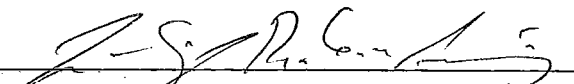


FILTRAGEM DIGITAL INVERSA COM APLICAÇÃO
DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Roberto Fogaça de Almeida

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc).

Aprovada por:


João Lázaro R.H. de Araújo
Presidente


Antonio Alberto F. de Oliveira


Marília O. Pares Regali

ALMEIDA, ROBERTO FOGAÇA

Filtragem Digital Inversa com
Aplicação de Programação Matemá-
tica (Rio de Janeiro) 1983.

VI, 69, 29,7 cm (COPPE -
UFRJ, M. Sc, Engenharia de Siste-
mas e Computação, 1983).

Tese - Univ. Fed. Rio de Ja-
neiro, Fac. de Engenharia.

1. Utilização de métodos linea-
res para cálculo de filtro inver-
so. I. COPPE/UFRJ II, Título(série).

DEDICATÓRIA

À MARLENE

AGRADECIMENTOS

Aos professores da COPPE

Dr. João Lizardo R.H. de Araújo, meu orientador,
Dr. Nelson Maculan Filho e
Dr. Antonio Alberto F. de Oliveira

À colega da PETROBRÁS

Dra. Marília S. Pares Regali.

Ao Departamento de Exploração da PETROBRÁS nas pessoas

do Diretor Dr. Carlos Walter Marinho Campos,
do Superintendente Dr. Raul Mosmann e
do Superintendente de Operações Dr. José Coutinho Barbosa.

Ao Chefe da DITREX Dr. Luiz Gonzaga Lobo Leite, pelo incentivo.

Aos colegas da PETROBRÁS, pela colaboração,

Benito Leonízio Fuschilo,
Franz Regali,
José Tassini,
Simplício Lopes de Freitas,
Joarez Fagundes Tassis,
Osvaldo de Oliveira Duarte,
Reneu Rodrigues da Silva.

E, como não podia deixar de ser, à secretária Ângela Ruiz,
pela decisiva colaboração na edição dos textos.

O autor.

SINOPSE

Dois métodos lineares de cálculo de coeficientes do filtro inverso são apresentados ao lado do clássico Método dos Mínimos Quadrados.

O primeiro se fundamenta na minimização do módulo dos erros ou resíduos, através de programação linear. O segundo não faz minimização, mas por resolução de um sistema linear de grande porte obriga com que os erros incidam fora de uma zona pré-estabelecida, obtendo dentro desta um resultado com grande precisão.

Para aplicações específicas, testes mostram o confronto entre esses métodos propostos e o dos Mínimos Quadrados.

ABSTRACT

Two linear inverse filter computation methods are shown here besides the classic Minimum Square Method.

The foundation of the first is the absolute error value minimization through linear programming. The second does not do minimization, but through a large linear system constrains the error to stay outside of a previous zone and get inside that a high precision solution.

For specific applications, tests show the comparison between these proposed methods and the Minimum Square.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - REVISÃO DA LITERATURA	1
1. Introdução	1
2. Um Sumário sobre Processamento de Sinais Sísmicos	2
CAPÍTULO II - APLICAÇÕES DA FILTRAGEM LINEAR INVERSA	13
1. Equacionamento do Problema	13
2. Deconvolução Preditiva	19
3. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados na Deconvol lução Preditiva	25
4. Filtro Shaper	28
CAPÍTULO III - PRIMEIRO MÉTODO PROPOSTO - MINIMIZAÇÃO POR PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA	31
1. Generalidades	31
2. Adaptação do Problema à forma padrão de Programação Linear	31
3. Escolha da Base Inicial	36
4. Alternativas do Método	40
CAPÍTULO IV - SEGUNDO MÉTODO PROPOSTO	43
1. Hipótese Básica	43
2. Adaptação ao Filter Shaper	45
CAPÍTULO V - APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS	52
1. Tipos de Testes	52
2. Testes do Tipo 1	52
3. Testes do Tipo 2	54
4. Discussão	65
5. Conclusões	66
APÊNDICE	67
BIBLIOGRAFIA	69

CAPÍTULO I

REVISÃO DA LITERATURA

1. INTRODUÇÃO

O método sísmico de reflexão, na prospecção de petróleo, teve um desenvolvimento muito grande na última década com o advento da digitalização dos registros de campo e posterior tratamento computacional. Várias técnicas de computação desses registros surgiram, em especial no que diz respeito a uma melhor interpretação dos resultados. Dentre essas destacamos a "filtragem digital inversa", empregada basicamente em dois casos: deconvolução preditiva e filtro shaper. O primeiro para eliminar um ruído periódico de grande energia chamado reverberação, a qual intervém sobre os eventos refletivos e, o segundo, objetivando dar um caráter mais resolutivo a estes eventos.

O cálculo do filtro inverso tem sido feito pelo método dos mínimos quadrados, devido a Wiener. Em síntese consiste em dado um vetor, entrada, achar um outro vetor, filtro, capaz de transformar o primeiro num terceiro vetor, pré-estabelecido, chamado saída desejada. Por razões matemáticas, o que se obtém é uma outra saída efetiva, que difere da desejada por um vetor de erros ou resíduos. O método visa minimizar a soma dos quadrados desses erros.

Este trabalho visa investigar dois métodos: o primeiro é substituir-se a soma dos quadrados dos erros pela soma dos módulos destes e minimizar-se através do algoritmo simplex revisado e, o segundo, consiste em não aplicar-se nenhuma minimização, mas fazer com que os erros caiam fora de uma zona, pré-determinada, na saída. Isto é viável porque o vetor saída é maior (tem mais elementos) que a entrada. Dessa forma é possível escolher-se no primeiro um trecho de tamanho igual ao do segundo. Um confronto será feito sob o ponto de vista de precisão e tempo de processamento entre estes métodos propostos e dos mínimos quadrados.

2. UM SUMÁRIO SOBRE PROCESSAMENTO DE SINAIS SÍSMICOS

2.1 - Conceitos Matemáticos Básicos

2.1.1 - Sinal Digital - É uma série numérica discreta referenciada a um índice que é o tempo, sob incremento constante.

Sinal: -1, 0, 2, -1, 1, -1, 0, 3, -2, 0, 1, 0

Tempo: -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

O sinal é representado por letras como x_t , y_t , z_t , a_t , b_t , ..., e, como o consideramos a maneira de um todo, é comum apresentá-lo na forma

(... -1, 0, 2, -1, 1, -1, 0, 3, -2, 0, 1, 0, ...)

e pode-se abstrair-se da relação de cada elemento com o tempo, uma vez que se sabe o incremento. Existe uma forma mais comum para indicar a origem que é através de índices nos elementos, como

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$$

2.1.2 - Energia do Sinal - Representada por E é

$$E = \sum_{t = -\infty}^{+\infty} a_t^2 \quad (2.1.2.1)$$

2.1.3 - Onda - O conceito é tão geral que é melhor fazê-lo sob o ponto de vista matemático. Uma onda é um sinal caracterizado por duas propriedades:

2.1.3.1 - Uma onda tem um tempo de origem, ou de chegada, definido. Antes do tempo zero, usado como origem, todos os valores são iguais a zero; isto é $b_t = 0 \quad \forall t < 0$.

2.1.3.2 - A onda tem energia finita, isto é $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots$ é finito. Ela pode ter um comprimento infinito, a partir da origem, porém sua energia tem que ser finita. Podemos citar um exemplo para este caso:

$$b_t = (1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots)$$

A energia de b_t é

$$E = 1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 4/3, \text{ valor finito.}$$

2.1.4 - Observações:

2.1.4.1 - O nome onda não é uma tradução satisfatória do original que é em inglês - wavelet, muito empregado em trabalhos escritos em português.

2.1.4.2 - Será usado também o nome pulso, de certo modo equivalente à onda. Entretanto, pulso é uma entidade transitória, aparece quando uma fonte acaba de gerá-lo.

2.1.4.3 - A propriedade 2.1.3.1 é dita unilateral e a 2.1.3.2, de estabilidade.

2.1.5 - Convolução - Dadas duas ondas $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$ e $b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_p)$, a convolução entre elas, denotada pela equação simbólica $c = a * b$, em que $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$, é dada por

$$c_t = \sum_{s=0}^t a_s b_{t-s} \quad (I-2.1.5.1)$$

Sendo $s \leq m$, $t-s \leq p$, $n = m + p$.

A expressão (I-2.1.5.1) está definida no campo discreto. Vamos ver um exemplo trivial:

$$a = (a_0, a_1), \quad b = (b_0, b_1, b_2), \quad c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$$

$$t \leq 3, \quad s \leq 1, \quad t - s \leq 2$$

$$t = 0, \quad c_0 = a_0 b_0$$

$$t = 1, \quad c_1 = a_0 b_1, \quad a_1 b_0$$

$$t = 2, \quad c_2 = a_0 b_2, \quad a_1 b_1$$

$$t = 3, \quad c_3 = a_1 b_2$$

Existe um dispositivo prático, conforme abaixo, para o

mesmo exemplo:

$$\begin{array}{cccc}
 a_0 b_0 & & a_0 b_1 & & a_0 b_2 & & & \\
 & & a_1 b_0 & & a_1 b_1 & & & a_1 b_2 \\
 \hline
 a_0 b_0 & & (a_0 b_1 + a_1 b_0) & & (a_0 b_2 + a_1 b_1) & & & a_1 b_2 \\
 (c_0) & & (c_1) & & (c_2) & & & (c_3)
 \end{array}$$

É exatamente como esse dispositivo acima que computacionalmente se procede, ou seja

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^m c_{i+j} = c_{i+j} + a_i b_j \quad (I-2.1.5.2)$$

Sendo o vetor c previamente zerado.

2.1.6 - Transformada Z - Seja o sinal $b_t = (b_0, b_1, b_2, \dots)$, o polinômio

$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

$$B(z) = \sum_k b_k z^k \quad (I-2.1.6.1)$$

é denominado transformada z de b_t . O expoente de z indica a posição, em relação ao tempo, do elemento que aparece como coeficiente. Se multiplicarmos o sinal b_t por z^n acarretará em b_t um atraso de n unidades em relação ao tempo inicial. A transformada z permite calcular-se a convolução de dois ou mais sinais. Seja por exemplo $a = (a_0, a_1)$ e $b = (b_0, b_1)$. Tem-se usado também a notação a e b sem o índice t , para os sinais, a fim de designar que eles têm tamanho (número de elementos) pré-determinado, um vetor linha. Tomando-se então a transformada z desses vetores vem

$$A(z) = a_0 + a_1 z, \quad B(z) = b_0 + b_1 z$$

$$A(z) B(z) = (a_0 + a_1 z) (b_0 + b_1 z)$$

$$A(z) B(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + a_1 b_1 z^2$$

O polinômio resultante

$$C(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + a_1 b_1 z^2$$

tem como coeficientes os elementos da convolução de $a * b$. A recíproca é verdadeira, como é imediato de ver.

Esta correspondência entre $a * b$ e $A(z)B(z)$ permite verificar umas propriedades importantes da convolução:

2.1.6.1 - A convolução é comutativa

$$a * b = b * a$$

uma vez que $A(z) B(z) = B(z) A(z)$

2.1.6.2 - A convolução é associativa

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

dado que $(A(z)B(z)) C(z) = A(z) (B(z)C(z))$

2.1.6.3 - A convolução é distributiva com respeito à adição

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

Demonstração também imediata, lembrando a propriedade distributiva dos polinômios da multiplicação em relação à adição.

Observação: Tomando-se $z = e^{i\omega}$ teremos em lugar de $B(z)$

$$(I-2.1.6.1)$$

$$B(\omega) = b_0 + b_1 e^{i\omega} + b_2 e^{i(2\omega)} + b_3 e^{i(3\omega)} + \dots$$

que é uma representação do sinal em termos de frequência, não mais de tempo. O tempo (t) e a frequência (ω) constituem dois

domínios de representações do sinal. $B(w)$ dado por

$$B(w) = \sum_k b_k e^{i(kw)} \quad (\text{I-2.1.6.4})$$

é uma representação discreta. No campo contínuo $B(w)$ é a transformada de Fourier de b_t

$$B(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) e^{iwt} dt \quad (\text{I-2.1.6.5})$$

A transformada inversa é

$$b_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(w) e^{-wt} dw \quad (\text{I-2.1.6.6})$$

Através dessas duas integrais passa-se de um domínio para outro. O tratamento do sinal sísmico envolvendo os dois domínios constitui um campo vasto e cheio de recursos. A representação final é sempre no domínio do tempo. Entretanto, certas operações matemáticas que apresentam dificuldade de tratamento no domínio do tempo podem não apresentar no da frequência. Então resolve-se no segundo e depois passa-se para o primeiro através da transformada inversa, na hipótese de haver também simplificações no cálculo da integral (I-2.1.6.6). Neste trabalho as questões serão tratadas apenas no domínio do tempo.

2.1.7 - Correlação Cruzada e Autocorrelação - Considere-se a relação

$$r_k = \sum_{j=0}^{n-k} a_{j+k} b_j \quad (\text{I-2.1.7.1})$$

para: $-n, -n+1, \dots, -2, -1$

$$r_k = r_{-k}$$

$k < -n$ e $k > n$

$$r_k = 0$$

Se $b \neq a$ temos a correlação cruzada, se $b = a$ temos a auto correlação.

