CONTROLE DE ESTOQUE DE ITENS DE ALTO CUSTO E BAIXA DEMANDA

Alvaro de Lima Veiga Filho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Luis Valadares Tavares
LUIS VALADARES TAVARES
(Presidente)

Reinaldo Castro Souza
REINALDO CASTRO DE SOUZA
(Orientador)

CLOVIS CAESAR GONZAGA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
ABRIL DE 1982

VEIGA FILHO, ALVARO DE LIMA

Controle de Estoques para Itens de Alto Custo e Baixa Demanda (Rio de Janeiro) 1982.

ix 211 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ) M.Sc.

Engenharia de Sistemas, 1982

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. de Engenharia

1. Controle de Estoques I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

A REINALDO CASTRO DE SOUZA pela orientação segura e amizade dedicada durante a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

A política ótima de estoques para itens de alto custo e baixa demanda consiste em emitir os pedidos de forma que o nível do estoque permaneça constante. Neste caso, só resta uma variável de decisão: o nível de referência s do estoque.

Este trabalho se propõe a uma análise do problema da determinação de s quando a demanda é gerada por um processo GEOMÉTRICO-POISSON em três níveis: Estabelece a expressão do custo associado a cada decisão (o nível de referência), um estudo estatístico da demanda identificando suas características e comparando os métodos de estimação existentes com o método proposto que se constitui na aplicação do BEF (Bayesian Entropy Forecasting) ao problema e, finalmente, a avaliação do desempenho do estoque dada uma decisão através de uma série de índices calculados independentemente dos custos.

SUMMARY

In inventory systems, the optimal police for high cost and/or low demand items is such that the orders are placed so as to keep constant the stock level. In this case there exist only one decision variable, that is, the spare stock "s".

In this work it is studied the problem of finding the spare stock "s" when the demand is modelled by a Geometric Poisson process. It is first stablished an expression of the cost associated with each decision followed by statistical study of the demand, i.e., a comparision of the existing estimation procedures for the problem with the Bayesian Entropy Forecasting method (BEF for short) used here. Finally, the performance of the stock for a given decision is obtained by using various indices calculated independently of the costs.

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO

I. INTRODUÇÃO

Frequentemente, sistemas que visam o atendimento da procura por um determinado bem, se deparam com o problema causado pelo descompasso normalmente observado entre esta procura e a capacidade do sistema de se reabastecer deste mesmo bem.

De forma a minimizar os efeitos advindos desta diferença, é conveniente acumular uma certa quantidade deste bem, criando-se um estoque e fazendo com que a procura possa ser total ou parcialmente atendida assim que observada e o processo de reabastecimento passe a ter a função de manter os níveis de estoques adequados e não de atender diretamente a procura.

Sendo assim, um estoque é uma maneira de adaptar a procura ao longo do tempo à capacidade de reabastecimento do sistema.

O acúmulo de bens em estoque visa melhorar a capacidade de atendimento da procura e este será tanto melhor quanto maiores forem os níveis de estoque. No entanto, imobilizar bens em estoque significa também imobilizar capital e arcar com os custos relativos à operação do estoque (administração, informação, espaço físico etc.).

Uma política de estoques visa estabelecer um equilíbrio entre estes dois fatores concorrentes: atender a procura sem, porém, gastar mais em estoques do que o lucro proporcionado pela melhor qualidade de atendimento (é importante observar que neste caso, "gasto" e "lucro" não tem uma interpretação exclusivamente financeira podendo incluir fatores como satisfação do cliente, garantia de atendimento etc.).

Uma classe especial de estoque, que se constitui o alvo deste trabalho, se refere àqueles itens cuja procura é pequena mas cujo custo é bastante elevado, consumindo boa parte dos investimentos totais em estoque. Para estes itens, verifica-se que a política ótima é manter um nível de estoque constante, isto é, uma vez observada uma procura, um pedido de reabastecimento suficiente para restaurar o nível do estoque é emitido (em alguns casos, isto só é possível à intervalos regulares de tempo). Nesta classe de itens se encontram, geralmente, peças de reposição para navios e aviões. A única decisão a ser tomada para estes itens é a escolha de qual o nível de estoque compatível com as necessidades do sistema.

Um elemento básico para a escolha do nível apropriado do estoque é, sem dúvida, o conhecimento do valor da procura. Naturalmente, raros são os casos em que o seu nível pode ser determinado precisamente. Assim, a procura deve, necessariamente, ser estudada a luz de métodos estatísticos cujos resultados serão considerados no processo de tomada de decisão.

Os métodos estatísticos clássicos se mostram frágeis quando aplicados ao problema de estimação dos parâmetros da distribuição da procura quando esta se mostra pequena e/ou esparsa no tempo. A estatística Bayesiana, por sua maleabilidade e capacidade de considerar fatores subjetivos se mostra mais adequada para este caso.

Este trabalho, se propõe a uma análise do problema de estocar itens de baixa procura e alto custo em vários níveis:

(i) Estabelecer a expressão do custo associado a cada decisão (o nível de armazenamento) baseados no conhecimento dos vários parâmetros da distribuição da procura e dos custos associados. A partir desta expressão, é possível estabelecer qual o nível ótimo de armazenamento.

(ii) Estudo estatístico da procura, identificando suas características e comparando os métodos existentes com o método proposto que se constitui na aplicação do método BEF (Bayesian Entropy Forecasting) ao problema.

(iii) Avaliação da performance do estoque dado o nível de armazenamento. Para isso, nos valemos de índices calculados a partir da distribuição da procura e independente dos custos, em geral de difícil avaliação.

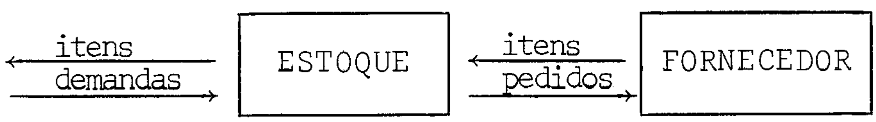
O trabalho está organizado da seguinte forma: nos capítulos II e III apresentamos os modelos de estoque determinísticos e estocásticos já existentes e no capítulo IV uma extensão destes modelos ao nosso problema onde se inclui uma análise mais cuidadosa do processo de chegada das procuras e o estudo de algumas simplificações da função de custo aplicáveis em casos particulares. O capítulo V é integralmente dedicado aos métodos de estimação dos parâmetros da procura e, em especial, ao modelo BEF. No capítulo VI são apresentados os índices de performance da política de estoque ao qual nos referimos no item (iii) acima e no capítulo VII apresentamos todos os testes comparativos com dados simulados. Os programas utilizados neste capítulo são apresentados nos apêndices A, B, C e D.

II. CONTROLE DE ESTOQUES

II. CONTROLE DE ESTOQUES

1. INTRODUÇÃO

Um sistema de estoques, na sua estrutura básica pode ser descrito pela figura abaixo:



onde são representados os seus principais elementos:

O ESTOQUE: onde está armazenada uma quantidade, chamada "estoque em maõs", de um item e ao qual comparecem clientes estabelecendo cada um uma demanda por este item. A não ser quando dito o contrário, cada demanda corresponde a uma unidade do item.

O FORNECEDOR: Abastece o ESTOQUE mediante a emissão de um "pedido" por parte da administração do estoque.

Ao tempo decorrido entre a emissão do pedido e a chegadas das unidades encomendadas chamaremos de "tempo de entrega".

2. POLÍTICAS DE CONTROLE

Qualquer política de controle de estoque está, em última análise, fundamentada em duas questões: Quando emitir um pedido e Quanto pedir.

Estas, em geral, são as únicas variáveis sobre as quais se tem controle já que tanto a demanda como o tempo de entrega não dependem de nenhuma ação por parte da administração do estoque.

Como critério de otimização será utilizado a minimização dos custos variáveis com a política adotada o que, conforme será visto adiante, é equivalente a maximizar o lucro bastando para isto que sejam apropriadamente definidos cada um dos termos que compõe a função de custo.

A minimização da função de custos pode, eventualmente, estar sujeita a restrições tais como: limitação de espaço, peressibilidade do material estocado, investimento máximo, ... etc. Além disso, pode-se desejar que o estoque atinja níveis mínimos de performance, níveis estes medidos através de índices como: fração da demanda atendida, fração do tempo em que o estoque está vazio, etc.

3. FUNÇÃO DO CUSTO

Somente os custos que variam com a política adotada serão considerados. Neste estudo a unidade de tempo utilizada será o ano e os sistemas serão considerados estáticos, ou seja, os seus parâmetros são constantes no tempo. Estes custos são,basicamente, três:

3.1 - Custos de Abastecimento

À cada pedido emitido está associado um cus to fixo "A" devido a operações de ordem administrativa tais como: preenchimento de formulários, gastos em comunicações (telex, telefone, etc.) e, em certos casos, transporte e/ou inspeção do material recebido.

Além disso, há o custo dos itens encomendados que varia com a quantidade "Q" de unidades. Para efeito de estudos, "C", o custo da unidade, será considerado independente de Q. Logo, "CP", o custo associado a um pedido, é dado por:

$$CP = A + CQ \qquad \text{(II.1)}$$

O custo anual "C1" é dado por:

$$C1 = n(A + CQ) \qquad \text{(II.2)}$$

onde n é o número de pedidos emitidos no ano.

Logo, o custo médio anual de fornecimento, $\overline{C1}$ é:

$$\boxed{\overline{C1} = \bar{n}\ (A + CQ)} \qquad \text{(II.3)}$$

onde $\bar{n}$ é o número médio de pedidos por ano.

3.2 - <u>Custos de Posse</u>

Neste item serão incluídos gastos referentes a seguros, impostos, aluguel do espaço, custos do capital imobilizado e qualquer outro custo associado à manutenção e operação do estoque. Estes custos variam enormemente em tipo e importância de um sistema para outro. No entanto é considerada, de uma maneira geral, como uma boa aproximação a suposição que estes custos são proporcionais ao investimento total no estoque propriamente dito. Logo, se "I" é a constante de proporcionalidade e C2(t') é o custo associado à um período t' tem-se:

$$C2(t') = IC \int_{o}^{t'} x(t)dt \qquad (II.4)$$

onde $x(t) \geq 0$ é o estoque em mãos no instante t

Quando t' = 1,

$$C2(1) = IC \int_{o}^{1} x(t)dt \qquad (II.5)$$

Logo, "$\overline{C2}$", o custo operacional médio anual é dado por

$$\boxed{\overline{C2} = IC\ \overline{x}} \qquad (II.6)$$

onde $\overline{x}$ é o estoque médio anual em mãos.

3.3 - Custos por Falta de Estoques

Neste item serão analisados dois casos distintos:

3.3.1 - Com Formação de Fila:

Quando um usuário estabelece uma demanda por um item e o estoque em mãos é zero, a sua demanda é colocada numa "lista de espera" ou "fila". As demandas na fila serão atendidas preferencialmente assim que o estoque seja reabastecido.

Estes custos, normalmente, são de difícil avaliação especialmente no que tange a uma eventual perda de preferência de um cliente que poderá, num caso extremo, até transferir todos os seus negócios para outro estabelecimento.

Em certos casos, no entanto, é possível avaliar estes custos. Um exemplo é o caso em que uma linha de produção tenha que parar por falta de alguma peça ou de matéria-prima. Em ambos os casos, os custos seriam aqueles correspondentes ao custo de manter estas máquinas paradas.

Neste trabalho, para efeito de estudo, consideramos o custo com duas componentes: uma, fixa associada a gastos administrativos e outra, proporcional ao tempo em que uma unidade em falta permanece na fila.

Sejam:

Π_o o custo de colocar uma demanda na fila e

$\hat{\Pi}$ o custo por demanda e por unidade de tempo que esta unidade permanece na fila.

Assim, para cada demanda na fila está associado um custo "Π":

$$\Pi = \Pi_o + \hat{\Pi}\,\Delta t \qquad \text{(II.7)}$$

onde Δt é o tempo, em anos, que a demanda permaneceu na fila.

Seja b' o número de demandas que entraram na fila em um ano. Então, C3(t'), o custo devido à falta de estoques no período de tempo t', é dado por:

$$C3(t') = b'\Pi_o + \hat{\Pi} \int_o^{t'} b(t)\ dt \qquad (II.8)$$

onde b(t) é o tamanho da fila no instante t.

Seja $\bar{b}$ o tamanho médio da fila ao longo de um ano. Outra vez, ele é numericamente igual ao número de unidades.ano na fila. Logo,

$$\bar{b} = \int_o^{1} b(t)dt \qquad (II.9)$$

Logo, o custo médio anual por falta de estoque $\overline{C3}$ é:

$$\overline{C3} = \Pi_o \bar{b}' + \hat{\Pi}\ \bar{b} \qquad (II.10)$$

onde $\bar{b}'$ é o número médio de unidades que entraram na fila por ano[1].

Para maior clareza, cabe observar que $\bar{b}$ se refere ao tamanho médio da fila enquanto $\bar{b}'$ se refere ao número total de unidades que entraram na fila, não importando quanto tempo nela permaneceram.

---

1 Repare que $\bar{b}' = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1} b'_i}{n}$ onde b'_i é o número de unidades que entraram na fila durante ano i.

3.3.2 - Sem Formação de Filas - Vendas Perdidas

Ocorre quando um usuário estabelece uma demanda por item em falta no estoque, não se dispõe a entrar numa fila de espera, vai a outro estabelecimento e a venda é perdida.

Outra vez, é difícil medir a insatisfação do cliente em termos monetários. Seja Π o custo de uma venda perdida, então

$$\Pi = \text{custo da insatisfação do cliente} + \text{lucro perdido} \qquad \text{(II.11)}$$

4. MODELOS DETERMÍNIMISTICOS DE CONTROLE DE ESTOQUES

Como já foi dito, os modelos aqui apresentados são estáticos e o critério de otimização é a minimização da média anual dos custos variáveis. Logo "K" o custo médio anual é dado por:

$$K = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\overline{K}(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \text{(II.12)}$$

onde $\overline{K}(\Delta t)$ é o custo variável associado a um período Δt, dado em anos.

São poucos os casos reais que, a rigor, a demanda e o tempo de entrega possam ser considerados determinísticos. Estes modelos, no entanto, são largamente utilizados dado a sua simplicidade e fornecem, ainda, uma boa base de trabalho para o estudo de modelos estocásticos que serão vistos mais adiante.

4.1 - Lote Econômico

É o modelo mais simples. Considera todas a variáveis como sendo contínuas sendo a demanda e o tempo de entrega perfeitamente conhecidos e constantes no tempo. Além disso, o modelo não considera a hipótese de haver falta de estoque ou seja, toda a demanda é atendida.

Sejam:

λ a demanda em unidades/ano

τ o tempo de entrega

Q o tamanho do pedido - cada vez que um pedido é emitido, são encomendadas Q unidades ao fornecedor. Como o modelo é estático, todos os pedidos serão iguais.

Como não há falta de estoque, somente os custos de abastecimento (C1) e os custos operacionais (C2) serão considerados:

Logo:

$$K = \overline{C1} + \overline{C2} \tag{II.13}$$

4.1.1 - Cálculo do Custo de Abastecimento

Como a demanda é considerada contínua, constante e igual a λ e cada pedido é de Q unidades, o número médio de pedidos por ano é dado por(*):

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{Q} \tag{II.14}$$

Logo, por (II.3)

$$\boxed{\overline{C1} = \frac{\lambda}{Q} A + C\lambda} \tag{II.15}$$

4.1.2 - Cálculo dos Custos de Posse

Seja $S \geq 0$ o estoque em mãos no instante que precede a chegada do pedido (vide fig.II.1)

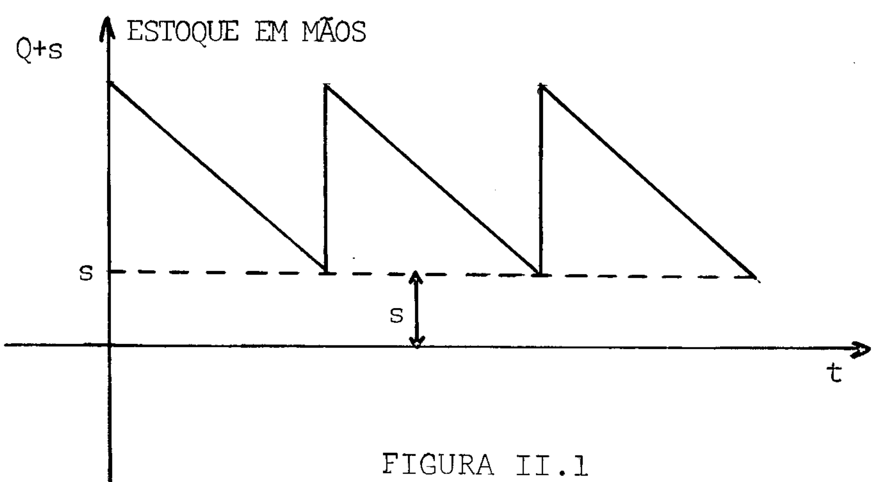


FIGURA II.1

(*) Uma prova rigorosa deste fato é fornecida em Hadley & Whitin[1].

Logo, como o estoque em mãos varia linearmente de Q+S a S, $\overline{x}$, o estoque médio anual é dado Por:

$$\overline{x} = \frac{Q+S+S}{2} = \frac{Q}{2} + S \qquad (II.16)$$

Logo, por (II.6)

$$\overline{C2} = IC(\frac{Q}{2} + S) \qquad (II.17)$$

4.1.3 - Minimização da Função de Custo

Por (II.15) e (II.17), temos

$$K = \frac{\lambda A}{Q} + C\lambda + IC\left(\frac{Q}{2} + S\right) \qquad (II.18)$$

A minimização de K em relação a S e Q nos fornecerá os valores ótimos do estoque em mãos no instante que precede a chegada do pedido (S^*) e do tamanho do pedido (Q^*).

Para calcular S^*, basta verificar que o único termo que depende de S na equação (II.18) é ICS. Logo,

$$\boxed{S^* = 0} \qquad (II.19)$$

Para calcular Q^*, calculemos

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \longrightarrow \boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}}} \qquad (II.20)$$

O estoque em mãos à cada instante está representado na figura abaixo:

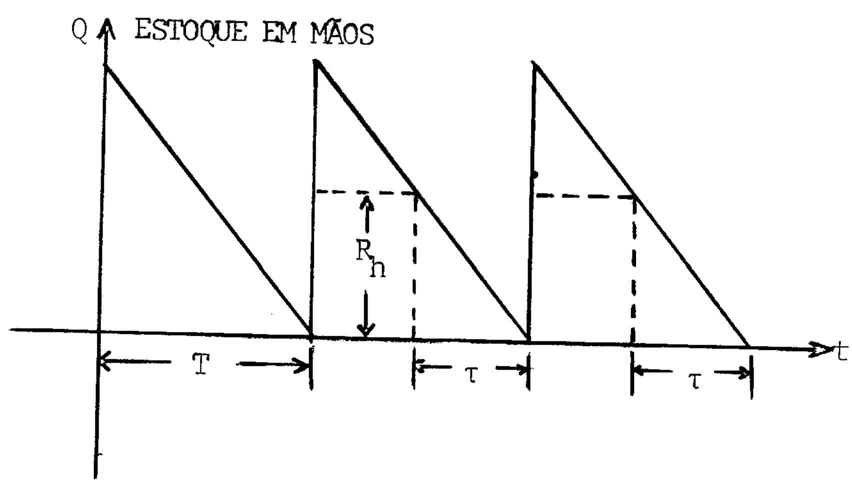


FIGURA II.2

onde estão representados também:

τ ... o tempo de entrega

T ... o período do sistema (tempo após o qual o sistema se repete) sendo $T = Q/\lambda$

R_h .. o ponto de renovação; nível do estoque que quando atingido determina a emissão de um pedido.

4.1.4 - Cálculo de R_h, o ponto de renovação

Primeiramente seja u a "demanda de espera" dada por:

$$u = \lambda\tau \qquad \text{(II.21)}$$

A demanda de espera é a quantidade demandada durante o tempo de entrega. Logo R_h tem que ser tal que, ao final do tempo de entrega, o estoque em mãos seja $S^*=0$.

Seja m, o nº de ciclos completos no período τ, dado por:

$$m = \left[\frac{\tau}{T} \right] \qquad \text{(II.22)}$$

Logo em τ unidades de tempo o sistema recebe Qm unidades e entrega u unidades.

Então,

$$\boxed{R_h = u - mQ} \qquad \text{(II.23)}$$

ou seja, o que se tem em mãos hoje (R_h) mais o que se vai receber durante o período τ(mQ) tem que ser igual a procura total durante o tempo de entrega τ (isto é, u)

4.2 - Com Formação de Fila

Neste caso, todas as demandas serão eventualmente atendidas porém, aquelas ocorridas quando o estoque em mãos for zero serão colocadas em uma fila ou lista de espera e atendidas preferencialmente assim que o estoque seja reabastecido. O gráfico abaixo representa o estoque em mãos ao longo do tempo.

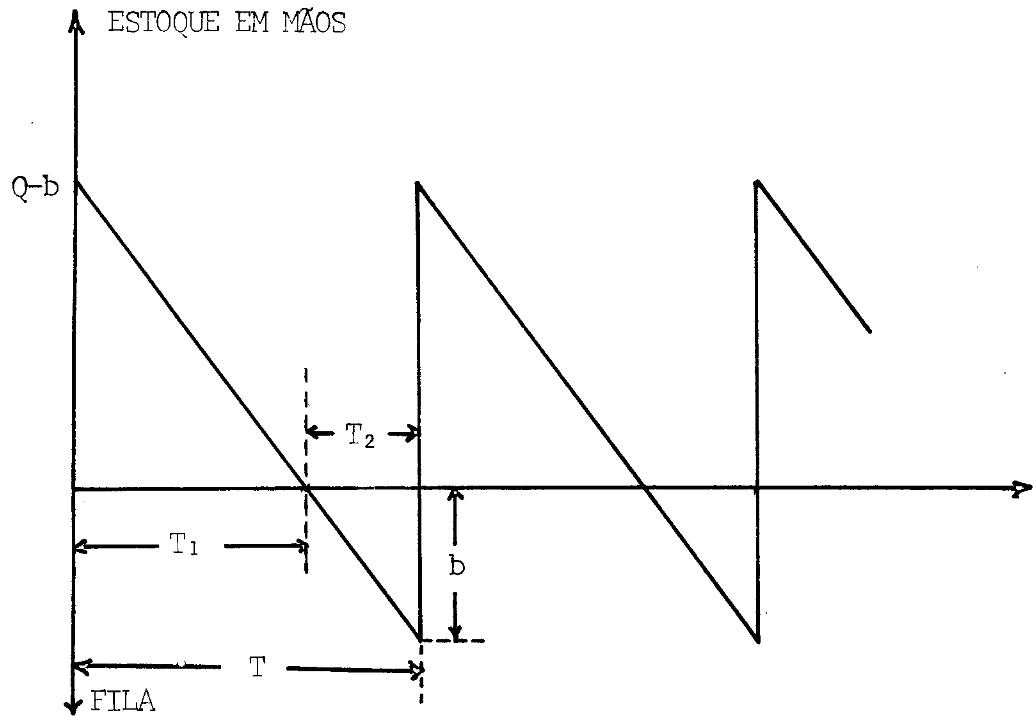


FIGURA II.3

onde:

T_1 .... tempo durante o qual há estoque

T_2 .... tempo durante o qual há fila (estoque em mãos igual a zero)

$T = T_1+T_2$ .. duração de um ciclo

$b \geq 0$ .... tamanho da fila no momento que antecede a chegada de um pedido.

4.2.1 - Custo de Abastecimento

Como no item anterior

$$\overline{CI} = \frac{A\lambda}{Q} + C\lambda \qquad \text{(II.24)}$$

4.2.2 - Custos de Posse

A cada ciclo, $x(t)$, o estoque em mãos, é dado por:

$$x(t) = Q-b-\lambda t, \qquad 0\leq t\leq T_1$$

$$ = 0 \quad , \qquad T_1<t<T \qquad \text{(II.25)}$$

Seja $\bar{x}$, o estoque médio em um ano

$$\bar{x} = \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{\int_o^{\Delta t} x(t)dt}{\Delta t} \qquad \text{(II.26)}$$

Se n é o número de ciclos completos em Δt anos e $\zeta<T$ é uma fração de ciclo temos:

$$\bar{x} = \lim_{\Delta t\to\infty} \left[\frac{n\int_o^{T_1} x(t)dt}{\Delta t} + \cancelto{0}{\frac{\int_o^{\zeta} x(t)dt}{\Delta t}} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{n\int_o^{T_1} x(t)dt}{\Delta t} = \int_o^{T_1} x(t)dt \; . \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{n}{\Delta t} \qquad \text{(II.27)}$$

Por (II.14) podemos concluir que:

$$\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{n}{\Delta t} = \frac{\lambda}{Q} \qquad \text{(II.28)}$$

já que $\lim_{\Delta t \to \infty} n/\Delta t$ é, por definição, o nº médio de ciclos (e portanto de pedidos por ano).

De (II.27) e (II.28),

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{Q} \int_0^{T_1} x(t)dt = \frac{\lambda}{Q} \int_0^{T_1} (Q-b-\lambda t)dt =$$

$$= \frac{(Q-b)^2}{2Q} \qquad \text{(II.29)}$$

Logo:

$$\boxed{\overline{C2} = \frac{IC}{2Q} (Q-b)^2} \qquad \text{(II.30)}$$

4.2.3 - Custos por Falta de Estoques

A cada ciclo, b unidades entram na fila de espera. Logo, como λ/Q é o número médio de ciclos por ano, "$\bar{b}'$" o número médio de unidades que entram na fila por ano é:

$$\bar{b}' = b.\frac{\lambda}{Q} \qquad \text{(II.31)}$$

e, como b(t), o número de unidades na fila no instante t e dado por:

$$b(t) = \lambda t, \qquad 0 \le t \le T_2 \qquad \text{(II.32)}$$

temos por (II.9).

$$\overline{b} = \frac{\lambda}{Q} \int_{o}^{T_2} \lambda t dt = \frac{2 T_2^2}{2} \qquad (II.33)$$

como

$$T_2 = \frac{b}{\lambda} \qquad (II.34)$$

Substituindo (II.31), (II.33) e (II.34) em (II.10) temos:

$$\boxed{\overline{C3} = \frac{1}{Q} \left[\Pi_o \lambda b + \frac{1}{2} \hat{\Pi} b^2 \right]} \qquad (II.35)$$

4.2.4 - Minimização da Função de Custo

Por (II.24), (II.30) e (II.35)

$$K = \frac{\lambda}{Q} A + C\lambda + \frac{IC}{2Q} (Q-b)^2 + \frac{1}{Q} \left[\Pi_o \lambda b + \frac{1}{2} \hat{\Pi} b^2 \right] \qquad (II.36)$$

Como no item 4.1.3, a minimização de K com relação a Q e b nos fornecerá o pedido ótimo (Q*) e o tamanho ótimo da fila no instante que antecede a chegada de um pedido (b*).

$$\frac{\partial K}{\partial b} = 0 \longrightarrow Q^* = \frac{\Pi_o \lambda}{IC} + (1 + \frac{\hat{\Pi}}{IC}) b^* \qquad (II.37)$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \longrightarrow \frac{{}^*Q^2}{2} = \frac{1}{IC}\left[\lambda A + \Pi_o \lambda b^* + \frac{1}{2}\,\hat{\Pi}\, b^{*2}\right] + \frac{b^{*2}}{2} \qquad (II.38)$$

Resolvendo (II.37) e (II.38) temos:

$$(\hat{\Pi}^2 + \hat{\Pi}\, IC)b^{*2} + 2\Pi_o\lambda\,\hat{\Pi}\, b^* + (\Pi_o\lambda)^2 - 2\lambda AIC = 0 \qquad (II.39)$$

Antes de calcular b^*, analisemos (II.39); supondo que

$\hat{\Pi}=0$: Então por (II.39)

$$(\Pi_o\lambda)^2 = 2\lambda AIC \qquad (II.40)$$

A equação (II.39) tornou-se independente de b^*. Assim, se os parâmetros Π_o, λ, A, I e C não são tais que (II.40) seja verdade então não existe $0<b^*<\infty$ que satisfaça (II.37) e (II.38) e b^* deve se encontrar nas extremidades.

Concluimos então que um estoque para o qual o tempo em que uma unidade permanece na fila não é penalizado nos leva a três opções.

a) A eq.(II.40) não é satisfeita e não vale a pena colocar uma unidade sequer na fila. ($b^*=0$). Neste caso, o modelo se reduz ao LOTE ECONÔMICO.

b) A eq.(II.40) não é satisfeita e é vantajosa a criação de fila. No entanto, como a penalidade está apenas no número de unidades que entram na fila e não no número de unidades que estão na fila nada impede que esta cresça indefinidamente. Se é vantajoso colocar uma unidade na fila, quanto mais unidades não atendidas mais lucro! Neste caso $b^* = \infty$ e não há estoque.

c) A eq.(II.40) é satisfeita. Logo quaisquer valores de Q^* e b^* tais que;

$Q^* = b^* + \dfrac{\Pi_o \lambda}{IC}$, obtido de II.37 com $\Pi = 0$

implicam num custo médio anual obtido da expressão II.36 e dado por:

$K = \lambda\ (C+\Pi_o)$

Se $\hat{\Pi} \neq 0$ então:

$$b^* = \left[\hat{\Pi}+IC\right]^{-1}\left\{-\Pi_o\lambda+\left[(+2\lambda AIC)\left(1+\frac{IC}{\hat{\Pi}}\right)-\frac{IC}{\hat{\Pi}}\left(\Pi_o\lambda\right)^2\right]^{1/2}\right\} \qquad (II.41)$$

$$Q^* = \left[\frac{\hat{\Pi}+IC}{\hat{\Pi}}\right]^{1/2}\left[\frac{2\lambda A}{IC}-\frac{(\Pi_o\lambda)^2}{IC(\hat{\Pi}+IC)}\right]^{1/2}, \quad \hat{\Pi}\neq 0 \qquad (II.42)$$

4.2.5 - Cálculo do Ponto de Renovação

Analogamente ao item 4.1.4, "R_h", o ponto de renovação,tem que ser tal que no instante que precede a chegada de um pedido, o tamanho da fila seja b*: Logo,

$$R_h - u + mQ^* = b^* \tag{II.43}$$

$$\boxed{R_h = u - mQ^* + b^*} \tag{II.44}$$

onde u e m são dados por (II.21) e (II.22) respectivamente.

4.3 - Sem Formação de Fila

Neste caso, qualquer demanda durante o período T_2 (vide figura II.4) no qual o estoque em mãos, é zero será perdida. Desta forma, não é mais verdade que a minimização dos custos seja equivalente à maximização dos lucros já que a quantidade vendida não é mais fixa (igual à demanda) e depende da fração do tempo no qual o estoque está vazio.

Este problema pode ser resolvido se incorporarmos ao custo da venda perdida o lucro perdido. Senão, vejamos:

Sejam:

s o preço de venda de uma unidade

p o lucro anual

c o custo de uma unidade

fo parcela do tempo que o estoque está vazio ($fo = T_2/T$)

Π_o custo de uma venda perdida exclusive o lucro.

Então:

$$p = \lambda(s-c)(1-fo) - \Pi_o\lambda\, fo - \text{(custos de abastecimento e custos de posse)} \qquad (II.45)$$

$$\rightarrow\ p = \lambda(s-c) - (\Pi_o+s-c)\lambda\, fo - \text{(custos de abast. e posse)} \qquad (II.46)$$

Logo, verifica-se por (II.46) que o lucro é igual ao custo a menos uma constante ($\lambda(s-c)$) e o sinal. Portanto se equivalem a minimização dos custos e a maximização dos lucros.

A figura abaixo representa o estoque em relação ao tempo.

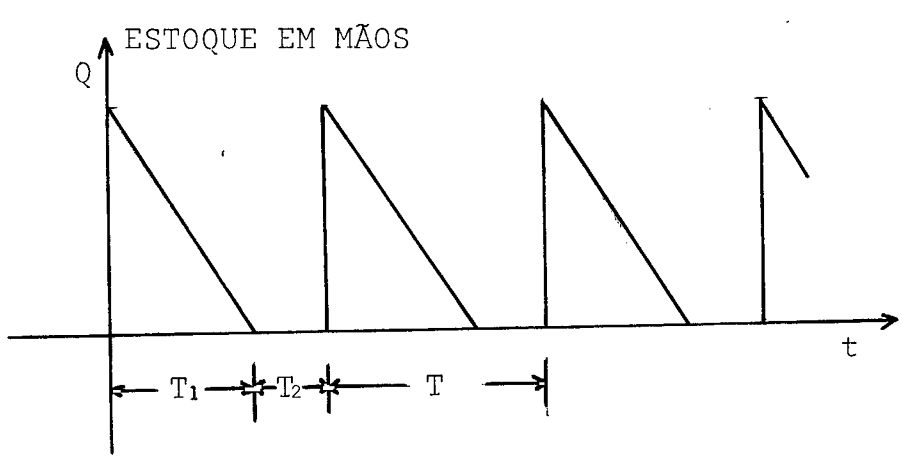


FIGURA II.4

O período T é dado por:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Q}{\lambda} + T_2 \qquad \text{(II.47)}$$

e

$$\Pi = \Pi_o + s - c$$

4.3.1 - Custos de Abastecimento

O número médio de pedidos (ou ciclos) por ano "$\overline{n}$":

$$\overline{n} = \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{Q+\lambda T_2} \qquad \text{(II.48)}$$

para Q ≠ 0 (não há pedidos por zero itens)

Logo por (II.3)

$$\boxed{\overline{CI} = \frac{A\lambda}{Q+\lambda T_2} + \frac{CQ\lambda}{Q+\lambda T_2}} \qquad \text{(II.49)}$$

4.3.2 - Custos de Posse

Analogamente ao item 4.2:

$$\overline{x} = \overline{n} \int_o^{T_1} (Q-\lambda t)dt = \frac{\lambda}{Q+\lambda T_2} \cdot \frac{Q^2}{2\lambda} = \frac{Q^2}{2(Q+\lambda T_2)} \qquad \text{(II.50)}$$

Por (II.6)

$$\boxed{\overline{C2} = \frac{ICQ^2}{2(Q+\lambda T_2)}} \qquad \text{(II.51)}$$

4.3.3 - Custos por Falta de Estoque

A cada ciclo o custo é dado por 'C_T' onde:

$$C_T = \Pi\lambda T_2 \qquad \text{(II.52)}$$

Logo o custo médio anual devido à falta de estoques é dado por:

$$\overline{C3} = \overline{n}\,\Pi\lambda T_2 = \frac{\Pi\lambda^2 T_2}{Q+\lambda T_2} \qquad \text{(II.53)}$$

4.3.4 - Minimização da Função de Custo

Por (II.49), (II.51) e (II.42),

$$K = \frac{\lambda}{Q+\lambda T_2} A + \frac{CQ\lambda}{Q+\lambda T_2} + \frac{ICQ^2}{2(Q+\lambda T_2)} + \frac{\Pi\lambda T_2}{Q+\lambda T_2}$$

ou

$$K = \frac{2\lambda A + 2CQ\lambda + ICQ^2 + 2\Pi\lambda^2 T_2}{2(Q+\lambda T_2)} \qquad \text{(II.54)}$$

Para encontrar-mos Q^* e $T_2{}^*$, os valores de Q e T_2 que minimizam (II.54), temos:

$$\frac{\partial K}{\partial T_2} = 0 \longrightarrow ICQ^{*2} + (2C\lambda - 2\Pi\lambda)\, Q^* + 2\lambda A = 0 \qquad \text{(II.55)}$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q^2} = 0 \longrightarrow T_2^* = \frac{2\lambda A - ICQ^{*2}}{2ICQ^*\lambda + 2C\lambda^2 - 2\Pi\lambda^2} \qquad \text{(II.56)}$$

para Q e T > 0

De II.55 temos

$$Q^* = \frac{\lambda(\Pi - C) \pm \sqrt{\lambda^2(\Pi - C)^2 - 2IC\lambda A}}{IC} \qquad \text{(II.57)}$$

Seja $\Delta = \lambda^2(\Pi - C)^2 - 2IC\lambda A$ (II.58)

Por (II.57) temos que:

a) Se $\Delta < 0$, as equações (II.55, II.56) não tem solução real tal que $0 < T_2^* < T$ e $0 < Q^* < \infty$ e a solução se encontra em uma das extremidades.

(i) se $Q^* = 0$ então $T_2^* \rightarrow T$ pois nenhum pedido será efetuado e o custo será dado por

$$K^* = \Pi\, \lambda \qquad \text{(II.59)}$$

(ii) Se $T_2^* = 0$ então, por (II.56),

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}} \quad \text{e} \quad K^* = \sqrt{2A\lambda IC} \tag{II.60}$$

que é a fórmula do lote econômico. (item 4.1)

(iii) Se $Q^* \longrightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$

Logo, se $\Delta < 0$, a solução ótima será dada por (i) ou (ii) dependendo do valor de K^* em (II.59) e (II.60) respectivamente.

b) Se $\Delta \geq 0$, por (II.58)

$$(\Pi - C)^2 \geq \frac{2ICA}{\lambda} \tag{II.61}$$

Logo, temos duas opções:

$$\Pi \geq \sqrt{\frac{2ICA}{\lambda}} + C \tag{II.62}$$

ou

$$C \geq \sqrt{\frac{2ICA}{\lambda}} + \Pi \tag{II.63}$$

Considere o seguinte argumento:

Sejam:

$$f = \lambda(\Pi - C) \longrightarrow f^2 = \lambda^2(\Pi - C)^2 \qquad \text{(II.64)}$$

$$g = \sqrt{\lambda^2(\Pi - C)^2 - 2IC\lambda A} \rightarrow g^2 = \lambda^2(\Pi - C)^2 - 2IC\lambda A \qquad \text{(II.65)}$$

Como $2IC\lambda A>0$, consequentemente.

$$f^2 > g^2 \longrightarrow |f| > |g| \qquad \text{(II.66)}$$

ou

$$|\lambda(\Pi - C)| > \sqrt{\lambda^2(\Pi - C)^2 - 2IC\lambda A} \qquad \text{(II.67)}$$

A hipótese (II.63) pode ser reescrita na forma abaixo:

$$\Pi < C \qquad \text{(II.68)}$$

pois $I, C, A>0$.

Logo, considerando (II.67) na expressão (II.57) com a hipótese de que $\Pi < C$ (ou seja $\Pi - C<0$), verificamos que o denominador é necessariamente negativo, isto é, $Q^*<0$.

Consequentemente, as equações (II.55) e (II.56) não tem solução tal que $0<Q^*<\infty$ e $0<T_2^*<T$ e recaimos na análise do item (a).

Para a hipótese (II.62), podemos escrever:

$$\Pi > C \tag{II.69}$$

e, repetindo as considerações sobre a hipótese (II.67) e utilizando a expressão (II.57), concluimos que $Q^* > 0$.

