $f_\sigma : \overline{B}_1^k(0) \rightarrow |\mathcal{X}|$ , que leva  $B_1^k(0)$  homeomorficamente em  $\sigma$  e  $\partial B_1^k(0)$  em uma coleção finita de células abertas de  $\mathcal{X}$ , todas com dimensão menor que  $k$ ,

**X3:** Um conjunto  $Y$  é fechado em  $|\mathcal{X}|$  se  $Y \cap \bar{\sigma}$  for fechado em  $\bar{\sigma}$  para cada  $\sigma \in \mathcal{X}$ .

Em um complexo CW, as faces podem ter fechos não homeomorfos a simplexos, permitindo que apareçam coisas como arestas que começam e acabam no mesmo vértice, facetas (2-faces) com auto-intersecção nas fronteiras combinatórias (veja figura 2.8), etc.

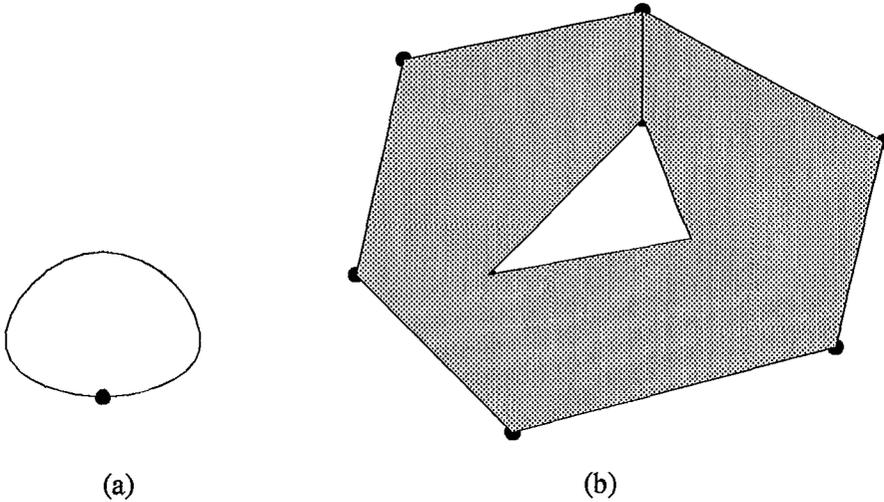


Figura 2.8: Células abertas de um complexo CW. (a) aresta circular, (b) faceta com auto-intersecção na fronteira combinatória.

Podemos repetir quase todas as definições sobre complexos celulares para os complexos CW. A definição de um **complexo CW recursivo** difere da definição de um complexo recursivo por permitir que uma aresta tenha um único vértice como fronteira, além de não impor que as relações da rotulação de agregação sejam isomorfismos.

A estrutura combinatória das fronteiras das faces de um complexo CW, isto é, o complexo abstrato subjacente, não é completa, faltando uma definição de ordem em alguns casos. Por exemplo, uma faceta como na figura 2.9 possui como fronteira combinatória um conjunto de arestas e vértices que não satisfazem o teorema 2.2. O conjunto das superfícies do vértice  $v$ ,  $\mathcal{S}^p(v)$ , contém 4 arestas, e todas estão no conjunto das subfaces da faceta  $f$ ,  $\mathcal{S}_i(f)$ . Além disso, não temos nenhuma indicação sobre qual a ordem das arestas  $a$  e  $b$  no interior da faceta  $f$ .

Para uma correta representação deste complexo, precisamos impor uma ordem nos casos em que esta estiver faltando. Esta ordem pode ser colocada utilizando-se uma subdivisão do complexo CW em um complexo celular (ou simplicial). No caso de complexos recursivos, o seguinte teorema diz que sempre podemos fazer tal subdivisão.

**Teorema 2.5** *Todo complexo CW recursivo possui uma subdivisão que é um complexo celular.*

**Prova:** *Vamos provar por indução.*

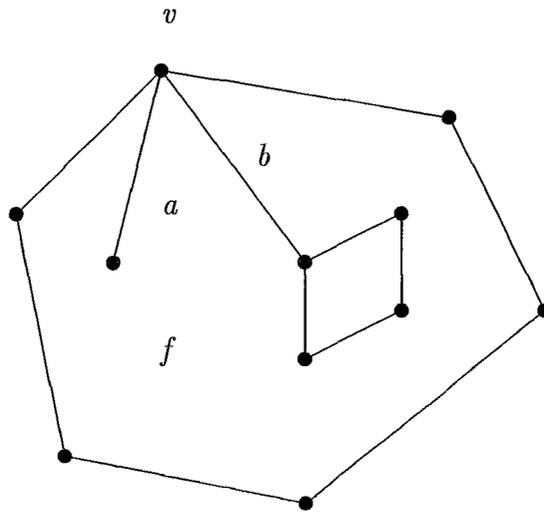


Figura 2.9: 2-face com arestas soltas no interior

Para dimensão 1, o complexo seria formado por ciclos. Se todos os vértices são incidentes a duas arestas, então todas as arestas são incidentes a dois vértices, e o complexo é celular (simplicial). Se alguma aresta é incidente a um único vértice, basta subdividi-la em duas, criando um vértice novo.

Vamos supor que até a dimensão  $n - 1$  os complexos CW recursivos possuem uma subdivisão celular.

Se um complexo CW de dimensão  $n$ ,  $\mathcal{X}$ , for um complexo recursivo, então sua desagregação é um complexo recursivo  $\mathcal{X}'$ , de dimensão  $n - 1$ , onde vale a hipótese da indução. Seja  $\mathcal{K}$  a subdivisão celular de  $\mathcal{X}'$ . Para cada componente conexa,  $C_i$ , de  $\mathcal{K}$ , (observe que como  $\mathcal{X}$  é um complexo, as componentes conexas de  $\mathcal{X}'$ , e consequentemente de  $\mathcal{K}$ , são fronteiras de células) seja o vértice  $v_i$  um ponto no interior da  $n$ -face de  $\mathcal{X}$  associada a componente conexa  $C_i$ . Construa o complexo  $\mathcal{K}'$  formado de todas as componentes da forma  $v_i * C_i$ . Faça uma rotulação onde as faces que eram de  $\mathcal{X}'$ , ou são subdivisões delas, recebam rótulos compatíveis (que respeitem as colagens feitas para chegarmos a  $\mathcal{X}^{n-1}$ ), e as demais recebam rótulos únicos. Ao fazer a colagem, teremos uma subdivisão de  $\mathcal{X}$ , e como todos os pares de  $(n - 1)$ -faces identificadas serão formados de faces de  $n$ -faces distintas, a subdivisão será celular.  $\square$

## 2.2.4 Orientabilidade

Precisamos definir orientabilidade de complexos, que é um conceito extremamente importante. Como só faz sentido definir orientabilidade em complexos recursivos, considere todos os complexos desta seção como recursivos.

Uma aresta pode ser orientada de duas formas, de acordo com o sentido que é percorrida. Em um complexo celular basta ordenar os vértices extremos da cada aresta, mas em um complexo CW podem aparecer arestas com um único vértice, e

a ordem dos vértices não basta. De qualquer forma, sempre podemos orientar uma aresta.

Um 1-complexo está **orientado** se todas as arestas estão orientadas, e em todos os seus ciclos elas são percorridas no mesmo sentido da orientação. Sempre podemos orientar um 1-complexo, e cada uma de suas componentes conexas pode ter duas orientações.

Um complexo de dimensão  $n$  está **orientado** se sua desagregação está orientada (veja definição de complexo recursivo) e a rotulação de agregação identifica  $(n - 1)$ -faces com orientações contrárias.

Um complexo será **orientável** se conseguirmos atribuir-lhe uma orientação. Veja que um complexo conexo orientável pode ser orientado de duas formas.

Um complexo recursivo de dimensão 2 orientado é uma coleção de facetas coladas por arestas, onde cada aresta é identificada com uma outra com orientação inversa.

Em um 3-complexo orientado, cada colagem identifica duas facetas, as quais, como complexos, devem possuir orientações contrárias.

Obviamente esta idéia se repete recursivamente em dimensões maiores, e toda a orientação está baseada no percurso das arestas dentro das faces.

### 2.2.5 O Grafo de Incidência

Os **Grafos de Incidência** [Ede87] (segundo [Bri89], foi introduzido por Sallee em [Sal66] e apareceu em um texto clássico de Grünbaum, [Grü67]) representam complexos  $n$ -dimensionais, ou mais precisamente, complexos abstratos. Os nós do grafo são as faces do complexo (incluindo as duas faces fictícias  $\omega$  e  $\varepsilon$ ). As arestas deste grafo são as relações de incidência entre as faces (nós do grafo) cujas dimensões diferem de uma unidade, ou seja, representam as relações de subface e superface.

Definimos o grafo de incidência  $\mathcal{G}_X$  do complexo  $\mathcal{X}$  por:

$$\mathcal{G}_X = (V_{\mathcal{G}_X}, A_{\mathcal{G}_X})$$

onde  $V_{\mathcal{G}_X}$  é o conjunto dos nós de  $\mathcal{G}_X$  e  $A_{\mathcal{G}_X}$ , o conjunto das arestas de  $\mathcal{G}_X$ , e

$$V_{\mathcal{G}_X} = \mathcal{X},$$

$$A_{\mathcal{G}_X} = \{(p, q) | p \prec q\}.$$

Observe que este é um digrafo, onde as arestas estão orientadas de acordo com a relação  $\prec$ , e podemos rotular o nó fonte (sem arestas chegando) de  $\varepsilon$  e o nó sumidouro (sem arestas saindo) de  $\omega$ . Na verdade estes nós são exatamente as faces fictícias de mesmo nome.

Note também que o grafo de incidência (ver figura 2.10) é uma representação de um complexo abstrato, onde as células são os nós e a dimensão de cada célula  $v$

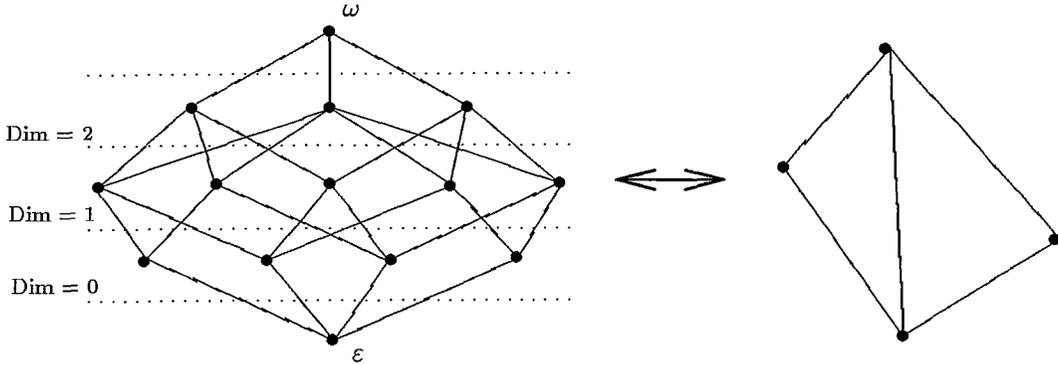


Figura 2.10: Grafo de incidência

$(Dim(v))$  é dada pela distância do nó correspondente ao nó  $\varepsilon$  (fonte) menos um, ou seja,

$$Dim(v) = (\text{distância de } \varepsilon \text{ a } v) - 1.$$

A relação  $<$  do complexo  $\mathcal{X}$  está representada no grafo  $\mathcal{G}_X$  por:

$a < b$  se existe uma seqüência  $a = c_1, c_2, \dots, c_z = b$ , com

$$(c_i, c_{i+1}) \in A_{\mathcal{G}_X}, 1 \leq i < z.$$

Do mesmo modo como definimos o dual para os complexos, podemos definir o dual para os grafos de incidência. Faremos isso de forma a manter o mesmo significado do dual, ou seja, que o dual do grafo de incidência  $\mathcal{G}_X$  do complexo  $\mathcal{X}$ ,  $\overline{\mathcal{G}_X}$ , seja o grafo de incidência  $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{X}}}$  do complexo  $\overline{\mathcal{X}}$ .

O **grafo de incidência dual**  $\overline{\mathcal{G}_X}$  do grafo de incidência  $\mathcal{G}_X$ , é construído trocando o sentido das arestas, de modo que

$$A_{\overline{\mathcal{G}_X}} = \{(q, p) | (p, q) \in A_{\mathcal{G}_X}\}$$

É como se colocássemos o grafo de cabeça para baixo, trocando de lugar os nós, e conseqüentemente as dimensões das células correspondentes. Evidentemente que só podemos fazer isso se o complexo abstrato que está sendo representado possui máximo, que no grafo de incidência fica representado pelo sumidouro  $\omega$ .

Comparando com a definição de complexo dual na seção 2.2.2 podemos perceber que  $\overline{\mathcal{G}_X} = \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{X}}}$ , ou seja, o dual do grafo de incidência de um complexo  $\mathcal{X}$  é igual ao grafo de incidência do dual do complexo  $\mathcal{X}$ .

# Capítulo 3

## Álgebra de Incidência

Aqui definiremos o conceito de álgebra de incidência, que relacionaremos com as variedades combinatórias. Usaremos alguns dos resultados anteriores para verificar que as variedades combinatórias são representáveis por estas álgebras e para apresentar as características que uma álgebra de incidência precisa ter para que represente uma variedade combinatória.

Na seção 3.1 serão feitas as definições referentes a álgebra de incidência, e na seção 3.2 faremos alguns comentários sobre as propriedades das funções da álgebra de incidência. Em seguida, na seção 3.3, buscaremos as características de um complexo e de uma álgebra de incidência, para que possam ser associados. Na seção 3.4, veremos as condições para que uma álgebra de incidência seja associada a uma variedade combinatória. Ao final, seção 3.5, discutiremos as álgebras padrão.

### 3.1 As Definições

Chamaremos de **casamento** sobre um conjunto  $A$ , uma função  $f : A \rightarrow A$  que seja uma involução sem ponto fixo, ou seja, para  $a \in A$ ,  $f(f(a)) = a$  e  $f(a) \neq a$ . Casamentos possuem inversa.

Usaremos a notação posfixa para composições de funções, ou seja,  $a f$  significa  $f(a)$  e  $a f g$  significa  $g(f(a))$ .

Denominaremos de **Álgebra de Incidência de ordem  $n$**  uma dupla  $\mathcal{A}^n = (E, \Phi)$ , onde  $E$  é um conjunto finito e  $\Phi$ , uma família de  $n$  funções de  $E$  em  $E$ , com  $n \in \mathbb{N}^+$

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

$$\varphi_k : E \rightarrow E$$

com as propriedades

**P1:**  $\varphi_i \varphi_{i+1} \cdots \varphi_{i+j}$  é casamento,  $j > 0, 1 \leq i \leq n - j$ ;

**P2:** se  $n = 1$  então  $\varphi_1$  é bijetora.

O lema a seguir apresenta mais uma propriedade das funções de uma álgebra de incidência. Este resultado será usado mais adiante.

**Lema 3.1** *Se  $\Phi$  é uma família de  $n > 1$  funções sobre um conjunto finito  $E$  com a propriedade **P1**, então  $\varphi_k$  é bijetora, para  $1 \leq k \leq n$ .*

**Prova:** *Sejam  $e, f \in E$ . Suponhamos que  $e \varphi_k = f \varphi_k$ , para  $1 \leq k \leq n - 1$ . Concluiremos que  $e = f$ . Compondo com  $\varphi_{k+1}$  temos*

$$e \varphi_k \varphi_{k+1} = f \varphi_k \varphi_{k+1}$$

*e, como  $\varphi_k \varphi_{k+1}$  é casamento, também temos*

$$e \varphi_k \varphi_{k+1} \varphi_k \varphi_{k+1} = e = f = f \varphi_k \varphi_{k+1} \varphi_k \varphi_{k+1}.$$

*Logo  $\varphi_k$  é injetora, para  $1 \leq k \leq n - 1$ , e como  $E$  é finito,  $\varphi_k$  também é sobrejetora, e portanto bijetora.*

*Para  $\varphi_n$ , sejam  $g = e \varphi_{n-1}$  e  $h = f \varphi_{n-1}$ . Obviamente  $g, h \in E$ . Suponhamos que  $g \varphi_n = h \varphi_n$ . Compondo com  $\varphi_{n-1}$  temos*

$$e \varphi_{n-1} \varphi_n = f \varphi_{n-1} \varphi_n$$

*e, pelo mesmo motivo que acima,  $e = f$ . Logo  $g = h$ . Assim,  $\varphi_n$  também é bijetora.  $\square$*

Podemos observar também que cada uma das funções  $\varphi_k$  forma ciclos com os elementos de  $E$ , já que são permutações.

Uma álgebra de incidência também pode ser dualizada, e veremos agora como isto é feito. O **dual de uma álgebra de incidência de ordem  $n$** ,  $\mathcal{A}^n = (E, \Phi)$ , é definido como  $\overline{\mathcal{A}^n} = (E, \overline{\Phi})$ , onde

$$\overline{\Phi} = \{\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \dots, \overline{\varphi_n}\}$$

e

$$\overline{\varphi_k} = \varphi_{n-k+1}^{-1}.$$

O seguinte teorema garante que a dualidade mantém as propriedades de uma álgebra de incidência.

**Teorema 3.2** *O dual de uma álgebra de incidência de ordem  $n$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .*

**Prova:** *Se  $n = 1$ ,  $\overline{\mathcal{A}^1} = (E, \varphi_1^{-1})$  e  $\varphi_1^{-1}$  será bijetora se e só se  $\varphi_1$  for bijetora. Se  $n > 1$ ,  $\overline{\varphi_i \varphi_{i+1} \dots \varphi_{i+j}}$ , com  $j > 0$  e  $1 \leq i \leq n - j$ , deve ser casamento. De fato,*

$$\overline{\varphi_i \varphi_{i+1} \dots \varphi_{i+j}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \varphi_{n-i+1}^{-1} \varphi_{n-i}^{-1} \cdots \varphi_{n-i-j+1}^{-1} = \\
 &= (\varphi_{n-i-j+1} \cdots \varphi_{n-i} \varphi_{n-i+1})^{-1},
 \end{aligned}$$

e se  $l = n - i - j + 1$ , isso fica

$$(\varphi_l \cdots \varphi_{l+j-1} \varphi_{l+j})^{-1}.$$

Como  $\varphi_l \cdots \varphi_{l+j-1} \varphi_{l+j}$  é casamento, então  $(\varphi_l \cdots \varphi_{l+j-1} \varphi_{l+j})^{-1}$  também é um casamento.  $\square$

Para facilitar enunciados e provas, usaremos que a seguinte notação:

$$C_{i,j} = \varphi_i \varphi_{i+1} \cdots \varphi_j,$$

onde  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .

Veremos agora que as álgebras de incidência são estruturas recursivas, ou seja, uma álgebra de incidência de ordem  $n$  pode ser decomposta em duas álgebras de incidência de ordem  $n - 1$ .

