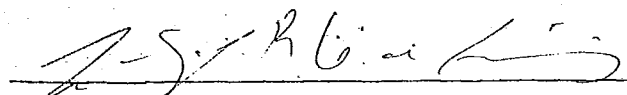


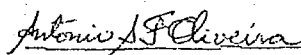
PENALIZAÇÃO HIPÉRBOLICA: UM NOVO MÉTODO  
PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

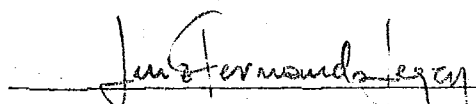
Adilson Elias Xavier

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

  
João Lizardo Rodrigues Hermes de Araújo  
(Presidente)

  
Antonio Alberto Fernandes de Oliveira

  
Luiz Fernando Loureiro Legey

DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1982

XAVIER, ADILSON ÉLIAS

Penalização Hiperbólica: Um Novo Método para Resolução de Problemas de Otimização (Rio de Janeiro) 1977.

X , 90 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ), M.Sc. Engenharia de Sistemas e Computação.

Tese - Univ. Fed. do Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Otimização, Métodos das Penalidades

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

A meus pais.

Seu Dino e Dona Belinha

SUMÁRIO

O algoritmo apresentado neste trabalho pertence à família dos métodos das penalidades e combina características tanto dos métodos das penalidades exteriores como dos métodos das penalidades interiores. Tem como propósito resolver o problema geral de programação não-linear sujeito a restrições de desigualdade. O método transforma a solução deste problema na solução de uma sequência de problemas de minimização sem restrições, cujos valores convergem para o ótimo do problema original, desde que certas condições sejam atendidas. A questão da inviabilidade é testada através da solução de um problema auxiliar. Especificada uma tolerância, é possível a obtenção de uma solução aproximada em uma única iteração. Ao final de cada iteração se obtém uma cota inferior e uma superior que limitam o valor das soluções do problema. Para o caso convexo, o método gera pontos duais viáveis e a correspondente sequência de valores obtidos para a função dual converge para o valor ótimo do primal. São apresentados os resultados computacionais para dois pequenos problemas. O método proposto possui a importante característica de ser completamente contínuo.

ABSTRACT

The algorithm presented in this work belongs to the family of penalty methods and combines features of both outer and inner penalty methods. It purports to solve the general nonlinear programming problem subject to inequality constraints. The method transforms the solution of this problem into the solution of a sequence of unconstrained minimization problems, whose values converge to the optimum of the original problem, provided that certain conditions are fulfilled. The issue of infeasibility is tested through the solution of an auxiliary problem. Once a tolerance is specified, it is possible to obtain an approximate solution in one single iteration. At the end of each iteration brackets are obtained which are bounds to the value of the solution, both lower and upper. For the convex case, the method generates dual feasible points and the correspondent sequence of values obtained for the dual function converges to the optimum value of the primal problem. Computational results are presented for two small problems. The proposed method has the important feature of being completely continuous.

AGRADECIMENTOS

Externo meus agradecimentos, às seguintes pessoas, que decididamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Professor João Lizardo Rodrigues Hermes de Araújo, pela sua orientação precisa e criteriosa.

Ao amigo Raul Antônio Medeiros Aranha Mourão Vieira, pelo apoio e pela formulação de críticas e sugestões que permitiram o aperfeiçoamento do trabalho.

À colega Lucila Haas Macedo de Oliveira, que, durante um bom período, sustentou toda a sobrecarga de serviços decorrente do decréscimo da minha dedicação.

A Daisy Lima Pierucci pela eficiência e rapidez na datilografia das minutas e dos originais.

A Francisco de Assis Lopes pelo cuidado e paciência na confecção dos desenhos.

E, finalmente, à minha esposa Solange que, além da dedicação e encorajamento, teve que se desdobrar, ainda mais, como mãe e companheira.

NOTAÇÃO

$R^n$	- Espaço Euclidiano n dimensional
$n$	- Dimensão do espaço Euclidiano
$x$	- Variável no espaço $R^n$
$f(x)$	- Função objetivo
$F(x, \alpha, d)$	- Função objetivo modificada
$g(x)$	- Vetor restrições de desigualdade
$g_i(x)$	- Restrição de desigualdade específica
$i$	- Índice especificando restrição de desigualdade
$m$	- Número de restrições de desigualdade
$h(x)$	- Vetor restrições de igualdade
$h_j(x)$	- Restrição de igualdade específica
$j$	- Índice especificando restrição de igualdade
$p$	- Número de restrições de igualdade
$l$	- Índice para restrição satisfazendo condição específica
$P(x, \alpha, d)$	- Função penalidade
$\alpha$	- Parâmetro da função penalidade (ângulo)

- d - Parâmetro da função penalidade (distância)
- $x^*$  - Ponto ótimo do problema de programação
- $m^*$  - Número de restrições de desigualdade ativas no ponto  $x^*$
- z - Ponto viável
- $\omega$  - Ponto inviável
- v - Ponto na fronteira da região viável
- S - Região viável
- A - Conjunto de restrições violadas
- V - Gradiente
- H - Matriz hessiana
- u - Multiplicador de Lagrange
- $\epsilon$  - Quantidade arbitrariamente pequena
- $\lambda$  - Escalar
- k - Iteração



- $x^k$  - Ponto ótimo da função objetivo modificada na iteração  $k$
- $b$  - Semi-eixo maior de hipérbole
- $a$  - Semi-eixo menor de hipérbole
- $P \#$  - Referência a propriedade da função penalidade ( $\#$  representa o número de propriedade)
- $C \#$  - Referência a condição exigida do problema ( $\#$  representa o número da condição)

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</u>	1
<u>CAPÍTULO II - APRESENTAÇÃO DO ALGORITMO.....</u>	11
<u>CAPÍTULO III - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO.....</u>	20
<u>CAPÍTULO IV - EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL.....</u>	55
<u>CAPÍTULO V - CONCLUSOES.....</u>	71
<u>BIBLIOGRAFIA.....</u>	81
<u>ANEXO 1.....</u>	84

CAPÍTULO IINTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Consideremos o problema geral de programação não linear

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s. a.} \quad g_i(x) \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{1}$$

Grande parte dos métodos que obtêm com êxito a solução deste problema pertence à família dos métodos das penalidades. Graças à propriedade de sua relativa confiabilidade, acrescida da grande facilidade de sua programação, estes métodos são considerados uma das melhores ferramentas para a solução de problemas de minimização com restrições.

A característica comum aos métodos das penalidades é a transformação do problema de minimização com restrições no problema sem restrições

$$\min F(x) = f(x) + P(x) \tag{2}$$

onde  $P(x)$ , chamada função penalidade, incorpora convenientemente as restrições  $g(x)$  e  $h(x)$ .

A idéia intuitiva atrás de todos os métodos das penalidades é que a função penalidade possua o poder de aumentar fortemente os valores fora da região viável e simultaneamente tenha a sua influência desprezível ou mesmo nula dentro desta região, de modo tal que o ponto ótimo do problema modificado (2) esteja aceitavelmente próximo do ponto ótimo do problema original.

A grande maioria dos métodos das penalidades obtém o ponto ótimo através da solução de uma sequência de problemas de minimização obtida pela variação controlada de um parâmetro externo, que faz com que se aumente gradativamente o grau em que o problema sem restrições se aproxima do original. Atendidas certas hipóteses, a correspondente sequência de pontos de mínimo converge para um ponto viável do problema com restrições que satisfaz as condições de otimalidade.

Estes métodos, amplamente utilizados na prática, são classificados, considerando-se essencialmente as maneiras em que as funções penalidades são construídas, em dois grandes e distintos grupos básicos: das penalidades exteriores e das penalidades interiores.

Um histórico completo da evolução destes métodos é dada por Fiacco/Mc Cormich [5]. Conforme citado nesta referência, bem como em Avriel [1], Polak [14] e Luenberger [13], o trabalho pioneiro nos métodos das penalidades exteriores foi proposto por Courant em 1943, enquanto no caso das penalidades inte

riores os primeiros trabalhos são devidos a Frish em 1955 e Carrol em 1959. Entre os trabalhos posteriores nos ativemos basicamente aos desenvolvidos por três autores: Fiacco/Mc Cormich |<sup>3, 4, 5</sup>|, Zangwill |<sup>15</sup>| e Loostma |<sup>8, 9, 10, 11, 12</sup>|. embora constituem um pequeno subconjunto do que tem sido publicado, estes trabalhos são de grande importância, já que são quase sempre citados em artigos sobre penalização.

Nos métodos das penalidades exteriores as funções penalidades  $P(x)$  prescrevem um alto custo para violações a restrições. A medida que o parâmetro externo aumenta, a severidade deste efeito aumenta. Consequentemente se torna progressivamente mais e mais proibitivo se afastar da região viável. A figura 1 dá uma idéia visual deste mecanismo para o caso unidimensional.

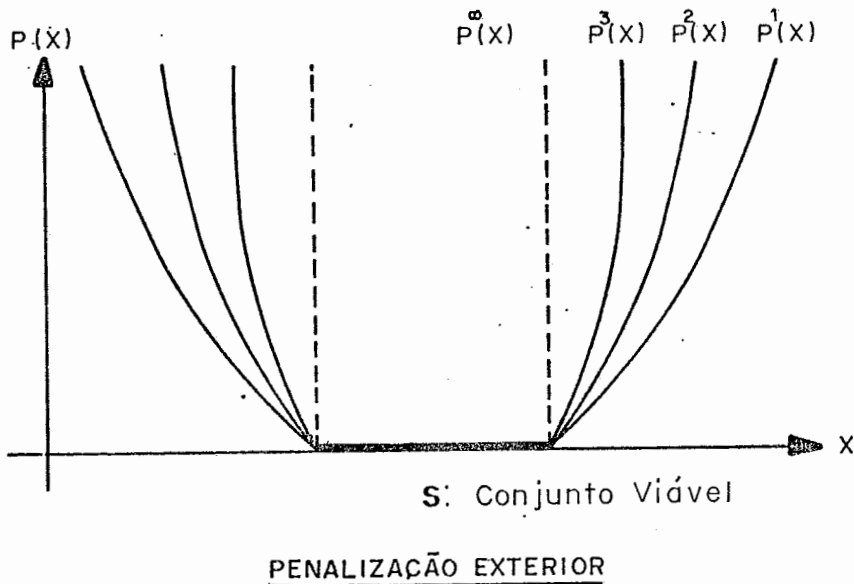


Figura 1

Nestes métodos, a primeira solução viável é também ótima para o problema de programação (1). Como quase nenhum problema surgido na prática tem seu mínimo no interior da região viável, em geral a sequência de pontos de mínimo sem restrições vai gradativamente se aproximando da fronteira da região viável até atingi-la. Assim os métodos das penalidades exteriores tem a marcante característica de seus pontos seguirem uma trajetória de fora para dentro da região viável.

Nos métodos das penalidades interiores todo o processo se desenvolve trabalhando-se exclusivamente com pontos viáveis. As funções penalidades tem a característica de favorecer pontos interiores à região viável em relação àqueles da fronteira, possuindo assim um poder de repulsão à fronteira. Por causa desta última propriedade estes métodos são também conhecidos como método das barreiras, desde que, existe um alto desestímulo à proximidade da fronteira. À medida que o parâmetro externo aumenta, gradativamente diminui o custo de proximidade à fronteira. A figura 2 ilustra o funcionamento do método.

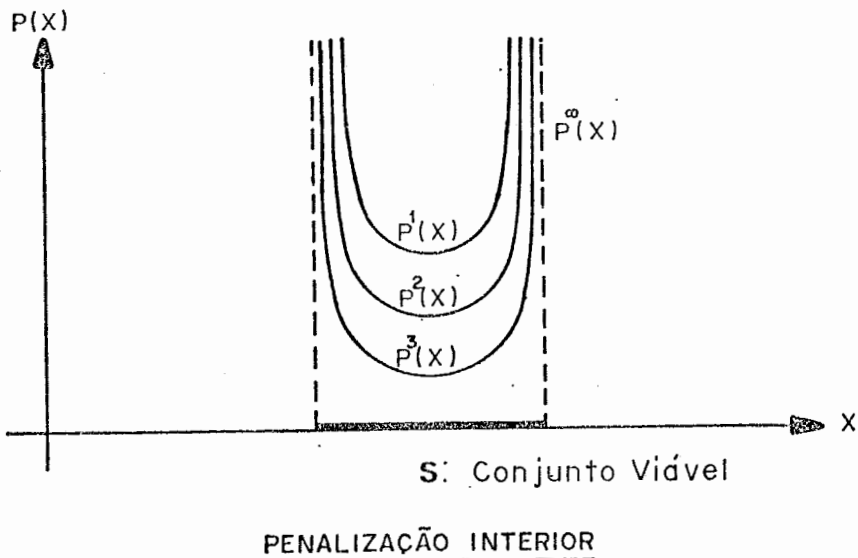


Figura 2

Na sequência dos problemas sem restrições (2), em geral, a cada iteração o ponto de mínimo vai gradativamente se aproximando da fronteira da região viável até, no limite, atingi-la. Assim estes métodos tem a marcante característica de seus pontos de mínimo seguirem uma trajetória de dentro para fora da região viável, sem saírem dela.

Podemos ainda considerar o grupos dos métodos das penalidades mistas, obtido pela combinação simultânea das duas técnicas acima apresentadas. Nestes métodos, o conjunto das restrições é particionado em duas partes, sendo, então, uma tratada por funções penalidades exteriores e a outra por penalidades interiores.

Um outro grupo de métodos é o dos métodos das penalidades livres de parâmetros. Estes, da mesma forma que os anteriores, obtém o mínimo através da solução de uma sequência de problemas de minimização sem restrições mas com a características de que os parâmetros são automaticamente determinados no desenrolar do processo.

Como mostrado por Lootsma [9, 11], tanto os métodos das penalidades interiores como os das penalidades exteriores podem ser modificados de maneira a ser transformarem em métodos livres de parâmetros. Assim, por exemplo, o muito conhecido método dos centros de Huard é equivalente à programação logarítmica (penalidade interior) proposta por Frish e posteriormente desenvolvida por Lootsma [8]. Entretanto, não apresentam

qualquer vantagem sobre os métodos anteriormente apresentados pois a sua taxa de convergência é muito baixa <sup>[11]</sup>.

Em todos os métodos até aqui referidos, a solução do problema foi obtida através de uma sequência de problemas de minimização sem restrições. Existe um outro grupo de métodos que tem a propriedade de obter esta solução através de uma única minimização. São os chamados métodos das penalidades exatas.

Um dos primeiros destes métodos é devido a Zangwill <sup>[15]</sup>, usando uma função penalidade exterior linear. Posteriormente Evans, Gould e Tolle (conforme exposto em Avriel <sup>[1]</sup>) desenvolveram uma teoria geral completa sobre penalização exata para uma ampla classe de funções penalidades diferenciáveis por partes. Entre as funções especificamente estudadas destaca-se uma função penalidade exterior exponencial.

A aparente vantagem destes métodos desaparece quando consideramos que a função penalidade não é diferenciável no ponto de ótimo. Consequentemente as técnicas mais eficientes de minimização não podem ser utilizadas e a utilidade destes métodos é, no mínimo, duvidosa.

Inicialmente, considerando problemas só com restrições de igualdade, Fletcher (conforme exposto em Avriel <sup>[1]</sup>), desenvolveu um elegante método para transformá-los na minimização de funções penalidades exatas diferenciáveis, em que a única dificuldade, embora não simples, se resume na determinação



de um parâmetro auxiliar.

Posteriormente, este método foi estendido para problemas com restrições de desigualdade. Entretanto, as dificuldades computacionais são agora bem maiores já que para cada avaliação da função é necessário a solução de um problema quadrático auxiliar.

Finalmente falta a referência aos métodos lagrangeanos. Neste grupo de métodos, a solução do problema também é obtida via solução de uma sequência de minimização sem restrições. A função minimizada é igual à soma do lagrangiano mais um termo que tem a finalidade de garantir que a função tenha um mínimo e não um ponto estacionário qualquer. Os multiplicadores de Lagrange, a priori desconhecidos, são atualizados após cada minimização. Os métodos de multiplicadores de Hestenes, de Powell e de Rockafellar (descritos em Avriel [1]) pertencem a este grupo.

O método que aqui desenvolveremos, a rigor, não pode ser classificado em qualquer dos grupos anteriormente referidos. Entretanto tem características bastante comuns com as penalidades exteriores, já que trata ponto fora da região viável com uma ação idêntica a estes métodos. Da mesma maneira, tem alguma semelhança aos métodos das penalidades interiores já que a função penalidade usada possui um efeito de repulsão à fronteira, embora não sendo propriamente uma barreira. De outro lado, estabelecida uma tolerância, é possível obter uma boa aproximação para o mínimo em uma única iteração. Esta propriedade de certa forma o aproxima dos métodos das penalidades exatas.

