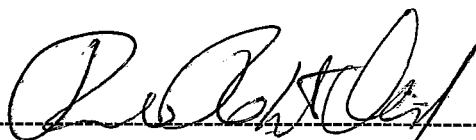


**UMA NOVA DECOMPOSIÇÃO BASEADA EM
OTIMIZAÇÃO E TÉCNICAS HEURÍSTICAS PARA O
PROBLEMA DE PLANEJAMENTO A LONGO PRAZO DE
SISTEMAS DE TRANSMISSÃO**

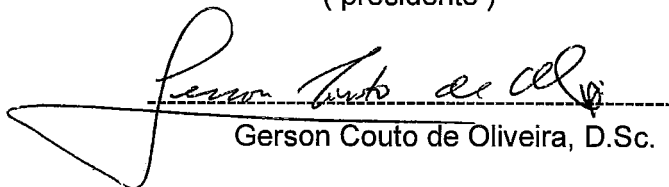
Ana Paula Calil da Costa

ESTA TESE SERÁ SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

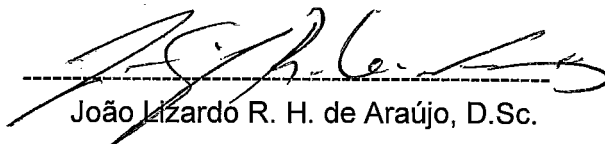
Banca examinadora:



Paulo Roberto Oliveira, Dr. Ing.
(presidente)



Gerson Couto de Oliveira, D.Sc.



João Lizardo R. H. de Araújo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1995

Costa, Ana Paula Calil da

Uma Nova Decomposição baseada em Otimização e Técnicas Heurísticas para o Problema de Planejamento a Longo Prazo de Sistemas de Transmissão

ix, 85 p, 29.7 cm. (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1995).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1.Planejamento a longo prazo de sistemas de transmissão, Decomposição de Benders, Planejamento Hierárquico I.COPPE/UFRJ II. Título (série)

a meus pais

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a meus pais pelo incansável apoio em todos os momentos.

Ao professor Paulo Roberto Oliveira por ter tornado possível a realização desta tese através do intercâmbio COPPE/CEPEL.

Ao pesquisador Gerson Couto de Oliveira pela orientação, dedicação e incentivo demonstrados ao longo de todo o desenvolvimento do trabalho.

Ao pesquisador Silvio Binato pelas valiosas sugestões aplicadas nesta tese.

À amiga Angela Ghirardi pelo carinho e preocupação para comigo e pelo auxílio na correção desta tese.

A Ada, Carlos e Luján pela amizade e por terem, de uma forma ou de outra, me ajudado no decorrer deste trabalho.

À Regina Helena Faceira pela paciência e pela datilografia deste texto.

À COPPE/UFRJ e ao CEPEL pela disponibilidade de seus recursos e instalações.

À CAPES e ao CEPEL pelo financiamento deste trabalho.

Aos muitos amigos não mencionados, mas não esquecidos, muito obrigada.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UMA NOVA DECOMPOSIÇÃO BASEADA EM OTIMIZAÇÃO E
TÉCNICAS HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO
A LONGO PRAZO DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO

Ana Paula Calil da Costa

Abril, 1995

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Gerson Couto de Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

A busca de soluções ótimas para problemas de planejamento de redes de transmissão a longo prazo é uma tarefa muito interessante devido à natureza combinatória destes problemas e, também, devido às não convexidades envolvidas. Abordagens bem sucedidas que utilizam a decomposição de Benders hierárquica incorrem num esforço computacional muito grande devido à necessidade de se resolver um problema inteiro de grande porte (subproblema de investimento) a cada iteração de Benders.

Neste trabalho, é proposto o uso de heurísticas na estrutura da decomposição a fim de evitar resolver até a otimalidade cada subproblema de Programação Inteira. O esforço computacional é substancialmente reduzido, permitindo se lidar com problemas de grande porte que seriam intratáveis utilizando técnicas combinatórias clássicas. São apresentados e discutidos, os testes realizados com o sistema de Garver de seis barras, o sistema reduzido do sudeste brasileiro e um sistema de quarenta e seis barras.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

A NEW DECOMPOSITION BASED ON OPTIMIZATION AND
HEURISTIC TECHNIQUES FOR THE LARGE SCALE
TRANSMISSION NETWORK PLANNING PROBLEM

Ana Paula Calil da Costa

April, 1995

Thesis Supervisors: Paulo Roberto Oliveira

Gerson Couto de Oliveira

Department: Systems and Computation Engineering

Pursuing optimal solutions for large scale transmission network planning problems is a formidable task due to their combinatorial nature and also due to the nonconvexities involved. Successful approaches using hierarchical Benders decomposition incur in a high computational cost mainly due to the need to solve a large integer program (the investment subproblem) for every Benders iteration.

In this work we propose to use heuristics within the decomposition framework, therefore avoiding to solve to optimality each integer subproblem. The global computational effort is substantially reduced, and allows coping with large problems that would be intractable using classical combinatorial techniques. Case studies with the 6 bus Garver test system, a reduced Southeastern Brazilian network and a 46 bus test system are presented and discussed.

ÍNDICE

Capítulo 1	Introdução	1
Capítulo 2	O Problema de Planejamento	6
2.1	Formulação do Problema	6
2.2	Métodos Clássicos	9
	Metodologia de Garver	9
	Metodologia de Kaltenbach	10
	Metodologia de Mínimo Esforço	11
	Metodologia de Villasana	13
	Decomposição Matemática	14
	Decomposição Hierárquica	15
Capítulo 3	Metodologias Utilizadas	17
3.1	Decomposição de Benders	17
	Metodologia da Decomposição	19
	Fundamentos da Decomposição	24
	Uma Formulação Alternativa dos Cortes de Benders	27
	Inviabilidade	28
3.2	Decomposição de Benders Generalizada	30
	Não Convexidades no Modelo de Fluxo de Potência Linearizado	32
	Teoria da Decomposição	33
	Algoritmo de Decomposição de Benders Generalizada	35

Decomposição de Benders no Modelo Linearizado	36
3.3 Planejamento Hierarquizado	38
3.4 Rede Fictícia	39
Capítulo 4 Metodologia Proposta	40
4.1 Decomposição dos Modelos	40
Cortes Gerados e π_{ij}	42
Subproblema de Investimento	45
Algoritmos de Resolução	46
4.2 Metodologia 1	49
4.3 Metodologia 2	51
Algoritmo de Cortes Simples	51
Modificação Adicional	53
Capítulo 5 Testes e Resultados	56
5.1 Sistema de 6 Barras (Sistema de Garver)	56
Metodologia 1	59
Metodologia 2	60
5.2 Sistema Reduzido do Sudeste Brasileiro	63
5.3 Sistema Reduzido do Sul Brasileiro	67
Capítulo 6 Conclusões	71
Referências Bibliográficas	72

Apêndice A	Determinação dos Índices de Sensibilidade do Modelo de Fluxo de Potência Linearizado	75
-------------------	---	-----------

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Planejar a expansão de um sistema de transmissão de energia elétrica implica em responder a duas questões básicas:

- que obras devem ser construídas para aumentar a capacidade de transmissão ; e
- quando estas obras devem entrar em operação.

As respostas a estas questões, aliadas à necessidade de se investir o mínimo possível, são o objetivo do planejamento da expansão da transmissão e integram um conjunto de outras questões não menos importantes, tais como o horizonte que se quer planejar, a demanda que deve ser atendida e os recursos financeiros para a execução das obras necessárias. Enfim, o planejamento é, de uma forma geral, um conjunto de ações ordenadas no tempo que levam à proposição de decisões a serem tomadas em épocas distintas ou não, de tal forma que os objetivos sejam atendidos satisfatoriamente.

O objetivo do planejamento de redes elétricas é estabelecer quais, onde, quando e com que capacidade novos equipamentos, tais como linhas de transmissão e transformadores, devem ser instalados de modo a minimizar os custos de investimento e de operação ao longo do período de estudo, dadas as projeções de crescimento da demanda e a expansão da geração, e respeitados os limites operativos da rede.

O planejamento da expansão de redes de transmissão pode ser classificado como estático ou dinâmico. A expansão estática envolve apenas transições de um estágio para outro do planejamento, por exemplo, dados uma configuração de um certo ano, a demanda e o parque gerador do ano seguinte, deseja-se determinar **onde** e **que** equipamentos serão instalados a um custo mínimo. O planejamento dinâmico envolve uma expansão ano-a-ano que vai do ano inicial até o ano horizonte. Assim, além de onde e quais, se deseja saber **quando** as novas instalações começarão a operar.

Uma política de expansão consiste em uma seqüência de decisões de natureza discreta (instalação ou não de novos equipamentos) associadas a cada estágio do planejamento. A obtenção de alternativas para esta expansão resulta da resolução de um problema de otimização. Nem sempre a expansão de uma rede de transmissão envolve só reforços na rede existente, às vezes esta expansão envolve mudanças significativas na topologia da rede.

Ferramentas

O processo de planejamento da expansão de redes de transmissão pode ser dividido em duas atividades distintas: o planejamento do caso base e o planejamento para contingências. As ferramentas utilizadas para se realizar estas atividades são a Análise de Redes e a Síntese de Redes. A Análise verifica se todos os critérios de operação da rede, tais como limites de tensão das barras e de carregamento dos circuitos, estão sendo atendidos. A Síntese de Redes consiste em determinar os reforços que serão incluídos na rede a fim de que estes limites sejam respeitados, produzindo planos que deverão ser refinados pelo planejador em um segundo momento a fim de considerar outros aspectos, tais como suporte de reativos, estabilidade, segurança e adequação da rede.

O planejamento do caso base consiste em conectar as novas barras com geração e carga que estão inicialmente isoladas e adicionar um conjunto de circuitos (linhas de transmissão e transformadores), a um custo mínimo de investimento, a fim de atender a carga prevista e tal que todos os carregamentos dos circuitos estejam dentro dos limites operativos. A busca deste conjunto de circuitos compreende uma enorme quantidade de combinações diferentes de adições candidatas, e não existem métodos de programação matemática (otimização discreta) capazes de garantir a obtenção de soluções ótimas para problemas de grande porte [14].

O planejamento para contingências consiste em determinar um conjunto de adições com o objetivo de proteger a rede elétrica contra contingências em seus circuitos. Este planejamento é dito concluído quando não existe nenhum circuito na rede que em contingência viole os limites de carregamento.

Metodologia

O planejamento da expansão é realizado em três etapas distintas: longo, médio e curto prazo.

O planejamento a longo prazo pode se basear no estabelecimento inicial de uma configuração para o ano horizonte (estágio final) diretamente a partir da rede do ano inicial. Neste caso, identifica-se as adições mais atraentes para a configuração final da rede, para em seguida, determinar em que estágio cada uma destas adições deverá ser agregada à rede. Esta estratégia limita os candidatos à adição àqueles selecionados para sintetizar a rede *alvo*, e pode ser utilizada tanto por métodos de síntese interativa quanto por métodos baseados em técnicas de otimização.

Neste tipo de planejamento, utiliza-se, em geral, um modelo de fluxo de potência linearizado que fornece uma solução mesmo para problemas que não poderiam ser resolvidos pelos métodos convencionais de fluxo de potência. Estes problemas são não lineares, o que ocasiona problemas de convergência na utilização destes métodos. O modelo linearizado fornece uma solução aproximada dos fluxos na rede. A única condição exigida para que este modelo forneça uma solução é que a rede seja conexa.

Nos estudos de longo prazo, procura-se simplificar a representação da rede de transmissão. A necessidade de se avaliar várias alternativas de expansão torna oneroso um maior detalhamento na representação do sistema, desnecessário num primeiro momento em que elas são comparadas por métodos simplificados.

Os resultados obtidos neste planejamento são depois usados nos planejamentos de médio e curto prazo, onde são usadas formulações mais precisas para avaliar as diversas alternativas de expansão obtidas nesse tipo de planejamento.

Nos estudos de médio prazo, o nível de representação precisa estar mais detalhado, visando a análise e quantificação de outros aspectos, tais como suporte reativo na rede. Efetua-se esta atividade após a síntese de potência ativa, haja visto os custos envolvidos em suporte de reativos serem bem mais baixos que os custos de adição de circuitos.

Nos métodos para planejamento a curto prazo, detalha-se a análise das alternativas obtidas, com estudos de estabilidade, confiabilidade etc.

O problema de planejamento da expansão de redes de transmissão a longo prazo é caracterizado por ser um problema de otimização misto e multi-estágio. Misto, pois envolve decisões discretas de construir ou não novos equipamentos e variáveis contínuas que descrevem o estado operativo da rede e multi-estágio porque o plano de expansão para um dado estágio qualquer depende dos planos produzidos para os estágios anteriores. Este problema é formulado como um problema de programação não linear inteira mista (PNLIM), que é reconhecidamente um problema de tratamento difícil, principalmente para sistemas de médio/grande porte. A dificuldade de se encontrar a solução ótima de um PNLIM, mesmo utilizando técnicas de decomposição matemática, se deve basicamente à natureza combinatória das variáveis de decisão e às não convexidades referentes às relações não lineares entre as variáveis de investimento e as de operação.

Neste trabalho, é desenvolvido um algoritmo de planejamento estático ótimo da expansão a longo prazo de sistemas de transmissão. É utilizada a técnica de Decomposição Generalizada de Benders que decompõe o problema de planejamento em duas partes: determinar o investimento e estabelecer o custo de operação associado ao investimento já predeterminado. Esta técnica de programação matemática explora esta decomposição natural do problema de planejamento de redes elétricas com a finalidade de obter a otimização global dos custos de investimento e dos custos esperados de operação através da solução iterativa de dois subproblemas, um que resolve o investimento em novos equipamentos e outro que calcula o custo esperado de operação do sistema. O processo de solução inicialmente utiliza modelos relaxados com a finalidade de contornar os problemas de não convexidade.

Esta tese, além de propor um método de decomposição que utiliza um planejamento hierarquizado com modelos relaxados, propõe, também, não resolver os subproblemas de investimento até a otimalidade, buscando somente uma solução viável. Desta forma, diminui-se o esforço computacional exigido na resolução de problemas de programação inteira. Este planejamento não considera custos de operação, principalmente em parques predominantemente hidráulicos, pois não há custo imediato de produção.

No capítulo 2, apresenta-se o problema de planejamento e as principais formulações e técnicas usadas na resolução deste problema. No capítulo 3, desenvolve-se a técnica de Decomposição Generalizada de Benders e são mostradas as metodologias existentes utilizadas neste trabalho. No capítulo 4, são apresentadas as duas metodologias propostas nesta tese. No capítulo 5, são mostrados testes e resultados, e, finalmente, no capítulo 6, as conclusões desta tese. O apêndice A descreve a obtenção dos índices de sensibilidade do modelo linearizado.

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO

Neste capítulo, apresenta-se o problema de planejamento de sistemas de transmissão cujo método de solução é motivo da presente tese. Inicialmente, é apresentado o modelo na sua forma matemática, assim como suas características específicas. Em seguida, é apresentado um histórico e as principais metodologias utilizadas para resolver este problema.

2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Utilizando um modelo de fluxo de potência linearizado, o problema de planejamento pode ser formulado através da seguinte forma:

$$\min c^T X e \quad (2.1)$$

$$\text{s.a} \quad S f_1 + S f_2 + g = d \quad (2.1.1)$$

$$f_1 - \gamma_1 S^T \theta = 0 \quad (2.1.2)$$

$$f_2 - \gamma_2 X S^T \theta = 0 \quad (2.1.3)$$

$$|f_1| \leq \bar{f}_1 \quad (2.1.4)$$

$$|f_2| - X \bar{f}_2 \leq 0 \quad (2.1.5)$$

$$g \leq \bar{g} \quad (2.1.6)$$

$$x_{ij} \in \{0..n_{ij}\} \quad (2.1.7)$$

onde

f_1 e f_2 são os vetores de fluxos nos circuitos existentes e candidatos, respectivamente,

S é a matriz de incidência circuito-barra,

g é o vetor de gerações nas barras,

d é o vetor de demandas nas barras,

γ_1 e γ_2 são as matrizes diagonais de susceptâncias dos circuitos existentes e candidatos,

θ é o vetor dos ângulos das tensões nodais,

\bar{f}_1 e \bar{f}_2 são os vetores que representam a capacidade máxima de transmissão dos circuitos existentes e candidatos,

\bar{g} é o vetor com os limites de geração das usinas do sistema,

X é a matriz diagonal que representa as decisões de investimento, composta de variáveis inteiras x_{ij} para cada faixa de passagem candidata (i, j) entre as barras i e j .

c é o vetor de custos,

e é o vetor unitário, e

n_{ij} é o número máximo de adições para a faixa de passagem (i, j) .

A primeira restrição de igualdade corresponde à conservação de potência em cada nó (barra) da rede, isto é, a potência líquida injetada deve ser igual à soma das potências que fluem pelos circuitos (linhas, transformadores) que têm este nó como um de seus terminais. Isto equivale a impor a Primeira Lei de Kirchhoff. A Segunda Lei, representada pelas igualdades seguintes, é utilizada para expressar os fluxos de potência nos circuitos como funções das tensões de seus nós terminais. As desigualdades que se seguem estabelecem os limites máximos nos fluxos e nas gerações.

A formulação (2.1) é um problema PNLIM. A tentativa de encontrar a solução ótima desta formulação implica na elaboração de um algoritmo especializado para resolver um problema PNLIM. O complicador do problema é o conjunto de equações (2.1.3), que dão um caráter não linear ao problema, pois esta relação incorpora variáveis de operação contínuas multiplicadas por variáveis de investimento discretas.

Não existem algoritmos eficientes para se resolver um problema de Programação Inteira [17], que por se tratar de otimização combinatória é classificado como NP-Completo. NP-Completo é uma classe de problemas que não podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais. Sendo assim, a não existência de algoritmos polinomiais para a resolução da formulação (2.1) justifica a utilização de algoritmos enumerativos ou o desenvolvimento e utilização de heurísticas.

Em seguida, serão apresentadas as diversas formulações desenvolvidas para modelar o problema de planejamento de sistemas de transmissão e as respectivas técnicas e metodologias sugeridas para resolvê-las.