**Lema 3.3** *Se  $\mathcal{A}^n = (E, \Phi)$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n$ ,  $n \geq 2$ , onde  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\}$ , então  $\mathcal{A}_1 = (E, \Phi_1)$  e  $\mathcal{A}_2 = (E, \Phi_2)$  são álgebras de incidência de ordem  $n - 1$ , onde  $\Phi_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\}$  e  $\Phi_2 = \{\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\}$ .*

**Prova:** *Pela definição e pelo lema 3.1 é imediato.*  $\square$

Este lema é muito importante, pois mostra a estrutura recursiva de uma álgebra de incidência. Ele sugere que a partir de uma álgebra de incidência de ordem  $n - 1$  e um casamento, define-se uma álgebra de incidência de ordem  $n$ , como vemos no teorema a seguir.

**Teorema 3.4**  *$\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n\})$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n \geq 2$  se, e só se,  $\mathcal{A}^{n-1} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\})$  for uma álgebra de incidência de ordem  $n - 1$ , e existir um casamento  $s_n$  tal que  $C_{1,i}^{-1} s_n$  é casamento, para  $i$  variando de 1 a  $n - 2$ , com  $\varphi_n = C_{1,n-1}^{-1} s_n$ .*

**Prova:**

( $\Rightarrow$ )

Basta aplicar o lema 3.3 e fazer  $s_n = C_{1,n}$ .

( $\Leftarrow$ )

Para que  $\mathcal{A}^n$  seja uma álgebra de incidência de ordem  $n$ , basta que as composições da propriedade **P1** que incluem  $\varphi_n$  sejam casamentos, ou seja,  $C_{j,n}$ , com  $1 \leq j \leq n - 1$ .

Como  $\varphi_n = C_{1,n-1}^{-1} s_n$ , as composições  $C_{j,n}$  igualam-se a

$$C_{j,n-1} C_{1,n-1}^{-1} s_n.$$

Quando  $j = 1$ , podemos perceber que  $C_{1,n} = s_n$ , e portanto é um casamento. As demais composições são exatamente as referidas no enunciado do teorema como sendo casamento, pois se  $j > 1$  e fazendo  $i = j - 1$

$$\begin{aligned} C_{j,n-1} C_{1,n-1}^{-1} s_n &= \\ &= C_{i+1,n-1} \varphi_{n-1}^{-1} \cdots \varphi_2^{-1} \varphi_1^{-1} s_n = \\ &= \varphi_i^{-1} \cdots \varphi_2^{-1} \varphi_1^{-1} s_n = \\ &= C_{1,i}^{-1} s_n. \end{aligned}$$

□

Podemos agora fazer uma nova definição de álgebra de incidência, baseada na estrutura recursiva das mesmas. Esta nova definição seria assim:

Uma dupla  $\mathcal{A}^n = (E, \Phi)$ , onde  $E$  é um conjunto finito e  $\Phi$ , uma família de  $n$  funções de  $E$  em  $E$ , com  $n \in \mathbb{N}^+$

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

$$\varphi_k : E \rightarrow E$$

é uma álgebra de incidência de ordem  $n$  se:

$$n = 1 \text{ e } \varphi_1 \text{ for uma bijeção;}$$

ou

$$n \geq 2 \text{ e tiver as propriedades}$$

**R1:**  $\mathcal{A}^{n-1} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\})$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n - 1$ ;

**R2:**  $C_{i,n}$  é casamento, para  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Esta nova definição será útil na discussão sobre complexos e álgebra de incidência, principalmente na construção de álgebra de incidência de ordem superior.

## 3.2 Álgebra e Casamentos

As funções de uma álgebra de incidência têm diversas propriedades, principalmente as relacionadas com casamentos. Veremos algumas delas, que usaremos como resultados, ou que são mera curiosidade.

A primeira propriedade está relacionada com a inversa, e é apresentada no teorema abaixo.

**Teorema 3.5** *Com  $1 \leq i \leq j < d \leq n$ , temos*

$$C_{i,j} C_{j+1,d} C_{i,j} = C_{j+1,d}^{-1},$$

$$C_{j+1,d} C_{i,j} C_{j+1,d} = C_{i,j}^{-1}.$$

**Prova:** *Como todas as funções são bijetoras, para sabermos se uma função é a inversa de outra, basta fazer a composição das duas, em qualquer ordem, e testar se o resultado é a função identidade. Portanto basta verificar que se  $C_{i,j} C_{j+1,d} C_{i,j} C_{j+1,d} = I$ , onde  $I$  é a função identidade. De fato, como  $C_{i,j} C_{j+1,d}$  ( $i < d$ ) é casamento, a igualdade acima se verifica.  $\square$*

Um corolário imediato deste teorema nos diz que  $\varphi_k$  se relaciona quase como uma comutação com os casamentos que terminam em  $\varphi_k$  ou que começam em  $\varphi_{k+1}$ . Isto será de grande importância no capítulo 5.

### Corolário 3.6

$$\varphi_k C_{j,k} = C_{j,k} \varphi_k^{-1}, \text{ para } 1 \leq j < k - 1 < n,$$

$$\varphi_k C_{k+1,d} = C_{k+1,d} \varphi_k^{-1}, \text{ para } 1 \leq k < k + 1 < d \leq n.$$

**Prova:** *A composição  $\varphi_k C_{j,k}$  pode ser vista como  $C_{k,k} C_{j,k-1} C_{k,k}$ , que pelo teorema 3.5 é igual a  $C_{j,k-1}^{-1} = C_{j,k-1}$ , que composta com  $\varphi_k \varphi_k^{-1}$  resulta em  $C_{j,k} \varphi_k^{-1}$ . Por sua vez, a composição  $\varphi_k C_{k+1,d} = C_{k,d}$  é um casamento, e por isso é igual a sua inversa  $C_{k,d}^{-1} = \varphi_d^{-1} \cdots \varphi_{k+1}^{-1} \varphi_k^{-1}$ . Mas  $\varphi_d^{-1} \cdots \varphi_{k+1}^{-1} = C_{k+1,d}^{-1} = C_{k+1,d}$ .  $\square$*

Um outro teorema interessante estabelece quando casamentos comutam.

**Teorema 3.7** *Casamentos consecutivos comutam, ou seja,*

$$C_{i,j} C_{j+1,d} = C_{j+1,d} C_{i,j}$$

*para  $1 \leq i < j < j + 1 < d \leq n$ .*

**Prova:**

$$C_{i,j} C_{j+1,d} = C_{i,d} = C_{i,d}^{-1} = C_{j+1,d}^{-1} C_{i,j}^{-1} = C_{j+1,d} C_{i,j}$$

□

O último resultado desta seção se refere a comutações entre as funções  $\varphi_k$ .

**Lema 3.8** *Para  $i < j - 2$   $\varphi_i \varphi_j = \varphi_j \varphi_i$ .*

**Prova:** *Compondo duas vezes com o casamento  $C_{i+1,j}$ , a composição  $\varphi_i \varphi_j$  não se altera e*

$$\varphi_i \varphi_j = \varphi_i \varphi_j C_{i+1,j} C_{i+1,j}$$

*que pelo corolário 3.6 é igual a*

$$\varphi_i C_{i+1,j} \varphi_j^{-1} C_{i+1,j} = C_{i,j} \varphi_j^{-1} C_{i+1,j}$$

*e usando mais uma vez o corolário ficamos com*

$$\varphi_j C_{i,j} C_{i+1,j} = \varphi_j \varphi_i.$$

□

### 3.3 Complexos e Álgebras de Incidência

Será possível associar uma álgebra de incidência à um complexo CW?

Vamos descobrir que condições um complexo precisa satisfazer para que possa ser representado por uma álgebra de incidência. Estudaremos os casos de dimensão 1 a 3, tentando encontrar uma álgebra de incidência que represente um complexo, e passaremos para o caso genérico, apresentando as características necessárias. Depois veremos quais as condições para uma álgebra de incidência representar um complexo. Faremos isso desmontando uma álgebra de incidência de ordem  $n$  e analisando cada etapa. Faremos tudo isso com complexos celulares e, onde possível, mencionaremos os complexos CW.

A associação que iremos usar está ligada ao grafo de incidência (seção 2.2.5), como veremos a seguir.

Seja  $\mathcal{X}$  um complexo de dimensão  $n$ , e  $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$  o seu grafo de incidência. Definamos o conjunto  $E$  (da álgebra de incidência) como sendo um conjunto de seqüências do tipo  $(\varepsilon, a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \omega)$ , onde

$$\varepsilon \prec a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_n \prec \omega$$

no grafo de incidência  $\mathcal{G}_X$ . Estas seqüências são os caminhos do mínimo ( $\varepsilon$ ) até o máximo ( $\omega$ ) do grafo de incidência  $\mathcal{G}_X$ .

Definamos agora as funções da álgebra de incidência. Cada  $\varphi_k$  produzirá uma modificação pequena nas seqüências de  $E$ . Se  $e = (\varepsilon, a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \omega)$  então

$$e \varphi_k = e' = (\varepsilon, a_0, \dots, a_{k-2}, a'_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \dots, a_n, \omega).$$

Observe que a definição de  $a'_{k-1}$  e  $a'_k$  nem sempre é única. Se o complexo é CW, o teorema 2.2 não vale, e temos que escolher  $a'_{k-1}$  e  $a'_k$  de forma que  $\varphi_k$  defina um ciclo. Mas se o complexo é celular,  $a_{k-1}$  é definida primeiro, usando o teorema 2.2, e em seguida a operação é repetida para definir  $a_k$ .

Diremos que o complexo de dimensão  $n$   $\mathcal{X}$  está associado a álgebra de incidência de ordem  $n$   $\mathcal{A}^n$  se existir uma função  $\Psi : E \rightarrow \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto de todos os caminhos de  $\varepsilon$  até  $\omega$  no grafo de incidência  $\mathcal{G}_X$ , e as funções  $\varphi_k$  satisfaçam:

$$e \varphi_k = e' = (\varepsilon, a_0, \dots, a_{k-2}, a'_{k-1}, a'_k, a_{k+1}, \dots, a_n, \omega),$$

onde  $e = (\varepsilon, a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \omega)$ .

Dada uma álgebra de incidência  $\mathcal{A} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , e um elemento desta,  $e \in E$ , a componente conexa da álgebra que é incidente a  $e$  (que também é uma álgebra de incidência) é representada por  $\mathcal{A}[e]$ , e  $|\mathcal{A}|$  representa o conjunto de elementos  $E$ . É interessante observar que as componentes conexas de uma álgebra de incidência associada a um complexo são associadas as componentes conexas do complexo.

### 3.3.1 1-complexos

Em dimensão 1, um complexo é uma coleção de vértices e arestas (figura 3.1 (a)) e uma álgebra de incidência de ordem 1 é uma coleção de ciclos. Se o nosso complexo é tal que em cada vértice chegam exatamente duas arestas, ou uma única aresta chega duas vezes (figura 3.1 (b)), então temos apenas ciclos de arestas.

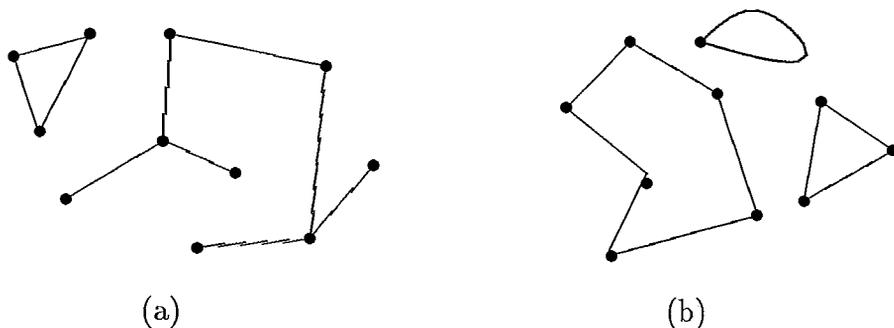


Figura 3.1: Complexos de dimensão 1: (a) genérico; (b) com ciclos.

Nestes ciclos, podemos estabelecer uma orientação, e portanto uma relação de próximo. Seja  $E$  o conjunto de pares formados por um vértice e uma de suas arestas,

sendo que cada aresta aparece exatamente uma vez. Seja  $\varphi_1 : E \rightarrow E$  definida como a relação próximo definida acima (figura 3.2).

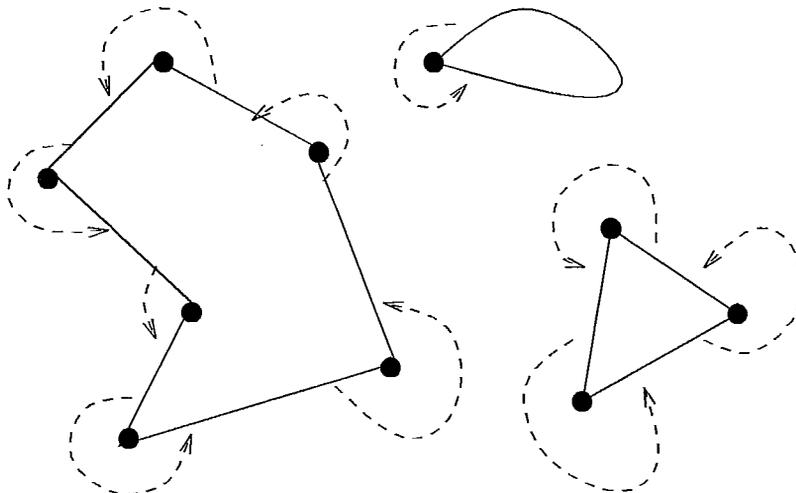


Figura 3.2: Função  $\varphi_1$

Observe que cada ciclo pode ser orientado de duas formas. A função  $\varphi_1$  representa apenas uma delas, visto que não temos (na álgebra) nenhuma forma de associar estas duas orientações.

Se o complexo é formado somente por ciclos, a função  $\varphi_1$  é bijetora, e portanto o par  $(E, \{\varphi_1\})$  é uma álgebra de incidência de ordem 1. Caso contrário, não podemos nem definir a relação de próximo de forma conveniente. O lema 3.9 resume estas idéias.

**Lema 3.9** *Um complexo de dimensão 1,  $\mathcal{X}$ , está associado a uma álgebra de incidência de ordem 1 se e somente se for recursivo.*

**Prova:** *Um complexo recursivo de dimensão 1 é formado somente por ciclos, e portanto podemos construir uma álgebra de incidência de ordem 1 como acima.*  $\square$

### 3.3.2 2-complexos

Observe que em dimensão 2, pelo teorema 3.4, qualquer casamento  $s$  pode ser usado para definir uma nova álgebra de incidência de ordem 2 a partir de uma álgebra de incidência de ordem 1. A escolha do casamento  $s_2$  determinará o resultado final.

Seja  $C$  um complexo recursivo de dimensão 1 e  $\mathcal{A}^1 = (E, \{\varphi_1\})$  a sua respectiva álgebra de incidência de ordem 1. Associaremos uma face a cada ciclo de arestas, impondo a estas a mesma orientação do ciclo. Identificaremos arestas duas a duas, como se estivéssemos montando um molde de papel, respeitando as orientações das arestas, e teremos como resultado uma superfície sem bordo e orientável.

As arestas orientadas de acordo com a definição acima podem ser representadas pelos pares formados de vértices e arestas, com o vértice sendo a origem da aresta. Assim, se identificarmos arestas com orientações trocadas, cada par de arestas identificadas terá os dois vértices (origem e destino) da aresta resultante (figura 3.3). Esta identificação define um casamento  $s_2$ .

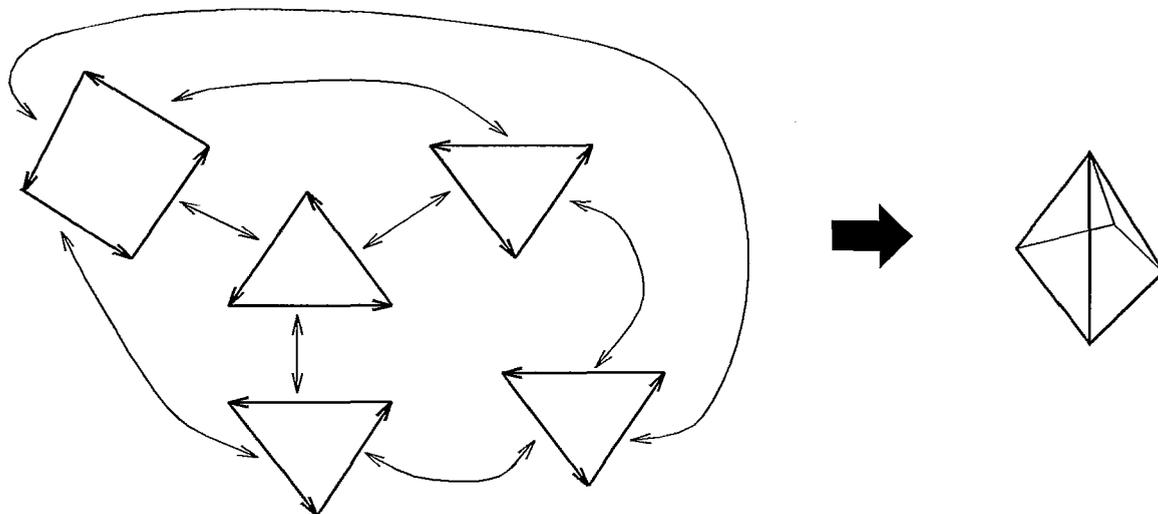


Figura 3.3: Identificação de arestas.

A função  $\varphi_2$  fica definida por  $\varphi_1^{-1} s_2$ , e tem o significado de circular as arestas que saem de um certo vértice. Neste ponto, os elementos do conjunto  $E$  podem ser relacionados também com as faces recém criadas no nosso complexo. Cada par vértice-aresta fica associado a uma face e, desta forma, os elementos do conjunto  $E$  podem ser considerados como triplas vértice-aresta-face (é preciso tomar cuidado com isso, pois nem sempre esta associação com triplas pode ser feita em complexos CW).

Cabe aqui ressaltar que cada face pode ter duas orientações e que, no caso de superfícies orientáveis, só uma destas orientações será efetivamente usada. É como se considerássemos os dois lados de uma superfície, mas como ela é sem bordo e orientável, só conseguimos “passar” por um deles. No caso de superfícies não-orientáveis, teríamos como passear pelos dois lados, mas não existe uma indicação de que lado estamos. Tudo se passa como se só existisse um. Sendo assim, o esquema de representação com a álgebra de incidência não tem como diferenciar uma superfície orientável de uma não-orientável. Se tentarmos fazer as colagens de modo a construir uma superfície não-orientável, acabaremos por construir uma superfície orientável totalmente diferente. Se representarmos em  $E$  todas as possíveis seqüências de faces incidentes, e o objeto for conexo e orientável, a álgebra de incidência terá duas componentes conexas idênticas representando as duas orientações da superfície.

### 3.3.3 3-complexos e $n$ -complexos

Podemos repetir este processo para criar uma álgebra de incidência de ordem 3 a partir de uma álgebra de incidência de ordem 2. Seja  $K$  um complexo de dimensão

2 como o formado acima, e  $\mathcal{A}^2 = (E, \{\varphi_1, \varphi_2\})$  a álgebra de incidência de ordem 2 correspondente. Vamos construir um complexo de dimensão 3 com sua respectiva álgebra de incidência de ordem 3.

Neste caso identificaremos faces duas a duas. Como as faces não estão explícitas, temos que encontrar um casamento entre os elementos de  $E$  que represente a identificação das faces.