O problema é resolvido através da solução de uma sequência de minimizações sem restrições. Ao contrário dos outros métodos, que têm um único parâmetro, a sequência de minimizações é obtida pela variação de dois parâmetros, a saber: um ângulo  $\alpha$  e uma distância  $d$ . É natural se supor, que a existência de dois parâmetros, além de complicar fortemente a operacionalização do método, deveria comprometer o seu desempenho. Entretanto, como será visto, esta coexistência não traz maiores problemas, uma vez que, os parâmetros são manipulados separadamente em duas diferentes fases do algoritmo.

O método trabalha com uma função penalidade que apresenta a destacável característica de ser completamente diferenciável. Outra característica importante, é que qualquer ponto pode ser tomado como ponto inicial, assim como, não se faz necessário qualquer controle sobre a localização dos pontos intermediários dentro de cada minimização sem restrições. O método apresenta a vantagem de obter ao final de cada iteração na segunda fase do algoritmo duas cotas que limitam o valor da solução final do problema e que, por isso, se constituem num excelente critério para parada do processo de minimizações. Além disso, é possível obter uma solução aproximada, mas com uma pré-estabelecida precisão, em uma única iteração no parâmetro  $d$ . Finalmente, para problemas convexos, o método obtém pontos duais viáveis. Os correspondentes valores da função dual convergem para o ótimo do primal.

A questão da inviabilidade é tratada através da solução de um problema auxiliar intimamente integrado ao método utilizado para a resolução do problema original.

A sequência de pontos de mínimo das minimizações sem restrições tem em geral a seguinte trajetória. Inicialmente se aproxima da região viável até penetrá-la. Em seguida, segue-se o movimento inverso no sentido da fronteira até, no limite, atingi-la. Ou seja, o método proposto tem a característica de seus pontos de mínimo seguirem uma trajetória "de fora para dentro" numa primeira fase (igual aos métodos das penalidades exteriores) e "de dentro para fora" na segunda fase (igual aos métodos das penalidades interiores).

A fim de ilustrar todo o mecanismo de funcionamento do método e algumas de suas características, são apresentados os resultados computacionais para dois problemas.

Como última observação, deve ser dito que, quando o parâmetro  $d$  se iguala a zero, o método proposto se confunde com o método de penalização exata de Zangwill <sup>15</sup>, que se utiliza da seguinte função penalidade:

$$P(x, \lambda) = \lambda \sum_{i=1}^m -\min(0, g_i(x)).$$

Com a ressalva de que a bibliografia consultada não tenha sido completa, em particular, em vista de sua enorme extensão, vale registrar que não nos foi possível observar qual-

quer outra semelhança mais próxima, além da acima referida, entre o método proposto e os inúmeros outros métodos aí descritos.

CAPÍTULO IIAPRESENTAÇÃO DO ALGORITMO

O algoritmo a seguir apresentado se propõe a resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) & \qquad \qquad \qquad (3) \\ \text{sujeito às condições } g_i(x) & \geq 0, \quad i=1, \dots, m. \end{aligned}$$

sendo "f" e "g" funções quaisquer de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ou seja, trata-se da obtenção de solução do Problema Geral de Programação Não Linear sujeito unicamente a Restrições de Desigualdade.

A solução é obtida através da solução de uma sequência de minimizações sem restrições da função objetivo original  $f(x)$  acrescida de um termo  $P(g(x), \alpha, d)$  correspondente à penalidade. A função minimizada é, então, definida como:

$$F(x, \alpha, d) = f(x) + P(g(x), \alpha, d) = f(x) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \alpha, d) \quad (4)$$

onde  $P$  é uma função penalidade apropriada.

O método proposto no presente trabalho se inspirou na função hiperbólica abaixo definida. Como ficará claro a seguir, o método é válido para uma classe bem mais ampla de funções de penalidade.

$$P(y, \alpha, d) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)-1} \left(-y + \sqrt{y^2 + d^2 \frac{(\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)-1)^2}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}}\right) \quad (5)$$

$\alpha$  e  $d$  variando nos intervalos:

$$\alpha \in (0, \pi/2)$$

e

$$d \geq 0.$$

Na apresentação do trabalho, é conveniente apresentar esta hipérbole numa forma mais compacta:

$$P(y, \alpha, d) = P(y, r, d) = \frac{r}{r^2-1} \left(-y + \sqrt{y^2 + d^2 \frac{(r^2-1)^2}{r^2}}\right) \quad (6)$$

$$r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right), \quad r \in (1, \infty) \quad (7)$$

Quando colocada em termos de seus dois semi-eixos  $a$  e  $b$  a hipérbole apresenta a expressão:

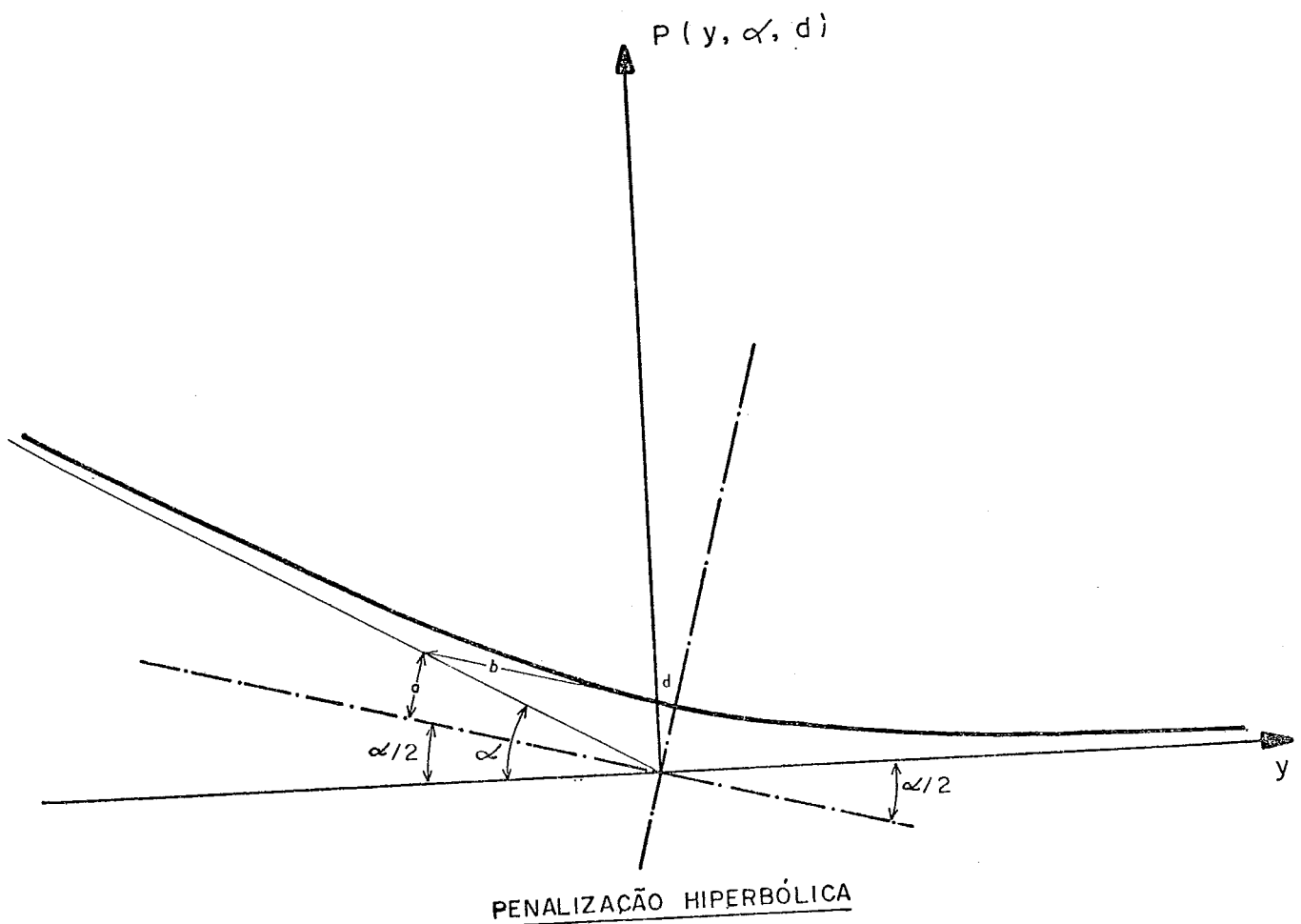
$$P(y, \alpha, d) = P(y, a, b) = \frac{ab}{b^2 - a^2} (-y + \sqrt{y^2 + (b^2 - a^2)})$$

onde:

$$b = d \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) - 1}, \quad b \in |0, \infty),$$

$$a = d \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) - 1} / \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right), \quad a \in |0, \infty) \quad \text{e} \quad b > a$$

A figura 3 ilustra a função hiperbólica definida pela equação (5).



PROPRIEDADES DA FUNÇÃO PENALIDADE

O método proposto está baseado em funções de penalização que apresentem as propriedades abaixo:

P0 -  $P(y, \alpha, d)$  é uma função contínua, bem como, continuamente diferenciável em  $y$  para valores  $0 < \alpha < \pi/2$  e  $d > 0$ .

P1 -  $P(y, \alpha, d)$  é assintoticamente tangente às retas  $r_1(y) = -t.tg\alpha$  e  $r_2(y) = 0$  para  $d > 0$ .

P2 -  $\lim_{y \rightarrow +\infty} P(y, \alpha, d) = 0$  para  $d \geq 0$  e  $0 < \alpha < \pi/2$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} P(y, \alpha, d) = +\infty$  para  $d \geq 0$  e  $0 < \alpha < \pi/2$

P3 -  $P(0, \alpha, d) = d$  para  $d \geq 0$  e  $0 < \alpha < \pi/2$

P4 -  $P(y, \alpha^{k+1}, d) < P(y, \alpha^k, d)$  para  $y > 0$   
 $P(y, \alpha^{k+1}, d) = P(y, \alpha^k, d) = d$  para  $y = 0$   
 $P(y, \alpha^{k+1}, d) > P(y, \alpha^k, d)$  para  $y < 0$

}  $\begin{cases} 0 < \alpha^k < \alpha^{k+1} < \pi/2 \\ d > 0 \end{cases}$

P5 -  $P(y, \alpha^{k+1}, d)$  é uma função convexa e decrescente em  $y$  para  $d > 0$  e  $0 < \alpha < \pi/2$  e é uma função convexa e não crescente em  $y$  para  $d = 0$  e  $0 < \alpha < \pi/2$ .



$$P6 - P(y, \alpha, d^{k+1}) < P(y, \alpha, d^k) \text{ para } \forall y, 0 < \alpha < \pi/2 \quad e \\ 0 \leq d^{k+1} < d^k$$

$$P7 - \lim_{d \rightarrow 0} P(y, \alpha, d) = \begin{cases} 0 & \text{para } y \geq 0 \\ -y \operatorname{tg} \alpha & \text{para } y < 0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < \pi/2$$

$$P8 - P(y, \alpha, d) \geq -y \operatorname{tg} \alpha \text{ para } \forall y, 0 < \alpha < \pi/2, d \geq 0$$

$$P9 - |P(y, \alpha, d^{k+1}) - P(t, \alpha, d^{k+1})| < |P(y, \alpha, d^k) - P(t, \alpha, d^k)| \\ \text{para } \forall y, \forall t, 0 < \alpha < \pi/2 \text{ e } 0 \leq d^{k+1} < d^k$$

P10 -  $P(g(x), \alpha, d)$  é uma função convexa em  $x$  se  $g(x)$  for uma função côncava.

$$P11 - \operatorname{Max}_y (P(y, \alpha, d^0) - P(y, \alpha, d^1)) = d^0 - d^1 \text{ e ocorre em } y=0 \\ \text{para } 0 < \alpha < \pi/2 \text{ e } 0 \leq d^1 < d^0$$

P12 - A derivada da função penalidade em relação a  $y$ , ou seja,  $P'_y(y, \alpha, d)$  é uma função decrescente com  $d$  para pontos  $y > 0$  (e é uma função crescente com  $d$  para pontos  $y < 0$ ).

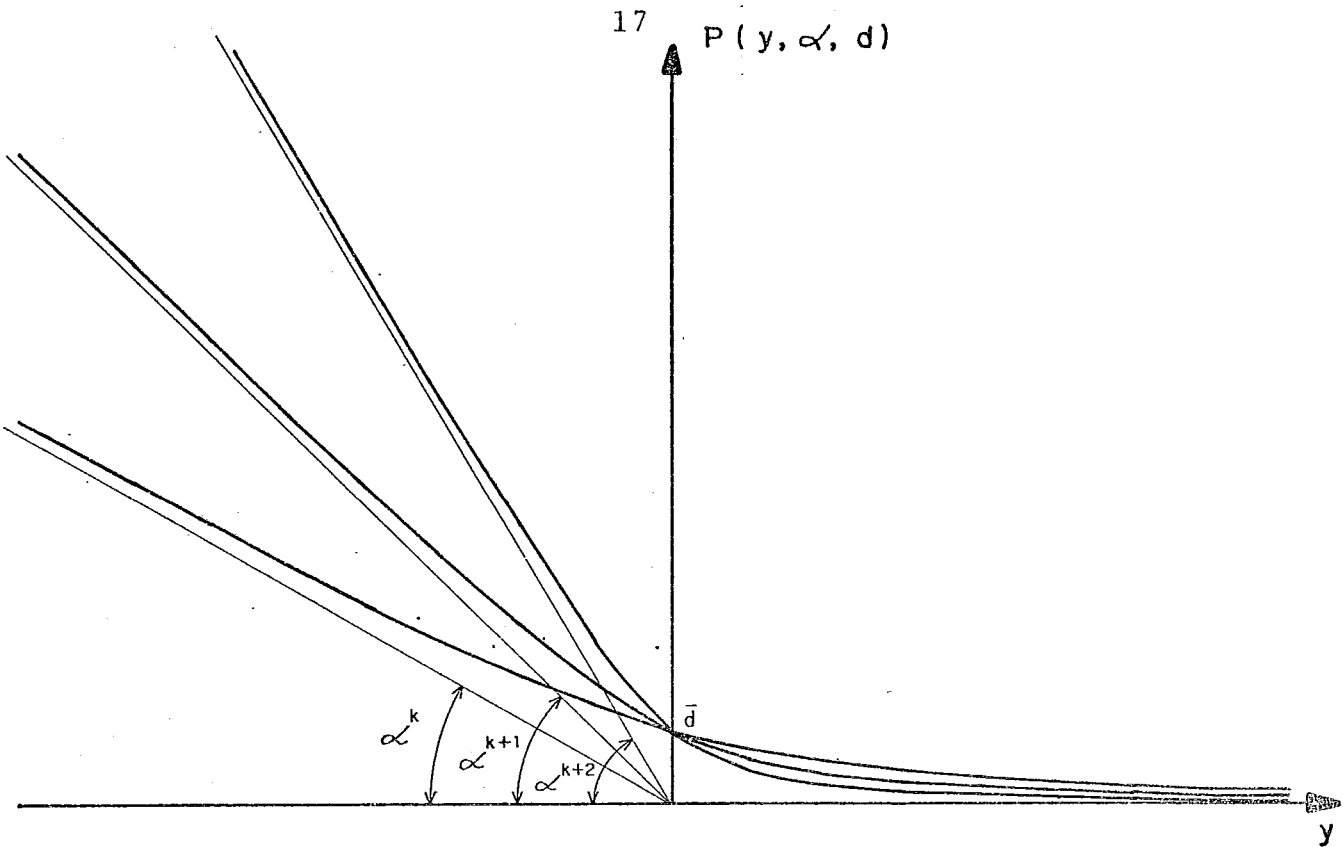
A função de penalidade  $P(y, \alpha, d)$  definida em (5) satisfaz as 13 propriedades acima enunciadas. As 4 últimas propriedades por serem menos evidentes vão demonstradas no anexo 1.

Objetivando-se simplificar a linguagem e considerando-se o que foi dito acima, chamaremos de "penalização hiperbólica" a qualquer função que satisfaça às 13 propriedades ante-

riormente enunciadas.