2.2 Métodos Clássicos

O processo de planejamento da expansão de redes elétricas envolve a consideração de uma grande quantidade de combinações de circuitos candidatos à adição. Isto faz com que seja necessário o desenvolvimento de técnicas computacionalmente eficientes para simular a adição de circuitos.

Metodologia de Garver

Em 1970, Len Garver [4] apresentou uma nova metodologia para resolver o problema de planejamento de sistemas de transmissão. Esta metodologia, hoje conhecida como a Metodologia de Garver, representou a primeira proposta de Síntese de Redes para planejamento.

O modelo da rede proposto por Garver, chamado de Modelo de Transporte, só leva em consideração a Primeira Lei de Kirchhoff, ou seja, ele descarta o conjunto de equações (2.1.2) e (2.1.3) da formulação (2.1). Desta forma, desaparece o caráter não linear do problema, reduzindo, assim, sua complexidade. Esta nova formulação, um problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM), nada mais é do que uma relaxação da formulação (2.1).

Garver introduziu o conceito de "ligações de sobrecarga". Ligações de sobrecarga são ligações fictícias com capacidade de transmissão ilimitadas e custos muito superiores aos das ligações normais. Estas ligações são colocadas entre todas as barras onde são permitidas construções de novas linhas. Desta forma, o fluxo que não puder ser transportado pelas ligações normais, será então transportado pela ligação de sobrecarga.

Garver não formulou um algoritmo que encontrasse a solução ótima deste modelo. Sua proposta, baseada em programação linear, era eliminar as sobrecargas. Em cada estágio do processo de planejamento, resolve-se um problema de programação linear e adiciona-se um circuito na linha mais sobrecarregada. O processo se repete até que todas as sobrecargas tenham sido eliminadas.

A maior limitação desta metodologia, além de não garantir a solução ótima do problema, é a grande simplificação do modelo. Isto pode levar a alternativas de planejamento bem distantes da realidade. Garver evitou parcialmente este problema atribuindo custos elevados aos fluxos nos circuitos. Estes custos, chamados de *guide numbers*, atuam como uma aproximação da Segunda Lei de Kirchhoff [10].

Uma característica importante desta metodologia é não apresentar nenhuma dificuldade em resolver um sistema elétrico não conexo, pois a existência de redes iniciais não conexas em planejamento a longo prazo é muito comum. Outro fato importante é a facilidade de se manipular este modelo por ser este um problema linear.

Metodologia de Kaltenbach

Ainda em 1970, Kaltenbach e outros [8] apresentaram uma formulação que combinava programação linear com programação dinâmica. Esta formulação se destina ao estudo do planejamento dinâmico de sistemas de transmissão.

Na fase inicial desta metodologia, calcula-se o incremento mínimo necessário nas capacidades das linhas para que se atenda a demanda em cada ano de planejamento através de um modelo linear. Resolvido este modelo linear, a cada linha estará associado um conjunto de incrementos, $\Delta\gamma = \{\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2, \dots, \Delta\gamma_k\}$, onde k é o número de anos do planejamento. Uma vez esta solução obtida, executa-se um fluxo de potência a fim de verificar as violações na rede. Este processo se repete se as sobrecargas não tiverem sido eliminadas totalmente devido à falta de precisão do modelo linear. Correções nos incrementos são feitas através de novas aplicações do modelo de Programação Linear.

Na fase final do processo, onde os incrementos nas capacidades dos circuitos para todos os anos já estão calculados, utiliza-se a Programação Dinâmica. A expansão é realizada apenas para um curto período do planejamento, pois se torna inviável o cálculo das sensibilidades embutidas no modelo linear para um período de planejamento muito grande. Esta metodologia costuma ser utilizada em planejamentos de 5 ou 6 anos, não mais do que isto, o que representa uma grande limitação na utilização da mesma. A expansão de cada linha da rede é realizada separadamente via Programação Dinâmica Forward, onde a adição na capacidade de cada linha precisa ser maior que $\Delta\gamma_p, p = 1, \dots, T$. O objetivo é a minimização dos investimentos durante o período de planejamento.

Metodologia de Mínimo Esforço

Em 1982, desenvolveu-se uma metodologia chamada de Mínimo Esforço [5] para resolver o problema de planejamento utilizando a formulação (2.1). Esta metodologia, como a de Garver, realiza um plano de expansão passo-a-passo, ou seja, os circuitos são adicionados um a um ou em pequenos grupos. O critério para a adição dos circuitos é determinado por uma análise de sensibilidades.

Esta metodologia introduziu um importante conceito, o conceito de **rede fictícia** [5], usado para contornar o problema de rede inicial não conexa. Este conceito será visto com mais detalhes no próximo capítulo.

Sendo fixadas as gerações e cargas das barras de um sistema, o modelo de fluxo de potência linearizado pode ser representado numa forma mais compacta:

$$B\theta = P \tag{2.2}$$

onde

B é a matriz de susceptâncias,

θ é o vetor dos ângulos das tensões nodais, e

P é o vetor das injeções líquidas de potência ativa.

A matriz B é dada por:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \gamma_{ij} & \text{se} & \quad i \neq j \\ b_{ii} &= - \sum_{j \in \Omega_i} \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde

γ_{ij} é a susceptância do circuito (i,j) , e

Ω_i é o conjunto dos circuitos conectados à barra i .

Obtendo os valores de θ da resolução do sistema linear (2.2), pode-se calcular os fluxos de potência ativa nas linhas através da relação:

$$f_{ij} = (\theta_i - \theta_j) \gamma_{ij} \quad (2.4)$$

Mostra-se que a solução de (2.2) é também solução do problema quadrático abaixo [5]:

$$\begin{aligned} \min Z &= \frac{1}{2} \sum_{ij \in \Omega} f_{ij}^2 / \gamma_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j \in \Omega_i} f_{ij} = P_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

o que indica que a distribuição dos fluxos segue a lei do mínimo esforço que minimiza (2.5). Esta lei pode ser usada como índice de desempenho para ordenar os candidatos à adição, sendo a adição de maior impacto sobre Z aquela mais favorável para a distribuição "natural" dos fluxos. Assim, a variação da função objetivo Z em relação a uma variação da susceptância dos circuitos candidatos pode ser usada como índice de sensibilidade do sistema de transmissão. Admitindo-se uma variação da susceptância da rede pela adição de um novo componente no circuito (i,j), obtém-se o seguinte critério de desempenho [5]:

$$\Delta Z_{ij} = -\frac{1}{2} (\theta_i - \theta_j)^2 \Delta \gamma_{ij} \quad (2.6)$$

Desta forma, são selecionados os melhores circuitos candidatos à adição quando a rede apresenta sobrecargas. Faz-se um *ranking* dos candidatos por um índice de benefício/custo, onde o benefício é a redução das sobrecargas na rede e o custo é o valor presente da adição do circuito.

Utilizando esta metodologia, foi desenvolvido um software denominado SINTRA (Síntese Interativa de Redes de Transmissão) através de um convênio entre a UNICAMP, o CEPEL e a Eletrobrás. Como esta metodologia não garante a otimalidade da solução obtida, no caso do SINTRA, depois de terminado o processo de adições de circuitos, é realizado um processo de retirada dos circuitos que ficaram supérfluos.

Metodologia de Villasana

Em 1985, Villasana e outros [6] apresentaram um novo modelo, o Modelo Híbrido, que combinava o modelo de Garver com o modelo de fluxo de potência linearizado.

Esta metodologia pode ser vista como uma modificação da de Garver. O modelo utilizado é o mesmo, com exceção da Segunda Lei de Kirchhoff, que aqui é levada em consideração, mas apenas para os circuitos já existentes na rede base. Também é utilizado o conceito de ligação de sobrecarga e usa-se programação linear para determinar o circuito mais sobrecarregado.

A expansão realizada também é passo-a-passo e o processo só termina quando todas as sobrecargas tiverem sido eliminadas.

Esta metodologia possui todas as vantagens da Metodologia de Garver e ainda apresenta resultados superiores, pois parte da rede, a rede existente, obedece, também, à Segunda Lei de Kirchhoff, o que faz com que o modelo seja um pouco mais realista, mantendo sua capacidade linear.

As desvantagens são a simplificação do modelo e a não garantia da otimalidade do processo.

Decomposição Matemática

Ainda em 1985, foram apresentados dois trabalhos, [7] e [11], que se utilizavam de técnicas de decomposição matemática para tentar resolver a formulação (2.1). A metodologia utilizada foi a Decomposição de Benders que explora a decomposição natural do problema de planejamento de redes elétricas com a finalidade de obter a otimização global dos custos de investimento e dos custos de operação. Esta decomposição será vista com maiores detalhes no próximo capítulo.

Granville e Pereira [11] apresentaram um estudo sobre o modelo de fluxo de potência linearizado e sua aplicação ao problema de expansão abordado pelo Método de Benders mostrando todos os aspectos teóricos desta união.

Em [7], Pereira e outros, além de utilizarem a Decomposição de Benders, usaram mais de um modelo para representar o problema de planejamento da expansão: O Modelo de Transporte e o Modelo de Fluxo de Potência linearizado. Foi a primeira proposta no sentido de utilizar inicialmente um modelo mais relaxado, mais simples, para que sua solução fosse utilizada como solução inicial para a resolução do modelo completo.

Decomposição Hierárquica

Em 1991, Romero e Monticelli [2] apresentaram uma decomposição hierárquica para o problema de planejamento a longo prazo. Esta decomposição utiliza três níveis diferentes para modelar a rede: Modelo de Transporte, Modelo Híbrido e Modelo de Fluxo de Potência Linearizado, onde cada nível representa uma relaxação do nível seguinte. Em todos os níveis, o problema é decomposto utilizando-se o método de Benders (subproblemas de operação e de investimento).

O processo consiste em resolver a expansão em um determinado nível (mais relaxado) e passar as informações relevantes obtidas para o próximo. Este então é solucionado e o processo se repete até o último nível. À medida que o processo se desenvolve, as soluções obtidas ao final de cada nível de decomposição são mais apuradas que as anteriores, onde são utilizados modelos mais detalhados, mais próximos da realidade.

Inicialmente, utiliza-se o Modelo de Transporte como subproblema de operação e as restrições de integralidade são relaxadas, ou seja, despreza-se a natureza discreta das adições dos circuitos. As informações obtidas na resolução deste primeiro nível são passadas para o segundo, como por exemplo, os investimentos decididos, que serão a solução inicial do segundo nível, e todas as informações sobre os custos esperados de operação. No segundo nível, utiliza-se o Modelo Híbrido com as restrições de integralidade relaxadas. Na última etapa do processo, as restrições de integralidade são introduzidas e utiliza-se o modelo de Fluxo de Potência linearizado para representar a rede.

Para melhorar o desempenho do subproblema de investimento, são introduzidas algumas regras de adição de linha. Estas regras implicam em dizer que só faz sentido adicionar certas linhas se outras também forem adicionadas simultaneamente, pois se fossem adicionadas de forma isolada, não afetariam o estado da rede. Assim, se esta informação for previamente introduzida no problema, iterações desnecessárias podem ser economizadas.

Desta forma, o subproblema de investimento tem mais informações sobre a operação da rede, resultando em melhorias nas decisões de investimento tomadas.

Neste método, todo subproblema de investimento acumula as informações obtidas nos níveis anteriores, o que é muito vantajoso, pois melhora a representação das restrições do subproblema de operação.

A grande vantagem deste método é explorar as vantagens de cada modelo utilizado.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIAS UTILIZADAS

Neste capítulo, são apresentadas as metodologias que se relacionam diretamente com o desenvolvimento deste trabalho.

3.1 Decomposição de Benders

Técnicas de decomposição matemática vêm sendo amplamente utilizadas na resolução de problemas complexos, de grande porte, como o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão tratado no presente trabalho. Dentre estas técnicas, uma das mais utilizadas é a Decomposição de Benders.

A decomposição de Benders explora a decomposição natural deste problema através da solução iterativa de dois problemas:

1. Subproblema de Investimento, onde se escolhe um plano de expansão candidato e calculam-se os custos de investimentos associados a ele.
2. Subproblema de Operação, onde é testado o plano de expansão candidato, em termos da avaliação do desempenho do estado operativo do sistema.

A otimização global é atingida através da solução iterativa dos dois subproblemas separadamente, como ilustrado na figura 3-1.

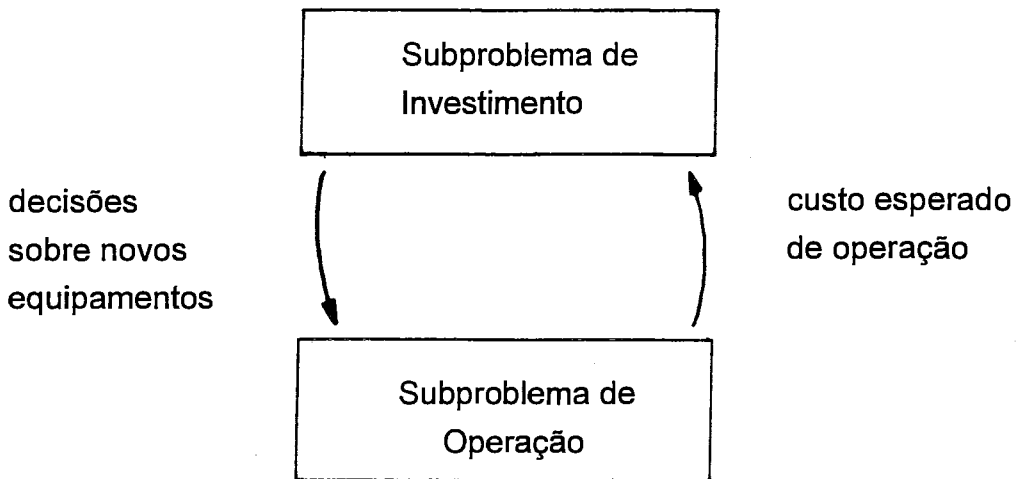


Figura 3-1. - Decomposição do Problema de Planejamento da Expansão

Esta decomposição traz muitas vantagens em termos de flexibilidade e modularidade. Por exemplo, os subproblemas de investimento e de operação podem ser modelados separadamente, o que torna possível a utilização de diferentes algoritmos de solução.

Em resumo, técnicas de decomposição podem fornecer um equilíbrio entre a necessidade de se decompor o problema complexo em subproblemas de tratamento mais fácil e a necessidade de se obter um modelo global que forneça soluções ótimas e consistentes [13].

Metodologia da Decomposição

O problema de minimizar os custos da expansão dos sistemas de transmissão pode ser representado pelo problema de otimização [7]

$$\text{Min } z = c(x) + d(y) \quad (3.1)$$

$$\text{s.a } A(x) \geq b$$

$$E(x) + F(y) \geq h$$

onde as variáveis x representam as decisões sobre capacidades de transmissão e as variáveis y representam decisões de operação (níveis de geração, corte de carga, fluxos nas linhas, etc). O primeiro grupo de desigualdades ($Ax \geq b$) representa as restrições nos investimentos, enquanto que o outro ($E(x) + F(y) \geq h$) representa as restrições de operação. Pode-se notar que as decisões de investimento afetam o conjunto de restrições operacionais.

O problema (3.1) pode ser representado como um processo de decisão em dois estágios:

- No primeiro estágio, calcula-se uma decisão de investimento viável x^* de custo mínimo.
- No segundo, dado x^* , minimiza-se os custos de operação.

$$\text{Min } d(y) \quad (3.2)$$

$$\text{s.a } F(y) \geq h - E(x^*)$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de investimento e de operação. A figura 3-2 ilustra o processo de decisão.

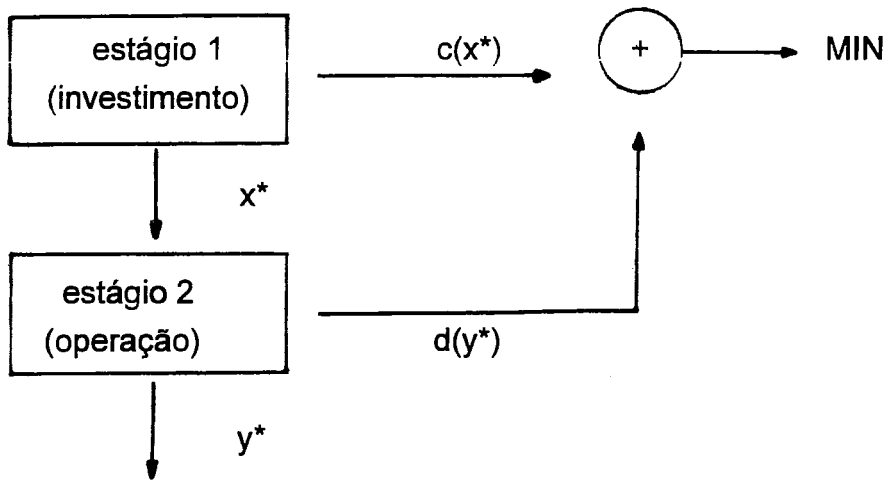


Figura 3-2. - Processo de Decisão

A metodologia de decomposição é baseada nas seguintes observações:

- O custo de operação $d(y^*)$, onde y^* é a solução ótima de (3.2), pode ser visto como uma função $\alpha(x)$ da decisão x , isto é,

$$\alpha(x) = \text{Min } d(y) \quad (3.3)$$

$$\text{s.a. } F(y) \geq h - E(x)$$

- O problema da expansão da capacidade (3.1) pode ser reescrito em termos das variáveis x :

$$\text{Min } c(x) + \alpha(x) \quad (3.4)$$

$$\text{s.a. } A(x) \geq b$$

onde $\alpha(x)$ é a solução de (3.3) para um dado x .

A função $\alpha(x)$ fornece informações sobre as consequências da decisão de investimento x em termos dos custos de operação.

O esquema da decomposição de Benders é uma técnica para construir uma aproximação de $\alpha(x)$ baseada na solução do subproblema de operação (3.2) como ilustrado na figura. 3-3.