Para garantir que vamos identificar as arestas de uma face com as correspondentes da outra face, precisamos sincronizar os ciclos. Veja na figura 3.4 que se identificarmos o par  $(a, e)$ , teremos que identificar os pares  $(b, h)$ ,  $(c, g)$  e  $(d, f)$ . Isto porque ao

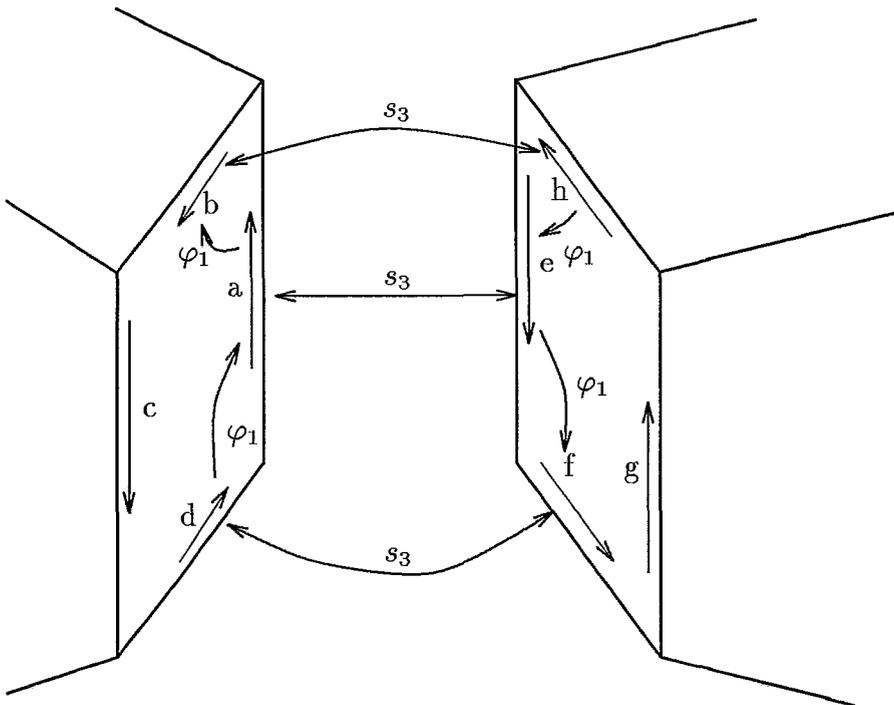


Figura 3.4: Identificação de faces

circularmos na face do elemento  $a$ , estaremos circulando no sentido contrário na face do elemento  $e$ . Portanto tiramos a seguinte relação:

$\varphi_1 s_3 \varphi_1 s_3$  é a identidade, e portanto

$$\varphi_1^{-1} s_3 = s_3 \varphi_1$$

O que significa que o casamento  $s_3$  está coerente com o ciclo que define as faces. Além disso, como o casamento  $s_3$  deve identificar faces, estas devem ser distintas, o que faz com que os elementos de  $E$  relacionados por  $s_3$  estejam em faces distintas. A função  $\varphi_1$  circula as faces, e portanto os elementos de um ciclo de  $\varphi_1$  estão todos na mesma face. Logo, para todo elemento  $e \in E$ ,  $e s_3 \varphi_1$  e o elemento  $e$  estão em faces distintas e portanto

$$e s_3 \varphi_1 \neq e, \text{ para todo } e \in E.$$

Como visto no teorema 3.4, para se definir uma álgebra de incidência de ordem 3 a partir de uma álgebra de incidência de ordem 2, devemos encontrar um casamento  $s_3$  tal que  $\varphi_1^{-1} s_3$  é casamento.

Podemos garantir esta condição, e  $\mathcal{A}^3 = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\})$  é uma álgebra de incidência de ordem 3, onde  $\varphi_3 = (\varphi_1 \varphi_2)^{-1} s_3$ . A função  $\varphi_3$  tem o significado de circular em torno de uma aresta (figura 3.5).

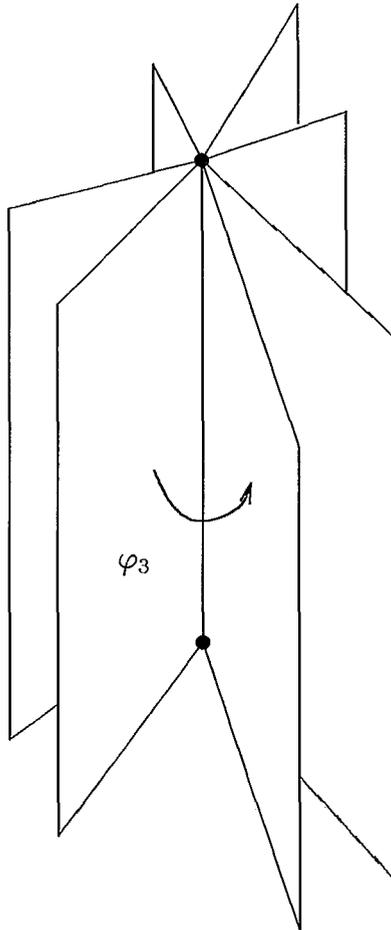


Figura 3.5: Significado de  $\varphi_3$

Assim, vemos que para um complexo de dimensão  $n$  ser associado a uma álgebra de incidência de ordem  $n$ , ele precisa ser formado por “colagens” de um complexo de dimensão  $n - 1$  que esteja associado a uma álgebra de incidência de ordem  $n - 1$ . Observe também que cada função tem o significado de circular em torno de uma face. A função  $\varphi_k$  circula em torno de uma face de dimensão  $k - 2$ , restrita a uma face de dimensão  $k + 1$  (usando  $\varepsilon$  e  $\omega$ ).

Em um complexo de dimensão 3, a função  $\varphi_1$  circula em torno de  $\varepsilon$  restrita a uma faceta, o que resulta em percorrer todos os vértices e arestas da faceta em um ciclo. A função  $\varphi_2$  circula um vértice restrita a um volume, o que também resulta em um ciclo, desta vez de arestas e faces. E a função  $\varphi_3$  circula uma aresta restrita a  $\omega$ , formando um ciclo de facetas.

Generalizando para dimensões maiores, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.10** *Todo complexo celular recursivo orientável de dimensão  $n \geq 1$  está associado a uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .*

**Prova:** *Seja  $K$  um complexo recursivo orientável de dimensão  $n \geq 1$ , então existe uma seqüência de complexos recursivos (todos orientáveis) de dimensões decrescentes até 1,  $K_{n-1}, K_{n-2}, \dots, K_1$ , que são os complexos mencionados na definição de complexo recursivo (seção 2.2.1). Vamos então provar por indução na dimensão.*

*Pelo lema 3.9 existe uma álgebra de incidência de ordem 1,  $\mathcal{A}^1$ , associada a  $K_1$ .*

*Suponha que exista uma álgebra de incidência de ordem  $d$ ,  $\mathcal{A}^d$ , associada a  $K_d$ .*

*Como  $K_{d+1}$  é formado por colagens através de uma rotulação conforme de  $K_d$ , onde cada  $d$ -face foi identificada com uma, e somente uma, outra  $d$ -face, considere  $\sigma_d$  e  $\sigma'_d$  duas  $d$ -faces identificadas. Como a rotulação é conforme, então  $\sigma_d$  e  $\sigma'_d$  devem ser isomorfas, e como os complexos são orientáveis, elas devem ter orientações inversas. Assim, um elemento de  $\mathcal{A}^d$  incidente a  $\sigma_d$  deve ser da forma  $e = (\varepsilon, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d, \omega)$ . O elemento correspondente incidente a  $\sigma'_d$  seria  $e' = (\varepsilon, \sigma'_0, \sigma'_1, \dots, \sigma'_d, \omega)$ , de forma que a rotulação identifique  $\sigma_i$  com  $\sigma'_i$ , para  $1 \leq i \leq d$ . Como após a colagem, as faces serão identificadas e apareceriam as  $(d+1)$ -faces, os elementos seriam assim  $e = (\varepsilon, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d, \sigma_{d+1}, \omega)$  e  $e' = (\varepsilon, \sigma'_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d, \sigma'_{d+1}, \omega)$ . Definiremos assim o casamento  $s_{d+1}$  e veremos que  $s_{d+1}$  satisfaz as propriedades do teorema 3.4.*

*Seja  $e = (\varepsilon, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d, \sigma_{d+1}, \omega)$ , então (faremos as aplicações das funções  $\varphi_i$  como definidas no início desta seção - 3.3)*

$$e \varphi_1^{-1} = (\varepsilon, \sigma''_0, \sigma''_1, \dots, \sigma_d, \sigma_{d+1}, \omega),$$

$$e \varphi_1^{-1} s_{d+1} = (\varepsilon, \sigma_0, \sigma''_1, \dots, \sigma_d, \sigma'_{d+1}, \omega),$$

*que é claramente distinto de  $e$ , já que o complexo é celular. Agora, ao aplicarmos novamente,*

$$e \varphi_1^{-1} s_{d+1} \varphi_1^{-1} = (\varepsilon, \sigma'_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d, \sigma'_{d+1}, \omega),$$

$$e \varphi_1^{-1} s_{d+1} \varphi_1^{-1} s_{d+1} = (\varepsilon, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d, \sigma_{d+1}, \omega),$$

*que é justamente  $e$ . Logo  $\varphi_1 s_{d+1}$  é um casamento.*

*As demais composições que devem ser casamentos seguem a mesma regra. Observe que para  $1 < j \leq d-1$*

$$e \varphi_1 \cdots \varphi_j = (\varepsilon, \sigma'_0, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma''_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_d, \sigma_{d+1}, \omega),$$

*e as composições que devem ser casamento são  $\varphi_1 \cdots \varphi_j s_{d+1}$  com  $1 < j \leq d-1$ . Assim,*

$$e \varphi_1 \cdots \varphi_j s_{d+1} = (\varepsilon, \sigma_0, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma''_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_d, \sigma'_{d+1}, \omega),$$

que é distinto de  $e$ , e ao repetirmos

$$e \varphi_1 \cdots \varphi_j s_{d+1} \varphi_1 \cdots \varphi_j = (\varepsilon, \sigma'_0, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_d, \sigma'_{d+1}, \omega),$$

$$e \varphi_1 \cdots \varphi_j s_{d+1} \varphi_1 \cdots \varphi_j s_{d+1} = (\varepsilon, \sigma_0, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_d, \sigma_{d+1}, \omega),$$

que mais uma vez é igual a  $e$ . E assim as composições  $\varphi_1 \cdots \varphi_j s_{d+1}$ , com  $1 < j \leq d-1$ , são casamentos.  $\square$

Resumindo, um complexo precisa ter uma estrutura recursiva, como as álgebras de incidência, para que estas possam representá-lo.

Em relação aos complexos CW, é esperado que também tenham sempre uma álgebra de incidência associada, embora não seja natural a sua relação com as seqüências de faces. Mas um complexo CW recursivo tem as mesmas características para que possa ser representado.

### 3.3.4 Desmontando uma Álgebra de Incidência

Agora temos uma outra questão: em que condições uma álgebra de incidência está associada a algum complexo?

Para responder a esta pergunta, teremos que tentar construir um complexo abstrato a partir de um álgebra de incidência. Primeiramente vamos analisar uma álgebra de incidência de ordem 1,  $\mathcal{B} = (E, \{\varphi_1\})$ . Sabemos que  $\mathcal{B}$  é formada de ciclos. Se associarmos cada elemento de  $E$  com um par vértice-aresta, poderemos construir um 1-complexo CW de forma imediata.

**Lema 3.11** *Toda álgebra de incidência de ordem 1 está associada a um complexo CW de dimensão 1.*

**Prova:** *Basta associar os elementos da álgebra com pares vértice-aresta, formando ciclos.*  $\square$

Agora, para dimensões maiores, faremos um “desmonte” de uma álgebra de incidência de ordem  $n$  para identificar as faces de um possível complexo. Esta identificação será recursiva.

A partir de uma álgebra de incidência de ordem  $n$ ,  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , e do lema 3.3, definimos as **sub-álgebras de incidência**  $\mathcal{A}^i$ , com  $1 \leq i \leq n-1$ , onde  $\mathcal{A}^i$  é uma álgebra de incidência de ordem  $i$ , como

$$\mathcal{A}^i = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i\}).$$

Analisando apenas  $\mathcal{A}^1$ , vemos que existe um complexo de dimensão 1 associado (lema 3.11). Ao passarmos para  $\mathcal{A}^2$ , vemos que o processo é o mesmo que o visto anteriormente, quando estávamos construindo uma álgebra de incidência de ordem

2 a partir de uma álgebra de incidência de ordem 1. Assim, podemos perceber que não existem restrições para a existência de um complexo associado a esta álgebra de incidência.

Entretanto, como  $\mathcal{A}^3$  é formada por “colagens” em  $\mathcal{A}^2$ , é preciso que as componentes conexas do complexo associado a  $\mathcal{A}^2$  sejam compatíveis com as definições de faces do complexo a ser construído, ou seja, sejam fronteiras de células abertas de dimensão 3. Como estas componentes conexas são complexos de dimensão 2, basta verificar se são superfícies com topologia da esfera.

Este caso se repete nas demais álgebras de incidência. Entretanto, para dimensões maiores, não é possível determinar quando as componentes conexas serão fronteiras de células abertas. Somente até a dimensão 3 (dimensão das células) este teste é conhecido. Basta calcular o valor da característica de Euler [Zee79]. Em dimensão 4 ainda há uma dúvida se existe ou não tal teste, e em dimensões maiores já se tem certeza que não existe.

Podemos então enunciar o seguinte teorema, que pode ser provado usando os argumentos acima.

**Teorema 3.12** *Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n \geq 2$ , e  $\mathcal{A}^{n-1} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\})$ . Se existe um complexo de dimensão  $n - 1$ ,  $\mathcal{K}$ , associado a  $\mathcal{A}^{n-1}$  tal que cada uma das componentes conexas de  $\mathcal{K}$  é combinatoriamente equivalente a  $S_1^{n-1}(0)$ , então existe um complexo  $\mathcal{X}$  de dimensão  $n$  associado a  $\mathcal{A}^n$ .*

**Prova:** Como  $\mathcal{K}$  é formado por uma coleção de complexos combinatoriamente equivalentes a  $S_1^{n-1}(0)$ , para cada componente conexa de  $\mathcal{K}$  podemos incluir uma  $n$ -face que a tenha como fronteira. O casamento  $\varphi_1 \cdots \varphi_n$  “cola” estas componentes conexas formando um complexo  $\mathcal{X}$ .  $\square$

Falta agora caracterizar as  $k$ -faces de uma álgebra de incidência, identificando em que parte da estrutura estão as informações sobre elas. Como o complexo que está associado a uma álgebra de incidência de ordem  $n$  é formado com colagens (complexo recursivo), as  $n$ -faces são facilmente detectadas a partir de suas fronteiras, que são exatamente as componentes conexas do complexo usado na colagem. Sejam  $\mathcal{A}^n, \mathcal{A}^{n-1}, \dots, \mathcal{A}^1$  as sub-álgebras de incidência de  $\mathcal{A}^n$ . As componentes conexas de  $\mathcal{A}^{n-1}$  são um esboço das  $n$ -faces. No processo de colagem, faces da mesma componente conexa podem ter sido identificadas, fazendo com que as  $n$ -faces não sejam células. Procurando no casamento  $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n$  pares na mesma componente conexa, podemos saber o que aconteceu com as  $n$ -faces. De qualquer forma cada  $n$ -face corresponde a exatamente uma componente conexa de  $\mathcal{A}^{n-1}$ .

As demais faces podem ser identificadas de forma semelhante. Só não podemos esquecer que no processo de colagem, elas foram identificadas duas a duas, a cada nível. As  $(n - 1)$ -faces estão relacionadas com as componentes conexas de  $\mathcal{A}^{n-2}$ , sendo que a cada  $(n - 1)$ -face temos duas componentes conexas com orientações contrárias.

De forma recursiva podemos encontrar todas as  $k$ -faces, com  $2 \leq k \leq n$ . As 1-faces (arestas) estão relacionadas com os elementos de  $E$  diretamente. Podemos chegar aos vértices por dualidade, já que os duais deles são as  $n$ -faces do dual.

### 3.4 Variedades combinatórias e Álgebras de incidência

A questão que surge agora é quando podemos associar uma álgebra de incidência a uma variedade combinatória. Esta discussão é semelhante a da seção anterior, e como antes, faremos em duas etapas. Primeiro discutiremos quando uma variedade combinatória pode ser representada por uma álgebra de incidência, e depois, e principalmente, quando uma álgebra de incidência tem uma variedade combinatória associada.

Um complexo celular  $\mathcal{X}$  que é uma  $n$ -variedade combinatória orientável, com  $n \geq 2$  satisfaz o teorema 2.2 e é orientável, e portanto existem duas  $n$ -faces incidentes a cada  $(n-1)$ -face. Considerando o complexo  $\mathcal{K}$  que seja uma desagregação de  $\mathcal{X}$ , a rotulação de agragação correspondente identifica duas a duas as  $(n-1)$ -faces, e cada uma das face de dimensão menor que  $n-1$  são identificadas em grupos de tamanhos variados. Cada componente conexa de  $\mathcal{K}$  é a fronteira das  $n$ -faces de  $\mathcal{X}$ . Como as  $n$ -faces são células, suas fronteiras são  $(n-1)$ -variedades combinatórias. Se este  $\mathcal{K}$  (de dimensão  $n-1$ ), que é uma  $(n-1)$ -variedade combinatória orientável, estiver associado a uma álgebra de incidência de ordem  $n-1$ , então, pelo teorema 3.10, o complexo  $\mathcal{X}$  estará associado a uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .

**Teorema 3.13** *Toda variedade combinatória orientável está associada a uma álgebra de incidência.*

**Prova:** *Pelo teorema 2.2, é fácil ver que uma variedade combinatória é um complexo recursivo. Pelo teorema 3.10 concluímos que uma variedade combinatória está associada a uma álgebra de incidência.  $\square$*

O caso inverso (“quando uma álgebra de incidência tem uma variedade combinatória associada?”) é diferente, pois nem sempre uma álgebra de incidência está associada a um complexo celular, e nem todo complexo celular é uma variedade combinatória.

O teorema 3.12 nos diz quando uma álgebra de incidência está associada a um complexo CW. E um complexo CW será um complexo celular somente se suas faces forem células.

Em dimensão 1 podemos enunciar o seguinte lema:

**Lema 3.14** *Uma álgebra de incidência de ordem 1,  $\mathcal{A}^1 = (E, \{\varphi_1\})$ , terá um complexo celular associado se e somente se  $e \varphi_1 \neq e$ , para  $e \in E$ .*

**Prova:** Se  $e \varphi_1 \neq e$  então não existem arestas incidentes a um único vértice, e por consequência o complexo CW associado é celular. Se  $\mathcal{A}^1 = (E, \{\varphi_1\})$  está associada a um complexo celular, então os ciclos de arestas têm pelo menos duas arestas e, portanto,  $e \varphi_1 \neq e$ .  $\square$

No caso geral podemos enunciar o teorema 3.15, que estabelece uma regra recursiva.