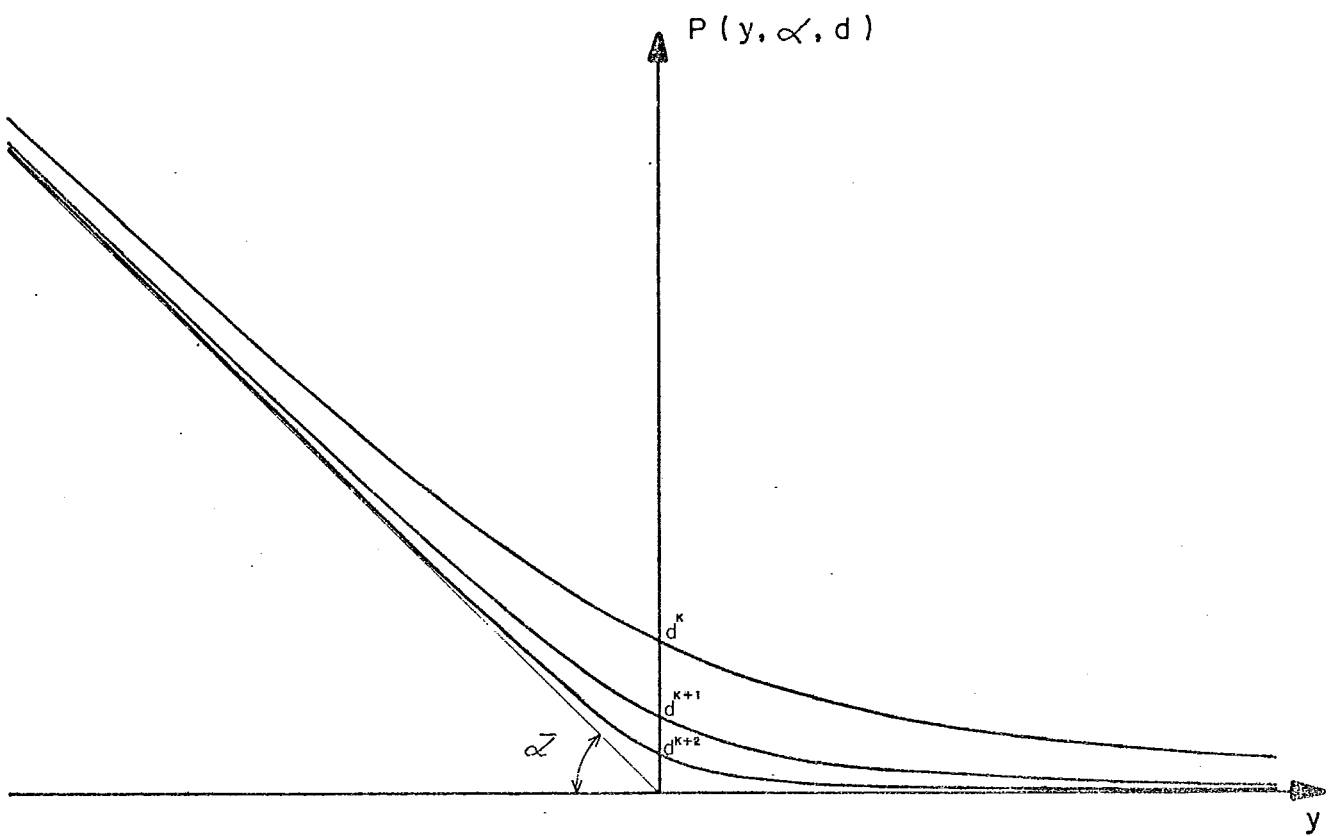
A idéia geométrica que fundamenta o algoritmo a seguir apresentado, é a seguinte:

- Inicialmente como mostra a figura 4.a, aumenta-se o ângulo  $\alpha$  da assíntota a função penalidade, provocando, com isto, significativo aumento da penalização fora da região viável, enquanto que, simultaneamente reduz-se a penalização para pontos dentro da região viável. O processo continua até que se consiga um ponto viável.
  
- Daí para a frente mantém-se  $\alpha$  constante e diminui-se sequencialmente o valor de  $d$ . Desta maneira, consegue-se que a penalização interior torne-se cada vez mais irrelevante, mantendo-se o mesmo nível de proibitividade fora da região viável. A figura 4.b ilustra a segunda fase do processo.



PRIMEIRA FASE DO ALGORITMO:  
 Variação de  $\alpha^k$  mantendo  $d^k$  constante

Figura 4.A



SEGUNDA FASE DO ALGORITMO:  
 Variação de  $d^k$  mantendo  $\alpha^k$  constante

Figura 4.B

ALGORITMO

1) Faça  $k = 0$ ,  $\alpha^1 = \alpha^0$ ,  $d^1 = d^0$  sendo  $0 < \alpha^0 < \pi/2$  e  $d^0 > 0$ .

Tome ponto inicial  $x^0$ .

2) Faça  $k = k + 1$

3) Resolva problema de minimização sem restrições da função:

$$F(x, \alpha^k, d^k) = f(x) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \alpha^k, d^k)$$

a partir do ponto inicial  $x^{k-1}$  achando o ponto ótimo  $x^k$ .

4) Teste se  $x^k$  é viável

sim  $\rightarrow$  vá para o passo 6

5) Faça  $\begin{cases} \alpha^{k+1} = \lambda \alpha^k + (1-\lambda)\pi/2, & 0 < \lambda < 1 \\ d^{k+1} = d^k \end{cases}$

vá para o passo 2.

6) Regra de Parada - Teste se  $x^k$  é aceitável

sim  $\rightarrow$  vá para o passo 8

$$7) \text{ Faça } \begin{cases} d^{k+1} = qd^k, & 0 < q < 1 \\ \alpha^{k+1} = \alpha^k \end{cases}$$

vã para o passo 2

8)  $x^k$  é a solução. Fim

Alternativamente podemos tratar diretamente com  $r$  e  $d$  e o algoritmo seria modificado nos passos 1 e 5, substituindo-se  $\alpha$  por  $r$ , por exemplo, da seguinte forma:

$$1 \rightarrow r^1 = r^0$$

$$5 \rightarrow r^{k+1} = \sqrt[\lambda]{r^k}, \lambda > 1.$$

CAPÍTULO IIIDESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A fim de se provar a convergência do algoritmo, é necessário que se estabeleçam algumas condições sobre o problema.

C1 - O conjunto viável  $S$  é fechado e tem interior não vazio.

C2 -  $f(x)$  e  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são funções contínuas

C3 - Existem  $\alpha^0 \in (0, \pi/2)$  e  $0 < d^0 < \infty$  tais que:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha^0, d^0) = F^0 > -\infty$$

C4 - Existe um  $\epsilon > 0$  tal que o conjunto  $S_\epsilon = \{x | g_i(x) \geq -\epsilon, i = 1, \dots, m\}$  é limitado.

C5 - Na fronteira, em qualquer direção para fora de  $S$ , as restrições ativas decrescem de valor e a função objetivo, bem como, as restrições são de variação limitada, ou seja:

Se  $x \in \text{Front } S$ ,

$\lambda \in \mathbb{R}^1$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$  são tais que:  $(x + \lambda w) \notin S$  e

$\ell$  é tal que:  $g_\ell(x) = 0$ ,

então,

$\exists \delta > 0$  tal que:

$$g_{\ell}(x + \lambda w) < 0, \quad 0 < \lambda < \delta$$

e

$\exists \delta' > 0$  e  $M > 0$  tais que:

$$|f(x + \lambda w) - f(x)| < M \cdot |\lambda w|, \quad 0 < \lambda < \delta'$$

e

$$|g_i(x + \lambda w) - g_i(x)| < M \cdot |\lambda w|, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$0 < \lambda < \delta'$$

Estabelecidas as condições básicas para o problema, vamos primeiramente tornar mais amplo o campo de validade da condição C3.

#### LEMA 1: (Existência de Mínimo)

Se a condição C3 for obedecida, ou seja, se existir algum  $\alpha^0$  e algum  $d^0$  tal que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha^0, d^0) = F^0 > -\infty$$

e se além disso, também as condições C1, C2 e C4 forem obedecidas, então, existirá um valor  $\bar{\alpha}^0 \geq \alpha^0$  tal que

$$\text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha, d) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha, d)$$

para todo  $\alpha$  no intervalo  $\bar{\alpha}^0 \leq \alpha < \pi/2$  e para todo  $d$  no intervalo  $0 \leq d \leq d^0$ .

Demonstração:

Vamos calcular a diferença entre as funções objetivos modificadas para dois valores de  $d$ , sendo  $d^0 \geq d^1$ :

$$F(x, \alpha^0, d^0) = f(x) + P(x, \alpha^0, d^0)$$

$$F(x, \alpha^0, d^1) = f(x) + P(x, \alpha^0, d^1)$$

$$F(x, \alpha^0, d^0) - F(x, \alpha^0, d^1) = P(x, \alpha^0, d^0) - P(x, \alpha^0, d^1) \leq m(d^0 - d^1) \leq md^0$$

pela propriedade P11 da função penalidade.

Sendo  $F^0$ , por definição, o valor ínfimo da função objetivo modificada  $F(x, \alpha^0, d^0)$ , estabelecido pela condição C3, podemos escrever a desigualdade acima na seguinte forma:

$$F^0 - md^0 \leq F(x, \alpha^0, d) = f(x) + P(x, \alpha^0, d) \quad (8)$$

que é válida para todo  $d$  no intervalo  $0 \leq d \leq d^0$  e todo  $x \in R^n$ .

Vamos agora estudar a variação do parâmetro  $\alpha$ .

Primeiramente vamos nos ater aos pontos viáveis. Seja  $Z$  um ponto viável qualquer. Como o conjunto viável  $S$  é compacto (condições C1 e C4) e a função  $f(x)$  é contínua (condição



C2), certamente teremos um valor máximo para  $f(x)$  neste conjunto. Assim para todo  $0 \leq d \leq d^0$  e  $0 < \alpha < \pi/2$ , teremos:

$$f(z) + P(z, \alpha, d) = f(z) + \sum_i P(g_i(z), \alpha, d) \leq f(Z^M) + md \leq f(Z^M) + md^0, \quad (9)$$

onde  $f(Z^M)$  representa o valor máximo de  $f(x)$  no conjunto  $S$ .

Ficam, então, estabelecidos os limites ilustrados pela figura abaixo:

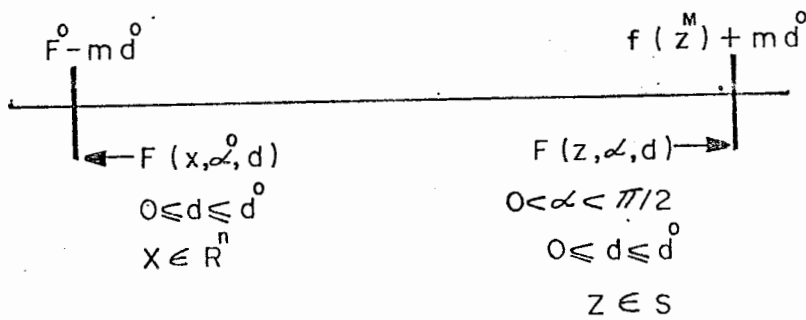


Figura 5

Consideremos agora os pontos inviáveis não pertencentes ao conjunto  $S_\epsilon$  da condição C4. Seja  $w$  um ponto inviável qualquer não pertencente a este conjunto. Pelas propriedades P6 e P7, podemos escrever:

$$F(w, \alpha, d) \geq f(w) + \sum_{i \in I_1} (-\operatorname{tg} \alpha) g_i(w)$$

para  $\forall 0 \leq d \leq d^0$ , sendo  $I_1 = \{i | g_i(w) < 0\}$ .

Esta desigualdade pode ainda ser escrita como:

$$F(w, \alpha, d) \geq f(w) + \sum_{i \in I_1} -(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha^0) g_i(w) + \sum_{i \in I_1} -\operatorname{tg} \alpha^0 g_i(w) \quad (10)$$

válida para todo  $d$  no intervalo  $0 \leq d \leq d^0$ .

De outro lado, pelas propriedades P1, P4 e P5, podemos escrever:

$$F(w, \alpha^0, d) \leq f(w) + \sum_{i \in I_1} (-\operatorname{tg} \alpha^0 g_i(w) + d) + \sum_{i \notin I_1} d \leq$$

$$f(w) + \sum_{i \in I_1} (-\operatorname{tg} \alpha^0 g_i(w) + d^0) + \sum_{i \notin I_1} d^0 =$$

$$f(w) + \sum_{i \in I_1} -\operatorname{tg} \alpha^0 g_i(w) + md^0$$

que também é válido para  $d$  no intervalo  $0 \leq d \leq d^0$ .

Somando  $md^0$  a ambos membros da desigualdade (10) e usando os resultados acima obtidos, temos:

$$F(w, \alpha, d) + md^0 \geq f(w) + \sum_{i \in I_1} (tg\alpha - tg\alpha^0)g_i(w) + \sum_{i \in I_1} -tg\alpha^0 g_i(w) +$$

$$md^0 \geq F(w, \alpha^0, d) + \sum_{i \in I_1} -(tg\alpha - tg\alpha^0) g_i(w)$$

Donde:

$$F(w, \alpha, d) \geq F(w, \alpha^0, d) + \sum_{i \in I_1} -(tg\alpha - tg\alpha^0)g_i(w) - md^c$$

Usando o resultado (8), obtemos:

$$F(w, \alpha, d) \geq F^0 - 2md^0 + \sum_{i \in I_1} -(tg\alpha - tg\alpha^0)g_i(w) \geq$$

$$F^0 - 2md^0 + (-(tg\alpha - tg\alpha^0))g_\ell(w)$$

que é válido para todo  $\alpha^0 \leq \alpha < \pi/2$ , sendo  $g_\ell(w) \leq g_i(w)$  para  $i \in I_1$ .

Como por hipótese  $w$  é inviável e não pertence a  $S_\varepsilon$ , implica que  $g_\ell(w) < -\varepsilon$  e por isto, a desigualdade acima pode ser escrita na forma:

$$F(w, \alpha, d) > F^0 - 2md^0 + (tg\alpha - tg\alpha^0) \varepsilon$$

Analisando a expressão a direita da desigualdade acima, vemos que ela é uma função ilimitadamente crescente com

$\alpha$  no intervalo  $0 < \alpha < \pi/2$ . Assim certamente haverá um valor  $\bar{\alpha}^0$  tal que esta expressão será maior que  $f(Z^M) + md^0$  para todo  $\alpha$  no intervalo  $\bar{\alpha}^0 \leq \alpha < \pi/2$  e  $0 \leq d \leq d^0$ . O valor de  $\bar{\alpha}^0$ , que satisfaça a estas condições, pode ser facilmente calculado e é dado por:

$$\bar{\alpha}^0 = \arctg\left(\frac{f(Z^M) + 3md^0 - F^0}{\epsilon} + \operatorname{tg} \alpha^0\right).$$

Finalmente, levando em consideração (9) temos:

$$F(w, \alpha, d) > f(Z^M) + md^0 \geq F(z, \alpha, d)$$

para quaisquer  $\bar{\alpha}^0 \leq \alpha < \pi/2$  e  $0 \leq d \leq d^0$ .

Desta maneira:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha, d) = \min \left\{ \inf_{x \in S_\epsilon} F(x, \alpha, d), \inf_{x \notin S_\epsilon} F(x, \alpha, d) \right\} =$$

$$\inf_{x \in S_\epsilon} F(x, \alpha, d)$$

Como  $S_\epsilon$  é compacto pela condição C4 podemos substituir o ínfimo pelo mínimo:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha, d) = \min_{S_\epsilon} F(x, \alpha, d)$$

para  $\alpha$  e  $d$  nos intervalos:  $\bar{\alpha}^0 \leq \alpha < \pi/2$  e  $0 \leq d \leq d^0$ .

C.Q.D.

Os teoremas básicos da existência de ponto de mínimo do problema modificado (4) pertencente ao interior da região viável  $S^0 = \{x | g_i(x) > 0, i = 1, \dots, m\}$  e de sua convergência para o ponto ótimo do problema original podem agora ser mostrados.

TEOREMA 1: (Existência de Mínimo Viável)

Se as cinco condições forem obedecidas, existe  $\bar{\alpha}^0(d^0)$  tal que, para todo  $\alpha$  no intervalo  $\bar{\alpha}^0 \leq \alpha < \pi/2$  e para todo  $d$  no intervalo  $0 \leq d \leq d^0$ , o ponto de mínimo da função objetivo modificada  $F(x, \alpha, d)$ , ou seja,  $x(\alpha, d)$  é viável.

Demonstração:

Seja  $w$  um ponto inviável qualquer pertencente a  $S_\epsilon$

Vamos ligar este ponto  $w$  a um ponto  $v$  na fronteira de  $S = \{x | g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$  de uma maneira tal que a reta que os une seja secante a  $S$ , como ilustra a figura abaixo.