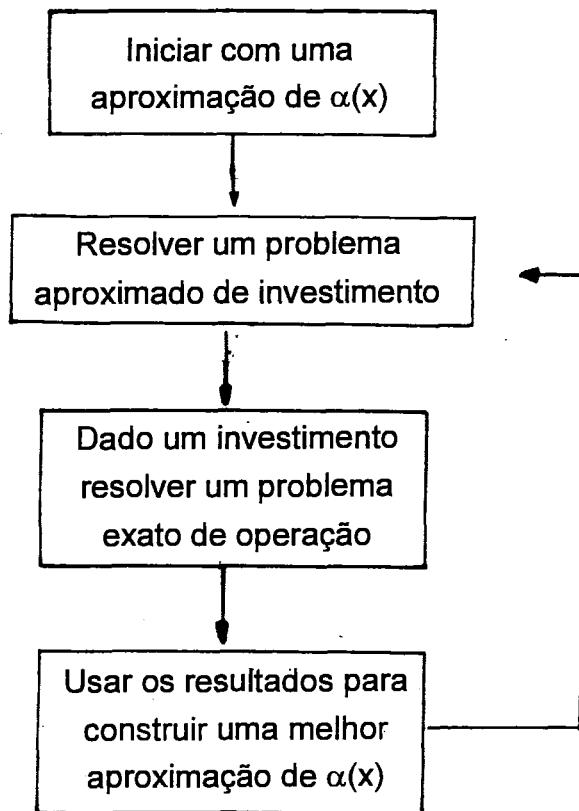


Figura 3-3. - Esquema Geral da Decomposição de Benders

Este esquema em dois estágios é resolvido iterativamente como se segue:

- a) Começar com uma aproximação $\hat{\alpha}(x)$ que é um limite inferior de $\alpha(x)$.

b) Subproblema de Investimento:

Resolver uma aproximação do problema (3.4)

$$\text{Min } c(x) + \hat{\alpha}(x) \quad (3.5)$$

$$\text{s.a } A(x) \geq b$$

Este problema é escrito somente em termos das variáveis x e pode ser resolvido por qualquer algoritmo especializado.

c) A solução ótima de (3.5)

$$\underline{z} = c(x^*) + \hat{\alpha}(x^*) \quad (3.6)$$

é um limite inferior para a solução ótima do problema de expansão da capacidade (3.1).

d) Subproblema de Operação:

Resolver

$$\text{Min } d(y) \quad (3.7)$$

$$\text{s.a } F(y) \geq h - E(x^*)$$

onde x^* é a solução de (3.5). Como o subproblema de investimento, que é escrito em termos das variáveis x , este é escrito em termos de y e também pode ser resolvido por qualquer algoritmo especializado.

e) Seja y^* a solução de (3.7), então (x^*, y^*) é uma solução viável do problema (3.1), mas não necessariamente ótima. Assim, o valor da função objetivo

$$\bar{z} = c(x^*) + d(y^*) \quad (3.8)$$

é o limite superior para a solução ótima do problema de expansão da capacidade.

f) Se $(\bar{z} - \underline{z})$ for menor que uma dada tolerância o problema é considerado resolvido e (x^*, y^*) é sua solução ótima. Caso contrário, gera-se uma nova aproximação $\hat{\alpha}(x)$ que ainda será um limite inferior para $\alpha(x)$ e volta-se para o passo (b).

O ponto crítico neste esquema de decomposição é a atualização de $\alpha(x)$ a partir da solução de (3.7) (passo f).

Associado à solução do subproblema de operação, existe um conjunto de multiplicadores de Lagrange que avaliam as mudanças nos custos de operação do sistema causadas por variações nas capacidades das linhas de transmissão. Estes multiplicadores são usados para gerar uma restrição linear em termos das variáveis x . Esta restrição, conhecida como **Corte de Benders**, é incorporada ao subproblema de investimento, que uma vez resolvido representa uma nova tentativa de solução.

Na próxima seção, o algoritmo da decomposição de Benders será derivado admitindo-se que o subproblema de operação seja linear. Geoffrion [20] estendeu esta decomposição para problemas não lineares e provou sua convergência sob algumas condições de convexidade e regularidade.

Fundamentos da Decomposição

A decomposição de Benders é uma técnica para aproximar a função $\alpha(x)$ no problema de expansão (3.4) reproduzido abaixo:

$$\text{Min } c(x) + \alpha(x) \quad (3.9)$$

$$\text{s.a. } A(x) \geq b$$

onde $\alpha(x)$ é a solução do Subproblema de Operação (3.3), assumido linear nesta seção. Assume-se, também, ser um problema limitado, ou seja, de solução finita.

$$\alpha(x) = \text{Min } dy \quad (3.10)$$

$$\text{s.a. } Fy \geq h - Ex$$

O princípio da decomposição de Benders pode ser derivado como se segue:

O dual do problema (3.10) pode ser escrito como:

$$\text{Max } \pi(h - Ex) \quad (3.11)$$

$$\text{s.a. } \pi F \leq d$$

A região viável do problema (3.11), definida como $\pi F \leq d$, não depende da decisão x . Esta região é um poliedro convexo e pode ser caracterizado pelo conjunto de pontos extremos (vértices) $\Pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^p\}$, onde p é o número de vértices.

Já que a solução ótima de um problema de programação linear sempre corresponderá a um vértice da região viável, o problema (3.11) pode, a princípio, ser resolvido por enumeração:

$$\text{Max } \pi^i (h - Ex) \quad (3.12)$$

$$\pi^i \in \Pi$$

ou

$$\text{Min } \alpha \quad (3.13)$$

$$\text{s.a } \alpha \geq \pi^1 (h - Ex)$$

$$\alpha \geq \pi^2 (h - Ex)$$

⋮

$$\alpha \geq \pi^p (h - Ex)$$

onde α é um escalar.

Por α ser maior ou igual a cada $\pi^i (h - Ex)$, ele será maior ou igual a $\max \pi^i (h - Ex)$. Como a função objetivo de (3.13) é minimizar α , no mínimo uma restrição será atendida na igualdade na solução ótima. Portanto, a solução ótima de (3.13) é igual à solução ótima de (3.12) e equivalente à solução ótima de (3.11).

O problema (3.13) tem uma interpretação geométrica interessante. É fácil verificar que $\alpha(x)$ corresponde ao valor da função convexa linear por partes definida pelas restrições lineares, como ilustrado na figura 3-4.

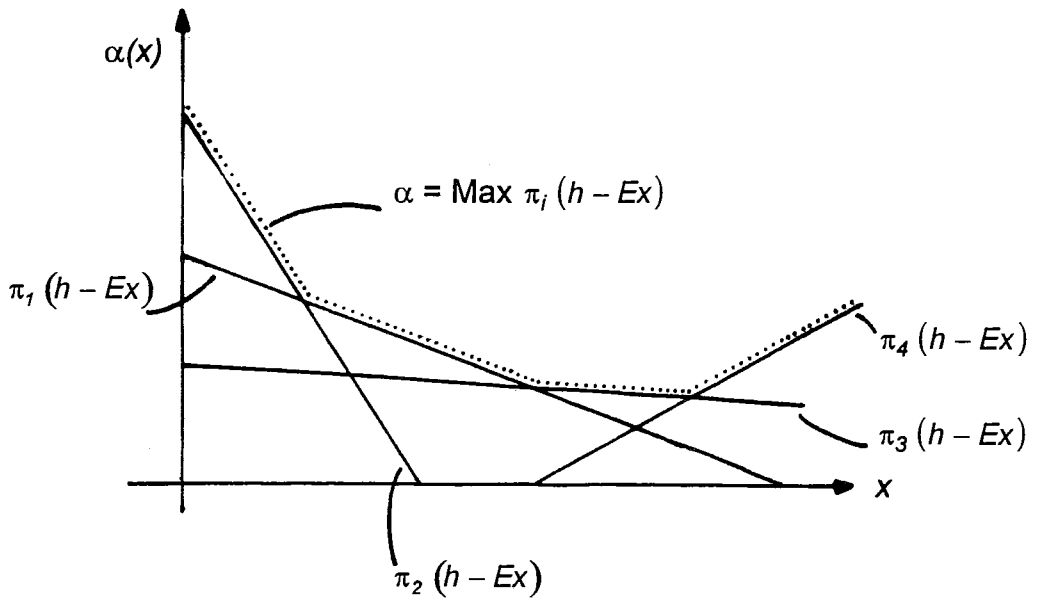


Figura 3-4. - Interpretação Geométrica do Problema (3.13).

Pelo Teorema Fundamental da Programação Linear, os problemas dual e primal possuem o mesmo valor de função objetivo no ótimo, ou seja, como os problemas (3.13) e (3.11) são equivalentes, pode-se concluir que as restrições $\alpha \geq \pi^i (h - Ex)$ em (3.13) definem a função $\alpha(x)$ no problema de expansão (3.9).

Assim, este problema pode ser reescrito como:

$$\text{Min } c(x) + \alpha \tag{3.14}$$

$$\text{s.a. } A(x) \geq b$$

$$\pi^1 (h - Ex) - \alpha \leq 0$$

$$\pi^2 (h - Ex) - \alpha \leq 0$$

⋮

$$\pi^p (h - Ex) - \alpha \leq 0$$

Logo, o problema de expansão pode ser escrito apenas em função das variáveis x e do escalar α . O conjunto de restrições $\pi^j (h - Ex) - \alpha \leq 0$ pode ser extenso, mas somente poucas serão **ativas** na solução ótima, o que sugere a aplicação de técnicas de relaxação que serão a base do algoritmo da decomposição de Benders.

Uma Formulação Alternativa dos Cortes de Benders

Seja \hat{w} o valor da solução ótima do subproblema de operação (3.7) para um dado \hat{x} . Como os valores das soluções dos problemas primal e dual coincidem, podemos dizer que

$$\hat{w} = \hat{\pi} (h - E \hat{x}) \tag{3.15}$$

Passando $\hat{\pi} h$ para o lado esquerdo de (3.15) e substituindo na expressão do corte de Benders $\pi (h - Ex)$, pode-se obter

$$\hat{w} + \hat{\pi} E (\hat{x} - x) \leq \alpha \tag{3.16}$$

A expressão (3.16) ilustra a interpretação geométrica do corte de Benders como uma aproximação linear de $\alpha(x)$ em torno do ponto \hat{x} .

Inviabilidade

Até agora, não se levou em consideração a possibilidade do subproblema de operação ser inviável, ou seja, o conjunto $(Fy \geq h - Ex)$ ser vazio. Em estudos de expansão, isto pode acontecer se a capacidade de geração instalada for menor que a carga. Limitações na rede e variação na carga podem fazer com que isto ocorra.

Para se lidar com este problema, pode se definir dois tipos de subproblemas.

Para uma dada decisão x^* , o correspondente subproblema de operação (problema escravo) pode ser viável ou inviável. Se ele for viável, resolve-se

$$w = \text{Min } dy \quad (3.17)$$

$$\text{s.a } Fy \geq h - Ex^*$$

e o corte de Benders associado que será enviado para o subproblema de investimento (problema mestre) é

$$\alpha \geq w^* + \pi E(x^* - x) \quad (3.18)$$

Este corte representa uma restrição linearizada da função de custo de operação expressa em termos da decisão de investimento x .

Entretanto, se o problema for inviável, a componente de custo não seria significativa. Assim, a função objetivo é modificada para incluir a minimização das inviabilidades do sistema. Supõe-se, por exemplo, que as variáveis de folga, $s \geq 0$, tenham sido adicionadas a cada restrição. O subproblema de operação seria

$$\begin{array}{ll}
 v = \text{Min} \sum s & \text{Variável Dual} \\
 \text{s.a. } Fy + s \geq h - Ex^* & \lambda
 \end{array} \tag{3.19}$$

e o corte de Benders associado seria

$$v^* + \lambda E(x^* - x) \leq 0 \tag{3.20}$$

Este corte representa uma restrição linearizada das inviabilidades (que não são desejadas) expressa em termos da decisão de investimento x .

A expressão (3.20) é conhecida como **corte de viabilidade** enquanto que a expressão (3.18) é um **corte de otimalidade**.

3.2 Decomposição de Benders Generalizada

Aplica-se a decomposição de Benders ao problema de planejamento de sistemas de transmissão por três motivos:

- i) A decomposição de Benders fornece uma ferramenta natural para decompor o problema em duas partes:
 1. Determinação do investimento ótimo da nova capacidade do sistema.
 2. Determinação dos custos de operação e confiabilidade do fornecimento de energia associado com a construção desta nova capacidade.
- ii) A decomposição de Benders é atrativa neste caso particular, pois permite a solução de um problema difícil através de uma seqüência de soluções de problemas simples.
- iii) Além disso, já foi aplicada com sucesso em problemas relacionados com sistemas de potência.

Uma das dificuldades na aplicação da decomposição de Benders padrão ao problema de planejamento de sistemas de transmissão, formulado por (2.1), são as variáveis de operação e investimento não serem linearmente separáveis. Por exemplo, as equações

$$f_{2ij} - \gamma_{2ij} x_{ij}(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (3.21)$$

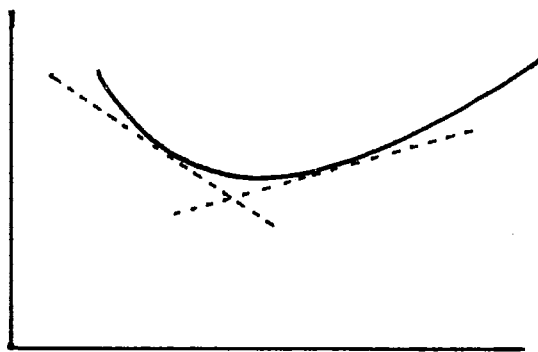
contêm produtos de variáveis de investimento x e variáveis de operação θ .

Estas restrições poderiam ser transformadas em

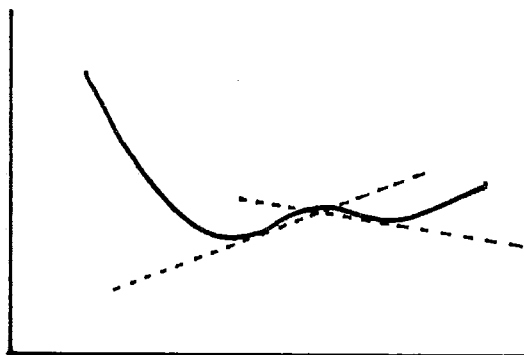
$$\frac{f_{2ij}}{(\theta_i - \theta_j)} - \gamma_{2ij} x_{ij} = 0 \quad (3.22)$$

o que tornaria o problema não linear nas variáveis de operação. Desta forma, o problema é adequado para a aplicação da decomposição de Benders Generalizada, pois esta soluciona problemas de programação não linear.

O esquema da decomposição de Benders generalizada pode ser facilmente implementado, mas não é possível garantir que a função do segundo estágio (subproblema de operação) seja convexa, o que será visto na próxima seção. Neste caso, é preciso muito cuidado na aplicação da Decomposição de Benders. A aproximação tangencial gerada por este método somente assegura limites inferiores para o subproblema de operação quando ele é convexo, se não for este o caso, estes limites não serão mais válidos como ilustrado na figura 3-5.



Caso Convexo



Caso Não Convexo

(Tangente pode cortar soluções válidas)

Figura 3-5. - Não Convexidades.

Não Convexidades no Modelo de Fluxo de Potência Linearizado

Nesta seção, serão ilustradas algumas peculiaridades deste modelo através de um pequeno exemplo com 3 barras e apenas um circuito candidato entre as barras 1 e 3. Este exemplo será apresentado resumidamente, mas pode ser encontrado de forma completa em [10].

Sendo a barra 1 a barra de referência do Sistema ($\theta_1 = 0$), teremos:

$$\text{Min } w = r_1 + r_2 + r_3$$

$$\text{s.a } \theta_2 + x\theta_3 + g_1 + r_1 = 1$$

$$-\theta_2 + \theta_3 + g_2 + r_2 = 1$$

$$\theta_2 - (1+x)\theta_3 + g_3 + r_3 = 5$$

$$\theta_2 \leq 0.5$$

$$-\theta_2 \leq 0.5$$

$$0 \leq g_1 \leq 1 \quad , \quad 0 \leq r_1 \leq 1$$

$$0 \leq g_2 \leq 3 \quad , \quad 0 \leq r_2 \leq 1$$

$$0 \leq g_3 \leq 2 \quad , \quad 0 \leq r_3 \leq 5$$

onde r é o vetor de cortes de carga, representando as folgas para tratar as inviabilidades.

A solução ótima deste problema é uma função de x [10]:

$$w(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1.5 \\ 2 - 1.5/x & x > 1.5 \end{cases}$$

A figura 3-6 mostra o gráfico de w , onde se verifica ser esta uma função não convexa.

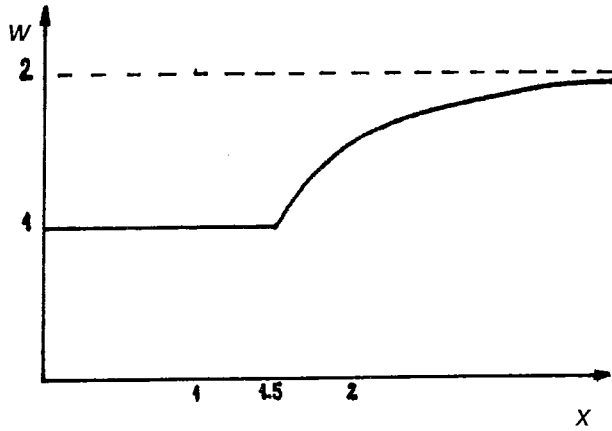


Figura 3-6. - Função w para o Sistema de 3 barras.

Teoria da Decomposição Generalizada

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } f(x, y) \quad (3.23)$$

$$\text{s. a } G(x, y) = 0$$

$$x \in X; y \in Y$$

onde x é o vetor de variáveis "complicadas" ou que apresentam características diferentes das variáveis y que justifiquem um processo de resolução separado.

No problema da expansão da transmissão, x são as variáveis de investimento e y as variáveis de operação. $G(x, y) = 0$ para um x fixo expressa, portanto, as restrições do problema de planejamento. Os conjuntos X e Y expressam as restrições específicas para as variáveis de investimento e operação, respectivamente.