Tomemos um exemplo simples:

$$a = (a_0, a_1, a_2)$$

$$b = (b_0, b_1, b_2)$$

$$j = 0, 1, 2 \quad \begin{cases} j + k = 0, 1, 2 \quad \text{e se } j \geq 0 \text{ logo } 0 \leq k \leq 2 \\ \text{e como } 0 \leq n-k \leq 2 \quad \text{logo } 0 \leq n \leq 2 \end{cases}$$

$$r_0 = \sum_{j=0}^2 a_j b_j = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$r_1 = \sum_{j=0}^2 a_{j+1} b_j = a_1 b_0 + a_2 b_1 + 0 \cdot b_2$$

$$r_2 = \sum_{j=0}^2 a_{j+2} b_j = a_2 b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2$$

Uma forma prática consiste em se colocar os dois vetores emparelhados, com os dois primeiros elementos se correspondendo, e ir-se deslocando um deles. No exemplo é o b que se desloca. Dessa forma temos a correlação cruzada de b em relação a a . Se fosse o contrário, o a que se deslocaria e o resultado seria diferente. Vamos apresentar então o dispositivo prático

a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
b_0	b_1	b_2	0	b_0	b_1	0	0	b_0
$a_0 b_0$	$a_1 b_1$	$a_2 b_2$	0	$a_0 b_1$	$a_1 b_2$	0	0	$a_0 b_2$

O símbolo r utilizado na fórmula (I-2.1.7.1) está representando tanto a correlação cruzada como a autocorrelação. Daqui

para frente será adotado o símbolo r para a autocorrelação e g para a correlação cruzada. É importante observar que a autocorrelação é comutativa e a correlação cruzada não é. No exemplo acima, para a autocorrelação ($a = b$) teremos os seguintes valores

$$r_0 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2, \quad r_1 = a_0 a_1 + a_1 a_2, \quad r_2 = a_0 a_2$$

Observações:

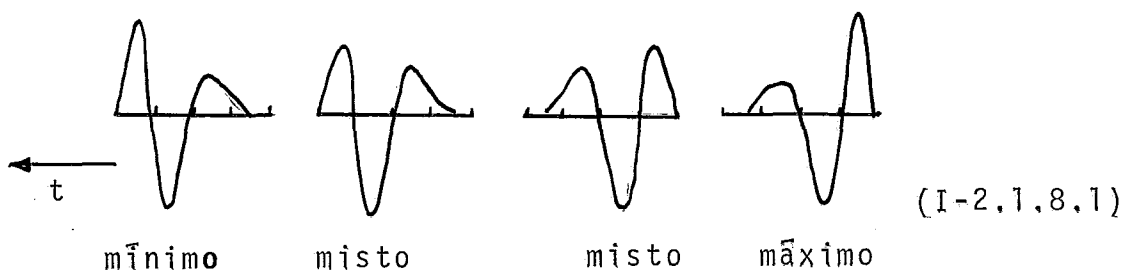
2.1.7.2 - Tanto a correlação como a convolução são constituídas de um conjunto de elementos resultantes de determinadas operações feitas com elementos de outros dois conjuntos. Para a correlação, cada elemento está associado a uma dada posição (que do inglês se diz lag), por exemplo r_0 - autocorrelação na posição zero, r_1 - autocorrelação na posição um, etc,...

2.1.7.3 - A autocorrelação é equivalente, para cada posição, à esperança matemática, a menos de um fator de proporcionalidade, este igual ao inverso do número de elementos resultantes.

2.1.8 - Mínimo atraso, máximo atraso e atraso misto - Vamos considerar primeiro uma onda constituída apenas de dois elementos, chamada dipolo. Um dipolo $a = (a_0, a_1)$, com $a_1 \neq 0$, é de

$$\begin{array}{ll} \text{mínimo atraso,} & \text{se } |a_0/a_1| > 1, \\ \text{máximo atraso,} & \text{se } |a_0/a_1| < 1 \text{ e} \\ \text{atraso misto,} & \text{se } |a_0/a_1| = 1. \end{array}$$

Se uma onda com mais de dois elementos for resultante da convolução de vários dipolos, todos de mínimo atraso, ela é dita de mínimo atraso. Ela será respectivamente de máximo e misto se os dipolos forem todos de máximo atraso e parte de mínimo e parte de máximo. Ver exemplos em (I-2.1.8.1).



Conforme se verá mais à frente, no cálculo do filtro inverdo pelo método dos mínimos quadrados, só se obterá um filtro satisfatório, ou estável, se o sinal de entrada for de mínimo atraso.

2.1.9 - Conceito de Filtragem Inversa - Dados $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)$ um vetor de entrada (input) e um vetor de saída (output) $d = (d_0, d_1, \dots, d_n)$. Seja $f = (f_0, f_1, \dots, f_p)$, um vetor desconhecido, chamado filtro, tal que

$$b * f = d - e$$

O filtro f convolvido com b deverá produzir o vetor d , a menos do vetor erro e .

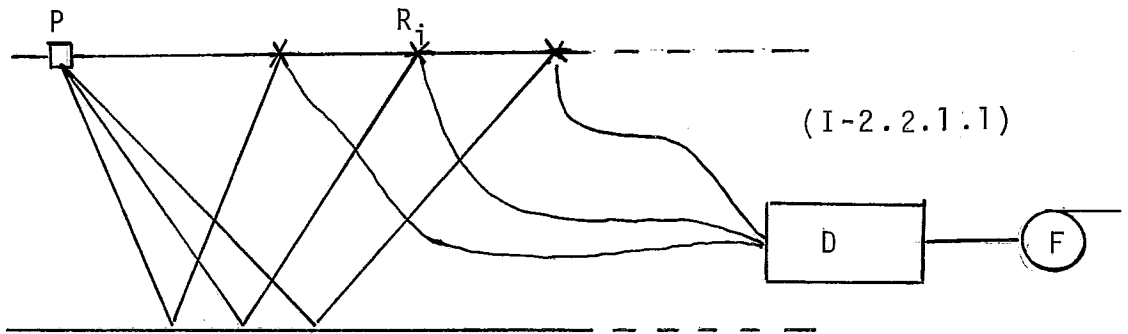
2.2 - Aquisição de Dados

2.2.1 - Generalidades - Os levantamentos sísmicos utilizam-se de ondas acústicas, com frequências variando desde próximo do zero até algumas dezenas de milhares de hertz. Estas penetrando no subsolo quando encontram as diferentes camadas uma parte se reflete e outra se refrata. Devido à essa separação há uma diminuição da energia tanto para as ondas de reflexão como para as de refração. Outros dois fatores concorrem para essa perda de energia. O primeiro é devido à absorção e o segundo, relativo à divergência esférica, lembrando que a propagação sendo em três dimensões e as frentes de onda caracterizadas por superfícies esféricas (num modelo ideal), a quantidade de energia por unidade de área tende a diminuir.

A sísmica atual ocupa-se quase que totalmente dos sinais refletidos, se bem que nem sempre é simples isolá-los dos refratados que retornam segundo o ângulo limite, e de outros chamados ruídos.

Um sistema de aquisição de dados consta basicamente de uma fonte de energia P e de receptores R_i , conforme a figura

abaixo.

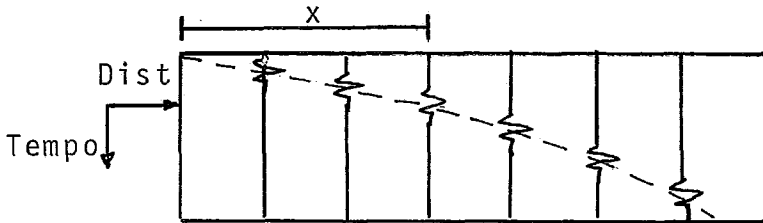


O número máximo dos receptores obedece aos padrões internacionais, comumente 24, 48 ou 96. Para cada receptor está associado um canal para gravação. A gravação é feita segundo um intervalo de tempo fixo e pré-estabelecido denominado intervalo de amostragem. Este deve satisfazer às condições de se ter o menor número possível de amostragens e de não perder a representatividade dos sinais. Então a cada intervalo de amostragem é feita, de maneira quase instantânea, a amostragem de todos os canais. Os dados amostrados vão sendo gravados digitalmente numa fita magnética F por meio de um instrumento adequado D, figura (I-2.2.1.1). Ao se completarem todas as amostragens a fita terá um registro correspondente. Este, por conter dados de todos os canais é denominado registro multiplexado. A fita magnética levada a um centro de processamento de dados, um dos primeiros trabalhos computacionais é a separação das amostras de maneira a individualizar cada canal como um registro separado - operação de demultiplexação. O conjunto das amostras correspondentes a um único canal recebe o nome de traço sísmico.

2.2.2-Relação Sinal/Ruído - Pode ser expressa pelo logaritmo dos valores absolutos dos elementos que constituem o sinal dividido pelo dos que constituem o ruído. Este sempre acompanha o sinal e tem várias origens como provenientes da terra, do instrumento de medida, etc... Ele é também de natureza variada, podendo ser aleatório e não aleatório.

2.2.3 - Correção Dinâmica (Normal Moveout) - Se fizermos uma representação gráfica dos traços correspondentes aos recepto

res, conforme figura (I-2.2.3.1), nota-se que o sinal que representa o refletor, para cada receptor, se situam segundo uma curva e não uma reta. Não existe proporcionalidade no tempo de chegada.



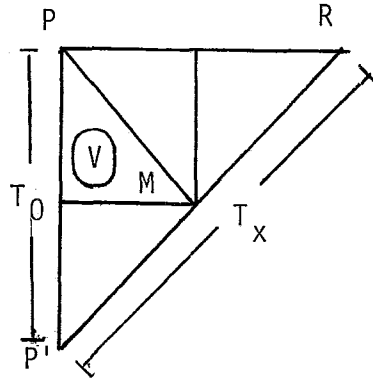
(I-2.2.3.1)

Numa situação ideal (homogeneidade do meio) essa curva é uma hipérbole. Sendo V a velocidade da camada temos

$$(T_x V)^2 = (T_0 V)^2 + x^2$$

$$T_x = \sqrt{T_0^2 + (x/V)^2}$$

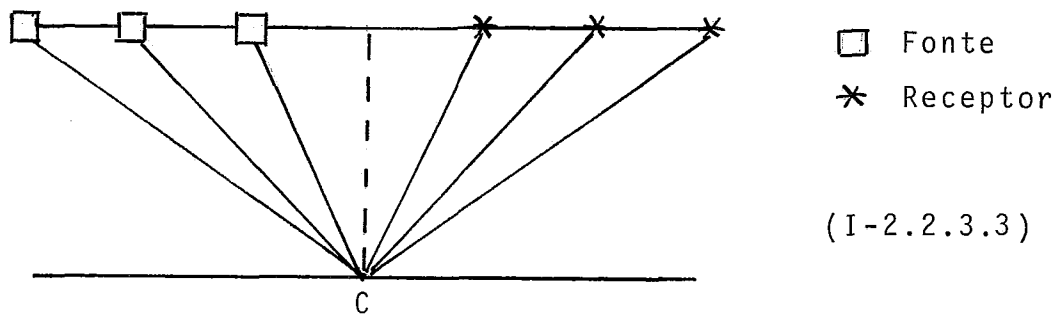
(I-2.2.3.2)



A onda vindo de P se reflete em M e atinge R . $PM = MR = PM$, logo $PMR = P'MR$. Se o receptor estivesse sobre P , condição operacionalmente impossível, o tempo de ida e volta seria T_0 . O moveout é então um tempo que deve ser extraído de T_x de maneira a deixá-lo igual a T_0 . O normal moveout é uma correção que deve ser aplicada e é chamada também de correção dinâmica.

2.2.4 - Empilhamento - Uma vez extraída a correção dinâmica pode-se somar traços favorecendo o sinal, em detrimento dos ruídos aleatórios. Existe uma técnica que consiste em se somar vários traços, para se obter um único resultante, com o objetivo de melhorar a relação sinal/ruído. Esta técnica denomina-se ponto de profundidade comum (do inglês common depth point - CDP). Para isso é necessário primeiro corrigir-se dinamicamente todos

esses traços.



Pode-se notar pela figura (I-2.2.3.3) que em C incidem sinais provenientes de fontes diferentes. Há um compromisso geométrico entre a posição das fontes e a posição dos receptores para a formação do CDP. É associado um índice dado pelo número de traços somados, chamado grau de cobertura. O traço final chama-se traço empilhado.

Todo trabalho aqui desenvolvido irá se referir a um único traço, quer ele seja puro (simplesmente demultiplexado) ou empilhado.

A velocidade V da figura (I-2.2.3.2) representa a velocidade de propagação da onda no meio acima do refletor. Entretanto a velocidade que corrige o moveout para permitir a melhor soma ou empilhamento de traços, numa situação real, não é igual a V . Ela é, para um meio não homogêneo, chamada velocidade de empilhamento e tem o significado de um coeficiente que permite a otimização de um empilhamento. Tanto que é determinada experimentalmente, tomando-se vários valores e observando-se visualmente o resultado dos empilhamentos correspondentes a esses valores. Este processo constitui a chamada Análise de Velocidade.