Substituindo (II.57) em (II.56) e efetuando algumas manipulações,

$$T_2^* = \frac{-\lambda(\Pi - C) \mp \sqrt{\lambda^2(\Pi - C) - 2\ AIC}}{IC\lambda} \tag{II.70}$$

O denominador da expressão acima tem a mesma forma de expressão de Q^*.(II.57) a menos do sinal. Logo, T_2^* tem sinal contrário a Q^* e podemos afirmar que, para a hipótese (II.62), $T_2^* < 0$.

Em resumo, o que concluimos das expressões (II.61 - II.70) é que quando $\Delta \geq 0$, ou $Q^* < 0$ ou $T_2^* < 0$ e, como no caso (a), a solução está numa das extremidades.

As conclusões sobre estoques onde não há formação de filas são análogas àquelas sobre estoques com formação de fila onde não há penalidade sobre o tempo em que uma demanda nela permanece.

De fato, só existem duas opções:

i) $Q^* = 0$ e $T_2^* \longrightarrow T$

Neste caso o melhor é não haver estoques e perder todas as vendas com custo

$$K^* = \Pi\,\lambda \tag{II.71}$$

ii) $T_2^* = 0$ e $Q^* = \sqrt{\dfrac{2\lambda A}{IC}}$

Como nenhuma venda é perdida, recaimos no modelo do lote econômico onde não há deficit e o custo é dado por:

$$K^* = \sqrt{2A\lambda IC} \tag{II.72}$$

Os resultados acima coincidem qualitativamente com aqueles encontrados por Hadley e Whithin[1] na seção 2.6. Nos parece, no entanto, que ao formularem a expressão do custo médio anual os autores consideram que o custo anual de abastecimento (no que se refere ao gasto diretamente ligado ao número de unidades encomendadas) é independente de Q e T_2 o que, para estoques sem formação de fila, não é verdade.

De fato, enquanto que em estoques com formação de fila toda a demanda é eventualmente atendida independentemente da política adotada, em estoques sem formação de fila só serão atendidas demandas com o estoque em mãos. O custo de encomenda neste último caso é, evidentemente, menor pois só serão encomendadas $(1-T_2)\,\lambda$ unidades.

III. MODELOS ESTOCÁSTICOS

III. MODELOS ESTOCÁSTICOS

Nos modelos estudados na seção anterior, admitiu-se que a demanda era conhecida deterministicamente. Esta hipótese, no entanto, não é verificada para a maioria dos sistemas de estoque. Nesta seção, serão desenvolvidos modelos para os quais a demanda é descrita probabilisticamente.

Nos modelos determinísticos o nível do estoque é conhecido em qualquer instante e, por isso, ao fixarmos o tempo entre pedidos estamos fixando também o tamanho do pedido.

Ao introduzirmos flutuações aleatórias na demanda, no entanto, este vínculo (tempo entre pedidos - quantidade a encomendar) se desfaz já que o nível do estoque passa também a ser uma variável aleatória.

A partir deste fato, apresentam-se duas possibilidades que determinam as duas principais classes de modelos estocásticos de estoque:

(a) fixar o <u>tamanho do pedido</u> e emití-lo sempre que o estoque atingir um nível r pré-estabelecido.

(b) fixar o <u>tempo</u> entre os pedidos dimensionando-os de forma a restabelecer um nível R pré-estabelecido.

A primeira hipótese pressupõe o conhecimento permanente do nível do estoque. Para isto, o sistema deve estar completamente informado de qualquer modificação no nível do estoque (emissão de pedidos, ocorrência de demandas e recebimento de pedidos). Os modelos que descrevem estoques com esta características são chamados de MODELOS DE REVISÃO CONTÍNUA.

Um estoque de revisão contínua requer toda uma estrutura que seja capaz de gerar as informações necessárias do monitoramento do nível do estoque. Isto nem sempre é desejável ou economicamente viável. Um outro procedimento largamente utilizado é verificar o nível do estoque apenas periodicamente tornando mais simples o sistema de informações. Esta segunda classe de modelos que corresponde à hipótese (b) acima, será chamada de MODELOS DE REVISÃO PERIÓDICA.

Uma série de modelos foram desenvolvidos para diversas situações particulares (Naddor[2], Hadley[1], Brown[3] entre outros). Neste texto serão apresentados dois modelos de caráter geral na medida em que serão desenvolvidas somente as expressões das funções de custo omitindo o processo utilizado na determinação dos valores ótimos que a minimizam. Na verdade, nos casos reais quase sempre é possível utilizar aproximações destes modelos simplificando significativamente suas expressões de custo.

Em ambos os modelos as demandas serão geradas segundo um processo de POISSON cujas características (Feller[4]) vem de encontro a este propósito. O tempo de entrega será considerado constante e conhecido. Flutuações, aleatórias no tempo de entrega serão posteriormente discutidas.

A notação utilizada é a mesma do capítulo anterior a não ser quando dito o contrário.

1. CÁLCULO DA FUNÇÃO DE CUSTO

Nos modelos determinísticos, o critério de otimização era a minimização do custo médio anual, dado por:

$$K = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\bar{K}(\Delta t)}{\Delta t} \qquad \text{(III.1)}$$

onde $\bar{K}(\Delta t)$ era o custo associado a um período de tempo Δt.

Com a introdução da aleatoriedade na demanda, $\bar{K}(\Delta t)$ passa também a ser uma variável aleatória. Logo, o critério de otimização será dado pela minimização do valor esperado do custo anual.

$$K = E\ (\bar{K}(\Delta t)) \quad \text{onde } \Delta t = 1 \text{ ano.} \qquad \text{(III.2)}$$

Por simplicidade de notação sempre que Δt for igual a 1 ano, será omitido. Assim, escrevemos:

$$K = E\ (\bar{K}) \qquad \text{(III.3)}$$

2. MEDIDAS DO NÍVEL DO ESTOQUE

Neste ponto, convém olharmos com mais atenção para as diversas medidas de nível de estoque que serão utilizadas neste texto.

ESTOQUE EM MÃOS: O número de unidades efetivamente disponíveis para consumo imediato. O estoque em mãos é, naturalmente, maior ou igual a zero.

SALDO DO ESTOQUE: Dado pelo estoque em mãos menos o número de unidades na fila. O SALDO DO ESTOQUE pode ser maior, igual ou menor que zero.

NÍVEL DO ESTOQUE
ou
POSIÇÃO DO ESTOQUE: Igual ao SALDO DO ESTOQUE mais as unidade encomendas e ainda não entregues.

3. MODELO DE REVISÃO CONTÍNUA <r,Q>

Seja um estoque com as seguintes características:

- Sempre que o nível do estoque for igual a r é emitido um pedido por Q unidades.
- Se ocorrer uma demanda quando o estoque em mãos for nulo, esta é colocada numa "fila de espera" sendo atendida preferencialmente quando houver estoque em mãos suficiente.
- A demanda é Poisson com média λ e o tempo de entrega é constante e conhecido, denotado por τ.

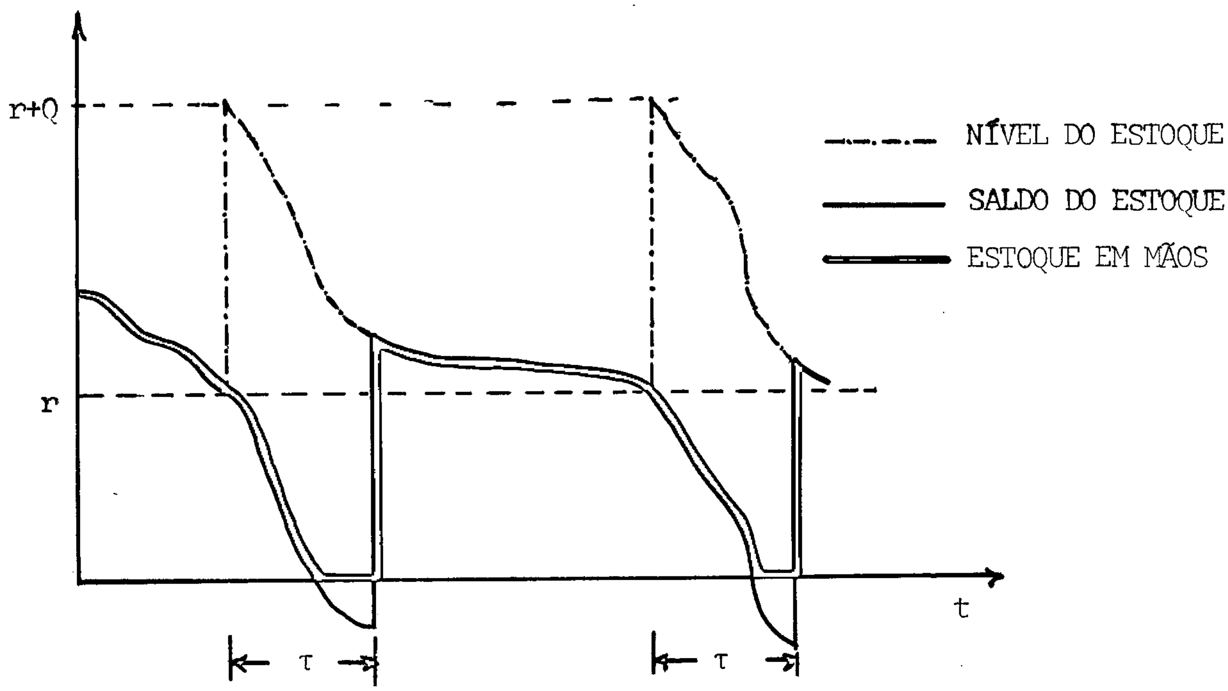


FIGURA III.1 - Mostra o estoque em mãos, o saldo do estoque e o nível do estoque ao longo do tempo para um estoque de revisão contínua

3.1 - Custos de Abastecimento

Como já vimos, o custo de abastecimento ao longo de um ano é dado por:

$$C1 = n\ (A + CQ) \qquad \text{(III.4)}$$

Logo,

$$E(C1) = E(n)\ (A+CQ) \qquad \text{(III.5)}$$

onde u é o número de pedidos do ano.

$$E(n) = \frac{\lambda}{Q} \qquad \text{(III.6)}$$

já que a demanda é POISSON com média λ.

Então,

$$\boxed{E(C1) = \frac{\lambda A}{Q} + C\lambda} \qquad (III.7)$$

3.2 - Custos por Falta de Estoque

Conforme foi visto na seção anterior o custo devido à falta de estoques tem duas componentes: uma proporcional ao número total de unidades que entraram na fila e a outra, proporcional ao número de unidades-ano[1] na fila que, como já vimos, se iguala numericamente ao número médio de unidades na fila.

Sejam:

b' o número de unidades que entraram na fila ao longo de um ano.

b(t) o número de unidades na fila no instante t e

$\bar{b}$ o tamanho médio da fila.

Logo,

$$\bar{b} = \int_0^1 b(t)dt \qquad (III.8)$$

Como a demanda é aleatória, b' e $\bar{b}$ serão também variáveis aleatórias.

1-Uma unidade.ano na fila corresponde à permanência de uma unidade na fila durante um ano. Assim uma unidade na fila durante um ano corresponde à 12 unidades na fila durante 1 mês.

O custo associado a um ano é

$$C3 = \Pi_o b' + \hat{\Pi}\,\bar{b} \qquad (III.9)$$

Logo,

$$E(C3) = \Pi_o E(b') + \hat{\Pi}\,E(\bar{b}) \qquad (III.10)$$

Sejam

$E(r,Q)$ o valor esperado do número de unidades que entraram na fila em um ano, dador r e Q.

$B(r,Q)$ o valor esperado do número médio de unidades na fila dador r e Q.

Para calculá-los notemos primeiramente que sendo

P_o = probabilidade do estoque em mãos ser nulo num instante qualquer do tempo.

e $\Psi(x)$ = probabilidade do saldo do estoque ser x num instante qualquer do tempo,

o valor esperado do número de unidades que foram colocadas na fila se iguala à demanda durante o período em que o estoque em mãos é nulo. Logo,

$$E(r,Q) = \lambda\, P_o \qquad (III.11)$$

Temos ainda que o valor esperado do número de unidades.ano na fila se iguala numericamente do valor esperado do número de unidades na fila durante o ano. Logo,

$$B(r,Q) = \sum_{-\infty}^{0} |x|\Psi(x) \qquad \text{(III.12)}$$

Para calcular $\Psi(x)$ (e consequentemente P_o) vamos analisar a variação do nível do estoque como um processo markouiano contínuo no tempo. Enunciamos, então, o seguinte teorema:

TEOREMA: Num sistema de estoque com revisão contínua cuja demanda é POISSON com taxa λ, se o ponto de renovação é dado por r, o nível do estoque (definido na seção 2) é uniformemente distribuído entre r+1 e r+Q, isto é, se

$\rho(r+j)$ é a probabilidade do nível do estoque ser r+j num instante qualquer,

$$\rho(r+j) = \frac{1}{Q}, \quad j = 1,2 \ldots Q$$

PROVA: Observemos, primeiramente, que sempre que o nível do estoque atinge um valor r, um pedido por Q unidades é emitido fazendo com que o nível do estoque retorne ao valor r+Q (vide figura III.1). Logo, em qualquer instante o nível do estoque está entre r+1 e r+Q.

A probabilidade de ocorrência de uma transição de estado, isto é, uma mudança no nível do estoque, em um intervalo de tempo dt é igual à probabilidade de ocorrência de uma demanda neste intervalo que é dada por λdt. Como a probabilidade de ocorrência de duas ou mais demandas durante dt é nula, o sistema se move sempre do estado r+j para r+j-1 a não ser quando j=1. Neste caso, há uma transição para o estado r+Q já que r é o ponto de pedido.

Logo, se a_{ij} é um elemento da matriz densidade de transição deste processo markouviano, temos que:

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, \text{ se } i=j+1 \text{ e } \quad j=r+1,\ r+2,\ r+Q-1 \quad \text{ou } i=r+1 \\ \quad \text{e } j=Q+r \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \qquad \text{(III.13)}$$

Utilizando uma propriedade das cadeias de Markov contínuas no tempo [HOWARD[5]] dada por

$$\rho(r+j) \sum_{k \neq r+j}^{r+Q} a_{r+j,k} = \sum_{k+r}^{r+Q} \rho(k)\, a_{k,r+j} \quad ,\ j=1,Q \qquad \text{(III.14)}$$

então, de (III.13) e (III.14), temos:

$$\begin{aligned} \lambda\ \rho(r+j+1) &= \lambda\ \rho(r+j) \\ \lambda\ \rho(r+Q) &= \lambda\ \rho(r+1) \end{aligned} \qquad \text{(III.15)}$$

Como

$$\sum_{j=1}^{Q} \rho(r+j)=1 \qquad \text{(III.16)}$$

a solução do sistema (III.15) é

$$\rho(r+j) = \frac{1}{Q} \quad ,\ j=1,2,\ldots Q \qquad \text{(III.17)}$$

C.Q.D.

Considere agora o sistema nos instantes t e t-τ. Nenhum pedido emitido depois de t-τ chegou no estoque até o instante t e, por outro lado, todos os pedidos emitidos antes de t-τ terão sido atendidos antes do instante t. Logo, se o nível do estoque em t-τ é r+j a probabilidade que o saldo do estoque seja x em t é a probabilidade de terem ocorrido r+j-x demandas durante o tempo de entrega τ. Esta probabilidade é dada por p(r+j-x, λτ). Logo,

$$\Psi(x) = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{Q} p(r+j-x,\ \lambda\tau) \qquad \text{(III.18)}$$

segue-se então que:

$$P_O = \sum_{x=-\infty}^{0} \Psi(x) = 1 - \sum_{x=1}^{r+Q} \Psi(x) \qquad \text{(III.19)}$$

Por (III.11) e (III.12)

$$E(r,Q) = \lambda\left(1 - \sum_{x=1}^{r+Q} \Psi(x)\right) \qquad \text{(III.20)}$$

$$B(r,Q) - \sum_{x=\infty}^{0} \frac{|x|}{Q} \sum_{j=1}^{Q} p\ (r+j-x,\ \lambda\tau) \qquad \text{(III.21)}$$

Logo $E(C3) = \Pi\, E(r,Q) + \hat{\Pi}\ B(r,Q)$ (III.22)

onde E(r,Q) e B(r,Q) são dados acima.

3.3 - Custos de Posse

O custo anual é dado por:

$$C2 = IC\bar{x} \qquad \text{(III.23)}$$

onde $\bar{x}$ é o número de unidades.ano em estoque que, como no caso anterior, se iguala numericamente ao valor médio do estoque em mãos.

Seja

$$D(r,Q) = E(\bar{x}) \qquad \text{(III.24)}$$

Logo,

$$D(r,Q) = \sum_{\bar{x}=0}^{r+Q} \bar{x}\, \Psi(\bar{x}) \qquad \text{(III.25)}$$

Uma outra forma, mais intuitiva, de calcular $D(r,Q)$ é obtida à partir da definição de NÍVEL DE ESTOQUE dada na seção 2. O valor esperado do nível do estoque é dado pelo valor esperado do estoque em mãos mais o valor esperado do número de unidades encomendados mas não entregues menos o valor esperado do número de unidades na fila.

$$E\{\text{Nível}\} = E\{\text{em mãos}\} + E\left\{\begin{matrix}\text{encomendas}\\ \text{mas}\\ \text{não entregues}\end{matrix}\right\} - E\left\{\begin{matrix}\text{unidades}\\ \text{na}\\ \text{fila}\end{matrix}\right\} \qquad \text{(III.26)}$$

O valor esperado do nível de estoques é dado por

$$E\{\text{Nível}\} = \sum_{j=1}^{Q} (r+j)\rho(r+j) = \frac{Q+1}{2} + r \qquad \text{(III.27)}$$

O valor esperado do número de unidades encomendadas mas não entregues é dado pela diferença entre o valor esperado do nível do estoque e o valor esperado do saldo do estoque. Por (III.18) e (III.27)

$$E\left\{\begin{matrix}\text{unidades encomendadas}\\ \text{mas não entregues}\end{matrix}\right\} = \sum_{j=1}^{Q} \rho(r+j)(r+j) - \sum_{x=-\infty}^{r+Q} \frac{x}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \rho(r+j - x, \lambda\tau) \qquad \text{(III.28)}$$

Logo, por (III.26), (III.27), (III.28),

$$D(r,Q) = E\left\{\begin{matrix}\text{estoque em}\\ \text{mãos}\end{matrix}\right\} = \frac{Q+1}{2} + r - \frac{Q+1}{2} - r + \sum_{x=-\infty}^{r+Q} \frac{x}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \rho(r+j - x, \lambda\tau) + B(r,Q) = \sum_{x=-\infty}^{r+Q} \frac{x}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \rho(r+j-x, \lambda\tau) + B(r,Q) \qquad \text{(III.29)}$$

onde

$$\sum_{x=-\infty}^{r+Q} \frac{x}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \rho(r+j-x, \lambda\tau) = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \sum_{x=-\infty}^{r+Q} xp(r+j-x,\lambda\tau) = \qquad \text{(III.30)}$$

fazendo $v = r+j-x$

$$= \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{Q} (r+j-v)\, p(v,\lambda\tau) = \frac{Q+1}{2} + r - \lambda\tau \qquad \text{(III.31)}$$

Substituindo em (III.29)

$$D(r,Q) = \frac{Q+1}{2} + r - \lambda\tau + B(r,Q) \qquad \text{(III.32)}$$

Então,

$$E(C2) = ICD(r,Q) = IC\left(\frac{Q+1}{2} + r - \lambda\tau + B(r,Q)\right) \qquad \text{(III.33)}$$

3.4 - Função de Custo

Por (III.7), (III.22) e (III.33)

$$K = \frac{\lambda A}{Q} + C + IC\left(\frac{Q+1}{2} + r - \lambda\tau\right) + \Pi_o E(r,Q) + (\hat{\Pi} + IC)B(r,Q) \qquad \text{(III.34)}$$

onde E(r,Q) e B(r,Q) são dados por (III.20) e (III.21) respectivamente.

Uma vez estabelecida a função de custo determina-se Q* e r*, os valores de r e Q que minimizam o custo médio anual, dado por (III.34).

4. MODELO DE REVISÃO PERIÓDICA <R,T>

Seja um estoque com as seguintes características:

- O nível do estoque é verificado a cada T unidades de tempo quando então, é emitido um pedido de tamanho suficiente para restabelecer o nível R do estoque que, juntamente com T, são as variáveis de decisão do problema.

- Como no modelo de revisão contínua, sempre que ocorrer uma demanda por um item cujo estoque em mãos é nulo, este será colocado em uma fila de espera.

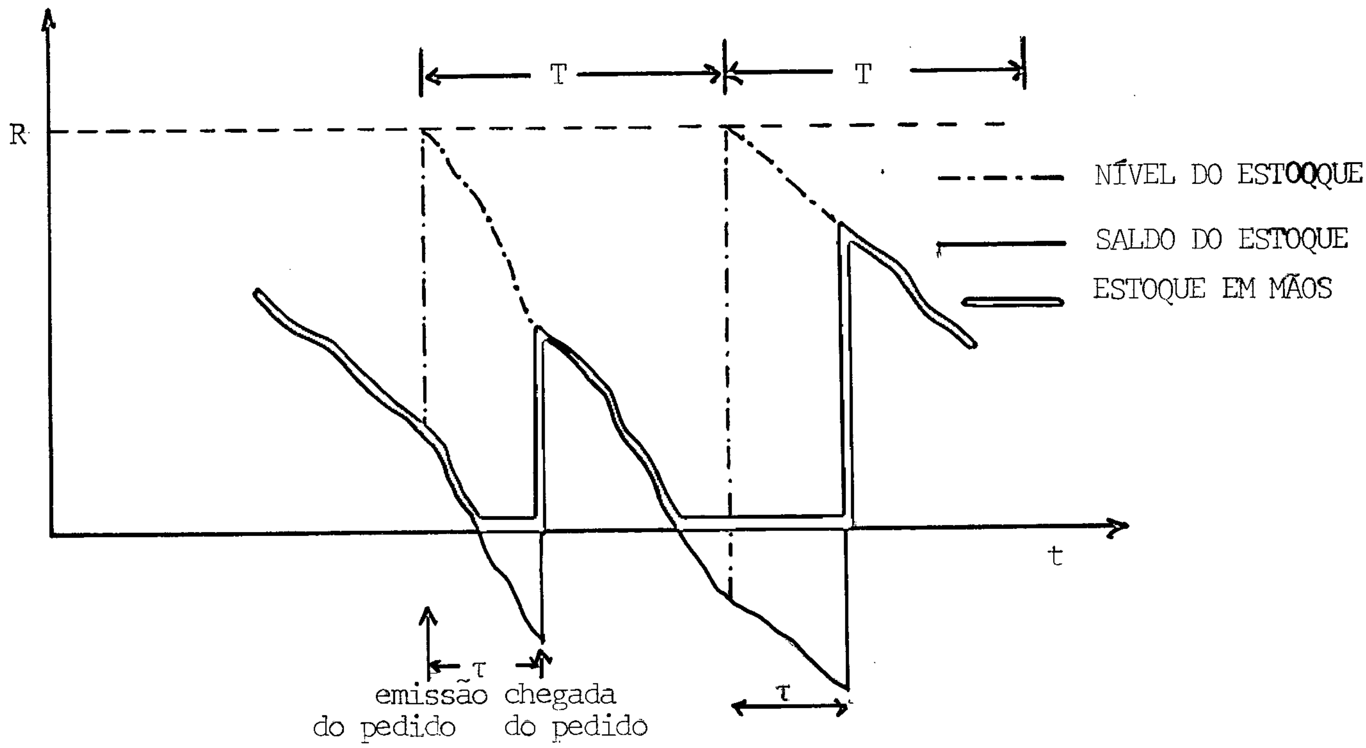


FIGURA III.2

4.1 - Custo de Revisão

Neste modelo devemos considerar mais uma componente na função de custo de forma a contabilizar os gastos associados à revisão do nível do estoque.

Seja J o custo desta revisão, independente de R e T.

Como o número médio de períodos por ano é 1/T, $\overline{C4}$, o valor esperado do custo anual associado à revisão do estoque, é dado por:

$$\overline{C4} = J/T \qquad \text{(III.35)}$$

4.2 - Custo de Abastecimento

A cada pedido está associado um custo A + CQ onde Q é uma variável aleatória que representa o tamanho do pedido. Assim, o custo anual é dado por:

$$C1 = n\ (A+CQ) \tag{III.36}$$

onde n é o número de pedidos no ano.

Seja P_{or} a probabilidade de emissão de um pedido ao final de um período. Então, é evidente que P_{or} é a probabilidade de ter havido pelo menos uma demanda no período, isto é:

$$P_{or} = p(x \neq 0, \lambda T) = 1-p(0,\lambda T) = 1-e^{-\lambda T} \tag{III.37}$$

O valor esperado de n é dado por:

$$E(n) = \frac{1-e^{-\lambda T}}{T} \tag{III.38}$$

Por outro lado, o valor esperado do tamanho do pedido vezes E(n) deverá se igualar à λ já que toda a demanda será eventualmente atendida. Assim,

$$E(Q).E(n) = \lambda \tag{III.39}$$

Então

$$E(C1) = E(n)A+E(Q)E(n)C = \frac{1-e^{-\lambda T}}{T} \cdot A+\lambda C \tag{III.40}$$

4.3 - Custos por Falta de Estoques

Analogamente ao modelo de revisão contínua,

$$\overline{C3} = \Pi_o \, E(R,T) + \hat{\Pi} \, B(R,T) \qquad \text{(III.41)}$$

onde

$E(R,T)$ = valor esperado do número de unidades que entraram na fila ao longo de um ano dados R e T.

$B(R,T)$ = valor esperado do número de unidades na fila dados R e T.

Consideremos que uma revisão ocorreu em t. Seja x o número de unidades que entraram na fila entre $t + \tau$ e $t+T+\tau$. A razão de considerar este intervalo é que todos os pedidos efetuados antes de t foram entregues ao estoque até $t+\tau$ ao passo que nenhum dos pedidos emitidos depois de t chegou ao estoque antes de $t+T+\tau$.

Logo, o valor esperado de x pode ser calculado pela diferença dos valores esperados de unidades na fila em $t+T+\tau$ e $t+\tau$ multiplicado pelo número de períodos $1/T$.

Se $E_1(R,t+\xi)$ é o valor esperado do número de unidades na fila em $t+\xi$ onde $\tau<\xi<T+\tau$. Então,

$$E_1(R,t+\xi) = \sum_{x=R}^{\infty} (x-R) \, p(x,\lambda\xi) \qquad \text{(III.42)}$$

$$E(R,T) = (E_1(R_1 t+T+\tau) - E_1(R_1 t+\tau))/T \tag{III.43}$$

$$= \frac{\sum\limits_{x=R}^{\infty} (x-R) \left[p(x_1 \lambda(\tau+T)) - p(x_1 \lambda(\tau)) \right]}{T}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{x=R}^{\infty} \frac{(x-R)\ \lambda^x}{x_!} \left[e^{-\lambda(\tau+T)} - e^{-\tau} \right]$$

Para calcular B(R,T) basta calcular o valor esperado do número de unidades na fila. Logo,

$$B(R,T) = \frac{\int_{\tau}^{\tau+T} E_1(R_1 t+\xi) d\xi}{T} \tag{III.44}$$

Substituindo (III.42) em (III.44), obtemos:

$$B(R,T) = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \sum_{x=R}^{\infty} (x-R)\ p(x,\lambda\xi) d\xi \tag{III.45}$$

4.4 - Custo de Posse

O custo relativo a um ano é dado por

$$C3 = IC\overline{x} \tag{III.46}$$

onde $\overline{x}$ é o valor médio do estoque em mãos

Seja

$$D(R,T) = E(\bar{x}) \qquad \text{(III.47)}$$

Pela definição da seção 2 de saldo do estoque,

$$D(R,T) = E\left\{ \begin{matrix}\text{saldo do}\\ \text{estoque}\end{matrix} \right\} + E\left\{ \begin{matrix}\text{número de unidades}\\ \text{na fila}\end{matrix} \right\} \qquad \text{(III.48)}$$

Utilizando raciocínio análogo àquele usado para definir $E_1(R_1 t+\xi)$ na expressão (III.42) e $B(R,T)$ na expressão (III.45),

$$E\left\{ \begin{matrix}\text{saldo do}\\ \text{estoque}\end{matrix} \right\} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} \sum_{x=0}^{\infty} (R-x)\, p(x,\lambda\xi)\, d\xi \qquad \text{(III.49)}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{\tau}^{T+\tau} \left[R \sum_{x=0}^{\infty} p(x,\lambda\xi) - \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(x,\lambda\xi) \right] d\xi}{T} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{\tau}^{T+\tau} \left[R - \lambda\xi \right] d\xi}{T} = \frac{RT - \lambda\,(T^2+2\tau T)/2}{T}$$

$$= (R - \frac{\lambda T}{2} + \lambda\tau) \qquad \text{(III.50)}$$

Por (III.48) e (III.50),

$$D(R,T) = (R-\frac{\lambda T}{2} + \lambda\tau) + B(R,T) \qquad \text{(III.51)}$$

Então:

$$E(C3) = IC\ D(R,T) = IC(R - \frac{\lambda T}{2} + \lambda\tau) + IC\ B(R,T) \qquad (III.52)$$

4.5 - Função de Custo

Por (III.35), (III.40), (III.41) e (III.52)

$$K = E(\overline{K}) = \frac{I}{T} + \frac{1+C^{-\lambda T}}{T} \cdot A + \lambda C + \Pi_o\ E(R,T) + (\hat{\Pi} + IC)\ B(R,T) +$$

$$+ IC(R - \frac{\lambda T}{2} - \lambda\tau) \qquad (III.53)$$

onde $E(R,T)$ e $B(R,T)$ são dados por (III.43) e (III.44) respectivamente.

Resta agora aplicar um algoritmo de minimização em (III.53) de forma a determinar quais os valores de R e T que minimizam o custo.

5. TEMPOS DE ENTREGA ESTOCÁSTICO

Nos modelos apresentados até agora, somente flutuações na demanda foram consideradas. No entanto, variações no tempo de entrega também são observadas na prática. Como podemos constatar nos modelos aqui apresentados, a demanda durante o tempo de entrega é de importância vital em praticamente qualquer modelo de estoque. Consequentemente, variações no tempo de entrega alteram diretamente o comportamento do modelo.

Além das dificuldades práticas que normalmente se apresentam na obtenção de dados referentes a essas variações,uma série de dificuldades teóricas tornam o problema de difícil tratamento analítico.

Segue-se uma breve discussão sobre estas dificuldades para as duas classes de modelos de estoque.

5.1 - Revisão Contínua

A formulação do modelo apresentado na seção anterior, com demandas POISSON e tempo de entrega constante, trazia em si a possibilidade de mais de um pedido estar pendente. Em outras palavras, após a emissão de um pedido e antes que este seja entregue, o ponto de pedido pode ser novamente atingido inúmeras vezes com probabilidade positiva. Logo, nestes modelos nunca podemos garantir que um pedido não seja emitido antes da entrega do pedido anterior. No máximo, podemos afirmar que a probabilidade disto ocorrer é pequena.

Quando no modelo é admitida a possibilidade de em um dado instante observar-se mais de uma demanda pendente, encontramos sérias dificuldades em representar os tempos de espera associados à emissão de cada um dos pedidos como variáveis aleatórias. Por uma lado, seria bastante conveniente que os tempos de espera fossem independentes ou seja, o tempo de espera associado à emissão de um pedido não é influenciado pela emissão de outro pedido. Ao admitirmos a independência dos tempos de entrega, estaremos implicitamente admitindo que os pedidos não necessariamente serão atendidos na mesma ordem que foram emitidos como mostra a figura abaixo.

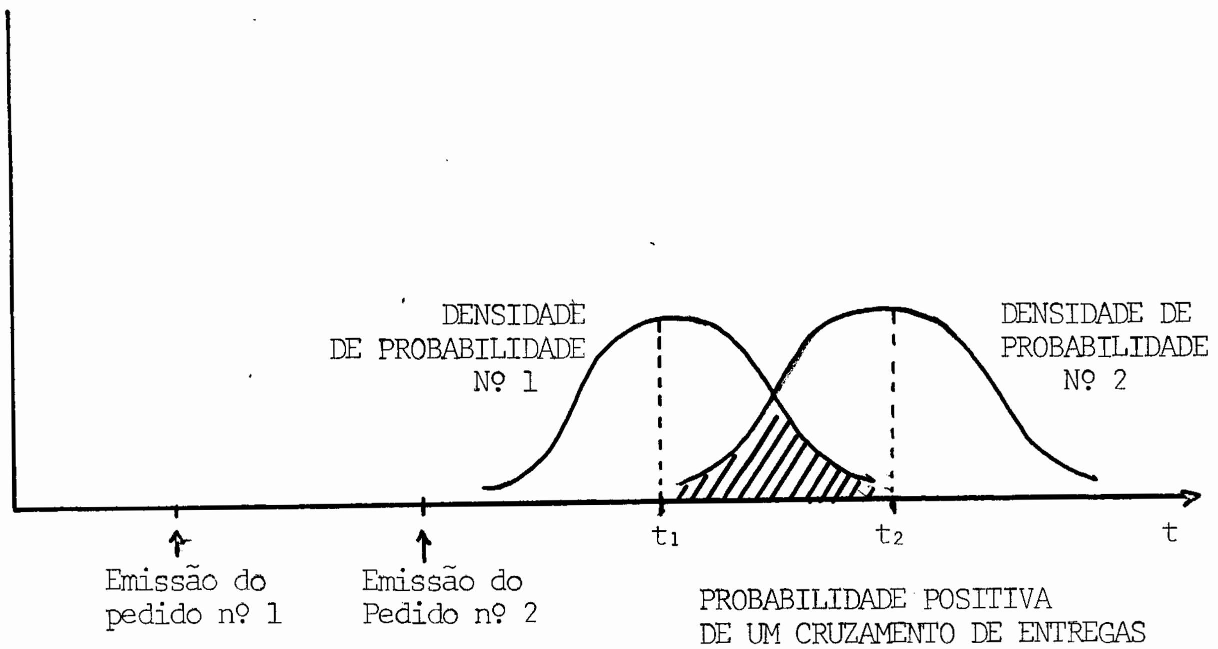


FIGURA III.3

Na prática, no entanto, o que normalmente se observa é que os pedidos são entregues na mesma ordem em que foram emitidos o que é incompatível com a hipótese de independência.

Considerar a dependência entre os tempos de entrega associados ao diferentes pedidos não parece ser uma tarefa fácil. Até onde podemos afirmar, não há nada na literatura específica que considere esta interdependência.

Em algumas situações reais, o tempo médio entre dois pedidos é bastante grande. Neste caso, podemos considerar simultaneamente que os tempos de entrega são variáveis aleatórias independentes e que as entregas seguirão a mesma ordem de emissão dos pedidos.

Logo, sob estas condições, para incluir a variação o tempo de entrega de REVISÃO CONTÍNUA, basta substituir a distribuição da demanda no tempo de entrega pela sua distribuição marginal. Ou seja, no lugar de $p(x,\lambda\tau)$ utilizaremos $h(x)$ onde

$$h(x) = \int_0^\infty p(x,\lambda\tau)\ g(\tau)d\tau \qquad \text{(III.54)}$$

onde $g(\tau)$ é a densidade de probabilidade do tempo de entrega.

Pode-se afirmar intuitivamente que os modelos que levam em conta as flutuações aleatórias do tempo de espera apresentam níveis de estoque mais elevados do que aqueles estabelecidos nos modelos com tempo de entrega constante e esta elevação será tanto maior quanto maior for a dispersão da distribuição do tempo de entrega.

5.2 - Revisão Periódica

Nos modelos de revisão periódica podemos tratar rigorosamente as variações aleatórias no tempo de entrega. Como a emissão dos pedidos se dá, no mínimo, à cada T unidades de tempo, podemos considerar simultaneamente que os tempos de entre ga associados à pedidos emitidos em t e t+T, respectivamente. Se $g(\tau)$ é a densidade do tempo de entrega, o valor esperado do número de unidades que entraram na fila entre t e t+T é dado por:

$$\int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \sum_{x=R}^{\infty} (x-R) \left[p(x,\lambda(\tau_2+T)) - p(x,\lambda(\tau_1)) \right] g(\tau_2)\, g(\tau_1)\, d\tau_2 d\tau_1 \quad \text{(III.55)}$$

onde τ_{min} e τ_{max} são os limites inferior e superior de τ. Se $\tau_{max}-\tau_{min} \leq T$, o tratamento será rigoroso. Caso contrário, será apenas aproximado. Logo, o valor esperado do número de unidades que entraram na fila ao longo de um ano é dado por:

$$E(R,T) = \frac{1}{T} \sum_{x=R}^{\infty} (x-R) \left\{ h(x,\tau+T) - h(x,\tau) \right\} \quad \text{(III.56)}$$

onde

$$h(x,t) = \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} p(x,\lambda t)\, g(t)\, dt \quad \text{(III.57)}$$

Analogamente, o valor esperado o número de unidades.ano na fila é dado por:

$$B(R,T) = \frac{1}{T} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \int_{\tau_1}^{\tau_2+T} \sum_{x=R}^{\infty} (x-R)\, p(x,\lambda\xi)\, g(\tau_1)\, g(\tau_2)\, d\xi d\tau_1 d\tau_2 \quad \text{(III.58)}$$

Assim, o modelo <R,T> apresentado pode ser rigorosamente adaptado para levar em conta flutuações aleatórias nos tempos de entrega.

IV. CONTROLE DE ESTOQUES DE ITENS DE ALTO CUSTO E BAIXA DEMANDA

IV. CONTROLE DE ESTOQUES DE ITENS DE ALTO CUSTO E BAIXA DEMANDA

Conforme já mencionamos anteriormente a formulação de uma política de estoques está, em última análise, fundamentada em duas questões:

- Quando efetuar um pedido
- Quanto pedir

Têm-se verificado [TAVARES[6], J.D. CROSTON[7], JOHN MUCKTADT[8]] que na maioria dos sistemas de estoque de larga escala e, em especial, em estoques de peças de reposição, a proporção de itens que apresentam uma baixa taxa de demanda é bastante elevada. Verifica-se ainda que dentre estes itens encontram-se aqueles cujo preço unitário e, em alguns casos, o custo de manutenção são extremamente elevados.

Para esta classe de itens, a política ótima consiste em manter o nível do estoque constante. Para isto,um pedido é emitido sempre que é observada uma demanda ou, para os modelos de revisão periódica, ao final do período em que foi observada a demanda. Esta política de estoque então é caracterizada por uma única variável de decisão, qual seja, o nível de referência s do estoque.

A constatação de que uma parte significativa dos investimentos em estoque está destinada à esta classe de itens tem motivado crescente interesse no desenvolvimento de modelos específicos tanto de controle quanto de previsão de demanda.