O problema (3.23) pode ser escrito em termos de x através de uma projeção nas variáveis y :

$$\text{Min } v(x) \quad (3.24)$$

$$\text{s.a } x \in X$$

onde

$$v(x) = \text{Min } f(x, y) \quad (3.25)$$

$$\text{s.a } G(x, y) = 0$$

$$y \in Y$$

Sob condições de convexidade e estabilidade, para algum $\bar{x} \in X$ existe $\pi(\bar{x})$ tal que:

$$v(\bar{x}) = \inf_{y \in Y} \{f(\bar{x}, y) - \pi(\bar{x})G(\bar{x}, y)\}$$

$$v(\bar{x}) = \sup_{\pi} \left\{ \inf_{y \in Y} [f(\bar{x}, y) - \pi G(\bar{x}, y)] \right\} \quad (3.26)$$

Assim, $\pi(\bar{x})$ é a solução ótima dual do problema (3.25) com $x = \bar{x}$. Isto implica que (3.23) pode ser escrito da seguinte forma,

$$\text{Min } \beta \quad (3.27)$$

$$\text{s.a } x \in X$$

$$\inf_{y \in Y} \{f(x, y) - \pi G(x, y)\} \leq \beta; \forall \pi$$

Desde que o problema mestre (3.27) tenha muitas restrições, a estratégia mais natural para resolvê-lo é a relaxação.

Algoritmo da Decomposição de Benders Generalizada

$$\text{Seja} \quad L^*(x, \pi) = \inf_{y \in Y} \{f(x, y) - \pi G(x, y)\} \quad (3.28)$$

1. Seja $\bar{x} \in X$ factível para (3.25). Resolver o problema (3.25) e obter $v(\bar{x})$, $\bar{\pi} = \pi(\bar{x})$ e a função $L^*(x, \bar{\pi})$.
2. $v(\bar{x})$ é um limite superior do valor ótimo pois \bar{x} é factível. Seja $\bar{z} = v(\bar{x})$. Inicializar: $J = 1$; $\pi^1 = \bar{\pi}$. Definir a tolerância ε .
3. Resolver o problema relaxado:

$$\text{Min} \quad \beta \quad (3.29)$$

$$\text{s.a} \quad x \in X$$

$$\beta \geq L^*(x, \pi^j) \quad \forall j = 1, \dots, J$$

4. Seja $\hat{\beta}$ a solução ótima do problema (3.29). Como (3.29) é uma versão relaxada de (3.27), $\hat{\beta}$ é um limite inferior do valor ótimo. Seja $\underline{z} = \hat{\beta}$. Se $\bar{z} - \underline{z} \leq \varepsilon$, pare. Em caso contrário ir para o passo 5.
5. Seja \hat{x} a solução de (3.29). Resolver (3.25) e calcular $v(\hat{x})$, $\hat{\pi} = \pi(\hat{x})$ e $L^*(x, \hat{\pi})$. Seja $\bar{z} = \text{Min} \{\bar{z}, v(\hat{x})\}$. Se $\bar{z} - \underline{z} \leq \varepsilon$, pare. Em caso contrário, ir para o passo 6.
6. Seja $J = J + 1$; $\pi^j = \hat{\pi}$. Ir para o passo 3.

O passo mais difícil no algoritmo é a solução do problema mestre (3.29) pois, no caso geral, não é fácil obter explicitamente as funções $L^*(x, \pi^j)$. Assim, a decomposição de Benders generalizada é normalmente usada em problemas que têm a chamada propriedade (P). A **propriedade (P)** significa que o ínfimo de $f(x, y) - \pi G(x, y)$ sobre Y é essencialmente independente de x , assim a função $L^*(., \pi)$ sobre X pode ser obtida explicitamente com pequeno ou nenhum esforço adicional, além do requerido para calculá-la para um valor simples x .

Um caso importante em que se cumpre a propriedade (P) é quando f e G são linearmente separáveis em x e y ; isto é:

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

$$G(x, y) = G_1(x) + G_2(y)$$

Neste caso:

$$L^*(x, \bar{\pi}) = \inf_{y \in Y} \{f_2(y) - \bar{\pi} G_2(y)\} + f_1(x) - \bar{\pi} G_1(x) \quad (3.30)$$

Decomposição de Benders no Modelo Linearizado

Para aplicar a decomposição de Benders generalizada ao problema de planejamento de sistemas de transmissão usando o Modelo de Fluxo de Potência Linearizado, deve-se formular o problema separando suas variáveis de investimento e operação. Neste caso é possível obter uma expressão geral do tipo $G_1(x) = -x$. Assim, supor que $G_1(x) = -x$ no problema (3.25) é que o mínimo de:

$$w(x) = \text{Min } f_2(y) \quad (3.31)$$

$$\text{s.a } G_2(y) = x$$

$$y \in Y$$

é atingido para algum $x \in X$.

Agora, para algum $(\bar{y}, \bar{\pi})$ que vem da solução de (3.31) com $x = \bar{x}$,

$$L^*(x, \bar{\pi}) = f_2(\bar{y}) - \bar{\pi} \underbrace{G_2(\bar{y})}_{\bar{x}} + f_1(x) - \bar{\pi} \underbrace{G_1(x)}_{-x} \quad (3.32)$$

e assim, obtém-se

$$L^*(x, \bar{\pi}) = f_2(\bar{y}) + f_1(x) + \bar{\pi} (x - \bar{x}) \quad (3.33)$$

Com estas considerações, o problema de otimização geral (3.24) pode ser escrito como:

$$\text{Min } \{f_1(x) + w(x)\} \quad (3.34)$$

$$\text{s.a } x \in X$$

e o problema mestre relaxado :

$$\text{Min } \{f_1(x) + \beta\} \quad (3.35)$$

$$\text{s.a } x \in X$$

$$w^j + \pi^j(x - x^j) \leq \beta; \quad j=1, \dots, J$$

onde w^j é a solução ótima do subproblema (3.31) com $x = x^j$ e π^j é a solução dual do subproblema (3.31) com $x = x^j$. Em (3.35) $f_1(x)$ foi transferido do corte obtido de (3.33) para a função objetivo.

Se $w(x) \geq 0; \quad \forall x \in X$, então pode-se adicionar a restrição:

$$\beta \geq 0 \quad (3.36)$$

ao problema (3.35). Isto é importante na prática para evitar soluções ilimitadas indesejáveis no problema mestre.

3.3 Planejamento Hierarquizado

A base deste método se originou em 1985 com o artigo de Pereira e outros [7] que utilizava modelos relaxados para obter informações iniciais aproximadas da função $\alpha(x)$ que seriam usadas nos modelos originais (mais detalhados), mas o conceito **planejamento hierarquizado** só foi instituído por Romero e Monticelli em 1991 [2].

Como já visto anteriormente, este planejamento é dito hierarquizado por ser realizado em vários níveis, onde em cada nível é utilizado um modelo da rede diferente. Conforme os níveis vão sendo aprofundados, vão sendo utilizados modelos mais **detalhados**.

Em [2], foram utilizados três modelos diferentes, mas não há obrigatoriedade em se usar três modelos, ou três níveis, contanto que o conceito de hierarquia nos modelos utilizados não seja corrompido.

Neste trabalho, a estratégia escolhida foi a de se utilizar dois modelos: o Modelo de Transporte e o Modelo de Fluxo de Potência Linearizado. Obedecendo o conceito do planejamento hierarquizado, o primeiro nível equivale ao modelo mais relaxado, ou seja, o Modelo de Transporte, e o segundo, ao Modelo de Fluxo de Potência Linearizado.

3.4 Rede Fictícia

É muito comum, em estudos de planejamento da expansão de redes de transmissão de sistemas elétricos, que sejam previstos novos pontos de geração ou carga, ou seja, futuras usinas ou futuros centros de carga. Estas injeções estariam a princípio não conectadas (isoladas) na rede elétrica. Por resultar em uma rede inicial desconexa, o modelo de fluxo de potência linearizado não consegue lidar com esta situação, e para se evitar este problema se utiliza a **rede fictícia**, introduzida na literatura em 1985 por Monticelli e outros [5]. A rede fictícia é uma rede artificial superposta ao sistema real que contém todos os circuitos candidatos à adição, ou seja, ela representa todas as possibilidades de expansão da rede de transmissão. Os ramos desta "rede fantasma" têm reatância muito maior (10.000 vezes) do que um circuito da rede base (rede existente), ou seja, só passará fluxo por estes circuitos se não for possível passar pela rede original, como por exemplo, fluxos entre barras isoladas. Já que estas situações causarão uma grande sobrecarga nos circuitos fictícios, o problema de conectar barras isoladas pode ser tratado da mesma forma com que é tratada a sobrecarga em qualquer circuito da rede base.

Como já dito anteriormente, o modelo linearizado não consegue lidar com redes iniciais desconexas, e como ele é um dos modelos utilizados no planejamento hierarquizado proposto por este trabalho, se tornou imprescindível a utilização da rede fictícia.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA PROPOSTA

Neste capítulo, serão apresentadas todas as propostas do presente trabalho, incluindo o algoritmo desenvolvido.

4.1 DECOMPOSIÇÃO DOS MODELOS

Neste trabalho, são utilizados dois modelos, dos quais um já foi visto anteriormente. Nesta seção, eles serão apresentados, bem como suas respectivas decomposições através do Método de Benders.

Utilizando o modelo de fluxo de potência linearizado, já visto no Capítulo 2, e aplicando-se a Decomposição de Benders a este problema, teremos dois subproblemas resultantes:

- Subproblema de Investimento (Mestre)

$$\text{Min } c^T X e \tag{4.1}$$

$$\text{s.a } w(x) \leq 0$$

$$x_{ij} \in \{0 \dots n_{ij}\}$$

- Subproblema de Operação (Escravo)

$$w(x) = \text{Min } e^T r \quad (4.2)$$

$$\text{s.a } Sf_1 + Sf_2 + g + r = d \quad (4.2.1)$$

$$f_1 - \gamma_1 S^T \theta = 0 \quad (4.2.2)$$

$$f_2 - \gamma_2 X S^T \theta = 0 \quad (4.2.3)$$

$$|f_1| \leq \bar{f}_1 \quad (4.2.4)$$

$$|f_2| \leq X \bar{f}_2 \quad (4.2.5)$$

$$g \leq \bar{g} \quad (4.2.6)$$

$$r \leq d \quad (4.2.7)$$

onde r representa o vetor de cortes de cargas que são requeridos para se aliviar todas as sobrecargas.

Não se pode garantir que a função linear por partes $w(x)$ seja convexa [10]. Sendo assim, é necessário extremo cuidado na aplicação da decomposição de Benders a fim de não excluir soluções viáveis do problema. Para evitar este inconveniente, foi utilizada uma decomposição hierárquica que usa dois modelos. O primeiro é o já mencionado acima e o outro, uma relaxação deste.

As restrições (4.2.2) e (4.2.3) foram relaxadas, o que resultou num problema de fluxos em redes que pode ser expresso da seguinte forma:

$$w(x) = \text{Min } e^T r \quad (4.3)$$

$$\text{s.a } Sf_1 + Sf_2 + g + r = d$$

$$|f_1| \leq \bar{f}_1$$

$$|f_2| \leq X \bar{f}_2$$

$$g \leq \bar{g}$$

$$r \leq d$$

Esta relaxação de (4.2) nada mais é do que o subproblema de operação que se obtém decompondo-se pelo Método de Benders o Modelo de Transporte.

Cortes Gerados e π_{ij}

Como já visto anteriormente, os cortes de viabilidade são expressos por

$$w^* + \sum_{ij} \pi_{ij} (x_{ij}^* - x_{ij}) \leq 0 \quad (4.4)$$

Pode ser mostrado que a sensibilidade π_{ij} para o problema (4.3) é o multiplicador de Lagrange da restrição de desigualdade associada à capacidade dos circuitos \bar{f}_2 multiplicado por sua capacidade, isto é

$$\pi_{ij} = \lambda_{ij} \bar{f}_{2ij} \quad , \quad \text{onde } \lambda_{ij} \in \{0, -1\}$$

Os índices de sensibilidade com respeito a γ_{ij} podem ser obtidos da solução ótima do subproblema de operação.

Considere o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Min } u &= e^t r & (4.5) \\ \text{s.a. } Sf + g + r &= d \\ f_{ij} - \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j) &= 0 \\ |f_{ij}| &\leq \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij} \\ 0 \leq g &\leq \bar{g} \\ 0 \leq r &\leq d \end{aligned}$$

onde $\bar{\phi}_{ij} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\gamma_{ij}}$

O problema (4.5) é conhecido como o problema de mínimo corte de carga (MCC) e tem relação direta com o subproblema que aparece na aplicação da decomposição de Benders ao problema (2.1) (formulação (4.2)). O problema (4.5) pode ser escrito assim:

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= e^t r & (4.6) \\ \text{s.a. } B\theta + g + r &= d & (4.6.1) \\ \gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j) &\leq \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij} & (4.6.2) \\ -\gamma_{ij} (\theta_i - \theta_j) &\leq \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij} & (4.6.3) \\ 0 \leq g &\leq \bar{g} & (4.6.4) \\ 0 \leq r &\leq d & (4.6.5) \end{aligned}$$

onde B é a matriz de susceptâncias, já descrita anteriormente.

Observa-se que se $\gamma_{ij} > 0; \forall (i, j) \in \Omega$, então o problema (MCC) (4.6) tem a seguinte forma:

$$\text{Min } w = e^t r \quad (4.7)$$

$$\text{s.a. } B\theta + g + r = d \quad (4.7.1)$$

$$(\theta_i - \theta_j) \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (4.7.2)$$

$$- (\theta_i - \theta_j) \leq \bar{\phi}_{ij} \quad (4.7.3)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g}; \quad (4.7.4)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.7.5)$$

O problema (MCC) nos formatos dos problemas (4.6) e (4.7) é sempre factível pois, se $g = 0; \theta = 0; r = d$ obtém-se, então, uma solução factível.

Na decomposição de Benders usando o Modelo Linearizado resolve-se o subproblema de operação com a estrutura (4.5). Assim, deve-se determinar os índices de sensibilidade σ_{ij} do problema de mínimo corte de carga (MCC) em relação a γ_{ij} .

A determinação dos índices de sensibilidade σ_{ij} precisa de um desenvolvimento teórico um pouco complicado. Assim, toda a análise teórica para a determinação de σ_{ij} é apresentada no Apêndice A. Neste Capítulo, apresenta-se apenas o resultado final obtido. Portanto, os índices de sensibilidade σ_{ij} , usando o Modelo Linearizado, são obtidos pela relação:

$$\sigma_{ij}^{MCC} = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j) \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (4.8)$$

onde π_i^0 são as variáveis duais ótimas associadas às restrições (4.7.1),

θ_i são as defasagens angulares nas barras na solução ótima de (4.7).

Assim, a expressão do coeficiente do corte é :

$$\pi_{ij}^* = \sigma_{ij}^{MCC} \bar{f}_{2ij}$$

Subproblema de Investimento

De acordo com o método de Benders apresentado, o subproblema de Investimento, tanto para o Modelo de Transporte quanto para o modelo linearizado, é expresso por

$$v = \text{Min } c^T X e \quad (4.9)$$

$$\text{s.a } \sum_{ij} \pi_{ij}^k x_{ij} \leq \sum_{ij} \pi_{ij}^k x_{ij}^k - w^k, \quad k = 1, \dots, K$$

$$x_{ij} \in \{0 \dots n_{ij}\}$$

onde k substitui * usado em (4.4) e denota o valor da iteração.

Uma das propostas deste trabalho é modificar o subproblema de investimento.

O Método de Benders geralmente requer muitas iterações até atingir o ótimo, o que resulta num esforço computacional muito grande para se resolver subproblemas de investimento discretos até a otimalidade repetidas vezes. Sendo assim, numa tentativa de redução do esforço computacional e de tempo gasto, não se busca a solução ótima do subproblema de investimento, mas apenas uma solução viável. Geoffrion [22] foi o primeiro a utilizar uma abordagem que não resolvia o problema mestre até a otimalidade, só buscava uma solução viável. A convergência do processo era garantida pela determinação de um limite superior que é decrescido a cada nova solução encontrada. Desta forma, o novo subproblema de investimento é escrito como

$$\text{achar } x_{ij} \in \{0 \dots n_{ij}\} \quad (4.10)$$

$$\text{tal que } \sum_{ij} \pi_{ij}^k x_{ij} \leq \sum_{ij} \pi_{ij}^k - w^k, \quad k = 1 \dots K$$

$$c^T X e \leq UB$$

Uma vez que este corte é um corte de viabilidade, a convergência é obtida quando se encontra uma solução viável (corte de carga nulo).

Algoritmos de Resolução

O subproblema de operação (4.2) pode ser eficientemente resolvido por um algoritmo Dual Simplex especializado que utiliza técnicas de base reduzida e limites superiores [12].

A formulação relaxada (4.3) pode ser abordada como um problema de fluxo em redes, ou, mais precisamente, um problema de fluxo máximo. Sendo um problema bastante antigo e, principalmente bastante estudado, existem muitos algoritmos que o resolvem. Neste trabalho, foi utilizado o Algoritmo de Fluxo Máximo de Goldberg [28]. A fim de adequar o conjunto de dados a este problema, foram criados dois nós fictícios: o nó Fonte, ao qual são conectados todos os geradores do sistema, e o nó Sumidouro, onde são conectadas as cargas. Pelo Teorema de "Fluxo Máximo - Corte Mínimo", são obtidos os coeficientes dos cortes de Benders. Foi desenvolvido um algoritmo de rotulação de nós [15] a fim de determinar o corte mínimo equivalente ao fluxo máximo previamente calculado. Os ramos da rede que fazem parte do corte mínimo possuem multiplicador de Lagrange unitário, enquanto que os outros são nulos.

Em problemas de fluxo máximo, a degeneração ocorre com frequência, ou seja, é frequente um grande número de cortes levar a um mesmo investimento mínimo. Por este motivo, a fim de se obter o corte mais à direita possível (mais próximo do sumidouro - das cargas), criou-se a opção de troca entre Fonte e Sumidouro. Assim, se o corte gerado estiver muito próximo ao nó fonte, troca-se os nós, e o corte passará a estar mais próximo do outro extremo.