**Teorema 3.15** *Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n \geq 2$ , e  $\mathcal{A}^{n-1} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\})$ . Se  $\mathcal{A}^n$  está associada a um complexo CW  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{A}^{n-1}$  está associada a um complexo celular  $\mathcal{X}'$ , e o casamento  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$  só relaciona elementos em componentes conexas distintas de  $\mathcal{A}^{n-1}$ , então  $\mathcal{X}$  é um complexo celular.*

**Prova:** Como  $\mathcal{X}$  é um complexo, as  $n$ -faces têm interior homeomorfo a bolas abertas de dimensão  $n$ . Portanto as componentes conexas de  $\mathcal{X}'$  são esferas, e portanto fronteiras de células. Se na colagem, somente são identificadas faces de componentes conexas distintas, então as fronteiras não são modificadas, e portanto as  $n$ -faces são células.  $\square$

Assim, para sabermos se uma álgebra de incidência está associada a uma variedade combinatória temos que saber se está associada a algum complexo e se esse complexo é celular. Mais ainda, precisamos saber se este complexo é uma variedade combinatória, e para isso recorreremos ao lema 2.4.

### 3.5 Álgebras de Incidência Padrão

Vamos agora procurar por álgebras minimais, do ponto de vista da cardinalidade de  $E$ . Faremos algumas considerações e apresentaremos algumas características que tal álgebra deve ter. As álgebras minimais têm papel importante na construção de álgebras de incidência. Com álgebras minimais podemos construir álgebras de incidência mais complexas, fazendo modificações e combinando álgebras de incidência simples.

Um fato que deve ser levado em conta quando estivermos procurando por álgebras de incidência com características minimais está relacionado com a igualdade de casamentos em algum elemento de  $E$ . Casamentos próximos podem ser iguais em alguns elementos, mas casamentos distantes não. Veremos isso no seguinte lema.

**Lema 3.16** *Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n$ . Para todo  $e \in E$ :*

$$e C_{i,j} \neq e C_{i,d},$$

com  $j + 1 < d$  e,

$$e C_{i,j} \neq e C_{l,j},$$

com  $i + 1 < l$ .

**Prova:** Suponha por absurdo que  $e C_{i,j} = e C_{i,d}$ , para  $j + 1 < d$ , então

$$e C_{i,d} = e C_{i,j} C_{j+1,d} = e C_{i,j},$$

logo  $f C_{j+1,d} = f$ , para  $f = e C_{i,j}$ . O que é uma contradição, já que  $C_{j+1,d}$  é casamento. O mesmo raciocínio vale para o segundo caso.  $\square$

O teorema a seguir estabelece um limite inferior para o número de elementos em uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .

**Teorema 3.17** *Uma álgebra de incidência de ordem  $n$  conexa não pode ter menos que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  elementos.*

**Prova:** Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n$  conexa. Para qualquer  $e \in E$ , os elementos da forma  $e C_{1,d}$ , com  $d$  par menor ou igual a  $n$ , são todos distintos, além de serem distintos de  $e$  (pelo lema 3.16). O número de casamentos desta forma é igual ao número de pares de 1 a  $n$ , que é  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Incluindo o elemento  $e$ , chegamos ao resultado de  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ .  $\square$

Este teorema tem um corolário bastante interessante.

**Corolário 3.18** *Uma álgebra de incidência de ordem  $2^k - 1$  (ou  $2^k - 2$ ), para algum  $k > 0$ , é minimal se tiver  $2^{k-1}$  elementos.*

**Prova:** Pelo teorema 3.17, uma álgebra de incidência de ordem  $2^k - 1$  não pode ter menos que  $\lfloor \frac{2^k - 1}{2} \rfloor + 1$ , que é igual a  $2^{k-1}$ . O mesmo vale para o caso de ordem  $2^k - 2$ .  $\square$

O seguinte lema é bastante pertinente, quando queremos saber a aparência de uma álgebra minimal:

**Lema 3.19** *Dada uma álgebra de incidência de ordem  $n$ ,  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , podemos definir uma álgebra de incidência de ordem  $n$ ,  $\mathcal{B}^n = (E, \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\})$ , onde*

$$\psi_i = \begin{cases} \text{Identidade} & \text{para } i \text{ ímpar;} \\ \varphi_{i-1} \varphi_i & \text{para } i \text{ par.} \end{cases}$$

**Prova:** Obviamente que  $\mathcal{B}^n$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .  $\square$

O mais importante neste lema é que se  $\mathcal{A}^n$  é minimal, então  $\mathcal{B}^n$  também é minimal, já que são da mesma dimensão e estão definidas sobre o mesmo conjunto,  $E$ .

Com este resultado podemos procurar por álgebras minimais apenas entre as álgebra de incidência que tem as funções com índice ímpar iguais a identidade e as de índice par como casamentos.

Definiremos agora um tipo especial de álgebra de incidência, que são as **álgebras de incidência padrão**. Estas álgebras tem uma forma bem definida e podem ser usadas como modelo para a construção de outras álgebras. Uma **álgebra de incidência padrão de ordem 1** é uma álgebra de incidência que só possui um elemento. Uma **álgebra de incidência padrão de ordem  $n > 1$** ,  $\mathcal{P}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , com  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , é tal que:

**AP1:**  $\mathcal{P}^m = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\})$ , com  $m = 2^k - 1$ , é constituída de duas componentes conexas que são álgebras de incidência padrão de ordem  $m$ ;

**AP2:**  $\varphi_p$ , com  $p = 2^k$ , é casamento e um isomorfismo nas componentes conexas de  $\mathcal{P}^m$ ;

**AP3:**  $\varphi_i = \varphi_j$ , com  $2^k < i \leq n$  e  $j = 2^{k+1} - i$ .

A figura 3.6 apresenta um esquema de uma álgebra de incidência padrão de ordem 8, onde os pontos são os elementos da álgebra e as arestas representam as funções. Perceba que todas as funções com índice ímpar são iguais a identidade (representadas por loops), e as demais são casamentos (representados com setas duplas).

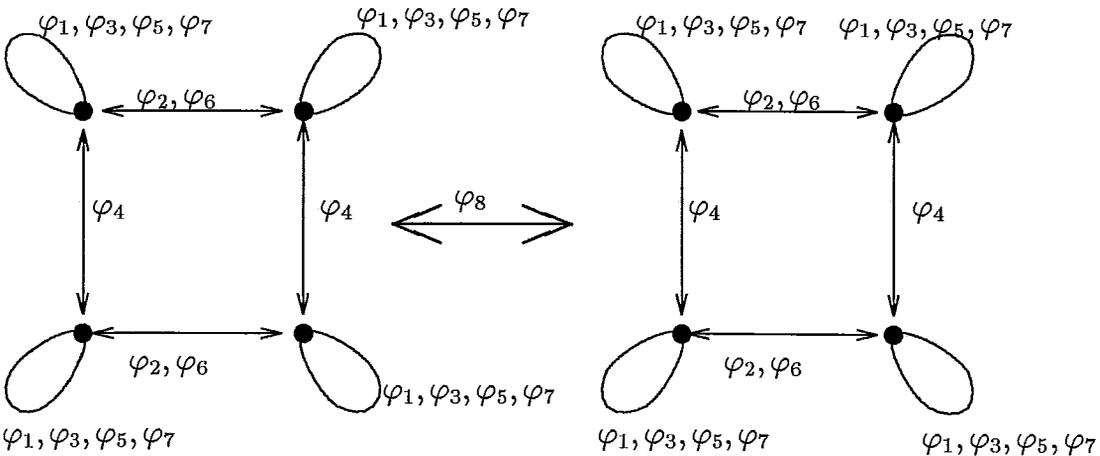


Figura 3.6: Álgebra de Incidência Padrão de ordem 8

Apresentamos agora alguns resultados sobre as álgebras de incidência padrão, começando pela caracterização das funções da álgebra.

**Lema 3.20** *Em uma álgebra de incidência padrão, as funções com índice ímpar são iguais a identidade, e as funções com índice par são casamentos.*

**Prova:** *Se  $i = 2^k$  para algum  $k$ , então  $\varphi_i$  é um isomorfismo entre componentes conexas distintas, e portanto um casamento. Por indução temos o seguinte:*

Para  $i = 1$ . Por definição  $\varphi_1$  é a identidade.

Para  $i = 2$ . Como  $2 = 2^1$ ,  $\varphi_2$  é casamento.

Suponha que  $\varphi_l$ , com  $l < i$ , seja como no enunciado do lema.

Como para  $i > 2$  existe  $k \geq 1$  tal que  $2^k < i < 2^{k+1}$ , então  $\varphi_i = \varphi_j$ , com  $j = 2^{k+1} - i$ , que tem a mesma paridade que  $i$ , e  $j < 2^k < i$ . Logo, pela hipótese de indução,  $\varphi_j$  é casamento, se  $i$  é par, e a identidade, se  $i$  é ímpar, e portanto  $\varphi_i$  também satisfaz o lema.  $\square$

Agora um resultado sobre o número de elementos de uma álgebra de incidência padrão.

**Lema 3.21** *Uma álgebra de incidência padrão de ordem  $n$ , com  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  tem  $2^k$  elementos.*

**Prova:** *Seja  $\mathcal{P}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência padrão de ordem  $n$ . Provaremos por indução.*

*Se  $n = 1$ , o conjunto  $E$  tem apenas 1 ( $= 2^0$ ) elemento.*

*Suponha que as álgebras de incidência padrão de ordem menor que  $n$  satisfaçam o lema.*

*Se  $n = 2^k$ , então a álgebra  $\mathcal{P}^{n-1} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\})$  possui duas componentes conexas que são álgebras de incidência padrão (pela definição). Pela hipótese da indução, cada componente conexa de  $\mathcal{P}^{n-1}$  tem  $2^{k-1}$  elementos, e portanto,  $\mathcal{P}^n$  tem  $2^k$  elementos.*

*Se  $2^k < n < 2^{k+1}$ , então  $\mathcal{P}^{n-1}$  tem uma única componente conexa, pois a função  $\varphi_n$  é igual a uma das funções de  $\mathcal{P}^{n-1}$ . Assim,  $\mathcal{P}^n$  tem o mesmo número de elementos que  $\mathcal{P}^{n-1}$ , que tem  $2^k$  elementos (pela hipótese da indução).  $\square$*

Temos agora que garantir a existência de álgebras padrão, ou seja, garantir que são álgebra de incidência.

**Teorema 3.22** *Álgebras de incidência padrão são álgebras de incidência.*

**Prova:** *Seja  $\mathcal{P}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência padrão de ordem  $n$ . Iremos provar por indução que temos uma álgebra de incidência.*

*Para  $n = 1$ , temos obviamente uma álgebra de incidência.*

*Suponha que todas as álgebras de incidência padrão de ordem menor que  $n$  satisfaçam o teorema.*

*Faça  $n = 2^k$ . Pela hipótese da indução, todas as composições  $C_{i,j}$ , com  $1 \leq i < j < n$ , são casamentos. Faltam as composições  $C_{i,n}$ , com  $1 \leq i < n$ . Para  $i = n-1$  a composição  $C_{i,n} = \varphi_{n-1} \varphi_n$ , que pelo lema 3.20 é igual a  $\varphi_n$ , que é casamento. Como retirando a função  $\varphi_n$  temos duas componentes conexas (por **AP1**), a composição*

$C_{i,n}$  leva de uma componente conexa para outra, logo  $e C_{i,n} \neq e$ , para todo  $e \in E$ . Mas, para  $i < n - 1$ ,

$$C_{i,n} C_{i,n} = C_{i,n-1} \varphi_n C_{i,n-1} \varphi_n$$

que pelo teorema 3.7 e pelo lema 3.20 fica

$$C_{i,n-1} \varphi_n \varphi_n C_{i,n-1} = \text{identidade.}$$

Se  $2^k < n < 2^{k+1}$ , consideremos a composição  $C_{i,n}$  com  $1 \leq i < n$ . Como no caso anterior, a composição  $C_{n-1,n}$  é trivialmente casamento. Faça  $p = 2^k$ . As composições  $C_{i,n}$ , com  $1 \leq p < i < n - 1$ , pela propriedade **AP3**, ficam

$$C_{i,n} = C_{2p-n, 2p-i},$$

que são casamentos pela hipótese de indução.

Caso  $1 \leq i < p < n$ , então

$$C_{i,n} = C_{i,p-1} \varphi_p C_{p+1,n} = C_{i,p-1} \varphi_p C_{2p-n, p-1},$$

que pelo teorema 3.7 e pelo lema 3.20 fica

$$\varphi_p C_{i,p-1} C_{2p-n, p-1},$$

ou

$$C_{i,p-1} C_{2p-n, p-1} \varphi_p.$$

Como  $C_{i,p-1} C_{2p-n, p-1} = C_{2p-n, p-1} C_{i,p-1}$ , então

$$C_{i,n} C_{i,n} = C_{i,p-1} C_{2p-n, p-1} \varphi_p \varphi_p C_{i,p-1} C_{2p-n, p-1} = \text{identidade.}$$

Como  $\varphi_p$  une componentes conexas distintas, logo  $e C_{i,n} \neq e$ , para todo  $e \in E$ .

E assim  $C_{i,n}$  são casamentos. □

O seguinte teorema apresenta uma regra para o número de elementos de uma álgebra de incidência.

**Teorema 3.23** *Toda álgebra de incidência de ordem  $n$ , com  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , possui um conjunto com cardinalidade múltipla de  $2^k$ . Nestas mesmas condições, álgebras minimais possuem conjuntos de cardinalidade igual a  $2^k$ .*

**Prova:** Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n$ , com  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  conexa. A partir de  $\mathcal{A}^n$ , criemos uma álgebra de incidência  $\mathcal{B}^n = (E, \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\})$  como no lema 3.19. Embora a cardinalidade de  $\mathcal{B}^n$  seja a mesma de  $\mathcal{A}^n$ ,  $\mathcal{B}^n$  pode não ser conexa.

Tomando-se, se necessário, uma componente conexa de  $\mathcal{B}^n$ , podemos assumir  $\mathcal{B}^n$  conexo (contanto que cada componente conexa confirme a tese). Seja  $m$  o maior inteiro, menor ou igual a  $n$ , tal que a álgebra  $\mathcal{C} = (E, \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m-1}\})$  seja desconexa. Então  $\psi_m$  conecta  $\mathcal{C}$ , e é um isomorfismo entre duas componentes conexas de  $\mathcal{C}$  como veremos.

Observe que  $\psi_m$  deve ser casamento, pois senão, seria a identidade e não poderia conectar  $\mathcal{C}$ , então  $m$  é par. Pelo lema 3.8,  $\psi_m$  comuta com  $\psi_i$ , com  $1 \leq i < m - 2$ , e pelo teorema 3.7, também comuta com  $\psi_{m-2}$ . Como  $\psi_{m-1}$  é igual a identidade, temos que  $\psi_m$  comuta com todas as funções da álgebra  $\mathcal{C}$ , e portanto é um isomorfismo em  $\mathcal{C}$ .

Dados dois elementos  $a, b \in E$  em componentes distintas de  $\mathcal{C}$ , pela definição de  $m$ , existe uma composição  $S$  de funções  $\psi_i$ , com  $1 \leq i \leq m$ , tal que  $a = b S$ . Como  $\psi_m$  comuta com as demais funções e é um casamento, podemos eliminar de  $S$  pares de ocorrências de  $\psi_m$ , e como  $a$  e  $b$  estão em componentes conexas distintas, após estas eliminações,  $S$  conterà exatamente uma ocorrência de  $\psi_m$ . Portanto  $\mathcal{C}$  contém apenas duas componentes conexas. Como elas são isomorfas, devem possuir o mesmo número de elementos.

Este processo de bi-partição pode ser repetido até que as componentes conexas resultantes sejam conjuntos unitários. Portanto o conjunto  $E$  da álgebra  $\mathcal{A}^n$  possui um total de  $2^p$  elementos, para algum  $p$  inteiro. Pelo teorema 3.17,  $2^p \geq 2^k$ , e portanto  $2^p$  é múltiplo de  $2^k$ . Pelo lema 3.21, as álgebras de incidência padrão de ordem  $n$  possuem  $2^k$  elementos, e pelo teorema 3.22, são álgebras de incidência. Portanto existem álgebras de incidência de ordem  $n$  com  $2^k$  elementos, e estas são álgebras de incidência minimais.  $\square$

O seguinte corolário nos diz sobre a minimalidade das álgebras de incidência padrão. Isso é importante para o capítulo 5.

**Corolário 3.24** *Álgebras de incidência padrão de ordem  $n$  são minimais, ou seja, tem o menor número possível de elementos.*

**Prova:** Pelo lema 3.21, as álgebras de incidência padrão de ordem  $n$ , com  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ , possuem  $2^k$  elementos. Pelo teorema 3.23, as álgebras de incidência minimais de ordem  $n$  possuem  $2^k$  elementos. Logo as álgebras de incidência padrão são minimais.  $\square$

# Capítulo 4

## Representações de Complexos

Apresentaremos aqui algumas possíveis representações para os complexos ou variedades combinatórias. Estas representações se relacionam umas com as outras, existindo, em alguns casos, uma equivalência.

Começaremos com três representações de subdivisões de superfícies. A primeira delas, os Sistemas de Relações de Robert C. James [Jam55], se apresenta pouco útil computacionalmente, mas traz alguns resultados interessantes. A segunda foi uma das primeiras estruturas usadas na prática, a DCEL [PS85]. Por último, a Álgebra de Arestas, de Guibas e Stolfi [GS85], que apresentam a estrutura Quad-Edge.

Em seguida veremos uma representação de subdivisões do espaço tridimensional, a estrutura Face-aresta de Dobkin e Laszlo [DL89], que é uma generalização do trabalho de Guibas e Stolfi.

Para complementar, veremos três representações de subdivisões em dimensões superiores. O Grafo de Incidência (veja seção 2.2.5, que aparece como uma representação explícita de um complexo abstrato, as  $n$ -G-maps de Lienhardt [Lie89], e finalmente a estrutura Cell-Tuple de Erik Brisson [Bri89, Bri90]. Os dois últimos são os mais importantes em relação a Álgebra de Incidência.

Nesta seção nos restringiremos as estruturas, deixando os operadores para serem discutidos no próximo capítulo, que é inteiramente dedicado a este assunto.

### 4.1 Sistemas de relações

Há anos estudam-se representações de objetos geométricos. Um exemplo é o trabalho de Robert C. James em [Jam55] que estuda objetos bidimensionais (2-variedades) e apresenta uma representação. Ele trabalha com uma estrutura algébrica para representar a subdivisão de uma 2-variedade. Esta estrutura é chamada *Sistema de Relações*, que é um conjunto finito de relações e cada relação é uma expressão de igualdade, onde cada um dos lados é um produto de símbolos (incluindo o símbolo 1). Cada símbolo é um elemento ( $a$ ) de um conjunto finito, ou seu inverso ( $a^{-1}$ ).

Nesta representação, cada símbolo se refere a uma aresta orientada da subdivisão, e o produto de símbolos corresponde a um percurso de arestas na subdivisão. O

símbolo 1 significa um percurso com a origem igual ao destino. Uma relação iguala dois caminhos, significando que os dois são equivalentes – saem do mesmo vértice e chegam ao mesmo destino, independente do meio de cada um.