Neste capítulo apresentaremos um estudo mais detalhado do modelo probabilístico da demanda e, a seguir, alguns modelos de otimização para determinar s.

1. MODELO PROBABILÍSTICO DA DEMANDA

Nos modelos estocásticos <r,Q> e <R,T> apresentados no capítulo anterior, a demanda era descrita por um processo POISSON. Nesta seção, apresentaremos um processo de características mais gerais que mantém as principais características do processo de POISSON.

Um processo de POISSON é caracterizado pela ocorrência de demandas unitárias com o tempo entre elas distribuído exponencialmente.

Um processo POISSON-COMPOSTO é uma extensão natural deste conceito onde as demandas ocorrem não mais isoladamente mas em lotes de tamanho aleatório mantendo-se o tempo entre as observações distribuído exponencialmente.

Assim, um processo POISSON-COMPOSTO pode ser encarado como uma série de usuários com chegadas POISSON que demandam, cada um, quantidades positivas de um item. Estas quantidades são independente e indenticamente distribuídas segundo f_j onde f_j é a probabilidade do tamanho da demanda associada à uma chegada qualquer ser j.

A figura abaixo ilustra graficamente a diferença entre um processo de POISSON e um processo POISSON-COMPOSTO.

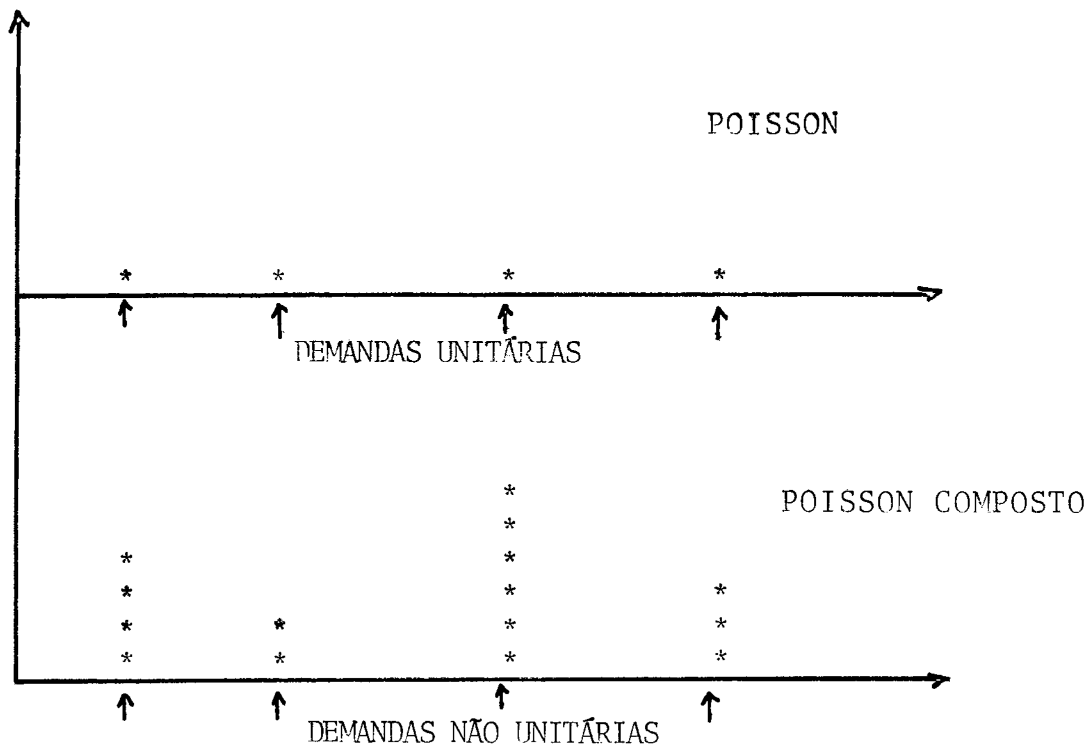


FIGURA IV.1

1.1 - Definição de um Processo POISSON-COMPOSTO

Um processo estocástico pode ser definido, segundo PARZEN[9], como uma família de variáveis aleatórias $\{X(t),t\}$ indexadas por um parâmetro $t \varepsilon T$, onde T é um conjunto de índices.

Um processo estocástico inteiro $\{N(t), t \geq 0\}$ onde $N(t) \varepsilon I, \forall t \geq 0$ é um processo de POISSON com parâmetro λ se as seguintes hipóteses são satisfeitas:

(i) As variáveis $N(s)$ e $[N(t+s)-N(t)]$ são independentes e igualmente distribuídas para qualquer $t>s\geq 0$ ou seja, a distribuição do número de observações em um dado intervalo depende apenas do seu comprimento e, ainda, as distribuições do número de observações em intervalos não sobrepostos constituem variáveis aleatórias independentes.

(ii) Para quaisquer valores de s e t tais que $t>s\geq 0$, o número de observações no intervalo (s,t) tem distribuição com média $\lambda(t-s)$. Assim, para $k=0,1,2,...$

$$P\left[N(t) - N(s) = k\right] = \frac{e^{-\lambda(t-s)}\left[\lambda(t-s)\right]^k}{k!} \tag{IV.1}$$

para o qual

$$E\left[N(t) - N(s)\right] = \lambda(t-s)$$

$$Var\left[N(t) - N(s)\right] = \lambda(t-s)$$

Um processo estocástico $\{x(t),\ t\geq 0\}$ é chamado PROCESSO POISSON COMPOSTO se pode ser expresso por

$$x(t) = \sum_{y=1}^{N(t)} W_y \quad \text{para} \quad t\geq 0 \tag{IV.2}$$

onde $\{N(t),\ t\geq 0\}$ é um processo de POISSON e $\{W_y,\ y=1,2,.....\}$ é uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Supõe-se, ainda, que o processo $\{N(t), t \geq 0\}$ e a sequência $\{W_y\}$ são independentes.

Assim, um processo POISSON COMPOSTO é a soma de um número aleatório de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas.

1.2 - Propriedades de um Processo POISSON-COMPOSTO

Dado o objetivo deste trabalho e por motivo de maior clareza, vamos analisar as propriedades de um processo POISSON-COMPOSTO relacionando-o com um problema de estoque.

Suponha usuários chegando segundo um processo de POISSON, ou seja, com o tempo entre as chegadas distribuído exponencialmente e cada usuário podendo requisitar uma quantidade w, inteira e positiva, de unidades do estoque, quantidades estas independente e identicamente distribuídas segundo f_W.

Desta forma, o total de unidades requisitadas num dado período de tempo tem distribuição POISSON-COMPOSTO, já que é a soma de um número aleatório de termos (o número de usuários que tem distribuição POISSON) distribuídos independentemente segundo f_W (a quantidade requisitada por cada usuário). Posteriormente, será analisado o caso em que cada usuário pode requisitar uma quantidade não-negativa de unidades e verificaremos que a suposição acima $(w>0)$ não implica, em absoluto em perda de generalidade.

Logo, se os usuários chegam à uma taxa λ, a probabilidade de x unidades serem requisitadas durante um período t de tempo é dada por:

$$p(x) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^y e^{-\lambda t}}{y!} f^{y*}(x) \quad x=0,1,\ldots, \quad \lambda>0 \qquad \text{(IV.3)}$$

onde f^{y*} é a probabilidade de y usuários requisitarem um total de x unidades

Note-se que (IV.3) se reduz à uma distribuição de POISSON quando cada usuário só pode requisitar uma unidade, ou seja, quando $f_w=1$ para $w=1$ e $f_w=0$ para $w\neq 1$.

Como cada usuário, por hipótese, deve requisitar pelo menos uma unidade e fw é definido somente para valores discretos e positivos de w temos:

$$f^{y*}(x) = 0 \quad \text{para} \quad y>x \qquad \text{(IV.4)}$$

Então, podemos escrever (IV.3) na forma abaixo.

$$p(x) = \sum_{y=0}^{x} \frac{(\lambda t)^y e^{-\lambda t}}{y!} f^{y*}(x)$$

1.3 - Três Propriedades Importantes

(i) PARZEN[9] mostra que qualquer processo POISSON COMPOSTO tem uma função característica:

$$\psi_{x(t)}(u) = E(e^{iux(t)}) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x)\, e^{iux} = e^{\lambda t(F(u)-1)} \qquad (IV.5)$$

onde $F(u)$ é a função característica de $\{f_w\}$.

Quando t é fixado, a equação (IV.5) nos fornece a função característica de uma distribuição POISSON COMPOSTA.

Prova-se(FELLER[4]) que para qualquer variável aleatória Y temos:

$$E(Y) = \left.\frac{\partial \psi_y(u)}{\partial u}\right|_{u=0} (-i) \quad \text{e} \quad E(Y^2) = \left.\frac{\partial^2 \psi_y(u)}{\partial u}\right|_{u=0} (-1) \qquad (IV.6)$$

Então,

como $F(0)=1$ e $F'(0)=i\,E(w)$ onde w é distribuído segundo fw e se $m=E(x(t))$, temos:

$$m=(-i)\lambda t(i)E(w) = \lambda t E(w)$$

$$\therefore \quad m = \lambda t E(w) \qquad (IV.7)$$

Por (IV.6),

$$E(x(t)^2) = \lambda^2 t^2 E^2(w) + \lambda t E(w^2)$$

então,

$$\mathrm{Var}\left[x(t)\right] = E(x(t)^2) - \left[E(x(t))\right]^2 = \lambda t E(w^2) \qquad (IV.8)$$

Um dado que usaremos adiante é a razão da variância para a média. Por (IV.7) e (IV.8),

$$q = \frac{E(w^2)}{E(w)}$$

$$= \frac{f_1 + 4 f_4 + 9 f_3 + \dots}{f_1 + 2 f_2 + 3 f_3 + \dots} \geq 1 \tag{IV.9}$$

Logo,

"Qualquer distribuição POISSON COMPOSTO com distribuição composta discreta, e positiva tem uma variância que iguala ou excede a sua média".

Note-se que quando q=1, temos uma distribuição de POISSON pois fw=0 para w≠1.

(ii) A função característica de uma soma de variáveis independentes é igual ao produto de suas funções características, sendo a função característica de uma distribuição POISSON COMPOSTO para um período $t_1 + t_2$ dada por:

$$\psi_{X(t_1+t_2)}(u) = e^{\lambda(t_1+t_2)(F(u)-1)} = e^{\lambda t_1(F(u)-1)} \cdot e^{\lambda t_2(F(u)-1)} =$$

$$= \psi_{X(t_1)}(u) \cdot \psi_{X(t_2)}(u)$$

Logo, as distribuições POISSON COMPOSTO são distribuições sem memória isto é, o número de observações num intervalo de tempo é independente do número de observações de qualquer outro período de tempo não sobreposto.

"As distribuições POISSON COMPOSTO formam a classe mais geral de distribuições discretas sem memória."

(iii) Somemos dois processos POISSON COMPOSTO que ocorram simultaneamente. O primeiro e o segundo processo tem, respectivamente taxas de chegada de usuários λ_1 e λ_2, distribuições compostas $\{ f_x^1 \}$ e $\{ f_x^2 \}$ e funções características F_1 e F_2. Usando novamente o fato que a função característica de uma soma de variáveis independentes, é o produto das funções características destas variáveis temos da eq.(IV.7).

$$\psi_{X(t)}(u) = e^{\lambda_1 t(F_1(u)-1)} \cdot e^{\lambda_2 t(F_2)u)-1)} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t\left[1-F(u)\right]} \qquad \text{(IV.10)}$$

onde

$$F(u) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} F_1(u) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} F_2(u)$$

a expressão é facilmente generalizável para N processos simultâneos.

"Logo, a soma de N processos POISSON COMPOSTO com taxa de chegada dos usuários iguais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ é equivalente a um processo POISSON COMPOSTO cuja taxa é:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{IV.11}$$

e cuja distribuição composta tem função característica".

$$F(u) = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i F(u) \right) \tag{IV.12}$$

Vamos agora verificar que a imposição inicial de que a quantidade requisitada por cada usuário seja positiva, isto é, que $f_o=0$, não implica em nenhum restrição ao conjunto de processo POISSON-COMPOSTO.

Considere uma distribuição composta $\{ g_x \}$ com $g_o=k$ onde $0<k<1$, e uma taxa λ^* de chegada dos usuários. A função característica de $\{ g_x \}$ é dada por:

$$G(u) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux} g_x = k + \sum_{x=1}^{\infty} e^{iux} g_x \tag{IV.13}$$

Define-se $f_x = g_x/_{(1-k)}$ para $x=1,2,\ldots$

$$G(u) = k + (1-k) \sum_{x=1}^{\infty} e^{iux} f_x = k+(1-k)F(u) \tag{IV.14}$$

A eq.(IV.5) torna-se então,

$$\psi_{X(t)}(u) = e^{\lambda^* t(G(u)-1)} = e^{\lambda^* t(1-k)\left[F(u)-1\right]} \tag{IV.15}$$

Fazendo $\lambda=\lambda^{*}(1-k)$ define-se um novo processo POISSON-COMPOSTO com taxa de chegada λ e $f_o=0$ cuja função característica permanece a mesma, o que implica na igualdade dos dois conjuntos de PROCESSOS POISSON-COMPOSTO.

1.4 - Processo Geométrico-POISSON

Num processo POISSON-COMPOSTO, por hipótese, o tempo entre os usuários tem distribuição exponencial. Logo, a distribuição do tempo entre os usuários é independente do tempo entre chegadas de usuários anteriores.

Suponha agora que desejamos um PROCESSO POISSON-COMPOSTO no qual a distribuição de probabilidades do tempo entre unidades requisitadas seja independente do tempo em que unidades anteriores foram requisitadas. Note-se que cada usuário pode requisitar uma ou mais unidades do estoque, ou seja, a cada usuário corresponde um número positivo w de requisições ou ainda, (w-1) intervalos nulos de tempo entre unidades requisitadas.

O que desejamos, então, é um processo POISSON-COMPOSTO no qual a probabilidade de um intervalo nulo de tempo entre unidades requisitadas seja independente da ocorrência de intervalos nulos já observados.

$$p_x = p\left(\begin{array}{l}\text{Observar-se pelo menos}\\ \text{x intervalos nulos de}\\ \text{tempo consecutivos}\end{array}\Bigg/\begin{array}{l}\text{(x-1) intervalos}\\ \text{nulos consecuti-}\\ \text{vos já foram ob-}\\ \text{servados}\end{array}\right) = C, \text{ para } x=1,2,..$$

onde C é uma constante $0<C<1$

Logo, $p_x = p_{x-1} = C$ para $x=2,3,\ldots$ $\quad$ (IV.16)

$$p_x = \frac{f_{x+1} + f_{x+2} + \cdots}{f_x} \quad \text{e} \quad p_{x-1} \frac{f_x + f_{x+1} + \cdots}{f_{x-1}} \tag{IV.17}$$

$\therefore$ Após alguns artifícios algébricos com (IV.16) e (IV.17) temos:

$$\frac{f_x}{f_{x-1}} = \frac{1}{1+C} \tag{IV.18}$$

Fazendo $\rho = \dfrac{1}{1+C}$ em (IV.18) temos:

$$\frac{f_x}{f_{x-1}} = \rho \quad \text{para} \quad x=2,3,\ldots \tag{IV.19}$$

Resolvendo (IV.19) recursivamente

$$\begin{aligned} f_2 &= \rho f_1 \\ f_3 &= \rho f_2 = \rho^2 f_1 \\ f_k &= \rho^{k-1}\, f_1 \end{aligned} \tag{IV.20}$$

Logo, f_x tem uma distribuição geométrica:

$$\begin{aligned} f_w &= (1-\rho)\,\rho^{w-1}\,, \quad w=1,2,\ldots \\ E(w) &= 1/(1-\rho) \\ E(w^2) &= 1/1+\rho) \end{aligned} \tag{IV.21}$$

Como a probabilidade de um intervalo de tempo positivo entre unidades requisitadas deve também ser independente de requisições anteriores estes devem ser distribuídos exponencialmente (que num processo POISSON-COMPOSTO caracteriza justamente o tempo entre a chegada de usuários). Logo, o processo GEOMÉTRICO POISSON é um um processo POISSON COMPOSTO em que a requisição por uma unidade é independente de requisições anteriores sejam elas do mesmo lote (intervalo nulo de tempo) ou não.

Das equações (IV.3), (IV.8) e (IV.21)

$$m = \lambda t/(1-\rho)$$
$$q = \frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad (IV.22)$$

Podemos concluir ainda que após a ocorrência de uma unidade requisitada, existe uma probabilidade ρ de ocorrer uma requisição simultânea e uma probabilidade $(1-\rho)$ que se inicie um processo POISSON com taxa λ. Podemos escrever então, que a distribuição do tempo entre as requisições é dada por:

$$g(t) = \rho\ \delta(t) + (1-\rho)\ \lambda\ e^{-\lambda t} \qquad (IV.23)$$

onde $\delta(t)$ é a função impulso em $t=0$.

Para escrevermos a expressão da distribuição GEOMÉTRICO-POISSON, observemos que quando f_x é geométrico, $f^{y*}(x)$, fixado y, tem uma distribuição binomial negativa.

$$f^{y*}(x) = C_{x-1}^{y+1}\, \rho^{x-y}(1-\rho)^{y} \qquad \text{(IV.24)}$$

Logo, por (IV.3) e (IV.21), para $t>0$:

$$p(x) = \sum_{y=1}^{x} \frac{(\lambda t)^y\, e^{-\lambda t}}{y!} \cdot \frac{(x-1)\,!}{(y-1)!(x-y)!}\, \rho^{x-y}\,(1-\rho)^y \,,\ x=1,2,3 \qquad \text{(IV.25)}$$

para $x=0$

$$p(x) = e^{-\lambda t}$$

Fazendo $C_{xj} = \dfrac{(x-1)\,!}{(j-1)!(x-j)!}\, \rho^{x-j}\,(1-\rho)^j$ (IV.26)

Logo, (IV.25) pode ser reescrito como

$$p(x) = \sum_{y=1}^{x} \frac{(\lambda t)^y\, e^{-\lambda t}}{y!}\, C_{xy} \quad ,\ x=1,2,... \qquad \text{(IV.27)}$$

$$p(x) = e^{-\lambda t} \quad ,\quad x=0$$

2. MODELOS PARA DETERMINAÇÃO DE s

Apresentamos o desenvolvimento dos modelos gerais de REVISÃO CONTÍNUA e REVISÃO PERIÓDICA quando a demanda é descrita por um PROCESSO GEOMÉTRICO-POISSON com média e variância dados por (IV.22). A distribuição de probabilidade da demanda será denotada por

$p(x,\lambda t) = p$ {ocorrerem x demandas durante um intervalo de tempo t }

À excessão do resultado obtido na seção 2.1.3, que coincide com o obtido por VALLADARES E ALMEIDA[6], o trabalho aqui apresentado até onde tenhamos conhecimento, não consta da literatura existente.

2.1 - Modelos de Revisão Contínua

2.1.1 - Fórmula Exata

Seja um estoque cuja política consiste em emitir um pedido sempre que observada uma demanda de forma a manter constante o nível do estoque (estoque em mãos + pedidos pendentes-unidades na fila). Qualquer demanda de tamanho maior que o estoque em mãos no instante da sua ocorrência será atendida apenas em parte. A parte excedente será colocada numa fila de espera e será atendida preferencialmente assim que houver estoque disponível.

Calculemos

$\Psi(x)$ = { probabilidade do saldo do estoque ser igual a x num instante qualquer t }.

Considere o instante $t-\tau$. Como todos os pedidos emitidos antes de $t-\tau$ deverão ser entregues até t e nenhum pedido emitido depois de $t-\tau$ terá sido entregue em t, $\Psi(x)$ se iguala à probabilidade de terem ocorrido demandas por $s-x$ unidades durante o tempo de entrega τ, isto é,

$$\Psi(x) = p(s-x, \lambda\tau) \qquad \text{(IV.28)}$$

Para calcularmos

E(s) = valor esperado do número de unidades que entraram na fila ao fim de um ano, dados s

Observemos que num intervalo de tempo Δt pequeno, a probabilidade de ocorrência de uma demanda por um número aleatório de unidades é dada por $\lambda\Delta t$, pois os usuários (as demandas) ocorrem segundo um processo de POISSON.

Para cada usuário, o valor esperado do número de unidades que entram na fila é dado por.

$$E(w) = \sum_{w=0}^{\infty} wp(w) \qquad \text{(IV.29)}$$

onde w é o número de unidades que entram na fila e p(w) é a probabilidade de exatamente ω unidades entrarem na fila.

Portanto, contabilizando as chegadas de usuários ao longo de um ano.

$$E(s) = \lambda \sum_{w=0}^{\infty} wp(w) \qquad \text{(IV.30)}$$

Resta-nos especificar p(w). Para isto, observemos que a probabilidade de w unidades entrarem na fila é a probabilidade de ocorrer uma demanda por w unidades se o saldo do estoque é menor ou igual a zero <u>ou</u>, a probabilidade de ocorrer uma demanda por w+x unidades e o estoque em mãos ser x. Ou seja, se

$p_1 = p\ \{$ saldo do estoque $\leq$ e o demanda de tamanho w $\}$

então,

$$p_1 = f_w \sum_{x=0}^{-\infty} p(s-x,\ \lambda\tau) = f_w \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau) \qquad \text{(IV.31)}$$

E, sendo:

$p_2 = p\ \{$ saldo do estoque = x e demanda de tamanho w+x, x=1,2,..s$\}$

então,

$$p_2 = \sum_{x=1}^{s} (p(s-x,\lambda\tau).f_{w+x}) \qquad \text{(IV.32)}$$

onde

$$f_w = (1-\rho)\ \rho^{w-1} \quad , \quad w=1,2,... \qquad \text{(IV.33)}$$

é a probabilidade de uma demanda ter tamanho w.

Consequentemente:

$$p(w) = p_1+p_2 = f_w \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau)+ \sum_{x=1}^{s} p(s-x,\lambda\tau)\ f_{w+x} \qquad \text{(IV.34)}$$

e

$$E(s) = \lambda \sum_{w=1}^{\infty} w \left\{ f_w \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau)+ \sum_{x=1}^{s} f_{w+x}\ p(s-x,\lambda\tau) \right\} \qquad \text{(IV.35)}$$

Desenvolvendo

$$E(s) = \lambda \sum_{w=1}^{\infty} w\, f_w \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau) + \lambda \sum_{w=1}^{\infty} w \sum_{x=0}^{s-1} f_{w+s-x}\, p(x,\lambda\tau)$$

$$= \lambda \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau) . \underbrace{\sum_{w=1}^{\infty} w\, f_w}_{\frac{1}{(1-\rho)}} + \lambda \sum_{x=0}^{s-1} \sum_{w=1}^{\infty} w\, f_{w+s-x}\, p(x,\lambda\tau) \qquad \text{(IV.36)}$$

Como, $f_{w+s-x} = f_w\, \rho^{s-x}$,

$$E(s) = m \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau) + \lambda \sum_{x=0}^{s-1} p(x,\lambda\tau)\, \rho^{s-x} \underbrace{\sum_{w=1}^{\infty} w\, f_w}_{\frac{1}{(1-\rho)}}$$

$$= m \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau) + m \sum_{x=0}^{s-1} p(x,\lambda\tau)\, \rho^{s-x} \qquad \text{(IV.37)}$$

Podemos observar como a expressão acima se reduz aquela encontrada quando da análise de estoques sob demanda POISSON (CAP.III, seção 3.2). O processo GEOMÉTRICO-POISSON se reduz a um processo POISSON quando $\rho=0$. Logo, como

$$m = \frac{\lambda}{1-\rho} \quad \rightarrow \text{ se } \rho=0 \text{ , } m=\lambda \qquad \text{(IV.38)}$$

temos.

$$E(s) = \lambda \sum_{x=s}^{\infty} p(x,\lambda\tau) \qquad \text{(IV.39)}$$

Outra grandeza relevante na função de custo é:

B(s) = valor esperado do número de unidades.ano na fila ou, o valor esperado do tamanho da fila.

$$B(s) = \sum_{\substack{x=\infty \\ x-\infty}}^{0} |x| \; \Psi(x) = \sum_{v=s+1}^{\infty} (v-s)\; p(v,\lambda\tau) \qquad \text{(IV.40)}$$

lembrando que $|x|$ é o tamanho da fila quando o saldo do estoque, x é negativo.

De maneira análoga, podemos calcular

$$D(s) = \sum_{x=0}^{s} x\Psi(x) = \sum_{x=0}^{s} x\; p(s-x,\lambda\tau) \qquad \text{(IV.41)}$$

Desenvolvendo,

$$D(s) = \sum_{v=0}^{s} (s-v)p(v,\lambda\tau) = \sum_{v=0}^{\infty} (s-v)\; p(v,\lambda\tau) - \sum_{v=s+1}^{\infty} (s-v)p(v,\lambda\tau) =$$

$$= s - m\tau + B(s) \qquad \text{(IV.42)}$$

Logo, o valor esperado dos custos anuais é dado por

$$K(s) = \Pi\ E(s) + (IC+\hat{\Pi})\ B(s) + IC(s-m\tau) \tag{IV.43}$$

observando-se que os custos de encomenda foram emitidos da função de custo por não variarem com a política adotada.

Sejam $\Delta K(s) = K(s+1) - K(s)$

Logo,

$$\Delta\ K(s) = \Pi\ \Delta\ E(s) + (IC+\hat{\Pi})\Delta\ B(s) + IC \tag{IV.44}$$

onde

$$\Delta\ E(s) = E(s+1) - E(s) =$$

$$= m\left[-p(s,\lambda\tau)+\sum_{x=0}^{s-1}(\rho^{s+1-x} - \rho^{s-x})p(x,\lambda\tau)+\rho\ p(s,\lambda\tau)\right]$$

$$= -m\left[(1-\rho)\ p(s,\lambda\tau)+(1-\rho)\sum_{x=0}^{s-1}\rho^{s-x}\ p(x,\lambda\tau)\right]$$

$$= -\lambda\sum_{x=0}^{s}\rho^{s-x}\ p(x,\lambda\tau),\ f \neq 0 \tag{IV.45}$$

e

$$\Delta\ B(s) = B(s+1) - B(s) = -\sum_{x=s+1}^{\infty} p(x,\lambda\tau) \tag{IV.46}$$

Então,

$$\Delta K(s) = \left[-\lambda \sum_{x=0}^{s} \rho^{s-x} p(x,\lambda\tau) \right] \Pi + (IC+\hat{\Pi}) \left\{ -\sum_{x=s+1}^{\infty} p(x,\lambda\tau) \right\} + IC \quad (IV.47)$$

Seja $s^* \varepsilon I^+$, o valor de s que minimiza a função K(s). Logo, temos como condição necessária que:

$$\Delta K(s^*) \geq 0 \quad e \quad \Delta K(s^*-1) \leq 0 \qquad (IV.48)$$

Portanto, s^* é o menor valor de $s \geq 0$ tal que:

$$\Pi \lambda \sum_{x=0}^{s} \rho^{s-x} p(x,\lambda\tau) + (IC+\hat{\Pi}) \sum_{x=s+1}^{\infty} p(x,\lambda\tau) \leq IC \qquad (IV.49)$$

2.1.2 - Modelo com Pedido Especial

Vamos examinar o caso em que as demandas que não podem ser atendidas com o estoque em mãos são satisfeitas através de um "pedido especial" ao fornecedor que, à um custo adicional Π, entrega o pedido rapidamente, num tempo desprezível.

Para considerar este caso especial, basta fazer $\hat{\Pi}=0$ em (IV.49).

$$\Pi \lambda \sum_{x=0}^{s} \rho^{s-x} p(x,\lambda\tau) \leq IC \, (1- \sum_{x=s+1}^{\infty} p(x,\lambda\tau)) \qquad (IV.50)$$

ou, rescrevendo,

$$\frac{\lambda \sum_{x=0}^{s} \rho^{s-x}\, p(x,\lambda\tau)}{\sum_{x=0}^{s} p(x,\lambda\tau)} \leq \frac{IC}{\Pi} \qquad \text{(IV.51)}$$

2.1.3 - Modelo Binário para Itens com Demanda Extremamente Baixa

Em estoques de peças de reposição verifica-se normalmente que grande quantidade de itens cuja demanda é extremamente baixa, da ordem de uma unidade por ano ou menos, apresentam custo bastante elevado.

Para estes itens a decisão consiste em manter ou não uma unidade em estoque, utilizando um pedido especial, a um custo adicional Π, para satisfazer uma demanda ocorrida quando o estoque em mãos for nulo como no item (2.1.2). VALLADARES E ALMEIDA[6] obtiveram resultado semelhante ao que ora obtemos para demandas POISSON. Fazendo s=0 em (IV.51) , temos:

$$\lambda \leq \frac{IC}{\Pi} \qquad \text{(IV.52)}$$

A expressão acima nos diz que o estoque ótimo é zero caso esta condição se verifique e de uma unidade caso contrário. Este modelo foi aplicado nos estoques da LISNAVE, um estaleiro de reparos cujo investimento total em estoques é da ordem de 3 milhões de dólares com 15.000 itens. Espera-se uma economia de até 50% nos investimentos em estoque nos itens de baixa demanda. A política anteriormente adotada era de estocar pelo me nos uma unidade destes itens.

2.2 - Modelos de Revisão Periódica

2.2.1 - Fórmula Exata

Seja um estoque cujo nível é verificado a cada T unidades de tempo e cuja política consiste em emitir um pedido após a revisão do estoque de forma a restabelecer o nível de referência s. Qualquer demanda por um item cujo estoque em mãos seja nulo, será colocada numa fila de espera e atendida preferencialmente quando houver estoque disponível.

Rescrevendo a função de custo já obtida:

$$K(s) = \frac{J}{T} + 1-e^{-\lambda t} + \text{I}\!\text{I}E(s,T) + \hat{\text{I}\!\text{I}}B(s,T)+ICD(s,T) \qquad (IV.53)$$

Os métodos utilizados para obter as expressões de E(s,T), B(s,T) e D(s,T) são análogos aos métodos utilizados na análise do modelo de REVISÃO PERIÓDICA com demanda POISSON apresentados no capítulo anterior.

Por (III.42 e III.43)

$$E(s,T) = E_1(s,T+t+\tau) - E_1(s,t+\tau) =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{x=s}^{\infty} (x-s) \left[p(x,\lambda(\tau+T))-p(x,\lambda\tau) \right] \qquad (IV.54)$$

ou, após algumas manipulações

$$E(s,T) = m - \sum_{x=0}^{s} (x,s) \left[p(x,\lambda(\tau+T)) - p(x,\lambda\tau) \right] \tag{IV.55}$$

Por (III.45)

$$B(s,T) = \frac{1}{T} \sum_{x=s}^{\infty} (x-s) \int_{\tau}^{T+\tau} p(x,\lambda\xi)\, d\xi = \frac{1}{T} \sum_{x=s}^{\infty} (x-s)\ \Phi(x) \tag{IV.56}$$

ou, após algumas manipulações:

$$B(s,T) = \frac{m}{2} (T+2\tau) - s - \frac{1}{T} \sum_{x=0}^{s} (x-s)\ \Phi(x) \tag{IV.57}$$

onde

$$\Phi(x) = \int_{\tau}^{T+\tau} p(x,\lambda\xi) d\xi = \int^{T+\tau} \left[\sum_{j=0}^{x} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j}}{j!} C_{xj} \right] dt =$$

$$= - \sum_{j=0}^{x} C_{xj}\ \lambda^{j-1} \sum_{k=0}^{j} \frac{e^{-\lambda(T+\tau)}(T+\tau)^{j-k} - e^{-\lambda\tau}\tau^{j-k}}{\lambda^{k}(j-k)!} \tag{IV.58}$$

onde C_{xj} é dado por (IV.26).

Por (III.51),

$$D(s,T) = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} \sum_{x=0}^{\infty} (s-x)\ p(x,\lambda\xi)d\xi + B(s,T)$$

$$= S- \frac{m}{2}\ (T+2\tau) + B(s,T) \tag{IV.59}$$

Logo, a função de custo será dada por.

$$K(s) = \frac{J}{T} + \frac{1-e^{-\lambda T}}{T} .\ A+\Pi\ E(s,T)+(IC+\hat{\Pi})B(s,T)+(S- \frac{m}{2}\ (T+2\tau))IC \tag{IV.60}$$

onde foram excluídos os custos relativos à compra das unidades por não variarem nem com s nem com T.

$$\text{Seja } \Delta\ K(s) = K(s+1) - K(s) \tag{IV.61}$$

Dado T, s* é o valor $s \geq 0$ que minimiza K(s)

Então, s* é o menor valor de s para o qual $\Delta\ K(s) \geq 0$.

Logo, s* é o menor valor de s para o qual

$$\Pi\ \Delta\ E(s,T)+(\hat{\Pi}+IC)\ \Delta B(s,T) + IC \geq 0 \tag{IV.62}$$

onde

$$\Delta E(s,T) = E(s+1,T) - E(s,T) = \frac{1}{T} \sum_{x=0}^{S} \left[p(x,\lambda(\tau+T))-p(x,\lambda\tau)\right] \tag{IV.63}$$

$$\Delta B(s,T) = B(s+1,T)-B(s,T) = \frac{1}{T} \sum_{x=0}^{S} \Phi(x) - 1 \tag{IV.64}$$

2.2.2 - Modelo com Pedido Especial

Como nos modelos de revisão contínua, vamos examinar o caso em que as demandas que não puderem ser atendidas com o estoque em mãos são satisfeitas através de um "pedido especial" que, por um custo adicional Π, é entregue em um tempo desprezível.

Como $\hat{\Pi}=0$ em (IV.61), temos que s^* é dado pelo menor $s \geq 0$ tal que

$$\Pi \, \Delta E(s,T) \geq -(\Delta B(s,T)+1) \, IC \qquad \text{(IV.65)}$$

ou, de outra forma:

$$\frac{-\Delta E(s,T)}{\Delta B(s,T)+1} \leq \frac{IC}{\Pi} \qquad \text{(IV.66)}$$

onde $\Delta E(s,T)$ e $\Delta B(s,T)$ são dados por (IV.64) e (IV.65).

2.2.3 - Modelo Binário para Itens com Demanda Extremamente Baixa

Apresentamos aqui uma extensão dos resultados obtidos para a decisão de armazenar uma unidade ou nenhuma quando do estudo dos modelos de revisão contínua. Como no caso anterior, basta fazer s=0 em (IV.67). Obtém-se então:

$$-\frac{\Delta\ E(0,T)}{\Delta B(0,T)\ +1} \leq \frac{IC}{\Pi} \qquad (IV.67)$$

Por (IV.64) e (IV.65)

$$\Delta E(0,T) = \frac{e^{-\lambda(T+\tau)} - e^{-\lambda\tau}}{T} \qquad (IV.68)$$

$$\Delta B(0,T) = \frac{\Phi(0)}{T} - 1 = \frac{\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+T} e^{-\lambda\xi}\ d\xi}{T} - 1$$

$$= \frac{e^{-\lambda(T+\tau)} - e^{-\lambda(\tau)}}{-\lambda T} - 1 = \frac{-\Delta E(0)}{\lambda} - 1 \qquad (IV.69)$$

Logo,

$$\frac{-\Delta E(0,T)}{-\Delta E(0,T)}\ \lambda \leq \frac{IC}{\Pi} \qquad (IV.70)$$

$$\therefore\ \ \lambda \leq \frac{IC}{\Pi} \qquad (IV.71)$$

Quando (IV.72) se verifica, o estoque ótimo é zero. Caso contrário, mantém-se uma unidade em estoque.

V. O MODELO BEF DE PREVISÃO APLICADO À ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

V. O MODELO BEF DE PREVISÃO APLICADO À ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Como se verifica através das expressões obtidas nos capítulos anteriores, quando da análise dos modelos estocásticos e, particularmente, nos modelos para itens de alto custo e baixa demanda, uma componente de importância fundamental para a formulação de qualquer política de estoques é a descrição probabilística da demanda.

De fato, é quase impossível se pensar em controle de estoques sem, paralelamente, se pensar no problema da previsão da demanda é, mais especificamente, da DISTRIBUIÇÃO DA DEMANDA.

Neste capítulo, serão apresentados os métodos de previsão já existentes para o nosso problema, a formulação geral do método BEF (BAYESIAN ENTROPY FORECASTING) de SOUZA[10] e sua aplicação na estimação da demanda de itens de demanda baixa e alto custo (SOUZA[11]).

1. NOÇÃO DE INFERÊNCIA BAYESIANA

1.1 - Introdução

Os métodos clássicos, ou amostrais, de inferência, ao estimar os valores dos parâmetros de uma distribuição de uma dada variável aleatória, se valem unicamente de dados amostrais e fornecem como resultados uma estimativa pontual do parâmetro de interesse.

A inferência BAYESIANA difere da inferência clássica em método e objetivo:

(i) Como dados, pode utilizar, além de valores amostrais, informações anteriores ou, até mesmo, dados subjetivos, representados na forma de uma distribuição de probabilidades —— chamada DISTRIBUIÇÃO À PRIORI.

(ii) Como resultado, fornece, ao invés de uma estimativa pontual, uma distribuição de probabilidades, que representa a incerteza que temos a respeito do valor verdadeiro do parâmetro de interesse. Esta distribuição, é chamada DISTRIBUIÇÃO POSTERIOR.

(iii) A medida que novos dados surgem, são incorporados ao processo através de uma modificação conveniente da distribuição de probabilidades do parâmetro.

As três características acima implicam num processo dinâmico onde cada ciclo é caracterizado pela incorporação de uma nova informação à distribuição à priori resultando uma nova distribuição posterior, através da aplicação do TEOREMA DE BAYES, apresentado na próxima seção. Em cada ciclo, a distribuição à priori é representada pela distribuição posterior do ciclo anterior que, de fato, "contém" todas as informações anteriores (dados amostrais e fatores subjetivos) sobre o parâmetro de interesse.

1.2 - Teorema de BAYES

O teorema de BAYES é o teorema no qual está fundada toda a filosofia da estatística BAYESIANA.

Suponha que y seja uma observação do sistema e sua distribuição de probabilidade, $p(y/\theta)$, dependa do valor de um parâmetro θ com distribuição $p(\theta)$. Então, das propriedades das distribuições condicionais, temos que,

$$p(y/\theta).p(\theta) = p(\theta/y).p(y) \tag{V.1}$$

Logo, a distribuição condicional de θ dado y é:

$$p(\theta/y) = \frac{p(y/\theta)\ p(\theta)}{p(y)} \tag{V.2}$$

onde

$$p(y) \equiv E\ \{\ p(y/\theta)\ \} = \begin{cases} \int p(y/\theta)\ p(\theta)\ d\theta \text{ se } \theta \text{ é contínuo} \\ \\ \sum p(y/\theta)\ p(\theta) \quad \text{se} \quad \text{é discreto} \end{cases} \tag{V.3}$$

e a soma ou a integral é tomada sobre o conjunto de valores admissíveis de θ.