A nova formulação para o subproblema de investimento já apresentada pode ser resolvida por vários métodos, inclusive heurísticos. Romero em [18] utilizou o Algoritmo de Enumeração Implícita de Balas [27], mas devido a necessidade de se tratar subproblemas de investimento com um grande número de variáveis 0/1, este algoritmo não foi utilizado. Várias outras heurísticas foram experimentadas neste trabalho.

A primeira foi o código HMIP [23], uma implementação de um algoritmo para problemas de programação inteira mista. A idéia básica do algoritmo é procurar boas soluções viáveis que se localizem próximas à solução ótima do PL (problema linear obtido relaxando-se as restrições de integralidade do original). Estas soluções são procuradas ao longo da trajetória central [24] da região viável do problema. A tentativa de resolução do problema de planejamento com o código HMIP resultou em sérios problemas numéricos, o que culminou na desistência da utilização deste algoritmo.

Mais dois algoritmos foram testados, o "Pivot & Complement" de Balas e Martin [25] e um algoritmo com busca "Branch and Bound" (B&B) [16]. O algoritmo de "Pivot e Complement" não obteve resultados satisfatórios para os testes realizados. Em um destes testes, o algoritmo não conseguiu achar nem uma solução viável, portanto, neste trabalho, foi utilizado o software CPLEX [16] com busca B&B a fim de se obter uma solução inteira viável para o problema. Procurando melhorar a eficiência da busca B&B, foram introduzidos limites superiores para o valor da solução e prioridades para a escolha das variáveis que farão o *branching*. Estas prioridades são estabelecidas de acordo com o número de vezes que a variável já fez parte da solução nas iterações intermediárias do processo. Quanto maior este número, maior será a prioridade da variável.

No problema de planejamento, quando são incorporados circuitos candidatos em caminhos onde ainda não existem circuitos construídos, é muito freqüente a necessidade de adição simultânea de vários circuitos para transportar potência de uma barra de geração, ou com capacidade de transmitir potência, para uma barra de carga não satisfeita. Este fato pode ser expresso pelo conjunto: linha (k,l) em série com o transformador (l,m) . Digamos que a barra k seja uma barra de geração e a barra m seja uma barra de carga. Assim, uma possibilidade de se fornecer a potência necessária para a barra m pode ser através da adição da linha (k,l) em série com o transformador (l,m) . A adição de somente um destes circuitos não teria sentido, pois a demanda necessária em m não poderia ser atendida via estes circuitos.

A metodologia padrão da Decomposição de Benders não consegue resolver este problema da forma mais adequada. A presença de carga não satisfeita na barra m exige a adição de um conjunto de circuitos, entre os quais, o transformador (l,m) aparece como forte candidato, mas esta exigência não aparece simultaneamente evidente para a linha (k,l) . Matematicamente, este fato é evidenciado pelos respectivos multiplicadores dos circuitos. Pode-se dizer que o mestre não consegue entender como indispensável a adição simultânea dos dois referidos circuitos, pois o primeiro corte de Benders que identifica a deficiência de carga em m , não fornece esta informação.

A metodologia de Benders resolve este problema gerando três cortes, o primeiro informa a necessidade de adição de (l,m) , o segundo, de (k,l) e só o terceiro informa a necessidade da adição simultânea. Uma forma de contornar este inconveniente é incorporar restrições que impliquem na necessidade da adição simultânea de circuitos quando este tipo de situação ocorrer.

Estas restrições podem ser expressas por:

Em uma ligação em série composta de uma linha e um transformador, a linha é adicionada se e somente se o correspondente transformador também for.

Neste trabalho, estas restrições são referenciadas como **restrições lógicas**, Romero [18] as denominou de regras de adição de linha.

Restrições deste tipo são facilmente esquematizadas em termos das variáveis de investimento. Depois de montadas, elas são incluídas no subproblema de investimento que passa a ter a forma ilustrada pela figura 4-1.

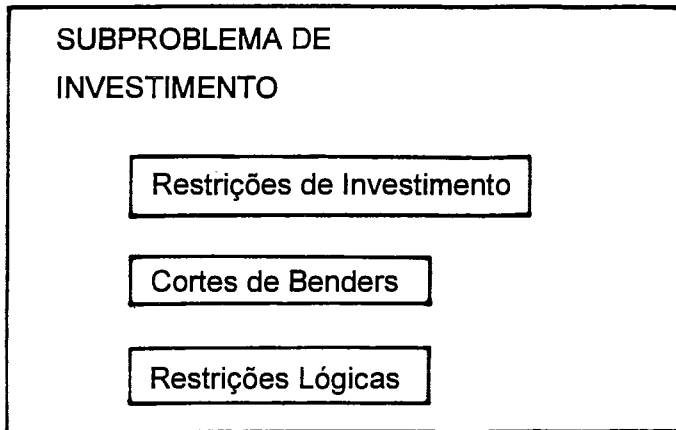


Figura 4-1. - Subproblema de Investimento Modificado

4.2 METODOLOGIA 1

Nesta primeira metodologia apresentada, o conceito do planejamento hierárquico formulado por Romero e Monticelli [2] foi seguido quase que fielmente, ou seja, cada nível de planejamento utiliza um modelo diferente; os cortes, neste caso de viabilidade, produzidos na primeira fase, ou primeiro nível, são também utilizados na segunda fase; e a solução encontrada na Fase 1 é usada como solução inicial na Fase 2.

A única modificação introduzida foi no subproblema de investimento, que não é resolvido até o ótimo, mas só até a primeira solução inteira viável ser encontrada, como já mencionado anteriormente.

De uma forma geral, o algoritmo desenvolvido para esta metodologia pode ser esquematizado como ilustra a figura 4-2.

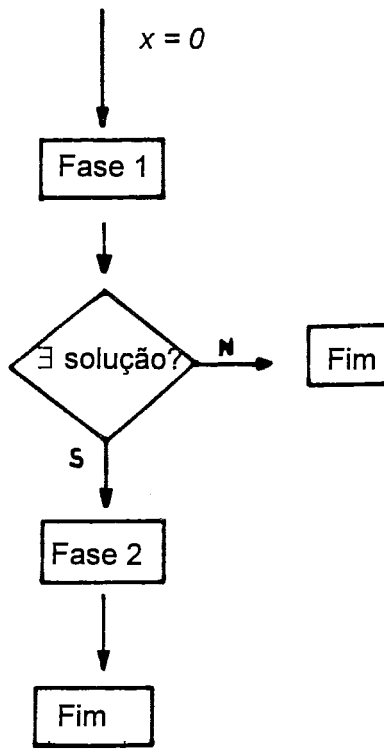


Figura 4-2. - Algoritmo da Metodologia 1

Na Fase 1, os subproblemas de operação e investimento são respectivamente as formulações (4.3) e (4.10) apresentadas. Para a Fase 2, os subproblemas são as formulações (4.2) e (4.10).

De uma forma mais detalhada, o algoritmo pode ser expresso por:

1. Inicializar $x = 0$ e fase = 1
2. Resolver o subproblema de operação para a presente fase com o valor de x dado. Se o corte de carga obtido for menor que uma tolerância especificada, fazer fase = fase + 1 e ir para o passo 4. Senão, adicionar um novo corte de Benders ao subproblema de investimento.
3. Achar uma solução viável para o subproblema de investimento (achar um novo investimento). Ir para o passo 2.

4. Se fase = 2, ir para o passo 2.

Se fase = 3, pare.

Os testes realizados com esta metodologia serão apresentados no próximo capítulo.

4.3 METODOLOGIA 2

A partir dos testes realizados com a Metodologia 1, realmente, foi comprovada a grande dificuldade de se desenvolver um algoritmo para a resolução do problema em questão neste trabalho.

É muito difícil garantir a eficiência da solução e a qualidade da formulação para diferentes instâncias [13]. A prova desta afirmação foi a impossibilidade de se resolver um dos três casos testes mostrados nesta tese.

Esta impossibilidade foi a motivação necessária para se formular uma nova abordagem para a decomposição hierárquica.

Algoritmo de Cortes Simples

Até agora, "hierarquizar" significava realizar o processo de Benders completo para todos os níveis da hierarquia, onde "processo de Benders completo" é a iteração entre subproblemas de operação e investimento. Realizava-se um processo de Benders completo para o primeiro modelo. Quando este convergisse, realizava-se o mesmo processo completo, só que agora com outro modelo, e, assim sucessivamente.

A proposta desta nova metodologia [1] é não hierarquizar o processo completo de Benders, mas somente o subproblema de operação.

Na metodologia 1, a partir do momento em que a Fase 1 converge, todos os cortes gerados possuem uma estrutura complexa, pois são expressos em termos das sensibilidades de um modelo de fluxo de potência linearizado, o que aumenta o esforço computacional requerido para se solucionar o subproblema de investimento.

Os cortes produzidos por um modelo de Transporte são mais simples, daí a proposta de se desenvolver um método que inicialmente gere mais cortes simples, ou seja, usar cortes de viabilidade oriundos do modelo de Transporte antes de usar o modelo de Fluxo de Potência Linearizado. Dividindo o planejamento em níveis, isto não é possível, pois cada nível gera um único tipo de corte.

Como neste trabalho a solução encontrada em cada subproblema de investimento não é ótima, mas apenas viável, não há garantias de as soluções intermediárias encontradas em determinado nível serem viáveis no nível anterior. Aplicando a Metodologia 1, uma solução intermediária da Fase 2 (modelo de fluxo de potência linearizado) não necessariamente será viável na Fase 1 (modelo de transporte). Tornando isto obrigatório, ou seja, só testar a viabilidade no modelo mais detalhado quando a solução for viável no mais relaxado, faz com que cortes mais simples sejam gerados até que o processo se estabilize em torno da solução final.

Esta estratégia nada mais é do que uma hierarquização do subproblema de operação. Dentro da estrutura do novo subproblema de operação há dois níveis. Primeiro, testa-se a viabilidade do investimento no primeiro nível, se esta for confirmada, aí então o investimento será testado no segundo. Quando não for viável no primeiro, gera-se um corte de Benders associado ao modelo deste nível. Sendo viável para o primeiro nível e não para o segundo, gera-se um corte associado ao segundo nível.

O esquema deste novo Subproblema de Operação está ilustrado na figura 4-3.

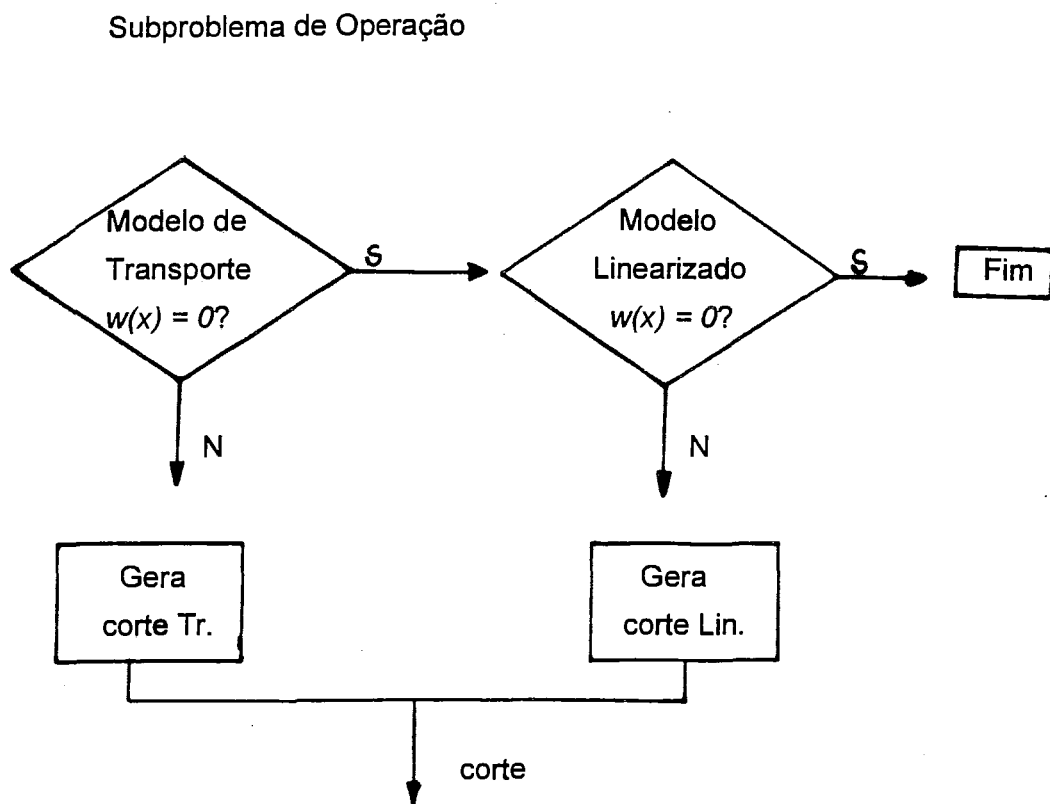


Figura 4-3. - Novo Subproblema de Operação

Modificação Adicional

Não há garantias de que a solução encontrada ao final do processo seja ótima, principalmente, por só tratar de encontrar soluções viáveis ao longo do processo. Por este motivo, foi incluída uma modificação no algoritmo.

Ao final do processo, quando o modelo linearizado indicar corte de carga nulo, será introduzido no último subproblema de investimento um limite superior igual ao custo da solução, até então encontrada, decrescido de uma certa tolerância. Ou seja, obriga-se o subproblema de investimento a encontrar uma outra solução, só que esta com custo inferior ao da melhor já encontrada. Se este problema tiver solução, o processo se inicia novamente, ou seja, verifica-se se o subproblema de operação resulta em corte de carga nulo. Se não for encontrada nenhuma solução com custo inferior ao da *incumbent*, então esta será a solução final do processo.

O esquema do algoritmo final desta metodologia está ilustrado na figura 4-4.

Os testes realizados com esta metodologia serão apresentados no próximo capítulo.

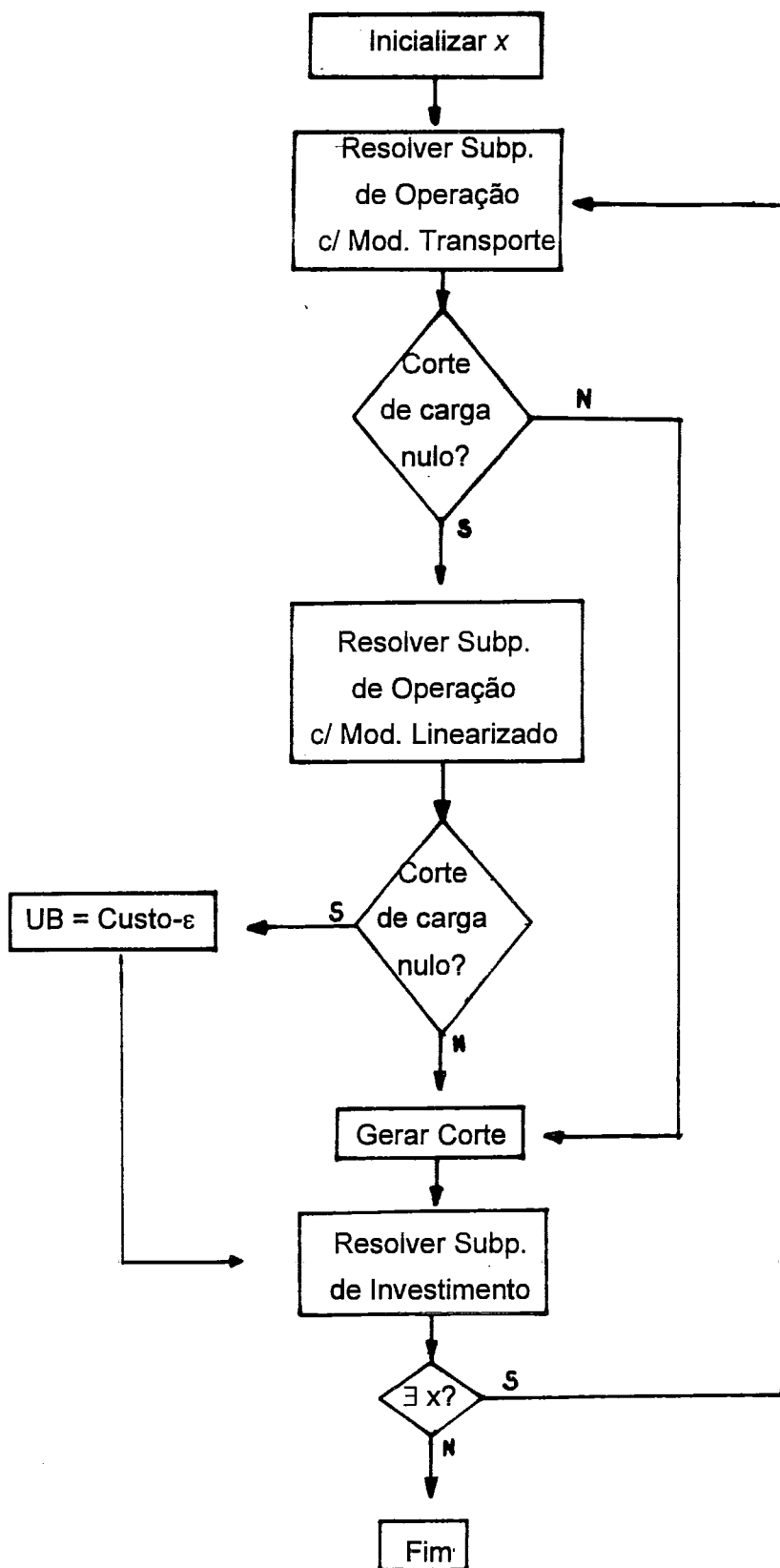


Figura 4-4. - Esquema final do algoritmo da Metodologia 2

CAPÍTULO 5

TESTES E RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os casos testes e os resultados obtidos com as Metodologias 1 e 2. Foram considerados três sistemas elétricos: sistema de 6 barras de Garver, sistema de 46 barras sul-brasileiro e o sistema reduzido de 79 barras do Sudeste brasileiro. Todos foram realizados num microcomputador **486 DX2 66MHz**.

5.1 SISTEMA DE 6 BARRAS (SISTEMA DE GARVER)

Este sistema foi usado em [4]. Sua configuração inicial está ilustrada na figura 5-1. Na tabela 5.1 estão as capacidades de geração e as cargas das barras do sistema. Na tabela 5.2 estão os dados dos circuitos.