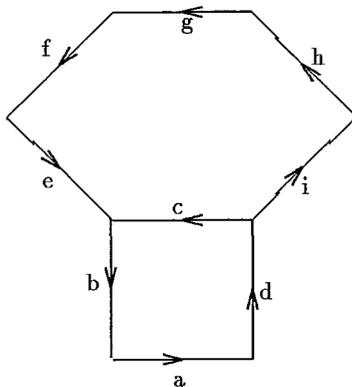


Figura 4.1: Exemplo de subdivisão

Para a subdivisão da figura 4.1, um possível sistema é:

$$\begin{cases} dcba = 1 \\ ihgfec^{-1} = 1 \\ a^{-1}b^{-1}e^{-1}f^{-1}g^{-1}h^{-1}i^{-1}d^{-1} = 1 \end{cases}$$

Neste trabalho, James também definiu operações para manipular tais estruturas, mas não para criar ou destruir. É difícil trabalhar com estes sistemas como estruturas de dados, e as operações são frequentemente de complexidade de tempo linear.

Em relação à álgebra de incidência de ordem 2, podemos dizer que o conjunto de símbolos é equivalente ao conjunto  $E$ , a primeira função,  $\varphi_1$ , pode ser calculada a partir da ordem dos símbolos nas relações. A segunda função,  $\varphi_2$ , não está explícita, mas sim o casamento  $\varphi_1 \varphi_2$ . Este casamento é representado pela relação entre um símbolo e seu inverso.

Para subdivisões orientáveis e sem bordo, podemos afirmar que esta estrutura é equivalente a uma álgebra de incidência de ordem 2, embora, como já afirmamos, não seja de implementação eficiente.

A contribuição mais relevante daquele trabalho está relacionada com a classificação de superfícies (2-variedades). James apresenta um conjunto de operações que modificam a subdivisão sem alterar a topologia da superfície, e com elas apresenta a um algoritmo para se chegar a sistemas canônicos, onde podem ser contadas as estruturas especiais de uma superfície, como *crosscaps*, alças e bordas.

Um sistema canônico tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, & i = 1, \dots, p; \\ y_i = c_i c_i, & i = 1, \dots, q; \\ z_i = d_i e_i d_i^{-1}, & i = 1, \dots, r; \\ x_1 \dots x_p y_1 \dots y_q z_1 \dots z_r = 1. \end{cases}$$

onde  $p$  é o número de alças (genus),  $q$  é o número de bordas, e  $r$  é o número de *crosscaps*.

Estas operações podem ser estudadas em dimensões maiores para um melhor entendimento de variedades. Um dos resultados destas operações é um sistema com uma única relação. Isto é equivalente a subdivisão ser formada por uma única face. Em dimensão  $n$  podemos achar uma subdivisão equivalente com uma única  $n$ -face? Isto merece ser melhor investigado.

## 4.2 Estrutura de dados DCEL

Uma das primeiras estruturas de dados para representar subdivisões de superfícies é a DCEL (*Doubly-connected-edge-list*) [PS85] (inicialmente em [MP78]). Esta estrutura é composta por um vetor com seis campos: quatro de informação  $V1$ ,  $V2$ ,  $F1$  e  $F2$ , e dois de índices,  $P1$  e  $P2$ . Cada posição deste vetor representa uma aresta, com seus dois vértices, origem e destino ( $V1$  e  $V2$  respectivamente), e suas duas faces, esquerda e direita ( $F1$  e  $F2$  respectivamente). Observe que as arestas precisam ter uma orientação e uma direção. O índice  $P1$  aponta para a primeira aresta encontrada circulando no sentido anti-horário em torno do vértice  $V1$ . Do mesmo modo,  $P2$  aponta para a primeira aresta encontrada circulando no sentido anti-horário em torno do vértice  $V2$ . Como exemplo, um fragmento de uma subdivisão e sua correspondente DCEL estão na figura 4.2 [PS85, fig. 1.3, pag. 16].

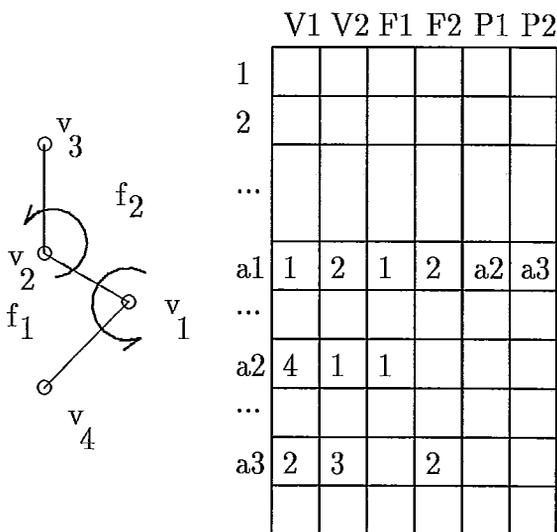


Figura 4.2: Estrutura DCEL

Esta estrutura não apresenta nenhuma redundância, sendo preciso dar a volta completa em torno de alguns vértices para se conseguir achar a próxima aresta em torno de uma face. É uma estrutura compacta e pode ser usada para armazenamento em disco. Para uma maior agilidade na recuperação das informações é preciso

criar alguma redundância, permitindo que todas as operações sejam feitas em tempo constante.

Em relação à álgebra de incidência  $\mathcal{A} = (E, \{\varphi_1, \varphi_2\})$ , a correspondência é óbvia. Os índices representam a função  $\varphi_2$ , e cada posição do vetor (aresta) representa dois elementos de  $E$  casados pelo casamento  $\varphi_1 \varphi_2$ . A função  $\varphi_1$  só pode ser calculada com uma volta completa em torno de um dos vértices.

### 4.3 Álgebra de arestas

Mais recentemente, Guibas e Stolfi, em [GS85], apresentaram uma outra estrutura algébrica para representar variedades bidimensionais.

Eles usam uma estrutura algébrica baseada em grafos, e apresentam operadores para alterar a *álgebra*, construindo e destruindo objetos. Neste trabalho, uma estrutura de dados é definida, e existe redundância para acelerar os procedimentos de mudança e percurso sobre a subdivisão.

Esta estrutura é chamada de Álgebra de Arestas e trata das arestas e suas vizinhanças. É definida usando um conjunto finito (de arestas orientadas e direcionadas) e algumas funções que indicam os vizinhos de cada elemento (aresta orientada e direcionada). Uma aresta direcionada é uma aresta da subdivisão com uma ordem em seus vértices, um deles é a origem e o outro o destino. A orientação está relacionada com o lado da superfície que estamos vendo. Podemos orientar uma superfície colocando uma circulação em um disco. De um dos lados veremos a circulação no sentido anti-horário, enquanto que do outro veremos no sentido horário. Em uma aresta orientada e direcionada temos, sem ambigüidade, definidos os vértices origem e destino, bem como as faces esquerda e direita.

Cada função tem um significado topológico, tal como a *Onext* que significa *a próxima aresta com o mesmo vértice origem em um circuito no sentido anti-horário*. Outras funções definem as arestas giradas (*Flip*), com mesma direção mas orientação invertida, e simétrica (*Sym*), com mesma orientação mas direção invertida.

É definido também o conceito de dualidade. Uma subdivisão  $S$  pode ter uma subdivisão dual  $S^*$ , e seus elementos são relacionados pela função *Dual*. Como as arestas duais são “perpendiculares” às arestas do primal, uma função de rotação é definida como sendo o dual da aresta girada, ou seja, para uma aresta orientada e direcionada  $e$ ,  $e \text{ Rot} = e \text{ Flip Dual}$ .

As funções *Onext*, *Sym* e *Rot* aparecem na figura 4.3. A função *Flip* é como se levasse para o outro lado da superfície, fazendo com que os ciclos sejam invertidos.

Assim, posso definir uma **Álgebra de arestas** como uma quintupla  $(E, E^*, \text{Onext}, \text{Rot}, \text{Flip})$  onde  $E$  e  $E^*$  são conjuntos finitos e *Onext*, *Rot* e *Flip* são funções em  $E \cup E^*$  satisfazendo:

$$\mathbf{E1:} \quad e \text{ Rot}^4 = e$$

$$\mathbf{E2:} \quad e \text{ Rot Onext Rot Onext} = e$$

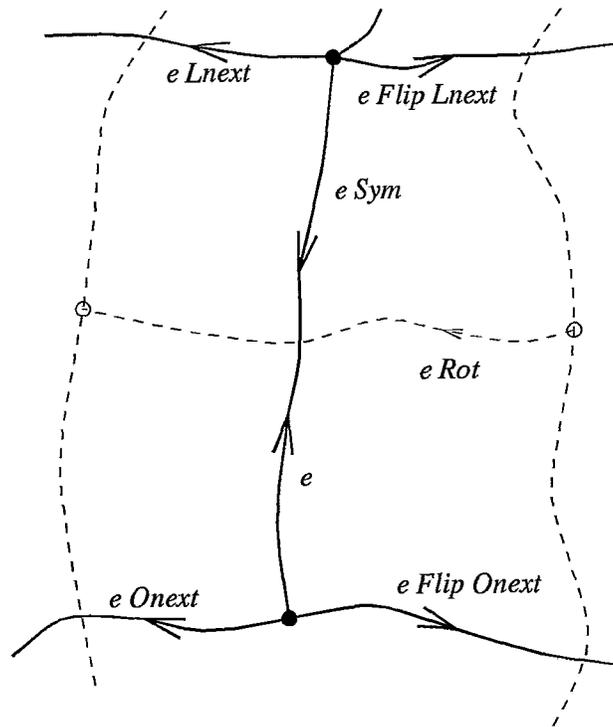


Figura 4.3: Funções da Álgebra de arestas

- E3:**  $e \text{ Rot}^2 \neq e$
- E4:**  $e \in E$  se e só se  $e \text{ Rot} \in E^*$
- E5:**  $e \in E$  se e só se  $e \text{ Onext} \in E$
- F1:**  $e \text{ Flip}^2 = e$
- F2:**  $e \text{ Flip Onext Flip Onext} = e$
- F3:**  $e \text{ Flip Onext}^n \neq e$  para qualquer  $n$
- F4:**  $e \text{ Flip Rot Flip Rot} = e$
- F5:**  $e \in E$  se e só se  $e \text{ Flip} \in E$

Aqui existe uma relação muito mais forte com as álgebras de incidência, mesmo porque foi a partir deste trabalho que a idéia básica das álgebras de incidência surgiu.

A principal diferença está na utilização da função *Flip*, que permite que sejam representadas superfícies não-orientáveis. Outra diferença está na representação da subdivisão dual, que aparece no conjunto  $E^*$ , na mesma estrutura, enquanto que nas álgebras de incidência a subdivisão dual é representada por outra estrutura.

A função *Lnext*, que é definida como

$$e \text{ Lnext} = e \text{ Rot}^{-1} \text{ Onext Rot},$$

indica qual a próxima aresta com a mesma face esquerda em um circuito no sentido anti-horário, e o par  $(E, \{Lnext, Onext\})$  é uma álgebra de incidência de ordem 2, pois  $E$  é um conjunto finito, e a composição  $Lnext Onext$  é um casamento, como podemos ver a seguir:

$$Lnext Onext = Rot^{-1} Onext Rot Onext$$

Compondo com  $Rot^A$ , que pela propriedade **E1** é a identidade, teremos

$$Lnext Onext = Rot^{-1} Onext Rot Onext Rot^A$$

como  $Onext Rot Onext Rot$  é a identidade (propriedade **E2**), temos:

$$Rot^{-1} Onext Rot Onext Rot^A = Rot^{-1} Rot Rot Rot$$

que é igual a  $Rot Rot$  que, pelas propriedades **E1** e **E3**, é um casamento.

O mesmo pode ser dito para o par  $(E^*, \{Lnext, Onext\})$ . Perceba que, embora exista esta representação explícita da subdivisão dual, é possível passear por ela sem usar a função  $Dual$ , visto que  $Dual = Flip Rot$ . A álgebra de incidência dual de  $(E, \{Lnext, Onext\})$  é, por definição,  $(E, \{Onext^{-1}, Lnext^{-1}\})$  que é isomorfa a  $(E^*, \{Lnext, Onext\})$ . Se  $e \in E$ ,  $e^* \in E^*$  e  $e^* = e Dual$ , então

$$e Onext^{-1} Dual = e^* Lnext$$

pois

$$\begin{aligned} e Onext^{-1} Dual &= \\ &= e Flip Onext Flip Dual = \\ &= e Flip Onext Flip Flip Rot = \\ &= e Flip Onext Rot = \\ &= e Flip Rot Rot^{-1} Onext Rot = \\ &= e Flip Rot Lnext = \\ &= e Dual Lnext = e^* Lnext, \end{aligned}$$

e

$$e Lnext^{-1} Dual = e^* Onext,$$

de forma equivalente.

Assim, temos que uma álgebra de arestas inclui uma álgebra de incidência de ordem 2 e apresenta uma representação da subdivisão dual, que no caso genérico, é dispensável. Além disso, tem a vantagem de representar uma conexão entre os dois lados da superfície, permitindo a representação de superfícies não-orientáveis.

## 4.4 Estrutura de dados Facet-Edge

Depois do trabalho de Guibas e Stolfi (seção 4.3), Dobkin e Laszlo, em [DL89], estenderam a representação para as estruturas tridimensionais. No trabalho deles, o conjunto  $C$  usado na álgebra é composto de pares face-aresta (*Facet-Edge*).

Embora tenha estendido o trabalho de Guibas e Stolfi para 3 dimensões, Dobkin e Laszlo também simplificaram a álgebra, não definindo todas as funções que existiam antes.

Da mesma forma que no trabalho anterior, estes elementos precisam de orientação e direção. No caso de um par face-aresta temos dois ciclos associados, um para as arestas e outro para as faces.

As funções definidas neste trabalho são  $Fnext$ ,  $Enext$ ,  $Spin$ ,  $Clock$  e  $Sdual$ . A função  $Enext$  é idêntica a função  $Lnext$  de Guibas e Stolfi (circula as arestas em torno da face). A função  $Fnext$  circula em torno de uma aresta, passando por cada face a ela incidente (veja a figura 4.4). Estas duas funções são dependentes das orientações dos ciclos associados ao par face-aresta. As funções  $Spin$  e  $Clock$  invertem estes ciclos. A  $Spin$  inverte o ciclo das faces em torno da aresta, enquanto que a  $Clock$  inverte os dois ciclos ao mesmo tempo.

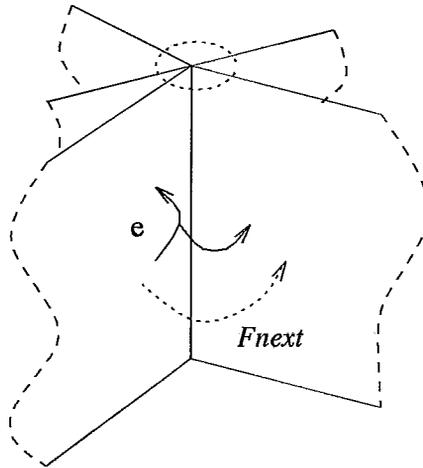


Figura 4.4: Circulação em torno de uma aresta

A última função,  $Sdual$ , permuta entre as subdivisões dual e primal ( $C^*$  representa a subdivisão dual).

As propriedades das funções de face-aresta são as seguintes:

$$\mathbf{FE1:} \quad a \text{ Spin}^2 = a$$

$$\mathbf{FE2:} \quad a \text{ Clock}^2 = a$$

$$\mathbf{FE3:} \quad a \text{ Spin Clock} = a \text{ Clock Spin}$$

$$\mathbf{FE4:} \quad a \text{ Fnext}^{-1} = a \text{ Clock Fnext Clock}$$

$$\mathbf{FE5:} \quad a \text{ Fnext}^{-1} = a \text{ Spin Fnext Spin}$$

- FE6:**  $a \text{ Enext}^{-1} = a \text{ Clock Enext Clock}$
- FE7:**  $a \text{ Enext}^{-1} = a \text{ Clock Spin Enext Clock Spin}$
- FE8:**  $a \text{ Clock Fnext}^i \neq a$  para qualquer  $i$
- FE9:**  $a \text{ Spin Enext}^i \neq a$  para qualquer  $i$
- FE10:**  $a \text{ Clock Enext}^i \neq a$  para qualquer  $i$
- FE11:**  $a \text{ Spin Fnext}^i \neq a$  para qualquer  $i$
- FE12:**  $a \in C$  se e só se  $a \text{ Fnext} \in C$
- FE13:**  $a \in C$  se e só se  $a \text{ Clock} \in C$
- FE14:**  $a \in C$  se e só se  $a \text{ Spin} \in C$
- FE15:**  $a \text{ Sdual}^2 = a$
- FE16:**  $a \text{ Clock Sdual} = a \text{ Sdual Clock}$
- FE17:**  $a \text{ Spin Sdual} = a \text{ Sdual Clock Spin}$
- FE18:**  $a \text{ Fnext} = a \text{ Sdual Enext Sdual}$
- FE19:**  $a \text{ Enext} = a \text{ Sdual Fnext Sdual}$
- FE20:**  $a \in C$  se e só se  $a \text{ Sdual} \in C^*$

Como é uma extensão da álgebra de arestas, esta estrutura é equivalente a uma álgebra de incidência de ordem 3 que seria  $(C, \{\text{Enext}, \text{Onext}, \text{Fnext}\})$ . Onde  $\text{Onext}$  é definida aqui como

$$\text{Onext} = \text{Clock Enext Clock Fnext Clock}$$

e tem o mesmo significado que no trabalho anterior.

Como na seção anterior, é fácil perceber que as condições para ser uma álgebra de incidência de ordem 3 são satisfeitas, ou seja,

$\text{Enext Onext}$  é casamento;

$\text{Onext Fnext}$  é casamento; e

$\text{Enext Onext Fnext}$  é casamento.

Dobkin e Laszlo também apresentaram operadores de construção, que também são baseados nos operadores de Guibas e Stolfi. Este trabalho foi bastante importante na generalização para dimensões maiores.

## 4.5 O Grafo de Incidência

Como já apresentamos esta estrutura na seção 2.2.5, iremos apenas relacioná-la com a álgebra de incidência. Os grafos de incidência são de fácil implementação, mas não contêm algumas relações de ordem de forma explícita se o complexo não for recursivo, ou mesmo no caso do complexo ser CW. Apenas no caso de variedades combinatórias formadas por complexos celulares recursivos, o teorema 2.2 garante as relações de ordem.

A falta de ordem em alguns casos aparece justamente na definição das funções da álgebra de incidência. Mas no caso de complexos celulares recursivos podemos relacionar mais facilmente com um álgebra de incidência.

Seja  $\mathcal{G}_X$  o grafo de incidência do complexo  $\mathcal{X}$ , e  $E$  o conjunto com caminhos máximos em  $\mathcal{G}_X$  (caminhos de  $\varepsilon$  a  $\omega$ ). Seja a família de funções definida por:

$$\alpha_k : E \rightarrow E$$

$$\alpha_k(\sigma_{-1}, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n+1}) = (\sigma_{-1}, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma'_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n+1}),$$

onde  $\sigma'_k$  é como no teorema 2.2, ou seja,  $\sigma'_k$  é tal que  $\mathcal{S}^p(\sigma_{k-1}) \cap \mathcal{S}^b(\sigma_{k+1}) = \{\sigma_k, \sigma'_k\}$ , para  $0 \leq k \leq n$ .