CAPÍTULO II

APLICAÇÕES DA FILTRAGEM DIGITAL INVERSA

1. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

1.1 - Entidades Básicas

Sejam os vetores

entrada	$b_t = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m)$
filtro	$f_t = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_p)$
saída desejada	$d_t = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_n)$
saída efetiva	$c_t = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$
erro	$e_t = (e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$

(II-1.1.1)

O vetor c_t é a convolução de $b_t * f_t$, logo

$$c_t = \sum_{j=0}^p f_j b_{t-j}, \text{ para } t-j = 0, 1, \dots, m, t = 0, 1, \dots, n \text{ e}$$

$n = m + p$ (II-1.1.2)

Entre os vetores d_t e c_t existe a relação

$$d_t = c_t + e_t$$

donde

$$e_t = d_t - c_t \quad \text{(II.1.1.3)}$$

Vamos desenvolver (II-1.1.2) que juntamente com (II-1.1.3) nos darão o sistema de equações seguinte (II-1.1.4), que permitirá ver o relacionamento entre as variáveis de maneira mais explícita.

$$\begin{array}{rccccccc}
 b_0 f_0 & & & & & + e_0 & = & d_0 \\
 b_1 f_0 & + & b_0 f_1 & & & + e_1 & = & d_1 \\
 b_2 f_0 & + & b_1 f_1 & + & b_0 f_2 & + e_2 & = & d_2 \\
 \vdots & + & b_2 f_1 & + & b_1 f_2 & + \text{-----} & + e_3 & = & d_3 \\
 \vdots & & \vdots & & + & b_2 f_2 & + \text{-----} & \vdots & \vdots \\
 b_m f_0 & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & b_m f_1 & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & b_m f_2 & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & b_0 f_p & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & b_m f_p & + & e_n & = & d_n
 \end{array} \tag{II-1.1.4}$$

1.2 - Método dos Mínimos Quadrados

Vamos fazer

$$I = \sum_{t=0}^n e_t^2 = \sum_{t=0}^n (d_t - c_t)^2 \tag{II-1.2.1}$$

I é chamado energia do erro. O método consiste em obter-se as derivadas parciais de I , em relação aos f_k ($k=0,1,2,\dots,p$) e igualá-las a zero, resultando um sistema de p equações a p incógnitas.

$$I = \sum_{t=0}^{m+p} (d_t - c_t)^2 = \sum_{t=0}^{m+p} \left(d_t - \sum_{j=0}^p f_j b_{t-j} \right)^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial f_k} = \sum_{t=0}^{m+p} 2 (d_t - \sum_{j=0}^p f_j b_{t-j}) (-b_{t-k}) = 0$$

$$- \sum_{t=0}^{m+p} d_t b_{t-k} + \sum_{t=0}^{m+p} \left(\sum_{j=0}^p f_j b_{t-j} \right) b_{t-k} = 0$$

O fator b_{t-k} não depende de j , logo pode-se fornecer o seguinte sistema

$$\sum_{j=0}^p f_j \sum_{t=0}^{m+p} b_{t-j} b_{t-k} = \sum_{t=0}^{m+p} d_t b_{t-k}$$

(II-1.2.2)

A cada valor de k tem-se uma equação do sistema (II-1.2.2). Os valores dos índices $t-j$, $t-k$ e t estão vinculados primeiro aos valores de $k = 0, 1, \dots, p$ e depois aos de $j = 0, 1, 2, \dots, p$. Dessa forma deveremos ter

$$\begin{aligned} t-k &\geq 0 && \text{ou} && t &\geq k, \\ t-j &\geq 0 && \text{ou} && t &\geq j, \\ \text{e } k-j &\geq 0 && \text{ou} && j &\geq k \end{aligned}$$

Isto porque de acordo com (II-1.1.1) o primeiro valor de cada índice é zero. Existe uma ordem de prioridade de variação de índices que é t , j , k no sentido crescente. Por essas razões pode-se colocar

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{m+p} b_{t-j} b_{t-k} &= r_{k-j} \\ \sum_{t=0}^{m+p} d_t b_{t-k} &= g_k \end{aligned} \quad (\text{II-1.2.3})$$

Onde r_{k-j} é a autocorrelação da entrada e g_k é a correlação cruzada da entrada b_t com a saída desejada d_t . O sistema (II-1.2.2) fica então

$$\sum_{j=0}^p f_j r_{j-k} = g_k \quad (\text{II-1.2.4})$$

Na forma matricial (II-1.2.4) fica

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_p \\ r_1 & r_0 & r_1 & & \\ r_2 & r_1 & & & \\ \vdots & & & & \\ r_p & & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix} \quad (\text{II-1.2.5})$$

As incógnitas são f_0, f_1, \dots, f_p , coeficientes do filtro f . É interessante notar que se a entrada tiver pelo menos um elemento não nulo, o sistema (II-1.2.5) é possível e determinado. A autocorrelação $r_0 = b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_m^2$, dada essa hipótese será não nula, $r_0 \neq 0$. Se considerarmos duas linhas genéricas, não coincidentes, i e j , e as situamos em referência a r_0 , teremos

$$\begin{array}{ccc} i & \text{-----} & r_0 & \text{-----} & r_j \\ j & \text{-----} & r_j & \text{-----} & r_0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & i & & j \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq p \\ i \neq j \end{array} \quad (\text{II-1.2.6})$$

Na suposição da linha j ser uma combinação da linha i , leva a concluir

$$\begin{array}{l} r_j = k r_0 \\ r_0 = k r_j \end{array} \quad (\text{II-1.2.7})$$

Como $k \neq 0$, as relações (II-1.2.7) sã serão válidas desde que $r_j = r_0 = 0$, o que é absurdo, uma vez que $r_0 \neq 0$ em decorrência da hipótese.

Na solução do sistema linear (II-1.2.5), há necessidade de primeiro computar-se as autocorrelações e correlações cruzadas e após achar-se a inversa da matriz das autocorrelações. Neste último calculo teoricamente teríamos que efetuar n^3 operações de multiplicações, sem levarmos em conta as operações de adições. Levinson¹ atraves de um método recursivo reduziu esse número para n^2 . Para ilustrar, vamos ver como esse método se procede. To-
memos uma matriz 3x3, com solução para f : $f_0 = 1$, $f_1 = a_1$ e $f_2 = a_2$

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procura-se a solução para a matriz 4x4. Devemos encontrar 1 , a_1' , a_2' e a_3'

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-1.2.8})$$

Sejam os sistemas (II-1.2.9)

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \quad (\text{II-1.2.9})$$

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

Subtraindo-se os dois sistemas (II-1.2.9), tem-se

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{II-1.2.10})$$

Para tornar o segundo membro de (II-1.2.10) igual ao de (II-1.2.8) devemos ter $c_3 = e/v$. Isto implica que

$$v' = v - c_3 e = v - e^2/v$$

Então a solução para a matriz 4x4 deriva da matriz 3x3, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{e}{v} \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

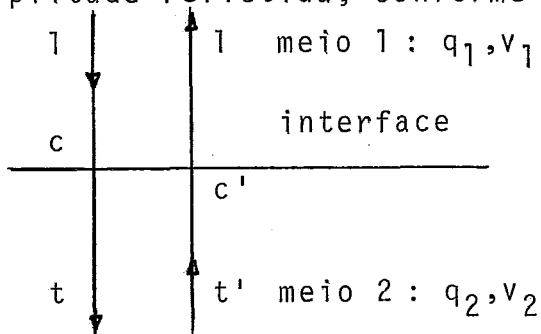
2. DECONVOLUÇÃO PREDITIVA

2.1 - Coeficiente de Reflexão

As ondas acústicas, refletidas e refratadas, são em geral de dois tipos: de compressão - P e de cisalhamento - S. A amplitude destas tem o significado físico de pressão, podendo ocasionar deformações elásticas, normais ou de cisalhamento.

Quando a incidência não é normal as duas se apresentam e a energia é dividida. As ondas refratadas são governadas pelos princípios de Snell e pelo tempo de percurso mínimo, de Fermat, quando se dispõe dos valores dos tempos desses eventos e se deseja a reconstituição do modelo que os originou.

Supondo-se incidência normal não existe refração e a onda prossegue seu percurso também normal. Neste caso o coeficiente de reflexão c , medido em unidades de pressão, dá o valor da amplitude refletida, conforme a figura (II-2.1.2).



(II-2.1.1)

$$c = \frac{q_2 v_2 - q_1 v_1}{q_2 v_2 + q_1 v_1}$$

(II-2.1.2)

q_i, v_i - Respectivamente densidade e velocidade do meio i ($i = 1, 2$).
O coeficiente de transmissão t fornece o valor da amplitude transmitida. É medido na mesma unidade que c

$$t = \frac{2q_1 v_1}{q_1 v_1 + q_2 v_2} \quad (\text{II-2.1.3})$$

Pelo exame das fórmulas (II-2.1.2) e (II-2.1.3) deduz-se que c aumenta ou diminui de valor à medida que $q_2 v_2$ aumenta ou diminui em relação a $q_1 v_1$, na suposição de v_2 e q_2 serem, respectivamente, maiores que v_1 e q_1 (na maioria dos casos isto realmente ocorre), e que com t , acontece o contrário. Em termos físicos isto significa que quando se tem um contraste grande entre os meios ($q_2 v_2 \gg q_1 v_1$) a maior parte da energia incidente se reflete. Quando $q_2 v_2 < q_1 v_1$, logicamente, c será negativo. O produto qv é chamado impedância acústica z .

Na interface, se a amplitude da onda normal incidente, é igual à unidade, figura (II-2.1.1), a pressão será a mesma para os dois meios. Isto permite estabelecer as relações

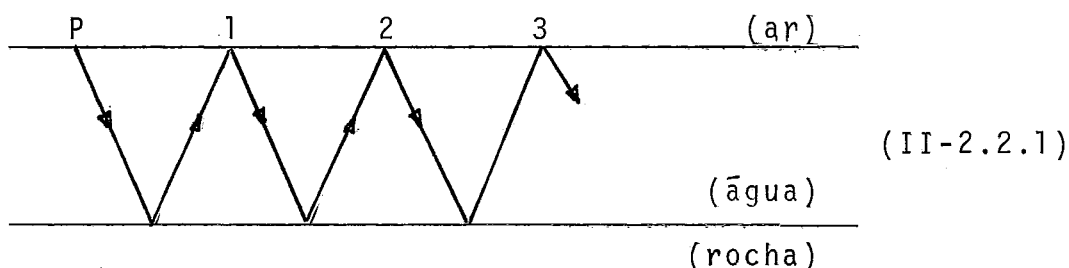
$$\begin{aligned} 1 + c &= t \\ t' + c' &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II-2.1.4})$$

É fácil ver que se o sentido de propagação da onda for o contrário teremos

$$c' = -c \quad (\text{II-2.1.5})$$

2.2 - Reverberação

Considere-se uma fonte de energia P (ideal) sobre a superfície da água (II-2.2.1)



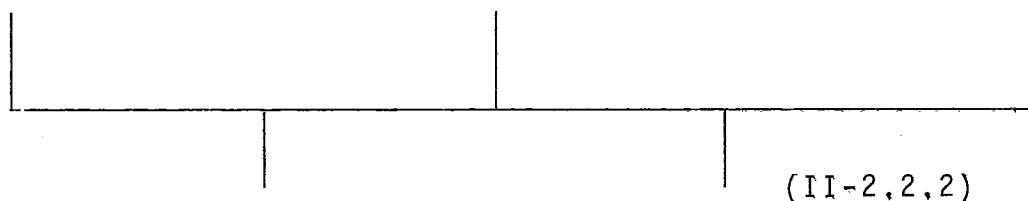
O ar, a água e a rocha representam os três meios do modelo. São muito distintos do ponto de vista de contraste físico ($V_{\text{rocha}} > V_{\text{água}} > V_{\text{ar}}$). Coeficiente de refletividade (água / ar) = -1, lembrando um contraste fisicamente infinito, (água / rocha) = c, com $c < 1$.

Vamos considerar um pulso instantâneo e de amplitude unitária denominado impulso, no tempo zero. Esse pulso refletindo-se pela primeira vez no fundo do mar retorna com amplitude c, uma vez que $1 \cdot c = c$ (c é numericamente a porcentagem da amplitude que retorna). Prosseguindo, a onda, agora com amplitude c, vai refletir na superfície da água retornando com amplitude -c ($c \cdot (-1) = -c$). Este processo vai se repetir várias vezes. Se n é o tempo de ida e volta da onda, partindo da superfície do mar, refletindo no fundo e voltando à superfície, temos nos tempos $t = 0, t = n, t = 2n, \dots$, a seguinte sequência de coeficientes de refletividade

$$1, -c, c^2, -c^3, \dots$$

Isto constitui um sinal com valor 1 no tempo zero e valores da sequência dos coeficientes de refletividade a intervalos periódicos, de período n, e os valores relativos aos outros tempos todos nulos, conforme figura (II-2.2.2).