Sem perda de generalidade, vamos ordenar as restrições de tal sorte que se

$$g_i(v) \leq g_j(v)$$

então  $i \leq j$  para todo  $i \in I$  e todo  $j \in I$ , onde  $I = \{1, \dots, m\}$ .

Deste modo, então temos:

$$g_1(v) = 0$$

e

$$g_i(v) \geq 0, \quad i = 2, \dots, m.$$

Vamos considerar a função objetivo e as funções restrições restritas ao segmento que une  $w$  a  $v$ . Convencionemos que  $\lambda = 0$  corresponde ao ponto  $v$  e  $\lambda = 1$  ao ponto  $w$ . Deste modo, vamos definir:

$$f(\lambda) = f((1-\lambda)v + \lambda w)$$

$$g_i(\lambda) = g_i((1-\lambda)v + \lambda w), \quad i = 1, \dots, m$$

$$F(\lambda, \alpha, d) = f(\lambda) + \sum_{i=1}^m P(g_i(\lambda), \alpha, d)$$

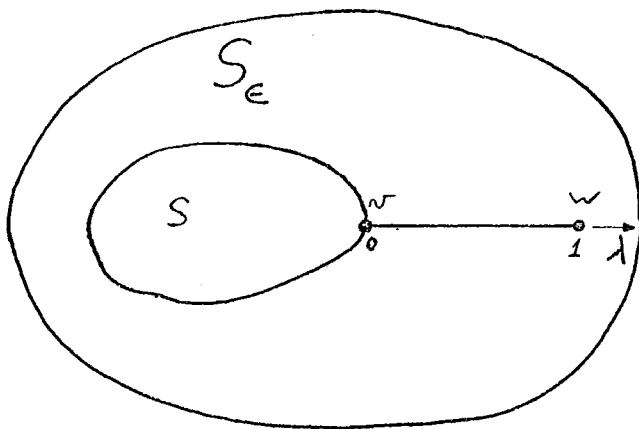


Figura 6

Uma maneira natural de se provar o teorema é demonstrar a existência de um  $\bar{\alpha}$  tal que, para todo  $\alpha$  no intervalo  $\bar{\alpha} \leq \alpha < \pi/2$  e para todo  $0 \leq d \leq d^0$ , seja verdadeira a relação

$$F(v, \alpha, d) < F(\lambda, \alpha, d), \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Vamos preliminarmente fazer uma reorganização das restrições ao longo do segmento de reta de  $v$  a  $w$ .

Seja, por definição:

$$\bar{g}_1(\lambda) = \min\{g_i(\lambda) \mid i \in I\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Seja também, por definição:

$$I_1(\lambda) = \{\min\{i \in I \mid g_i(\lambda) = \bar{g}_1(\lambda)\}\}$$

Definamos

$$\bar{g}_2(\lambda) = \min\{g_i(\lambda) \mid i \in I - I_1(\lambda)\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

e

$$\bar{g}_3(\lambda) = \min\{g_i(\lambda) \mid i \in I - (I_1(\lambda) \cup I_2(\lambda))\},$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

onde

$$I_2(\lambda) = \{\min\{i \in I - I_1(\lambda) \mid g_i(\lambda) = \bar{g}_2(\lambda)\}\}$$

No caso geral, temos a definição:

$$\bar{g}_j(\lambda) = \min\{g_i(\lambda) \mid i \in I - \bigcup_{k=1}^{j-1} I_k(\lambda)\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

onde

$$I_k(\lambda) = \{\min\{i \in I - I_1(\lambda) - \dots - I_{k-1}(\lambda) \mid g_i(\lambda) = \bar{g}_k(\lambda)\}\}$$

Pela definições de  $\bar{g}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, m$  é fácil ver que:

$$\bar{g}_1(\lambda) \leq \bar{g}_2(\lambda) \leq \dots \leq \bar{g}_m(\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Como, pela condição C2, todas as restrições  $g_i(x)$   $i = 1, \dots, m$  são contínuas, todas as funções  $\bar{g}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, m$  também serão contínuas.

Além disso, pela definição de  $\bar{g}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, m$  e pela ordenação dada às restrições  $g_i(x)$  em função dos seus valores no ponto  $v$ , temos:

$$\bar{g}_i(0) = g_i(v), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\bar{g}_1(0) = g_1(v) = 0$$

$$\bar{g}_i(0) \geq 0, \quad i = 2, \dots, m.$$



Tomemos agora a diferença entre os valores da função objetivo modificada assumidos num ponto do segmento e no ponto  $v$ .

$$F((1-\lambda)v + \lambda w, \alpha, d) - F(v, \alpha, d) = f((1-\lambda)v + \lambda w) + \sum_{i=1}^m P(g_i((1-\lambda)v + \lambda w), \alpha, d) - f(v) - \sum_{i=1}^m P(g_i(v), \alpha, d)$$

Simplificando a notação e levando em consideração a construção das funções  $\bar{g}_i(\lambda)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , temos:

$$F(\lambda, \alpha, d) - F(v, \alpha, d) = f(\lambda) - f(v) + \sum_{i=1}^m (P(g_i(\lambda), \alpha, d) - P(g_i(v), \alpha, d))$$

$$P(g_i(v), \alpha, d) = f(\lambda) - f(v) + \sum_{i=1}^m (P(\bar{g}_i(\lambda), \alpha, d) - P(g_i(v), \alpha, d))$$

$$P(g_i(v), \alpha, d)$$

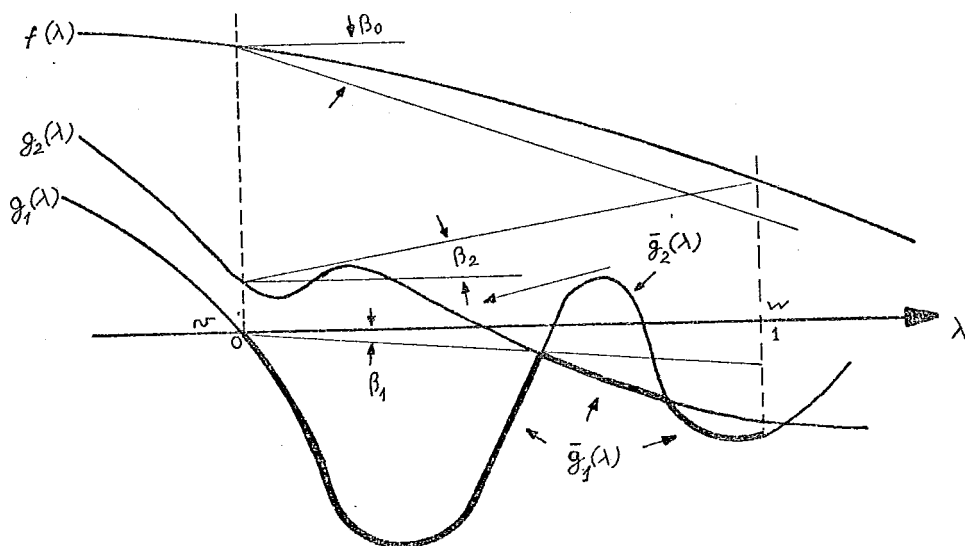


Figura 7

Como o segmento que une os pontos  $v$  e  $w$  é por hipótese secante a  $S$ , pela condição C5, temos um decréscimo de  $\bar{g}_1(\lambda)$  quando aumentamos  $\lambda$  a partir do ponto  $\lambda = 0$ .

De outro lado, levando em consideração que todos os pontos no segmento são inviáveis, temos

$$\bar{g}_1(\lambda) < 0, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Deste modo é possível achar uma função linear de crescente em  $\lambda$  que seja sempre superior a  $\bar{g}_1(\lambda)$  no segmento  $v$  a  $w$ , ou seja:

$$\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \lambda > \bar{g}_1(\lambda), \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

$\beta_1$  pertencendo ao intervalo  $0 > \beta_1 > -\pi/2$ .

Pela continuidade das funções restrições, e pela condição C5, também é possível construir funções lineares que sempre sejam superiores às funções  $\bar{g}_i(\lambda)$ ,  $i = 2, \dots, m$ , ou seja:

$$\bar{g}_i(0) + \operatorname{tg} \beta_i \cdot \lambda > \bar{g}_i(\lambda), \quad i = 2, \dots, m \text{ e } 0 < \lambda \leq 1,$$

$\beta_i$ ,  $i = 2, \dots, m$ , podendo assumir qualquer sinal.

Similarmente, pela continuidade de  $f(x)$  e pela condição C5, podemos construir uma função linear que sempre seja inferior a  $f(\lambda)$  no segmento:

$$f(v) + \operatorname{tg} \beta_0 \cdot \lambda < f(\lambda) \quad , \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Usando todas as funções lineares acima definidas, e em vista da propriedade P5, podemos escrever:

$$F(\lambda, \alpha, d) - F(v, \alpha, d) > \operatorname{tg} \beta_0 \cdot \lambda + \sum_{i=1}^m (P(\bar{g}_i(0) + \operatorname{tg} \beta_i \cdot \lambda, \alpha, d) - P(g_i(v), \alpha, d))$$

Usando a propriedade P9 da função penalidade, de que

$$|P(y, \alpha, d^1) - P(t, \alpha, d^1)| < |P(y, \alpha, d^0) - P(t, \alpha, d^0)|$$

para  $\forall y, \forall t, \forall 0 < \alpha < \pi/2$  e  $\forall 0 \leq d \leq d^0$  e levando em consideração que  $\bar{g}_1(\lambda) < g_1(v) = 0$ , que pela propriedade P5 implica em

$$P(\bar{g}_1(\lambda), \alpha, d^0) > P(g_1(v), \alpha, d^0) \quad ,$$

temos:

$$F(\lambda, \alpha, d) - F(v, \alpha, d) > \operatorname{tg} \beta_0 \cdot \lambda + P(\operatorname{tg} \beta_1 \cdot \lambda, \alpha, 0) - P(0, \alpha, 0) +$$

$$+ \sum_{i=2}^m (P(\bar{g}_i(0) + \operatorname{tg} \beta_i \cdot \lambda, \alpha, d) - P(g_i(v), \alpha, d)) =$$

$$= \operatorname{tg} \beta_0 \cdot \lambda - \operatorname{tg} \beta_1 \cdot \lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha + \sum_{i=2}^m (P(\bar{g}_i(0) + \operatorname{tg} \beta_i \cdot \lambda, \alpha, d) -$$

$$- P(g_i(v), \alpha, d))$$

(11)

válido para todo  $0 \leq d \leq d^0$

Vamos agora nos ater aos termos correspondentes ao somatório da desigualdade (11) logo acima. Vamos supor o pior caso em que

$$\beta_i > 0, \quad i = 2, \dots, m$$

Devido à convexidade da função penalidade (propriedade P5) podemos escrever:

$$P(\bar{g}_i(0) + \text{tg } \beta_i \cdot \lambda, \alpha, d) \geq P(\bar{g}_i(0), \alpha, d) + P'_y(\bar{g}_i(0), \alpha, d) \cdot \text{tg } \beta_i \cdot \lambda$$

Em vista disto, temos:

$$\sum_{i=2}^m (P(\bar{g}_i(0) + \text{tg } \beta_i \cdot \lambda, \alpha, d) - P(g_i(v), \alpha, d)) \geq \sum_{i=2}^m P'_y(g_i(v), \alpha, d) \cdot$$

$$\text{tg } \beta_i \cdot \lambda$$

Levando em consideração a propriedade P12 que a derivada  $P'_y(y, \alpha, d)$  é decrescente com  $d$  para pontos  $y > 0$ , ou seja:

$$P'_y(g_i(v), \alpha, d) > P'_y(g_i(v), \alpha, d^0), \quad i = 2, \dots, m$$

para qualquer  $0 \leq d < d^0$ , e como  $\bar{g}_i(0) = g_i(v) > 0$ ,  $i = 2, \dots, m$  obtemos:

$$\sum_{i=2}^m (P(\bar{g}_i(0) + \text{tg } \beta_i \cdot \lambda, \alpha, d) - P(g_i(v), \alpha, d)) \geq \sum_{i=2}^m P'_y(g_i(v), \alpha, d^0).$$

$$\text{tg } \beta_i \cdot \lambda$$

que é válida para qualquer  $0 \leq d \leq d^0$ .

Substituindo a desigualdade acima em (11) e fazendo

$$P'_y(g_i(v), \alpha, d^0) = -K_i, \quad i = 2, \dots, m$$

$K_i > 0$ , obtemos:

$$F(\lambda, \alpha, d) - F(v, \alpha, d) > (\text{tg } \beta_0 - \text{tg } \beta_1 \cdot \text{tg } \alpha - \sum_{i=2}^m K_i \text{tg } \beta_i) \cdot \lambda$$

válida para  $\forall 0 \leq d \leq d^0$  e  $0 < \lambda \leq 1$ .

Analisando a expressão à direita da desigualdade acima, vemos que ela é ilimitadamente crescente com  $\alpha$  no intervalo  $0 < \alpha < \pi/2$ . Assim certamente, haverá um valor  $\bar{\alpha}$  tal que esta expressão será positiva para todo  $\alpha$  no intervalo  $\bar{\alpha} < \alpha < \pi/2$  e  $0 \leq d \leq d^0$ . Este  $\bar{\alpha}$  é dado por

$$\bar{\alpha} = \text{arc tg} \left( \frac{-\text{tg } \beta_0 + \sum_{i=2}^m K_i \cdot \text{tg } \beta_i}{-\text{tg } \beta_1} \right)$$

Finalmente, fazendo:

$$\bar{\alpha}^0 = \max(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^0)$$

onde  $\bar{\alpha}^0$  é o valor limite estabelecido no Lema 1, provamos que:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, \alpha, d) = \min_S F(x, \alpha, d)$$

para  $\alpha$  e  $d$  nos intervalos  $\bar{\alpha}^0 < \alpha < \pi/2$  e  $0 \leq d \leq d^0$ .

C.Q.D.

### TEOREMA 2: (Convergência)

Se a sequência  $\{d^k\}$  é monotonamente decrescente tendendo a zero, ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^k = 0$ , e se  $x^k$  for sempre viável para  $\alpha^k = \bar{\alpha}$  (constante) sendo  $x^k$  ponto tal que  $F(x^k, \alpha^k, d^k) = \min_x F(x, \alpha^k, d^k)$ , então existirá uma subsequência convergente  $\{x^k\} \rightarrow Z$  e o limite de qualquer dessas subsequências é um ponto ótimo. (Alternativamente, a sequência  $x^k$  converge para o conjunto de soluções ótimas do problema com restrições).

### Demonstração:

As condições C1, C2 e C4 garantem que o problema de programação (3) tenha pelo menos uma solução ótima desde que  $f(x)$  uma função contínua é definida numa região viável  $S$  compacta.

Seja  $X^*$  o conjunto de pontos ótimos do problema. Para qualquer ponto  $x^* \in X^*$  é observada a relação:

$$f(x^*) \leq f(x^k) \tag{12}$$

já que  $x^k$  por hipótese é viável.

De outro lado, como  $x^k$  é ótimo do problema modificado (4) na iteração  $k$ , temos:

$$F(x^k, \bar{\alpha}, d^k) \leq F(x^*, \bar{\alpha}, d^k)$$

Tomando o limite quando  $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k, \bar{\alpha}, d^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F(x^*, \bar{\alpha}, d^k)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x^k) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x^k), \bar{\alpha}, d^k)) \leq$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x^*) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x^*), \bar{\alpha}, d^k))$$

Como por hipótese  $\{d^k\} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  e devido à propriedade P7 da função penalidade, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq f(x^*) \tag{13}$$

Comparando (12) e (13) concluímos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^*)$$

Como, pelas condições C1 e C4, o conjunto viável é compacto, existirá uma sub-sequência  $\{x^{k^1}\}$  convergente a um ponto  $x^1$ , onde teremos:

$$f(x^1) = f(x^*)$$

C.Q.D.

Demonstrados os dois teoremas básicos, podemos agora facilmente provar que, obedecidas as condições previamente estabelecidas, o algoritmo proposto converge.

### TEOREMA 3 (Convergência do Algoritmo)

Obedecidas as condições C1, C2, C3, C4 e C5, o algoritmo apresentado no Capítulo II converge para o valor ótimo do problema de programação (3).

#### Demonstração

Sempre que na iteração  $k$  o ponto ótimo  $x^k$  não for viável, o ângulo  $\alpha^{k+1}$  é aumentado por uma quantidade finita no sentido de  $\pi/2$ .