Na expressão (V.2), $p(\theta)$ descreve as informações que temos sobre θ <u>antes</u> de y ser observado —— o que chamamos de <u>distribuição à priori</u> de θ. Por outro lado, $p(\theta/y)$ des-

Suponha agora que observamos y_2, distribuído independentemente de y_1. Logo,

$$p(\theta/y_2) \propto \ell(\theta/y_2)\ \ell(\theta/y_1)\ p(\theta) \qquad (V.6)$$

ou

$$p(\theta/y_2) \propto \ell(\theta/y_2)\ p(\theta/y_1) \qquad (V.7)$$

Comparando (V.5) e (V.7) verificamos que $p(\theta/y_1)$, a distribuição posterior de θ dado y_1, desempenha o papel de distribuição à priori para a segunda observação. O processo pode ser repetido indefinidamente, a cada nova observação.

A inferência bayesiana, dadas suas características, é especialmente indicada para:

(a) Casos em que há pouco ou nenhum dado visto sua capacidade de considerar fatores subjetivos e de "aprender" sobre o sistemas a medida que novas informações são obtidas.

(b) Processos dinâmicos já que a distribuição do parâmetro se modifica a cada nova informação incorporada.

creve as informações anteriores sobre θ acrescidas de observação y e é a chamada DISTRIBUIÇÃO POSTERIOR de θ.

Na expressão (V.2) $p(y/\theta)$ pode ser encarado como uma função de θ e não de y Se assim procedermos $p(y/\theta)$ é chamada FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA DE θ dado y e é denotada por $\ell(\theta/y)$. Sobre (V.2), verificamos ainda que $p(Y)$ é apenas uma constante 'normalizante', que faz com que $p(\theta/y)$ seja de fato uma distribuição de probabilidade (ou uma função densidade de probabilidade no caso contínuo). Podemos então rescrever a expressão (V.2).

$$p(\theta/y) \propto \ell(\theta/y)\ p(\theta) \qquad \text{(V.4)}$$

A função de verossimilhança desempenha um papel importante na fórmula de BAYES já que representa a informação sobre θ que está contida na observação y.

O TEOREMA DE BAYES, fornece uma formulação matemática que descreve como o conhecimento prévio a respeito de θ pode ser combinado com novos conhecimentos. De fato, o teorema nos permite atualizar a informação sobre θ a medida que novos valores de y vão sendo observados. (formulação sequencial do Teorema de BAYES).

Suponha que dispomos de uma observação inicial y_1. Por (V.4),

$$p(\theta/y_1) \propto \ell(\theta/y_1)\ p(\theta) \qquad \text{(V.5)}$$

(c) Problemas de decisão sob riscos, isto é, casos que uma ou outra decisão será tomada dependendo do valor do parâmetro. Como a inferência bayesiana fornece uma <u>distribuição de probabilidades</u> para o parâmetro (ao invés de apenas um valor) é possível ponderar as consequências de cada decisão segundo $p(\theta)$.

2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

No capítulo IV foram apresentados vários modelos para a avaliação do nível de referência, s, do estoque que, como vimos, é a única decisão a ser tomada quando os itens em questão tem alto custo e baixa demanda.

Vale acrescentar que muitas das peças reparáveis de aviões, que apresentam custo bastante elevado, são demandadas apenas algumas vezes por ano numa base aérea em particular.

Nos modelos de estoque apresentados no capítulo IV se fazia presente a necessidade do conhecimento da distribuição da demanda, ou, mais precisamente, dos parâmetros da distribuição GEOMÉTRICO-POISSON a partir da qual as quantidades relevantes tais como valor esperado do estoque em mãos, valor esperado do número de unidades na fila,etc. são calculadas.

2.1 - Descrição Paramétrica do Problema

2.1.1 - Número de Demandas por Período -

$$Y \in [0,1,2,\ldots]$$

$$Y \sim \text{POISSON}(\lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$p(Y=y/\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{y}}{y!} \qquad (V.8)$$

$$\left.\begin{aligned} E\{Y/\lambda\} &= \lambda \\ Var\{Y/\lambda\} &= \lambda \end{aligned}\right\} \qquad (V.9)$$

Y: Variável aleatória que representa o número de chegadas ao estoque. Cada chegada representa uma demanda por uma ou mais unidades.

2.1.2 - Número de Unidades por Demanda

$$Z \in [1,2,\ldots]$$

$$Z \sim \text{Geométrica}(\rho);\ \rho \in [0,\Delta]$$

$$p(Z=z/\rho) = (1-\rho)\rho^{z-1} \qquad (V.10)$$

$$\left.\begin{aligned} E\{Z/\rho\} &= 1/(1-\rho) \\ Var\{Z/\rho\} &= \rho(1-\rho)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (V.11)$$

2.1.3 - Número de Unidades Demandadas por Período - $X \in [0,1,2, \ldots]$

Obtida através da convolução de Y e Z

$$(X/\lambda,\rho) \sim GP(\lambda,\rho), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \rho \in [0,\Delta]$$

onde $GP(\lambda,\rho)$ é uma distribuição GEOMÉTRICO POISSON dada por:

$$p(X/\lambda,\rho) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{X} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \frac{(x-1)!}{(j-1)!(x-j)!} \rho^{x-j}(1-\rho)^j & \text{se } x \geq 1 \\ \\ e^{-\lambda} & , \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{V.12}$$

$$\left.\begin{aligned} E(X/\lambda,\rho) &= \lambda/(1-\rho) \\ \mathrm{Var}\{X/\lambda,\rho\} &= \lambda(1+\rho)/(1-\rho)^2 \end{aligned}\right\} \tag{V.13}$$

Observe-se que estas são as únicas informações disponíveis a cada período.

2.1.4 - Distribuição do Tempo entre Demandas - $t_I \in \mathbb{R}$

Pela equação (IV.23)

$$g(t_I/\lambda,\rho) = \rho\ \delta\ (t_I) + (1-\rho)\ \lambda\ e^{-\lambda\ t_I} \tag{V.14}$$

$$\left.\begin{aligned} E\{ t_I/\lambda,\rho \} &= \frac{1-\rho}{\lambda} \\ Var\{ t_I/\lambda,\rho \} &= \frac{(1-\rho)^2}{\lambda^2} \end{aligned}\right\} \qquad (V.15)$$

2.2 - Características Particulares

Para estimarmos os parâmetros λ e ρ alguma relação deve ser estabelecida entre $E(x)$ e $Var(x)$.

De fato, têm-se verificado [BURGIN & WILD[2]] que é possível ajustar uma curva quadrática na forma:

$$Var(X) = q_1\, E(X) + q_2 \left[E(X) \right]^2 \qquad (V.16)$$

Utilizando as equações (V.16) e (V.13)

$$\rho = \frac{q_1 - 1}{q_1 + 1} + \frac{q_2}{q_2 + 1}\,\lambda$$

Neste texto, inclusive para efeito de comparação com outros modelos como Sheerbroke[14], vamos considerar que $q_2=0$. Logo,

$$q_1 = \frac{Var(X)}{E(X)} \qquad (V.17)$$

onde q_1 é um valor conhecido (geralmente avaliado a partir de dados e/ou conhecimentos anteriores). Por (V.13) e (V.17)

$$\rho = \frac{q_1 - 1}{q_1 + 1} \qquad (V.18)$$

Uma vez estabelecido o valor de q_1, só nos resta estimar o valor de λ já que, por (V.18), ρ é calculado diretamente. Por outro lado, por (V.13), uma vez conhecido ρ basta determinar λ ou $E(X)$.

O problema pode, então, ser colocado na seguinte forma:

"Conhecido q_1, estimar o valor de λ ou θ".

onde $\theta = E(x)$

Observemos que para $x \geq 1$, podemos escrever:

$$p(X/\lambda,\rho) = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{x} \frac{\lambda^j \, Cxj}{j!} \qquad \text{(V.19)}$$

onde

$$Cxj = \frac{(x-1)!}{(j-1)!(x-j)!} \rho^{x-j} (1-\rho)^j \qquad \text{(V.20)}$$

é conhecido para cada x e $j \varepsilon I^+$, já que ρ é conhecido.

3. SOLUÇÕES EXISTENTES

O problema de estimação dos parâmetros de um processo GEOMÉTRICO POISSON foi pouco abordado até hoje talvez devido à sua forma analítica pouco tratável. Além dos métodos que apresentamos a seguir, podemos citar uma proposta de D.J. CROSTON[16] que utiliza técnicas de amortecimento exponencial e es tima separadamente a taxa de chegada e o nº de demandas associado a cada chegada. Este método não será apresentado neste texto por pressupor o conhecimento de Y e Z (vide seções 2.1.1 e 2.1.2) a cada período. Os métodos que apresentamos utilizam apenas observações sobre o valor de X = Y. Z.

3.1 - Método Clássico - "Item's issue rate".

Utiliza uma série histórica de demandas para t períodos de tempo:

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_t) \qquad (V.21)$$

e o estimador pontual para θ é dado por:

$$\hat{\theta}_t = \frac{\sum_{i=1}^{t} x_i}{t} \quad , \quad t=1,2,\ldots. \qquad (V.22)$$

assumindo que a demanda futura será dada por uma variação aleatória em torno deste nível.

Este enfoque produz resultados confiáveis na medida em que exista uma série histórica de demandas relativamente longa e que a demanda seja relativamente alta. O nosso problema, infelizmente, não apresenta estas características e o desempenho do modelo clássico, de fato, apresenta um baixo rendimento, como veremos nas tabelas comparativas, quando utilizado para estimar θ para itens cuja demanda é baixa e, em especial, quando a demanda é esparsa.

3.2 - Objective Bayes Approach

Sherbrooke e Feeney numa série de artigos publicados a partir de 1964 (C.G. Feeney e Sherbrooke (13), (14) e (15)) apresentaram o OBJECTIVE BAYES APPROACH demonstrando a vantagem da análise bayesiana sobre os métodos clássicos quando aplicada à estimação dos parâmetros da demanda por itens reparáveis em uma base áerea.

Como foi então reforçado, apesar do método em princípio poder ser aplicado a qualquer grupo de itens, espera-se uma vantagem mais significativa se utilizado na análise de itens de demanda esparsa, isto é, no qual são observados vários períodos com demanda nula.

3.2.1 - A Distribuição à Priori

O método assume, inicialmente, uma distribuição LOG-NORMAL para o parâmetro θ.

$$p(\theta) = \frac{1}{\theta \sqrt{2\Pi}\, \sigma} \exp\left(\frac{-1}{2\,\sigma^2} (\ln \theta - u)^2 \right) \qquad (V.23)$$

cujos parâmetros σ e u são estimados a partir de dados históricos referentes ao sistema ou do conhecimento sobre sistemas similares e, eventualmente, de conhecimentos subjetivos.

3.2.2 - Estimação de σ^2 e u

Sejam m e s^2 as estimativas de σ^2 e u respectivamente. PORTILLA[17] executou alguns testes utilizando várias formas de realizar tal estimativa tendo optado pelo "método dos monumentos+q_1" que utiliza a expressão que relaciona o $j_{\text{ésimo}}$ momento de uma log-normal com os parâmetros u e σ^2 da distribuição normal correspondente.

$$E\left[x^j\right] = e^{ju + \frac{j^2\sigma^2}{2}} \tag{V.24}$$

e a relação dos momentos do processo GEOMÉTRICO-POISSON estabelecida na seção 2.2 em (V.17).

$$E\left[x^2\right] = q_1\theta + \theta^2 \tag{V.25}$$

De (V.24) e (V.25), obtemos

$$m = \ell n\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right] - \frac{1}{2} s^2 \tag{V.26}$$

$$s^2 = \ell n\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{q_1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right] - 2\ \ell n\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right] \tag{V.27}$$

onde $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são as observações anteriores do sistema.

3.2.3 - Discretização da Distribuição LOG-NORMAL

Uma vez avaliados os parâmetros de $p(\theta)$, define-se $p^*(\theta)$ —— uma aproximação discretizada de $p(\theta)$. Esta aproximação é efetuada a partir da seleção de N valores de θ.

$$\theta_1 < \theta_2 < \ldots . < \theta_N \qquad (V.28)$$

A distribuição aproximada é dada por:

$$p^*(\theta_i) = p\left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}\right) \quad , \quad i=1,2,\ldots N-1 \qquad (V.29)$$

Numa tentativa de representar o melhor possível a distribuição $p(\theta)$ na parte esquerda (valores baixos de θ) sem desprezar os valores da direita (valores altos), PORTILLA[17] selecionou os pontos de discretização segundo a expressão abaixo.

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \frac{i\, h^i\, (\theta_N - \theta_i)}{N} \qquad i = 2,N \qquad (V.30)$$

onde h=1 faz com que a distância entre dois pontos consecutivos seja uma progressão aritmética. Se h>1 estas distâncias formam uma progressão geométrica. Em seus testes, PORTILLA[17] utilizou h=1.

3.2.4 - Distribuição Posterior

Para calcular a distribuição posterior de θ, $q(\theta/\tilde{x})$, utiliza-se a versão discreta do TEOREMA DE BAYES.

$$q(\theta_i/\tilde{x}) = \frac{p(\tilde{x}/\lambda_i,\rho)\;.\;p^*(\theta_i)}{\sum_{i=1}^{N} p(\tilde{x}/\lambda_i,\rho)\,p^*(\theta_i)} \qquad (V.31)$$

onde $\lambda_i = \theta_i\,(1-\rho)$

e $(\underset{\sim}{x}/\lambda_i,\rho) \sim$ GEOMÉTRICO POISSON (λ_i,ρ)

3.2.5 - Comentários

A distribuição discretizada é utilizada sequencialmente de forma a obter as posteriores a medida que novos valores de X são observados.

A dificuldade do método reside na perda de informação inerente à representação discreta de uma variável aleatória contínua, isto é, θ. PORTILLA[17] observou a ocorrência de distribuição fortemente bimodais quando da utilização do método para demandas extremamente baixas.

4. BAYESIAN ENTROPY FORECASTING(BEF) SOUZA[10]

Antes de apresentar o método de estimação de λ (ou θ) propriamente dito, apresentamos a formulação geral do BAYESIAN ENTROPY FORECASTING de SOUZA[10]. O leitor interessado apenas na aplicação do método, deve se dirigir à seção 4.4.

4.1 - Introdução

A utilização de um novo enfoque para métodos de previsão utilizando conceitos da estatística bayesiana, resultou nos chamados MÉTODOS BAYESIANOS DE PREVISÃO (Bayesian Forecasting Methods) de HARISSON & STEVENS[18]. Estes métodos apresentam algumas importantes características que os diferenciam dos modelos de previsão convencionais tais como:

- O processo não precisa ser estacionário.

- Utiliza um critério de otimalidade diferente da minimização do erro médio quadrático.

Algumas limitações, contudo, permaneceram.

(i) A linearidade do modelo, isto é, as equações de observação e do sistema são lineares.

(ii) Eficiência somente para processos NORMAIS.

Valendo-se do conceito de entropia de SHANNON, o BEF (BAYESIAN ENTROPY FORECASTING) de SOUZA[10] propõe uma extensão dos modelos Bayesianos de previsão onde as restrições de NORMALIDADE e LINEARIDADE citadas acima não são necessárias.

4.2 - Conceitos Básicos da Teoria da Informação

Apresentamos alguns conceitos que serão utilizados mais adiante, na formulação do BEF.

4.2.1 - Entropia de Shannon – [Shannon e Weaver][19]

4.2.1.1-Definição - Seja Sn o conjunto de todas a distribuição discretas de probabilidades.

$$S_n = \{ P=(p_1,p_2,\dots,p_n),\ p_i \geq 0,\ i=1,2,\dots,n\ ,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \} \qquad (V.32)$$

A entropia da distribuição de probabilidades $P \varepsilon S_n$ é dada por:

$$H(P)=H(p_1,p_2,\dots,p_n) = - \underset{P}{E}\ \{\ell n\ p\ \} = - \sum_{i=1}^{n} p_i\ \ell n p_i \qquad (V.33)$$

onde, se $p_i=0$, $p_i\ \ell n p_i = 0$. H(P) é chamada a FUNÇÃO DE ENTROPIA.

Se encararmos P como um experimento para o qual os resultados possíveis são $x_1,x_2,\dots,x_n$ com probabilidades respectivamente iguais a $p_1,p_2,\dots,p_n$, H(P) mede a incerteza que temos a respeito do resultado do experimento.

4.2.1.2- Propriedades de H(P)

O "teorema fundamental da teoria de informação" de Shannon e Weaver[19] diz, resumidamente que:

"A função de entropia (definida em 4.2.1) é a única função que satisfaz as três exigências para ser uma medida de incerteza de uma distribuição de probabilidades P".

(i) Continuidade em p_i

(ii) Ser uma função monótona crescente de n se $p_i=1/n$, $i=1,2,\dots,n$.

(iii) Consistência

$$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)=H(p_1+p_2,p_3,\ldots,p_n)+(p_1+p_2)\; H\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\;,\;\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) \quad (V.34)$$

isto é, se um evento é subdividido em dois outros eventos, a entropia original deve ser uma soma ponderada dos valores individuais de H.

4.2.1.3-Medida de Entropia para Variáveis Contínuas

Se $X \in \mathcal{X}$ é uma variável aleatória contínua e p(x) sua p.d.f então, a entropia de Shannon é definida como

$$H_x = -E_{p(x)} \left\{ \ln p(x) \right\} = - \int p(x).\ln x.dx$$

Esta definição apresenta, no entanto, algumas dificuldades.

(i) H_x não é invariável em relação a uma troca de variáveis isto é, se $x=g(x)$, $H_y \neq H_x$

(ii) H_x pode ser negativa.

Definimos, então, uma medida positiva de incerteza

$$S_x = \exp \{ H_x \} \qquad (V.35)$$

onde H_x é dado por (V.33).

4.2.2 - Medida de Divergência

Seja p(x) a verdadeira p.d.f de uma variável aleatória contínua X ε $\mathcal{X}$ e f(x) uma aproximação de p(x). A medida de divergência entre as duas densidades é dada, segundo Kullback e Leiber (Kullback[20]), por

$$I(p,f) = \int_{\mathcal{X}} \ell n \left[\frac{p(x)}{f(x)} \right] . \; p(x) \, dx \qquad \text{(V.36)}$$

$I[p,f]$ é uma medida invariante e não negativa da "proximidade" de f(x) e p(x) (observe-se que se $f(x) \underline{\Delta} \, p(x)$, $I[p,f] = 0$).

4.2.3 - Eficiência de Predição

Define-se a "eficiência de predição" de uma densidade f(x), em relação a uma densidade p(x) como:

$$E \{ f,p \} \square \exp \{ -I(p,f) \} \qquad \text{(V.37)}$$

onde I(p,f) é definido em 4.2.2 .

O leitor interessado deve referir-se À SOUZA[10] para maiores detalhes sobre os fundamentos desta definição.

4.3 - <u>BEF - Formulação Geral</u>

Apresentamos primeiramente o Modelo, BAYESIANO NORMAL de Harrison & Stevens.

4.3.1 - Normal Steady State Model
Harrison & Stevens[18]

Sejam

y_t: observação do processo

θ_t: nível do processo

As equações do modelo linear dinâmico (abreviadamente DLM-Dynamic Linear Model) como foi proposto são dadas por:

$$y_t = \theta_t + v_t \quad \text{- equação de observação} \qquad (V.38)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + w_t \quad \text{- equação do sistema} \qquad (V.39)$$

onde

$v_t \sim N(0,V)$ é o ruído da observação

$w_t \sim N(0,W)$ é o ruído do sistema

As equações de atualização são dadas pelo filtro de Kalmann:

Se $\quad Di = (y_i, y_2, \ldots, y_i)$ e

$$\theta_{t-1/D_{t-1}} \sim N\,(m_{t-1}\,,\, C_{t-1}) \qquad (V.40)$$

então,

$$\theta_{t/D_t} \sim N\ (m_t, C_t) \qquad \text{(V.41)}$$

onde $m_t = m_{t-1} + A_t\, e_t$ e $C_t = A_t . V$ (V.43)

sendo $e_t = y_t - \hat{y}_t$

$A_t = R_t/(R_t+V)$

$R_t = C_{t-1}+W$

Equações de atualização FILTRO DE KALMAN

e $\hat{y}_t$ é uma estimativa de y_t.

Neste modelo, é fácil ver que se

$\left[\theta_{t/D_t} \sim N\ (m_t, C_t)\right]$

$$p_{t,t} = \text{p.d.f de } (\theta_{t/D_t}) \qquad \text{(V.44)}$$

$$p_{t+1,t} = \text{p.d.f de } (\theta_{t+1/D_t}) \qquad \text{(V.45)}$$

pelas equações (V.39) do sistema, temos:

$$(\theta_{t+1/D_t}) \sim (m_t, C_{t+w}) \qquad \text{(C.46)}$$

Se expressarmos este resultado em termos das p.d.f, verifica-se facilmente que:

$$p_{t+1,t} \propto p_{t,t}\ \frac{C_t}{C_{t+w}} \qquad \text{(V.47)}$$

Observemos que se uma variável aleatória Z tem distribuição normal de parâmetros u e σ^2, então, por (V.35).

$$S_x = \sqrt{2\Pi e}\ \sigma \qquad (V.48)$$

Logo, denotando a entropia de $p_{t,t}$ por $S_{t,t}$ temos que:

$$h(t) = \frac{C_t}{C_{t+w}} = \frac{S^2_{t,t}}{S^2_{t,t}+2\Pi e w} \qquad (V.49)$$

Podemos reescrever (V.47) em termos da entropia de $p_{t,t}$

$$p_{t+1,t} \propto p_{t,t}^{\ h(t)} \qquad (V.50)$$

onde h(t) é dado por (V.49)

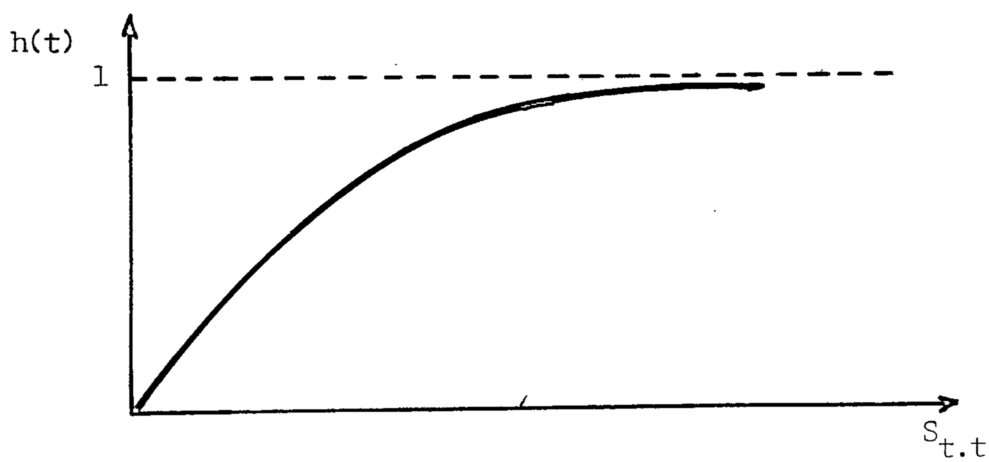


FIGURA V.1 - Ilustração gráfica de h(t) x $S_{t.t}$

4.3.2 - Modelo "Steady State" Geral

4.3.2.1- Definição

Sejam

$y_t \in Y$: as observações do sistema

$\theta_t \in \Omega$: o parâmetro do processo

$D_t = \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ o conjunto de observações até o instante t

Onde:

(i) y_t é caracterizado pela sua distribuição de probabilidade condicional (y_t/θ_t) conhecida para t=1,2,...

(ii) A distribuição posterior para (θ_t/D_t) é uma conjugada de (Y_t/θ_t) é sua p.d.f, $p_{t,t}$, tem entropia dada por $S_{t,t}$.

(iii) A distribuição à priori para (θ_{t+1}/D_t) é dada por $t_{t+1,t}$ e sua entropia, $S_{t+1,t}$ é uma função de $S_{t,t}$. Além disso, $p_{t+1,t}$ é tal que a grandeza "EFICIÊNCIA DE PREDIÇÃO" definida em 4.2.3 é máxima.

Formulando o problema definido em (iii) temos:

Calcular $p_{t+1,t}$ que maximize

$$\underset{p_{t+1,t}}{E} \left\{ \ell n \frac{p_{t+1,t}}{p_{t,t}} \right\} = \int_0^{\infty} p_{t+1,t} \cdot \ell n \frac{p_{t+1,t}}{p_{t,t}} \, d\,\theta_{t+1} \tag{V.51}$$

sujeito a

$$\exp \left[- \int_0^{\infty} p_{t+1,t} \cdot \ell n \, p_{t+1,t} \, d\,\theta_{t+1} \right] = S_{t+1,t} \tag{V.52}$$

$$\int_0^{\infty} p_{t+1,t} \cdot d\,\theta_{t+1} = 1 \tag{V.53}$$

Resolvendo-se o problema, chega-se que

$$p_{t+1,t} \propto p_{t,t}^{\;g(S_{t,t})} \tag{V.54}$$

4.3.2.2-Escolha de g(.)

O problema acima fica completamente especificado se definirmos g(.). Em analogia ao modelo NORMAL apresentado na seção 4.3.1, e mais especificamente, reproduzindo as características de h(t), escolheremos uma função com as seguintes propriedades:

(i) Se S_M é a entropia máxima

$$\lim_{S_{t,t} \to S_M} g(S_{t,t}) = 1$$

(ii) $g(.)$ é uma função crescente e monótona de $S_{t,t}$.

(iii) $g(.)$ tem satisfazer o modelo NORMAL.

Logo, por comparação com $h(t)$, escolheremos:

$$g(S_{t,t}) = \left[1 + C \left(S_{t,t}^{-2} - S_M^{-2} \right) \right]^{-1}$$

onde C é uma constante real.

Observe-se que $g(S_{t,t})$ atende às condições (i) e (ii) como é facilmente verificável. Para verificar a condição (iii) basta fazer $S_M \to \infty$ e $C = 2\Pi eW$.

4.3.2.3- Conceito de Modelo Steady State

Dos resultados acima, um conceito um pouco diferente de modelo STEADY STATE pode ser enunciado, como se segue:

"Se a distribuição do parâmetro é diferenciável e unimodal, um modelo Steady-State é aquele cuja moda permanece constante na transição $(\theta_t/D_t) \to (\theta_{t+1}/D_t)$" (SOUZA[10], capítulo 4).

Desta forma, enquanto outros modelos mantém a média constante, no BEF é a moda que se preserva.

4.3.3 - Formulação do Modelo Geral

4.3.3.1- Informação:

No instante t-1, as seguintes informações estão disponíveis

(i) $p(y_{t-1}/\theta_{t-1})$, conhecida em sua forma funcional para todo t=1,2,...

(ii) $p_{t-1,t-1} = p(\theta_{t-1}/D_{t-1})$ e sua entropia $S_{t-1,t-1}$, dada por (V.35)

(iii) $g(S_{i,i}) = \left[1+C(S_{i,i}^{-2} - S_M^{-2})\right]^{-1}$, i=0,1,2..

4.3.3.2-Atualização do Parâmetro:

(i) Distribuição à priori:

$p(\theta_t/D_{t-1}) = p_{,t,t-1}$

$$p_{t,t-1} \propto p_{t-1,t-1}^{\,g(S_{t-1,t-1})} \qquad \text{(V.55)}$$

(ii) Distribuição posterior:

$$p(\theta_t / D_t) = p_{t,t}$$

$$p_{t,t} \propto p_{t,t-1} \cdot p(Y_t / \theta_t) \qquad (V.56)$$

4.3.3.3- Predição

(i) Distribuição do parâmetro:

$$p(\theta_{t+j} / D_t) = p_{t+j,t}$$

$$p_{t+j,t} \propto p_{t+j-1,t}^{\;g(S_{t+j-1,t})} \quad ; \; j=1,2 \ldots \qquad (V.57)$$

(ii) Distribuição da observação

$$p(y_{t+j} / D_t)$$

$$p(Y_{t+j} / D_t) = \int_{\Omega} p(Y_{t+j}, \theta_{t+j} / D_t) . d\,\theta_{t+j} \qquad (V.58)$$

onde

$$p(y_{t+j} \, , \, \theta_{t+j} / D_t) = p(Y_{t+j} / \theta_{t+j}) . p_{t+j,t} \qquad (V.59)$$

4.4 - Modelo BEF - GEOMÉTRICO - POISSON-GAMMA

Como foi visto anteriormente, com q_1 conhecido só nos resta estimar λ. Segue agora uma aplicação do BEF no qual a observação tem distribuição GEOMÉTRICO-POISSON e o parâmetro tem distribuição GAMMA.

4.4.1 - Distribuição à Priori: (λ)

$\lambda \sim$ Gamma (α, β)

$$p(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \qquad \text{(V.60)}$$

4.4.2 - Distribuição Posterior de λ $(\lambda/X=x)$

Dado $X=x$, a demanda observada, a distribuição posterior é obtida pela aplicação do TEOREMA DE BAYES (seção 1.2). Se denotarmos a p.d.f de $(\lambda/X=x)$ por $p(\lambda/X=x)$ temos

$$p(\lambda/X=x) \propto p(\lambda) \, . \, p(X=x/\lambda,\rho) \qquad \text{(V.61)}$$

onde $p(X=x/\lambda,\rho)$ é uma distribuição GEOMÉTRICO-POISSON, descrita em 2.1.3.

Se $X=0$

$$p(\lambda/X=0) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-(\beta+1)\lambda} \qquad \text{(V.62)}$$

isto é, $(\lambda/X=0) \sim$ GAMMA $(\alpha, \beta+1)$

Se $x \geq 1$

$$p(\lambda/X=x) \propto e^{-(\beta+1)\lambda} \left[\lambda^{\alpha} C_{x1} + \lambda^{\alpha+1} C_{x2} + \ldots + \lambda^{\alpha+x-1} C_{xx}\right] \quad (V.63)$$

Denotando por $p(\alpha+i,\beta+1)$ a p.d.f de variáveis aleatórias com distribuição GAMMA $(\alpha+i,\beta+1)$ podemos reescrever a equação (V.45).

$$p(\lambda/X=x) = \sum_{i=1}^{x} C^*_{xi}\ p(\alpha+i,\ \beta+1) \quad (V.64)$$

onde

$$C^*_{xi} = \frac{C_{xi}}{\sum_{i=1}^{x} C_{xi}} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{x} C^*_{xi} = 1 \quad (V.65)$$

isto é, $(\lambda/X=x \geq 1)$ é uma combinação linear convexa de x variáveis aleatórias com distribuição GAMMA de igual parâmetro de escala $(\beta+1)$ e com parâmetros de forma $(\alpha+1)$; $i=1,2,\ldots x$

4.4.3 - Simplificação da Posterior

Feeney e Sherbroke, quando da formulação do OBJECTIVE BAYES APPROACH (Feeney e Sherbroke[14]) apresentado na seção (3.2), descartaram o uso da distribuição GAMMA como distribuição à priori para λ pois a distribuição posterior a ela associada, quando o processo é GEOMÉTRICO-POISSON, não é uma GAMMA. De fato, se (V.46) fosse utilizada no teorema de Bayes como distribuição à priori do período imediatamente posterior, a distribuição posterior então obtida seria uma combinação de x 1.x GAMMAS, onde x_1 é a demanda no período em questão.

Para superarmos esta dificuldade e tornarmos o problema analiticamente tratável, lançamos mão do "PRINCÍPIO DE MÁXIMA ENTROPIA DE JAYNES" (JAYNES[31]) que diz:

"A distribuição posterior simplificada para $(\lambda/X=x)$ é a distribuição de máxima entropia cujas estatísticas suficientes são iguais às correspondentes estatísticas suficientes da mistura".

A distribuição GAMMA tem como estatísticas suficientes, a média e a média geométrica. Podemos, portanto, escrever a equação da mistura na forma abaixo:

$$(\lambda/X=x\geq 1) = \sum_{i=1}^{x} C^{*}_{xi} \quad p_i(m_i, gm_i) \qquad (V.66)$$

onde

$$m = E\left\{ G\left[\alpha+i, \beta+1\right] \right\} = \frac{\alpha+i}{\beta+1} \qquad (V.67)$$

gm_i = média geométrica de G $\left[\alpha+i,\ \beta+1\right]$ =

$$= \Psi\left[\alpha+i\right] - \ell n \left[\beta+1\right] \qquad (V.68)$$

sendo $\Psi(.)$ = FUNÇÃO DIAGRAMA, $\Psi(u) = \dfrac{d\ \ell n\ \Gamma(u)}{du}$ (V.69)

$\Gamma(.)$ = FUNÇÃO GAMMA,

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt \ , \ u>o \qquad (V.70)$$

e C^*_{xi} é dado por (V.47).

Assim, a GAMMA inicial à qual se refere JAYNES será a distribuição GAMMA (m,gm) onde

$$m = E\left\{ \lambda/x \right\} = \sum_{i=1}^{x} C^*_{xi}\ mi \qquad (V.71)$$

$$gm = E\left\{ \ell n(\lambda/X) \right\} = \sum_{i=1}^{x} C^*_{xi}\ gmi \qquad (V.72)$$

4.4.4 - Cálculo da Função g $(S_{t,t})$

Na seção 4.3.2.1, vimos que a distribuição à priori do parâmetro em t+1, $p_{t+1,t}$, é calculada a partir da distribuição posterior do parâmetro em t segundo a expressão:

$$p_{t+1,t} \propto p_{t,t}^{\ g(S_{t,t})} \qquad (V.73)$$

onde

$$g(S_{t,t}) = \left[1+C(S_{t,t}^{-2}-S_M^{-2}) \right]^{-1} \qquad (V.74)$$

onde C é uma constante real, $S_{t,t}$ é a medida positiva de incerteza de $p_{t,t}$ descrita pela equação (V.35) e S_M é o valor máximo de $S_{t,t}$.

Logo, se $p_{t,t}$ é uma GAMMA (α,β),

$$p_{t,t} = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} . e^{-\beta\lambda} \tag{V.75}$$

e a entropia de Shannon é dada por

$$H_{\lambda} = \ell n\, \Gamma(\alpha) + \alpha\left[1+\Psi(\alpha-1)\right] + \Psi(\alpha) - \ell n\beta \tag{V.76}$$

onde $\Gamma(.)$ e $\Psi(.)$ são dados, respectivamente por (V.69) e (V.70).

Como, por definição,

$$S_{\lambda} = \exp\{H_{\lambda}\} \tag{V.77}$$

verifica-se facilmente que

$$S_M = \lim_{\substack{\alpha\to 1\\ \beta\to 0}} S_{\lambda} = +\infty \tag{V.78}$$

Logo, por (V.74) e (V.78)

$$g(S_{t,t}) = \left[1+C(S_{t,t})^{-1}\right] \tag{V.79}$$

onde C necessita ser estimado a partir dos dados.

Uma variação da idéia de verossimilhança agregada de um modelo bayesiano de AKAIKE[22] nos fornece um critério para a escolha de C. Seja $\hat{C}$ esta escolha, então,

$$\hat{C} = \max_{C \in \mathbb{R}^+} L(c) \quad \text{onde} \tag{V.80}$$

$$L(c) = \prod_{i=1}^{t} r(Y_i/c) \tag{V.81}$$

$$r(Y_i/c) = \int_{\Omega} p(Y_i/\theta_i)q(\theta_i/c)\, d\theta_i \quad , i=1,2,..t \tag{V.82}$$

sendo $q(\theta i/c)$ a distribuição à priori $p_{t+1,t}$ obtida com um dado valor de c.

4.4.5 - Formulação Matemática do Modelo GEOMÉTRICO-POISSON-GAMMA

4.4.5.1-Notação

- X_t : número de demandas observadas (observação do sistema)
- λ_t : média de chegadas aleatórias (parâmetros do sistema)
- $\underset{\sim}{X}^{t-1} = (x_1,x_2,...x_{t-1})$ - posterior no instante t-1 para o parâmetro, com p.d.f $p_{t-1,t-1}$ conhecida.

  $p_{t-1,t-1}$ = GAMMA $(\alpha_{t-1},\beta_{t-1})$,

  $\alpha_{t>1}, \beta_{t-1} > 0$
- $(\lambda_t/\underset{\sim}{X}^{t-1})$ - priori em t para o parâmetro, com p.d.f $p_{t,t+1}$ desconhecida.

- $g\,(S_{t-1,t-1}) = \left[1-c(S_{t-1,t-1})^{-2}\right]^{-1}$, $C \in \mathbb{R}^{+}$

- $S_{t-1,t-1} = \exp\{\,H_{t-1,t-1}\,\}$

- $H_{t-1,t-1}$: Entropia de Shannon de $(\lambda_{t-1}/\underset{\sim}{x}^{t-1})$

$$H_{t-1,t-1} = \ln\Gamma(\alpha_{t-1}) + \alpha_{t-1}\left[1-\Psi(\alpha_{t-1})\right] - \ln(\beta_{t-1})$$

4.4.5.2-Modelo

Equação de observação: $(X_t/\lambda_t,\rho) \sim GP(\lambda_t,\rho)$ (V.83)

Equação do sistema: $p_{t,t-1} \propto |p_{t-1,t-1}|^{g(S_{t-1,t-1})}$ (V.84)

4.4.5.3-Atualização dos Parâmetros

(i) Distribuição à priori do parâmetro no tempo t: $(\lambda_t/\underset{\sim}{x}^{t-1})$

$$(\lambda_t/\underset{\sim}{x}^{t-1}) \sim \text{GAMMA}\,(\alpha_t{}^{*},\beta_t{}^{*}) \quad \text{(V.85)}$$

onde, por (V.73):

$$\alpha_t^{*} = g(S_{t-1,t-1})\,.\,(\alpha_{t-1}-1)+1 \quad \text{(V.86)}$$

$$\beta_t^{*} = g(S_{t-1,t-1})\,\beta_{t-1} \quad \text{(V.87)}$$

(ii) Distribuição posterior do parâmetro em t: $(\lambda_t/\underset{\sim}{x}^{t})$

Obtida pela aplicação do teorema de Bayes conforme apresentado na seção 4.4.2, isto é,

Se $x_t \geq 1$

$$(\lambda_t/\underset{\sim}{x}^t) \sim \text{GAMMA } (\alpha_t,\beta_t) \qquad \text{(V.88)}$$

onde α_t e β_t são obtidos a partir das estatísticas suficientes da mistura como vimos na seção 4.4.3.

Se $x_t = 0$

$$(\lambda/\underset{\sim}{x}^t) \sim \text{GAMMA } (\alpha_t,\beta_t)$$

$$\alpha_t = \alpha_t^* \text{ , } \beta_t = \beta_t^*+1$$

onde α_t^* e β_t^* são dados por (V.86) e (V.87).