0	1	2	3	...	n	2n	3n	...	tempo			
1	0	0	0	...	-c	0	0	c^2	0	0	$-c^3$	amplitude



Tomando-se a transformada z desse sinal, vem

$$C(z) = 1 - cz^n + c^2 z^{2n} - c^3 z^{3n} + \dots \quad (\text{II-2.2.3})$$

Desde que $|c| < 1$, $C(z)$ constitui uma série numérica convergente,

cuja soma \bar{e} dada por

$$C(z) = \frac{1}{1 + Cz^n} \quad (\text{II.2.2.4})$$

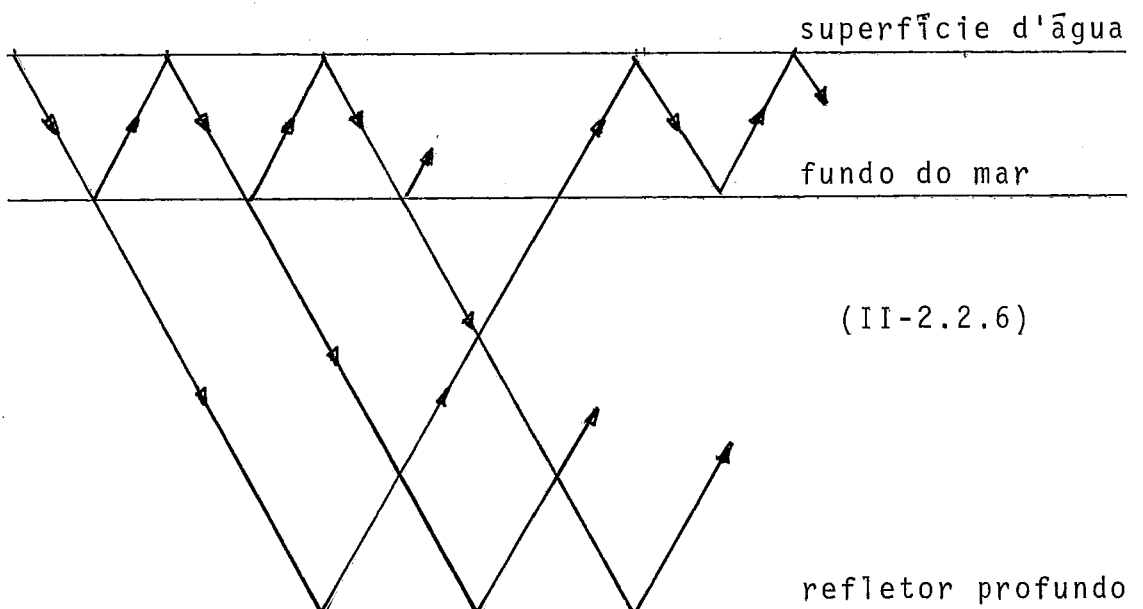
A reverberação \bar{e} então representada pela equação (II.2.2.4). A eliminação dessa reverberação \bar{e} a atuação de um filtro que torne nulos todos os coeficientes de refletividade, com exceção do impulso no tempo $t = 0$. Matematicamente esse filtro $F(z)$ \bar{e} tal que

$$F(z) C(z) = 1$$

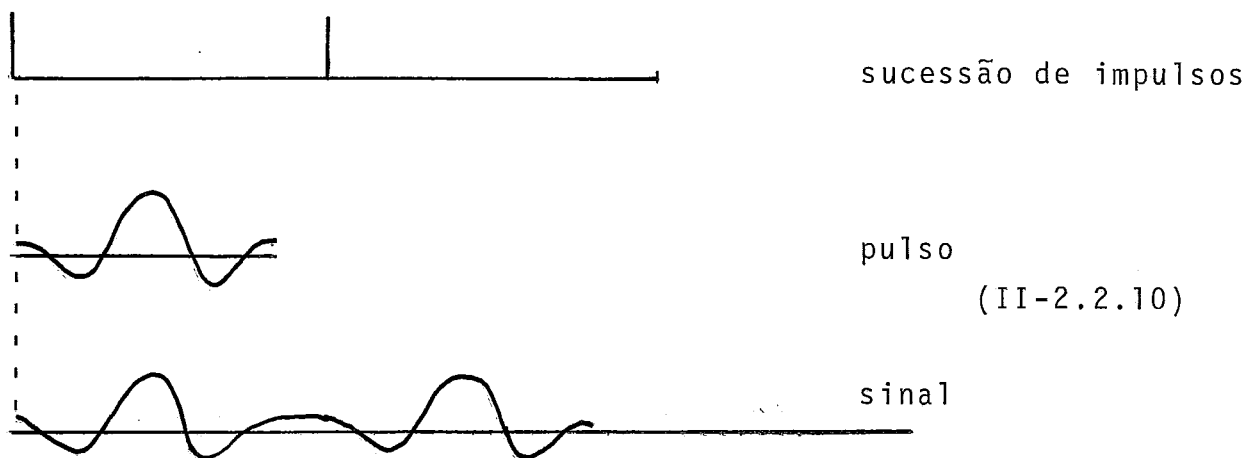
$$\text{ou } F(z) = 1/C(z) = 1 + CZ^n \quad (\text{II.2.2.5})$$

Tanto a reverberação (II-2.2.3) quanto o filtro (II.2.2.5) são de mínimo atraso, uma vez que $|c| < 1$. Esta \bar{e} uma conclusão muito importante.

Vamos supor, agora, além do fundo do mar um outro refletor mais profundo, com coeficiente de refletividade igual a 1 (hipótese não muito fora da situação real). Parte da energia, não refletida no fundo do mar, penetra com a onda que vai refletir-se nesse refletor profundo, figura (II-2.2.6).



Gráficamente temos:



A posição dos impulsos marca o início do pulso. Se um impulso é negativo e em módulo menor que a unidade, haverá uma redução proporcional nos valores dos elementos que constituem o pulso e os elementos trocam de sinal. A convolução da sucessão dos coeficientes de reflexão da reverberação, tal como em (II-2.2.10), mostra uma repetição da figura do pulso, porém invertendo-se alternativamente este com uma redução gradual nos valores dos elementos. Se existirem reflexões profundas, a sucessão dos coeficientes de refletividade destas, que não são periódicos, deverão convolver com a reverberação. Poderá então, neste caso, acontecerem sobreposições dos elementos do pulso, cujos valores se somam não algebricamente.

2.3 - Concepção Matemática de Traço Sísmico

Em aquisição de dados, foi visto como se obtém um traço sísmico, a partir de registros de campo. Vamos ver agora como matematicamente é considerado esse traço sísmico, que será chamado de x_t . Suponhamos ser b_t , um pulso de reverberação, a convolução de sucessivos impulsos c_t com um pulso p_t , emitido por uma fonte

$$b_t = p_t * c_t \quad (\text{II-2.3.1})$$

Seja o conjunto de camadas representado por uma sequência também de impulsos s_t , cuja posição no tempo é aleatória. Os impulsos

representando os coeficientes de reflexão dessas camadas. O modelo matemático de traço marinho será então

$$x_t = c_t * p_t * s_t$$

$$x_t = b_t * s_t \quad (\text{II.2.3.2})$$

s_t é aleatório e b_t é periódico.

Se u_t representa o ruído, a forma mais completa para (II-2.3.2) seria

$$x_t = b_t * s_t + u_t$$

Numa condição ideal, relação sinal/ruído grande, pode-se desprezar u_t .

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NA DECONVOLUÇÃO PREDITIVA

Como a reverberação é um fenômeno periódico é possível fazer-se uma predição em um dado instante t , do que poderá ocorrer no intervalo $(t, t + h)$. A variável h é chamada intervalo de predição. A entrada é o traço x_t e a saída é tomada com o mesmo traço defasado, x_{t+h} . Assim o sistema linear (II-1.2.5) para o caso fica

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_p \\ r_1 & r_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ & & r_0 & r_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ r_p & \dots & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_h \\ r_{h+1} \\ \vdots \\ r_{h+p} \end{bmatrix} \quad (\text{II-3.1})$$

O segundo membro deste sistema de equações representa a autocorrelação do traço a partir da posição h . A rigor esse segundo

membro deveria ser a autocorrelação da reverberação. Entretanto não é possível de se conhecer a autocorrelação da reverberação, uma vez que esta se encontra implícita no traço. Conforme já foi visto, a autocorrelação é a esperança matemática, a menos de um fator. Deixando de lado este último, temos

$$r_k = E \left\{ x_j x_{j+k} \right\} = E \left\{ b_j b_{j+k} \right\} * E \left\{ S_j S_{j+k} \right\} \quad (\text{II-3.3.3})$$

Robinson² assumiu a hipótese de ser S_k não correlacionável (ruído branco), a menos da posição zero. Isto constitui um ponto de licado da questão. Porém o que justifica melhor essa hipótese é que satisfeitas as outras condições também fundamentais, os resultados obtidos são satisfatórios. Recapitulando, o modelo matemático de reverberação para a aplicação do método da deconvolução preditiva exige que:

1) As camadas sejam representadas por uma sucessão discreta de impulsos ao longo do tempo, em que cada impulso corresponde a posição de uma dada camada. Onde não houver correspondência o elemento da sucessão tem valor nulo. A soma de duas sucessões é realizada somando-se algebricamente valores de elementos correspondentes a um mesmo tempo, e a multiplicação de uma sucessão por uma constante implica na multiplicação do valor de todos os seus elementos por essa constante.

2) A reverberação é de mínimo atraso.

3) O conjunto dos coeficientes de reflexão dos refletores profundos constituem uma sucessão aleatória e não correlacionável, a menos da posição zero.

Posto isto, vamos voltar à expressão (II-3.3.3)

$$r_k = E \left\{ b_j b_{j+k} \right\} * E \left\{ S_j S_{j+k} \right\} \quad 1 \leq k \leq 1 + p$$

$$E \left\{ S_j S_{j+k} \right\} = \begin{cases} E \left\{ S_j^2 \right\} = P, & \text{para } j = 0 \\ 0 & , \text{ para } j \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II-3.3.4})$$

P é uma constante, logo

$$r_k = P E \left\{ b_j b_{j+k} \right\} \quad (\text{II-3.3.5})$$

Conclui-se então que é válido tomar-se a autocorrelação do traço x_t em lugar da autocorrelação da reverberação, uma vez que a primeira é igual à segunda multiplicada por uma constante.

Os coeficientes de refletividade da reverberação decrescem linearmente com o tempo t . Esta linearidade permite que se apliquem os valores dos coeficientes de filtro, calculados num certo trecho, para todo o traço. O operador de predição f_0, f_1, \dots, f_p , pode ser colocado na forma

$$\underbrace{1, 0, 0, \dots, -f_0, -f_1, -f_2, \dots, -f_p}_{h-1 \text{ zeros}} \quad (\text{II-3.3.6})$$

Este é o operador do erro de predição para o intervalo de predição (ou distância de predição) h . O operador do erro de predição convolvido com o traço x_t fornece x'_t que é o traço constituído apenas pelos impulsos correspondentes aos refletores profundos, isento, portanto, dos impulsos das reverberações.

$$x'_t = x_t - f_0 x_{t-h} - f_1 x_{t-h-1} - \dots - f_p x_{t-h-p} \quad (\text{II-3.3.7})$$

x'_t tem característica de erro, lembrando que x_{t-h} representa a saída desejada, ou seja

$$x_t * f + e = x_{t-h}$$

$$x'_t = e = x_{t-h} - x_t * f$$

Sobre os valores que h pode assumir, obviamente como a reverberação tem início no tempo zero $h \geq 0$. Dada a periodicidade do fenômeno, a eficácia do filtro será melhor sentida para valores grandes do intervalo de predição. Isto será visto mais

concretamente através de exemplos numéricos no capítulo referente a resultados.

4. FILTRO SHAPER

4.1 - Conceituação Matemática

Um traço sísmico x_t , sem reverberação, pode ser considerado como sendo a convolução de um pulso p_t , chamado assinatura da fonte, com uma série de coeficientes de reflexão c_t mais uma função u_t , chamada ruído.

$$x_t = p_t * c_t + u_t \quad (\text{II-4.1.1})$$

Levando-se em conta a simplificação de se desprezar u_t , hipótese já feita para o caso das reverberações, em face da relação sinal ruído ser suficientemente grande, a igualdade (II-4.1.1) fica apenas

$$x_t = b_t * c_t \quad (\text{II-4.1.2})$$

Vamos supor um filtro f_t capaz de transformar b_t no vetor $(1,0,0,\dots,0)$. Para isso deveremos tomar a transformada z de b_t e f_t , respectivamente $B(z)$ e $F(z)$, e fazer

$$B(z) F(z) = 1$$

donde
$$F(z) = 1/B(z) \quad (\text{II-4.1.3})$$

A transformada z aplicada em (II-4.1.2) nos dará

$$X(z) = B(z) C(z) \quad (\text{II-4.1.4})$$

Multiplicando-se ambos os membros desta última relação por $F(z)$ e levando-se em conta (II-4.1.3), vem

$$F(z) X(z) = F(z) B(z) C(z)$$

ou
$$F(z) X(z) = C(z)$$

$$\text{donde } f_t * x_t = c_t \quad (\text{II-4.1.5})$$

O filtro f_t , assim definido, transforma o traço x_t numa série de coeficientes de reflexão.

4.2 - Discussão em torno do Filtro Shaper

Embora a equação (II-4.1.5) tenha uma forma simples, existem três grandes dificuldades envolvendo a determinação do filtro shaper:

1) Foi estabelecida a hipótese do ruído ser desprezível. Isto em um grande número de casos realmente não ocorre.

2) O método dos mínimos quadrados só garante um resultado adequado se a assinatura da fonte for uma onda de mínimo atraso. Isto também não ocorre na maioria dos casos.

3) Necessidade de conhecimento da assinatura da fonte. Atualmente muitos levantamentos sísmicos têm feito o registro da assinatura em separado, os antigos não possuem esse registro. Neste caso tem-se então que recorrer a processos indiretos. Existem tratamentos matemáticos, alguns bastante complicados, buscando a determinação da assinatura.

No cálculo de f_t , o método dos mínimos quadrados apresenta o sistema linear (II-1.2.5) que é uma forma direta (ao contrário da deconvolução preditiva) de cálculo do filtro capaz de transformar uma entrada numa saída desejada. O filtro f_t convolvido com o traço x_t , o qual contém a assinatura p_t , vai dar como resultado c_t , sucessão de coeficientes de refletividade. Se, a seguir, c_t for convolvido com um outro pulso p'_t resultará o traço x'_t . Este será então o novo traço em que a assinatura p_t foi substituída pelo pulso p'_t .

O filtro shaper, satisfeito às condições para um resultado adequado, pode dar ao traço x_t um aspecto mais resolutivo (substituição por x'_t) do ponto de vista interpretativo. Antes de 1970, a amplitude da onda sísmica tinha um significado exclusiva

mente quantitativo. Subsequentemente estudos vieram estabelecer uma colocação também qualitativa à amplitude, relacionando-a com possível presença de hidrocarbonetos em rochas permeáveis. A equação (II-4.1.5) é de extrema importância porque fornece os coeficientes de reflexão das camadas. Estes, como já foi mencionado em (II-2.1.2), permitem o conhecimento da impedância acústica das camadas, parâmetro ligado à natureza destas.