Deste modo certamente haverá uma iteração  $K$  tal que o ângulo da próxima iteração  $\alpha^{K+1}$  será maior ou igual que o valor do ângulo  $\bar{\alpha}^0(d^{K+1})$  conforme especificado no Teorema 1, ou seja,

$$\alpha^{K+1} \geq \bar{\alpha}^0(d^{K+1})$$

Em função disso, os pontos  $x^k$  serão sempre viáveis para todas as iterações  $k \geq K+1$ .



Temos, então, a partir da iteração  $K+1$ , o movimento de decréscimo constante do parâmetro  $d$  no sentido de 0 (zero).

Como provado no Teorema 2, o valor da função objetivo modificada convergirá para o valor ótimo do problema de programação original, ou seja,

$$F(x^k, \alpha^k, d^k) \rightarrow f(x^*) , \quad k \geq K+1,$$

e da mesma forma

$$f(x^k) \rightarrow f(x^*) , \quad k \geq K+1 .$$

Assim, qualquer regra de parada razoável, que teste a variação de  $f(x^k)$  ou a diferença entre  $F(x^k, \alpha^k, d^k)$  e  $f(x^k)$ , será atendida mesmo quando houver mais de um ponto ótimo.

C.Q.D.

Neste último caso, o processo obviamente poderá não convergir se na regra de parada usarmos qualquer critério testando a convergência do ponto  $x^k$ .

Se quisermos por acaso usar este critério na regra de parada, deveremos, então, estabelecer uma condição adicional para garantirmos a convergência do algoritmo para um único ponto. Esta condição poderia, por exemplo, ser:

CO - O ponto ótimo do problema de programação é único.

Vale observar que, na sequência de minimizações, enquanto o parâmetro  $\alpha$  estiver sendo alterado, o ponto de mínimo  $x^k$  basicamente segue uma trajetória de fora para dentro da região viável. Ao passo que, enquanto o parâmetro  $d$  estiver sendo diminuído, em geral a trajetória de  $x^k$  é no sentido de dentro para fora da região viável, até no limite, atingi-la.

Além das questões teóricas relacionadas com a convergência do algoritmo proposto, alguns outros aspectos, práticos e teóricos, merecem ser discutidos.

Assim é que examinamos o tratamento de eventual inviabilidade no problema original (3).

Examinamos, outrossim, a possibilidade de alcançar a solução (aproximada) em uma única iteração.

Finalmente, restringindo-nos ao Problema Convexo, mostramos que o algoritmo proposto gera pontos viáveis do problema dual, que converge, por seu turno, para a solução ótima do problema primal.

### INVIABILIDADE

Até o presente momento nada foi tratado de inviabilidade. Sempre foi suposta a existência de uma região viável.

Entretanto, como a seguir veremos, a questão de inviabilidade pode ser facilmente verificada através da aplicação repetitiva do mesmo método na solução do problema de minimização da parcela correspondente à função penalidade, ou seja:

$$\min_x P(x, \alpha^k, d^k) = \min_x \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \alpha^k, d^k)$$

TEOREMA 4: (Inviabilidade)

O problema de programação (3) será inviável se e somente se na sequência de minimizações de  $P(x, \alpha^k, d^k)$  existir um valor  $\alpha^k$  tal que:

$$\min_x P(x, \alpha^k, d^k) = \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \alpha^k, d^k) > m P(0, \alpha^k, d^k) = m d^k \quad (14)$$

Demonstração:

Vamos primeiramente demonstrar a suficiência desta condição. Deste modo vamos supor que a desigualdade (14) seja verdadeira.

Se existe uma região viável  $S$ , para qualquer ponto  $Z$  pertencente a  $S$ , teríamos:

$$\sum_{i=1}^m P(g_i(Z), \alpha^k, d^k) \leq m P(0, \alpha^k, d^k) = m d^k \quad (15)$$

Decorrente das desigualdades (14) e (15) obtemos:

$$\sum_{i=1}^m P(g_i(Z), \alpha^k, d^k) < \sum_{i=1}^m P(g(x^k), \alpha^k, d^k)$$

que contraria a hipótese de otimalidade de  $x^k$ . Donde podemos concluir que não existe Região Viável S, ou seja, o Problema é Inviável.

Vamos agora demonstrar que a desigualdade (14) é uma condição necessária.

Se o problema é inviável significa que para  $\forall w \in \mathbb{R}^n$  pelo menos uma restrição é violada. Seja  $A(w) = \{i | g_i(w) < 0\}$ .

$$\sum_{i=1}^m P(g_i(w), \alpha^k, d^k) \geq \sum_{i \in A} P(g_i(w), \alpha^k, d^k) \geq P(g_\ell(w), \alpha^k, d^k)$$

sendo  $\ell \in A$ .

Como  $g_\ell(w) < 0$ ,  $P(g_\ell(w), \alpha^k, d^k)$  é uma função crescente ilimitada com  $\alpha^k$ . Assim, certamente haverá um  $K$  tal que para  $\forall k > K$

$$P(g_\ell(w), \alpha^k, d^k) > m d^k$$

e conseqüentemente

$$\sum_{i=1}^m P_i(g_i(w), \alpha^k, d^k) > m d^k.$$

Como  $w$  foi tomado como um ponto qualquer do  $R^n$  a desigualdade acima vale para qualquer ponto inclusive para o ponto de ótimo do problema de minimização da parcela correspondente à função penalidade.

C.Q.D.

Devemos observar que se, por acaso, o conjunto viável não tiver interior, só quando  $k \rightarrow \infty$ , é que podemos garantir a obtenção de ponto viável.

Deve ser salientado que a solução do Problema Auxiliar não representa um trabalho desintegrado ou dissociado da quele que normalmente seria realizado pelo algoritmo. Isto, por exemplo, acontece nas propostas apresentadas por Fiacco (conforme descrito em [3]) e por Lootsma [8]. No presente caso, além de não representar qualquer acréscimo adicional, diminui em geral o trabalho de processamento. Esta propriedade é bastante óbvia, já que de qualquer maneira teríamos que aumentar sucessivamente  $\alpha$  até que obtivéssemos um ponto viável. Fazendo esta tarefa, através da solução de um problema que é uma parcela do original, o trabalho naturalmente é menor.

#### MINIMIZAÇÃO APROXIMADA EM UMA ÚNICA ITERAÇÃO DE $d$

Uma interessante propriedade do método proposto é que, fornecida uma certa precisão com que se aceita a solução, é possível encontrá-la em uma única iteração de  $d$ .

A maneira de se conseguir este objetivo será mostrada para duas diferentes regras de parada.

O primeira caso é para quando desejarmos como regra de parada:

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \epsilon_1. \quad (16)$$

Como  $x^k$  é ótimo, temos:

$$f(x^k) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \leq f(x^*) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x^*), \alpha^k, d^k)$$

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \sum_{i=1}^m P(g_i(x^*), \alpha^k, d^k) - \sum_{i=1}^m P(g_i(x^k), \alpha^k, d^k)$$

$$f(x^k) - f(x^*) < m d^k \quad (17)$$

Supondo que  $\alpha^k$  seja suficientemente alto, ou seja,  $\alpha^k \geq \bar{\alpha}^0(d^{k-1})$ , (do Teorema 1), pela comparação de (16) com (17) vemos que para fazermos a minimização aproximada em uma única iteração de  $d$  basta tomar:

$$d^k = \frac{\epsilon_1}{m}.$$

O segundo caso é para a regra de parada:

$$\frac{f(x^k) - f(x^*)}{|f(x^*)|} \leq \epsilon_2. \quad (18)$$

Seja  $x^{k-1}$  um ponto viável e seja  $\alpha^k \geq \bar{\alpha}^0(d^{k-1})$ .

Devido à desigualdade (17) e devido a  $x^*$  ser ponto ótimo temos:

$$f(x^{k-1}) - md^{k-1} < f(x^*) \leq f(x^{k-1}) \quad (19)$$

Se os termos extremos das desigualdades acima (19)  $f(x^{k-1})$  e  $f(x^{k-1}) - md^{k-1}$ , tiverem o mesmo sinal, com certeza podemos escrever:

$$|f(x^*)| > \min(|f(x^{k-1})|, |f(x^{k-1}) - md^{k-1}|).$$

De (18) tiramos:

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \varepsilon_2 |f(x^*)| \quad (20)$$

Comparando (17) e (20) vemos que fazendo

$$d^k = \frac{\varepsilon_2 \min(|f(x^{k-1})|, |f(x^{k-1}) - md^{k-1}|)}{m}$$

a minimização aproximada será efetuada em uma única iteração de  $d$ .

Vale destacar agora que ao final de cada iteração, se  $x^k$  for viável, sempre temos duas cotas que limitam inferior e superiormente a solução final do valor do problema  $f(x^*)$ . Este resultado é de grande importância prática desde que dá um excelente critério de término do método. Para esta finalidade

chamamos a atenção que a cota inferior pode ser calculada de uma maneira mais precisa que a dada em (19). Para isto basta considerarmos o termo desprezado na passagem efetuada para obtenção de (17). Assim  $f(x^*)$  fica limitado entre:

$$f(x^k) - m \cdot d^k + \sum_{i=1}^m P(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \leq f(x^*) \leq f(x^k),$$

que ainda pode ser colocado na forma:

$$F(x^k, \alpha^k, d^k) - m d^k \leq f(x^*) \leq f(x^k) \quad (21)$$

#### PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO CONVEXO

Até aqui, tratamos do problema geral de programação linear unicamente com restrições de desigualdades. Consideraremos agora um seu caso particular, que entretanto é o caso mais importante, quer considerando que a maior parte da bibliografia tem sido dirigida para o seu estudo, quer considerando a sua frequência relativa em termos de problemas práticos. Trata-se do problema de programação convexo unicamente com restrições de desigualdade. Este problema é o problema geral definido em (3) com duas condições adicionais de convexidade:

C6 -  $f(x)$  é uma função convexa.

C7 -  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são funções côncavas.



Uma propriedade importante do método ora proposto é que transforma o problema de programação convexo na solução de uma sequência de minimizações sem restrições de uma função objetivo também convexa. A importância disto decorre das conhecidas vantagens, quer sob o ponto de vista prático como teórico, em se estar minimizando uma função convexa.

Esta característica do método deve-se unicamente à propriedade P10 de sua função penalidade, já que a soma de funções convexas é, por sua vez, uma função convexa.

#### PROBLEMA DUAL

O problema de programação original (3), que daqui para a frente será referido como problema primal, tem associado com ele um problema dual, que para o caso convexo, pode ser formulado, segundo Wolfe (conforme referências [3, 15]), como maximizar a função objetivo dual

$$\max G(x, u) = f(x) - \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \quad (22)$$

sujeito às restrições

$$\nabla_x G(x, u) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x) = 0 \quad (23)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (24)$$

onde  $\nabla f(x)$ ,  $\nabla g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $\nabla_x G(x, u)$  representam respectivamente os gradientes em relação a  $x$  de  $f(x)$ , de  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  e da função objetivo dual  $G(x, u)$ .

Veremos, agora, que a dualidade nos problemas de programação convexas apresenta uma importante propriedade.

TEOREMA 5: (Desigualdade Básica)

O valor da função objetivo dual para qualquer ponto  $(x_D, u_D)$  dual viável é sempre menor ou igual ao da função primal para qualquer ponto  $x_P$  primal viável.

Demonstração:

As restrições  $u_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  para todo ponto dual viável e as condições C6 e C7 implicam que  $G(x, u)$  seja convexa em  $x$ .

De outro lado, para todo ponto dual viável a restrição (23) deve ser obedecida. Isto implica que para dado vetor  $u \geq 0$ , o ponto dual viável seja o ponto de mínimo da função  $G(x, u)$ , já que ela é convexa.

Seja  $x_p$  um ponto primal qualquer. Em vista disto

$$g_i(x_p) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (25)$$

Seja  $(x_D, u_D)$  um ponto dual viável qualquer. Em vista disto

$$u_{D_i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (26)$$

Considerando, então, (25), (26) e que  $(x_D, u_D)$  é o ponto de mínimo em  $x$  de  $G(x, u_D)$ , temos:

$$f(x_p) \geq f(x_p) - \sum_{i=1}^m u_{D_i} g_i(x_p) \geq f(x_D) - \sum_{i=1}^m u_{D_i} g_i(x_D)$$

Como  $x_p$  e  $(x_D, u_D)$  foram tomados genericamente, a desigualdade acima é válida para quaisquer pontos primais e duais viáveis.

C.Q.D.

Um aspecto interessante do algoritmo proposto é que à medida que o problema primal é resolvido, através de uma sequência de minimizações sem restrições, é paralelamente gerada uma sequência de pontos que são duais viáveis e que aproximam do ótimo dual no limite quando  $d^k \rightarrow 0$ .

Uma solução dual é obtida da seguinte maneira. Seja  $x^k = x(\alpha^k, d^k)$  o ponto que minimiza  $F(x, \alpha^k, d^k)$  no  $R^n$ . Neste ponto, então, deveremos necessariamente ter:

$$\nabla_x F(x^k, \alpha^k, d^k) = \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m P'_y(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \cdot \nabla g_i(x^k) = 0 \quad (27)$$

onde  $P'_y$  representa a derivada da função penalidade  $P(y, \alpha, d)$  em relação a  $y$ .

Se fizermos

$$u_i = - P'_y(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \quad (28)$$

as duas restrições duais serão atendidas. Substituindo (28) em (27), obtemos a primeira restrição (23). Como a função penalidade é não crescente em relação a  $y$ , implica que  $P'_y \leq 0$  e consequentemente a segunda restrição,  $u_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , é também atendida.

Assim, achamos o par  $(x(\alpha^k, d^k), u(\alpha^k, d^k))$  que satisfaz às restrições duais e que é gerado a cada iteração do algoritmo.

No caso particular da função penalidade hiperbólica definida em (5) temos a seguinte expressão para os multiplicadores  $u_i$ :

$$u_i = \frac{-r^k}{r^{k^2} - 1} \left( -1 + \frac{g_i(x^k)}{\sqrt{g_i^2(x^k) + d^{k^2} \left( \frac{r^{k^2} - 1}{r^k} \right)^2}} \right) \quad (29)$$

TEOREMA 6 (Convergência Dual)

Se sequência  $\{d^k\}$  é monotonamente decrescente para  $k \geq K$  tendendo a zero, ou seja,  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^k = 0$  e se  $x^k$  for sempre viável para  $\alpha^k = \bar{\alpha}$  (constante), então, para o caso convexo o valor da função dual convergirá para o valor ótimo da função primal, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(x(\alpha^k, d^k), u(\alpha^k, d^k)) = f(x^*).$$

Demonstração

$$G(x(\alpha^k, d^k), u(\alpha^k, d^k)) = f(x^k(\alpha^k, d^k)) - \sum_{i=1}^m u_i(\alpha^k, d^k) g_i(x(\alpha^k, d^k))$$

Vamos trabalhar com uma subsequência convergente para um ponto ótimo  $x^*$

Mesmo que haja mais de um ponto ótimo, os resultados não se alteram. Sabemos pelo teorema 2 que.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^*) \quad (30)$$

resta então provar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_i^k g_i(x^k) = 0 .$$

Usando a equação (28), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m u_i^k g_i(x^k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m -P'_y(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \cdot g_i(x^k) = \\ &= \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} -P'_y(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \lim_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) \end{aligned} \quad (31)$$

Estes limites existem já que estamos trabalhando com uma subsequência convergente.

Vamos analisar o valor do primeiro limite em (31) segundo as duas alternativas possíveis para o segundo limite,

Na primeira alternativa,  $g_i(x^k)$  converge para  $K > 0$ . Pela propriedade P7 da função penalidade, podemos, então concluir que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -P'_y(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) = 0 \quad \text{se} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) \rightarrow K.$$

Na segunda alternativa,  $g_i(x^k)$  converge para 0 (zero).

Pelas propriedades P1 e P5 podemos estabelecer o intervalo de variação de  $P'$ :

$$-\operatorname{tg} \alpha \leq P'_y(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \leq 0$$

Tomando o limite para  $0 < \alpha^k < \pi/2$ , temos:

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} -P'(g_i(x^k), \alpha^k, d^k) \leq \operatorname{tg} \alpha \quad (32)$$

ou seja, o limite  $\tilde{e}$  finito.

Observe que, no limite, o ponto  $g_i(x^*) = 0$  não tem derivada, no entanto, as derivadas  $\tilde{a}$  esquerda e  $\tilde{a}$  direita continuam a satisfazer a desigualdade (32).