Estas funções possuem propriedades interessantes, que são obtidas diretamente da definição de  $\alpha_k$  e do teorema 2.2.

**A1:**  $\alpha_k$  é casamento, para  $0 \leq k \leq n$

**A2:**  $\alpha_i \alpha_j$  é casamento, para  $0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$ .

Com estas funções podemos definir as funções  $\varphi_k$  como:

$$e \varphi_k = e \alpha_{k-1} \alpha_k$$

com  $1 \leq k \leq n$ . Desta forma as  $\varphi_k$  ficam bem definidas, e com as propriedades das álgebras de incidência.

Nesta definição das funções da álgebra, perdemos a possibilidade de recuperar as funções  $\alpha_k$ . Como são justamente estas funções que alternam entre uma orientação e outra, sempre estaremos do mesmo “lado”. Se o complexo inicial é não-orientável, a álgebra de incidência (associada desta forma) não consegue representar esta não-orientabilidade, e sim um complexo orientável equivalente a uma folheação<sup>1</sup> do complexo inicial.

<sup>1</sup>Para maiores detalhes sobre folheações, consulte bibliografia sobre topologia. Uma introdução pode ser encontrada em [Zee79].

### 4.6 $n$ -G-maps

O trabalho de Pascal Lienhardt em [Lie89], sobre as  $n$ -G-maps (*n-dimensional generalized maps*), apresenta uma representação para subdivisões de espaços topológicos de dimensão  $n$ , para  $n \geq 1$ .

Uma  $n$ -G-map é definida por  $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de modo que  $B$  é um conjunto finito não vazio, e  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  são permutações sobre  $B$  tais que:

- B1:**  $\alpha_i$ , com  $0 \leq i \leq n-1$ , são involuções sem ponto fixo (i.e. casamentos - seção 3.1);
- B2:**  $\alpha_n$  é uma involução;
- B3:**  $\alpha_i \alpha_j$  são involuções para  $0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$ .

As  $n$ -G-maps são generalizações das  $n$ -maps, que têm definição semelhante, e representam subdivisões de espaços topológicos fechados e orientáveis de dimensão  $n$ . A generalização faz com que as  $n$ -G-maps possam também representar espaços não-orientáveis e com bordas.

Lienhardt apresenta operadores de construção baseados na estrutura recursiva das  $n$ -G-maps, modificando ou criando a função  $\alpha_n$  (a última).

O conjunto  $B$  é formado por *darts*, que são semi-arestas. A função  $\alpha_0$  relaciona as duas metades da mesma aresta, enquanto que as demais funções são identificações entre *darts*. A figura 4.5 [Lie89, fig. 1-c, pag. 230] representa uma 2-G-map com as seguintes funções:

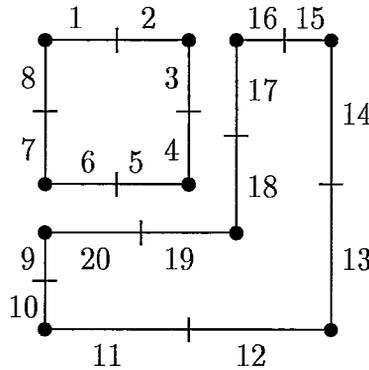


Figura 4.5: 2-G-map

- $\alpha_0 = \{ \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, \{11, 12\}, \{13, 14\}, \{15, 16\}, \{17, 18\}, \{19, 20\} \};$
- $\alpha_1 = \{ \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{9, 20\}, \{10, 11\}, \{12, 13\}, \{14, 15\}, \{16, 17\}, \{18, 19\} \};$
- $\alpha_2 = \{ \{1\}, \{2\}, \{3, 17\}, \{4, 18\}, \{5, 19\}, \{6, 20\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}, \{12\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}, \{16\} \}.$

Observe que as funções  $\alpha_k$  de uma  $n$ -G-map são equivalentes às funções homônimas definidas na seção 4.5 (no caso de complexos celulares). Aqui, embora o complexo representado seja CW, existem dois elementos distintos para células que aparecem duas vezes na fronteira de uma outra célula. Isto acontece pois o complexo é formado por colagens, inclusive as auto-intersecções, típicas das células CW.

Desta forma uma aresta em uma subdivisão de dimensão 2 está referenciada por quatro *darts*, dois de cada face. Assim, fica claro a relação de um *dart* com um elemento do conjunto  $E$  das álgebras de incidência. Cada *dart* está relacionado com um vértice, uma aresta, e com cada um dos elementos (faces) incidentes a ele.

As funções  $\varphi_i$  da álgebra de incidência de ordem  $n$   $\mathcal{A} = (B, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  associada a uma  $n$ -G-map são definidas como:

$$\varphi_i = \alpha_{i-1} \alpha_i \text{ com } 1 \leq i \leq n.$$

É fácil ver que nos casos em que as composições mencionadas na propriedade **B3** forem casamentos, teremos realmente uma álgebra de incidência. Isso se verifica em complexos recursivos e sem borda.

Observamos que a função  $\alpha_n$  é extremamente importante no reconhecimento das subdivisões não-orientáveis. Olhando para os casamentos da álgebra de incidência que envolvem  $\varphi_n$  e para a função  $\varphi_n$  temos o seguinte,  $\varphi_k \varphi_{k+1} \cdots \varphi_n = \alpha_{k-1} \alpha_n$ , para  $1 \leq k \leq n$ . No caso especial de  $k = n$ ,  $\varphi_n = \alpha_{n-1} \alpha_n$ . Assim, se tivéssemos a função  $\alpha_n$  na álgebra de incidência, poderíamos recuperar todas as demais  $\alpha_i$  e teríamos uma  $n$ -G-map. Assim poderíamos representar a não-orientabilidade e as bordas.

A vantagem de usarmos as  $\varphi_i$  ao invés das  $\alpha_i$  é a praticidade e maior proximidade com o nosso entendimento dos percursos em subdivisões.

## 4.7 Estrutura de dados Cell-Tuple

A última representação que iremos comentar é a estrutura de dados *Cell-Tuple* apresentada por Erik Brisson em [Bri89] e posteriormente em sua dissertação de doutorado (PhD) [Bri90].

Esta estrutura é baseada nas seqüências (tuplas) de células, como as apresentadas na seção 4.5. São definidos os operadores *switch<sub>k</sub>*, com  $0 \leq k \leq n$ , onde  $n$  é a dimensão do complexo. Estes operadores são definidos exatamente como as funções  $\alpha_k$  da seção 4.5, conseqüentemente, também como as funções das  $n$ -G-maps. Ou seja,

$$\text{switch}_k = \alpha_k, \text{ para } 0 \leq k \leq n.$$

Neste trabalho, Brisson impõe maiores restrições que Lienhardt, mas na essência, os dois trabalhos são iguais. Brisson relaciona sua estrutura com variedades subdivididas (variedades combinatórias) e apresenta resultados em relação à existência de ordem circular. A ordem a que ele se refere é exatamente a ordem representada pelas funções da álgebra de incidência ( $\varphi_i$ ).

A principal diferença do trabalho de Brisson e de Lienhardt está em usar ou não as tuplas. Como Lienhardt não usa as tuplas, ele representa um complexo CW recursivo sem problemas, enquanto que ao usar as tuplas, Brisson só pode representar complexos recursivos celulares.

Os operadores apresentados por Brisson são do mesmo estilo dos encontrados nos trabalhos de Guibas/Stolfi e Dobkin/Laszlo, e como os demais, são comentados no próximo capítulo.

# Capítulo 5

## Construção

Para que possamos utilizar as representações apresentadas até agora, é preciso que sejam definidos alguns operadores de modificação e criação. Tais operadores podem ter definição dependente da representação ou não.

Os operadores com definição independente, normalmente são globais, e manipulam células dos complexos. Por exemplo, a colagem que identifica faces de dimensão  $n - 1$  em um complexo de dimensão  $n$ , como a usada nos capítulos anteriores. Já os operadores cuja definição depende da representação, tem um efeito mais local, unindo ou quebrando ciclos, ou outras estruturas. Entretanto, estes operadores podem ter equivalentes em outras representações, diferentes daquelas em que foram definidos.

Apresentaremos alguns operadores para a álgebra de incidência. Na seção 5.1 é definido o operador  $Spl_{k}^n$  e apresentadas as suas propriedades. Já na seção 5.2, é apresentado o operador de criação. Em seguida discutiremos a completude destes operadores na seção 5.3. Na seção 5.4, faremos o relacionamento destes operadores com outros semelhantes em outras representações.

### 5.1 Operadores de Modificação

Para construirmos uma álgebra de incidência, ou melhor, modificá-la, definimos alguns operadores que efetuam mudanças mantendo-a como uma álgebra de incidência. Estes operadores são básicos, no sentido que efetuam o menor número possível de mudanças.

Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n$ , a mudança mais simples que podemos fazer é mudar o valor de  $\varphi_k(e)$  para  $\varphi_k(f)$ , ou seja, trocar os valores de  $\varphi_k$  de dois elementos de  $E$ :  $e$  e  $f$ . Ou seja,

$$e \varphi'_k = f \varphi_k$$

$$f \varphi'_k = e \varphi_k$$

com  $1 \leq k \leq n$ .

Para garantir que as propriedades de casamento sejam mantidas, devemos executar outras mudanças em elementos diferentes e em outras funções da álgebra, de forma a preservar a propriedade **P1**.

Assim, como  $\varphi_{k-1} \varphi_k$  deve ser um casamento, devemos fazer mudanças em  $\varphi_{k-1}$  (nos elementos  $e \varphi_{k-1}^{-1}$  e  $f \varphi_{k-1}^{-1}$  para manter o casamento. Outras modificações devem ser feitas para preservar a propriedade **P1**.

Chamaremos estes operadores de splice, como os definidos em [GS85] e [DL89], por terem a mesma ação que estes, e denotaremos  $Spl_{k,d}$  o operador que altera as funções  $\varphi_k$  e  $\varphi_{k+1}$  em uma álgebra de incidência de dimensão  $d$ .

Alguma notação é necessária para facilitar o trabalho de definição do operador. Dada uma álgebra de incidência de ordem  $n$   $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , definiremos uma álgebra de incidência de ordem  $n - 2$ , baseada na composição de quatro funções em dois casamentos,  $\mathcal{A}_k^n = (E, \{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-2}, \varphi_{k-1} \varphi_k, \varphi_{k+1} \varphi_{k+2}, \varphi_{k+3}, \dots, \varphi_n\})$ , com  $0 \leq k \leq n$ . Observe que se uma das funções dos casamentos  $\varphi_{k-1} \varphi_k$  e  $\varphi_{k+1} \varphi_{k+2}$  não existir ( $k = 0, 1, n - 1$  ou  $n$ ) então o casamento em questão não aparecerá em  $\mathcal{A}_k^n$ .

Observe também que qualquer seqüência de funções de  $\mathcal{A}_k^n$  pode ser reescrita como uma composição de casamentos da forma  $C_{i,k}$  ou  $C_{k+1,d}$ , com  $1 \leq i < k$  e  $k+1 < d \leq n$ . Qualquer seqüência de casamentos desta forma é uma seqüência de funções de  $\mathcal{A}_k^n$ .

Agora vamos definir o operador de  $S_k^n$ , para depois apresentar o operador  $Spl_{k,d}^n$ .

Lembre que  $\mathcal{A}^n[e]$  é a componente conexa de  $\mathcal{A}^n$  que contém  $e$  (seção 3.3).

Seja uma álgebra de incidência de ordem  $n$ ,  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ ,  $e, f \in E$  e um casamento  $\mathcal{F}$  em  $A = |\mathcal{A}_k^n[e]| \cup |\mathcal{A}_k^n[f]|$ , tal que  $e \mathcal{F} = f$ .

Seja  $S_k^n(\mathcal{A}^n, e, f, \mathcal{F})$ , com  $0 \leq k \leq n$ , a estrutura  $\mathcal{A}' = (E, \{\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n\})$ , onde:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \varphi'_{k+1} = a \mathcal{F} \varphi_{k+1}, & a \in A; \\ a \varphi_k^{-1} \varphi'_k = a \mathcal{F}, & a \in A; \\ b \varphi'_k = b \varphi_k, & b \varphi_k \notin A; \\ c \varphi'_{k+1} = c \varphi_{k+1}, & c \notin A; \\ d \varphi'_j = d \varphi_j, & j \neq k, k+1, d \in E. \end{array} \right.$$

Observe que nos casos especiais de  $k = 0$  ou  $n$  não existe uma das funções ( $\varphi_0$  ou  $\varphi_{n+1}$ ), e portanto as modificações nestas função são inoperantes.

Este operador é equivalente a efetuar as trocas mencionadas nos pares formados pelo casamento  $\mathcal{F}$ . As trocas são como as apresentadas na figura 5.1. Veja que a regra

$$a \varphi'_{k+1} = a \mathcal{F} \varphi_{k+1},$$

para  $a \in A$ , também pode ser expressa por

$$a \mathcal{F} \varphi'_{k+1} = a \varphi_{k+1},$$

já que  $a \mathcal{F} \in A$  é um casamento. O mesmo acontece para  $\varphi'_k$ .

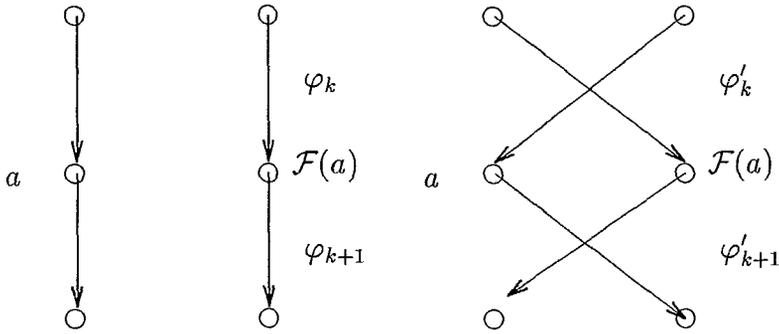


Figura 5.1: Trocas nos pares definidos por  $\mathcal{F}$ .

Temos agora que garantir que o operador transforma uma álgebra de incidência em outra álgebra de incidência. Portanto apresentaremos o seguinte lema e logo após um teorema que garantirá isso.

**Lema 5.1** *O operador  $S_k^n(\mathcal{A}^n, e, f, \mathcal{F})$  preserva o casamento  $\varphi_k \varphi_{k+1}$ . Ou seja,  $\varphi'_k \varphi'_{k+1} = \varphi_k \varphi_{k+1}$ .*

**Prova:** *Sejam  $a, b \in E$  tais que  $a = b \varphi_k$ , então*

$$b \varphi'_k \varphi'_{k+1} = a \varphi_k^{-1} \varphi'_k \varphi'_{k+1}.$$

*Se  $a \in A$ , então*

$$\begin{aligned} a \varphi_k^{-1} \varphi'_k \varphi'_{k+1} &= a \mathcal{F} \varphi'_{k+1} = \\ &= a \varphi_{k+1} = b \varphi_k \varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

*Caso contrário,  $a \notin A$ , então*

$$\begin{aligned} b \varphi'_k \varphi'_{k+1} &= b \varphi_k \varphi'_{k+1} = a \varphi'_{k+1} = \\ &= a \varphi_{k+1} = b \varphi_k \varphi_{k+1}. \end{aligned}$$

□

Se o casamento  $\mathcal{F}$  tiver as propriedades:

- S1:**  $\mathcal{F}$  é isomorfismo entre  $\mathcal{A}_k^n[e]$  e  $\mathcal{A}_k^n[f]$ ;
- S2:**  $a \mathcal{F} \neq a C_{j,k}$ , para qualquer  $a \in A$  e  $1 \leq j < k$ ;
- S3:**  $a \mathcal{F} \neq a C_{k+1,d}$ , para qualquer  $a \in A$  e  $k+1 < d \leq n$ ;

para algum  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , então  $\mathcal{F}$  é único. Defina o operador  $Spl_{k,n}(\mathcal{A}^n, e, f)$  como o operador  $S_k^n(\mathcal{A}^n, e, f, \mathcal{F})$  quando as propriedades **S1–S3** são satisfeitas.

Lembrando a notação  $C_{i,j}$ , chamaremos de  $C'_{i,j}$  as composições do mesmo tipo usando as funções  $\varphi'_k$ .

Agora enunciamos o seguinte teorema:

**Teorema 5.2 (Splice)** *Se  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  é uma álgebra de incidência de ordem  $n \geq 1$ , e  $e, f \in E$ , então  $Spl_{k,n}(\mathcal{A}^n, e, f)$ , com  $0 \leq k \leq n$ , é uma álgebra de incidência.*

**Prova:** Para  $n = 1$  o operador altera a única função da álgebra através de trocas, o que não altera a propriedade da bijeção.

Para  $n > 1$  precisamos provar que a propriedade **P1** é satisfeita, ou seja, que  $\varphi'_i \varphi'_{i+1} \cdots \varphi'_{i+j}$  é casamento para  $1 \leq i \leq n - 1$  e  $j > 0$ . Como somente as funções  $\varphi'_k$  e  $\varphi'_{k+1}$  são diferentes de suas correspondentes na álgebra original, somente os casamentos que as envolvem precisam ser considerados. Pelo lema 5.1 as composições  $C'_{i,d}$  com  $1 \leq i \leq k$  e  $k + 1 \leq d \leq n$  são casamento, pois são iguais a  $C_{i,d}$ . Falta verificar as composições  $C'_{i,k}$ , com  $1 \leq i \leq k - 1$ , e  $C'_{k+1,d}$ , com  $k + 2 \leq d \leq n$ . Seja  $a \in E$  e  $b = a C_{i,k-1}$  então as primeiras ficam:

$$a C'_{i,k} = a C_{i,k-1} \varphi'_k = b \varphi'_k.$$

Se  $a \in A$  então  $b \varphi_k \in A$  e

$$b \varphi'_k = b \varphi_k \mathcal{F} = a C_{i,k} \mathcal{F}$$

que, como  $\mathcal{F}$  é pontualmente distinto de todos os casamentos  $C_{i,k}$ ,  $b \varphi'_k \neq a$ , significa que

$$a C'_{i,k} \neq a.$$

Agora,

$$a C'_{i,k} C'_{i,k} = a C_{i,k} \mathcal{F} C_{i,k-1} \varphi'_k =$$

$$a \mathcal{F} C_{i,k} C_{i,k-1} \varphi'_k = a \mathcal{F} \varphi_k^{-1} \varphi'_k = a,$$

e portanto  $C'_{i,k}$  é casamento.

Caso  $a \notin A$ , então

$$a C'_{i,k} = a C_{i,k}.$$

Por dualidade, as composições  $C'_{k+1,d}$  também são casamentos. □

Este operador tem algumas propriedades bastante interessantes que apresentamos a seguir.