2.2 - Equacionamento Final

As variáveis f_0, f_1, \dots, f_p e e_0, e_1, \dots, e_n , são livres, irrestritas de sinal, então há necessidade de substituí-las pela diferença de outras duas positivas. Além disso, para uniformizar o equacionamento, todas as variáveis serão designadas por $x_i = x_i^+ - x_i^-$, obedecendo ao quadro (III-2.1.5). Isto poderá criar certas dificuldades na comparação com (III-2.1.2), porém dá maior facilidade na codificação de programas relativos e nas aplicações de testes. Vamos abandonar o índice zero para b_i, f_i, e_i e d_i , que passarão a ter também no máximo m, p e n elementos, respectivamente. Pelo esquema do quadro, todas as variáveis são representadas por x , o índice i que irá especificar se i é uma variável de erro ou de filtro, se i é um x_i^+ ou x_i^- .

variável	x_i
erro x^+	$i = 1, 2, \dots, n$
erro x^-	$i = n+1, n+2, \dots, 2n$
filtro x^+	$i = 2n+1, 2n+3, \dots, 2n+2p-1$
filtro x^-	$i = 2n+2, 2n+4, \dots, 2n+2p$

(III-2.1.5)

$2n + 2p$ é o número total de variáveis,

Os coeficientes de filtro e os erros, após o final das iterações pelo simplex revisado, serão calculados pelas relações

$$f_j = x_{2n+2j-1} - x_{2n+2j}, \quad c/ j = 1, 2, \dots, p$$

$$e_i = x_i - x_{n+i}, \quad c/ i = 1, 2, \dots, n$$

(III-2.1.6)

Uma questão importante e que deve ser contornada é com res

peito ao mōdulo do erro, $|e_i|$. Apōs as modificaçōes dadas atravēs do quadro (III-2.1.5) temos genēricamente

$$|e_i| = |x_i - x_{n+i}|, \quad c/ \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Como as variáveis x_i e x_{n+i} nāo podem figurar simultaneamente na base e lembrando que $x_i, x_{n+i} \geq 0$, (III-2.1.7) se transforma em

$$|x_i - x_{n+i}| = |x_i| + |x_{n+i}| = x_i + x_{n+i}$$

(III-2.1.7)

2.2 - Equacionamento Final

Feito o desdobramento das variáveis, o equacionamento (III-2.1.2) se transforma em

minimizar

$$x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n}$$

$$\begin{aligned}
 & x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2n} && + b_1 x_{2n+1} - b_1 x_{2n+2} && = d_1 \\
 & && + b_2 x_{2n+1} - b_2 x_{2n+2} && = d_2 \\
 & && + b_1 x_{2n+2p-1} - b_1 x_{2n+2p} && = d_1 \\
 & && + b_2 x_{2n+2p-1} - b_2 x_{2n+2p} && = d_2 \\
 & && + b_m x_{2n+2p-1} - b_m x_{2n+2p} && = d_m
 \end{aligned}$$

s.a

(III-2.1.8)

triz, a partir do segundo elemento representa os coeficientes das variáveis básicas na função objetiva. B $(n+1) \times (n+1)$ tem a seguinte representação

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n+1 \end{matrix} \quad \text{(III-3.1.1)}$$

3.2 - Procura da Matriz Inversa de B (B^{-1}).

Vamos considerar uma matriz M conforme a figura (III-3.2.1)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & n+1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n+1 \end{matrix} \quad \text{(III-3.2.1)}$$

Procuramos o resultado do produto BM . Para isso tomemos uma linha i de B e façamos a multiplicação por uma coluna j de M . Tem-se duas situações:

1) $i = j$

Seja primeiro $i = 1$ (linha particular)

Temos então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j) = 1 \times 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 \quad \text{(III-3.2.2)}$$

(i) (j)

j é também a posição do elemento igual a 1 da coluna j .

Seja agora, $i \neq 1$. Notar, sempre, que tanto para a linha i (com exceção da primeira linha) como para a coluna j , i e j representam também a posição do elemento igual à unidade. Tem-se então

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (i) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j) \quad = 0+0+\dots-1 \times 1 + 0+\dots+0 = 1 \quad (i)(j) \quad (III-3.2.3)$$

2) $i \neq j$

Seja $i = 1$ (linha particular) e seja j uma coluna qualquer $\neq 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (i) \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j) \quad = -1+0+\dots-1 \times 1 + 0+\dots+0 = -1+1=0 \quad (i) \quad (j) \quad (III-3.2.4)$$

Seja $i \neq 1$ e $j = 1$ (coluna particular)

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (i) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j) \quad = 0 \times 1 + 0 + \dots - 1 \times 0 + \dots + 0 = 0 \quad (j) \quad (i) \quad (III-3.2.5)$$

Seja $i \neq 1$ e $j \neq 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0x(-1) + \dots - 1x0 + \dots - 0x1 + \dots + 0 = 0$$

(i) (j)

(III-3.2.6)

Conclusão: O produto de uma linha i de B por uma coluna j de M é igual à unidade se $i = j$ e zero se $i \neq j$. Logo

$$\begin{aligned}
 BM &= I \\
 \text{ou } M &= B^{-1}
 \end{aligned}$$

(III-3.2.7)

3.3 - Quadro Inicial do Simplex Revisado

	1	2	...	n	
-Z	1	-1	-1	...	-1
d ₁	1				
d ₂		1		0	-1
d _n			0	1	B a _j

B^{-1}

(III-3.3.1)

$$Z = \sum_{i=1}^n d_i$$

a_j - coluna da variável não básica seleccionada para entrar na base, com $j = 1, 2, \dots, n + 2p$, figura (III-3.3.1)

cr_{\min_j} - custo relativo mínimo de a_j , igual ao produto da pri-

meira linha de B^{-1} por a_j .

3.4 - Matriz Inicial das Variáveis não Básicas

$$\begin{array}{c} \text{variável} \end{array} \begin{array}{cccccccc} x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & x_{2n+2} & \dots & x_{2n+2p-1} & x_{2n+2p} \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & & 0 & u_1 & -u_1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & & 0 & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & u_m & -u_m & & u_1 & -u_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 & & u_m & -u_m \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n-m \\ \vdots \\ n \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{coluna} \end{array} \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n+2p}$$

(III-3.4.1)

De acordo com (III-3.1) devemos ter, para uma linha i que contenha um dado par u_k e $-u_k$, $1 \leq k \leq m$, o seguinte:

$$u_k = b_k, \quad \text{se } d_i \geq 0,$$

$$u_k = -b_k, \quad \text{se } d_i < 0. \quad (\text{III-3.4.2})$$

4. ALTERNATIVAS DO MÉTODO

O método aqui proposto, pela utilização do simplex revisado, conforme já foi visto visa a minimização da soma de n variáveis, $\sum_1^n (x_i \text{ ou } x_{n+i})$. Suponha-se que não se queira minimizar alguma ou algumas dessa variáveis. Seja x_k ou x_{n+k} uma delas.

Em consequência em B e B^{-1} , em lugar do valor, respectivamente 1 e -1 , da primeira linha, deverá aparecer zero. Mesmo por essa alteração, como será visto a seguir, o produto BB^{-1} continuará sendo igual à matriz identidade I . Isto significa que o procedimento é matematicamente viável.

4.1 - Exame das Matrizes B e B^{-1}

Vamos raciocinar em torno das figuras (III-4.1.1) e (III-4.1.2), que posicionam a linha e a coluna k nas matrizes B e B^{-1} .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \text{(III-4.1.1)}$$

B

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \text{(III-4.1.2)}$$

B^{-1}

O produto da linha k de B, respectivamente, pela coluna k e outra ($\neq k$) de B^{-1} é igual a um e zero, como é fácil ver. Por outro lado, o produto de qualquer linha $\neq k$ de B (inclusive a linha 1) pela coluna k de B^{-1} é igual a zero. Isto é também de imediata verificação.

Pode-se ter outras linhas iguais a k. Dessa forma, o número de elementos da função objetivo ficará diminuído. É de interesse particular ter esse número da função objetiva exatamente igual ao número de elementos da entrada b_t de (II-1.1.1). Como consequência as variáveis de erro que deveriam e não figurarão na função objetivo não participarão consequentemente da minimização e os erros relativos ao processo deverão ter preferência em recair sobre elas. A ilustração do quadro (III-4.1.3) esclarecem

melhor a intenção dessa alternativa

Índice	Entrada	Alternativas da Saída		
1	b_1	d_1	0	0
2	b_2	d_2	⋮	0
⋮	⋮	⋮	0	d_1
⋮	⋮	⋮	d_1	d_2
⋮	⋮	⋮	d_2	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	b_m	d_m	⋮	⋮
⋮		0	⋮	⋮
⋮		⋮	⋮	d_m
⋮		⋮	⋮	0
⋮		⋮	⋮	⋮
n		0	d_m	0

(III-4.1.3)

CAPÍTULO IV

SEGUNDO MÉTODO PROPOSTO

1. HIPÓTESE BÁSICA

Suponha-se que no equacionamento (II-1.1.4) se coloque $m=p$, logo $n=2p-1=2m-1$. Isto significa tomarmos um número de coeficientes de filtro (f_t) igual ao número de elementos da entrada (b_t). Vamos fazer p ímpar e os vetores b_i, f_i (com $1 \leq i \leq p$) e e_j, d_j (com $1 \leq j \leq n$) e que todos os elementos da entrada sejam não nulos. Esta hipótese é perfeitamente viável do ponto de vista físico. Isto porque o intervalo de valores dos elementos (amplitudes) de um pulso sísmico, representado pela entrada b_t , normalmente é de 0 até ± 2000 . Se um ou mais valores forem iguais a zero pode ser substituído por um e a consequência é desprezível. Matematicamente, entretanto, isto significa um reforço decisivo, como se verá mais à frente.

1.2 - Equacionamento

Vamos impor que somente os primeiros e os últimos $(p-1)/2$ valores de erro sejam não nulos e os demais não. O equacionamento (II-1.1.4) então fica

$$\begin{array}{rccccccc}
 b_1 f_1 & & & & + & e_1 & = & d_1 \\
 b_2 f_1 & + & b_1 f_2 & & + & e_2 & = & d_2 \\
 \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \\
 b_k f_1 & + & b_2 f_2 & & + & e_k & = & d_k \\
 \hline
 b_{k+1} f_1 + b_k f_2 & & & & + & 0 & = & d_{k+1} \\
 \vdots & & & & & \vdots & & \\
 b_p f_1 + b_{p-1} f_2 & & & & + & 0 & & \\
 \vdots & & & & & \vdots & & \\
 b_p f_2 & & & & + & 0 & = & d_{n-k} \\
 \vdots & & & & & \vdots & & \\
 b_{k+2} f_p & + & & & + & e_{n-k+1} & = & d_{n-k+1} \\
 \vdots & & & & & \vdots & & \\
 b_p f_p & & & & + & e_n & = & d_n
 \end{array}$$

(IV-1.2.1)

$$k = (p-1)/2$$

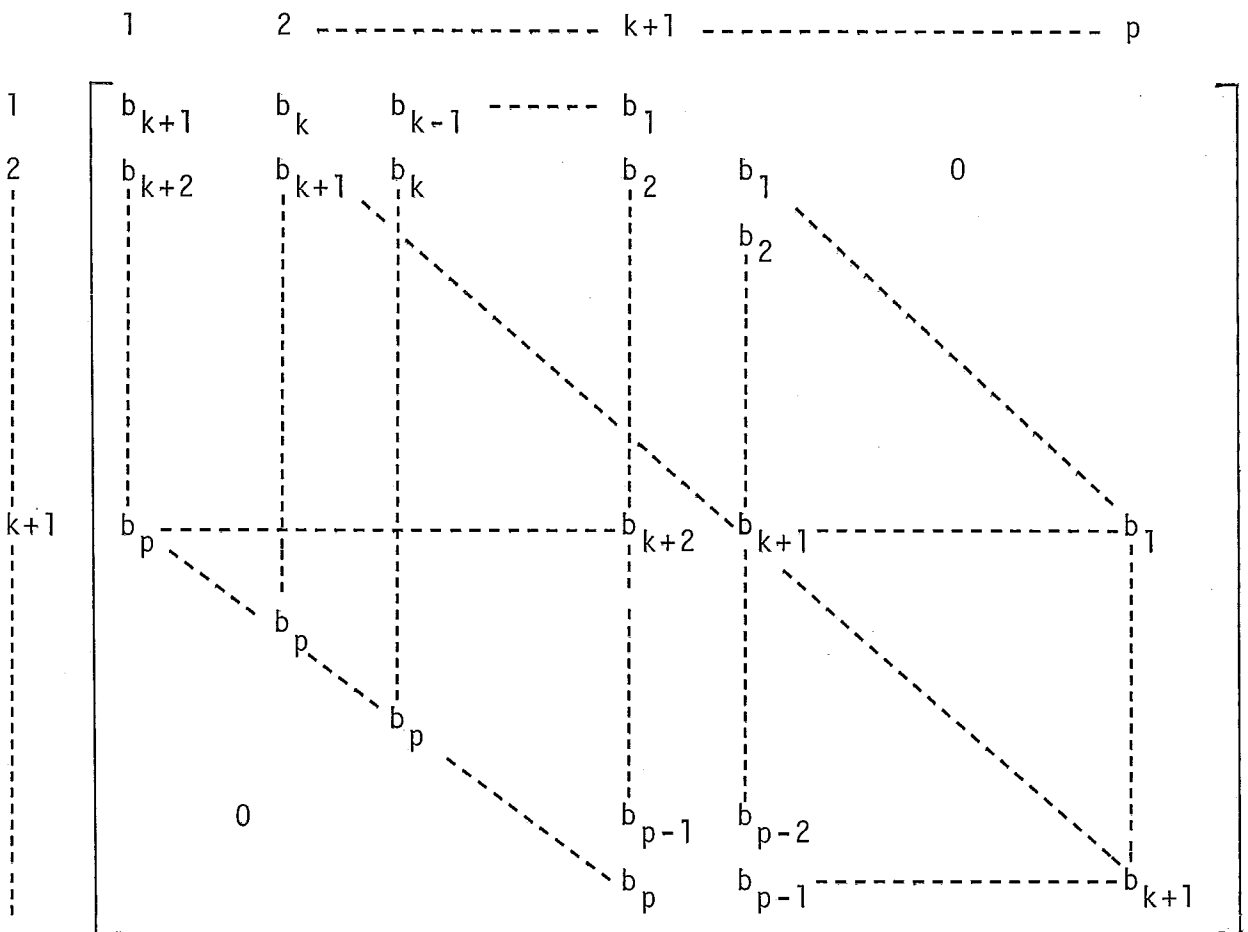
$$n = 2p-1$$

O conjunto das equações entre as duas linhas constituem um sistema de p equações a p incógnitas. Iniciamos na equação de ordem $k+1$ e terminamos na de ordem $2p-1-k$. O número de equações nesse trecho é dado por

$$1+(2p-1-k) - (k+1) = 1+2p-2k-2 = 1+2p-p+1-2 = p$$

(IV-1.2.2)

A matriz do sistema assim constituída é da forma



Esta matriz, de dimensões $p \times p$, sendo p ímpar, possui somente a linha e a coluna de ordens $k+1$ com todos os elementos não nulos. Se fizermos a suposição de que uma linha qualquer é combinação linear de outra, então cada elemento da primeira será o produto do elemento correspondente (mesma coluna) da outra por

uma constante k , diferente de zero. Como s̄o existe uma linha, por construç̄ao, com todos os elementos n̄o nulos, as demais con- tendo pelo menos um, vai acontecer de se ter um b_i ($1 \leq i \leq p$) da primeira ou da segunda igual a zero, que contraria a hip̄otese b̄a sica. Decorre ent̄ao que n̄o existe nenhuma linha que seja combi- naç̄ao linear de outra qualquer. Logo a matriz \bar{e} n̄o singular e o sistema especificado em (IV-1.2.1) \bar{e} possivel e determinado.