Desta forma ficou provado que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^k g_i(x^k) = 0 \quad \text{para } \forall i \quad (33)$$

pois se

$$g_i(x^*) \neq 0 \rightarrow u_i^* = 0$$

$$g_i(x^*) = 0 \rightarrow 0 \leq u_i^* \leq \operatorname{tg} \alpha$$

Devido a (33) e a (30) para  $\forall \epsilon > 0$  haverá um  $k(\epsilon)$  tal que para todo  $k > k(\epsilon)$  as desigualdades abaixo serão válidas

$$-\epsilon < - \sum_{i=1}^m u_i^k g_i(x^k) < 0$$

$$f(x^*) < f(x^k) < f(x^*) + \epsilon$$

Somando, obtemos:

$$f(x^*) - \varepsilon < f(x^k) - \sum_{i=1}^m u_i^k \cdot g_i(x^k) < f(x^*) + \varepsilon$$

Estas desigualdades acima significam que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(x^k, u^k) = f(x^*)$$

Como o resultado é válido para qualquer que seja a subsequência convergente, ele é válido sempre.

C.Q.D.

Vale a pena observar que a equação (33) e as restrições primal e duais constituem as conhecidas relações de Kuhn-Tucker, expressando que  $\nabla f(x^*)$  é uma combinação linear não negativa dos gradientes  $\nabla g_i(x^*)$  correspondente às restrições que são ativas em  $x^*$ . Para o caso de programação convexa, estas são as condições necessárias e suficientes de otimalidade <sup>[5]</sup>. Como era de se esperar todas as quatro condições de Kuhn-Tucker são satisfeitas no ponto  $(x^*, u^*)$ .



CAPÍTULO IVEXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL

Descreveremos duas experiências práticas realizadas utilizando o algoritmo proposto.

A minimização sem restrições foi feita utilizando-se a rotina GIMIN [6] que basicamente se constitui em um dos métodos das secantes. Os seus parâmetros Critério de Convergência e Passo de Discretização foram tomados constantes, respectivamente com os valores  $1.10^{-9}$  e  $1.10^{-10}$ . Ressalvamos que não estivemos centrados no sentido de obter os máximos benefícios decorrentes do uso otimizado destes parâmetros.

O primeiro problema é muito simples, pois é convexo com somente duas variáveis e duas restrições. Trata-se de um problema teste apresentado por Himmelblau [7] originalmente proposto por J. Bracken e G. P. Mc Cormick, com o seguinte enunciado:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sujeito a } g_1(x) &= -x_1^2 + x_2 \geq 0 \\ g_2(x) &= -x_1 - x_2 + 2 \geq 0. \end{aligned}$$

que tem como solução ótima teórica:

$$x^* = (1, 1)$$

$$f(x^*) = 1$$

$$g_1(x^*) = g_2(x^*) = 0$$

$$u^* = (2/3, 2/3)$$

Foram adotados os seguintes valores iniciais no passo 1 do algoritmo:

$$x^0 = (2, 2)$$

$$\alpha^0 = 3.14159258/32$$

$$d^0 = 1$$

Para a variação dos parâmetros  $\alpha$  e  $d$ , respectivamente nos passos 5 e 7, foram adotadas as seguintes regras:

$$\operatorname{tg} \alpha^{k+1} = 2 \operatorname{tg} \alpha^k$$

$$d^{k+1} = d^k/10.$$

Portanto, a variação de  $\alpha$  foi feita de uma maneira diferente, porém equivalente, da originalmente estabelecida na apresentação do algoritmo no Capítulo II.

Os resultados apresentados na Tabela 1 e a figura 8 mostram a mecânica de funcionamento do algoritmo.

TABELA 1 - Resultados Computacionais para o Problema 1

Parte 1/2

ITERAÇÃO (k)	$\alpha^k$	$d^k$	Nº DE PASSOS	$f(x^k)$	$F(x^k, \alpha^k, d^k)$	$P(x^k, \alpha^k, d^k)$	P/f	$\nabla_x F(x^k, \alpha^k, d^k)$
1	5,625 <sup>0</sup>	1	2	0,0166621105	2,1911495436	0,2174.10 <sup>+1</sup>	0,131.10 <sup>+3</sup>	0,109.10 <sup>-10</sup>
2	11,144 <sup>0</sup>	1	3	0,0666225857	2,3625418127	0,2296.10 <sup>+1</sup>	0,345.10 <sup>+2</sup>	0,222.10 <sup>-8</sup>
3	21,503 <sup>0</sup>	1	3	0,2321398970	2,6287584601	0,2397.10 <sup>+1</sup>	0,103.10 <sup>+2</sup>	0,203.10 <sup>-11</sup>
4	38,236 <sup>0</sup>	1	3	0,6115833058	2,9092156258	0,2298.10 <sup>+1</sup>	0,376.10 <sup>+1</sup>	0,628.10 <sup>-10</sup>
5	57,602 <sup>0</sup>	1	4	1,1176869943	2,9897110778	0,1872.10 <sup>+1</sup>	0,167.10 <sup>+1</sup>	0,274.10 <sup>-13</sup>
6	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-1</sup>	4	1,0233685958	1,1979052861	0,1745.10 <sup>0</sup>	0,171.10 <sup>0</sup>	0,719.10 <sup>-10</sup>
7	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-2</sup>	5	1,0026020642	1,0197649975	0,1716.10 <sup>-1</sup>	0,171.10 <sup>-1</sup>	0,173.10 <sup>-13</sup>
8	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-3</sup>	6	1,0002632322	1,0019762053	0,1713.10 <sup>-2</sup>	0,171.10 <sup>-2</sup>	0,241.10 <sup>-7</sup>
9	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-4</sup>	6	1,0000263539	1,0001976175	0,1713.10 <sup>-3</sup>	0,171.10 <sup>-3</sup>	0,156.10 <sup>-7</sup>
10	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-5</sup>	5	1,0000026357	1,0000197617	0,1713.10 <sup>-4</sup>	0,171.10 <sup>-4</sup>	0,452.10 <sup>-9</sup>
11	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-6</sup>	5	1,0000002636	1,0000019762	0,1713.10 <sup>-5</sup>	0,171.10 <sup>-5</sup>	0,246.10 <sup>-7</sup>
12	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-7</sup>	4	1,0000000262	1,0000001976	0,1714.10 <sup>-6</sup>	0,171.10 <sup>-6</sup>	0,123.10 <sup>-4</sup>
13	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-8</sup>	2	1,0000000076	1,0000000205	0,1295.10 <sup>-7</sup>	0,129.10 <sup>-7</sup>	0,169.10 <sup>-1</sup>
14	57,602 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-9</sup>	1	0,9999999995	1,0000000023	0,2711.10 <sup>-8</sup>	0,271.10 <sup>-8</sup>	0,635.10 <sup>0</sup>

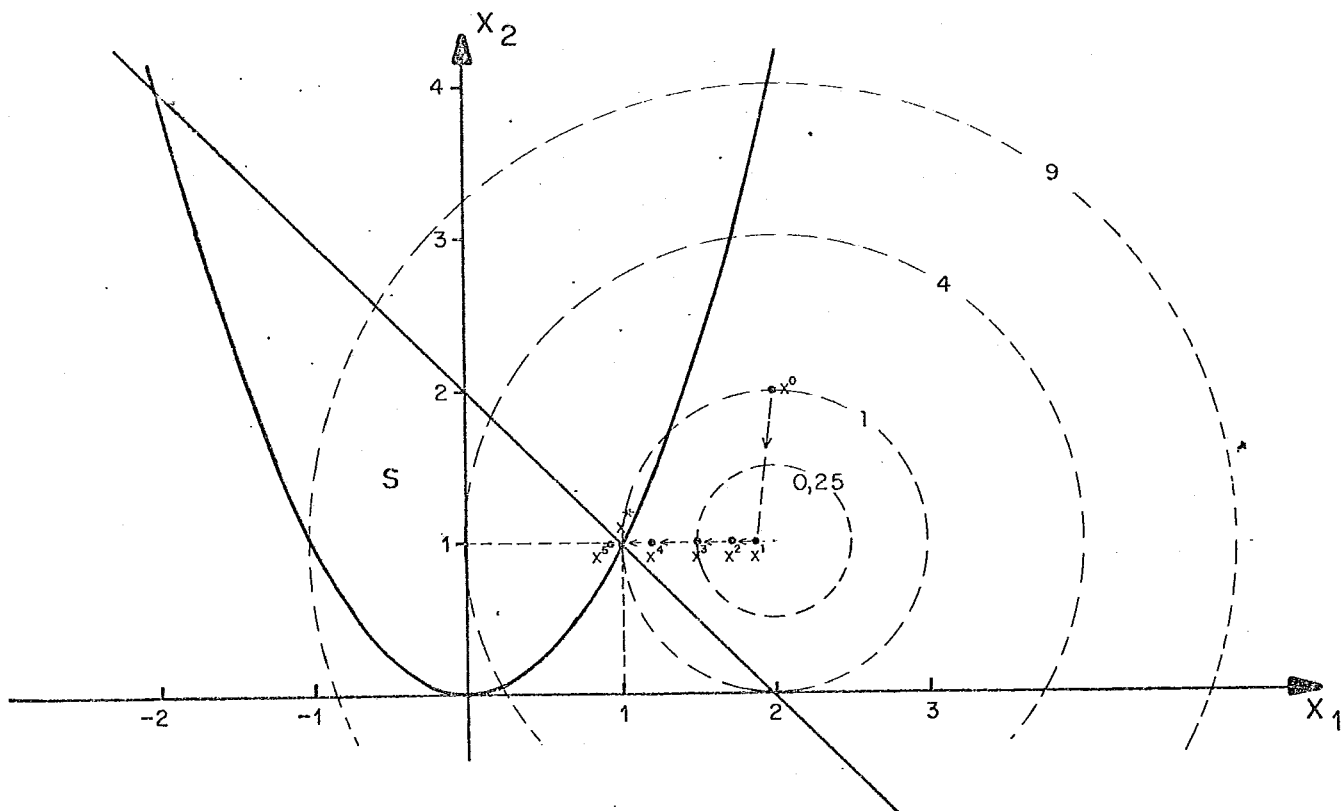
TABELA 1 - Resultados Computacionais para o Problema 1

Parte 2/2

ITERAÇÃO $k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$g_1(x^k)$	$g_2(x^k)$	$u_1^k$	$u_2^k$	$G(x^k, u^k)$	$F(x^k, u^k, d^k)_{\text{mdk}}$
1	1,8709329234	1,0019494081	-0,2498.10 <sup>+1</sup>	-0,8729.10 <sup>0</sup>	0,055259	0,051361	0,19955640390	1911495436
2	1,7419569194	1,0060294546	-0,2028.10 <sup>+1</sup>	-0,7480.10 <sup>0</sup>	0,117787	0,105728	0,38462204640	3625418127
3	1,5183947602	1,0140103549	-0,1292.10 <sup>+1</sup>	-0,5324.10 <sup>0</sup>	0,245549	0,217529	0,66508332800	6287584601
4	1,2181557625	1,0174038522	-0,4665.10 <sup>0</sup>	-0,2356.10 <sup>0</sup>	0,465178	0,430370	0,92996645210	9092156258
5	0,9428428000	0,9897214436	0,1008.10 <sup>0</sup>	0,6744.10 <sup>-1</sup>	0,725567	0,746124	0,99425701900	9897110778
6	0,9883951429	0,9950797390	0,1815.10 <sup>-1</sup>	0,1653.10 <sup>-1</sup>	0,676356	0,686196	0,99975003170	9979052861
7	0,9987000167	0,9993615038	0,1960.10 <sup>-2</sup>	0,1938.10 <sup>-2</sup>	0,667686	0,668963	0,99999677400	9997649975
8	0,9998683947	0,9999343157	0,1975.10 <sup>-3</sup>	0,1973.10 <sup>-3</sup>	0,666769	0,666900	0,9999996680	9999762053
9	0,9999868232	0,9999934128	0,1977.10 <sup>-4</sup>	0,1976.10 <sup>-4</sup>	0,666677	0,666690	0,9999999970	9999976175
10	0,9999986822	0,9999993411	0,1977.10 <sup>-5</sup>	0,1977.10 <sup>-5</sup>	0,666668	0,666669	1-4.10 <sup>-12</sup>	0,9999997617
11	0,9999998682	0,9999999341	0,1977.10 <sup>-6</sup>	0,1977.10 <sup>-6</sup>	0,666667	0,666667	1-7.10 <sup>-14</sup>	0,9999999762
12	0,9999999869	0,9999999934	0,1969.10 <sup>-7</sup>	0,1969.10 <sup>-7</sup>	0,667157	0,667148	1-2.10 <sup>-11</sup>	0,9999999976
13	0,9999999962	0,9999999982	0,5821.10 <sup>-8</sup>	0,5567.10 <sup>-8</sup>	0,459441	0,471404	1,00000000231	0000000005
14	1,0000000002	0,9999999997	-0,7608.10 <sup>-9</sup>	0,7101.10 <sup>-10</sup>	1,193030	0,0743916	1,00000000041	0000000003

Até a interação 5, primeira fase do algoritmo, ocorre o aumento repetitivo do ângulo  $\alpha$  (vide figura 4.2). Isto tem o efeito de fazer com que o ponto de ótimo do problema modificado  $x^k$  seja gradativamente jogado para o interior da região viável.

Nas iterações seguintes, segunda fase do algoritmo, se dá a diminuição do parâmetro  $d$  (vide figura 4.b). Isto basicamente tem o efeito de diminuir a penalização em termos absolutos, porém mantendo o mesmo nível de proibitividade (dado por  $\alpha$ ) fora da região viável. Assim o ponto  $x^k$  pode se mover com mais liberdade dentro da região viável na direção do ponto ótimo do problema original.



RESULTADOS DO PROBLEMA 1

Figura 8

A convergência do processo pode ser vista nas colunas  $f(x^k)$ ,  $F(x^k, \alpha^k, d^k)$ ,  $P(x^k, \alpha^k, d^k)$ ,  $x^k$  e  $g(x^k)$ .

Preliminarmente, esclarecemos que o valor assumido por  $g_1(x^k)$  na iteração 14 é explicado pela escolha dos parâmetros da GIMIN. Haja visto que, o parâmetro Passo de Discretização é da mesma ordem de grandeza dos erros relativos do ponto de mínimo, enquanto o parâmetro Critério de Convergência é de ordem de grandeza superior ao erro relativo da função objetivo.

Como pode ser facilmente observado entre as iterações 5 e 13, os valores da função objetivo, dos pontos de mínimo e das restrições ganham um dígito significativo a cada iteração. Consequentemente, o erro relativo destes valores se apresenta linear com o parâmetro  $d$  nesta segunda fase do algoritmo.

Observamos que este comportamento da função objetivo já poderia ser totalmente esperado visto a variação estabelecida para o parâmetro  $\alpha$  e dadas por (2.1):

$$F(x^k, \alpha^k, d^k) - md^k \leq f(x^*) \leq f(x^k)$$

Um outro aspecto importante apresentado pela convergência dos resultados e que está intimamente ligado com o comportamento do erro, é a clara indicação da possibilidade \* do desenvolvimento tanto teórico como prático de procedimentos aceleradores de convergência através do uso de mecanismos de extrapolação. Procedimentos deste tipo são apresentados por Fiacco/McCormick [4] e por Loostma [9].

A coluna Número de Passos especifica o número interno de iterações dentro da rotina GIMIN necessários para se encontrar o mínimo do problema sem restrições.

Como também registrado por Lootsma <sup>8</sup>, a coluna  $|\nabla_x F(x^k, \alpha^k, d^k)|$ , moda euclidiana do gradiente da função objetivo modificada, a partir da iteração 12 indica claramente o aumento da dificuldade de se achar um mínimo preciso para valores muito pequenos de  $d$ . As oscilações deste valor nas iterações anteriores poderiam ser explicados não só pela influência dos parâmetros de GIMIN, bem como pela aleatoriedade intrínseca ao processo de minimização.

A análise das colunas dos multiplicadores de Lagrange  $u^k$ , mostra em primeiro lugar que estas variáveis não apresentaram a mesma estabilidade das demais.

Entretanto, os grandes desvios observados nas iterações 13 e 14 em relação aos valores de  $u^*$ , podem ser explicados pelos valores relativamente altos dos gradientes, ou seja, os pontos ótimos na verdade estiveram relativamente longe de serem atingidos.

Se além disto, nos detalharmos na análise da fórmula através da qual os multiplicadores são calculados

$$u_i = \frac{-r^k}{r^{k^2} - 1} \left( -1 + \frac{g_i(x^k)}{\sqrt{g_i^2(x^k) + \left(\frac{r^{k^2} - 1}{r^k}\right)^2 d^{k^2}}} \right)$$

fica claro a alta influência de qualquer perturbação no valor de  $x^k$ . Aí vemos, que está presente a divisão de duas quantidades quase infinitesimais, sob o ponto de vista prático, cujo resultado influencia decididamente o resultado final.