4.4.5.4-Distribuição da Predição da Demanda um período à frente

Por definição,

$$p(x_{t+1}/\underset{\sim}{x}^t) = \int_{\mathbb{R}^+} p(x_{t+1}, \lambda_{t+1}/\underset{\sim}{x}^t, \rho) \, d\lambda_{t+1} \qquad \text{(V.89)}$$

onde

$$p(x_{t+1}, \lambda_{t+1}/\underset{\sim}{x}^t, \rho) = p(x_{t+1}/\lambda_{t+1}) \cdot p(\lambda_{t+1}/\underset{\sim}{x}^t) \qquad \text{(V.90)}$$

sendo

$$p(x_{t+1}/\lambda_{t+1}) = e^{-\lambda_{t+1}} \sum_{j=1}^{x_{t+1}} \lambda_{t+1}^{j} \; C_{x_{t+1}j} \tag{V.91}$$

$$p(\lambda_{t+1}/\underset{\sim}{x}^{t}) \propto \lambda_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \; e^{-\beta_{t+1}\lambda_{t+1}} \tag{V.92}$$

Resolvendo a integral (V.89)

$$p(x_{t+1}/\underset{\sim}{x}^{t}) \propto \sum_{j=1}^{x_{t+1}} C_{x_{t+1}j} \cdot \frac{\Gamma(\alpha^*_{t+1} + j)}{(\beta^*_{t+1}+1)^{\alpha^*_{t+1}+1}} \; , \; x_{t+1} \geq 1 \tag{V.93}$$

ou

$$p(x_{t+1}/\underset{\sim}{x}^{t}) = \beta^{*\,\alpha^*_{t+1}}_{t+1} \Big/ (\beta^*_{t+1}+1)^{\alpha^*_{t+1}} \; ; \; X_{t+1} = 0 \tag{V.94}$$

VI. MEDIDAS DE PERFORMANCE DE FORNECIMENTO

VI. MEDIDAS DE PERFORMANCE DE FORNECIMENTO

No capítulo IV verificamos que a expressão final do problema de otimização dos custos variáveis do estoque, fica perfeitamente determinada pela avaliação de ΔE e ΔB dados pelas equações (IV.46) e (IV.47) para modelos de revisão contínua e (IV.64) e (IV.65) para modelos de revisão periódica constituindo-se excessões os MODELOS BINÁRIOS (seções IV.2.1.3 e seção IV.2.2.3) para os quais a decisão depende apenas do valor do parâmetro λ que representa a taxa de ocorrência das demandas no processo GEOMÉTRICO-POISSON.

Como já comentamos anteriormente, nem sempre é fácil —— ou até mesmo possível —— avaliar os parâmetros Π, $\hat{\Pi}$, I e C da função de custo. Dadas estas dificuldades, uma tendência marcante na área de controle de estoques têm sido fornecer, ao invés do valor de s que minimiza a função de custo, alguns índices representativos da performance da política de estoques adotada.

Estes índices, na verdade, são medidas essencialmente semelhantes àquelas utilizadas no capítulo IV (E, B e D) com a diferença que têm, às vezes, uma interpretação física que fala mais de perto à sensibilidade daqueles envolvidos na gerência do estoque.

Neste capítulo, apresentamos o cálculo dos índices propostos por Feeney e Sherbroke para modelos de revisão contínua sob demanda GEOMÉTRICO-POISSON (Feeney Sherbroke[13]) e uma extensão destes mesmos cálculos para modelos de revisão periódica por nós desenvolvidos.

1. MODELOS DE REVISÃO CONTÍNUA

O teorema de Palm para teoria das filas aplicado ao problema de estoques quando a demanda é unitária e distribuída segundo um processo de POISSON é generalizado para demandas não-unitárias e distribuídas segundo um processo GEOMÉTRICO-POISSON nos fornecendo uma ferramenta para analisarmos o caso em que o tempo de entrega é também uma variável aleatória.

Seja $X(t)$ o número de unidades encomendadas ao fornecedor e que ainda não foram entregues ao estoque as quais chamaremos de "unidades em atendimento" já que este enfoque se presta muito bem a estoques de peças reparáveis. Nosso objetivo será calcular $X(t)$ medido em um instante aleatório t. Como a análise é desenvolvida apenas para estoques com formação de fila, toda a demanda será eventualmente atendida e, portanto, $0 \leq X(t) < \infty$.

Neste ponto, é importante reforçar que, como o nível do estoque é constante e igual a s (pois a cada demanda corresponde um pedido de mesmo tamanho), se existem x unidades em atendimento, temos:

(i) se $x \leq s$, $s-x$ é o estoque em mãos;

(ii) se $x > s$, $|s-x|$ é o número de unidades na fila e o estoque em mãos é zero.

A figura abaixo ilustra o que foi dito.

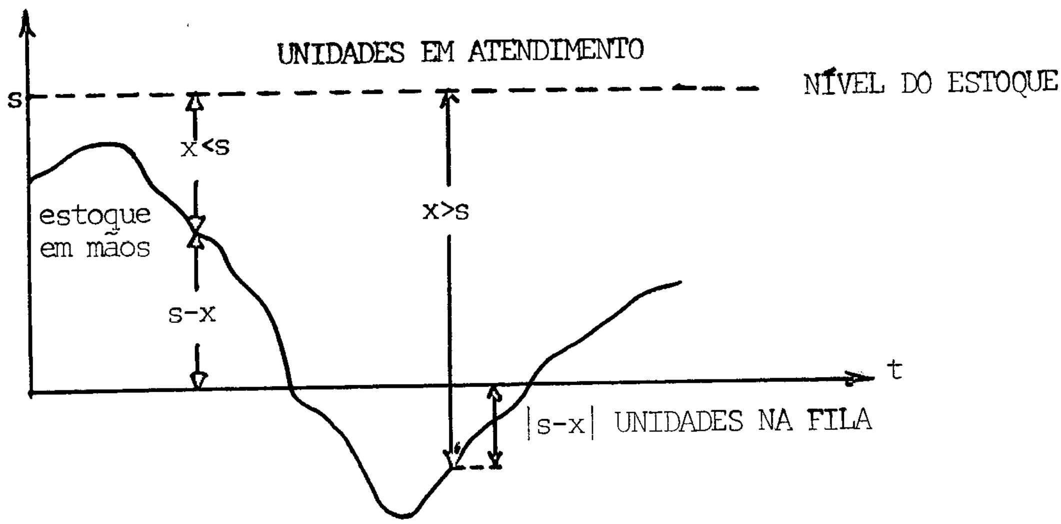


FIGURA VI.1

1.1 - Teorema de Palm

TEOREMA 1: Seja s o estoque de referência de um ítem para o qual a demanda é POISSON com taxa λ e tempo de entrega com uma distribuição arbitrária $\Psi(t)$ com média τ. As probabilidades a longo termo de x unidades em atendimento tem distribuição POISSON com média $\lambda\tau$:

$$h(x) = \left[\begin{array}{l}\text{Probabilidade de} \\ \text{x unidades em} \\ \text{atendimento}\end{array}\right] = \frac{(\lambda\tau)^x \; e^{-\lambda\tau}}{x!} \;, \quad 0 \leq x \leq \infty, \; x\varepsilon I \qquad \text{(VI.1)}$$

PROVA:

Antes de provar o teorema, observemos a seguinte propriedade dos processos de POISSON:

"Dado que foram observados n ocorrências POISSONIANAS num intervalo t, a probabilidade de uma delas ter ocorrido entre t_i e t_i+dt_i é dada por $\frac{dt_i}{t}$, independentemente de n" [Feller[4]].

Seja $S(t-t_i)$ a probabilidade de um pedido emitido em t_i ser entregue até t, $t > t_i$. Logo,

$$S(t-t_i) = \int_o^{t-t_i} \Psi(\xi)\, d\xi \qquad \text{(VI.2)}$$

onde $\Psi(.)$ é a função de densidade de probabilidade do tempo de entrega.

Se pelo menos uma demanda foi observada entre 0 e t, a probabilidade que o pedido correspondente seja entregue em t é dado por:

$$\frac{S(t-t_i)\, dt_i}{t} \qquad \text{(VI.3)}$$

Segue-se que a probabilidade de um pedido em particular ser entregue até o instante t é:

$$G = \frac{1}{t} \int_o^{t} S(t-t_i) dt_i = \qquad \text{(VI.4)}$$

Se foram observadas n demandas entre 0 e t e existem x unidades em atendimento então, n-x unidades já foram entregues. A probabilidade disto ocorrer é dada pela distribuição binomial:

$$p(\text{n-x unidades entregues}) = \binom{n}{x} G^{n-x} (1-G)^x \qquad \text{(VI.5)}$$

onde G é dado por (VI.4).

Logo, h(x) é dado pela probabilidade de n demandas entre 0 e t e (n-x) unidades entregues, isto é,

$$h(x) = \sum_{n=x}^{\infty} p(n,\lambda t) \binom{n}{x} G^{n-x} (1-G)^x =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x (1-G)^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-x} G^{n-x}}{(n-x)!} \qquad \text{(VI.6)}$$

como $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} = e^u$, temos

$$h(x) = \frac{(\lambda t)^x (i-G) e^{-\lambda t(1-G)}}{x!} = p(x,\lambda t(1-G)) \qquad \text{(VI.7)}$$

Fazendo o cálculo a longo termo,

$$L = \lim_{t\to\infty} \lambda t(1-G) = -\lambda \int_0^t \left[1-S(t-t_i)\right] dt_i + \lambda t$$

$$= \lambda \lim_{t\to\infty} \left\{ -\int_o^t \left[1-S(t-t_i) \right] dt_i + t \right\} \qquad \text{(VI.8)}$$

Por (VI.2) temos que:

$$\frac{d\ S(t-t_i)}{dt_i} = -\ \Psi(t_i) \qquad \text{(VI.9)}$$

Logo, integrando (VI.8) por partes temos,

$$L = \lambda \lim_{t\to\infty} \int_o^t t_i\ \Psi(t_i) dt_i = \lambda\tau \qquad \text{(VI.10)}$$

Portanto, por (VI.7) e (VI.10).

$$h(x) = p(x,\lambda\tau) \qquad \text{(VI.11)}$$

C.Q.D.

1.2 - Teorema de Palm Generalizado

TEOREMA 2: Seja s o estoque de referência para um item cuja demanda tem distribuição GEOMÉTRICO-POISSON com taxa λ e o tempo de entrega com uma distribuição arbitrária, $\Psi(t)$ com média τ. Suponha que os pedidos são entregues integralmente, isto é, o tempo de entrega é o mesmo para as unidades em atendimento referentes ao mesmo pedido. As probabilidades a longo termo de x unidades em atendimento são dadas pela distribuição GEOMÉTRICO - POISSON com taxa $\lambda\tau$, isto é:

$$p(x, \lambda\tau) \tag{VI.12}$$

PROVA:

Forneceremos uma prova simplificada, válida apenas para estoques com formação de fila.

Num processo POISSON-COMPOSTO as chegadas (ocorrência de demandas) ocorrem segundo um processo POISSON. Assim, o teorema de Palm nos fornece a probabilidade de y pedidos pendentes em um dado instante, lembrando que a cada demanda corresponde a emissão de um pedido.

A probabilidade de x unidades em atendimento é dada pela probabilidade de y pedidos pendentes e que estes y pedidos totalizem x unidades, $x \geq y$.

Como assuminos que as unidades referentes a um mesmo pedido são entregues simultaneamente e como o processo de atendimento é independente do tamanho do pedido, a probabilidade de y pedidos totalizarem x unidades é dada, como em (IV.3) por $f^{y^*}(x)$, isto é,

$$h(x) = p(x, \lambda\tau) \tag{VI.13}$$

C.Q.D.

1.3 - Medidas de Performance de Fornecimento

Tendo em mãos a expressão da distribuição de probabilidades de X(t), o número de unidades em atendimento, estamos aptos a calcular os índices aos quais nos referimos.

Todos os índices dependem apenas do nível de referência, s, dos parâmetros da distribuição GEOMÉTRICO-POISSON e da média do tempo de entrega τ. São eles:

R(s): A probabilidade de um item observado num instante qualquer não possuir unidades na fila. Chamaremos TAXA DE GARANTIA.

F(s): O valor esperado do número de demandas por unidade de tempo que podem ser atendidas prontamente, com o estoque em mãos. Chamada NÚMERO DE ATENDIMENTOS IMEDIATOS.

S(s): Valor esperado do número de unidades em atendimento de rotina (isto é, o número de unidades em atendimento não destinadas à suprir as unidades na fila). Chamaremos <u>NÚMERO DE UNIDADES EM SERVIÇO</u>.

1.3.1 - R(s) - TAXA DE GARANTIA

É a medida mais simples. Distingue duas situações - haver ou não unidades na fila. Definida desta forma, R(s) não leva em conta o número de unidades na fila considerando apenas a sua existência ou não.

Pelo teorema 2, a distribuição de probabilidades de x unidades em atendimento é dada por:

$$h(x) = p(x,\lambda\tau) \qquad \text{(VI.14)}$$

R(s) é a probabilidade de s ou menos unidades em atendimento. Logo,

$$R(s) = \sum_{x=0}^{s} p(x,\lambda\tau) \qquad \text{(VI.15)}$$

ou

$$R(s) = R(s-1) + p(s,\lambda\tau) \qquad \text{(VI.16)}$$

1.3.2 - F(s) - ATENDIMENTOS IMEDIATOS

Mede, indiretamente, o valor esperado do número de unidades que entraram na fila que já foi calculado na seção IV.2.1.1. É fácil ver que como toda demanda que não é imediatamente atendida é colocada na fila, a soma de F(s) com o valor esperado do número de unidades que entraram na fila num dado período (E(s) dado por IV.38) é a demanda média neste mesmo período. Poderíamos calcular F(s) a partir dos resultados da seção IV.2.1.1, através da expressão:

$$F(s) = m - E(s) \tag{VI.17}$$

No entanto, preferimos calculá-la diretamente obtendo uma expressão mais conveniente. O valor esperado do número de atendimentos imediatos pode ser calculado da seguinte forma.

Primeiramente sabe-se que como a chegada de usuários é POISSON, a probabilidade de um usuário chegar em num intervalo de tempo Δt pequeno é dada por $\lambda\Delta t$. Para cada usuário, o valor esperado do número de atendimentos imediatos, ω, é dado por:

$$E(\omega) = \sum_{\omega=0}^{s} \omega p(\omega) \tag{VI.18}$$

onde $p(\omega)$ é a probabilidade de ocorrerem exatamente ω atendimentos imediatos o que é a probabilidade de um usuário efetuar uma demanda por ω unidades e o número de unidades em atendimento ser $s-\omega$ ou menos, <u>ou</u> de existirem exatamente $s-\omega$ unidades em atendimento e o usuário efetuar uma demanda por mais de ω unidades.

Logo,

$$p(\omega) = f_\omega \sum_{x=0}^{s-\omega} h(x) + h(s-\omega) \sum_{i=1}^{\infty} f_{\omega+i} \qquad \text{(VI.19)}$$

Portanto.

$$F(s) = \lambda \sum_{\omega=1}^{s} \omega p(\omega) =$$

$$= \lambda \sum_{\omega=1}^{s} \omega \left[f_\omega \sum_{x=0}^{s-\omega} h(x) + h(s-\omega) \sum_{i=1}^{\infty} f_{\omega+i} \right] \qquad \text{(VI.20)}$$

Após uma série de manipulações, demasiadamente longas, obtemos a expressão.

$$F(s) = \lambda \sum_{k=0}^{s-1} (1-f_1,f_2-\ldots-f_k)\ R(s-k-1) \qquad \text{(VI.21)}$$

onde $f_k = (1-\rho)\ \rho^{k-1}$ (VI.22)

É fácil ver também que, por (VI.21)e(VI.22)

$$F(s) = \lambda\ R(s-1) + \rho\ F(s-1) \qquad \text{(VI.23)}$$

1.3.3 - S(s) - UNIDADES EM SERVIÇO

Mede, indiretamente, o número e o tempo de permanência das unidades na fila. Segundo a definição, S(s) é a diferença entre o valor esperado do número de unidades em atendimento e o valor esperado do número de unidades na fila. Na seção (IV.2.1), definimos B(s) como o número de unidades.ano na fila que se iguala numericamente ao valor esperado do tamanho da fila se observada em um instante qualquer do tempo. Logo,

$$\begin{aligned} S(s) &= E(s) - B(s) \\ &= m\,\tau - B(s) \\ &= \sum_{x=1}^{s} x\, p(x,\lambda\tau) + s \sum_{x=s+1}^{\infty} p(x,\lambda\tau) \end{aligned} \qquad \text{(VI.24)}$$

De (VI.24) é fácil ver que:

$$S(s) = S(s-1) - R(s-1) + 1 \qquad \text{(VI.25)}$$

2. REVISÃO PERIÓDICA

Nesta seção, apresentamos as expressões de R(s) e F(s), definidos na seção 1.3 quando aplicados a estoques de revisão periódica. A medida "UNIDADES EM SERVIÇO" não tem sentido em estoques de revisão periódica já que os pedidos são emitidos apenas a intervalos regulares de tempo T. Observemos também que nesta seção o tempo de entrega τ é fixo e conhecido.

2.1 - R(s) TAXA DE GARANTIA

Consideremos que houve uma revisão no instante t. Repetindo a argumentação utilizada na seção IV.2.2.1 seja x o saldo do estoque num instante qualquer entre $t+\tau$ e $t+T+\tau$. A razão de considerar este intervalo, como já foi dito, é que todos os pedidos emitidos antes de t, chegaram ao estoque até $t+\tau$ e nenhum pedido emitido depois de t (isto é, em t+T) chegou ao estoque antes de $t+T+\tau$.

Logo, se $\Psi(x,t+\xi)$ é a distribuição de probabilidades do saldo do estoque x medido num instante $t+\xi$, $\tau \leq \xi \leq T+\tau$, temos:

$$\Psi(x,t+\xi) = p(x,\lambda\xi) \qquad \text{(VI.26)}$$

A distribuição marginal de x, medido num instante qualquer é:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} p(x,\lambda\xi)d\xi \qquad \text{(VI.27)}$$

R(s) é a probabilidade de $x \geq 0$, logo:

$$R(s) = \sum_{x=0}^{s} \frac{\Phi(x)}{T} \qquad \text{(VI.28)}$$

onde

$$\Phi(x) = \int_{\tau}^{T+\tau} p(x,\lambda\xi)d\xi \text{ dado em (IV.59).}$$

2.2. - F(s) - ATENDIMENTOS IMEDIATOS

Conforme comentado na seção (1.3.3) F(s) é dado pela diferença entre a demanda média e o número de unidades que entraram na fila. Portanto,

$$F(s) = \theta - E(s,T) \tag{VI.29}$$

onde E(s,T) é o valor esperado do número de unidades que entraram na fila, dado em (IV.56)

Consequentemente,

$$F(s) = m - \frac{1}{T} \sum_{x=s}^{\infty} (x-s) \left[p(x,\lambda(\tau+T)) - p(x,\lambda\tau) \right]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{x=0}^{s} (x-s) \left[p(x,\lambda(\tau+T)) - p(x,\lambda\tau) \right] \tag{VI.30}$$

VII - TESTES E CONCLUSÕES

VII. TESTES E CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos de utilização do BEF para a estimação da média de um processo GEOMÉTRICO-POISSON, de determinação do nível ótimo de estoques e do cálculo dos índices de performance.

Para efeito de teste foram geradas séries sintéticas de 250 observações geométrico-poissonianas para vários valores de ρ e λ. Em nossos testes, no entanto, nos concentramos nas séries com razão da variância para a média igual a 2 (isto é, $\rho=1/3$) e com Θ ◘ (0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5). Estas séries pretendem cobrir o que consideramos a região de interesse para a aplicação do nosso estudo.

1. O MÉTODO BEF APLICADO A ESTIMAÇÃO DE Θ

O método BEF para sua utilização pressupõe o conhecimento da constante C comentada na seção V.4.3.2.2. Normalmente, este valor seria avaliado a partir de dados anteriores ou de sistemas análogos utilizando o critério da maximização da verossimilhança agregada citado na seção V.4.4.4. No nosso caso em especial, como a média do processo é constante o valor ótimo de C é

$$C=0$$

De fato, como

$$g_{t,t} = \frac{S^2_{t,t}}{S^2_{t,t}+C}$$

o aumento de incerteza sobre o valor do parâmetro no tempo que decorre entre um instante e outro será tanto maior quanto maior for C já que, por (V.73):

$$p_{t+1,t} \propto p_{t,t}{}^{g_{t,t}}$$

Por outro lado, C=0 significa que nenhuma incerteza será incorporada a $p_{t,t}$ entre t e t+1. No nosso caso, não há nenhuma razão para incorporarmos incerteza ao processo já que estamos estimando um parâmetro que sabemos constante e sobre o qual temos mais certeza a cada novo valor observado. Devemos deixar claro, no entanto, que se o parâmetro apresentasse dependência serial, C deveria ser, certamente,não-nulo.

A não ser quando dito o contrário, todos os testes foram feitos utilizando uma GAMMA com parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 1.666$ que tem média igual a 1.2 e variância igual a 0.72 para distribuição à priori de Θ.

1.1 - Comportamento Assintótico

A tabela VII.1, mostra os valores obtidos para o erro relativo[1] médio computado a partir das últimas 50 observações de uma série de 250 utilizando os valores da média e da moda da distribuição posterior como estimativas pontuais da média do processo. Nesta mesma tabela podemos observar como o método reage a uma estimativa errônea para q_1 (razão da variância para a média) já que pressupor o seu conhecimento talvez seja uma idéia um tanto otimista. Para melhor visualização, estes mesmos dados foram plotados (GRÁFICO VII.1) de forma a caracterizar as

---

1. O erro relativo médio é dado pela média dos desvios dividida pelo valor do parâmetro.

regiões em que há tendência a sub-estimar ou a sobre-estimar.

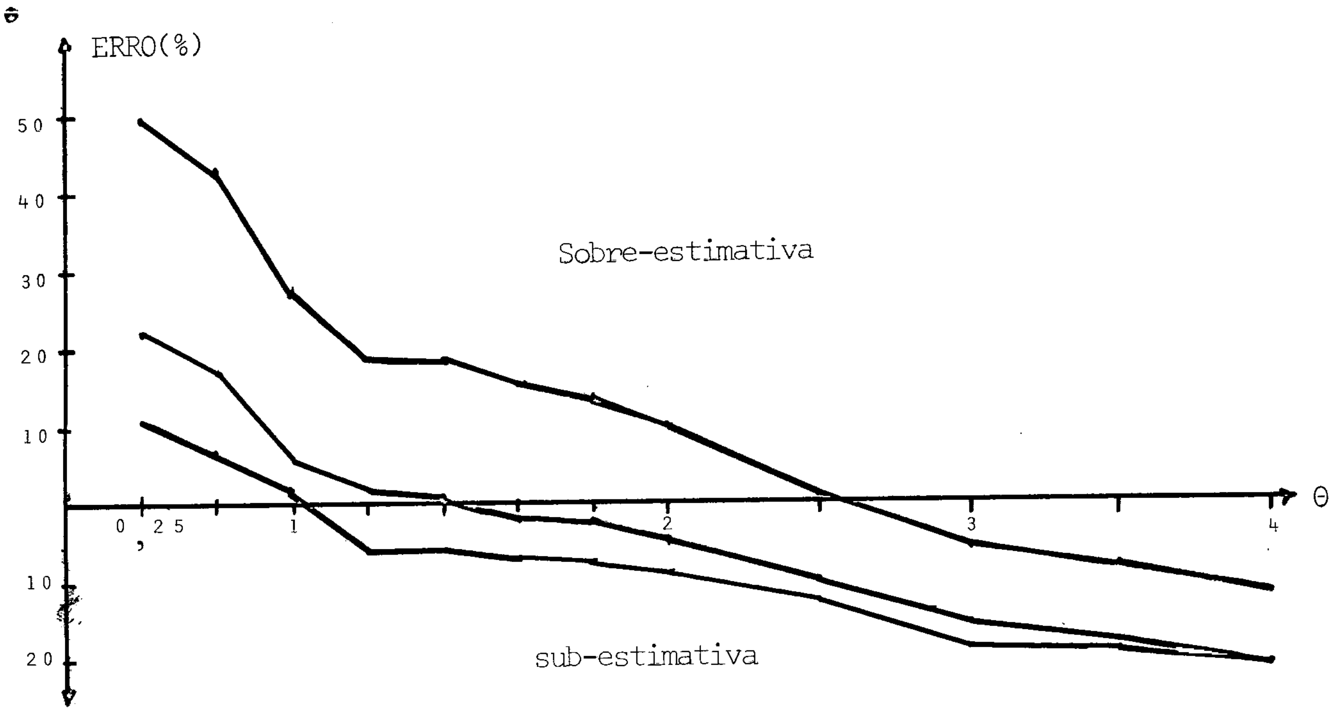


Gráfico VII.1

COMENTÁRIOS

Pouca diferença houve, em termos de erro relativo, entre a utilização da média ou da moda da distribuição posterior como estimativa pontual da média do processo. Esta diferença se situou num nível máximo de 3% e mostrou ser tanto menor quanto maior for Θ. Como veremos mais adiante, esta diferença se mostrou mais marcante e quase sempre desfavorável à moda quando o número de observações é pequeno.

O modelo apresentou uma clara tendência a sobre-estimar os valores pequenos de Θ o que fez com que o modelo funcionasse melhor com q_1=1.5 para Θ=0.25, 0.5 e 0.75 como podemos verificar no gráfico VII.1. No mesmo gráfico, notamos que o modelo é mais sensível a variações em q, quando Θ é pequeno (<1).

ERROS RELATIVOS
250 OBSERVACOES

	R=1.5		R=2.0		R=3.0	
MEDIA	MED	MOD	MED	MOD	MED	MOD
0.25	.108	.083	.223	.192	.494	.453
0.50	.073	.066	.172	.158	.434	.414
0.75	.021	.027	.063	.054	.274	.262
1.00	.061	.066	.015	.016	.119	.179
1.25	.063	.057	.011	.007	.188	.180
1.50	.073	.077	.018	.022	.151	.144
1.75	.074	.078	.023	.027	.137	.131
2.00	.096	.099	.050	.054	.100	.094
2.50	.136	.139	.109	.112	.012	.009
3.00	.191	.193	.171	.174	.064	.068
3.50	.188	.190	.177	.179	.083	.086
4.00	.213	.215	.210	.212	.129	.132
4.50	.249	.250	.251	.253	.182	.184
5.00	.267	.258	.264	.266	.201	.203

R - RAZAO DA VARIANCIA PARA A MEDIA

TABELA VII.1

1.2 - Comportamento com Poucas Observações

A tabela VII.2, análoga à tabela VII.1, nos mostra o valor do erro medido a partir das últimas 10 observações de uma série de 20. Este teste se aproxima mais de uma aplicação real. As 10 primeiras observações foram utilizadas para estimar a distribuição à priori e representariam alguma informação anterior sobre o sistema. Na mesma tabela apresentamos os resultados obtidos pela estatística clássica (Item's Issue Rate).

Conforme já havíamos comentado, a média da distribuição posterior se mostrou mais adequada que a moda para estimar Θ quando dispomos de poucas observações. Para valores de Θ acima de 1 houve uma tendência a sub-estimar, o que explica um melhor desempenho do modelo quando $q_1=3$. Além disso, confirmando o observado na seção anterior, o modelo parece mais sensível a variações de q_1 quando Θ é pequeno.

Na tabela VII.3, apresentamos duas das simulações da tabela VII.2 como exemplo de como o BEF reage quando $\Theta=0.5$ e $\Theta=2.0$ para $q_1=(1.5,\ 2.0,\ 3.0)$.

1.3 - Comparação do BEF com o "Objective Bayes Approach"

Não ficou claro em PORTILLA[17] como e com quantos dados foi obtida a distribuição à priori em seus testes. Assim, na falta de outra informação utilizamos apenas o ponto inicial utilizado nas outras simulações utilizando, ao contrário dos outros exemplos, a moda da distribuição GAMMA como estimativa para a média.

Como podemos observar na tabela VII.4, o BEF foi levemente superior apresentando um erro relativo médio da ordem de 46% contra um erro de 48% do Bayes Objective Approach. Evidentemente este é apenas um exemplo, para inferirmos algo sobre o comportamento dos dois métodos necessitaríamos naturalmente de testes com um grande número de séries.

ERROS RELATIVOS

10 OBSERVACOES

	R=1.5		R=2.0		R=3.0		
MEDIA	MED	MOD	MED	MOD	MED	MOD	ISSUE RATE
0.25	.415	.707	.298	.649	.145	.532	1.000
0.50	.386	.531	.198	.473	.156	.342	.527
0.75	.200	.308	.173	.250	.186	.183	.536
1.00	.159	.235	.115	.198	.086	.097	.838
1.25	.219	.281	.179	.248	.108	.148	.612
1.50	.292	.344	.246	.310	.133	.200	.896
1.75	.296	.341	.251	.306	.119	.192	.650
2.00	.293	.334	.256	.307	.142	.207	.405
2.50	.276	.311	.248	.291	.140	.197	.423
3.00	.286	.315	.268	.304	.174	.222	.716
3.50	.266	.292	.250	.282	.160	.203	.191
4.00	.303	.326	.294	.323	.217	.255	.125
4.50	.322	.343	.316	.342	.243	.278	.164
5.00	.361	.381	.362	.387	.302	.335	.205

R - RAZAO DA VARIANCIA PARA MEDIA

TABELA VII.2

------- MEDIA = .5

PERIODO	OBS	BEF	ISSUE RATE
11	2	.389	2.000
12	0	.360	1.000
13	0	.335	0.667
14	0	.314	0.500
15	0	.295	0.400
16	0	.278	0.333
17	1	.344	0.428
18	2	.441	0.625
19	0	.419	0.556
20	1	.471	0.600
ERRO RELATIVO		.298	0.527

------- MEDIA = 2.0

PERIODO	OBS	BEF	ISSUE RATE
11	1	1.522	1.000
12	0	1.394	0.500
13	1	1.402	0.661
14	0	1.301	0.500
15	1	1.314	0.600
16	7	1.528	1.667
17	2	1.573	1.714
18	4	1.682	2.000
19	5	1.810	2.333
20	2	1.835	2.300
ERRO RELATIVO		0.256	0.405

TABELA VII.3

EXEMPLO COMPARATIVO

PERIODO	OBS	BEF(MODA)	OBA
1	0	.428	.742
2	0	.333	.501
3	0	.272	.390
4	0	.231	.324
5	0	.200	.279
6	3	.493	.504
7	2	.688	.692
8	0	.613	.606
9	1	.700	.705
10	1	.771	.784
ERRO RELATIVO		.464	.487

TABELA VII.4

2. ÍNDICES DE PERFORMANCE E CÁLCULO DO NÍVEL ÓTIMO DE ESTOQUE

Foram criados dois programas (PROGRAMA 3 e PROGRAMA 4) que dados os valores dos parâmetros λ e ρ da distribuição GEOMÉTRICO-POISSON, efetuam o cálculo dos índices de performance comentados no capítulo VI e, quando requerido, calcular o valor ótimo do nível de referência s do estoque segundos os modelos das seções IV.2.1.1 e IV.2.2.1 para estoques de REVISÃO CONTÍNUA e REVISÃO PERIÓDICA respectivamente.

Quanto aos modelos de otimização acima citados, deve ser ressaltado que não foi provado na literatura que a função de custo seja unimodal. Em nossos testes no entanto não encontramos nenhuma evidência de que isto seja falso. Os índices e os custos calculados para as duas classes de estoques (REVISÃO CONTÍNUA e REVISÃO PERIÓDICA), como era previsto, se igualam quando o período de revisão se aproxima de zero.

Cabe lembrar que o cálculo do valor ótimo do nível de referência s para os modelos com "pedido especial" (seções IV.2.1.2 e IV.2.2.2) também podem ser calculados bastando para isto fazer $\hat{\Pi}=0$.

Exemplos de execução de ambos os programas se encontram nos apêndices C e D respectivamente.

3. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A falta de um caso real para análise impossibilitou uma avaliação crítica do comportamento dos modelos de estoque. Devemos ressaltar no entanto, que a sua formulação vem acrescentar a literatura existente na medida em que constituem uma generalização para demandas GEOMÉTRICO-POISSON de conhecidos modelos para demandas POISSON. O mesmo podemos dizer dos índices de performance que, a exemplo do que fizeram Feeney e Sheerbroke[13] para modelos de REVISÃO CONTÍNUA, foram calculados para estoques com REVISÃO PERIÓDICA.

Quanto ao método aplicado à estimação da média de um processo GEOMÉTRICO-POISSON, mostrou-se bastante robusto na medida em que não apresentou os problemas comentados em PORTILLA[17] sobre o método Objective Bayes Approach, tais como distribuição posterior bimodal ou degenerada.

De uma forma geral, o modelo subestima valores da média maiores que a unidade e apresentou uma maior sensibilidade à precisão do valor de q_1 quando da estimação de pequenos valores da média.

Concluimos este trabalho com algumas sugestões de forma a acrescentar os resultados aqui obtidos.

- Utilizar a equação (V.16) que relaciona Var(x) e E(x) na sua forma completa, isto é, com $q_2 \neq 0$ de forma que à cada valor do parâmetro λ (ou Θ) corresponda um valor do parâmetro ρ segundo a equação abaixo.

$$\rho = \frac{q_1-1}{q_1+1} + \frac{q_2}{q_2+1}\ \lambda$$

e não supor ρ conhecido (consequência de $q_2=0$).

- Estimar os parâmetros λ e ρ separadamente sendo que para isto é necessário o conhecimento do valor de cada demanda e não apenas da demanda total ao final do período como neste trabalho.

- Testar os modelos para situações em que a média θ varie com o tempo apresentando dependência serial.

APÊNDICE A

DESCRIÇÃO DO PROGRAMA 1

APÊNDICE A

DESCRIÇÃO DO PROGRAMA 1

Gera uma série sintética de observações segundo um processo GEOMÉTRICO-POISSON. O programa foi basicamente desenvolvido por PORTILLA[17] ao qual incluimos apenas modificações circunstanciais tais como o armazenamento das séries geradas em arquivo em disco, entrada de dados, etc.

A.1 - PROCESSO DE GERAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

As observações são geradas baseadas na densidade do tempo entre demandas

$$g(t) = \rho\ \delta(t) + (1-\rho)\ \lambda\ e^{-\lambda t}$$

onde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

isto é, após a ocorrência de cada demanda existe uma probabilidade ρ de outra observação simultânea e uma probabilidade $(1-\rho)$ que um processo POISSON de taxa λ se inicie.

Assim, o programa primeiramente extrai uma observação X de uma distribuição exponencial de média $1/\lambda$, dado por

$$X = (1/\lambda)\ \ell n\ (\xi)$$

Uma vez determinado o instante da próxima observação POISSONIANA, o número de observações simultâneas é dado por um mais o número de vezes consecutivas em que

$$\xi < \rho$$

onde, novamente, $\xi \sim U(0,1)$.

Assim que observamos um ξ tal que $\xi \geq \rho$, um processo POISSON se inicia e retomamos o processo.

A.2 - SUMÁRIO DA SIMULAÇÃO

O programa imprime um sumário com as principais estatísticas da simulação. As mensagens são auto-explicativas e fornecem uma visão geral das propriedades dos dados gerados.

A.3 - REPRESENTAÇÃO PICTÓRIA DA DEMANDA E ESTATÍSTICAS COMPLETAS

O programa pode também apresentar uma representação pictória da demanda.

A rotina de plotagens não diferencia demandas por 7 unidades ou mais nem quando duas demandas ocorrem no mesmo décimo de período.

Uma outra opção do programa é imprimir todas as informações geradas ao longo do processo quais sejam: o tempo entre duas demandas (distribuição exponencial), o número de unidades por demanda (distribuição geométrica), o instante em que se deu a demanda e o número de demandas correspondente a cada período.

A.4 - ENTRADA DE DADOS

NREG .... Número do registro do arquivo de séries no qual deve ser gravada a série gerada

IKEY .... Indica se o arquivo está sendo usado do pela primeira vez(YKEY=0) ou não (YKEY=1)

TETA .... Média do processo GEOMÉTRICO-POISSON

RATIO .... vazão da variância para a média

NUMBER .... Número de períodos a serem gerados

SEED .... Número de amostras de $\xi \sim \upsilon(0,1)$ a serem desprezadas antes que a simulação tenha início.