Tabela 5.1

Capacidades de Geração e Carga

Barra	Capacidade de Geração	Carga
1	150	80
2	0	240
3	360	40
4	0	160
5	0	240
6	600	0

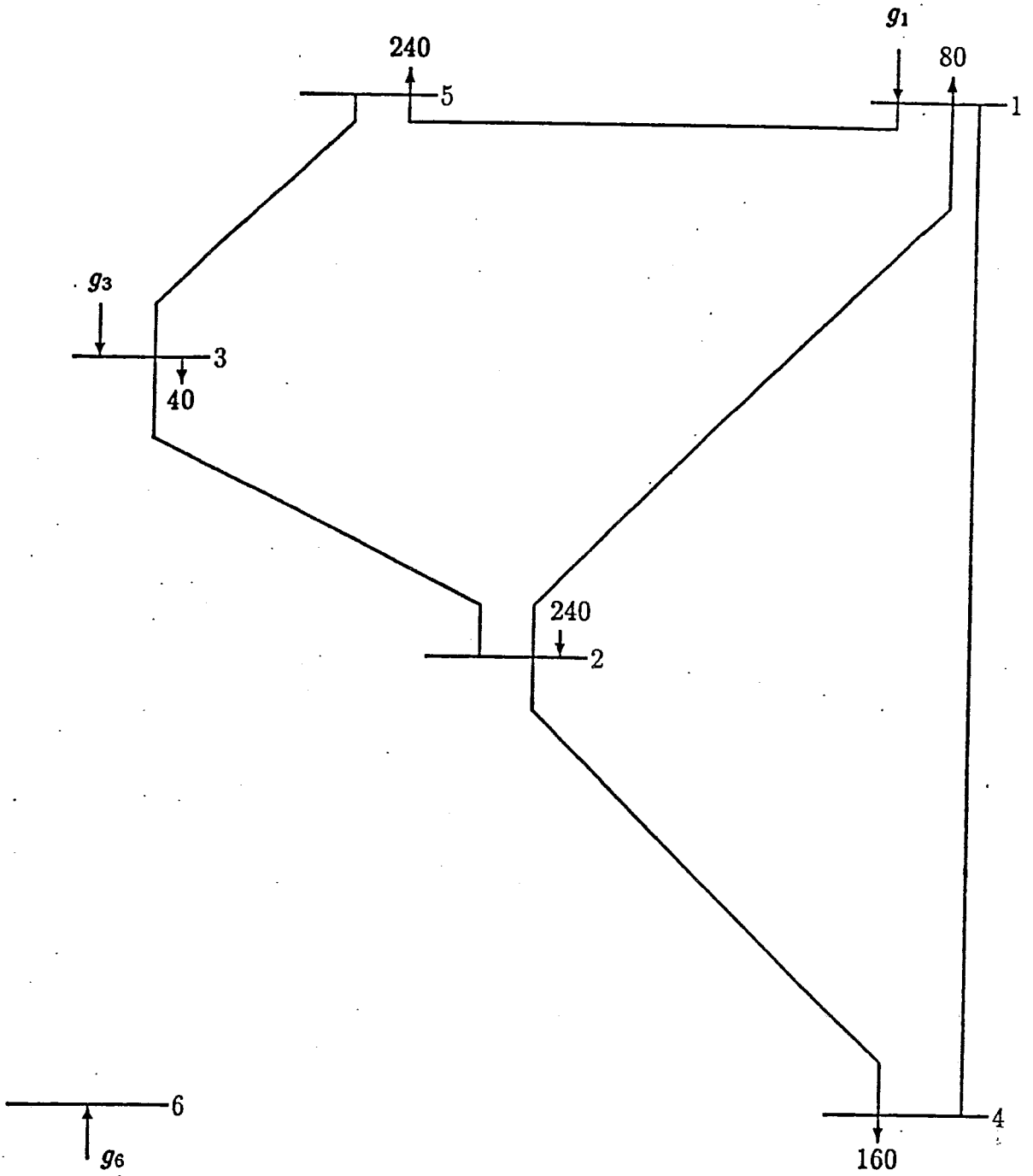


Figura 5-1. - Configuração Inicial do Sistema de 6 barras

Tabela 5.2

Dados dos Circuitos

Barra: De/Para	Custo (\$)	Susceptância ($1/\Omega$)	Capacidade (MW)
1/2	40	2.50	100
1/3	38	2.63	100
1/4	60	1.67	80
1/5	20	5.00	100
1/6	68	1.47	70
2/3	20	5.00	100
2/4	40	2.5	100
2/5	31	3.22	100
2/6	30	3.33	100
3/4	59	1.69	82
3/5	20	5.00	100
3/6	48	2.08	100
4/5	63	1.59	75
4/6	30	3.33	100
5/6	61	1.64	78

Neste teste, foram assumidas as seguintes considerações:

- Existem circuitos candidatos entre todas as barras.

- Todos os circuitos candidatos só podem, no máximo, ser triplicados, o que resulta num subproblema de investimento com 45 variáveis binárias. O subproblema de operação, neste caso, possui 29 variáveis contínuas e 22 restrições.

Para este sistema, foram realizados testes com as duas metodologias.

Metodologia 1

Utilizando a abordagem de duas fases proposta pela Metodologia 1, a solução ótima foi encontrada após cinco iterações em 1.3 segundos, como mostra a tabela 5.3.

Tabela 5.3

Processo de Convergência

Fase	Corte de carga (MW)	Custo (\$)	Circuitos adicionados
1	370	0	-
1	250	100	$3*2/3+2*3/5$
1	40	120	$2*2/6+2*4/6$
1	0	110	$3/5+3*4/6$
2	0	110	$3/5+3*4/6$

Este caso evidencia a grande vantagem do uso do planejamento hierárquico. Somente uma iteração da Fase 2 foi requerida, o que indica que o subproblema de operação, que é mais relaxado, utilizado na Fase 1 produziu uma aproximação muito boa para a função $w(x)$ depois de quatro iterações, acelerando a convergência da Fase 2.

Metodologia 2

Nesta metodologia, como já foi visto, o conceito de **fase** foi um pouco modificado. Chamemos de Fase 1 quando um corte do Modelo de Transporte for gerado, Fase 2 quando for gerado um corte do Modelo Linearizado e Fase 3 quando se diminuir o limite superior do subproblema de investimento a fim de encontrar uma nova solução mais barata para o problema.

A solução foi encontrada em seis iterações: quatro da Fase 1, uma da Fase 2 e uma da Fase 3. O processo de convergência está ilustrado na tabela 5.4.

Tabela 5.4

Processo de Convergência

Fase	Corte de carga (MW)	Custo (\$)	Circuitos adicionados
1	370	0	-
1	250	120	3*2/3+3*3/5
1	40	110	2/3+3*3/5
1	0	110	3/5+3*4/6
2	0	110	3/5+3*4/6
3	-	-	-

O comportamento do processo de convergência neste caso foi muito semelhante ao obtido pela Metodologia 1. A Fase 3 não conseguiu achar uma solução mais barata do que a encontrada pela Fase 2. Neste exemplo, ela seria completamente desnecessária.

Todo o processo levou 1.1 segundos, ou seja, mesmo executando uma iteração da Fase 3, o processo foi mais rápido do que a tentativa obtida com a Metodologia 1.

Esta solução de custo \$110 foi obtida pela primeira vez por Romero e Monticelli [2] em 1993. Acredita-se ser esta a solução ótima global deste problema.

A configuração final da rede com os circuitos adicionados está ilustrada na figura 5-2.

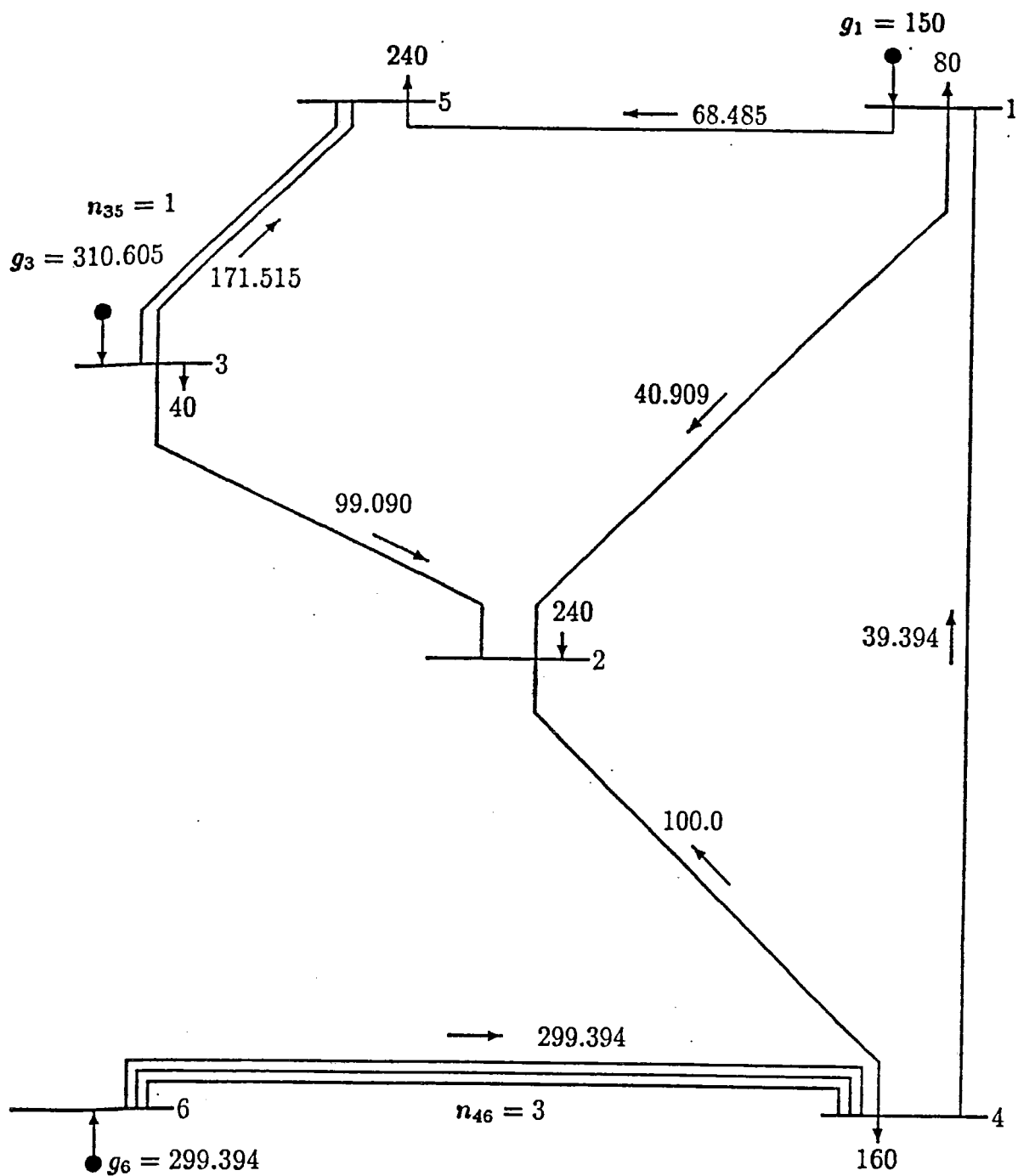


Figura 5-2. - Configuração Final do Sistema de Garver

5.2 SISTEMA REDUZIDO DO SUDESTE BRASILEIRO

Este sistema possui 79 barras e 155 circuitos e sua configuração inicial está ilustrada na figura 5-3 com circuitos existentes e candidatos (pontilhados). Neste caso, apesar de não estarem pontilhados, todos os circuitos existentes também são candidatos. Os dados referentes a este caso podem ser encontrados em [26]. Para este sistema, realizou-se um planejamento a fim de atender a demanda para o ano 2000. O plano de expansão da geração provoca o aparecimento de barras de geração desconectadas da rede: Jequitinhonha (253) e Doce (244). Centros de carga no Rio (234), São Paulo (200) e Belo Horizonte (243) são os maiores responsáveis pelo crescimento da demanda.

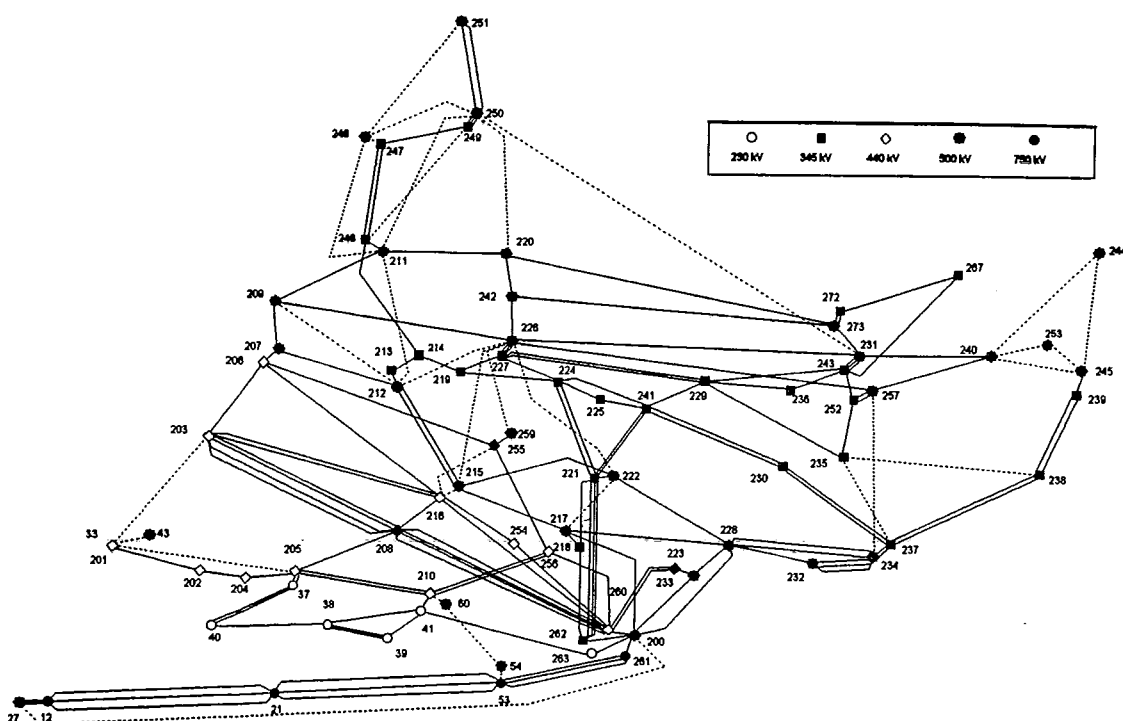


Figura 5-3. - Configuração Inicial - Sistema de 79 barras

Este sistema foi testado pelas duas metodologias propostas neste trabalho, mas somente a Metodologia 1 obteve resultados.

O subproblema de investimento gerado para este sistema, no qual foram introduzidas 9 restrições lógicas, possui 143 variáveis binárias. O subproblema de operação da Fase 2 possui 237 variáveis contínuas e 392 restrições.

A Fase 1 levou 26 iterações para convergir e foram necessárias mais 67 iterações da Fase 2 para se chegar à solução do problema. Este processo está ilustrado na figura 5-4. Foram realizadas 21 adições e a figura 5-5 mostra a configuração final da rede. Estas adições somam um custo total de US\$ 366 milhões em valores atuais e gastou-se, aproximadamente, 4 minutos para se chegar a esta solução.

Para fins de comparação, o custo da melhor solução produzida por um algoritmo baseado em índices de custo/benefício foi de US\$ 438 milhões em valores atuais com 25 circuitos adicionados.

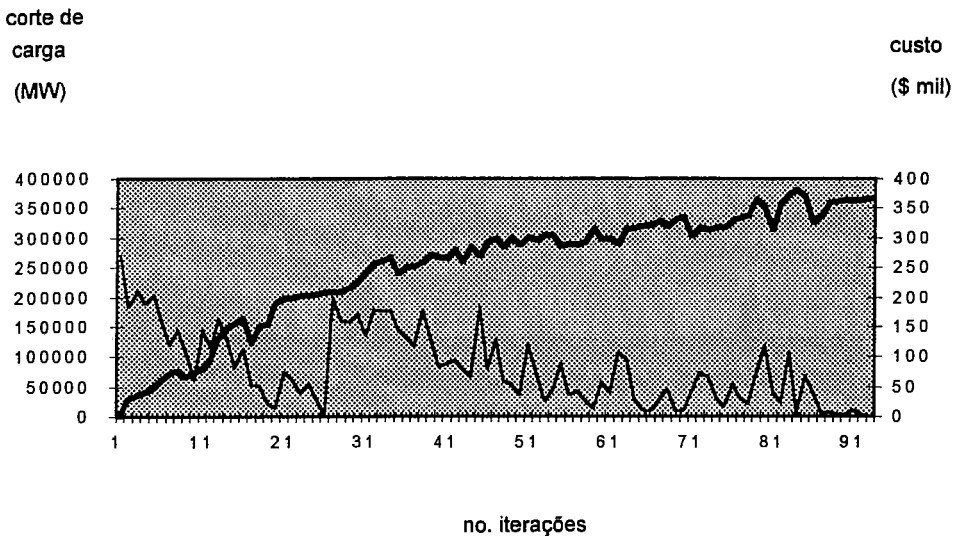


Figura 5-4. - Processo de Convergência - Fase 1 e Fase 2

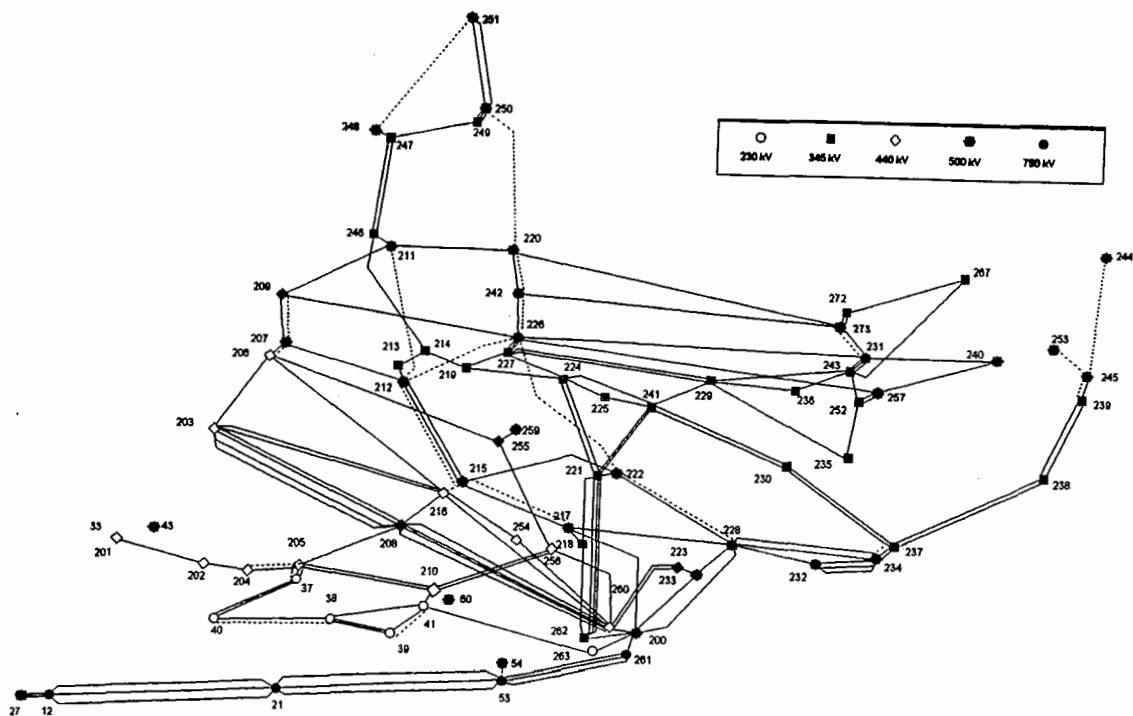


Figura 5-5. - Configuração Final (circuitos adicionados pontilhados)

Buscando uma melhor performance, e até mesmo uma melhor solução, atribuiu-se prioridades às variáveis selecionadas pelo algoritmo de "Branch and Bound". Cada variável recebe como prioridade o número de vezes em que ela foi setada em 1 nas soluções anteriores, esta frequência determina a ordem de seleção das variáveis para o "branching".