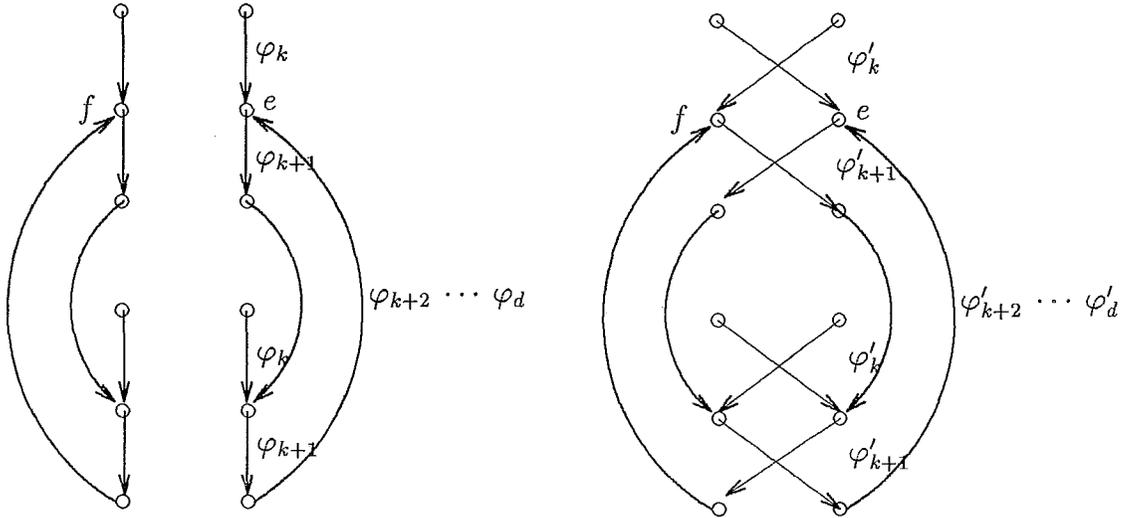


Figura 5.2: Casamento  $C_{k,d}$  preservado

**Teorema 5.3** *Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n \geq 2$ ,  $e, f \in E$ , e  $k \leq n$ , então*

**Sp1:** (simetria)  $Spl_{\varphi_k}^n(\mathcal{A}^n, e, f) = Spl_{\varphi_k}^n(\mathcal{A}^n, f, e)$ ;

**Sp2:** (inversão)  $\mathcal{A}^n = Spl_{\varphi_k}^n(Spl_{\varphi_k}^n(\mathcal{A}^n, e, f), e, f)$ ;

**Sp3:** (dualidade)  $Spl_{\varphi_k}^n(\mathcal{A}^n, e, f) = \overline{Spl_{\varphi_{n-k-2}}^n(\overline{\mathcal{A}^n}, e, f)}$ .

**Prova:**

**simetria**

Como  $e$  e  $f$  estão relacionados pelo casamento  $\mathcal{F}$  (isomorfismo), não importa a ordem. Ou seja, trocar  $e$  por  $f$  na definição acima não altera a definição, já que  $\mathcal{F}$  é casamento.

**inversão**

Como  $\mathcal{F}$  é casamento, não existem dois pares do tipo  $a, a$ , em que algum elemento apareça nos dois pares. Como para cada par deste tipo é feita uma troca das funções  $\varphi_k$  e  $\varphi_{k+1}$ , se aplicarmos a mesma troca retornaremos à situação anterior.

Basta agora garantir que os pares não se alteram após a primeira vez que aplicamos o operador, e que as condições para que possamos aplicar o operador sejam satisfeitas.

Seja  $\mathcal{A}'$  a álgebra resultante da aplicação de  $Spl_{\varphi_k}^n(\mathcal{A}^n, e, f)$ . Na álgebra  $\mathcal{A}'_k$  as funções  $\varphi'_{k-1} \varphi'_k$  e  $\varphi'_{k+1} \varphi'_{k+2}$  são as únicas diferentes das da álgebra  $\mathcal{A}'_k$ . Vamos verificar que o casamento  $\mathcal{F}$  é um isomorfismo entre  $\mathcal{A}'_k[e]$  e  $\mathcal{A}'_k[f]$ .

Primeiro consideremos a função  $\varphi'_{k-1} \varphi'_k$ . Veja o seguinte fato:

Se  $a \in A$  então  $a \varphi_{k-1} \varphi_k \in A$ , e  $a \varphi_{k-1} \varphi_k \varphi_k^{-1} = a \varphi_{k-1}$ . Então, supondo  $b = a \varphi_{k-1} \varphi_k$ ,

$$a \varphi'_{k-1} \varphi'_k \mathcal{F} = a \varphi_{k-1} \varphi'_k \mathcal{F}$$

que pelo fato acima é igual a

$$b \varphi_k^{-1} \varphi'_k \mathcal{F} = b \mathcal{F} \mathcal{F} = b = a \varphi_{k-1} \varphi_k.$$

Trocando  $a$  por  $a \mathcal{F}$  tudo também funciona, então

$$\begin{aligned} a \mathcal{F} \varphi'_{k-1} \varphi'_k &= a \mathcal{F} \varphi_{k-1} \varphi'_k = \\ &= b \mathcal{F} \varphi_k^{-1} \varphi'_k = b = a \varphi_{k-1} \varphi_k. \end{aligned}$$

Logo

$$a \varphi'_{k-1} \varphi'_k \mathcal{F} = a \mathcal{F} \varphi'_{k-1} \varphi'_k.$$

Agora consideremos a função  $\varphi'_{k+1} \varphi'_{k+2}$ :

$$\begin{aligned} a \mathcal{F} \varphi'_{k+1} \varphi'_{k+2} &= a \mathcal{F} \varphi'_{k+1} \varphi_{k+2} = \\ &= a \varphi_{k+1} \varphi_{k+2} = a \mathcal{F} \varphi_{k+1} \varphi_{k+2} \mathcal{F} = \\ &= a \varphi'_{k+1} \varphi_{k+2} \mathcal{F} = a \varphi'_{k+1} \varphi'_{k+2} \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Assim  $\mathcal{F}$  comuta com todas as funções da álgebra  $\mathcal{A}_k^{n'}$  e portanto continua sendo um isomorfismo. Agora falta verificar se  $\mathcal{F}$  é pontualmente distinto dos casamentos mencionados na restrição.

Como  $C_{j,k}$ , para  $1 \leq j < k$ , é casamento, então

$$a \mathcal{F} \neq a C_{j,k} \mathcal{F}, \text{ para todo } a \in A,$$

que pode ser escrito como

$$a \mathcal{F} \neq a C'_{j,k}.$$

Do mesmo modo, para  $k+1 < d \leq n$ ,

$$a \mathcal{F} \neq a C_{k+1,d} \mathcal{F}, \text{ para todo } a \in A,$$

e

$$a \mathcal{F} \neq a C'_{k+1,d}.$$

**dualidade**

Primeiro temos que perceber o fato de o mesmo isomorfismo  $\mathcal{F}$  funcionar tanto na álgebra  $\mathcal{A}^n$  como na sua dual  $\overline{\mathcal{A}^n}$ . Assim, aplicar o operador  $\text{Splice}_k^n$  na álgebra dual equivale a

$$\begin{cases} a \overline{\varphi_{k+1}'} = a \mathcal{F} \overline{\varphi_{k+1}}, & a \in A; \\ a \overline{\varphi_k^{-1}} \overline{\varphi_k'} = a \mathcal{F}, & a \in A; \end{cases}$$

que é igual a

$$\begin{cases} a \varphi'_{n-k}{}^{-1} = a \mathcal{F} \varphi_{n-k}^{-1}, & a \in A; \\ a \varphi_{n-k+1} \varphi'_{n-k+1}{}^{-1} = a \mathcal{F}, & a \in A; \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a \varphi_{n-k}^{-1} \varphi'_{n-k} = a \mathcal{F}, & a \in A; \\ a \varphi'_{n-k+1} = a \mathcal{F} \varphi_{n-k+1}, & a \in A; \end{cases}$$

que é exatamente o que acontece quando aplico  $\text{Splice}_k^n$  em  $\mathcal{A}^n$ .

□

Estes operadores, ou melhor, seus efeitos na topologia do complexo representado podem ser entendidos apenas se nos restringirmos a dimensões baixas, ou olhando para pequenas porções do complexo como estruturas de dimensão baixa.

Em dimensão 2, o  $\text{Splice}_1^2$  pode ser entendido como uma união/separação de vértices e faces, como no caso do operador  $\text{Splice}$  apresentado em [GS85] (se estão separado então une, se estão unidos, separa).

Em dimensões maiores, podemos imaginar o efeito de  $\text{Splice}_k^n$  baseados no efeito em duas dimensões, como uma união/separação de  $(k-1)$ -faces e  $k$ -faces.

## 5.2 Operadores de Criação

Além dos operadores de modificação, temos que ter alguns operadores de criação, que são utilizados para iniciar o processo de construção de uma álgebra de incidência.

Estes operadores devem “criar” uma álgebra de incidência a partir da qual seja possível construir outras mais complexas. Portanto a escolha de tais álgebras é bastante significativa.

Nos trabalhos de Lienhardt [Lie89] e Brisson [Bri89], como os operadores de modificação incluem um modificador de dimensão, não é necessário ter uma “criação” para cada dimensão, mas apenas para dimensão 0, que seria apenas um vértice.

Como não temos operadores para modificação da dimensão, precisamos de construtores para todas as dimensões. Uma boa escolha para as álgebras de incidência iniciais são as álgebras de incidência padrão, as quais sabemos serem minimais.

Assim definimos o operador  $CriaPadrao_d$ , com  $d \geq 1$ , que retorna uma álgebra de incidência padrão de ordem  $d$ . Podemos também definir o operador  $DestroiPadrao_d$ , que destrói uma álgebra de incidência padrão de ordem  $d$ .

### 5.3 Completude dos operadores

Iremos procurar condições para que possamos construir qualquer álgebra de incidência com os splices e com os  $CriaPadrao$ . Já que o  $Splice$  tem a propriedade de ser sua própria inversa, a estratégia usada será a de desmontar uma álgebra de incidência de ordem  $n$  em uma coleção de álgebras de incidência padrão de ordem  $n$ . Se isso for possível, então aplicando os splices na ordem inversa, podemos reconstruir qualquer álgebra de incidência de ordem  $n$ .

Todas álgebras de incidência de ordem menor ou igual a 4, conexas e que possuem todas as funções com índice ímpar iguais a identidade e as funções de índice par como casamentos são álgebras de incidência padrão.

Na verdade este fato também é verdade para  $n = 5$ , mas como não conseguimos uma prova para a completude e para este caso, nos limitamos a  $n \leq 4$ . Assim, dada uma álgebra de incidência de ordem  $n \leq 4$ ,  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , um algoritmo para desmontá-la seria:

#### Algoritmo 1

1. Faça  $k = 1$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^n$ ;
2. Para todo  $e \in E$  tal que  $e \varphi_k \neq e$  faça  $\mathcal{B} = Splice_k^n(\mathcal{B}, e, e \varphi_k)$  (isso fará com que a nova  $\varphi_k$  seja igual a identidade, e conseqüentemente, que  $\varphi_{k+1}$  seja um casamento);
3. Se  $k + 2 \leq n$  faça  $k = k + 2$  e volte ao passo 2.

A situação do  $Splice$  do passo 2 está representada na figura 5.3.

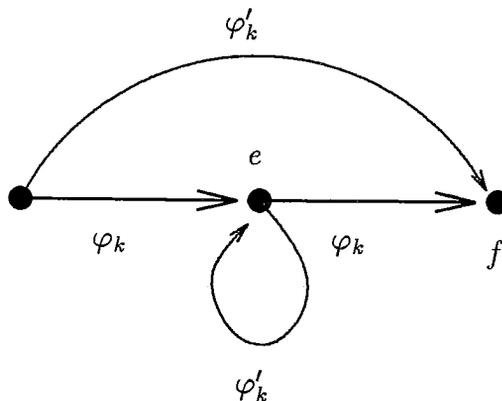


Figura 5.3: Passo 2 do Algoritmo 1

A escolha do algoritmo, da mesma forma que a definição das álgebras de incidência padrão, é de fundamental importância para que possamos desmontar uma álgebra de incidência qualquer.

Para provar a completude dos operadores, para  $n \leq 4$ , teríamos que provar que todos os splices que aparecem no algoritmo podem ser executados, além de provar que o algoritmo leva a álgebras de incidência padrão.

Como após a aplicação do algoritmo as funções com índice ímpar são a identidade e as com índice par são como as de uma álgebra de incidência padrão, temos uma álgebra de incidência padrão.

Um dos problemas na aplicação do  $\text{Splice}_k^n(\mathcal{A}^n, e, f)$  está na determinação do isomorfismo  $\mathcal{F}$ . Vamos apresentar uma forma de definir  $\mathcal{F}$ , quando  $f = e \varphi_k$ , depois bastará verificar se ele é um isomorfismo. A idéia é que  $\mathcal{F}$  deve comutar com as funções de  $\mathcal{A}_k^n$  restrita as componentes conexas de  $e$  e  $f$ .

Seja  $G_{\mathcal{A}_k^n[e]}$  o grafo construído a partir da álgebra  $\mathcal{A}_k^n[e]$ , de forma que os vértices são os elementos de  $|\mathcal{A}_k^n[e]|$  e as arestas são os casamentos da forma  $C_{j,k}$  e  $C_{k+1,d}$ , com  $1 \leq j \leq k-1$  e  $k+2 \leq d \leq n$ . Seja  $T_{\mathcal{A}_k^n[e]}$  uma árvore geradora de  $G_{\mathcal{A}_k^n[e]}$ . Defina a paridade de um vértice como sendo a paridade do nível deste vértice na árvore (o nível da raiz é zero). Defina

$$v \mathcal{F} = \begin{cases} v \varphi_k & \text{se paridade de } v \text{ for par;} \\ v \varphi_k^{-1} & \text{se paridade de } v \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Agora vamos apresentar a completude com  $n \leq 4$ .

**Teorema 5.4** *Posso aplicar o algoritmo de desmontagem em qualquer álgebra de incidência de ordem  $n \leq 4$  e desmontá-la em um conjunto de álgebras de incidência padrão de ordem  $n$ .*

**Prova:** *Seja  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$  uma álgebra de incidência de ordem  $n$ .*

**$n = 1$**

*Para  $n = 1$ , não existem restrições para a aplicação do  $\text{Splice}_1^1(\mathcal{A}^1, e, f)$ , pois a estrutura  $\mathcal{A}_1^1$  não possui funções, e as componentes conexas  $\mathcal{A}_1^1[e]$  e  $\mathcal{A}_1^1[f]$  são os próprios  $e$  e  $f$ , respectivamente. Também não existem casamentos que devem ser distintos do isomorfismo, pois só temos uma função na álgebra. Logo, sempre podemos desmontar uma álgebra de incidência de ordem 1.*

**$n = 2$**

*Para o caso  $n = 2$ , o isomorfismo também é imediato, pois a estrutura  $\mathcal{A}_k^2$  também não possui funções, no entanto existe uma única restrição para o  $\text{Splice}_2^2(\mathcal{A}^2, e, f)$ , ou seja*

$$e \mathcal{F} = f \neq e \varphi_1 \varphi_2.$$

*Como no algoritmo só são usados os splices com  $k$  ímpar, sempre podemos desmontar uma álgebra de incidência de ordem 2.*

$n = 3$

Quando  $n = 3$  usamos o  $\text{Splice}_1^3$  e o  $\text{Splice}_3^3$ . Vamos começar com o  $\text{Splice}_1^3(\mathcal{A}^3, e, f)$  com  $f = e \varphi_1$ . As componentes conexas  $\mathcal{A}_1^3[e]$  e  $\mathcal{A}_1^3[f]$  são obviamente isomorfas, pois cada uma contém dois elementos. Sejam  $g = e \varphi_2 \varphi_3$  e  $h = f \varphi_2 \varphi_3$ , então

$$|\mathcal{A}_1^3[e]| = \{e, g\}, \quad e$$

$$|\mathcal{A}_1^3[f]| = \{f, h\}.$$

Note que com  $f = e \varphi_1$ , então  $h = e \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \neq e$ . E similarmente temos  $g \neq f$ .

O isomorfismo deve ser pontualmente distinto de  $\varphi_2 \varphi_3$ , e de fato é, como veremos a seguir. Seja  $\mathcal{F}$  o isomorfismo definido por

$$e \mathcal{F} = f \quad e$$

$$g \mathcal{F} = h,$$

então

$$e \mathcal{F} \varphi_2 \varphi_3 = f \varphi_2 \varphi_3 = h = g \mathcal{F} = e \varphi_2 \varphi_3 \mathcal{F} \neq e.$$

O mesmo acontecendo para  $f$  e  $h$ . Logo  $\mathcal{F}$  satisfaz as condições para a aplicação do  $\text{Splice}$ .

Para o  $\text{Splice}_3^3(\mathcal{A}^3, e, f)$ , temos que considerar a situação em que ele será usado. A função  $\varphi_1$  é igual a identidade, a função  $\varphi_2$  é casamento e  $f = e \varphi_3$ . Como a álgebra  $\mathcal{A}_3^3$  é igual a  $(E, \{\varphi_1, \varphi_2 \varphi_3\})$ , as componentes conexas  $\mathcal{A}_3^3[e]$  e  $\mathcal{A}_3^3[f]$  só contém dois elementos, que estão associados pelo casamento  $\varphi_2 \varphi_3$ . Assim, mais uma vez o isomorfismo  $\mathcal{F}$  existe. Precisamos agora verificar se  $\mathcal{F}$  é pontualmente distinto de  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$  e  $\varphi_2 \varphi_3$ . Como  $\varphi_1$  é igual a identidade, basta verificar para  $\varphi_2 \varphi_3$ . Como  $\varphi_2$  é casamento, então  $e \varphi_2 \neq e$ , e portanto

$$e \varphi_3 \neq e \varphi_2 \varphi_3$$

e

$$e \mathcal{F} \neq e \varphi_2 \varphi_3.$$

O mesmo acontecendo para os demais elementos. Logo temos condições para aplicar o  $\text{Splice}_3^3$  que se faz necessário no algoritmo. E assim, conseguimos desmontar qualquer álgebra de incidência de ordem 3.

$n = 4$

Para o caso  $n = 4$ , usamos  $\mathcal{F}$  como o definido através do grafo  $G_{\mathcal{A}_k^4[e]}$ . Pelo corolário 3.6 é imediato que se  $a \in \mathcal{A}_k^4[e]$  então  $a \mathcal{F} \in \mathcal{A}_k^4[f]$ . Se para  $v \neq w$  tivermos que  $v \mathcal{F} \neq w \mathcal{F}$  então teremos que  $\mathcal{F}$  é um isomorfismo. Então suponha que

$v \mathcal{F} = w \mathcal{F}$  com  $v \neq w$ . Se  $v$  e  $w$  tiverem a mesma paridade, então isso não pode acontecer pois  $\varphi_k$  é bijetora. Então vamos assumir (sem perda de generalidade) que  $v \mathcal{F} = v \varphi_k$  e que  $w \mathcal{F} = w \varphi_k^{-1}$ . Mais uma vez usando o corolário 3.6, chegamos a conclusão de que existe um ciclo de comprimento ímpar no grafo  $G_{\mathcal{A}_k^n[\mathcal{F}]}$ , que é a imagem por  $\mathcal{F}$  do caminho na árvore de  $v$  até  $e$  e depois até  $w$ . Mas como só existem dois tipos de casamentos em  $\mathcal{A}_k^4$  com  $1 \leq k \leq 3$ , não pode existir um ciclo de tamanho ímpar. Logo, para  $1 \leq k \leq 3$ ,  $\mathcal{F}$  é um isomorfismo.