2. ADAPTAÇÃO AO FILTRO SHAPER

2.1 - Generalidades

Este m̄etodo de c̄alculo permite uma filtragem exata no caso do filtro shaper. A limitaç̄ao \bar{e} que exigira a montagem de um sistema linear de grande porte. A aplicaç̄ao do filtro shaper, no c̄alculo de coeficientes de refletividade, necessita de um tre- cho de traço s̄ismico bem menor que exigiria a deconvoluç̄ao predi- tiva para eliminaç̄ao de reverberaç̄oes. Outra caracteristica im- portante deste m̄etodo \bar{e} que n̄o \bar{e} necessario que a assinatura da fonte seja de m̄inimo atraso e nem que a ela esteja isenta da funç̄ao ruído.

Suponhamos ent̄ao um traço s̄ismico dado pela equaç̄ao comple- ta (II-4.1.1)

$$x_t = b_t * c_t + u_t$$

Se o comprimento da s̄erie de coeficientes de refletivida- de, c_t , \bar{e} h_c e o da assinatura, b_t , h_b , (o de x_t serã $h_c + h_b - 1$), podemos pensar num filtro f_t , de grande comprimento, h_f , capaz de fornecer c_t com grande precis̄ao.

2.2 - Equacionamento

Vamos tomar para o filtro um comprimento h_f dado por

$$h_f = 2 h_c + 1 \quad (\text{IV-2.2.1})$$

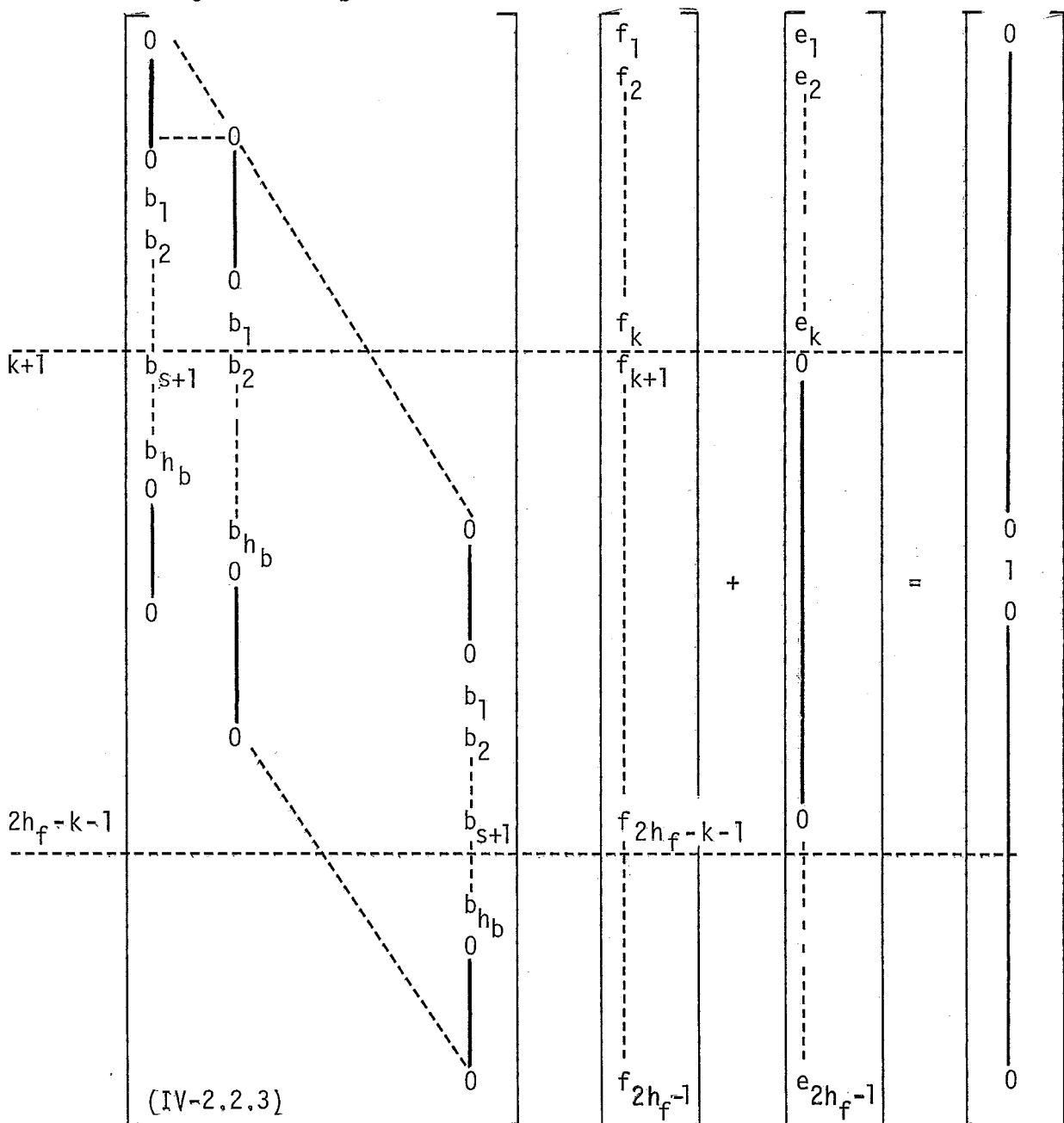
Primeiro tomamos um vetor de comprimento h_f todo zerado. Como h_f tem um n̄umero impar de elementos, a assinatura, b_t , deverã ter

também um número ímpar de elementos. Colocamos, a seguir, b_t no vetor zerado de maneira que o elemento central de b_t coincida com o desse vetor. Esquemáticamente temos

$$0 \text{ ----- } 0b_1b_2 \text{ ----- } b_{h_b} 0 \text{ ----- } 0 \tag{IV-2.2.2}$$

Com o vetor (IV-2.2.2) monta-se o sistema (IV-2.2.3), que deverá originar h_f equações a h_f incógnitas. O segundo membro desse sistema é constituído por um vetor de zeros com o valor um no elemento central, contrariando os tipos até agora apresentados (valor um no primeiro elemento).

$$k = h_c, s = (h_b - 1)/2$$



Dada a hipótese de que todos os valores de b_t não são simultaneamente nulos, o sistema (IV-2.2.3), usando-se a mesma demonstração feita para o sistema (IV-1.2.3), também é possível e determinado, uma vez que a construção do primeiro é a mesma que a do segundo.

O filtro de comprimento h_f convolvido com o vetor de zeros, com a assinatura adaptada ao centro, de comprimento h_c dará um terceiro vetor de comprimento $4h_c+1$, ou seja

$$h_f = 2h_c + 1$$

$$2h_f - 1 = 4h_c + 2 - 1 = 4h_c + 1 \quad (\text{IV-2.2.4})$$

2.2.5 - Exemplo Numérico

Sejam

$$b = (1 \ 2 \ 1),$$

$$c = (1 \ 0 \ 0) \text{ e}$$

(IV-2.2.5.1)

$$x = b * c = (1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0),$$

O sistema que calcula o filtro para transformar x em c é

$$\begin{array}{|cccccc|} \hline 0 & & & & & \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline f_1 \\ \hline f_2 \\ \hline f_3 \\ \hline f_4 \\ \hline f_5 \\ \hline f_6 \\ \hline f_7 \\ \hline f_8 \\ \hline f_9 \\ \hline f_{10} \\ \hline f_{11} \\ \hline f_{12} \\ \hline f_{13} \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline e_3 \\ \hline e_4 \\ \hline e_5 \\ \hline e_6 \\ \hline e_7 \\ \hline e_8 \\ \hline e_9 \\ \hline e_{10} \\ \hline e_{11} \\ \hline e_{12} \\ \hline e_{13} \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline d_1 \\ \hline d_2 \\ \hline d_3 \\ \hline d_4 \\ \hline d_5 \\ \hline d_6 \\ \hline d_7 \\ \hline d_8 \\ \hline d_9 \\ \hline d_{10} \\ \hline d_{11} \\ \hline d_{12} \\ \hline d_{13} \\ \hline \end{array}$$

(IV-2.2.5.2)

$$e_4 = \dots = e_{10} = 0; \quad d_1 = \dots = d_6 = d_8 = \dots = d_{13} = 0, \quad d_7 = 1$$

$$h_c = 3, \quad h_f = 2 \times 3 + 1 = 7, \quad 2h_f - 1 = 13$$

Extraíndo de (IV-2.2.5.2) as equações entre as linhas $k + 1$ e $2h_f - k - 1$, ou seja

$$2h_f - k - 1 - (k + 1) + 1 = 2h_f - 2k - 1 = 14 - 6 - 1 = 7$$

equações :

$$\begin{array}{rcccccccl} 2f_0 & + & f_1 & & & & & = & 0 \\ f_0 & + & 2f_1 & + & f_2 & & & = & 0 \\ & & f_1 & + & 2f_2 & + & f_3 & = & 0 \\ & & & & f_2 & + & 2f_3 & + & f_4 & = & 1 \\ & & & & & & f_3 & + & 2f_4 & + & f_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & f_4 & + & 2f_5 & + & f_6 & = & 0 \\ (IV-2.2.5.3) & & & & & & & & & & f_5 & + & f_6 & = & 0 \end{array}$$

Resolvendo, teremos

$$\begin{array}{l} 2f_0 + f_1 = 0 \quad \text{ou} \quad f_0 = -1/2f_1 \\ -1/2f_1 + 2f_1 + f_2 = 0 \quad \text{ou} \quad f_1 = -2/3f_2 \\ -2/3f_2 + 2f_2 + f_3 = 0 \quad \text{ou} \quad f_2 = -3/4f_3 \end{array}$$

Por simetria:

$$\begin{array}{l} f_4 = -3/4f_3 \\ f_5 = -2/3f_4 \\ f_6 = -1/2f_5 \end{array}$$

Substituindo-se o valor de f_2 e f_4 na equação central, tem-se

$$-3/4 f_3 + 2f_3 - 3/4 f_3 = 1, \text{ logo } f_3 = 2$$

E as outras variáveis ficam

$$f_2 = f_4 = -3/2, \quad f_1 = f_5 = 1 \text{ e } f_0 = f_6 = -1/2$$

O vetor filtro f será

$$f = \left(-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{3}{2} \quad 2 \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \right)$$

A convolução $x*f$, ou seja,

$$(1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0) \cdot \left(-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{3}{2} \quad 2 \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \right) =$$

$$\left(-\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \right), \text{ conforme o dispositivo de}$$

cálculo mostrado abaixo

$$\begin{array}{cccccccc} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & & & & & & & \\ & -1 & 2 & -3 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ & & & & & & & \\ & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & \underbrace{\hspace{2cm}}_{hc=3} & & & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{hc=3} & & & & & \\ & \underbrace{\hspace{6cm}}_{\text{trecho de interesse}} & & & & & & & & & \end{array}$$

trecho de interesse

(IV-2.2.5.4)

A convolução $b * f$,

$$(1 \ 2 \ 1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{3}{2} \quad 2 \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \quad \underbrace{0 \ 0 \ 0}_{h_c=3} \quad 1 \quad \underbrace{0 \ 0 \ 0}_{h_c=3} \quad -\frac{1}{2} \right)$$

(IV-2.2.5.5)

A convolução de

$$(0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0) * \left(-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{3}{2} \ 2 \ -\frac{3}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(0 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 0 \ 0\right)$$

(IV-2.2.5.6)

Se o vetor c (IV-2.2.5.1), de comprimento h_c contiver vários impulsos, na convolução de x com f vai acontecer o fenômeno da superposição de efeitos. Exemplificando (IV-2.2.5.4) é equivalente à superposição representada abaixo por (IV-2.2.5.7), ou seja

$$\begin{array}{cccccccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}$$

(IV-2.2.5.7)

Isto porque a primeira linha é o resultado da convolução do vetor b (assinatura) com f (filtro). As outras duas linhas de zeros correspondem aos dois zeros finais de x , conforme (IV-2.2.5.7). O comprimento h_c , como mostram (IV-2.2.5.4), (IV-2.2.5.5) e (IV-2.2.5.6), fornece o número de zeros, antes e após cada impulso da saída. É uma conclusão muito importante, pois garante na saída um trecho livre de superposição com valores diferentes de zero. É exatamente neste ponto que se baseia o método. Para que isto aconteça é necessário que comprimento do filtro seja tal que possa fornecer uma saída com o trecho de zeros, antes e após o impulso, do mesmo comprimento que o vetor c . Esquemáticamente temos, para c com n impulsos, correspondendo a n superposição na convolução com a assinatura b para dar, $x = b * c$

1º impulso * * --- * 0 ---- 0 1 0 ----- 0 * ----- *
 2º impulso ** --- * 0 ----- 0 1 ----- 0 * ----- *
 n-ésimo impulso * * ----- * 0 ----- 0 1 0 * ----- *

resultado * ----- * 1 0 1 ----- 0 1 * ----- *
└──────────┘
T

* - valor que pode ser $\neq 0$.