Utilizando este esquema, foi obtida uma solução de custo US\$ 345 milhões depois de 23 iterações da Fase 1 e 48 iterações da Fase 2. Foram adicionados 24 circuitos e o tempo gasto de, aproximadamente, 3 minutos.

É interessante comparar estas duas soluções. Esta última, apesar de adicionar mais circuitos, é mais barata e levou menos tempo que a primeira, pois, com o auxílio das prioridades, o algoritmo de resolução achou um caminho diferente na árvore da busca B&B, o que o levou a uma solução melhor. Este fato comprova a validade do uso de diferentes heurísticas na obtenção de melhores soluções e melhores performances. Esta nova solução está ilustrada na figura 5-6.

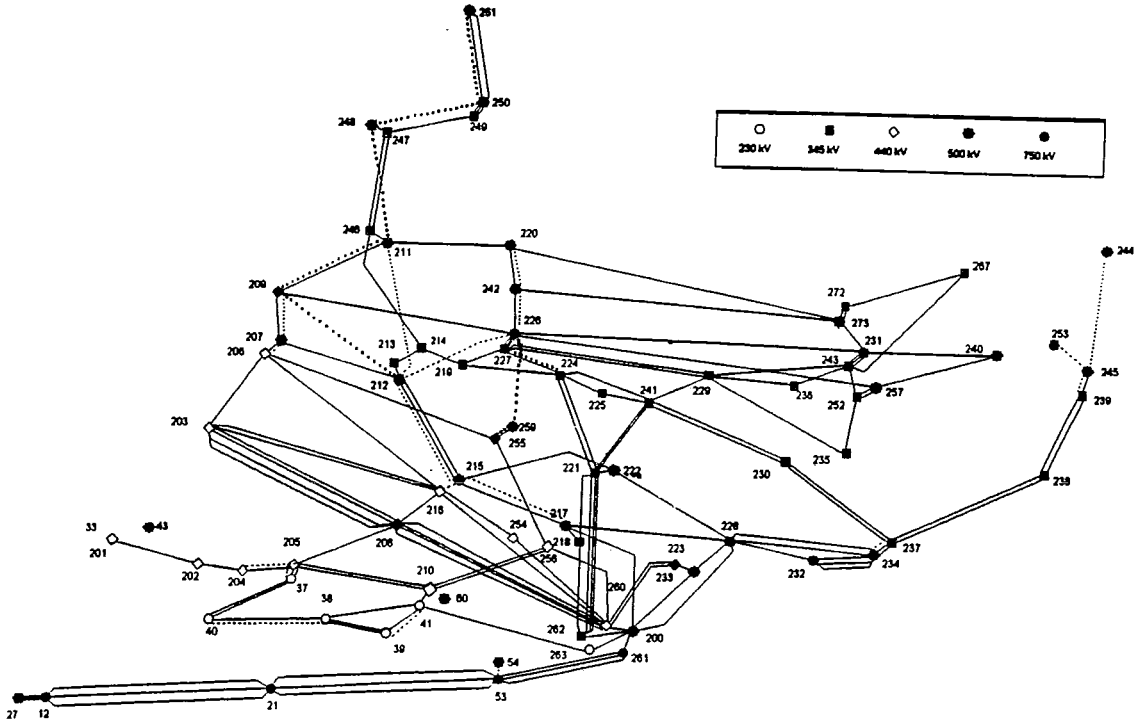


Figura 5-6. - Configuração Final (circuitos adicionados pontilhados)

5.3 SISTEMA REDUZIDO DO SUL BRASILEIRO

Este sistema possui 46 barras e foi usado em [7]. Em todas as faixas de passagem, são permitidos dois circuitos candidatos. Todos os dados relevantes a este caso podem ser encontrados em [7]. Sua configuração inicial está ilustrada na figura 5-7, onde os circuitos candidatos são mostrados em linhas pontilhadas. É fácil verificar a existência de muitas barras isoladas na rede inicial, o que faz com que este sistema seja um problema de difícil solução.

Este sistema motivou a elaboração da Metodologia 2, já que a Metodologia 1 não conseguiu solucioná-lo.

O subproblema de investimento gerado para este sistema possui 158 variáveis binárias e o de operação possui 156 variáveis contínuas e 126 restrições. Foram introduzidas 24 restrições lógicas no subproblema de investimento e para solucioná-lo não se utilizou o esquema de prioridades.

Utilizando uma abordagem já mencionada, chamaremos de Fase 1 as iterações que geraram cortes de Transporte, Fase 2 as iterações que geraram cortes do Modelo Linearizado e Fase 3 as iterações que reexecutam o subproblema de investimento a fim de encontrar uma solução mais barata.

No processo de convergência deste sistema, levou-se 77 iterações para se encontrar a solução final: 43 iterações da Fase 1, 27 da Fase 2 e 7 da Fase 3. Ao final do processo, haviam sido adicionados 8 circuitos a um custo de US\$ 70.289 milhões em valores atuais, gastos 14.8 minutos e o corte de carga era de 0.7 MW. Esta configuração final está ilustrada na figura 5-8. Os circuitos adicionados estão indicados entre parênteses. Os circuitos pontilhados indicam novos circuitos, ou seja, antes não havia circuito nenhum nesta faixa de passagem.

Apertando a tolerância da solução, ou seja, obrigando o corte de carga final ser nulo, foram realizadas mais 2 iterações (uma da Fase 1 e outra da Fase 2) e adicionado mais um circuito, o 2/5, resultando num custo total de US\$ 72.870 milhões, alcançado depois de 16 minutos.

É interessante ressaltar que conforme o processo de execução vai transcorrendo, o tempo para se chegar a uma solução viável para o subproblema de investimento é maior, ou seja, a dificuldade de se achar uma solução viável é crescente.

Até então, estes resultados só haviam sido obtidos por Romero e Monticelli [2], que utilizavam também planejamento hierárquico. Estes resultados são muito melhores que quaisquer outros conseguidos por outros métodos na literatura.

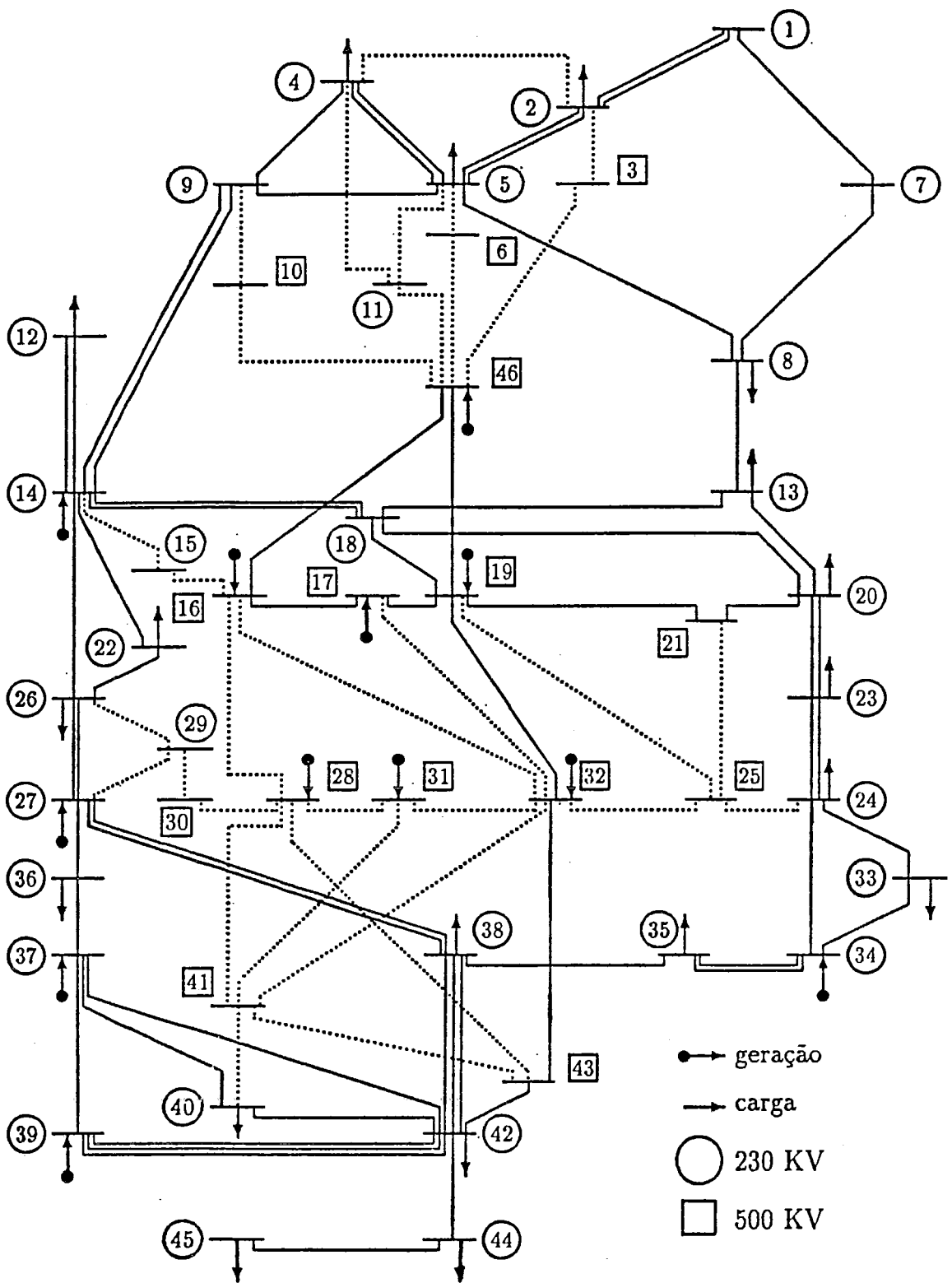


Figura 5-6. - Configuração Inicial - Sistema de 46 barras

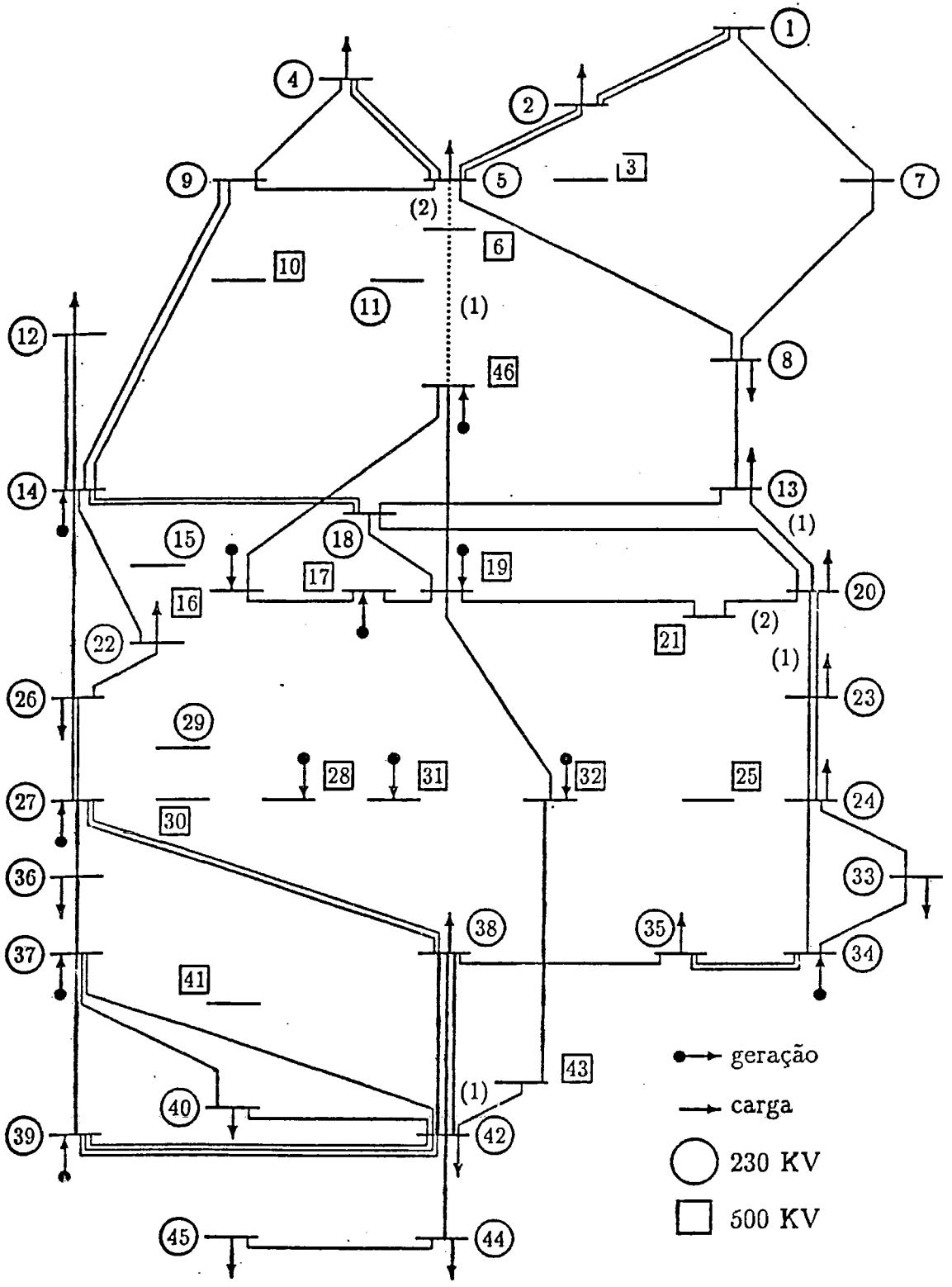


Figura 5-7. - Configuração Final

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

As metodologias apresentadas nesta tese levaram à obtenção de resultados considerados ótimos no teste de sistemas elétricos reais.

Nos casos de 6 e de 46 barras, os resultados obtidos foram muito bons, pois se igualaram aos resultados conseguidos por Romero e Monticelli [2], que, até agora, são as melhores soluções encontradas para estes sistemas na literatura.

O sistema de 79 barras também foi solucionado de forma bastante satisfatória, pois até agora não existem publicados resultados melhores que os obtidos neste trabalho.

As metodologias apresentadas permitem o uso de diferentes heurísticas durante o processo iterativo, o que representa uma continuação natural deste trabalho.

Se mostrou muito interessante e vantajoso o uso de restrições lógicas na estrutura do subproblema de investimento, ou seja, a representação de restrições de operação no subproblema de investimento, pois elas melhor representam a região viável deste subproblema. A determinação de tipos de restrições de operação também representam uma continuação natural deste trabalho.

Este último item evidencia a necessidade de se tentar resolver o problema de planejamento integralmente, ou melhor, sem recorrer a algoritmos de decomposição. Existem vários métodos novos que vêm se mostrando muito eficientes na resolução de problemas combinatórios. Entre estes métodos destacam-se a Busca Tabu, Simulated Annealing e Algoritmos Genéticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G.C. Oliveira, A.P.C. Costa, S. Binato, "Large Scale Transmission Network Planning Using Optimization and Heuristic Techniques", Paper 95 WM 130-5, IEEE-PES Winter Meeting, Jan/Feb 1995, New York.
- [2] R. Romero, A. Monticelli, "A Hierarchical Decomposition Approach for Transmission Network Expansion Planning", Paper WP93-048, IEEE-PES Winter Meeting, Jan/Feb 1993, Columbus-Ohio.
- [3] J.F. Benders, "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", *Numerische-Mathematik*, vol.4, 1962.
- [4] L.L. Garver, "Transmission Network Estimation Using Linear Programming", *IEEE Trans. Power App. Systems*, vol. PAS-89, p. 1688-1697, Sep/Oct..
- [5] A. Monticelli, A. Santos Jr., M.V.F. Pereira, S.H.F. Cunha, B.J. Parker, J.C.G. Praça, "Interactive Transmission Network Planning Using a Least-Effort Criterion", *IEEE Trans. Power App. Systems*, vol. PAS-101, no. 10, October, 1982.
- [6] R. Villasana, L.L. Garver, S.J. Salon, "Transmission Network Planning Using Linear Programming", *IEEE Trans. Power App. Systems*, vol. PAS-104, no. 2, Feb, 1985.
- [7] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, S.H.F. Cunha, G.C. Oliveira, "A Decomposition Approach to Automated Generation/Transmission Expansion Planning", *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-104, no. 2, Feb, 1985.
- [8] J.C. Kaltenbach, J. Perschon, E.H. Gehrig, "A Mathematical Optimization Technique for the Expansion of Electric Power Transmission Systems", *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-89, no. 1, Jan, 1970.