Basta agora confirmar que  $\mathcal{F}$  é pontualmente distinto dos casamentos de  $\mathcal{A}_k^4$  com  $k = 1$  ou  $3$ . Para  $k = 1$ , os casamentos são  $C_{2,3}$  e  $C_{2,A}$ , e pelos mesmos motivos que os apresentados no caso  $n = 3$ , a condição é satisfeita. Para  $k = 3$ , os casamentos são  $C_{1,3}$  e  $C_{2,3}$ , que são iguais, já que  $\varphi_1$  é a identidade. Mais uma vez temos essa condição satisfeita pelos mesmos motivos que no caso  $n = 3$ .

Podemos aplicar os splices que o algoritmo pede e portanto podemos desmontar qualquer álgebra de incidência de ordem 4.  $\square$

De um modo geral, sempre teremos que evitar os ciclos ímpares no grafo  $G_{\mathcal{A}_k^n[e]}$  para podermos ter o isomorfismo nos casos em que  $k$  for ímpar.

Podemos propor um algoritmo mais geral, embora não tenhamos uma prova de que pode ser sempre aplicado. Seria uma generalização do algoritmo anterior.

Dada uma álgebra de incidência de ordem  $n$ ,  $\mathcal{A}^n = (E, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\})$ , um algoritmo para desmontá-la seria:

### Algoritmo 2

1. Faça  $k = 1$  e  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^n$ ;
2. Para todo  $e \in E$  tal que  $e \varphi_k \neq e$  aplique  $Splice_k^n(\mathcal{B}, e, e \varphi_k)$  e faça  $\mathcal{B}$  igual a álgebra de incidência resultante (isso fará com que a nova  $\varphi_k$  seja igual a identidade, e conseqüentemente, que  $\varphi_{k+1}$  seja um casamento);
3. Trocar o casamento  $\varphi_{k+1}$  para o seu devido lugar, ou seja, para todo  $e \in E$ , se  $e \varphi_{k+1}$  deveria ser  $g$  (segundo a definição de álgebra padrão) mas não é, então aplique  $Splice_k^n(Splice_{k+1}^n(\mathcal{B}, e, g \varphi_{k+1}), g, e \varphi_{k+1})$  e faça  $\mathcal{B}$  igual ao resultado;
4. Se  $k + 2 \leq n$  faça  $k = k + 2$  e volte ao passo 2.

Os splices do passo 3 estão descritos nas figuras 5.4 e 5.5.

Para provar a completude dos operadores, teríamos que provar que todos os splices que aparecem no algoritmo podem ser executados, além de provar que o algoritmo leva a álgebras de incidência padrão.

Não conseguimos provar que os splices do algoritmo podem ser aplicados para o caso geral. Apesar de não termos encontrado uma prova, também não encontramos um contra exemplo.

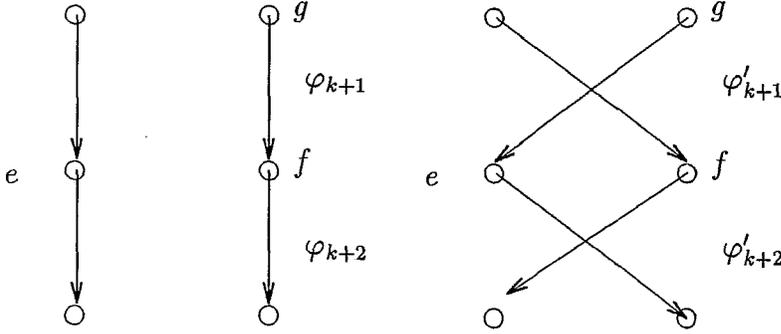


Figura 5.4:  $Splice_{k+1}^n(\mathcal{B}, e, g \varphi_{k+1})$

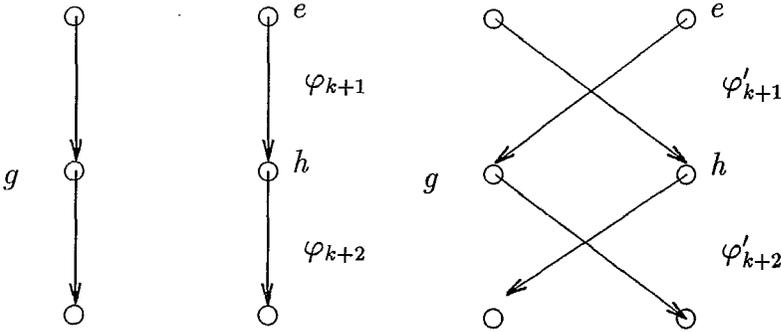


Figura 5.5:  $Splice_k^n(Splice_{k+1}^n(\mathcal{B}, e, g \varphi_{k+1}), g, e \varphi_{k+1})$

## 5.4 Comparando com outros operadores

Faremos aqui uma comparação dos operadores definidos na seção 5.2 com os operadores apresentados em [GS85], [DL89] e [Bri89].

O operador  $Splice(a, b)$  de Guibas e Stolfi é definido como

$$\begin{aligned}
 a \text{ Onext}' &= b \text{ Onext}; \\
 b \text{ Onext}' &= a \text{ Onext}; \\
 \alpha \text{ Onext}' &= \beta \text{ Onext}; \\
 \beta \text{ Onext}' &= \alpha \text{ Onext}; \\
 a \text{ Onext Flip Onext}' &= b \text{ Flip}; \\
 b \text{ Onext Flip Onext}' &= a \text{ Flip}; \\
 \alpha \text{ Onext Flip Onext}' &= \beta \text{ Flip}; \\
 \beta \text{ Onext Flip Onext}' &= \alpha \text{ Flip};
 \end{aligned}$$

onde  $a \alpha = \text{Onext Rot}$  e  $\beta = b \text{ Onext Rot}$ . Com as seguintes restrições:  $a, b \in E$  ou  $a, b \in E^*$ ; e  $b \neq a \text{ Onext Flip}$ .

O operador  $Splice_1^2$  (definido na seção 5.2) respeita estas restrições, e tem o mesmo efeito. Devido ao fato de uma álgebra de incidência só representar superfícies ori-

entáveis, o operador  $Splice_1^2$  não é totalmente equivalente ao  $Splice$  de Guibas e Stolfi.

Os operadores apresentados por Dobkin e Laszlo,  $Splice\_edges$  e  $Splice\_facets$ , são respectivamente  $Splice_1^3$  e  $Splice_2^3$ , e são definidos por:

$$Splice\_edges \left\{ \begin{array}{l} a Fnext' = b Fnext; \\ b Fnext' = a Fnext; \\ \alpha Fnext' = \beta Fnext; \\ \beta Fnext' = \alpha Fnext; \\ a Clock Spin Fnext' = \beta Spin; \\ b Clock Spin Fnext' = \alpha Spin; \\ \alpha Clock Spin Fnext' = b Spin; \\ \beta Clock Spin Fnext' = a Spin; \end{array} \right.$$

onde  $\alpha = a Fnext Clock$  e  $\beta = b Fnext Clock$ ;

$$Splice\_facets \left\{ \begin{array}{l} a Enext' = b Enext; \\ b Enext' = a Enext; \\ \alpha Enext' = \beta Enext; \\ \beta Enext' = \alpha Enext; \\ a Spin Enext' = \beta Clock Spin; \\ b Spin Enext' = \alpha Clock Spin; \\ \alpha Spin Enext' = b Clock Spin; \\ \beta Spin Enext' = a Clock Spin; \end{array} \right.$$

onde  $\alpha = a Enext Clock$  e  $\beta = b Enext Clock$ .

Observe que a generalização feita não é a única possível, mas segue a mesma linha que a generalização feita por Dobkin e Laszlo. Como o  $Splice$  de Guibas e Stolfi, mapeado para a álgebra de incidência, muda duas funções consecutivas (as únicas de uma álgebra de incidência de ordem 2), e os splices de Dobkin e Laszlo fazem a mesma coisa, generalizamos a idéia, criando um operador que modifica (o mínimo possível) duas funções consecutivas da álgebra de incidência.

Já o operador definido por Brisson em [Bri89], o  $genljoin_k$ , levando em conta a comparação feita entre as representações, é equivalente ao  $Splice_k^n$ . Do mesmo modo que os anteriores, temos que desconsiderar o caso não-orientável.

Brisson apresenta primeiro um operador denominado  $attach_k(t^1, t^2)$ , definido por:

$$\begin{aligned} switch'_k(t^1) &= t^2; \\ switch'_k(t^2) &= t^1; \\ switch'_k(switch_k(t^1)) &= switch_k(t^2); \\ switch'_k(switch_k(t^2)) &= switch_k(t^1) \end{aligned}$$

Sendo que  $t^2 \neq switch_k(t^1)$ .

O  $genljoin_k$  é definido em termos do operador  $attach_k$  da seguinte forma: aplique  $attach_k(t^1, t^2)$  para todo par definido pelo isomorfismo entre as componentes conexas de  $t^1$  e  $t^2$ , removendo da estrutura as funções  $switch_{k-1}$ ,  $switch_k$  e  $switch_{k+1}$ .

Obviamente que estas duas componentes conexas devem ser isomorfas. Estas componentes conexas são equivalentes as componentes da álgebra de incidência  $\mathcal{A}_k$ , usada na definição do  $Splice_k^n$ .

As restrições para a aplicação do  $genljoin_k$  não são muito bem esclarecidas por Brisson, mas são as restrições de aplicação do  $Splice_k^n$  mais algumas que envolvem a orientabilidade.

De um modo geral, o  $genljoin_k$  poderia ser melhor definido, e suas restrições poderiam estar mais claras.

Nos trabalhos de Dobkin e Laszlo, Brisson e Lienhardt [Lie89] são apresentados alguns operadores globais, que, em alguns casos poderiam ser definidos em função do operador  $Splice_k^n$ , como por exemplo os operadores de subdivisão de faces (*split* definido em [Bri89]).

# Capítulo 6

## Conclusão

Apresentamos uma estrutura de dados que se apresenta como uma forma de representar objetos combinatórios de dimensão  $n$ . A grande distinção deste trabalho para os demais (que tratam do mesmo assunto) está na completude de seus operadores, embora só até dimensão 4, significando que conseguimos construir qualquer instância desta estrutura com dimensão menor ou igual a 4.

A Álgebra de Incidência é definida totalmente abstrata, mas engloba características de certas estruturas combinatórias, o que nos permite chegar a resultados, como os relacionados com as variedades combinatórias.

Os operadores definidos aparentemente possuem restrições muito severas, mas que se apresentam como estritamente necessárias, e acabam por não impedir que possamos aplicá-los. Este fato nos leva a crer que a completude para dimensões maiores que 4 é de fato conseguida, entretanto não conseguimos concluir nada mais concreto a respeito.

Para discutirmos sobre completude, foi necessário saber o que eram álgebras minimais, e conseguimos caracterizar o que chamamos de álgebras padrão. Conseguimos provar que este tipo de álgebra de incidência é minimal, e usamos este resultado para provar a completude.

No caso tridimensional, podemos incluir restrições para manter a estrutura como uma representação de variedades combinatórias com custo computacional de complexidade  $\mathcal{O}(n)$ , onde  $n$  seria o número de elementos da álgebra de incidência. Em dimensões menores (1 e 2) as restrições não são necessárias, enquanto que em dimensões maiores (4, 5, etc) não podemos sequer apresentar algoritmos para decidir se uma estrutura esta representando uma variedade combinatória.

Cabe aqui mencionar o papel dos complexos CW. Eles podem parecer os vilões da história, mas não passam de vítimas, pois são renegados a segundo plano quando não nos interessavam. O fato não é que as álgebras de incidência não representam os complexos CW, mas sim que é difícil provar certas coisas sobre eles (alias, se não provamos não podemos dizer que é verdade). Coisas como orientabilidade, por exemplo, podem ser definidas em complexos CW, mas de forma mais complicada que nos complexos celulares. Daí o motivo deles ficarem de lado. Mas não podíamos ignorá-los totalmente, pois em muitas situações (inclusive nas álgebras de incidência

padrão) usamos os CW.

## 6.1 Implementação

Para que realmente tenhamos a definição de uma estrutura de dados (nos moldes mais tradicionais, com ponteiros e etc.) precisamos definir a implementação da representação por Álgebra de Incidência.

Primeiramente, podemos definir que cada elemento de uma álgebra de incidência de ordem  $n$  é implementado como um registro com  $n$  ponteiros para outros elementos (do mesmo tipo). Cada uma das funções da álgebra é associada com um ponteiro, a função  $\varphi_k$  fica representada pelo  $k$ -ésimo ponteiro de cada elemento.

Podemos reservar espaço nestes registros para informações não-topológicas (posição e forma), como posição dos vértices.

Os operadores *Splice* são implementados com trocas simples entre ponteiros, com a única dificuldade de garantir as restrições de aplicação. Achar o candidato a isomorfismo ( $\mathcal{F}$ ) é simples (como explicado logo após o algoritmo 1 na seção 5.3), o complicado é verificar se possui as propriedades **S1-S2**.

Outro detalhe de implementação se refere às variedades de dimensão 3. Para garantirmos que temos uma variedade, é preciso impedir que as 3-faces tenham uma fronteira com genus, tanto no primal como no dual. Podemos fazer isso usando uma estrutura semelhante a *Union-Find*, e não permitir a ligação entre elementos da mesma componente conexa das sub-álgebras de dimensão 2 (tirando a  $\varphi_3$  ou a  $\varphi_1$ ). Isto pode ser feito com complexidade de pior caso  $\mathcal{O}(n)$ , mas no caso médio ficaria menor que isto.

## 6.2 Próximos passos

As possíveis continuações deste trabalho podem seguir na direção de definir outros operadores locais, ou apresentar operadores globais. Alguns destes operadores foram apresentados em [Bri90].

Outra direção pode ser buscar aplicações concretas (ou até abstratas) para a álgebra de incidência. Uma possível aplicação seria estudar a classificação de variedades combinatórias de dimensão 3.

Em todas estas possibilidades é possível analisar a representação de estruturas não-orientáveis, com a inclusão de um casamento a mais na álgebra.

## 6.3 Considerações finais

Gostaria de acrescentar algumas considerações sobre o trabalho e sobre o futuro deste trabalho.

A estrutura recursiva das álgebras de incidência é, no mínimo, um dos pontos mais belos deste trabalho. Sua dualidade assustadora em alguns casos nos revela situações difíceis de imaginar.

Em dimensões altas, é difícil perceber o significado de algumas coisas, como o *Splice*. Entretanto, algebricamente e usando a recursão, é possível saber se certa situação acontece ou não.

A semelhança deste trabalho com outros é grande, mas ele se torna maior com a generalidade das funções e com a completude dos operadores.

Não creio que a álgebra de incidência seja utilizada como estrutura de dados em situações práticas do dia-a-dia, mas aqui está a prova de alguns fatos sobre algumas estruturas já utilizadas. Assim é a forma como imagino sua utilização, ou seja, como instrumento de formalização para diversas estruturas semelhantes.

# Referências Bibliográficas

- [Bri89] Erik Brisson. Representing geometric structures in  $d$  dimensions: Topology and order. *ACM*, pages 218 – 227, 1989.
- [Bri90] Erik Brisson. *Representation of  $d$ -Dimensional Geometric Objects*. PhD thesis, Department of Computer Science and Engineering, University of Washington, Seattle, Washington, USA, 1990.
- [DL89] David P. Dobkin and Michael J. Laszlo. Primitives for the manipulation of three-dimensional subdivision. *Algorithmica*, (4):3 – 32, 1989. Springer-Verlag New York Inc.
- [Ede87] Herbert Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *EACTS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, Germany, 1987.
- [Grü67] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. Interscience Publishers, 1967.
- [GS85] L. Guibas and J. Stolfi. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoi diagrams. *ACM Transactions on Graphics*, 4(2):74 – 123, abril 1985.
- [Jam55] Robert C. James. Combinatorial topology of surfaces. In *Selected Papers on Geometry*, volume 4 of *The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers*, pages 79 – 114. The Mathematical Association of America, 1979. (Mathematics Magazine V.29:1 - 39 (1955)).
- [Lie89] Pascal Lienhardt. Subdivisions of  $n$ -dimensional spaces and  $n$ -dimensional generalized maps. *ACM*, pages 228 – 236, 1989.
- [Lim70] Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Elementos de Matemática - IMPA/CNPq. Ao Livro Técnico S.A e Editora da USP, Rio de Janeiro, RJ, 1970.
- [Lim82] Elon Lages Lima. *Curso de Análise*. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, RJ, 1982.
- [Men62] B. Mendelson. *Introduction to Topology*. Allyn & Bacon, Boston, 1962.
- [Moi77] Edwin E. Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, volume 47 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.

- [MP78] D. E. Muller and F. P. Preparata. Finding the intersection of two convex polyhedra. *Theoretical Computer Science*, 7(2):217 – 236, outubro 1978.
- [Mun84] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, USA, 1984.
- [PS85] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, USA, 1985.
- [Sal66] Geoge Thomas Sallee. *Incidence Graph of Convex Polytopes*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, Washington, USA, 1966.
- [Zee79] E. C. Zeeman. *Uma Introdução Informal à Topologia das Superfícies*, volume 20 of *Monografias de Matemática*. IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, RJ, 1979.

# Índice

A	aberto .....	4	Métrico .....	3
	agregação .....	11	Topológico .....	4
	Álgebra de Incidência .....	18	Topológico	
	de ordem $n$ .....	18	triangulado .....	6
	dual .....	19	esqueleto .....	7
	padrão .....	34	estrela .....	9
	sub-álgebras de incidência .....	28	F	
	Álgebra de arestas .....	40, 41	faces .....	6
	Algoritmo de desmontagem .....	55	$k$ -face .....	6
B	bola aberta .....	4	Facet-Edge .....	43
C	casamento .....	18	fechado .....	4
	Cell-Tuple .....	48	fecho .....	4
	$k$ -célula .....	6	fronteira .....	4
	cinta .....	9	função contínua .....	5
	combinatoriamente equivalentes .....	7	G	
	Completeness .....	55	Grafos de Incidência .....	16, 45
	complexo		dual .....	17
	Abstrato .....	7	H	
	celular .....	6	homeomorfismo .....	5
	CW .....	13	I	
	dual .....	11	imersão .....	5
	recursivo .....	11	interior .....	4
	CW recursivo .....	14	isomorfos .....	7
	simplicial .....	6	M	
	$CriaPadrao_d$ .....	55	métrica .....	3
D	DCEL .....	40	N	
	desagregação .....	11	$n$ -G-maps .....	46
	dual .....	11	O	
	de um complexo .....	11	orientado .....	16
	de uma álgebra de incidência ..	19	orientável .....	16
	de um Grafo de Incidência .....	17	P	
E	esfera .....	4	poliedro de $\mathcal{K}$ .....	6
	Espaço		R	
	de Hausdorff .....	5	realização geométrica .....	8
			rotulação .....	8
			conforme .....	8

S	simplexo .....	5
	Sistemas de relações .....	38
	$S_k^n$ .....	50
	$Splice_k^n$ .....	52
	subdivisão .....	7, 8
	baricêntrica .....	9
	subfaces .....	6
	superfaces .....	6
T	topologia .....	3
	Topologia Combinatória .....	5
	Topologia Geral .....	3
V	variedade .....	5
	$n$ -variedade .....	5
	$n$ -variedade combinatória .....	9
	vizinhança .....	4