(IV-2.2.5.8)

Com exceção dos valores contidos no trecho T, trecho de interesse, todos os demais deverão ser descartados.

CAPÍTULO V

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

1. TIPOS DE TESTES

Os resultados de testes estão classificados em dois tipos:

Tipo 1 - Compreende os testes de otimização, relativos ao aprimoramento ou ao tempo de processamento de um algoritmo, e teste experimental de uma idéia básica.

Tipo 2 - Testes de confronto entre os dois métodos propostos com o dos mínimos quadrados, levando-se em conta a precisão dos resultados e o tempo de processamento dos programas relativos.

Os do Tipo 2 constituem o objetivo fundamental do trabalho.

Para todos os testes, os resultados serão apresentados na forma de tabelas, listagens de computador, quando houver necessidade de realçar o grau de precisão numérica, e na forma de gráficos, quando o aspecto de conjunto for mais importante.

2. TESTES DO TIPO 1

2.1 - Testes de Otimização

Experimentalmente verificou-se que o critério de não permitir que uma variável que deixou a base não mais retorne, diminui o número de iterações até se atingir o mínimo. Sem essa condição os cálculos podem degradar. Ao lado dessa condição os resultados têm sido satisfatórios adotando-se como zero para a condição de mínimo o valor .0001 e, para a condição de saída da base, o valor 0.000001. As operações são feitas em dupla precisão IBM (palavras de 64 bits). O quadro (V-2.1.1) mostra três testes comparativos. É interessante notar que ao atingir-se a condição de mínimo o custo relativo mínimo cai bruscamente.

EXEMPLO	N. ELEM. DA SAÍDA	ITERAÇÕES		RESULTADO	
1	10	10	12	minimizado	ilimitado
2	21	21	24	minimizado	ilimitado
3	30	33	37	minimizado	ilimitado

(V-2.1.1)

Em iterações e resultado, a primeira e segunda colunas se referem respectivamente com aplicação e sem aplicação do critério.

Na figura (III-3.4.1) nota-se que as variáveis de erro possuem apenas dois elementos diferentes de zero e os demais todos nulos. A adoção do critério de se impedir uma variável que saiu entre novamente na base, permite que, para as variáveis de erro, no cálculo dos custos relativos e no cálculo da coluna correspondente à variável que vai entrar na base, se substitua o produto de linha por coluna pela soma do produto de dois elementos. Isto reduz consideravelmente o tempo de processamento, uma vez que as variáveis de erro são em maior número que as dos coeficientes de filtro. No quadro (V-2.1.2) pode-se ver exemplos comparativos de tempos de processamento para sem e com simplificação dos cálculos.

EXEMPLO	N. ELEMENTOS DA SAÍDA	MÉT. PROGR. MATEM.		MÉT. DOS MIN. QUADRADOS
		S/SIMPLIF.	C/SIMPLIF.	
1	75	24,0	15,7	8,6
2	100	61,2	39,6	8,9
3	150	149,8	115,5	9,0

Unidade de tempo - segundos

(V-2.1.2)

2.2 - Teste Experimental de uma Idéia Básica

Refere-se a um exemplo de resolução do sistema (IV-1.2.3) computacionalmente, conforme listagem dada por (V-2.2.1). Pode-se notar que os erros são muito pequenos no trecho de saída correspondente à entrada e grandes fora desse trecho.

3. TESTES DO TIPO 2

3.1 - Testes de Confronto entre o Primeiro Método Proposto e o dos Mínimos Quadrados

Trata do problema da deconvolução preditiva. O primeiro método pode tratar de problemas de maior porte que o segundo. O vetor erro, objetivo fundamental no caso, é calculado diretamente no decorrer do processo. No método dos mínimos quadrados ele é calculado após o cálculo dos coeficientes de filtro.

O confronto dos resultados é feito diretamente, através de um exemplo. Primeiro é mostrada uma sequência de reverberações e o filtro que deverá eliminá-las. Depois é mostrada a entrada e a saída desejada, extraídas de um traço sísmico sintético obtido pela convolução do conjunto de reverberações com uma sequência de impulsos aleatórios, o vetor erro e a sequência de impulsos do traço sísmico. O erro deve reconstituir o traço sísmico sem as reverberações.

Para a aplicação do simplex revisado supõe-se que todos os valores da entrada sejam não nulos, hipótese fisicamente viável, conforme já foi abordado no capítulo IV, item 1, minimização de todos os erros e intervalo de predição igual ao comprimento do pulso.

O quadro (V-3.1.1) mostra as figuras correspondentes aos testes para os dois métodos.

MPM	MMQ	ESPÉCIE
(V-3.1.2)	(V-3.1.4)	Reverberação e Filtro
(V-3.1.3)	(V-3.1.5)	Entrada, Saída C. Refl. e Erro

MPM-Método da Programação Matemática
MMQ-Método dos Mínimos Quadrados

(V-3.1.1)

3.2 - Testes de Confronto entre o Segundo Método Proposto e o dos Mínimos Quadrados

O problema escolhido foi o do filtro shaper. Este tipo de filtro, empregado para a determinação de coeficientes de refletividade, exige uma precisão muito boa, razão pela qual o segundo método é o indicado. Por outro lado, este método se caracteriza pela resolução de um sistema linear de grande porte. Dessa forma a aplicação se restringe a um pequeno trecho de um traço sísmico, tal como são certas utilizações do filtro shaper.

Partindo-se da equação (II-4.1.5) é feito sinteticamente a convolução de uma assinatura de fonte com uma sequência, não periódica, de impulsos relativos a coeficientes de refletividade. É gerado dessa forma um traço sísmico. Sobre a assinatura calcula-se um filtro capaz de transformá-la num vetor de zeros, com número ímpar de elementos, a menos de um elemento (impulso) igual a um. Este impulso para o segundo método é o elemento central e, para a dos mínimos quadrados, é o primeiro elemento. O filtro calculado é convolvido com o traço sísmico buscando transformá-lo numa sequência de impulso tanto quanto possível igual à sequência que originou o traço.

São apresentados como resultados primeiro gráficos do filtro e do erro, após, listagens da assinatura, coeficientes de refletividade do traço, traço sísmico e trecho da convolução do filtro com o traço sísmico (somente o trecho de interesse).

À maneira como no caso do primeiro método, o Quadro (V-3.2.1) mostra as figuras correspondentes aos testes.

MSL	MMQ	ESPÉCIE
(V-3.2.2)	(V-3.2.4)	Filtro e Erro
(V-3.2.3)	(V-3.2.5)	Assinatura, C. Refl., Tr.Sísmico e Tr*Filtro

MSL-Método do Sistema Linear

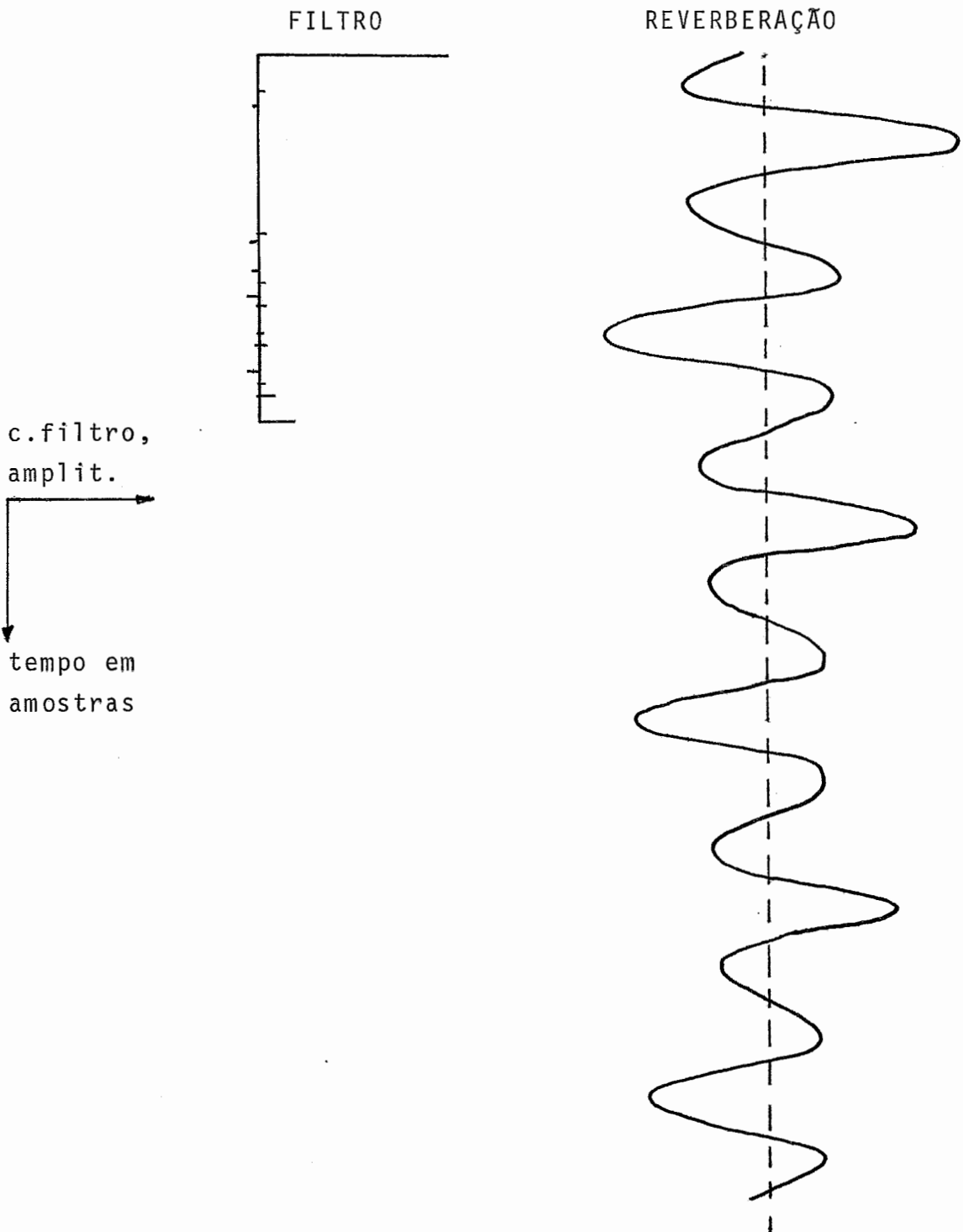
MMQ-Método dos Mínimos Quadrados

(V-3.2.1)

ENTRADA	SAIDA	ERROS	CONV INPUT*FILTRC
0.1002	C.C	1.05673	-1.05673
0.8169	C.C	10.04850	-10.04850
0.6266	C.C	17.97945	-17.97945
0.3625	C.C	10.64401	-10.64401
0.0848	C.C	8.02822	-8.02822
-.1517	C.C	4.84006	-4.84006
-.3122	C.C	-3.22682	3.22682
-.3870	C.C	-4.12476	4.12476
-.2881	C.C	-8.32920	8.32920
-.3393	C.C	-8.44578	8.44578
-.2668	C.C	-11.21356	11.21356
-.1918	C.C	-8.98474	8.98474
0.0272	C.C	-7.37495	7.37495
0.0784	-.2126	-0.00000	-0.21260
0.1450	-.2668	0.00000	-0.26680
0.0242	-.3200	0.00000	-0.32000
-.0215	-.3646	-0.00000	-0.36460
-.0450	-.3916	-0.00000	-0.39160
-.1050	-.3913	-0.00000	-0.39130
-.0516	-.3545	-0.00001	-0.35449
0.0305	-.2751	0.00000	-0.27510
0.0805	-.1517	0.00000	-0.15170
0.0304	0.0111	0.00000	0.01110
0.0206	0.2016	-0.00000	0.20160
-.0505	0.4025	-0.00000	0.40250
-.1050	0.5921	-0.00001	0.59211
-.0804	0.7479	-0.00001	0.74791
****	0.8505	0.00000	0.85050
****	0.8862	0.00000	0.88620
****	0.8505	0.00000	0.85050
****	0.7479	0.00000	0.74790
****	0.5921	-0.00000	0.59210
****	0.4025	0.0	0.40250
****	0.2016	0.00000	0.20160
****	0.0111	-0.00000	0.01110
****	-.1517	0.00000	-0.15170
****	-.2751	-0.00000	-0.27510
****	-.3545	-0.00000	-0.35450
****	-.3913	-0.00000	-0.39130
****	-.3916	-0.00000	-0.39160
****	C.C	-0.41988	0.41988
****	C.C	-0.19580	0.19580
****	C.C	-0.31776	0.31776
****	C.C	-0.13563	0.13563
****	C.C	0.18116	-0.18116
****	C.C	0.44371	-0.44371
****	C.C	-0.01011	0.01011
****	C.C	-0.08351	0.08351
****	C.C	-0.09560	0.09560
****	C.C	-0.14814	0.14814
****	C.C	-0.13593	0.13593
****	C.C	0.10960	-0.10960
****	C.C	0.11019	-0.11019

(V-2.2.1)