OPTION .... OPÇÃO DE IMPRESSÃO

1 Sumário, Gráfico e Estatísticas

2 Sumário e Gráfico

3 Sumário e Estatísticas

4 Sumário

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          MAIN              DATE = 82091          22/56/50            PAGE 0001

0001              REAL*8 ISEED,X1
0002              DEFINE FILE 10(2012,80,L,I10)
0003              DIMENSION DEMAND(9000,4),LINE(15,110),NO(10)
0004              REAL MEAN,LAMBDA,NUMBER
0005              INTEGER ANT1,ANT2,SUFIX
0006              DO 1 I=1,2012
0007                 READ(11,2,END=3)
0008         2       FORMAT('
                *                        ')
0009                 WRITE(10'I,2)
0010         1       CONTINUE
0011         3       CONTINUE
             C
             C    ---- KEY=0 O ARQUIVO NUNCA FOI USADO ----
             C    ---- KEY=1 VAI ESCREVER NO NREG+1      ----
             C
0012      9999    READ(5,70) OPTION,ISEED,NUMBER,RATIO,TETA,KEY
0013              READ(5,75) IFIM
0014        75    FORMAT(I1)
0015        70    FORMAT(F2.0,D5.0,F4.0,2F5.3,I1)
0016              A1=0.0
0017              A2=0.0
0018              A3=0.0
0019              PERIOD=0.0
0020              DO 170 I=1,1000
0021              DO 160 J=1,4
0022              DEMAND(I,J)=0.0
0023       160    CONTINUE
0024       170    CONTINUE
0025              RHO=(RATIO-1.0)/(RATIO+1.0)
0026              LAMBDA=TETA*(1.-RHO)
0027              NREG=1
0028              IF(KEY.EQ.0) GO TO 80
0029              READ(10'1,1370) NREG
0030      1370    FORMAT(I5)
0031              GO TO 90
0032        80    WRITE(10'1,1370)NREG
0033        90    CONTINUE
             C
             C         THE RANDOM NUMBER GENERATOR IS SET UP BY SEED
             C
             C
             C         THE GENERATION OF THE GEOMETRIC POISSON PROCESS
             C
0034              DO 100 I=1,10000
0035              X1=GGUBFS(ISEED)
0036              X=SNGL(X1)
0037              YYY=(-1.0/LAMBDA)*ALOG(X)
0038              PERIOD=PERIOD+YYY
0039              IF(PERIOD.GT.NUMBER) GO TO 110
0040              N=I
0041              DEMAND(I,1)=YYY
0042              DEMAND(I,3)=PERIOD
0043              COUNT=1.0
0044       130    X1=GGUBFS(ISEED)
0045              X=SNGL(X1)
0046              IF(X.GE.RHO) GO TO 120
0047              COUNT=COUNT+1.0
0048              GO TO 130
0049       120    DEMAND(I,2)=COUNT
0050              INDEX=IFIX(AINT(DEMAND(I,3))+1.0)
0051              DEMAND(INDEX,4)=DEMAND(INDEX,4)+DEMAND(I,2)
0052       100    CONTINUE
             C
             C         CALCULATION OF THE STATISTICS INCLUDED IN THE SUMMARY
             C
0053       110    DO 140 J=1,N
0054              A1=A1+DEMAND(J,1)**2
0055              A2=A2+DEMAND(J,2)
0056       140    CONTINUE
0057              JIF=IFIX(NUMBER)
0058              DO 150 J=1,JIF
0059              A3=A3+DEMAND(J,4)**2
0060       150    CONTINUE
0061              MEAN=A2/NUMBER
0062              VARM=(A3-NUMBER*MEAN**2)/(NUMBER-1.0)
0063              VMRAT=VARM/MEAN
0064              ELMDA=FLOAT(N)/NUMBER
```

```
      TIME=DEMAND(N,3)/A2
      VTIME=(A1-A2*TIME**2)/(A2-1.0)
      RTIME=(1.0-RHO)/LAMBDA
      RMEAN=LAMBDA/(1.0-RHO)
      RVTME=(1.0-RHO**2)/LAMBDA**2
      ERHO=1.0-ELMDA/MEAN
      RVAR=RATIO*RMEAN
      MNUM=IFIX(LAMBDA*NUMBER)
      ETETA=ELMDA/(1.-ERHO)
      WRITE(6,1030)
 1030 FORMAT(1H1,10(/),49X,'***** SUMMARY OF THE SIMULATION *****')
      WRITE(6,1040)
 1040 FORMAT(55X,25('-'))
      WRITE(6,1050)
 1050 FORMAT(8(/),42X,'CONCEPT',29X,'EXPECTED',8X,'ESTIMATED')
      WRITE(6,1060)
 1060 FORMAT(42X,'-------',29X,'--------',8X,'---------',//)
      WRITE(6,1070)LAMBDA,ELMDA
 1070 FORMAT(30X,'LAMBDA.........................',18X,F7.4,10X,F7.4,/)
      WRITE(6,1080)RATIO,VMRAT
 1080 FORMAT(30X,'VARIANCE/MEAN RATIO...........',18X,F7.4,10X,F7.4,/)
      WRITE(6,1090) RHO,ERHO
 1090 FORMAT(30X,'RHO...........................',18X,F7.4,10X,F7.4,/)
      WRITE(6,1100)RMEAN,MEAN
 1100 FORMAT(30X,'MEAN OF DEMAND................',18X,F7.4,10X,F7.4,/)
      WRITE(6,1110)RVAR,VARM
 1110 FORMAT(30X,'VARIANCE OF DEMAND............',17X,F8.4,9X,F8.4,/)
      WRITE(6,1120)RTIME,TIME
 1120 FORMAT(30X,'MEAN OF INTER-DEMAND TIME.....',18X,F7.4,10X,F7.4,/)
      WRITE(6,1130)RVTME,VTIME
 1130 FORMAT(30X,'VARIANCE OF INTER-DEMAND TIME.',18X,F7.4,10X,F7.4,/)
      WRITE(6,1140)MNUM,N
 1140 FORMAT(30X,'NUMBER OF ORDERS..............',19X,I4,13X,I4,/)
      IF(OPTION.EQ.4) GO TO 10000
      IF(OPTION.EQ.3) GO TO 220
C
C        PLOTTING THE DATA WHEN THE OPTION IS CALLED
C
      DATA KME,KBL,KAS,KMA,KVR/'-',' ','*','+','I'/
      DATA K1,K2,K3,K4,K5,K6,K7 / '1','2','3','4','5','6','7' /
      DO 280 K=1,15
      DO 290 L=1,110
      LINE(K,L)=KBL
  290 CONTINUE
  280 CONTINUE
      LINE(1,1)=K7
      LINE(3,1)=K6
      LINE(5,1)=K5
      LINE(7,1)=K4
      LINE(9,1)=K3
      LINE(11,1)=K2
      LINE(13,1)=K1
      DO 180 L=6,104
      LINE(15,L)=KME
  180 CONTINUE
      DO 190 L=5,105,10
      LINE(15,L)=KMA
  190 CONTINUE
      DO 200 K=1,14
      LINE(K,3)=KMA
      KK=K/2
      KKA=KK*2
      IF(KKA.EQ.K) LINE(K,3)=KVR
      LINE(K,107)=LINE(K,3)
      LINE(K,109)=LINE(K,1)
  200 CONTINUE
      COMP=AINT(NUMBER/10)*10
      IF(COMP.EQ.NUMBER) LIMIT=IFIX(COMP/10)
      IF(COMP.NE.NUMBER) LIMIT=IFIX(COMP/10)+1
      LOAD=1
      ANTI=0
      DO 210 IND=1,N
      IF(IND.GT.LIMIT) GO TO 220
      DO 20 K=1,14
      DO 10 L=6,105
      LINE(K,L)=KBL
   10 CONTINUE
   20 CONTINUE
```

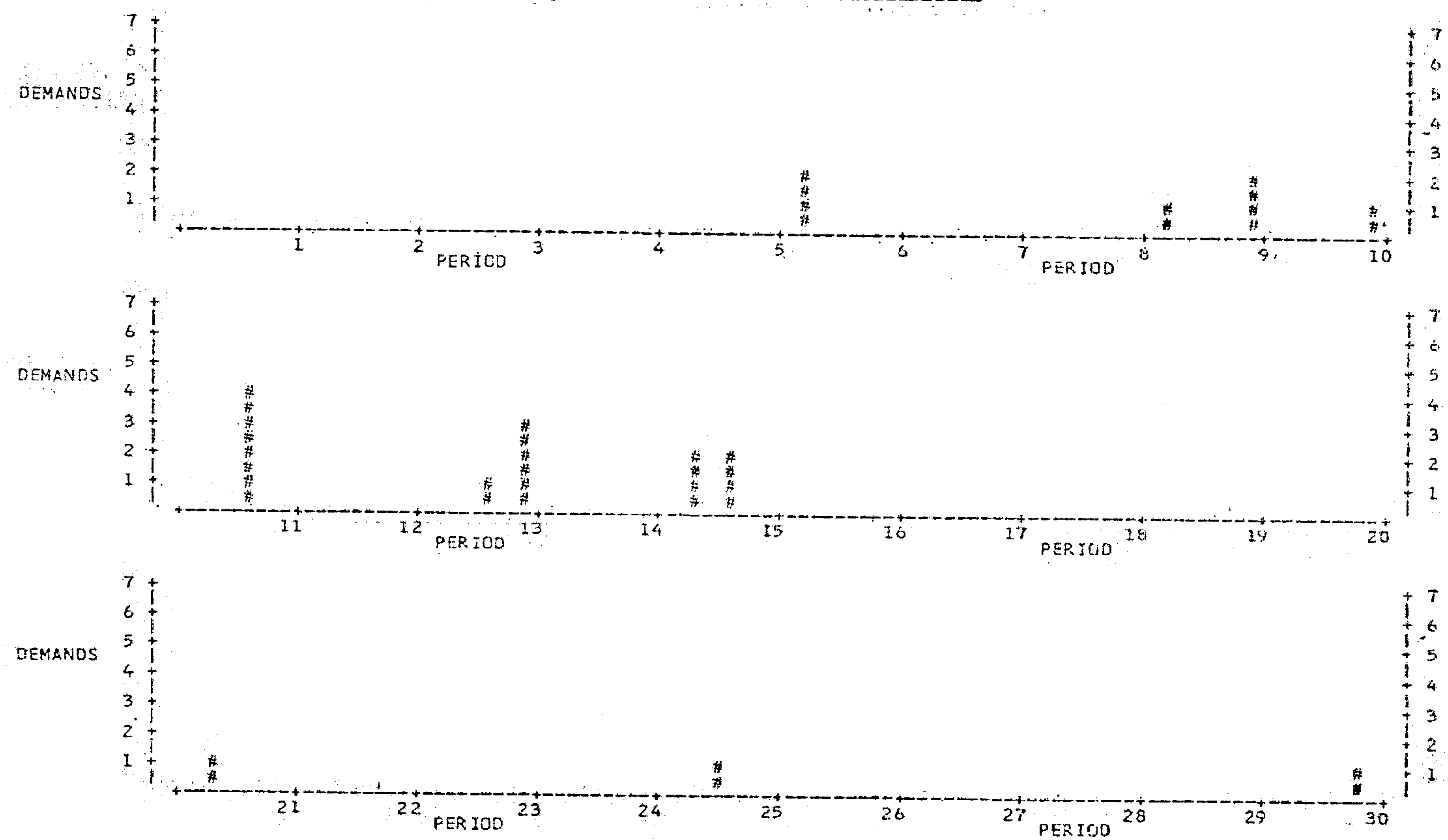
```
      ITEMS=0
      DO 30 KK=LOAD,1000
      IF(DEMAND(KK,3).EQ.0.0) GO TO 50
      IF(DEMAND(KK,3).GT.(FLOAT(IND)*10.0)) GO TO 50
      ANT2=IFIX(AINT(10.0*(DEMAND(KK,3)-AINT(DEMAND(KK,3))))
     * +10.0*(AINT(DEMAND(KK,3))-FLOAT(IND-1)*10.0))+1
      IF(ANT2.EQ.ANT1) ITEMS=ITEMS+IFIX(DEMAND(KK,2))
      IF(ANT2.NE.ANT1) ITEMS=IFIX(DEMAND(KK,2))
      IF(ITEMS.GT.7) ITEMS=7
      ANT1=ANT2
      ANT2=5+ANT2
      LA=15-2*ITEMS
      DO 40 LL=LA,14
      LINE(LL,ANT2)=KAS
   40 CONTINUE
   30 CONTINUE
   50 LOAD=KK
      ANT1=0
      JUMP=MOD(IND,3)+1
      GO TO (240,230,240),JUMP
  230 WRITE(6,1210)
 1210 FORMAT(1H1,3(/),40X,'**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF ',
     1 ' THE SIMULATION ****')
      WRITE(6,1310)
 1310 FORMAT(45X,40('-'),/)
      WRITE(6,1170)(LINE(1,L),L=1,110)
 1170 FORMAT(14X,110A1)
      GO TO 250
  240 WRITE(6,1180)(LINE(1,L),L=1,110)
 1180 FORMAT(2(/),14X,110A1)
  250 DO 260 K=2,15
      IF(K.NE.6) WRITE(6,1190)(LINE(K,L),L=1,110)
 1190 FORMAT(14X,110A1)
      IF(K.EQ.6) WRITE(6,1220)(LINE(K,L),L=1,110)
 1220 FORMAT(5X,'DEMANDS',2X,110A1)
  260 CONTINUE
      DO 270 MM=1,10
      NO(MM)=MM+(IND-1)*10
  270 CONTINUE
      WRITE(6,1200)(NO(L),L=1,10)
 1200 FORMAT(19X,10(7X,I3))
      WRITE(6,1230)
 1230 FORMAT(40X,'PERIOD',44X,'PERIOD')
  210 CONTINUE
  220 NA=MAX0(IFIX(NUMBER),N)
      IF(OPTION.EQ.2) GO TO 10000
C
C        PRINTTING WHOLE STATISTICS WHEN THE OPTION IS CALLED
C
      DO 300 I=1,NA
      IF(MOD(I-1,45).NE.0) GO TO 310
      WRITE(6,1300)
 1300 FORMAT(1H1,4(/),49X,'**** STATISTICS OF THE SIMULATION ****')
      WRITE(6,1240)
 1240 FORMAT(54X,28('-'),3(/))
      WRITE(6,1250)
 1250 FORMAT(39X,'INTER-ORDER',5X,'DEMANDS PER',5X,
     * 'CUMULATIVE',6X,'DEMANDS PER')
      WRITE(6,1260)
 1260 FORMAT(32X,'I',9X,'TIMES',11X,'ORDER',11X,
     * 'TIMES',11X,'PERIOD')
      WRITE(6,1270)
 1270 FORMAT(31X,3('-'),4(5X,11('-')),/)
  310 IF((I.LE.N).AND.(I.LE.IFIX(NUMBER))) WRITE(6,1280)
     * I,(DEMAND(I,J),J=1,4)
 1280 FORMAT(31X,I3,6X,F7.3,12X,F3.0,10X,F7.3,11X,F3.0)
      IF((I.LE.N).AND.(I.GT.IFIX(NUMBER))) WRITE(6,1320)
     * I,(DEMAND(I,J),J=1,3)
 1320 FORMAT(31X,I3,6X,F7.3,12X,F3.0,10X,F7.3,11X,'---')
      IF((I.GT.N).AND.(I.LE.IFIX(NUMBER))) WRITE(6,1290)
     * I,DEMAND(I,4)
 1290 FORMAT(31X,I3,9X,'---',13X,'---',12X,'---',13X,F3.0)
  300 CONTINUE
10000 NN=NUMBER
      WRITE(10'NREG+1,1350)NN,LAMBDA,ELMDA,TETA,ETETA,RATIO
 1350 FORMAT(I3,5E14.5)
      WRITE(10'NREG+2,1360) (DEMAND(I,4),I=1,NN)
 1360 FORMAT(20F4.0)
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0           MAIN              DATE = 82091        22/56/50              PAGE 0004
              NRGT=NN/20
              IAUX=NN-NRGT*20
              IF(IAUX.GT.0)NRGT=NRGT+1
              NREG1=NREG+NRGT+1
              WRITE(10'1,1370) NREG1
              WRITE(6,1321) NREG1
       1321   FORMAT(///,10X,'*** REGISTRO #',I4)
              IF(IFIM.EQ.0) GO TO 9999
              DO 10001 I=1,2012
              READ(10'I,2)
              WRITE(11,2)
      10001   CONTINUE
      10003   STOP
              END
```

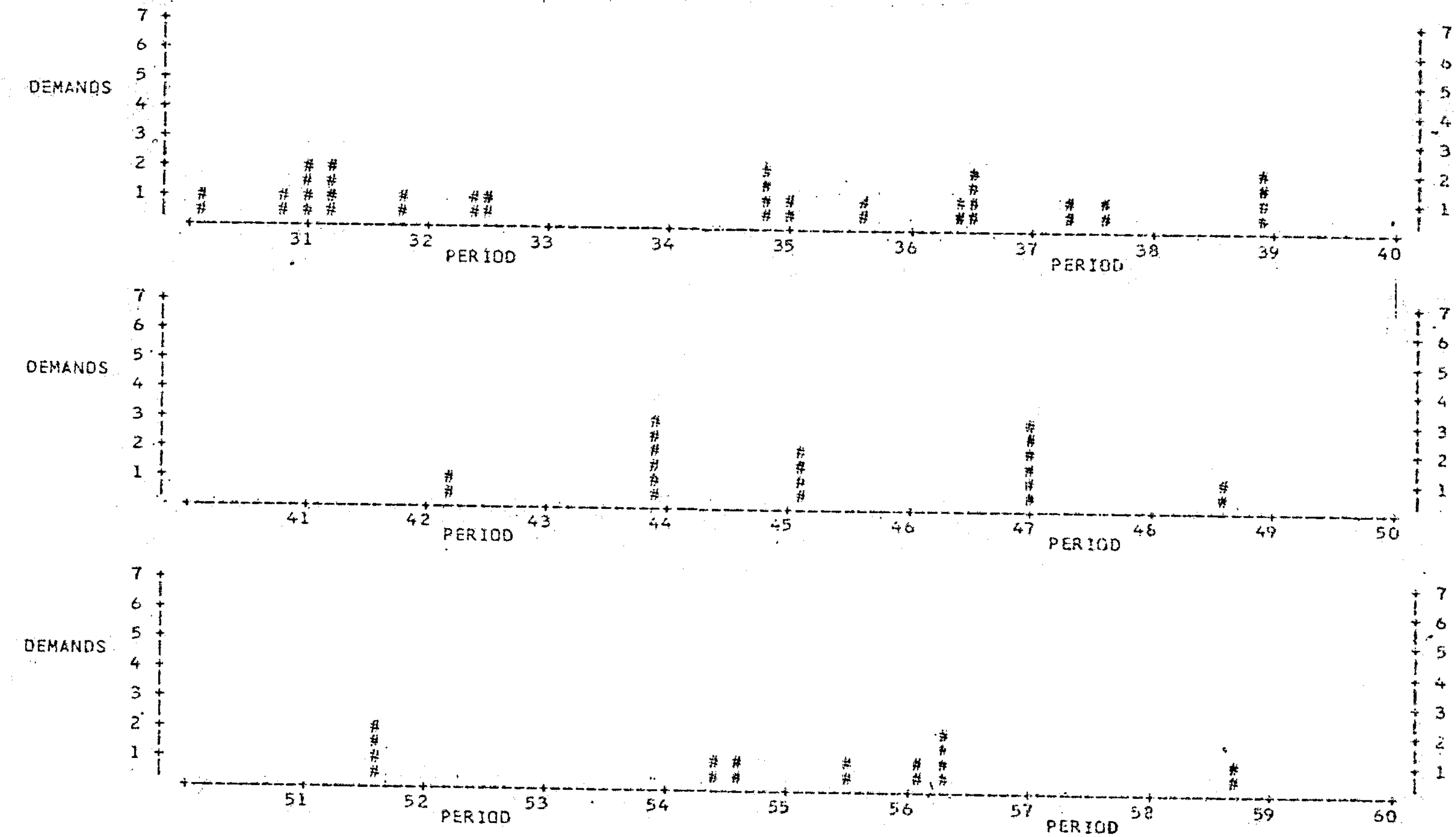
***** SUMMARY OF THE SIMULATION *****

CONCEPT	EXPECTED	ESTIMATED
LAMBDA........................	0.6667	0.7400
VARIANCE/MEAN RATIO............	2.0000	2.1097
RHO...........................	0.3333	0.3463
MEAN OF DEMAND................	1.0000	1.1320
VARIANCE OF DEMAND............	2.0000	2.3881
MEAN OF INTER-DEMAND TIME.....	1.0000	0.8627
VARIANCE OF INTER-DEMAND TIME.	2.0000	1.5990
NUMBER OF ORDERS..............	166	185

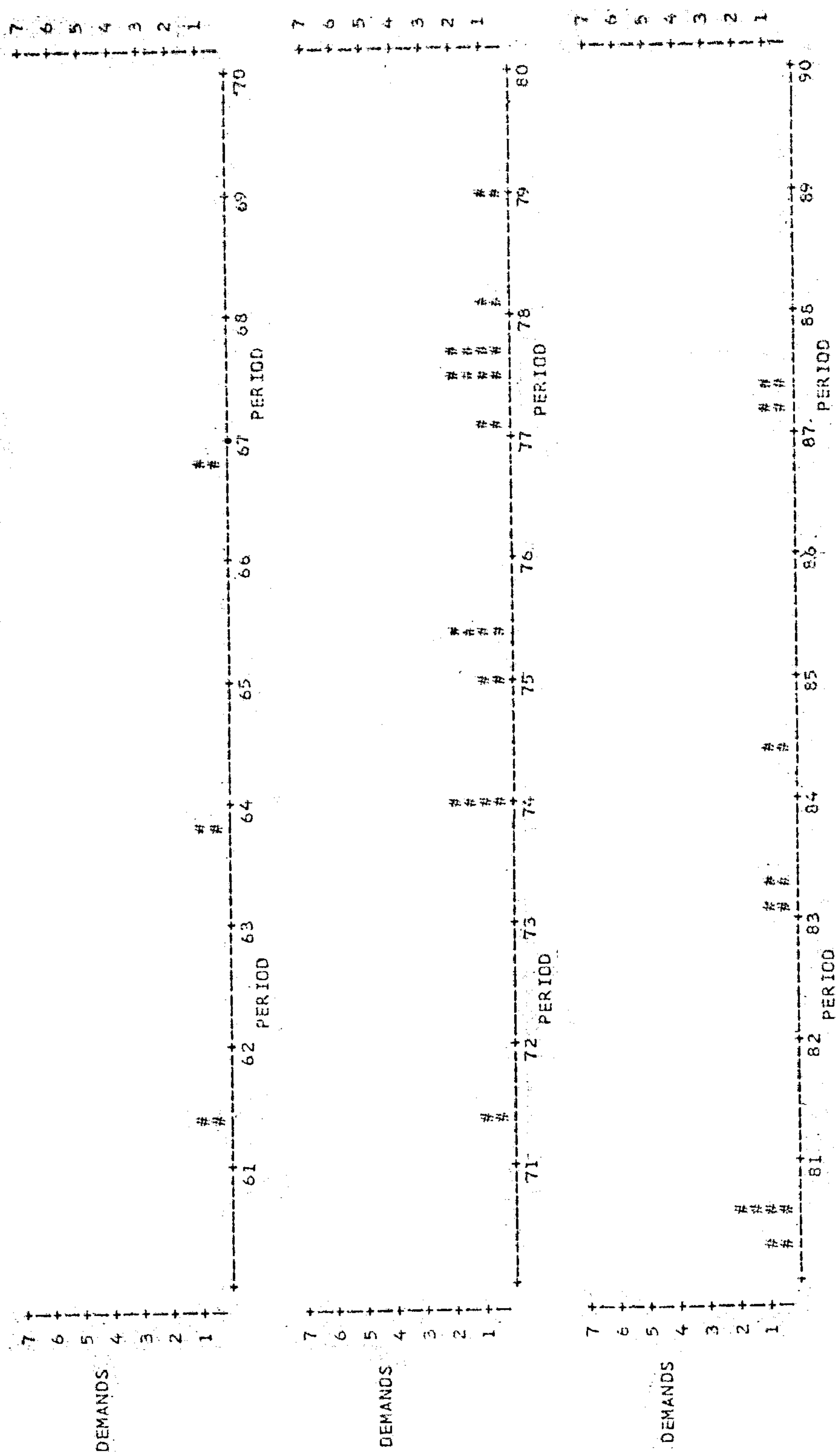
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



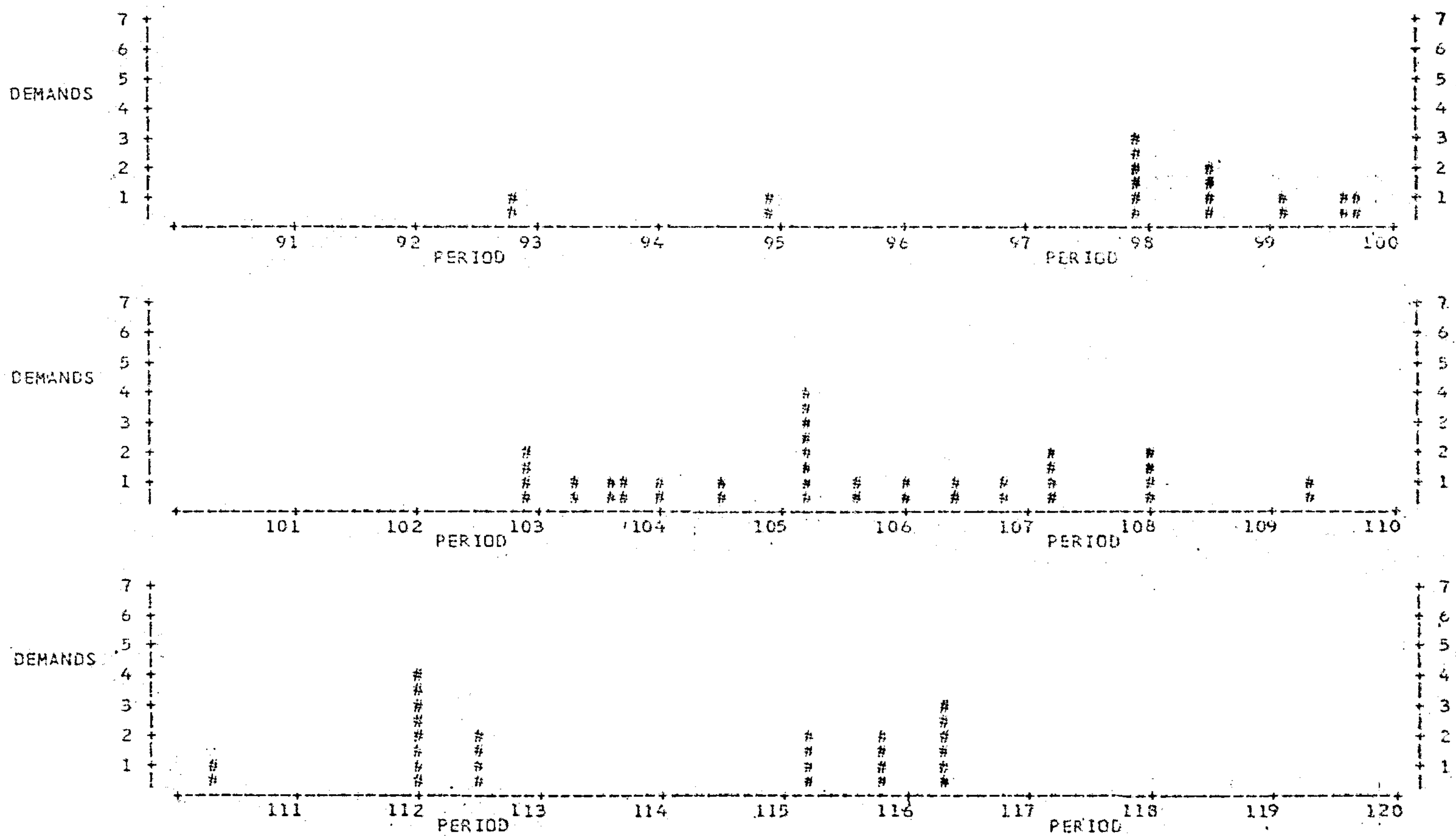
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



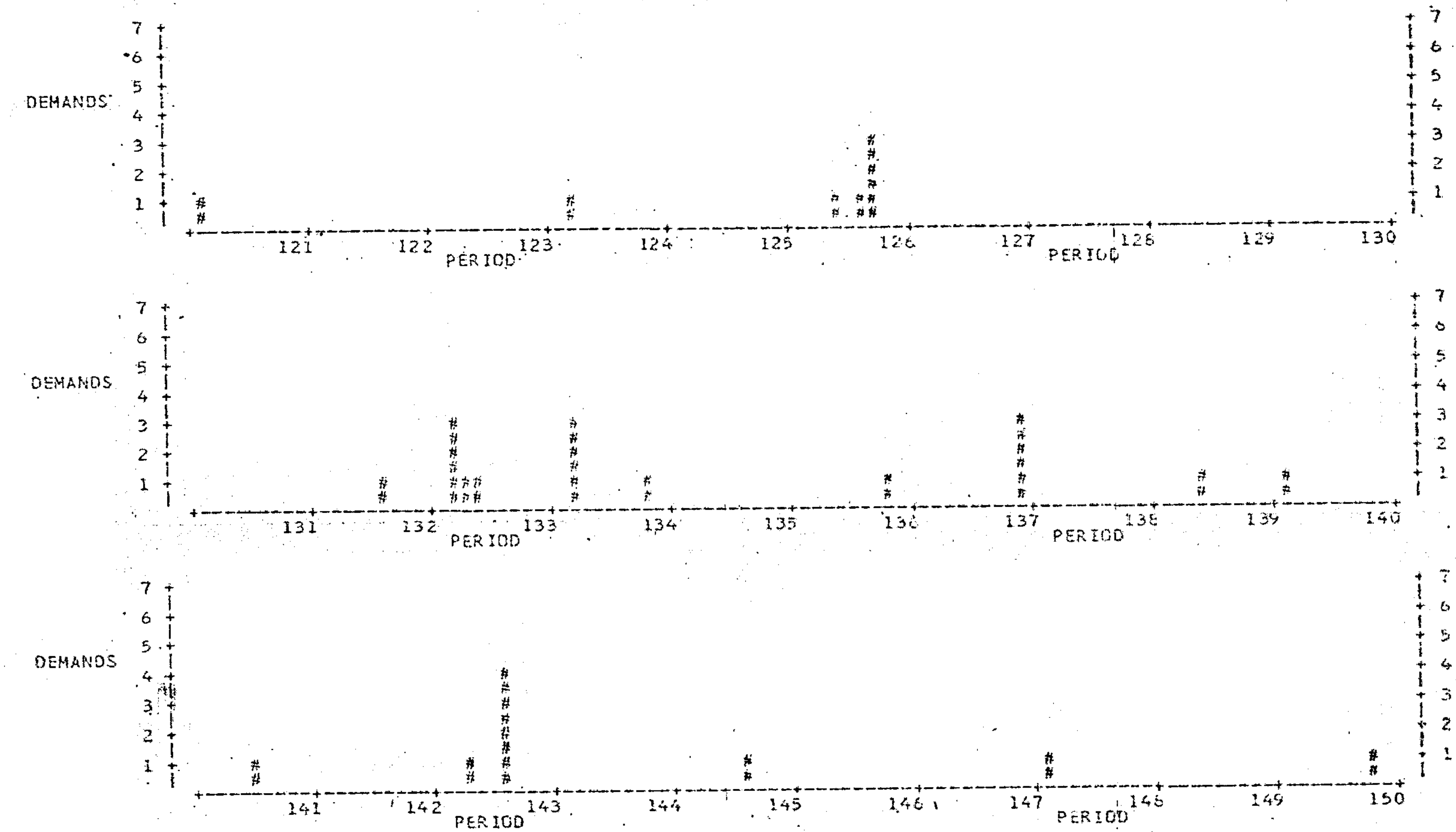
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



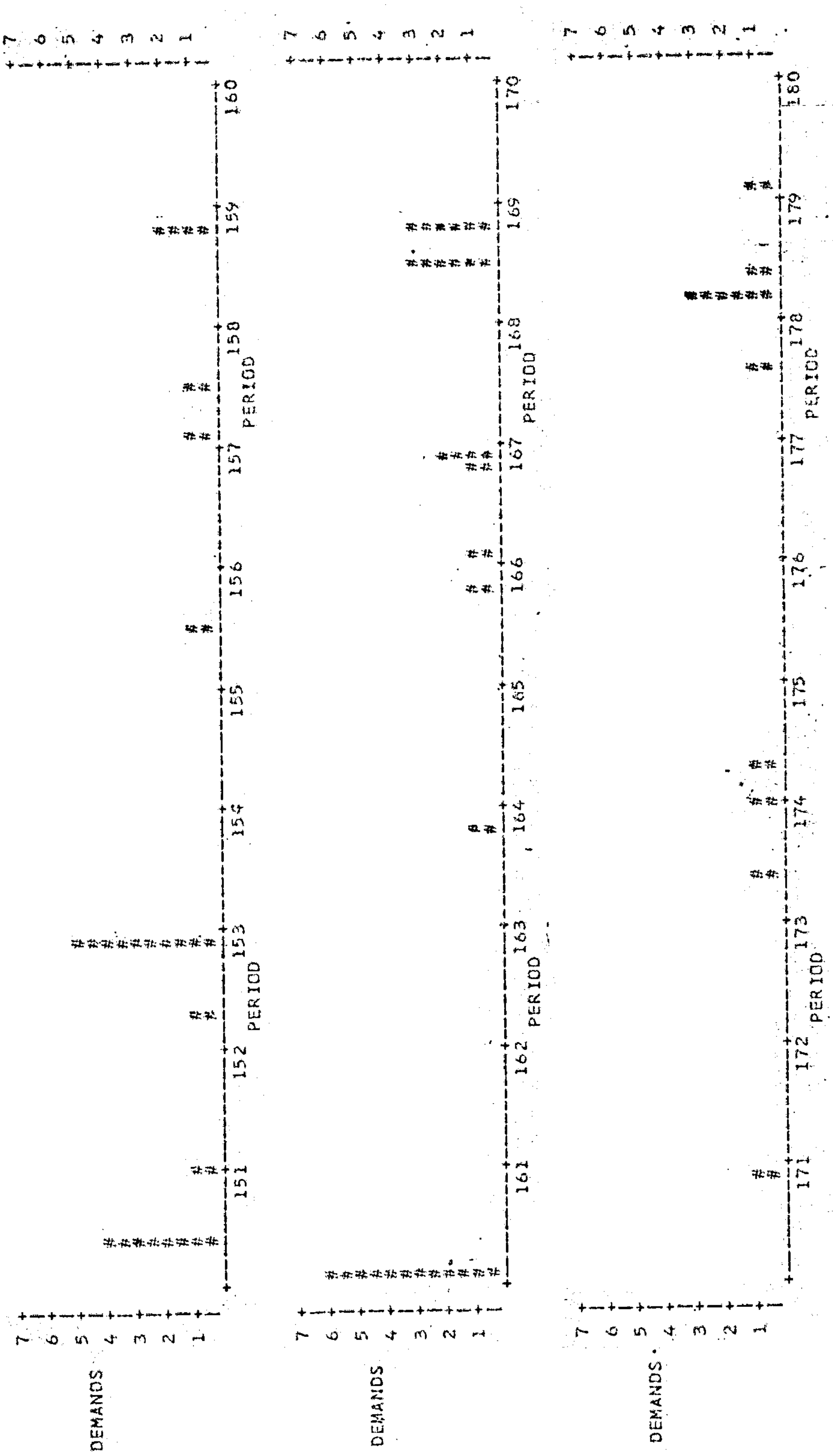
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



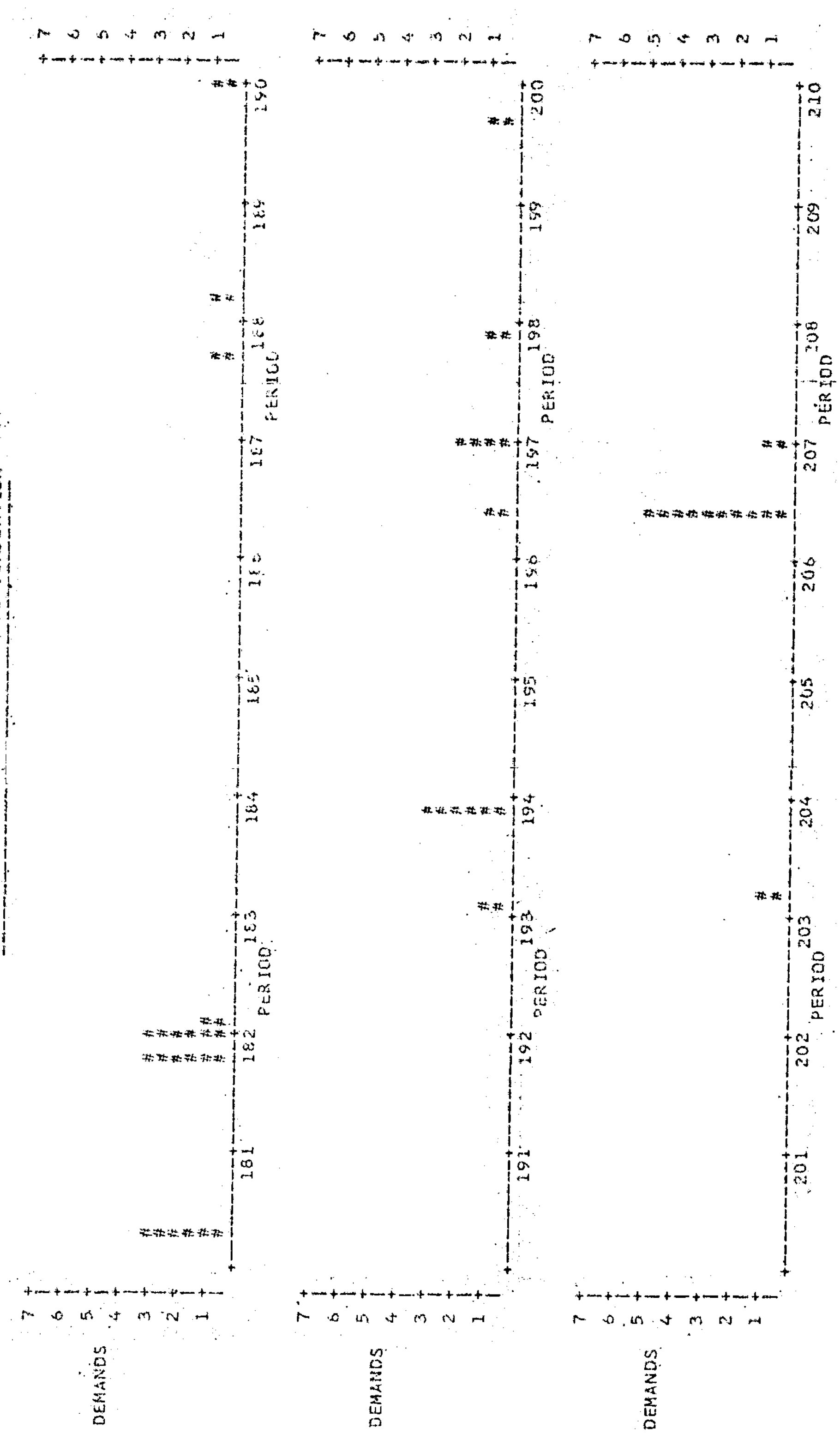
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



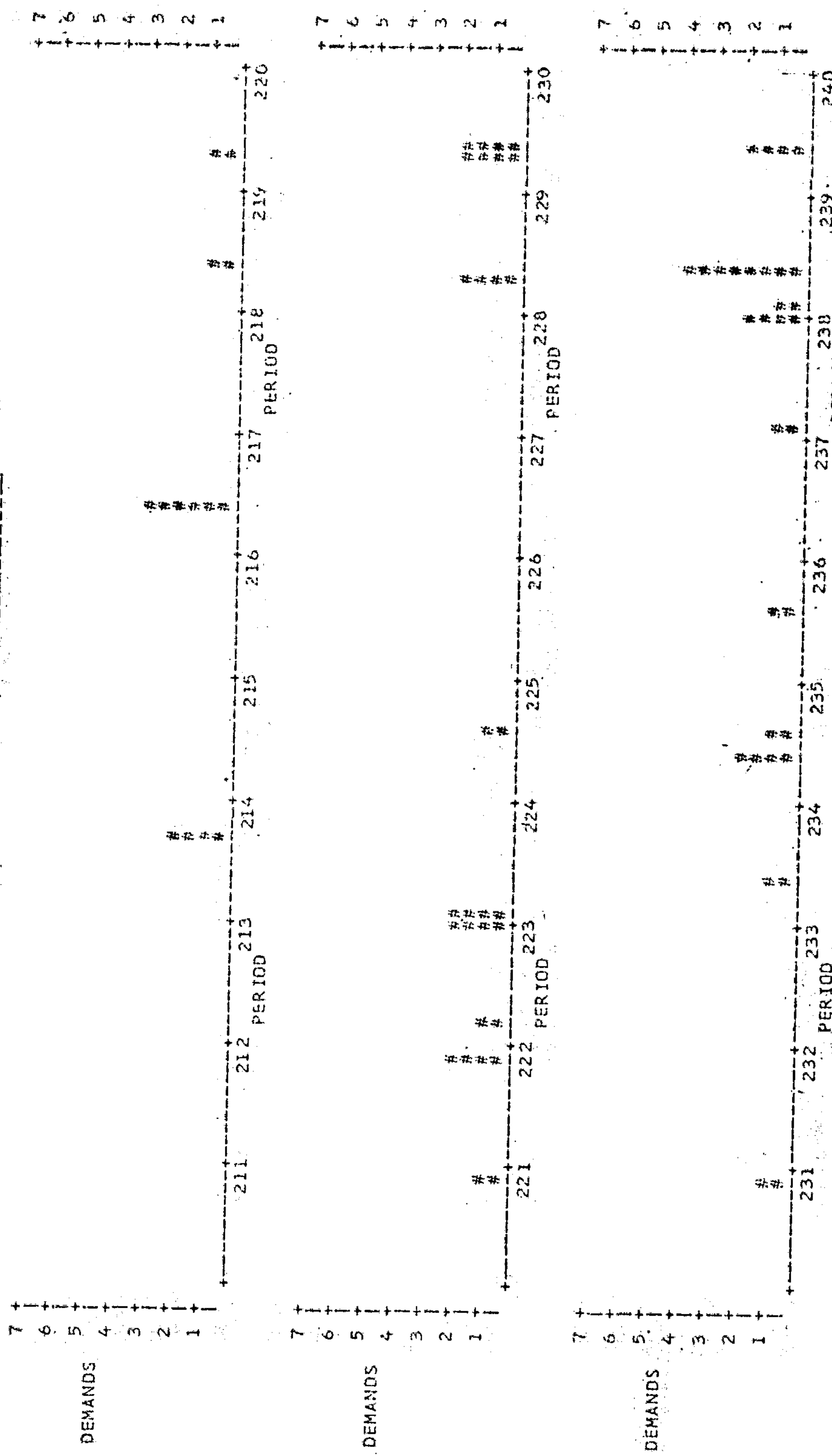
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



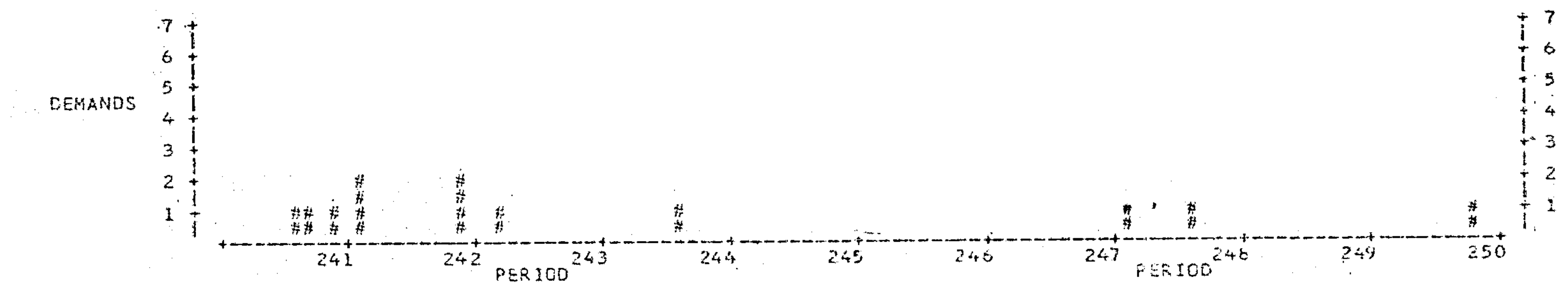
**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



**** GRAPHICAL ILLUSTRATION OF THE SIMULATION ****



**** STATISTICS OF THE SIMULATION ****

I	INTER-ORDER TIMES	DEMANDS PER ORDER	CUMULATIVE TIMES	DEMANDS PER PERIOD
1	5.196	2.	5.196	0.
2	2.929	1.	8.125	0.
3	0.722	2.	8.848	0.
4	1.021	1.	9.869	0.
5	0.705	4.	10.574	0.
6	1.956	1.	12.532	2.
7	0.363	3.	12.895	0.
8	1.359	2.	14.255	0.
9	0.295	2.	14.550	3.
10	5.730	1.	20.279	1.
11	4.191	1.	24.470	4.
12	5.262	1.	29.732	0.
13	0.315	1.	30.047	4.
14	0.745	1.	30.792	0.
15	0.182	2.	30.974	4.
16	0.144	2.	31.118	0.
17	0.601	1.	31.719	0.
18	0.599	1.	32.318	0.
19	0.067	1.	32.404	0.
20	2.347	2.	34.751	0.
21	0.226	1.	34.977	1.
22	0.534	1.	35.511	0.
23	0.809	1.	36.320	0.
24	0.120	2.	36.440	0.
25	0.799	1.	37.239	1.
26	0.311	1.	37.550	0.
27	1.327	2.	38.877	0.
28	3.321	1.	42.199	0.
29	1.674	3.	43.872	0.
30	1.165	2.	45.038	1.
31	1.878	3.	46.916	4.
32	1.635	1.	48.551	3.
33	3.029	2.	51.580	2.
34	2.732	1.	54.312	0.
35	0.276	1.	54.588	3.
36	0.907	1.	55.495	1.
37	0.514	1.	56.008	3.
38	0.221	2.	56.229	2.
39	2.406	1.	58.635	2.
40	2.720	1.	61.356	0.
41	2.403	1.	63.758	0.
42	3.032	1.	66.790	0.
43	4.568	1.	71.358	1.
44	2.556	2.	73.914	3.
45	1.077	1.	74.991	0.

**** STATISTICS OF THE SIMULATION ****

I	INTER-ORDER TIMES	DEMANDS PER ORDER	CUMULATIVE TIMES	DEMANDS PER PERIOD
46	0.371	2.	75.362	2.
47	1.726	1.	77.088	3.
48	0.347	2.	77.435	0.
49	0.208	2.	77.644	1.
50	0.414	1.	78.058	0.
51	0.847	1.	78.905	0.
52	1.362	1.	80.267	2.
53	0.260	2.	80.527	0.
54	2.492	1.	83.019	0.
55	0.204	1.	83.223	2.
56	1.151	1.	84.373	1.
57	2.755	1.	87.129	3.
58	0.254	1.	87.383	0.
59	5.342	1.	92.724	1.
60	2.159	1.	94.853	0.
61	2.979	3.	97.862	0.
62	0.628	1.	98.490	1.
63	0.004	1.	98.494	0.
64	0.580	1.	99.073	1.
65	0.489	1.	99.562	0.
66	0.134	1.	99.696	0.
67	3.191	2.	102.887	1.
68	0.338	1.	103.225	0.
69	0.349	1.	103.574	0.
70	0.089	1.	103.664	0.
71	0.258	1.	103.922	0.
72	0.518	1.	104.440	1.
73	0.688	2.	105.129	0.
74	0.036	2.	105.164	2.
75	0.385	1.	105.549	1.
76	0.435	1.	105.984	2.
77	0.400	1.	106.384	0.
78	0.376	1.	106.760	5.
79	0.375	2.	107.135	2.
80	0.822	2.	107.957	0.
81	1.272	1.	109.229	3.
82	0.988	1.	110.216	0.
83	1.700	1.	111.916	0.
84	0.054	3.	111.770	2.
85	0.524	2.	112.494	1.
86	2.698	2.	115.191	0.
87	0.535	2.	115.727	0.
88	0.504	3.	116.231	2.
89	3.778	1.	120.008	0.
90	3.157	1.	123.165	0.

**** STATISTICS OF THE SIMULATION ****

I	INTER-ORDER TIMES	DEMANDS PER ORDER	CUMULATIVE TIMES	DEMANDS PER PERIOD
91	2.150	1.	125.316	0.
92	0.284	1.	125.600	0.
93	0.037	3.	125.636	1.
94	5.911	1.	131.547	0.
95	0.612	3.	132.160	1.
96	0.094	1.	132.254	0.
97	0.138	1.	132.391	0.
98	0.732	3.	133.123	3.
99	0.624	1.	133.747	2.
100	1.980	1.	135.727	3.
101	1.141	3.	136.868	0.
102	1.453	1.	138.321	0.
103	0.682	1.	139.003	2.
104	1.408	1.	140.411	4.
105	1.834	1.	142.245	1.
106	0.258	1.	142.502	6.
107	0.040	3.	142.542	2.
108	2.047	1.	144.590	4.
109	2.453	1.	147.043	0.
110	2.729	1.	149.772	1.
111	0.564	3.	150.336	1.
112	0.025	1.	150.361	4.
113	0.564	1.	150.925	2.
114	1.313	1.	152.238	0.
115	0.558	3.	152.825	0.
116	0.041	2.	152.867	4.
117	2.601	1.	155.467	3.
118	1.598	1.	157.065	0.
119	0.398	1.	157.463	0.
120	1.310	2.	158.774	0.
121	1.290	6.	160.063	1.
122	3.677	1.	163.740	0.
123	1.973	1.	165.713	0.
124	0.348	1.	166.062	1.
125	0.692	1.	166.754	0.
126	0.050	2.	166.805	5.
127	1.636	3.	168.441	0.
128	0.306	3.	168.747	0.
129	2.095	1.	170.842	0.
130	2.463	1.	173.305	0.
131	0.658	1.	173.964	0.
132	0.305	1.	174.268	1.
133	3.281	1.	177.550	5.
134	0.584	3.	178.134	4.
135	0.170	1.	178.304	0.

**** STATISTICS OF THE SIMULATION ****

I	INTER-ORDER TIMES	DEMANDS PER ORDER	CUMULATIVE TIMES	DEMANDS PER PERIOD
136	0.771	1.	179.074	1.
137	1.149	3.	180.224	3.
138	1.573	3.	181.796	0.
139	0.127	3.	181.923	1.
140	0.109	1.	182.032	1.
141	5.583	1.	187.616	1.
142	0.485	1.	188.101	0.
143	1.811	1.	189.912	1.
144	3.112	1.	193.024	0.
145	0.657	3.	193.681	1.
146	2.518	1.	196.399	0.
147	0.566	2.	196.965	0.
148	0.895	1.	197.860	1.
149	1.744	1.	199.603	0.
150	3.565	1.	203.168	1.
151	3.216	5.	[illegible]	2.
152	0.541	1.	206.926	0.
153	6.706	2.	213.632	0.
154	2.738	3.	216.370	0.
155	1.985	1.	[illegible]	0.
156	0.859	1.	219.214	1.
157	1.653	1.	220.867	0.
158	0.936	2.	221.802	2.
159	0.300	1.	222.103	2.
160	0.843	2.	222.946	0.
161	0.137	2.	223.083	6.
162	1.509	1.	224.592	0.
163	3.692	2.	228.284	0.
164	0.981	2.	229.265	1.
165	0.100	1.	229.365	0.
166	1.533	1.	230.898	1.
167	2.488	1.	233.386	4.
168	1.005	2.	234.391	0.
169	0.167	1.	234.557	6.
170	0.963	1.	235.521	0.
171	1.497	1.	237.017	1.
172	0.910	2.	237.928	0.
173	0.134	1.	238.062	0.
174	0.290	4.	238.352	2.
175	0.950	2.	239.302	1.
176	1.200	1.	240.503	0.
177	0.119	1.	240.622	0.
178	0.265	1.	240.888	1.
179	0.165	2.	241.052	4.
180	0.847	2.	241.899	1.

****** STATISTICS OF THE SIMULATION ******

I	INTER-ORDER TIMES	DEMANDS PER ORDER	CUMULATIVE TIMES	DEMANDS PER PERIOD
181	0.228	1.	242.127	3.
182	1.455	1.	243.582	6.
183	3.449	1.	247.032	1.
184	0.470	1.	247.502	0.
185	2.289	1.	249.791	0.
186	---	---	---	0.
187	---	---	---	0.
188	---	---	---	1.
189	---	---	---	1.
190	---	---	---	1.
191	---	---	---	0.
192	---	---	---	0.
193	---	---	---	0.
194	---	---	---	4.
195	---	---	---	0.
196	---	---	---	0.
197	---	---	---	3.
198	---	---	---	1.
199	---	---	---	0.
200	---	---	---	1.
201	---	---	---	0.
202	---	---	---	0.
203	---	---	---	0.
204	---	---	---	1.
205	---	---	---	0.
206	---	---	---	0.
207	---	---	---	6.
208	---	---	---	0.
209	---	---	---	0.
210	---	---	---	0.
211	---	---	---	0.
212	---	---	---	0.
213	---	---	---	0.
214	---	---	---	2.
215	---	---	---	0.
216	---	---	---	0.
217	---	---	---	3.
218	---	---	---	0.
219	---	---	---	1.
220	---	---	---	1.
221	---	---	---	1.
222	---	---	---	2.
223	---	---	---	3.
224	---	---	---	2.
225	---	---	---	1.

**** STATISTICS OF THE SIMULATION ****.

I	INTER-ORDER TIMES	DEMANDS PER ORDER	CUMULATIVE TIMES	DEMANDS PER PERIOD
226	----	----	----	0.
227	----	----	----	0.
228	----	----	----	0.
229	----	----	----	2.
230	----	----	----	4.
231	----	----	----	1.
232	----	----	----	0.
233	----	----	----	0.
234	----	----	----	1.
235	----	----	----	5.
236	----	----	----	1.
237	----	----	----	0.
238	----	----	----	3.
239	----	----	----	5.
240	----	----	----	2.
241	----	----	----	3.
242	----	----	----	4.
243	----	----	----	1.
244	----	----	----	1.
245	----	----	----	0.
246	----	----	----	0.
247	----	----	----	0.
248	----	----	----	2.
249	----	----	----	0.
250	----	----	----	1.

APÊNDICE B

PROGRAMA/2

APÊNDICE B

PROGRAMA/2

Executa uma análise Bayesiana dos dados segundo o método BEF - GEOMÉTRICO-POISSON-GAMMA (SOUZA[11]) na estimação do parâmetro λ (ou Θ)do processo GEOMÉTRICO-POISSON.

O programa deve ser utilizado primeiramente para estimar o valor da constante C e, utilizando este resultado, novamente utilizado para fornecer os valores das distribuições à priori e da distribuição posterior dos parâmetros λ e Θ. Quando desejado e no caso de possuir as informações sobre o verdadeiro valor de λ e/ou Θ, o programa pode fornecer o valor do erro absoluto para estimativas pontuais de λ e Θ e, ao final da simulação, os valores médios e médios relativos destes erros. O programa possibilita a análise de mais de uma série de cada vez desde que, porém, com a mesma razão da variância para a média.

B.1 - ENTRADA DE DADOS

RAT .... razão da variância para a média a ser utilizada na estimação. (o mesmo para todas as séries a serem analisadas).

ALPSI .... Valor inicial do parâmetro α da distribuição GAMMA.

BLPSI .... Valor inicial do parâmetro β da distribuição GAMMA.

N .... Número de observações antes da última a serem utilizadas no cálculo do erro.

IPRINT	Número de observações antes da última cujas respectivas distribuições à priori e posterior serão impressas.
NO	Número total de observações.
CTM	Valor mínimo de C. Se CTM=CT será feita apenas a estimação com C=CT.
DELT	Intervalo de variação na procura do valor de c.
CT	Valor inicial (e máximo) de c.
ICPR	Imprime os valores de C e da verossimilhança agregada (LINKL) se ICPR=1. Não imprime se ICPR=0
ICR	Escolhe critério de estimação de C. (De uso acadêmico. Faça ICR=2).
ICPR1	Imprime os valores das entropias se ICPR1=1. Não imprime caso contrário (ICPR1=0)
IPLOT	Plota os valores de C x LINKL
ISIMUL	Imprime valor dos erros após o período correspondente a N.
NREG	Número do registro do arquivo de dados gerado pelo programa 1 da série a ser analisada.
IFIM	Indica se é a última série a ser analisada (IFIM=1)