Em segundo lugar, a análise das colunas dos Multiplicadores, mostra que, entre as iterações 6 e 11, estes valores ganharam um dígito significativo a cada iteração. Assim, o erro relativo destas variáveis se apresenta linear com o parâmetro  $d$ , fato que indica as mesmas possibilidades de extrapolação.

A análise da coluna dos valores da função dual  $G(x^k, \alpha^k, d^k)$ , mostra, de uma maneira diversa dos multiplicadores, uma altíssima estabilidade e precisão. Entretanto esta aparente contradição é explicada diretamente pela própria fórmula com que foram calculados:

$$G(x^k, u^k) = f(x^k) - \sum_{i=1}^m u_i^k g_i(x^k).$$

Aí podemos entender que, como os  $g_i(x^k)$ ,  $i=1, 2, \dots$  são muito pequenos, a influência resultante dos erros dos multiplicadores de Lagrange será conseqüentemente desprezível.



Um resultado que merece destaque é o comportamento do erro relativo de  $G(x^k, u^k)$  que entre as iterações 6 e 11 se apresenta como uma função quadrática do parâmetro  $d$ .

Finalmente, vamos considerar a coluna  $F(x^k, \alpha^k, d^k) - md^k$ . Aí podemos ver que os seus valores efetivamente tiveram um bom comportamento como cota inferior para o valor de  $f(x^*)$ , conforme estabelecido pelas desigualdades (21).

Apesar de apresentarem, como teoricamente seria esperado, um nível de precisão bem inferior ao demonstrado pelos valores da função dual, têm como virtude a sua enorme estabilidade.

O segundo problema é a minimização de uma função cúbica, por isto, não convexa, em uma região viável também não convexa. Este problema foi inicialmente discutido por Fiacco e Mc Cormick e posteriormente trabalhado por Lootsma em quatro artigos <sup>8, 9, 10, 11</sup>. Se constitui em:

$$\min f(x) = -x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3$$

$$\text{sujeito a } g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \geq 0$$

$$g_3(x) = -x_3 + 4 \geq 0$$

$$g_4(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_5(x) = x_2 \geq 0$$

$$g_6(x) = x_3 \geq 0$$

que tem como solução teórica:

$$x^* = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$f(x^*) = \sqrt{2}$$

$$g_1(x^*) = g_2(x^*) = g_4(x^*) = 0$$

$$u^* = (\sqrt{2}/8, \sqrt{2}/8, 0, 11, 0, 0)$$

TABELA 2 - Resultados Computacionais para o Problema 2

Parte 1/3

ITERAÇÃO	$\alpha^k$	$dk$	Nº DE PASSOS	$f(x^k)$	$F(x^k, \alpha^k, dk)$	$P(x^k, \alpha^k, dk)$	$\frac{P(x^k, \alpha^k, dk)}{f(x^k)}$	$ \nabla_x F(x^k, \alpha^k, dk) $
1	87,805 <sup>0</sup>	1	9	1,721482735	2,782705040	0,1061.10 <sup>1</sup>	0,616.10 <sup>0</sup>	0,659.10 <sup>-9</sup>
2	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-1</sup>	6	1,443983821	1,546336293	0,1024.10 <sup>0</sup>	0,709.10 <sup>-1</sup>	0,453.10 <sup>-9</sup>
3	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-2</sup>	6	1,417182237	1,427376889	0,1019.10 <sup>-1</sup>	0,719.10 <sup>-2</sup>	0,487.10 <sup>-12</sup>
4	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-3</sup>	6	1,414510348	1,415529404	0,1019.10 <sup>-2</sup>	0,720.10 <sup>-3</sup>	0,223.10 <sup>-11</sup>
5	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-4</sup>	5	1,414243240	1,414345142	0,1019.10 <sup>-3</sup>	0,720.10 <sup>-4</sup>	0,190.10 <sup>-10</sup>
6	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-5</sup>	5	1,414216530	1,414226720	0,1019.10 <sup>-4</sup>	0,721.10 <sup>-5</sup>	0,700.10 <sup>-10</sup>
7	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-6</sup>	4	1,414213859	1,414214878	0,1020.10 <sup>-5</sup>	0,721.10 <sup>-6</sup>	0,140.10 <sup>-5</sup>
8	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-7</sup>	3	1,414213586	1,414213694	0,1077.10 <sup>-6</sup>	0,761.10 <sup>-7</sup>	0,210.10 <sup>-2</sup>
9	87,805 <sup>0</sup>	1.10 <sup>-8</sup>	2	1,414213569	1,414213576	0,7545.10 <sup>-8</sup>	0,533.10 <sup>-8</sup>	0,622.10 <sup>-1</sup>

TABELA 2 - Resultados Computacionais para o Problema 2

Parte 2/3

ITERA ÇÃO	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$	$g_1^k$	$g_2^k$	$g_3^k$	$g_4^k$	$g_5^k$	$g_6^k$
1	$0,131251 \cdot 10^{-1}$	1,416051505	1,578137814	$0,4851 \cdot 10^0$	$0,4959 \cdot 10^0$	$0,3422 \cdot 10^1$	$0,1313 \cdot 10^{-1}$	$0,1416 \cdot 10^1$	$0,1578 \cdot 10^1$
2	$0,122554 \cdot 10^{-2}$	1,414214653	1,430511881	$0,4636 \cdot 10^{-1}$	$0,4637 \cdot 10^{-1}$	$0,3569 \cdot 10^1$	$0,1226 \cdot 10^{-2}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1431 \cdot 10^1$
3	$0,121746 \cdot 10^{-3}$	1,414213559	1,415843119	$0,4612 \cdot 10^{-2}$	$0,4612 \cdot 10^{-2}$	$0,3584 \cdot 10^1$	$0,1217 \cdot 10^{-3}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1416 \cdot 10^1$
4	$0,121666 \cdot 10^{-4}$	1,414213562	1,414376516	$0,4609 \cdot 10^{-3}$	$0,4609 \cdot 10^{-3}$	$0,3586 \cdot 10^1$	$0,1217 \cdot 10^{-4}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1414 \cdot 10^1$
5	$0,121658 \cdot 10^{-5}$	1,414213562	1,414229858	$0,4609 \cdot 10^{-4}$	$0,4609 \cdot 10^{-4}$	$0,3586 \cdot 10^1$	$0,1217 \cdot 10^{-5}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1414 \cdot 10^1$
6	$0,121657 \cdot 10^{-6}$	1,414213562	1,414215192	$0,4609 \cdot 10^{-5}$	$0,4609 \cdot 10^{-5}$	$0,3586 \cdot 10^1$	$0,1217 \cdot 10^{-6}$	$0,1411 \cdot 10^1$	$0,1414 \cdot 10^1$
7	$0,121118 \cdot 10^{-7}$	1,414213562	1,414213725	$0,4609 \cdot 10^{-6}$	$0,4609 \cdot 10^{-6}$	$0,3586 \cdot 10^1$	$0,1211 \cdot 10^{-7}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1414 \cdot 10^1$
8	$0,710763 \cdot 10^{-9}$	1,414213562	1,414213579	$0,4605 \cdot 10^{-7}$	$0,4608 \cdot 10^{-7}$	$0,3586 \cdot 10^1$	$0,7108 \cdot 10^{-9}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1414 \cdot 10^1$
9	$0,428945 \cdot 10^{-9}$	1,414213562	1,414213564	$0,1440 \cdot 10^{-8}$	$0,4619 \cdot 10^{-8}$	$0,3586 \cdot 10^1$	$0,4289 \cdot 10^{-9}$	$0,1414 \cdot 10^1$	$0,1414 \cdot 10^1$

TABELA 2 - Resultados Computacionais para o Problema 2

Parte 3/3

ITERAÇÃO	$u_1^k$	$u_2^k$	$u_3^k$	$u_4^k$	$u_5^k$	$u_6^k$	$G(x^k, u^k)$	$F(x^k, \alpha^k, d^k) \cdot \text{md}^k$
1	0,159867	0,153132	$0,33 \cdot 10^{-2}$	10,8432	$0,19 \cdot 10^{-1}$	$0,15 \cdot 10^{-1}$	1,3632173684	-3,2172949600
2	0,174769	0,174701	$0,30 \cdot 10^{-4}$	10,9853	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	1,4136716102	0,9465362926
3	0,176573	0,176573	$0,30 \cdot 10^{-6}$	10,9985	$0,19 \cdot 10^{-5}$	$0,19 \cdot 10^{-5}$	1,4142081047	1,3673768890
4	0,176756	0,176756	$0,30 \cdot 10^{-8}$	10,9999	$0,19 \cdot 10^{-7}$	$0,19 \cdot 10^{-7}$	1,4142135077	1,4095294037
5	0,176775	0,176775	$0,30 \cdot 10^{-10}$	11,0000	$0,19 \cdot 10^{-9}$	$0,19 \cdot 10^{-9}$	1,4142135618	1,4137451416
6	0,176776	0,176776	$0,30 \cdot 10^{-12}$	11,0000	$0,19 \cdot 10^{-11}$	$0,19 \cdot 10^{-11}$	1,4142135624	1,4141667202
7	0,176777	0,176777	$0,33 \cdot 10^{-14}$	11,0088	$0,18 \cdot 10^{-13}$	$0,18 \cdot 10^{-13}$	1,4142135623	1,4142088782
8	0,177099	0,176882	0	11,8403	0	0	1,4142135618	1,4142130942
9	0,190196	0,176054	0	6,6749	0	0	1,4142135642	1,4142135162

Foram adotados os seguintes valores iniciais:

$$x^0 = (0,378964, 1,68076, 2,3472)$$

$$\alpha^0 = .3,14159258/2,05$$

$$d^0 = 1$$

A regra de variação do parâmetro  $d$  foi a mesma do exemplo anterior, enquanto  $\alpha$  não variou. Foi escolhido um valor suficientemente alto para  $\alpha^0$  para evitar o problema de violações a restrições não serem suficientemente penalizadas localmente para compensar o decréscimo da função objetivo fora da região viável, que tende a  $-\infty$  quando  $x_1$  tende a  $+\infty$ .

Os resultados computacionais são apresentados na Tabela 2.

Basicamente os mesmos comentários feitos para o problema 1 podem ser repetidos para este problema.

As únicas observações adicionais se referem ao comportamento do erro relativo dos Multiplicadores de Lagrange associados às restrições não ativas no ponto de ótimo do problema que se apresenta como uma função quadrática do parâmetro  $d$ .

As componentes  $x_1$  e  $x_3$  têm um comportamento igual ao registrado no caso do problema 1. Diversamente, o erro da com

ponente  $x_2$  tem uma variação quadrática com o parâmetro  $d$ .

Vamos comparar os presentes resultados com os obtidos por Loostma <sup>[8]</sup>. Ele resolveu o problema a partir do mesmo ponto inicial através de um método de penalização interior em que a função objetivo modificada apresenta a seguinte forma:

$$P(x, \lambda) = f(x) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m \ln(g_i(x)).$$

A minimização sem restrições foi feita usando-se um método que calcula as derivadas parciais de segunda ordem de  $P(x, \lambda)$  a cada iteração interna.

A única comparação possível de ser feita é aquela entre a precisão apresentada pelos dois métodos. Para este efeito vamos selecionar a iteração com precisão máxima em <sup>[8]</sup> e a iteração 7 do presente trabalho. A tabela 3 mostra os resultados relativos às principais variáveis. Aí é possível comparar o número de dígitos significativos, bem como, os erros relativos para os dois algoritmos.

TABELA 3 - Comparação entre Algoritmos

VARIÁVEL	RESULTADO CORRETO	ALGORITMO LOOSTMA $ ^8 $	ALGORITMO PROPOSTO
$f(x)$	1,4142135623	1,41422	1,414213858
$x_1$	0	$0,92 \cdot 10^{-7}$	$0,12 \cdot 10^{-7}$
$x_2$	1,4142135623	1,41421	1,414213562
$x_3$	1,4142135623	1,41422	1,414213725
$g_1(x)$	0	$0,57 \cdot 10^{-5}$	$0,46 \cdot 10^{-6}$
$g_2(x)$	0	$0,67 \cdot 10^{-5}$	$0,46 \cdot 10^{-6}$
$g_4(x)$	0	$0,92 \cdot 10^{-7}$	$0,12 \cdot 10^{-7}$
$u_1$	0,176776695	0,176664	0,176777
$u_2$	0,176776695	0,176890	0,176777
$u_4$	11	10,8687	11,0088



## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES.

Ao final do trabalho, julgamos conveniente fazer uma recapitulação sucinta do que foi apresentado.

No Capítulo I, apresentamos uma breve revisão bibliográfica dos diversos métodos existentes e uma descrição resumida das principais características do método proposto.

No Capítulo II, definimos precisamente o problema objeto de nosso estudo, o problema geral de programação não linear sujeito unicamente à restrições de desigualdade.

Feito isto, apresentamos a nossa proposta de solução do problema constituída pelo algoritmo e por seu ingrediente mais importante, a função penalidade.

No Capítulo III, provamos que o algoritmo converge desde que cinco condições sejam atendidas pelo problema.

A seguir, equacionamos a questão de inviabilidade, através da solução de um problema auxiliar que possibilita a obtenção de um ponto viável ou a identificação da inviabilidade.

Demonstramos, então, a possibilidade de se obter uma solução aceitavelmente próxima da ótima através de uma úni-

ca minimização no parâmetro  $d$ .

A partir deste ponto, nos restringimos ao problema convexo. Mostramos que a função objetivo modificada permanece convexa.

Apresentamos o problema dual, demonstramos que o algoritmo gera pontos duais viáveis e que a correspondente sequência dos valores da função dual converge para o valor ótimo da função primal.

No Capítulo IV, apresentamos os resultados computacionais obtidos. Apesar de ter sido testado somente com dois pequenos problemas, o desempenho prático do método, marcado pela eficácia, precisão e rapidez, lhe credita um mínimo de confiabilidade.

É natural que neste ponto façamos uma avaliação global do método. Neste sentido destacaremos as suas principais características e sempre procuraremos fazer uma análise comparativa com o propósito de oferecer subsídios para situá-lo dentre os métodos existentes. Nesta análise comparativa, concentraremos nossa atenção aos métodos das penalidades exteriores e interiores, que, além de serem os mais estudados, destacadamente são os mais utilizados na solução de problemas de programação não linear. Os métodos mistos embora sendo os mais recomendados na bibliografia, não foram considerados, pois além de serem combinação dos dois primeiros, também podem ser construídos usando-se o

método proposto no presente trabalho.

### DIFERENCIABILIDADE

Diversamente da imensa maioria dos métodos das penalidades, este método apresenta ausência de qualquer tipo de descontinuidade, já que a função penalidade usada é contínua e continuamente diferenciável.

Sob ponto de vista computacional, esta é uma excelente propriedade. O bom comportamento da função objetivo modificada apresenta a grande vantagem de permitir o uso eficiente das melhores técnicas de minimização sem restrições que se utilizam de derivadas segundas.

### MINIMIZAÇÃO APROXIMADA EM UMA ÚNICA ITERAÇÃO DE $d$

Conforme mostrado no Capítulo III, para desejada precisão em relação ao valor ótimo da função objetivo, o método apresenta a interessante propriedade de poder resolver o problema em uma única iteração de  $d$ .

Apesar desta facilidade, acreditamos que continuam válidas as recomendações feitas por Davis e Swann [2] para o caso específico do método das penalidades interiores de Carrol. Estes autores, baseados no critério de que o ponto ótimo de uma iteração deva ser um bom ponto inicial para a próxima iteração, desaconselham um decréscimo muito rápido do parâmetro de contro-

le para evitar dificuldades maiores na etapa de minimização sem restrições. Idênticas recomendações são também feitas por Polak [14].

#### REGRA DE PARADA

O método proposto oferece duas alternativas para regra de parada. O valor da função objetivo primal tem as cotas inferiores dadas pelo valor da função dual como pela expressão à esquerda das desigualdades:

$$F(x^k, \alpha^k, d^k) - md^k \leq f(x^*) \leq f(x^k)$$

O primeiro critério dado pelo valor da função dual é comum à grande número de métodos das penalidades. Entretanto a sua aplicação é teoricamente restrita a problemas convexos, o que limita sobremaneira a sua utilização prática.

O segundo critério, em contrapartida, é geral e apresenta uma natural robustez. Desta forma se constitui numa importante característica oferecida pelo método.