- [9] M.V.F. Pereira, L.M.V.G. Pinto, G.C. Oliveira, S.H.F. Cunha, "Composite Generation-Transmission Expansion Planning", EPRI-Research Project 2473-0, Stanford University, 1987.
- [10] S. Granville and all, "Mathematical Decomposition Techniques for Power System Expansion Planning", EPRI-Report RP2473-6, vol. 2, 1988.
- [11] S. Granville, M.V.F. Pereira, "Analysis of the Linearized Power Flow Model in Benders Decomposition", EPRI-Report RP2473-6, Stanford University, Feb, 1985.
- [12] B. Stott, J.L. Marinho, "Linear Programming for Power-System Network Security Applications", IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-98, no. 3, May/Jun. 1979.
- [13] S.T. Lee, C.K. Pang, G.R. Fegan, "Research and Development Needs in Utility Expansion Planning including New Energy Technologies", presented at the DOE Conference on Research Needs for the Effective Integration of New Technologies into the Electric Utility, July 26-30, 1982, St. Michaels, Maryland.
- [14] C. Gonzaga, R. Persiano, "Relatório Final - Otimização e Expansão de Sistemas de Transmissão de Energia" - Projeto COPPETEC ET-2130/79, 1979.
- [15] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali, "Linear Programming and Network Flows", Wiley, 1977.
- [16] CPLEX Optimization Inc., "CPLEX 3.0 User's Manual", 1994.
- [17] G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, "Integer and Combinatorial Optimization", Wiley, 1988.
- [18] R. Romero, "Um Método de Decomposição para Planejamento a Longo Prazo de Sistemas de Transmissão", Tese de Doutorado, UNICAMP, 1993.

- [19] A.M. Geoffrion, R.E. Marsten, "Integer Programming Algorithms: A Framework and State-of-Art Survey", *Management Science*, vol. 18, no. 9, 1972.
- [20] A.M. Geoffrion, "Generalized Benders Decomposition", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 10, no. 4, 1972.
- [21] A.M. Geoffrion, "Elements of Large Scale Mathematical Programming", *Management Science*, vol. 16, no. 11, 1970.
- [22] A.M. Geoffrion, G.W. Graves, "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition", vol. 20, no. 5, 1974.
- [23] T. Ibaraki, T. Ohashi, H. Mine, "A Heuristic Algorithm for Mixed Integer Programming Problems", *Mathematical Programming Study*, 2, 1974.
- [24] C.C. Gonzaga, "Path Following Methods for Linear Programming", *SIAM Review* 34: 167-227, 1992.
- [25] E. Balas, C Martin, "Pivot and Complement - A Heuristic for 0-1 Programming", *Management Science*, vol. 26, no. 1, 1980.
- [26] "Estudo de Transmissão do Sudeste Brasileiro", Relatório Interno Eletrobrás / 1988.
- [27] E. Balas, "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", *Operations Research*, 13(4), 517-546, 1965.
- [28] A.V. Goldberg, "A Preflow-Push Algorithm for the Minimum-Cost Flow Problem".

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DOS ÍNDICES DE SENSIBILIDADE DO MODELO DE FLUXO DE POTÊNCIA LINEARIZADO

Os seguintes resultados estão relacionados com o "Teorema da Compensação" da teoria do modelo de fluxo de potência linearizado. Quando a geração é fixada, o efeito de uma mudança na susceptância de uma linha é equivalente a manter a susceptância constante e fazer uma mudança adequada nas cargas das barras conectadas a essa linha [11].

Seja $P(\gamma, d, \bar{\phi})$ a expressão que denota o problema (4.6) com vetor de susceptâncias de linha γ e carga d . Sejam também $h_1 = (h_{1ij} = \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij})$; $h_2 = (h_{2ij} = \gamma_{ij} \bar{\phi}_{ij})$.

Sejam

$z(\gamma, d, \bar{\phi})$ a solução básica ótima de $P(\gamma, d, \bar{\phi})$,

e $\omega(\gamma, d, \bar{\phi})$ o valor ótimo da função objetivo.

Note que $z(\gamma, d, \bar{\phi})$ contém as variáveis θ .

Se $\gamma^0 \geq 0, d^0, \bar{\phi}^0$ são os valores iniciais de $\gamma, d, \bar{\phi}$ e o vetor x definido em $R^{|\Omega|}$ tal que $\gamma^0 + x \geq 0$ definem-se os vetores $d(x), h_1(x), h_2(x)$ tal que:

$$d_k(x) = d_k^0 + \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} \left[\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right]; \quad k=1, \dots, N.$$

(A.1)

$$h_{1ij}(x) = h_{1ij}^0 - x_{ij} \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0 \right]; \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

(A.2)

$$h_{2ij}(x) = h_{2ij}^0 - x_{ij} \left\{ - \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\}; \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

(A.3)

Além disso, sejam:

$$\pi_{ij}(x) = (\pi_i^0 - \pi_j^0) \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

(A.4)

$$\lambda_{1ij}(x) = \lambda_{1ij}^0 \left\{ \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\} \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

(A.5)

$$\lambda_{2ij}(x) = \lambda_{2ij}^0 \left\{ - \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\} \quad \forall (i, j) \in \Omega$$

(A.6)

onde

$$h_{1ij}^0 = h_{2ij}^0 = \gamma_{ij}^0 \bar{\phi}_{ij}^0 \quad \forall (i, j) \in \Omega,$$

$\theta(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ vem da solução ótima $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$

$\pi^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0$ são as variáveis duais ótimas de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ associadas às restrições (4.6.1), (4.6.2) e (4.6.3) respectivamente, do problema (4.6).

Seja $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ a expressão que denota o problema $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ com o lado direito substituído por $(d(x), h_1(x), h_2(x))$. Seja $\bar{\omega}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ o valor ótimo de $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$.

Nota: As proposições e lemas apresentados aqui estão desenvolvidos em [11].

Proposição 3.1:

Sejam $\gamma^0 \geq 0$, d^0 e $\bar{\phi}^0$ os valores iniciais para γ , d e $\bar{\phi}$ respectivamente e o vetor $x \in R^{|\Omega|}$ tal que $\gamma^0 + x \geq 0$. Então a solução ótima $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$. Além disso seu valor ótimo é

$$\omega(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} (\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x))x_{ij} \quad (A.7)$$

Prova:

Seja $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ uma solução básica ótima de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$. Neste caso, $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ inclui as variáveis $\theta, g, e r$.

Tomando a equação (4.6.1) na barra k e as equações (4.6.2) e (4.6.3) nos ramos (i, j) tem-se:

$$- \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} (\gamma_{ik}^0 + x_{ik}) \right\} \theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{i \in \Omega_k} (\gamma_{ik}^0 + x_{ik}) \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) +$$

$$g_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + r_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = d_k^0 \quad (A.8)$$

$$(\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}^0 \quad (A.9)$$

$$- (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \left[\theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq (\gamma_{ij}^0 + x_{ij}) \bar{\phi}_{ij}^0 \quad (\text{A.10})$$

Depois de algumas simplificações, obtém-se o seguinte:

$$- \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} \gamma_{ik}^0 \right\} \theta_k (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{i \in \Omega_k} \gamma_{ik}^0 \theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + g_k (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) + r_k (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = d_k (x) \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_{ij}^0 \left[\theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq h_{1ij} (x) \quad (\text{A.12})$$

$$- \gamma_{ij}^0 \left[\theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \leq h_{2ij} (x) \quad (\text{A.13})$$

onde $d_k (x)$, $h_1 (x)$ e $h_2 (x)$ foram definidos anteriormente. Isto implica que $z (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é factível para $\bar{P} (\gamma^0, d (x), h_1 (x), h_2 (x))$ então,

$$\bar{\omega} (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq \bar{\omega} (\gamma^0, d (x), h_1 (x), h_2 (x)) \quad (\text{A.14})$$

Pela teoria da dualidade em programação linear tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} (\gamma^0, d (x), h_1 (x), h_2 (x)) &\geq \omega (\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \\ &+ \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} \left[\theta_k (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \right\} \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{1ij}^0 x_{ij} \left[\theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0 \right] \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{2ij}^0 x_{ij} \left\{ - \left[\theta_i (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j (\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Portanto, faz-se

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} \pi_{ij}(x) = \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \right\}$$

$$\lambda_{1ij}(x) = \lambda_{1ij}^0 \left\{ \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\}$$

$$\lambda_{2ij}(x) = \lambda_{2ij}^0 \left\{ - \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] - \bar{\phi}_{ij}^0 \right\}$$

onde

$$\pi_{ij}(x) = (\pi_i^0 - \pi_j^0) \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right]$$

Das expressões anteriores e das equações (A.14) e (A.15) tem-se que:

$$\omega(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \geq \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)] x_{ij}$$

(A.16)

Lema 3.1:

Sejam $\gamma^0 \geq 0, d^0$ e $\bar{\phi}^0$ valores iniciais para γ, d e $\bar{\phi}$ respectivamente. Existe um $\varepsilon > 0$ tal que para algum $\gamma > 0, \|\gamma - \gamma^0\| < \varepsilon$ se $H(\gamma)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0 + d^0, \bar{\phi}^0)$, então $H(\gamma^0)$ é um ótimo para $P(\gamma^0 + d^0, \bar{\phi}^0)$. Além disso, para alguma direção v sobre $R^{|\Omega|}$ existe um $\delta_v > 0$ e um conjunto fixo $H(v)$ (possivelmente dependente de v) tal que $H_v(\gamma^0 + tv)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ para algum $t, 0 \leq t \leq \delta_v$.

Prova:

Para a primeira parte, se $H(\gamma^0)$ não é primal ou dual factível para $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$, então existe uma vizinhança de γ^0 tal que, para algum γ nessa vizinhança, $H(\gamma)$ não é primal ou dual factível para $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$. Como o número de bases possíveis para $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ é finito, tomando a interseção das vizinhanças anteriores obtém-se o $\varepsilon > 0$ desejado.

Para a segunda parte, observe que se $H_H(t)$ e $C_H(t)$ são a solução básica e o custo reduzido associado com a base $H(\gamma^0 + tv)$ de $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ respectivamente, então cada um de seus componentes é uma função racional de t . Isto significa que ele muda de sinal ou torna-se singular, no máximo, num número finito de pontos. Agora supor por contradição que não existe $\delta_v > 0$ e H_v como estabelece o lema. Então para cada conjunto fixado H e algum $\delta > 0$ existe $t, 0 < t < \delta$ tal que $H(\gamma^0 + tv)$ seja uma base não ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$. Portanto, pela observação anterior, existe um $\delta_H > 0$ tal que $H(\gamma^0 + tv)$ é uma base não ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ para algum $t, 0 < t < \delta_H$. Agora seja:

$$\delta^0 = \min_H \{\delta_H\}$$

Como o número de possíveis conjuntos H é finito, $\delta^0 > 0$ e $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ não tem base ótima para $t, 0 < t < \delta^0$, o que é uma contradição neste caso.

Um dos resultados da seguinte proposição é a fórmula para o índice de sensibilidade com respeito às susceptâncias de linha.

Proposição 3.2:

Seja $\gamma^0 \geq 0, d^0, \bar{\phi}^0$ valores iniciais para $\gamma, d, \bar{\phi}$. Existe um $\varepsilon > 0$ tal que para algum $x \in \mathcal{R}^{|\omega|}, \|x\| < \varepsilon$ e $\gamma^0 + x > 0$, a solução básica ótima $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é uma solução ótima de $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$. O valor ótimo satisfaz:

$$\omega(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)] x_{ij} \quad (A.17)$$

Além disso, as derivadas parciais pela esquerda e pela direita de $\omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ com respeito a γ_{ij} existem em γ^0 e são iguais a:

$$\sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (A.18)$$

Se, em adição, a base ótima de $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ é única e não degenerada, $\omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ é diferenciável na vizinhança de γ^0 .

Prova:

Assumir $\varepsilon > 0$ como no Lema 3.1 e seja $x \in \mathcal{R}^{|\omega|}, \|x\| < \varepsilon$ e $\gamma^0 + x \geq 0$.

Seja $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ uma solução básica ótima de $P(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ e $H(\gamma^0 + x)$ sua base associada.

Então, do Lema 3.1, $H(\gamma^0)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$. Em particular, ela é dual factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$. Por outro lado, da Proposição 3.1, $z(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0)$ é factível para $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$, então ele é ótimo para este problema pois é factível e sua base associada é dual factível. Isto implica que:

$$\omega(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = \bar{\omega}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) \quad (A.19)$$

Agora, como $\bar{P}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x))$ e $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ têm uma base ótima comum $H(\gamma^0)$,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\gamma^0, d(x), h_1(x), h_2(x)) &\geq \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \\ &+ \sum_k \pi_k^0 \left\{ \sum_{i \in \Omega_k} x_{ik} \left[\theta_k(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) \right] \right\} \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{1ij}^0 x_{ij} \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0 \right] \\ &- \sum_{(i,j) \in \Omega} \lambda_{2ij}^0 x_{ij} \left\{ - \left[\theta_i(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) - \bar{\phi}_{ij}^0 \right] \right\} \end{aligned} \quad (A.20)$$

Então tem-se

$$\omega(\gamma^0 + x, d^0, \bar{\phi}^0) = \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(x) - \lambda_{1ij}(x) - \lambda_{2ij}(x)] x_{ij} \quad (A.21)$$

Para calcular as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de $\omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ com respeito a γ_{ij} , faz-se $v = e_{ij}$ ou $-e_{ij}$ no Lema 3.1. Então existe um $\delta_v > 0$ e H_v tal que $H_v(\gamma^0 + tv)$ é uma base ótima para $P(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0)$ para algum $t, 0 \leq t \leq \delta_v$. Usando o mesmo argumento anterior,

$$\omega(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0) = \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) + t \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(tv) - \lambda_{1ij}(tv) - \lambda_{2ij}(tv)] v_{ij} \quad (\text{A.22})$$

Da relação anterior assumindo continuidade para $\omega(\cdot)$ para $t, 0 \leq t \leq \delta_v$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\omega(\gamma^0 + tv, d^0, \bar{\phi}^0) - \omega(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)}{t} \right\} = \sum_{(i,j) \in \Omega} [\pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0)] v_{ij} \quad (\text{A.23})$$

Em particular, as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de $\omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ com respeito a γ_{ij} :

$$\left. \frac{\partial^+ \omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)}{\partial \gamma_{ij}} \right|_{\gamma = \gamma^0} = \sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (\text{A.24})$$

$$\left. \frac{\partial^- \omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)}{\partial \gamma_{ij}} \right|_{\gamma = \gamma^0} = \sigma_{ij} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \quad (\text{A.25})$$

Note que, se a base ótima $P(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0)$ é não degenerada ou não única, as derivadas parciais pela direita e pela esquerda de $\omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ em γ^0 podem ser diferentes, porque as variáveis primal e dual que aparecem nas expressões anteriores podem vir de bases diferentes. Porém, se a base ótima $H(\gamma^0)$ é única e não degenerada, existe uma vizinhança de γ^0 tal que $H(\gamma)$ é uma base ótima única e não degenerada de $P(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ para γ nessa vizinhança. Isto implica que $\omega(\gamma, d^0, \bar{\phi}^0)$ é uma função diferenciável sobre γ nessa vizinhança.

Proposição 3.3:

Sejam $\gamma^0 \geq 0, d^0, \bar{\phi}^0$ valores iniciais de $\gamma, d, \bar{\phi}$. No problema (MCC), (4.6),

$$\sigma_{ij}^{MCC} = \pi_{ij}(0) \quad \forall (i, j) \in \Omega \tag{A.26}$$

Prova:

Da Proposição 3.2,

$$\sigma_{ij}^{MCC} = \pi_{ij}(0) - \lambda_{1ij}(0) - \lambda_{2ij}(0) \tag{A.27}$$

Agora:

$$\lambda_{1ij}(0) = \lambda_{1ij}^0 \left[\left(\theta_i(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) \right) - \bar{\phi}_{ij}^0 \right] \tag{A.28}$$

$$\lambda_{2ij}(0) = \lambda_{2ij}^0 \left[\left(\theta_i(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) - \theta_j(\gamma^0, d^0, \bar{\phi}^0) \right) - \bar{\phi}_{ij}^0 \right] \tag{A.29}$$

onde λ_1^0, λ_2^0 são valores ótimos duais associados às restrições (4.6.2) e (4.6.3) no problema (4.6), então:

$$\lambda_{1ij}(0)\gamma_{ij}^0 = 0 \quad (A.30)$$

$$\lambda_{2ij}(0)\gamma_{ij}^0 = 0 \quad (A.31)$$

pela condição das folgas complementares. Por outro lado, se $\gamma_{ij}^0 = 0$, então para que a base seja não singular, a correspondente variável de folga dessa restrição ficará na base. Isto implica que se $\gamma_{ij}^0 = 0$, então

$$\lambda_{1ij}(0) = \lambda_{2ij}(0) = 0$$

Portanto, no problema (MCC):

$$\sigma_{ij}^{MCC} = \pi_{ij}(0) \quad (A.32)$$

Assim tem-se que

$$\sigma_{ij}^{MCC} = \pi_{ij}(0) = (\pi_i^0 - \pi_j^0)(\theta_i - \theta_j) \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (A.33)$$

para o subproblema (4.6).

Quando o sistema é desconexo, a matriz básica da solução ótima pode ser singular e a Proposição 3.2 não se cumpre. Então, para sistemas não conexos, não é necessariamente verdadeira a equação (A.33), como pode ser mostrado facilmente com exemplos práticos [11]. Assim, o desenvolvimento apresentado, para atingir uma solução ótima global, tem que considerar um sistema elétrico conexo e a maneira de se contornar esse problema já foi apresentada no capítulo 3.