```
      DEFINE FILE 10 (2012,80,E,I10)
      DIMENSION APSA(30),BESA(30),VPSA(30),CA(30,30),CAN(30),D(500)
      REAL MPSA(30),MPR,MPS,MOPR,MOPS,MPD,MOPD
      DIMENSION X(200),F(200)
      DO 9995 I=1,2012
         READ(11,9997,END=9996) .
 9997    FORMAT('
     *                                                   ')
         WRITE(10'I,9997)
 9995    CONTINUE
 9996    CONTINUE
C
C* INPUT VALUES
C
      READ(5,101)PI
      READ(5,101)RAT,ALPSI,BEPSI
      WRITE(6,1115) ALPSI,BEPSI,RAT
 1115 FORMAT(///,10X,'VALORES INICIAIS:',//10X,'ALPSI=',F15.5,/10X,
     *       'BEPSI=',F15.5,/10X,'RAT=',F15.5)
 9999 CONTINUE
      NPOINT=0
C
C      N__ NUMERO  DE OBSERVACOES PARA CALCULO DO ERRO(AS ULTIMAS)
C      IPRINT__NUMERO DE IMPRESSOES DOS PARAMETROS (ULTIMAS IPRINT)
C               (AMBOS SO INFLUENCIAM NA PREVISAO)
C      NO____ NUMERO DE OBSERVACOES PARA A PREVISAO(A PATIR DE 1)
C
      READ(5,100)N,IPRINT,NO
  100 FORMAT(3I5)
      READ(5,104) CTM,DELT,CT,ICPR,ICR,ICPR1,IPLOT,ISIMUL
  104 FORMAT(3E7.1,5I1)
      READ(5,100) NREG,IFIM
  101 FORMAT(3F12.0)
C
C       CTM______ VALOR MINIMO DE C(SE CTM=CT FAZ ESTIMACAO.
C       DELT_____ INTERVALO DE VARIACAO DE C
C       CT_______ VALOR INICIAL DE C
C       ICPR_____ =1 IMPRIME VALORES DE C E LINKL
C                 =0 NAO IMPRIME (E NAO CALCULA,FICA VALENDO CT)
C       ICR______ =1 CRITERIO DE ESTIMACAO DE C ANTIGO
C                 =2 CRITERIO NOVO
C       ICPR1____ =1 IMPRIME ENTROPIAS,=0 NAO IMPRIME
C
C      IPLOT____ =1 PLOTA C X LINKL,=0 NAO PLOTA
C      ISIMUL___ =0 NAO FAZ CALCULO DE ERRO (PARA QUALQUE N)
C* INITIAL VALUES
C
      READ(10'NREG,1002) ND,ALV,ALE,TEV,TEE,RATIO
 1002 FORMAT(I3,5E14.5)
      IF(NO.LE.ND) GO TO 8110
      WRITE(6,8100)
 8100 FORMAT(1X,'NUMERO DE OBSERVACOES MAIOR QUE O NUMERO DE DADOS')
      STOP
 8110 READ(10'NREG+1,1003)(D(I),I=1,ND)
 1003 FORMAT(20F4.0)
      WRITE(6,1000) ALV,TEV,ALE,TEE,CTM,DELT,CT,ICPR,N,NREG,ICR
 1000 FORMAT(1H1,////,20X,'DADOS UTILIZADOS :',/20X,'ALV=',F10.3,
     1   /20X,'TEV=',F10.3,/20X,'ALE=',F10.3,/20X,'TEE=',F10.3,
     2   /20X,'CTM=',E9.3,/20X,'DELT=',E9.3,/20X,'CT=',E9.3,/20X,
     3   'ICPR=',I2,/20X,'N=',I4,/20X,'NREG=',I4,/20X,'ICR=',I4)
      IF(DELT.EQ.0.) GO TO 110
      NDELT=(CT-CTM)/DELT+1
      IF(NDELT.LE.200) GO TO 110
 1001 FORMAT(1H1,'******* NUMERO EXCESSIVO DE PONTOS',
     1' *******  NDELT=',I5)
      WRITE(6,1001) NDELT
      STOP
  110 IF(NO.GE.N)GO TO 109
      WRITE(6,1102) N
 1102 FORMAT(2X,'**** N MAIOR QUE O NUMERO DE OBSERVACOES ****')
      STOP
  109 CONTINUE
      IKEYC=1
      IF(CT.EQ.CTM) IKEYC=0
      ERTV=0.
      ERTE=0.
      ERLV=0.
      ERLE=0.
```

```
      EMVD=0.
      EMED=0.
      IF(IKEYC.EQ.1)N=NO
      AC=0.
      ACUM=-1.E+10
      VMIN=1.E+20
      M=30
      CALL CACAL(M,CA,RAT)
    1 CONTINUE
      NPOINT=NPOINT+1
      ALPS=ALPSI
      BEPS=BEPSI
      CRT=0.
C
C* PRIOR DISTRIBUTION
C
      DO 14 I=1,NO
      IF(ALPS.GT.10.) GO TO 2
      ARG=ALPS
      CALL GAMMA(ARG,VAL)
      RES=ALOG(VAL)
      GO TO 3
    2 CONTINUE
      CALL TALOG(ALPS,RES,PI)
    3 CONTINUE
      AUX=RES
      CALL PSI(ALPS,RES)
      ENTS=AUX+ALPS*(1.-RES)+RES-ALOG(BEPS)
      ENT=EXP(ENTS)
      FT=1./(1.+CT*ENT**(-2))
      ALPR=FT*(ALPS-1.)+1.
      BEPR=FT*BEPS
C
C*  IMPRIME ENTROPIA A PARTIR DE I=150 SE ICPR1=1
C
      IF(I.GT.150.AND.ICPR1.EQ.1) WRITE(6,207) ENT
207   FORMAT(5X,'ENTROPIA-------',E10.4)
C
C* CT ESTIMATION
C
      ID=D(I)
      NLIM=ID
      PR=0.
      IF(ICR.EQ.2) GOTO 30
C
C*  ESTIMACAO TIPO 1
C
      IF(ID.EQ.0) GO TO 25
      DO 22 J=1,NLIM
      ARG=ALPR+J
      IF(ARG.GT.10.) GO TO 20
      CALL GAMMA(ARG,VAL)
      B1=ALOG(VAL)
      GO TO 21
   20 CONTINUE
      CALL TALOG(ARG,RES,PI)
      B1=RES
   21 CONTINUE
      ARG=ALPR
      IF(ARG.GT.10.) GO TO 23
      CALL GAMMA(ARG,VAL)
      B2=ALOG(VAL)
      GO TO 24
   23 CONTINUE
      CALL TALOG(ARG,RES,PI)
      B2=RES
   24 CONTINUE
      RP1=(ALPR*ALOG(BEPR)-(ALPR+J)*ALOG(BEPR+1.))
      RP2=(B1-B2)
      RP3=ALOG(CA(ID,J))
      AUX=RP1+RP2+RP3
      PR=PR+EXP(AUX)
   22 CONTINUE
      GO TO 26
   25 CONTINUE
      PR=(BEPR/(BEPR+1.))**ALPR
   26 CONTINUE
      PR=ALOG(PR)
```

```
      CRT=CRT+PR
   30 CONTINUE
C
C* POSTERIOR DISTRIBUTION
C
      IF(ID.EQ.0) GO TO 12
C
C** CA MATRIX NORMALIZATION
C
      AUX=0.
      DO 7 J=1,ID
      AUX=AUX+CA(ID,J)
    7 CONTINUE
      DO 8 J=1,ID
      CAN(J)=CA(ID,J)/AUX
    8 CONTINUE
C
C** PARAMETERS OF THE MIXTURE
C
      DO 9 J=1,ID
      APSA(J)=ALPR+J
      BESA(J)=BEPR+1.
      MPSA(J)=APSA(J)/BESA(J)
      VPSA(J)=APSA(J)/(BESA(J)**2)
    9 CONTINUE
C
C** COLLAPSING PROCEDURE
C
      MPS=0.
      DO 10 J=1,ID
      MPS=MPS+MPSA(J)*CAN(J)
   10 CONTINUE
      VPS=0.
      DO 11 J=1,ID
      VPS=VPS+CAN(J)*(VPSA(J)+(MPSA(J)-MPS)**2)
   11 CONTINUE
      ALPS=(MPS**2)/VPS
      BEPS=MPS/VPS
      GO TO 13
   12 CONTINUE
      ALPS=ALPR
      BEPS=BEPR+1.
      MPS=ALPS/BEPS
      VPS=ALPS/(BEPS**2)
   13 CONTINUE
      IF(ICR.EQ.1) GO TO 40
C
C*  ESTIMACAO TIPO 2
C
      IF(ID.EQ.0) GO TO 34
      DO 32 J=1,NLIM
          AUX=MPS**J*CA(NLIM,J)
      PR=PR+AUX
   32 CONTINUE
      PR=PR*EXP(-MPS)
      GO TO 36
   34 PR=EXP(-MPS)
   36 PR=ALOG(PR)
      CRT=CRT+PR
   40 CONTINUE
C
C* PRINT - OUT
C
      IF(IKEYC.EQ.1)GO TO 14
      MPR=ALPR/BEPR
      VPR=ALPR/(BEPR**2)
      MOPR=(ALPR-1.)/BEPR
      MOPS=(ALPS-1.)/BEPS
      R=(RAT-1.)/(RAT+1.)
      ALPD=ALPS
      BEPD=BEPS*(1.-R)
      MPD=ALPD/BEPD
      VPD=ALPD/(BEPD**2)
      MOPD=(ALPD-1.)/BEPD
      IF(I.LE.(NO-N).OR.ISIMUL.EQ.0) GO TO 16
      ERV1=ABS(TEV-MPD)
      ERE1=ABS(TEE-MPD)
      EMVD1=ABS(TEV-MOPD)
```

```
      EMED1=ABS(TEE-MOPD)
      ERV2=ABS(ALV-MPS)
      ERE2=ABS(ALE-MPS)
      ERTV=ERTV+ERV1
      ERTE=ERTE+ERE1
      ERLV=ERLV+ERV2
      ERLE=ERLE+ERE2
      EMVD=EMVD+EMVD1
      EMED=EMED+EMED1
      WRITE(6,210)I,ERV1,ERE1,ERV2,ERE2,EMVD1,EMED1
  210 FORMAT(/7X,'TIME',I4,5X,'ER(TET*TR.)=',F9.5,5X,'ER(TET*ES.)=',F9.5
     *,5X,'ER(LBD*TR.)=',F9.5,5X,'ER(LBD*ES.)=',F9.5,/7X,27X,'EMV1=',
     *F9.5,12X,'EMED=',F9.5)
   16 CONTINUE
      IF(I.LE.(NO-IPRINT)) GO TO 14
      WRITE(6,200)ALPR,BEPR,MPR,VPR,MOPR
      WRITE(6,201)I,D(I)
      WRITE(6,202)ALPS,BEPS,MPS,VPS,MOPS
      WRITE(6,205)
      WRITE(6,206)ALPD,BEPD,MPD,VPD,MOPD
   14 CONTINUE
      IF(ISIMUL.EQ.0.OR.IKEYC.EQ.1) GO TO 17
      ERTV=ERTV/FLOAT(N)
      ERTE=ERTE/FLOAT(N)
      ERLV=ERLV/FLOAT(N)
      ERLE=ERLE/FLOAT(N)
      EMVD=EMVD/FLOAT(N)
      EMED=EMED/FLOAT(N)
      WRITE(6,211)N
  211 FORMAT(//15X,'AVERAGE ABSOLUTE ERRORS  LAST ',I3,' OBSERVATIONS',
     *///)
      WRITE(6,212)ERTV,ERTE,ERLV,ERLE,EMVD,EMED
  212 FORMAT(/20X,'ER(TET*TR.)=',F10.6,4X,'ER(TET*ES.)=',F10.6,4X,'ER(LB
     *D*TR.)=',F10.6,4X,'ER(LBD*ES.)=',F10.6,/27X,'EMVD=',F10.6,11X,
     *'EMED=',F10.6)
      WRITE(6,312)N
  312 FORMAT(//15X,'AVERAGE RELATIVE ERRORS  LAST',I3,'OBSERVATIONS',//)
      RERTV=ERTV/TEV
      RERTE=ERTE/TEE
      RERLV=ERLV/ALV
      RERLE=ERLE/ALE
      REMVD=EMVD/TEV
      REMED=EMED/TEE
      WRITE(6,313)RERTV,RERTE,RERLV,RERLE,REMVD,REMED
  313 FORMAT(/20X,'RER(TET*TR.)=',F10.6,4X,'RER(TET*ES.)=',F10.6,4X,'RER
     *(LBD*TR.)',F10.6,4X,'RER(LBD*ES.)=',F10.6,/27X,'REMVD=',F10.6,
     *11X,'REMED=',F10.6)
   17 IF(IKEYC.EQ.0)GO TO 9998
      IF(CRT.LT.ACUM) GO TO 15
      ACUM=CRT
      AC=CT
   15 CONTINUE
      IF(CRT.LT.VMIN) VMIN=CRT
      X(NPOINT)=CT
      F(NPOINT)=CRT
      IF(ICPR.EQ.1)WRITE(6,203)CT,CRT
      CT=CT-DELT
      IF(CT.GE.CTM) GO TO 1
      WRITE(6,204)AC,ACUM
      IF(IPLOT.EQ.1) CALL PLOT(VMIN,ACUM,X,F,NPOINT)
  200 FORMAT(5X,'**PRIOR**',5X,'A=',F8.3,3X,'B=',F8.3,5X,'MEAN=',F8.4,3X
     *,'VAR.=',F8.4,3X,'MODE=',F8.4)
  201 FORMAT(15X,'**TIME**',I4,5X,'**OBS.**',F3.0)
  202 FORMAT(5X,'**POST.**',5X,'A=',F8.3,3X,'B=',F8.3,5X,'MEAN=',F8.4,3X
     *,'VAR.=',F8.4,3X,'MODE=',F8.4)
  204 FORMAT(///10X,'***BEST MODEL***',10X,'C=',E9.3,10X,'LIKL=',F10.4)
  203 FORMAT(10X,'*C=*',E9.3,10X,'**LIKL=**',E15.7)
  205 FORMAT(10X,'*****POST. MEAN DEMAND *****')
  206 FORMAT(19X,'A=',F8.3,3X,'B=',F8.3,5X,'MEAN=',F8.4,3X,'VAR.=',F8.4,
     *3X,'MODE=',F8.4//)
 9998 IF(IFIM.EQ.0) GO TO 9999
      STOP
      END
```

```
FORTRAN IV G1   RELEASE 2.0          CACAL          DATE = 82091          23/16/01          PAGE 0001
          SUBROUTINE CACAL(M,CA,RAT)
          DIMENSION CA(30,30)
          R=(RAT-1.)/(RAT+1.)
          DO 1 IX=1,M
          DO 1 I=1,IX
          CA(IX,I)=0.
          IA1=IX-1
          CALL FACT(IA1,RES)
          RN1=RES
          CALL FACT(I,RES)
          RD1=RES
          RD2=RD1/I
          IA2=IX-I
          CALL FACT(IA2,RES)
          RD3=RES
          CA(IX,I)=(RN1/(RD1*RD2*RD3))*(R**(IX-I))*((1.-R)**I)
        1 CONTINUE
          RETURN
          END
```

```
FORTRAN IV G1   RELEASE 2.0          CACAL          DATE = 82091          23/16/01          PAGE 0002

*OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
*OPTIONS IN EFFECT*  NAME = CACAL    , LINECNT =       50
*STATISTICS*     SOURCE STATEMENTS =       19,PROGRAM SIZE =       746
*STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          FACT          DATE = 82091          23/16/01          PAGE 0001

                SUBROUTINE FACT(I,RES)
                IF((I.EQ.0).OR.(I.EQ.1)) GO TO 2
                RES=1.
                DO 1 J=1,I
                RES=RES*J
              1 CONTINUE
                GO TO 3
              2 RES=1.
              3 RETURN
                END
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          FACT          DATE = 82091          23/16/01          PAGE 0002

*OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
*OPTIONS IN EFFECT*  NAME = FACT    , LINECNT =      60
*STATISTICS*    SOURCE STATEMENTS =      10,PROGRAM SIZE =      470
*STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0            GAMMA              DATE = 82091          23/16/01              PAGE 0001

                 SUBROUTINE GAMMA(ARG,VAL)
                 IF(ARG.GE.1.) GO TO 1
                 VAL=G(ARG)
                 VAL=VAL/ARG
                 GO TO 4
           1     IF(ARG.LE.2.) GO TO 5
                 GO TO 2
             5   AX=ARG-1.
                 VAL=G(AX)
                 GO TO 4
             2   AUX=ARG-1.
                 VAL=AUX
             3   AUX=AUX-1.
                 IF(AUX.LT.1.) GO TO 6
                 VAL=VAL*AUX
                 IF(AUX.GT.2.) GO TO 3
                 AX=AUX-1.
                 GO TO 7
             6   AX=AUX
             7   VAL=VAL*G(AX)
             4   RETURN
                 END
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0            GAMMA              DATE = 82091          23/16/01              PAGE 0002

*OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
*OPTIONS IN EFFECT*  NAME = GAMMA    , LINECNT =       60
*STATISTICS*    SOURCE STATEMENTS =       22,PROGRAM SIZE =       612
*STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          G               DATE = 82091        23/16/01            PAGE 0001

               REAL FUNCTION G(Z)                                                      00365
               B1=-0.577191652                                                         00366
               B2=0.988205891                                                          00367
               B3=-0.897056937                                                         00368
               B4=0.918206857                                                          00369
               B5=-0.756704078                                                         00370
               B6=0.48199394                                                           00371
               B7=-0.193527818                                                         00372
               B8=0.035868343                                                          00373
               G=1.+B1*Z+B2*Z**2+B3*Z**3+B4*Z**4+B5*Z**5+B6*Z**6+B7*Z**7+B8*Z**8       00374
               RETURN                                                                  00375
               END                                                                     00376
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          G               DATE = 82091        23/16/01            PAGE 0002

  *OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
  *OPTIONS IN EFFECT*  NAME = G       , LINECNT =      80
  *STATISTICS*    SOURCE STATEMENTS =        12,PROGRAM SIZE =       590
  *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          PSI              DATE = 82091         23/16/01              PAGE 0001

 0001                SUBROUTINE PSI(ARG,RES)                                                  00377
 0002                AUX=ALOG(ARG)-1./(2.*ARG)-1./(12.*ARG**2)                                00378
 0003                AUX=AUX+1./(120.*ARG**4)-1./(252.*ARG**6)                                00379
 0004                RES=AUX                                                                  00380
 0005                RETURN                                                                   00381
 0006                END                                                                      00382
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          PSI              DATE = 82091         23/16/01              PAGE 0002

  *OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
  *OPTIONS IN EFFECT*  NAME = PSI      , LINECNT =       60
  *STATISTICS*     SOURCE STATEMENTS =        6,PROGRAM SIZE =       440
  *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          TALOG           DATE = 82091        23/16/01                PAGE 0001

0001             SUBROUTINE TALOG(ARG,RES,PI)                                              00383
0002             AUX=(ARG-0.5)*ALOG(ARG)-ARG+0.5*ALOG(2.*PI)                               00384
0003             AUX=AUX+1./(12.*ARG)-1./(360.*ARG**3)+1./(1260.*ARG**5)                   00385
0004             RES=AUX                                                                   00386
0005             RETURN                                                                    00387
0006             END                                                                       00388
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          TALOG           DATE = 82091        23/16/01                PAGE 0002

 *OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
 *OPTIONS IN EFFECT*  NAME = TALOG    , LINECNT =       60
 *STATISTICS*     SOURCE STATEMENTS =       6,PROGRAM SIZE =       520
 *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
      SUBROUTINE PLOT(VMIN,VMAX,X,F,NPOINT)
      DATA KME,KBR,KAS,KTR,KMA /'-',' ','*','|','+'/
      DIMENSION X(200),F(200),LINE(101),LREF(101),REF(11)
      DO 10 I=1,101
         LINE(I)=KBR
         LREF(I)=KME
10       CONTINUE
      DO 20 I=1,101,10
         LREF(I)=KMA
         LINE(I)=KTR
20       CONTINUE
      DO 30 I=1,11
         REF(I)=VMIN+(I-1)*(VMAX-VMIN)/10.
30       CONTINUE
      WRITE(6,1100) (REF(I),I=1,11)
1100  FORMAT(1H1,9X,11(F9.2,1X))
      L=1
      NTAB=NPOINT/10.+1.
      WRITE(6,1000) (LREF(I),I=1,101)
1000  FORMAT(15X,101A1)
      DO 200 J=1,NTAB
         DO 100 K=1,9
            IL=NPOINT-L+1
            IF(L.GT.NPOINT) GO TO 50
            IPOINT=100*((F(IL)-VMIN)/(VMAX-VMIN))+1
            LINE(IPOINT)=KAS
50          WRITE(6,1000)(LINE(I),I=1,101)
            IF(L.GT.NPOINT) GO TO 100
            LINE(IPOINT)=KBR
            IAUX=(IPOINT-1)/10
            IAUX=IPOINT-1-10*IAUX
            IF(IAUX.EQ.0) LINE(IPOINT)=KTR
            L=L+1
100         CONTINUE
         IL=NPOINT-L+1
         IF(L.GT.NPOINT) GO TO 150
         IPOINT=100*((F(IL)-VMIN)/(VMAX-VMIN))+1
         LREF(IPOINT)=KAS
150      IF(IL.GT.0)WRITE(6,1200)X(IL),(LREF(I),I=1,101)
1200     FORMAT(3X,E10.4,2X,101A1)
         IF(IL.LE.0) WRITE(6,1000)(LREF(I),I=1,101)
         IF(L.GT.NPOINT) GO TO 200
         LREF(IPOINT)=KME
         IAUX=(NPOINT-1)/10
         IAUX=IPOINT-1-10*IPOINT
         IF(IAUX.EQ.0) LREF(IPOINT)=KMA
         L=L+1
200      CONTINUE
      RETURN
      END
```

VALORES INICIAIS:

```
ALPSI=      2.00000
BEPSI=      2.50000
RAT=        2.00000
```

```
DADOS UTILIZADOS :
ALV=      0.167
TEV=      0.250
ALE=      0.160
TEE=      0.244
CTM=0.0
DELT=0.0
CT=0.0
ICPR= 0
N=  10
NREG= 198
ICR=   2

TIME  11     ER(TET*TR.)=  0.02778       ER(TET*ES.)=   0.02176      ER(LBD*TR.)=  0.01852      ER(LBD*ES.)=  0.01185
                           EMV1=   0.13989                 EMED=   0.13289
**PRIOR**      A=   2.000    B=  12.500       MEAN=  0.1600   VAR.=  0.0128   MODE=  0.0800
          **TIME**   11      **OBS.** 0.
**POST.**      A=   2.000    B=  13.500       MEAN=  0.1481   VAR.=  0.0110   MODE=  0.0741
     *****POST. MEAN DEMAND *****
               A=   2.000    B=   9.000       MEAN=  0.2222   VAR.=  0.0247   MODE=  0.1111