Esta propriedade e a possibilidade de minimização aproximada em uma única iteração de  $d$  são características pouco frequentes entre os métodos das penalidades. Entre os métodos vistos na bibliografia consultada, somente o método de penalização logaritmica, para o caso específico do problema convexo, possui estas características [8, 12].

## INVIABILIDADE

A questão da inviabilidade foi equacionada através da solução de um problema auxiliar intimamente integrado à proposta original do algoritmo.

As soluções vistas na bibliografia <sup>3, 8</sup> para tratar desta questão também resolvem problemas auxiliares. Entretanto, esses cuidam unicamente de obter um ponto viável inicial sem com isto conseguir qualquer avanço no processo de solução do problema de programação propriamente dito. Esta questão se faz mais importante quando se considera que a obtenção de um ponto viável inicial pode levar mais tempo que a subsequente solução do problema.

## PONTO INICIAL

Uma grande facilidade apresentada pelo método é em relação ao ponto inicial. Não existe necessidade de qualquer ponto especial para início do processamento do algoritmo, como acontece no caso dos métodos das penalidades interiores.

Da mesma forma, dentro do processo interno de minimização sem restrições, não se faz necessário qualquer controle sob a localização dos pontos intermediários.

## PONTOS DE ÓTIMO DOS PROBLEMAS MODIFICADOS

Os métodos das penalidades exteriores em geral constroem pontos que não são viáveis. Assim somente no limite final do processo é que obtemos um ponto viável, sendo, por sua vez, o ótimo do problema.

Os métodos das penalidades interiores, de outro lado tem a vantagem de construir sequências unicamente de pontos viáveis.

Na fase inicial do método proposto, caracterizada pelo aumento sistemático do parâmetro  $\alpha$ , o algoritmo padece temporariamente das mesmas desvantagens dos métodos das penalidades exteriores. Enquanto na fase final, caracterizada pela diminuição do parâmetro  $d$ , oferece as mesmas vantagens dos métodos das penalidades interiores.

## CONVEXIDADE

Embora sendo comum a muitos dos métodos das penalidades, este método também apresenta a conveniente propriedade da função objetivo modificada de um problema de programação convexo ser também convexa.

## DUALIDADE

O método proposto possui a usual propriedade dos métodos das penalidades de gerar pontos duais viáveis para o caso do problema de programação convexo.

A sequência dos valores das variáveis  $u_i$ , definidas pela equação (28) converge para os Multiplicadores de Lagrange. Apesar de sua alta sensibilidade em termos computacionais, como já exposto no capítulo 4, estes valores são, assim mesmo, sempre úteis, pois revelam características sobre a estrutura do problema.

A correspondente sequência de valores da função dual converge para o valor ótimo do problema primal. Diversamente dos Multiplicadores de Lagrange, os valores da função dual, apresentaram altíssima precisão e estabilidade, o que recomenda a sua utilização como um bom critério de parada do algoritmo.

## FACILIDADE DE PROGRAMAÇÃO

Como todos os métodos das penalidades exteriores e interiores, apresenta a propriedade de ser facilmente programável, o que facilita enormemente a sua utilização.

## RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Da mesma maneira que os métodos das penalidades interiores, o método proposto não resolve problemas com restrições de igualdade, pois exige que o conjunto viável tenha interior não vazio.

Sem dúvida, esta é uma certa desvantagem que apresenta em relação aos métodos das penalidades exteriores. Entretanto esquemas mistos podem ser adotados para superar esta deficiência. Outra alternativa, é elevar  $\alpha$  até próximo de  $\pi/2$ .

## CONDICIONAMENTO DA MATRIZ HESSIANA

A grande deficiência de todos os métodos das penalidades exteriores e interiores decorre da estrutura da Matriz Hessiana tornar-se crescentemente desfavorável a cada iteração. À medida que o parâmetro de controle destes métodos tende a infinito,  $m^*$  valores próprios desta matriz tendem a infinito, sendo  $m^*$  igual ao número de restrições ativas no ponto de ótimo do problema (conforme exposto em [13], [1] e [12]).

Este mau condicionamento da Matriz Hessiana como é sabido, pode dificultar, ou até mesmo impedir, o sucesso da minimização sem restrições. Como registrado por Avriel [1], os mais eficientes métodos para minimizações sem restrições, que pertencem ao grupo dos métodos tipo Newton, Gradientes Conjugados e Métrica Variável, ironicamente são os mais vulneráveis à



principal desvantagem apresentada pelos métodos das penalidades exteriores e interiores. Ou como colocado por Luenberger [13]: a exploração efetiva desses métodos requer que sejam inventados esquemas especiais que eliminem o efeito provocado pelos valores próprios infinitos.

Para o algoritmo proposto neste trabalho, embora não tenha sido formalmente demonstrado, a Matriz Hessiana da função objetivo modificada tem  $m^*$  valores próprios infinitos quando  $d$  tende a zero, portanto sendo mal condicionada, como todos os métodos das penalidades exteriores e interiores. Entretanto, achamos que vale a pena explorar as características de diferenciabilidade da função penalidade para procurar contornar este problema.

#### EXTRAPOLAÇÃO

Para o método proposto, como acontece com os métodos das penalidades exteriores e interiores, achamos que seja possível a utilização de mecanismos de extrapolação para estimar o ponto ótimo  $x^*$ . Esta conjectura é altamente provável em particular levando-se em consideração a repetida diferenciabilidade da função penalidade e os claros indícios desta possibilidade apresentados pelos resultados computacionais mostrados no Capítulo IV.

#### NOVAS LINHAS DE ESTUDO

Tanto quanto sabemos, o presente trabalho é o primeiro usando a penalização hiperbólica apresentada no Capítulo II.

As vantagens já apresentadas pelo método, bem como, as suas potencialidades apontam para a conveniência da realização de novos estudos.

Muitas são as áreas em que eles podem ser aprofundados. Além das conjecturas lançadas sobre o comportamento da Matriz Hessiana e sobre a possibilidade de mecanismos de extrapolação, outros estudos devem ser feitos. Neste sentido enumeramos: Tratamento de Problemas com Restrições de Igualdade, Convergência do Algoritmo Problema Dual e Ligações com o Lagrangeano.

A experiência computacional realizada se resumiu à resolução de dois problemas de muito pequeno porte. Achamos necessário que se extenda esta experiência a problemas maiores e mais complexos, para efetivamente se testar o algoritmo, bem como, para com isso subsidiar o processo de um melhor entendimento e conseqüente aprimoramento do método. Achamos também oportuno que se promova um confronto do algoritmo proposto com respeito aos principais algoritmos disponíveis. Nesta comparação, além dos aspectos robustez e precisão, deverão ser considerados a velocidade de convergência e a rapidez dos mesmos.

Estes são alguns dos caminhos que naturalmente deverão seguir este trabalho.

BIBLIOGRÁFIA

1. Avriel, M. - "Nonlinear Programming Analysis and Methods". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
2. Davies, D. and Swann, W. H. - "Review of Constrained Optimization" in Optimization, Fletcher R. (Ed.), Academic Press, London, 1969.
3. Fiacco, A. V. and Mc Cormick, G. P. - "The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming, A Primal-Dual Method". Management Science, Vol. 10, n° 2, Jan. (360-366), 1964.
4. Fiacco, A. V. and Mc Cormick, G. P. - "Extensions of SUMT for Nonlinear Programming: Equality Constraints and Extrapolation". Management Science, Vol. 12, n° 11, Jul. (816-828), 1966.
5. Fiacco, A. V. and Mc Cormick, G. P. - "Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques". John Wiley, New York, 1968.
6. Friedlander, A., Martinez, J. M. and Scolnik, H. D. - "Generalized Inverses and a New Stable Secant Type Minimization Algorithm". Proceedings of the 8<sup>th</sup> IFIP Conference on Optimization - Würzburg, September 5-9, 1977.

7. Himmelblau, D. M. - "Applied Nonlinear Programming", McGraw Hill, New York, 1972.
8. Lootsma, F. A. - "Logarithmic Programming: A Method of Solving" Nonlinear-Programming Problems, Philips Res. Repts. 22 (328-344), 1967.
9. Lootsma, F. A. - "Extrapolation in Logarithmic Programming". Philips Res. Repts. 23 (108-116), 1968.
10. Lootsma, F. A. - "Constrained Optimization Via Penalty Functions". Philips Res. Repts. 23 (408-423), 1968.
11. Lootsma, F. A. - "Constrained Optimization Via Parameter-Free Penalty" Functions. Philips Res. Repts. 23 (424-457), 1968.
12. Lootsma, F. A. - "A Survey of Methods for Solving Constrained Minimization Problems via Unconstrained Minimization". in Numerical Methods for Nonlinear Optimization, F. A. Lootsma (Ed.), Academic Press, London, 1972.
13. Luenberger, D. G. - "Introduction to Linear and Nonlinear Programming". Addison-Wesley, Menlo Park, 1973.
14. Polak, E. - "Computational Methods in Optimization: A Unified Approach". Academic Press, New York, 1971.

15. Zangwill, W. I. - "Non-Linear Programming Via Penalty Functions". Management Science, Vol. 13, n° 5, Jan. (344-358), 1967.

ANEXO 1

PROPOSIÇÃO 1:Propriedade P9 - (Contração da Função Penalidade)

Sejam  $y$  e  $t$  dois pontos quaisquer. Façamos  
 $\alpha^k = \alpha^{k+1} = \bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha} \in (0, \pi/2)$  e  $0 < d^{k+1} < d^k$ . En-  
 tão é observada a seguinte propriedade da função penalidade:

$$|P(y, \bar{\alpha}, d^{k+1}) - P(t, \bar{\alpha}, d^{k+1})| < |P(y, \bar{\alpha}, d^k) - P(t, \bar{\alpha}, d^k)|.$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade vamos considerar  $y < t$ ,  
 que pela propriedade P5 implica em que  $P(y, \bar{\alpha}, d) > P(t, \bar{\alpha}, d)$ .

Vamos então calcular a diferença entre os valores  
 de função penalidade nos pontos "y" e "t" usando para isso a  
 sua expressão (6) em termos dos parâmetros  $r$  e  $d$ :

Assim:

$$\begin{aligned} |P(y, \bar{\alpha}, d) - P(t, \bar{\alpha}, d)| &= P(y, \bar{\alpha}, d) - P(t, \bar{\alpha}, d) = \\ &= \frac{r}{r^2-1} \left( (-y + \sqrt{y^2 + \frac{d^2(r^2-1)^2}{r^2}}) - (-t + \sqrt{t^2 + \frac{d^2(r^2-1)^2}{r^2}}) \right) \end{aligned} \quad (34)$$

Pela expressão (7), como  $\bar{\alpha}$  por hipótese é constan-  
 te,  $r$  também é constante. Pela simplicidade vamos, então, fazer:

$$K = \frac{r}{r^2 - 1} \quad (35)$$

Substituindo (35) em (34) temos:

$$|P(y; \bar{\alpha}, d) - P(t, \bar{\alpha}, d)| = K \left( (-y + \sqrt{y^2 + \frac{d^2}{K^2}}) - (-t + \sqrt{t^2 + \frac{d^2}{K^2}}) \right) \quad (36)$$

Para analisarmos o comportamento da função (36) em relação ao parâmetro  $d$ , vamos calcular a sua derivada em relação a  $d$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d} |P(y, \bar{\alpha}, d) - P(t, \bar{\alpha}, d)| &= K \left( \frac{d/K^2}{\sqrt{y^2 + \frac{d^2}{K^2}}} - \frac{d/K^2}{\sqrt{t^2 + \frac{d^2}{K^2}}} \right) = \\ &= \frac{d}{K} \left( \frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{d^2}{K^2}}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{d^2}{K^2}}} \right) \end{aligned}$$

Como  $\alpha$  varia no intervalo  $0 < \alpha < \pi/2$  implica que  $r > 1$  e conseqüentemente que  $K > 0$ .

Então, como " $K$ " e " $d$ " são positivos e por hipóteses  $y < t$ , podemos facilmente observar que sempre

$$\frac{\partial}{\partial d} |P(y, \bar{\alpha}, d) - P(t, \bar{\alpha}, d)| > 0$$

Ou seja, é uma função monotonamente crescente



com  $d$  o que implica que com  $0 \leq d^{k+1} < d^k$ :

$$|P(y, \bar{\alpha}, d^{k+1}) - P(t, \bar{\alpha}, d^{k+1})| < |P(y, \bar{\alpha}, d^k) - P(t, \bar{\alpha}, d^k)|$$

C.Q.D.

## PROPOSIÇÃO 2

### Propriedade P10 - (Preservação de Convexidade)

Se  $g(x)$  é uma função côncava, então  $P(g(x), \alpha, d)$  será uma função convexa para  $\alpha$  no intervalo  $0 < \alpha < \pi/2$  e  $d > 0$ .

#### Demonstração:

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois pontos quaisquer.

Devemos demonstrar que:

$$P(g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \alpha, d) \leq \lambda P(g(x_1), \alpha, d) + (1-\lambda)P(g(x_2), \alpha, d)$$

onde  $\lambda$  está compreendido no intervalo  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Como  $g(x)$  por hipótese é uma função côncava, temos:

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) \quad (37)$$

Devido à desigualdade (37) e levando em considera-

ção a propriedade P5 que  $P(y, \alpha, d)$  é uma função sempre não crescente com  $y$ , temos:

$$P(g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \alpha, d) \leq P(\lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2), \alpha, d) \quad (38)$$

Como também pela propriedade P5,  $P(y, \alpha, d)$  é uma função cônvexa em  $y$ :

$$P(\lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2), \alpha, d) \leq \lambda P(g(x_1), \alpha, d) + (1-\lambda)P(g(x_2), \alpha, d) \quad (39)$$

Pelas desigualdades (38) e (39), então, temos:

$$P(g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \alpha, d) \leq \lambda P(g(x_1), \alpha, d) + (1-\lambda)P(g(x_2), \alpha, d)$$

C.Q.D.

### PROPOSIÇÃO 3

Propriedade P11: (Diferença Máxima)

A diferença máxima entre duas funções penalidades, para dois diferentes valores do parâmetro  $d$  e com mesmo parâmetro  $\alpha$ , se dá no ponto  $y = 0$ .

Demonstração:

Sejam  $d^0$  e  $d^1$  os dois valores do parâmetro  $d$ , sendo  $d^0 > d^1 \geq 0$ .

Vamos tomar a diferença entre as duas funções:

$$P(y, \alpha, d^0) - P(y, \alpha, d^1) = \frac{r}{r^2-1} \left( \sqrt{y^2 + \frac{d^{0^2} (r^2-1)^2}{r^2}} - \sqrt{y^2 + \frac{d^{1^2} (r^2-1)^2}{r^2}} \right)$$

Derivando em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} (P(y, \alpha, d^0) - P(y, \alpha, d^1)) = \frac{r}{r^2-1} \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + \frac{d^{0^2} (r^2-1)^2}{r^2}}} - \frac{y}{\sqrt{y^2 + \frac{d^{1^2} (r^2-1)^2}{r^2}}} \right)$$

Analisando a expressão acima, vemos que a diferença entre as duas funções assume um valor extremo no ponto  $y = 0$ . Além disto, este extremo é claramente um máximo, que por sua vez é único. Assim:

$$\max_y (P(y, \alpha, d^0) - P(y, \alpha, d^1)) = P(0, \alpha, d^0) - P(0, \alpha, d^1) = d^0 - d^1.$$

C.Q.D.

PROPOSIÇÃO .4Propriedade P12: (Variação da Inclinação)

A derivada da função penalidade em relação a  $y$ , ou seja,  $P'_y(y, \alpha, d)$  é uma função decrescente com  $d$  para pontos  $y > 0$  (e é inversamente uma função crescente com  $d$  para pontos  $y < 0$ ).

Demonstração:

Primeiramente vamos calcular a derivada da função penalidade em relação a  $y$ , usando para isto a equação (6):

$$P'_y(y, \alpha, d) = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{r}{r^2-1} \left( -1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + \frac{d^2(r^2-1)^2}{r^2}}} \right)$$

Para analisar o comportamento de  $P'_y(y, \alpha, d)$  em função do parâmetro  $d$  vamos calcular a sua derivada em relação a  $d$ :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial d} = - \frac{r^2-1}{r} \cdot y \cdot \frac{d}{\left( y^2 + \frac{d^2(r^2-1)^2}{r^2} \right)^{3/2}}$$

A expressão acima assume o sinal contrário de  $y$ . Deste modo, a derivada  $P'_y(y, \alpha, d)$  é decrescente com o parâmetro  $d$  para pontos  $y > 0$ .

C.Q.D.