TIME  12     ER(TET*TR.)=  0.04310       ER(TET*ES.)=   0.03710      ER(LBD*TR.)=  0.02874      ER(LBD*ES.)=  0.02207
                           EMV1=   0.14655                 EMED=   0.14055
**PRIOR**      A=   2.000    B=  13.500       MEAN=  0.1481   VAR.=  0.0110   MODE=  0.0741
          **TIME**   12      **OBS.** 0.
**POST.**      A=   2.000    B=  14.500       MEAN=  0.1379   VAR.=  0.0095   MODE=  0.0690
     *****POST. MEAN DEMAND *****
               A=   2.000    B=   9.667       MEAN=  0.2069   VAR.=  0.0214   MODE=  0.1034

TIME  13     ER(TET*TR.)=  0.05645       ER(TET*ES.)=   0.05045      ER(LBD*TR.)=  0.03764      ER(LBD*ES.)=  0.03097
                           EMV1=   0.15323                 EMED=   0.14723
**PRIOR**      A=   2.000    B=  14.500       MEAN=  0.1379   VAR.=  0.0095   MODE=  0.0690
          **TIME**   13      **OBS.** 0.
**POST.**      A=   2.000    B=  15.500       MEAN=  0.1290   VAR.=  0.0083   MODE=  0.0645
     *****POST. MEAN DEMAND *****
               A=   2.000    B=  10.333       MEAN=  0.1935   VAR.=  0.0187   MODE=  0.0968

TIME  14     ER(TET*TR.)=  0.06818       ER(TET*ES.)=   0.06218      ER(LBD*TR.)=  0.04546      ER(LBD*ES.)=  0.03879
                           EMV1=   0.15909                 EMED=   0.15309
**PRIOR**      A=   2.000    B=  15.500       MEAN=  0.1290   VAR.=  0.0083   MODE=  0.0645
          **TIME**   14      **OBS.** 0.
**POST.**      A=   2.000    B=  16.500       MEAN=  0.1212   VAR.=  0.0073   MODE=  0.0606
     *****POST. MEAN DEMAND *****
               A=   2.000    B=  11.000       MEAN=  0.1818   VAR.=  0.0165   MODE=  0.0909

TIME  15     ER(TET*TR.)=  0.07857       ER(TET*ES.)=   0.07257      ER(LBD*TR.)=  0.05238      ER(LBD*ES1)=  0.04571
                           EMV1=   0.16429                 EMED=   0.15829
**PRIOR**      A=   2.000    B=  16.500       MEAN=  0.1212   VAR.=  0.0073   MODE=  0.0606
          **TIME**   15      **OBS.** 0.
**POST.**      A=   2.000    B=  17.500       MEAN=  0.1143   VAR.=  0.0065   MODE=  0.0571
     *****POST. MEAN DEMAND *****
               A=   2.000    B=  11.667       MEAN=  0.1714   VAR.=  0.0147   MODE=  0.0857

TIME  16     ER(TET*TR.)=  0.08784       ER(TET*ES.)=   0.08184      ER(LBD*TR.)=  0.05856      ER(LBD*ES.)=  0.05189
                           EMV1=   0.16892                 EMED=   0.16292
**PRIOR**      A=   2.000    B=  17.500       MEAN=  0.1143   VAR.=  0.0065   MODE=  0.0571
          **TIME**   16      **OBS.** 0.
**POST.**      A=   2.000    B=  18.500       MEAN=  0.1081   VAR.=  0.0058   MODE=  0.0541
     *****POST. MEAN DEMAND *****
               A=   2.000    B=  12.333       MEAN=  0.1622   VAR.=  0.0131   MODE=  0.0811

TIME  17     ER(TET*TR.)=  0.09615       ER(TET*ES.)=   0.09015      ER(LBD*TR.)=  0.06411      ER(LBD*ES.)=  0.05744
                           EMV1=   0.17308                 EMED=   0.16706
**PRIOR**      A=   2.000    B=  18.500       MEAN=  0.1081   VAR.=  0.0058   MODE=  0.0541
          **TIME**   17      **OBS.** 0.
```

```
**POST.**        A=   2.000   B=  19.500      MEAN=  0.1026   VAR.=  0.0053   MODE=  0.0513
     *****POST. MEAN DEMAND *****
                 A=   2.000   B=  13.000      MEAN=  0.1536   VAR.=  0.0118   MODE=  0.0769

 TIME  18    ER(TET*TR.)=  0.10366        ER(TET*ES.)=  0.09766      ER(LBD*TR.)=  0.06511     ER(LBD*ES.)=  0.06244
                         EMV1=  0.17683                EMED=  0.17083
**PRIOR**        A=   2.000   B=  19.500      MEAN=  0.1026   VAR.=  0.0053   MODE=  0.0513
          **TIME**  18        **OBS.** 0.
**POST.**        A=   2.000   B=  20.500      MEAN=  0.0976   VAR.=  0.0048   MODE=  0.0486
     *****POST. MEAN DEMAND *****
                 A=   2.000   B=  13.667      MEAN=  0.1463   VAR.=  0.0107   MODE=  0.0732

 TIME  19    ER(TET*TR.)=  0.11047        ER(TET*ES.)=  0.10447      ER(LBD*TR.)=  0.07365     ER(LBD*ES.)=  0.06698
                         EMV1=  0.18023                EMED=  0.17423
**PRIOR**        A=   2.000   B=  20.500      MEAN=  0.0976   VAR.=  0.0048   MODE=  0.0488
          **TIME**  19        **OBS.** 0.
**POST.**        A=   2.000   B=  21.500      MEAN=  0.0930   VAR.=  0.0043   MODE=  0.0465
     *****POST. MEAN DEMAND *****
                 A=   2.000   B=  14.333      MEAN=  0.1395   VAR.=  0.0097   MODE=  0.0698

 TIME  20    ER(TET*TR.)=  0.11667        ER(TET*ES.)=  0.11067      ER(LBD*TR.)=  0.07778     ER(LBD*ES.)=  0.07111
                         EMV1=  0.18333                EMED=  0.17733
**PRIOR**        A=   2.000   B=  21.500      MEAN=  0.0930   VAR.=  0.0043   MODE=  0.0465
          **TIME**  20        **OBS.** 0.
**POST.**        A=   2.000   B=  22.500      MEAN=  0.0889   VAR.=  0.0040   MODE=  0.0444
     *****POST. MEAN DEMAND *****
                 A=   2.000   B=  15.000      MEAN=  0.1333   VAR.=  0.0089   MODE=  0.0667

         AVERAGE ABSOLUTE ERRORS   LAST  10 OBSERVATIONS

            ER(TET*TR.)=  0.078887    ER(TET*ES.)=  0.072887    ER(LBD*TR.)=  0.052595   ER(LBD*ES.)=  0.045925
                   EMVD=  0.164443           EMED=  0.158443

         AVERAGE RELATIVE ERRORS   LAST 100BSERVATIONS

            RER(TET*TR.)=  0.315547   RER(TET*ES.)=  0.298716   RER(LBD*TR.)  0.315561   RER(LBD*ES.)=  0.287029
                  REMVD=  0.657772          REMED=  0.649357
```

APÊNDICE C

PROGRAMA/3

APÊNDICE C

PROGRAMA/3

Calcula os índices de performance do CAP.VI para um estoque de REVISÃO contínua e calcula o nível ótimo de armazenamento segundo o modelo da seção IV.2.1.1.

O programa imprime os índices de performance se IPER=1 e calcula o nível ótimo de armazenamento se ICUS=1.

De resto, a listagem é auto explicativa, fornecendo todas as informações necessárias para a entrada de dados.

```
C
C      ------------------------------------------------------
C      CALCULO DOS INDICES DE PERFORMANCE-REVISAO CONTINUA
C      ------------------------------------------------------
C
      DIMENSION P(30),R(30),S(30),F(30),ZA(30),ZB(30),E(30),B(30),D(30)
     *         ,DE(30),DS(30),DD(30)
C
C        LEITURA DE DADOS:
C
C        N1 .......... LIMITE SUPERIOR DO NIVEL DE ESTOQUES(N1<=30)
C        IPER......... IMPRIME INDICES DE PERFORMANCE (IPER=1)
C                      NAO IMPRIME (IPER=0)
C        ICUS ........ CALCULA ESTOQUE OTIMO (ICUS=1)
C                      NAO CALCULA (ICUS=0)
C        XLAMOR ...... TAXA DE CHEGADA DOS USUARIOS
C        RHO ......... PARAMETRO DA DISTRIBUICAO GEOMETRICA
C        T ........... TEMPO DE ENTREGA MEDIO
C
      READ(5,1000) N1,IPER,ICUS,XLAMOR,RHO,T
 1000 FORMAT(I2,2I1,3F10.4)
      XLAM=XLAMOR*T
      IF(ICUS.EQ.0) GO TO 50
C
C        LEITURA DOS CUSTOS (SE ICUS=1)
C
C      CPED - CUSTO DE EMISSAO DE UM PEDIDO
C      CUNI - CUSTO DE UMA UNIDADE DO ITEM
C      CB   - CUSTO DE UMA UNIDADE NA FILA
C      CBUT - CUSTO DE UMA UNIDADE.ANO NA FILA
C      CH.  -CUSTO DE POSSE
C
      READ(5,1005) CPED,CUNI,CB,CBUT,CH
 1005 FORMAT(5F10.3)
 50   WRITE(6,1006)N1,XLAMOR,RHO,T
 1006 FORMAT(1H1,///20X,'DADOS ITILIZADOS',//20X,'ESTOQUE MAXIMO',
     *15('.'),I4,/20X,'LAMBDA',23('.'),F10.5,/20X,'RHO',26('.')
     *F10.5,1X,/20X,'TEMPO DE ENTREGA',13('.'),1X,F6.2)
      IF(ICUS.EQ.0) GO TO 60
      WRITE(6,1007)CPED,CUNI,CB,CBUT,CH
 1007 FORMAT(20X,'CUSTO DE PEDIDO',14('.'),F10.2,/20X,
     *'CUSTO UNITARIO',15('.'),F10.2,/20X,'CUSTO/UNIDADE NA FILA',8('.')
     *,F10.2,/20X,'CUSTO/UNIDADE.ANO NA FILA',4('.'),F10.2,/20X,
     *'CUSTO/UNID.ANO EM ESTOQUE',4('.'),F10.2)
 60   CONTINUE
      N=N1+1
      V=(1.+RHO)/(1.-RHO)
      CROT=(1.-RHO)*XLAM
      TETA=XLAMOR/(1.-RHO)
      P(1)=EXP(-XLAM)
      R(1)=P(1)
      F(1)=0.
      S(1)=0.
      E(1)=TETA
      B(1)=T*TETA
      D(1)=0.
      ZIP=P(1)
C
C          CALCULO DOS NIVEIS DE PERFORMANCE PARA S=1,2,3,...
C
      DO 200 K=1,N
        IS1=K-1
        P(K+1)=0.
        ZA(K)=0.
        ZB(K)=CROT/K
        DO 100 I=1,K
          ZIM=ZIP
          ZIP=ZA(I)
          ZA(I)=RHO*ZIP+ZB(I)*ZIM
          P(K+1)=P(K+1)+ZA(I)
 100      CONTINUE
        F(K+1)=XLAMOR*R(K)+RHO*F(K)
        S(K+1)=S(K)+1.-R(K)
        R(K+1)=R(K)+P(K+1)
        E(K+1)=TETA-F(K+1)
        B(K+1)=T*TETA-S(K+1)
        D(K+1)=K-TETA*T+B(K+1)
        DE(K)=E(K+1)-E(K)
```

```
            DB(K)=B(K+1)-B(K)
            DD(K)=D(K+1)-D(K)
  200       CONTINUE
C
C            IMPRESSAO DOS INDICES  (SE IPER=1)
C
        IF(IPER.EQ.0) GO TO 500
        WRITE(6,1100)
 1100   FORMAT(1H1,///20X,'I N D I C E S  D E  P E R F O R M A N C E',
       *////20X,'E .... VALOR ESPERADO DO NUMERO DE UNIDADES QUE',
       *'ENTRARAO NA FILA',/20X,
       *'B .... VALOR ESPERADO DO TAMANHO MEDIO DA FILA',/20X,
       *'D .... VALOR ESPERADO DO ESTOQUE EM MAOS MEDIO',/20X,
       *'R .... TAXA DE GARANTIA',/20X,'F .... ATENDIMENTOS IMEDIATOS',
       */20X,'S .... UNIDADES EM ATENDIMENTO')
        WRITE(6,1110)
 1110   FORMAT(1H1,///10X,'I',9X,'E',10X,'B',10X,'D',10X,'R',10X,'F',10X,
       * 'S')
        DO 400 I=1,N
           I1=I-1
           WRITE(6,1120) I1,E(I),B(I),D(I),R(I),F(I),S(I)
 1120      FORMAT(/8X,I3,6X,6(F6.3,5X))
  400      CONTINUE
C
C            IMPRIME COMPONENTES DA FUNCAO DE CUSTO E
C            NIVEL OTIMO DE ARMAZENAMENTO
C
  500   IF(ICUS.EQ.0) GO TO 900
        WRITE(6,1200)
 1200   FORMAT(1H1,///20X'C O M P O N E N T E S  D A  F U N C A O',
       *'  D E  C U S T O',///20X,'C1 .... CUSTO DE ABASTECIMENTO',
       *'(INDEPENDENTE DO NIVEL DO ESTOQUE)',/20X,'C2 .... ',
       *'CUSTO DE UNIDADES QUE ENTRARAM NA FILA',/20X,'C3 .... ',
       *'CUSTO DE PERMANENCIA NA FILA',/20X,'C4 ....',
       *' CUSTO DE POSSE')
        WRITE(6,1210)
 1210   FORMAT(1H1,//10X,'NIVEL',10X,'C1',10X,'C2',10X,'C3',10X,'C4',
       *10X,'CUSTO TOTAL',/)
        KEY=0
        C1=CUNI*TETA+CPED*XLAMOR
        DO 700 I=1,N
           I1=I-1
           C2=E(I)*CB
           C3=B(I)*CBUT
           C4=D(I)*CUNI*CH
           CK=C1+C2+C3+C4
           DCK=DE(I)*CB+DB(I)*(CBUT+CUNI*CH)+CUNI*CH
           IF(DCK.LT.0.OR.KEY.EQ.1) GO TO 600
           KEY=1
           IRO=I1
           CKO=CK
  600      CONTINUE
           WRITE(6,1230) I1,C1,C2,C3,C4,CK
 1230      FORMAT(/,15X,I3,4(F10.2,2X),2X,F10.2)
  700      CONTINUE
        WRITE(6,1250) IRO
 1250   FORMAT(////20X,'NIVEL OTIMO DE ARMAZANAMENTO....',I5)
  900   STOP
        END
```

```
DADOS ITILIZADOS

ESTOQUE MAXIMO.................   20.
LAMBCA.........................    2.00000
RHO............................    0.50000
TEMPO DE ENTREGA...............    0.25
CUSTO DE PEDIDO................       1.00
CUSTO UNITARIO.................      10.00
CUSTO/UNIDADE NA FILA..........      20.00
CUSTO/UNIDADE.ANO NA FILA......       3.00
CUSTO/UNID.ANO EM ESTOQUE......       0.20



I N D I C E S   D E   P E R F O R M A N C E


E .... VALOR ESPERADO DO NUMERO DE UNIDADES QUEENTRARAO NA FILA
B .... VALOR ESPERADO DO TAMANHO MEDIO DA FILA
D .... VALOR ESPERADO DO ESTOQUE EM MAOS MEDIO
R .... TAXA DE GARANTIA
F .... ATENDIMENTOS IMEDIATOS
S .... UNIDADES EM ATENDIMENTO
```

P	E	B	D	R	F	S
0	4.000	1.000	0.0	0.607	0.0	0.0
1	2.787	0.607	0.607	0.758	1.213	0.393
2	1.877	0.365	1.365	0.853	2.123	0.635
3	1.233	0.218	2.218	0.911	2.767	0.782
4	0.794	0.129	3.129	0.947	3.206	0.871
5	0.503	0.076	4.076	0.969	3.497	0.924
6	0.314	0.045	5.045	0.981	3.686	0.955
7	0.194	0.026	6.026	0.989	3.806	0.974
8	0.119	0.015	7.015	0.994	3.881	0.985
9	0.072	0.009	8.009	0.996	3.928	0.991
10	0.043	0.005	9.005	0.998	3.957	0.995
11	0.026	0.003	10.003	0.999	3.974	0.997
12	0.015	0.002	11.002	0.999	3.985	0.998
13	0.009	0.001	12.001	1.000	3.991	0.999
14	0.005	0.001	13.001	1.000	3.995	0.999
15	0.003	0.000	14.000	1.000	3.997	1.000
16	0.002	0.000	15.000	1.000	3.998	1.000
17	0.001	0.000	16.000	1.000	3.999	1.000
18	0.001	0.000	17.000	1.000	3.999	1.000
19	0.000	0.000	18.000	1.000	4.000	1.000
20	0.000	0.000	19.000	1.000	4.000	1.000

C O M P O N E N T E S   D A   F U N C A O   D E   C U S T O

C1 .... CUSTO DE ABASTECIMENTO(INDEPENDENTE DO NIVEL DO ESTOQUE)
C2 .... CUSTO DE UNIDADES QUE ENTRARAM NA FILA
C3 .... CUSTO DE PERMANENCIA NA FILA
C4 .... CUSTO DE POSSE

NIVEL	C1	C2	C3	C4	CUSTO TOTAL
0	42.00	80.00	3.00	0.0	125.00
1	42.00	55.74	1.82	1.21	100.77
2	42.00	37.54	1.09	2.73	83.37
3	42.00	24.65	0.65	4.44	71.74
4	42.00	15.87	0.39	6.26	64.52
5	42.00	10.06	0.23	8.15	60.44
6	42.00	6.29	0.13	10.09	58.51
7	42.00	3.89	0.08	12.05	58.02
8	42.00	2.38	0.05	14.03	58.45
9	42.00	1.44	0.03	16.02	59.49
10	42.00	0.87	0.02	18.01	60.90
11	42.00	0.52	0.01	20.01	62.54
12	42.00	0.31	0.00	22.00	64.32
13	42.00	0.18	0.00	24.00	66.19
14	42.00	0.11	0.00	26.00	68.11
15	42.00	0.06	0.00	28.00	70.06
16	42.00	0.04	0.00	30.00	72.04
17	42.00	0.02	0.00	32.00	74.02
18	42.00	0.01	0.00	34.00	76.01
19	42.00	0.01	0.00	36.00	78.01
20	42.00	0.00	0.00	38.00	80.00

NIVEL OTIMO DE ARMAZANAMENTO.... 7

APÊNDICE D

PROGRAMA/4

APÊNDICE D

PROGRAMA/4

Analogamente ao programa 3, calcula os índices de performance para um estoque de REVISÃO PERÍODICA e/ou o nível ótimo de armazenamento segundo o modelo da seção IV.3.1.1.

O programa imprime os índices de performance se IPER=1 e o nível ótimo de armazenamento se ICUS=1.

De resto, o programa traz em seus comentários todas as informações necessárias à sua execução.

```
C
C     ---------------------------------------------------------
C     CALCULO DE INDICES DE PERFORMANCE-REVISAO PERIODICA
C     ---------------------------------------------------------
C
      REAL*4 P1(30),P2(30),ZB1(30),ZB2(30),ZIM1,ZIM2,ZIP1,ZIP2
      REAL*4 ZA1(30),ZA2(30)
      DIMENSION B(30),E(30),D(30),DB(30),DE(30),DD(30),FI(30),RI(30)
C
C          LEITURA DOS DADOS:
C          N1.......... LIMITE SUPERIOR DO NIVEL DE ESTOQUE(N<30)
C          IPER........ IMPRIME INDICES DE PERFORMANCE (IPER=1)
C                       NAO IMPRIME (IPER=0)
C          ICUS.........IMPRIME COMPONENTES DA FUNCAO DE CUSTO(ICUS=1)
C                       NAO IMPRIME (ICUS=0)
C          XLAM ....... TAXA DE CHEGADA DOS USUARIOS(ANUAL)
C          RHO ........ PARAMETRO DA DISTRIBUICAO GEOMETRICA
C          TAL ........ TEMPO DE ENTREGA
C          T .......... PERIODO DE REVISAO
C
    1 READ(5,1000)N1,IPER,ICUS
 1000 FORMAT(I2,2I1)
      IF(N1.LE.0)GO TO 800
      READ(5,1010) XLAM,RHO,TAL,T
 1010 FORMAT(4F12.5)
      IF(ICUS.EQ.0) GO TO 5
C
C          LEITURA DOS CUSTOS (SE ICUS=1)
C
C          CREV - CUSTO DE REVISAO POR PERIODO
C          CREV - CUSTO DE EMISSAO DE UM PEDIDO
C          CUNI - CUSTO DE UMA UNIDADE DO ITEM
C          CB   - CUSTO DE UMA UNIDADE NA FILA
C          CBUT - CUSTO DE UMA UNIDADE.ANO NA FILA
C          CH   - CUSTO DO CAPITAL EM ESTOQUES(=TAXA DE INVESTIMENTO)
C
      READ(5,1020) CREV,CPED,CUNI,CB,CBUT,CH
 1020 FORMAT(6F10.2)
C
C          IMPRESSAO DOS DADOS
C
    5 N=N1+1
      WRITE(6,1030) N1
 1030 FORMAT(1H1,///20X,'DADOS UTILIZADOS',//20X,'ESTOQUE MAXIMO',
     *'..............',I4)
      WRITE(6,1040) XLAM,RHO,T,TAL
 1040 FORMAT(20X,'LAMBDA',23('.'),1X,F10.5,/20X,'RHO',26('.'),1X,F10.5,
     */20X,'PERIODO DE REVISAO',11('.'),1X,F10.5,/20X,'TEMPO DE ENTREGA'
     *,13('.'),1X,F6.2)
      IF(ICUS.EQ.0) GO TO 15
      WRITE(6,1045)CREV,CPED,CUNI,CB,CBUT,CH
 1045 FORMAT(20X,'CUSTO DE REVISAO',13('.'),F10.2,/20X,
     *'CUSTO DE PEDIDO',14('.'),F10.2,/20X,'CUSTO UNITARIO',
     *15('.'),F10.2,/20X,'CUSTO/UNIDADE NA FILA',8('.'),F10.2,/20X,
     *'CUSTO/UNIDADE.ANO NA FILA',4('.'),F10.2,/20X,
     *'CUSTO/UNID.ANO EM ESTOQUE',4('.'),F10.2)
   15 CONTINUE
C
C          CALCULOS PRELIMINARES
C
      TETA=XLAM/(1.-RHO)
      E(1)=TETA
      B(1)=TETA*(T+2*TAL)/2.
      D(1)=0.
      DE(1)=EXP(-XLAM*TAL)*(EXP(-XLAM*T)-1.)/T
      DB(1)=-DE(1)/XLAM-1
      RI(1)=(DB(1)+1)
      FI(1)=TETA-E(1)
      DD(1)=DB(1)+1.
C
C          TETA - DEMANDA MEDIA ANUAL
C          E    - VALOR ESPERADO DO NUMERO DE UNIDADES NA FILA
C          B    - VALOR ESPERADO DAS UNIDADES.ANO NA FILA
C          D    - VALOR ESPERADO DAS UNI.ANO EM ESTOQUE(ESTQUE MEDIO)
C          RI   - TAXA DE GARANTIA
C          FI   - ATENDIMENROS IMEDIATOS
C
      IR=0
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          MAIN            DATE = 82091          23/10/34            PAGE 0002
C
C          CALCULO DOS INDICES.
C
           ZIP1=EXP(-XLAM*(T+TAL))
           ZIP2=EXP(-XLAM*TAL)
           P1(1)=ZIP1
           P2(1)=ZIP2
           CROT1=(1.-RHO)*XLAM*(T+TAL)
           CROT2=(1.-RHO)*XLAM*TAL
C
C          RECURSAO
C
           DO 200 IR=1,N
              P1(IR+1)=0.
              P2(IR+1)=0.
              ZA1(IR   )=0.
              ZA2(IR   )=0.
              ZB1(IR   )=CROT1/IR
              ZB2(IR   )=CROT2/IR
              DO 100 J=1,IR
              ZIM1=ZIP1
              ZIM2=ZIP2
              ZIP1=ZA1(J)
              ZIP2=ZA2(J)
              ZA1(J)=RHO*ZIP1+ZB1(J)*ZIM1
              ZA2(J)=RHO*ZIP2+ZB2(J)*ZIM2
              P1(IR+1)=P1(IR+1)+ZA1(J)
              P2 (IR+1)=P2(IR+1)+ZA2(J)
   100        CONTINUE
              E(IR+1)=E(IR)+DE(IR)
              B(IR+1)=B(IR)+DB(IR)
              D(IR+1)=D(IR)+DD(IR)
              FI(IR+1)=TETA-E(IR+1)
              DE(IR+1)=DE(IR)+(P1(IR+1)-P2(IR+1))/T
              IR1=IR+1
              XS=0.
              DO 150 L=1,IR1
                 L1=L-1
                 AUX=DELT(IR,L1,T,TAL,XLAM,RHO)
                 XS=XS+AUX/T
   150           CONTINUE
           DB(IR+1)=DB(IR)+XS
           RI(IR+1)=(DB(IR+1)+1)
           DD(IR+1)=DB(IR+1)+1
   200     CONTINUE
C
C           IMPRIME INDICES DE PERFORMANCE QUANDO IPER=1
C
           IF(IPER.NE.1) GO TO 400
           WRITE(6,1100)
  1100     FORMAT(1H1,///20X,'I N D I C E S  D E  P E R F O R M A N C E',
          *////20X,'E .... VALOR ESPERADO DO NUMERO DE '
          *,'UNIDADES QUE ENTRARAO NA FILA',/20X,
          *'B .... VALOR ESPERADO DO TAMANHO MEDIO DA FILA',/20X,
          *'D .... VALOR ESPERADO DO ESTOQUE EM MAOS MEDIO',/20X,
          *'R .... TAXA DE GARANTIA',/20X,'F .... ATENDIMENTOS IMEDIATOS')
           WRITE(6,1110)
  1110     FORMAT(1H1,///10X,'I   ',6X,'E',10X,'B',10X,'D',10X,'R',10X,'F',/)
           DO 300 I=1,N
              I1=I-1
              WRITE(6,1120) I1,E(I),B(I),D(I),RI(I),FI(I)
  1120        FORMAT(/8X,I3,6X,5(F6.3,5X))
   300        CONTINUE
   400     CONTINUE
C
C             IMPRIME COMPONENTES DA FUNCAO DE CUSTO E
C             NIVEL OTIMO DE ARMAZENAMENTO
C
           IF(ICUS.EQ.0) GO TO 600
           WRITE(6,1200)
  1200     FORMAT(1H1,///20X,'C O M P O N E N T E S  D A  F U N C A O',
          *'  D E  C U S T O',///20X,'C1 .... '
          *,'CUSTO DE ABASTECIMENTO(INDEPENDENTE DO NIVEL DO ESTOQUE)',
          */20X,'C2 .... CUSTO DE REVISAO (INDEPENDENTE DO NIVEL DO ESTOQUE'
          *,/20X,'C3 .... CUSTO UNIDADES NA FILA',/20X,
          * 'C4 .... CUSTO DE PERMANENCIA NA FILA',/20X,
          * 'C5 .... CUSTO DE POSSE')
           WRITE(6,1210)
```

```
FORTRAN IV G1   RELEASE 2.0            MAIN            DATE = 82091          23/10/34             PAGE 0003

      1210 FORMAT(1H1,//10X,'NIVEL',10X,'C1',10X,'C2',10X,'C3',10X,'C4',
          *10X,'C5',10X,'CUSTO TOTAL',/)
           C1=CREV/T
           C2=CPED/T*(1.-EXP(-XLAM*T))+TETA*CUNI
           KEY=0
           DO 500 I=1,N1
              I1=I-1
              C3=E(I)*CB
              C4=S(I)*CBUT
              C5=D(I)*CH*CUNI
              CK=C1+C2+C3+C4+C5
              DCK=CB*DE(I)+(CBUT+CUNI*CH)*DB(I)+CUNI*CH
              IF(DCK.LT.0.OR.KEY.EQ.1)GO TO 450
              KEY=1
              IRO=I1
              CKO=CK
      450     CONTINUE
              WRITE(6,1230) I1,C1,C2,C3,C4,C5,CK
      1230    FORMAT(/,15X,I3,5(F10.2,2X),2X,F10.2)
      500     CONTINUE
           WRITE(6,1240)IRO
      1240 FORMAT(////20X,'NIVEL OTIMO DE ESTOQUE....',I5)
      800  STOP
           END
```

```
FORTRAN IV G1   RELEASE 2.0            MAIN            DATE = 82091          23/10/34             PAGE 0004

  *OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
  *OPTIONS IN EFFECT*  NAME = MAIN   , LINECNT =       60
  *STATISTICS*    SOURCE STATEMENTS =       107,PROGRAM SIZE =       5254
  *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0            DELT              DATE = 82091          23/10/34                PAGE 0001

 0001               FUNCTION DELT(IR,J,T,TAL,XLAM,RHO)                                      00165
 0002               C=CX(IR,J,RHO)                                                          00166
 0003               IFATJ=IFAT(J)                                                           00167
 0004               S=0.                                                                    00168
 0005               J1=J+1                                                                  00169
 0006               DO 100 I=1,J1                                                           00190
 0007                  K=I-1                                                                00191
 0008                  IFATJK=IFAT(J-K)                                                     00192
 0009                  X=(-1.)*(EXP(-XLAM*(T+TAL))*(T+TAL)**(J-K)-EXP(-XLAM*TAL)            00193
                  1     *TAL**(J-K))/(XLAM**K*FLOAT(IFATJK))                                00194
 0010                  S=S+X                                                                00195
 0011          100     CONTINUE                                                             00196
 0012                  DELT=C*XLAM**(J-1)*S                                                 00197
 0013               RETURN                                                                  00198
 0014               END                                                                     00199
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0            DELT              DATE = 82091          23/10/34                PAGE 0002

  *OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
  *OPTIONS IN EFFECT*  NAME = DELT     , LINECNT =       60
  *STATISTICS*     SOURCE STATEMENTS =       14,PROGRAM SIZE =       920
  *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          IFAT          DATE = 82091       23/10/34            PAGE 0001

                FUNCTION IFAT(J)
                IFAT=1
                IF(J.EQ.0) GO TO 2
                DO 10 I=1,J
                   IFAT=IFAT*I
        10         CONTINUE
        20      RETURN
                END
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          IFAT          DATE = 82091       23/10/34            PAGE 0002

*OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
*OPTIONS IN EFFECT*  NAME = IFAT     , LINECNT =       60
*STATISTICS*     SOURCE STATEMENTS =       8,PROGRAM SIZE =       370
*STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          CX              DATE = 82091        23/10/34            PAGE 0001

                FUNCTION CX(IR,J,RHO)                                             00208
                CX=1.                                                             00209
                IF(IR.EQ.0.AND.J.EQ.0.) GO TO 100                                 00210
                CX=0.                                                             00211
                IF(IR.EQ.0.OR.J.EQ.0) GO TO 100                                   00212
                K1=IFAT(IR-1)                                                     00213
                K2=IFAT(J-1)                                                      00214
                K3=IFAT(IR-J)                                                     00215
                CX=K1/K2/K3*RHO**(IR-J)*(1.-RHO)**J                               00216
          100   RETURN                                                            00217
                END                                                               00218
```

```
FORTRAN IV G1  RELEASE 2.0          CX              DATE = 82091        23/10/34            PAGE 0002

 *OPTIONS IN EFFECT*  NOTERM,NOID,EBCDIC,SOURCE,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOTEST
 *OPTIONS IN EFFECT*  NAME = CX      , LINECNT =      60
 *STATISTICS*     SOURCE STATEMENTS =       11,PROGRAM SIZE =      754
 *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS GENERATED

 *STATISTICS*  NO DIAGNOSTICS THIS STEP 0
```

```
DADOS UTILIZADOS

ESTOQUE MAXIMO.................   20
LAMBDA.........................    2.00000
RHO............................    0.50000
PERIODO DE REVISAO.............    0.25000
TEMPO DE ENTREGA...............   0.10
CUSTO DE REVISAO...............      1.00
CUSTO DE PEDIDO................      1.00
CUSTO UNITARIO.................     10.00
CUSTO/UNIDADE NA FILA..........     20.00
CUSTO/UNIDADE.ANO NA FILA......      3.00
CUSTO/UNID.ANO EM ESTOQUE......      0.20
```

```
I N D I C E S   D E   P E R F O R M A N C E

E .... VALOR ESPERADO DO NUMERO DE UNIDADES QUE ENTRARAO NA FILA
B .... VALOR ESPERADO DO TAMANHO MEDIO DA FILA
D .... VALOR ESPERADO DO ESTOQUE EM MAOS MEDIO
R .... TAXA DE GARANTIA
F .... ATENDIMENTOS IMEDIATOS
```

I	E	B	D	R	F
0	4.000	0.900	0.0	0.644	0.0
1	2.711	0.544	0.644	0.783	1.289
2	1.791	0.327	1.427	0.868	2.209
3	1.159	0.195	2.295	0.921	2.841
4	0.738	0.116	3.216	0.953	3.282
5	0.464	0.068	4.168	0.972	3.536
6	0.288	0.040	5.140	0.983	3.712
7	0.177	0.024	6.124	0.990	3.823
8	0.108	0.014	7.114	0.994	3.892
9	0.066	0.008	8.108	0.997	3.934
10	0.040	0.005	9.105	0.998	3.960
11	0.024	0.003	10.103	0.999	3.976
12	0.014	0.002	11.102	0.999	3.986
13	0.008	0.001	12.101	1.000	3.992
14	0.005	0.000	13.100	1.000	3.995
15	0.003	0.000	14.100	1.000	3.997
16	0.002	-0.000	15.100	1.000	3.998
17	0.001	-0.000	16.100	1.000	3.999
18	0.001	-0.001	17.099	1.000	3.999
19	0.000	-0.001	18.099	1.000	4.000
20	0.000	-0.001	19.099	1.000	4.000

C O M P O N E N T E S D A F U N C A O D E C U S T O

C1 .... CUSTO DE ABASTECIMENTO(INDEPENDENTE DO NIVEL DO ESTOQUE)
C2 .... CUSTO DE REVISAO (INDEPENDENTE DO NIVEL DO ESTOQUE
C3 .... CUSTO UNIDADES NA FILA
C4 .... CUSTO DE PERMANENCIA NA FILA
C5 .... CUSTO DE POSSE

NIVEL	C1	C2	C3	C4	C5	CUSTO TOTAL
0	4.00	41.57	80.00	2.70	0.0	128.27
1	4.00	41.57	54.23	1.63	1.29	102.72
2	4.00	41.57	35.81	0.98	2.85	85.22
3	4.00	41.57	23.18	0.59	4.59	73.93
4	4.00	41.57	14.76	0.35	6.43	67.11
5	4.00	41.57	9.28	0.21	8.34	63.39
6	4.00	41.57	5.77	0.12	10.26	61.74
7	4.00	41.57	3.55	0.07	12.25	61.44
8	4.00	41.57	2.17	0.04	14.23	62.01
9	4.00	41.57	1.31	0.02	16.22	63.13
10	4.00	41.57	0.79	0.01	18.21	64.59
11	4.00	41.57	0.47	0.01	20.21	66.26
12	4.00	41.57	0.28	0.00	22.20	68.06
13	4.00	41.57	0.17	0.00	24.20	69.95
14	4.00	41.57	0.10	0.00	26.20	71.87
15	4.00	41.57	0.06	0.00	28.20	73.83
16	4.00	41.57	0.03	-0.00	30.20	75.81
17	4.00	41.57	0.02	-0.00	32.20	77.79
18	4.00	41.57	0.01	-0.00	34.20	79.78
19	4.00	41.57	0.01	-0.00	36.20	81.78

NIVEL OTIMO DE ESTOQUE....

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] HADLEY, WHITIN - Analysis of Inventory Systems Prentice-Hall Inc.Englewood Clifts, New Jersey, 1963

[2] NADDOR, E. - Inventory Systems - John Wiley and Sons, Inc. New York, 1966.

[3] BROWN, R.G. - Decision Rules for Inventory Management Holt, Rinehart, and Wilson, New York, 1967.

[4] FELLER, W., - An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1950.

[5] HOWARD, R.A. - Dynamic Programming and Markov Process John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.

[6] VALADARES, L. e ALMEIDA, L.T. - A Binary Decision Model for Stock control of Very Slow Moving Items Publicação interna do CESUR.

[7] CROSTON, J.D. - Stock Levels for Slow-movint Items Opl. Res.Q.23,123.

[8] MUCKSTADT, J.A. e THOMAS L.J. - Are Multi-echelon Inventory Methods Worth Implementing In Systems with Low-Demand-Rate Items? Management Science Vol.26, No.5, 1980.

[9] PARZEN, E., - Stochastic Processes Holden-Day, Inc., San Francisco, 1962.

[10] SOUZA, R.C. - A Bayesian Entropy Approach to Forecasting Ph.D.Thesis, University of Warwick. Conventry, U.K, 1978.

[11] SOUZA, R.C. - A Bayesian Entropy Approach to Forecasting Applied to Slow Moving Items for Inventory Decision.
Presented at the 5th ITSM, Houston, Texas, 1981.

[12] BURGIN, T.A., WILD, A.R. - Stock Control - Experience and Usable Theory Opl. Res.Q.Vol. 18, pag.35.

[13] FEENEY, G.J. e C.C. Sherbrooke - The (s-1,s) Inventory Policy Under Compound Poisson Demand: A Theory of Recoverable Item Stockage. The Rand Corporation, RM-4176-PR, 1965.

[14] FEENEY, G.J. e C.C. Sherbrooke, An Objective Bayes Approach for Inventory Decisions The Rand Corporation, RM-4362-PR, 1965.

[15] FEENEY, G.J. e C.C. Sherbrooke - A System Approach to
Base Stockage of Recoverable Items.
The Rand Corporation, RM-1720-PR,1965

[16] CROSTON, J.D., - Forecasting and Stock Control for
Intermittend Demands.
Opl.Res.Q.vol.23, pag. 289.

[17] PORTILLA, A. - Forecasting Demand of Slow Moving Items
for Inventory Decisions
M.Sc. thesis, University of Warwick, 1978.

[18] HARRISON, P.J. e STEVENS, C.F. - A Bayesian Forecasting
(with discusion), J.Rey.Statist.Soc.
B 38,205-247, 1976.

[19] SHANNON, C.E. e WEAVER, W. - The Mathematical Theory of
Communications
University of Illinois Press, Chicago,1948.

[20] KULLBACK, S. - Information theory and Statistics.
Dover Publications, Inc., New York, 1968.

[21] AKAIKE, H. - An Objective use of Bayesian Models
Ann.Inst.Statist.Math. 29,A,9-29, 1977.

[22] PALM, C., - Analysis of the Erlang Traffic Formula for
Busy-Signal Arrangements
Ericsson technics, No.5, 1938,pp 39-58.