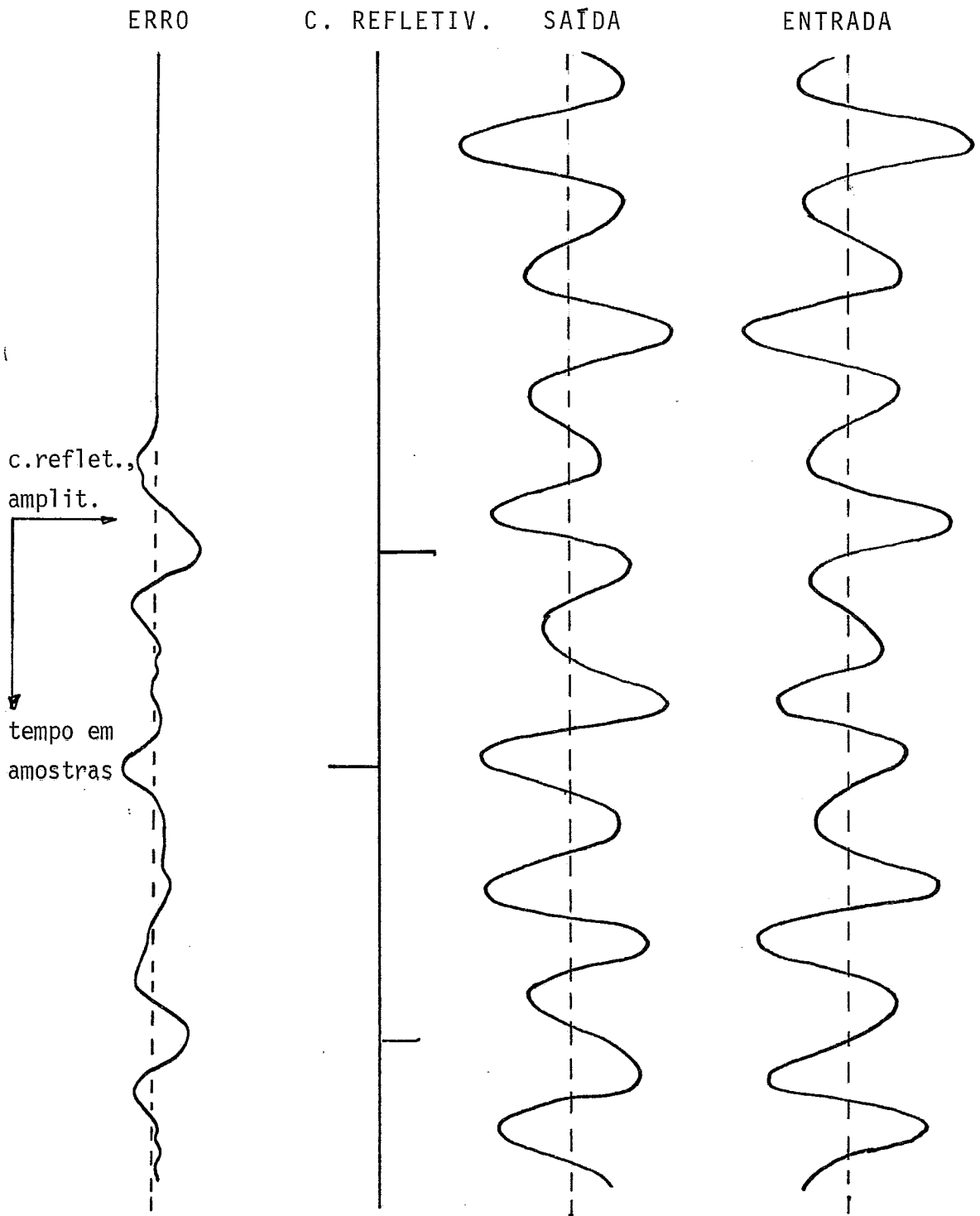
MÉTODOS DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA



Nota: Gráficos normalizados individualmente.
Escala vertical = 1 mm/amostra.

(V-3-1,2)

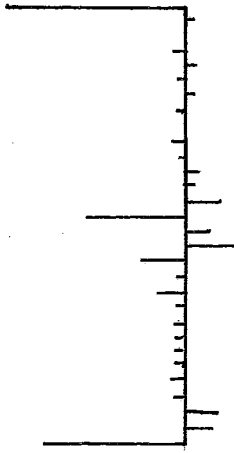
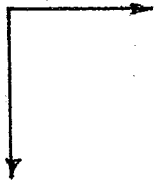
MÉTODO DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA



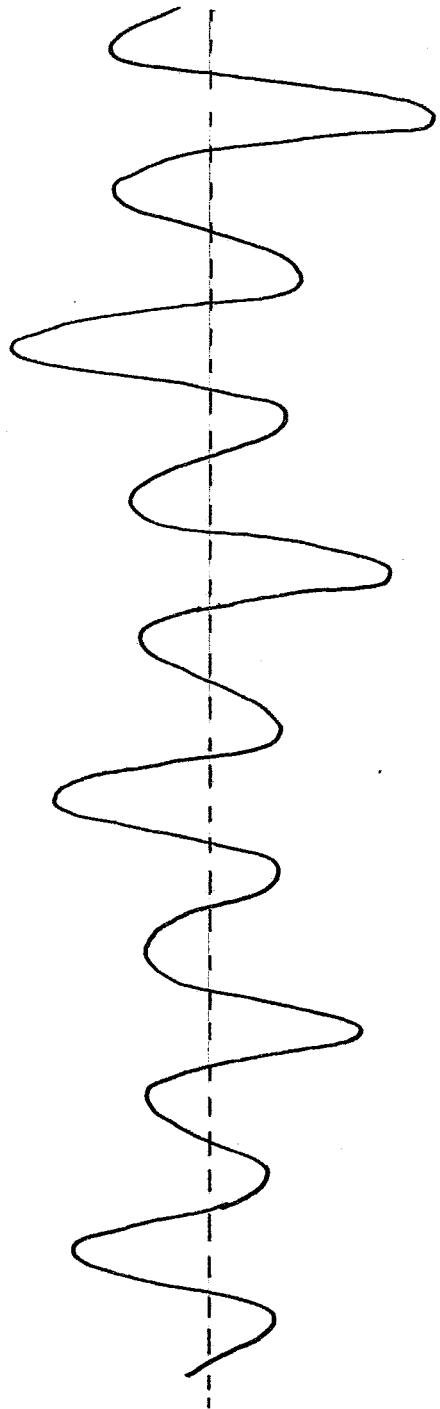
Interv. de predição = compr. do pulso = 15 amostras.
 Compr. do operador = 30 amostras. Esc. vert. = 1 mm/amostra.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

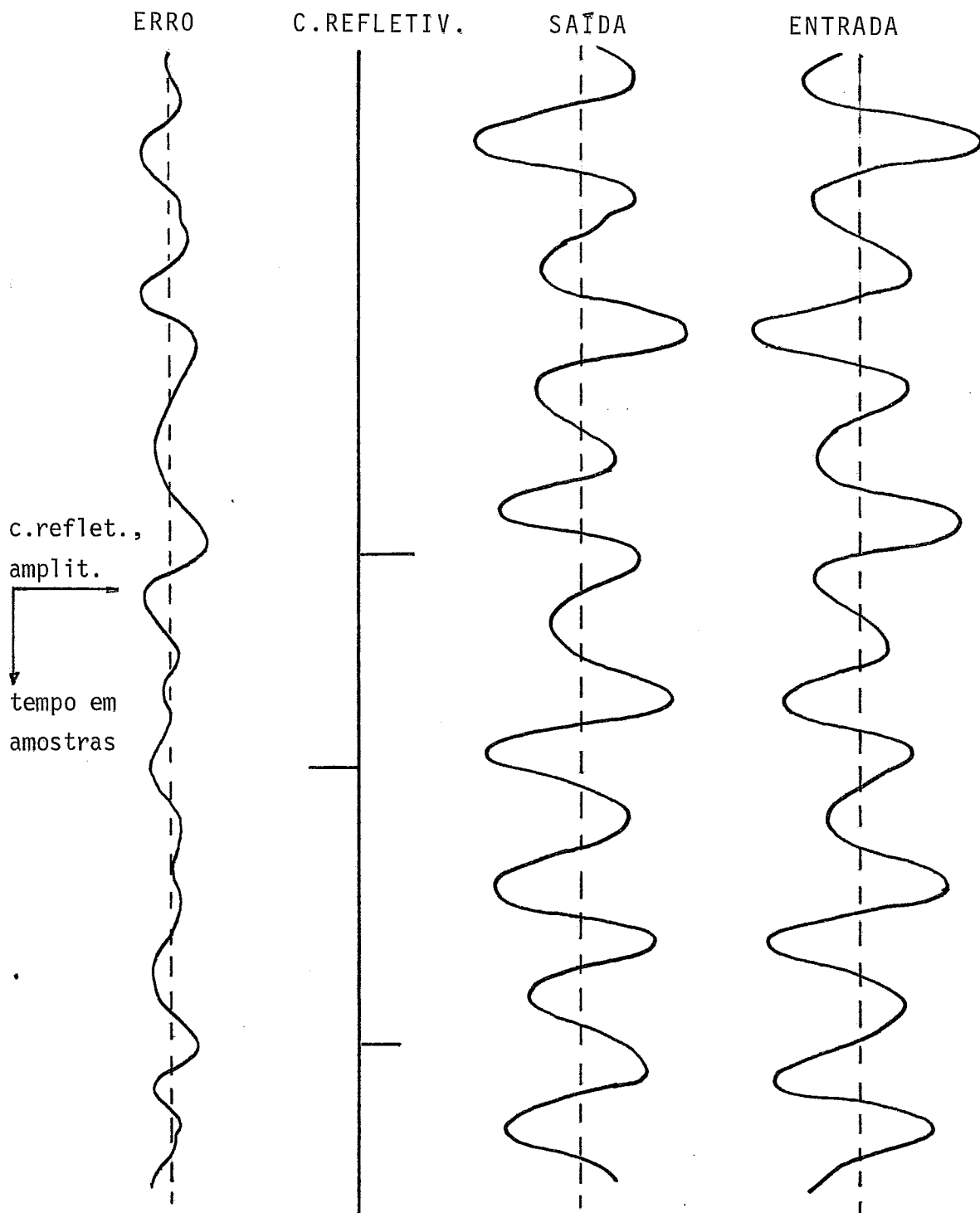
FILTRO

c.filtro,
amplit.tempo em
amostras

REVERBERAÇÃO



Nota: Gráficos normalizados individualmente,
Escala vertical = 1mm/amostra.



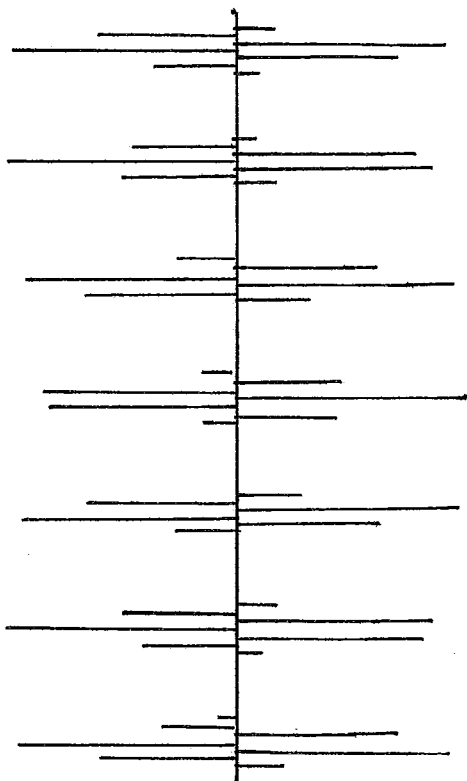
Interv. de predição = compr. do pulso = 15 amostras.

Compr. do operador = 30 amostras, Esc. vert. = 1 mm/amostra.

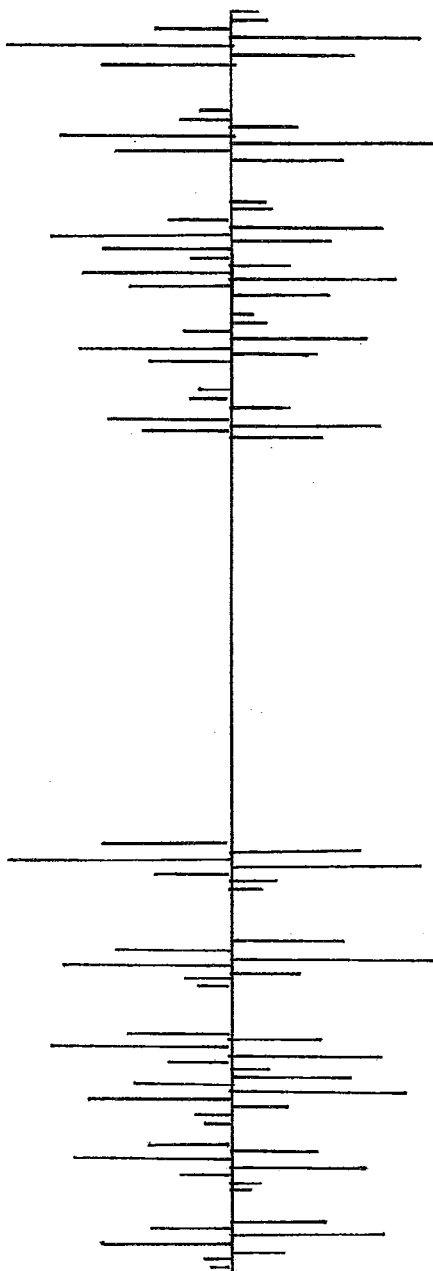
(V-3,1,5)

MÉTODO DO SISTEMA LINEAR

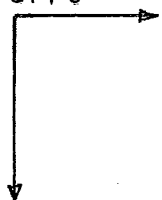
FILTRO



ERRO



c.filtro,
erro



tempo em
amostras

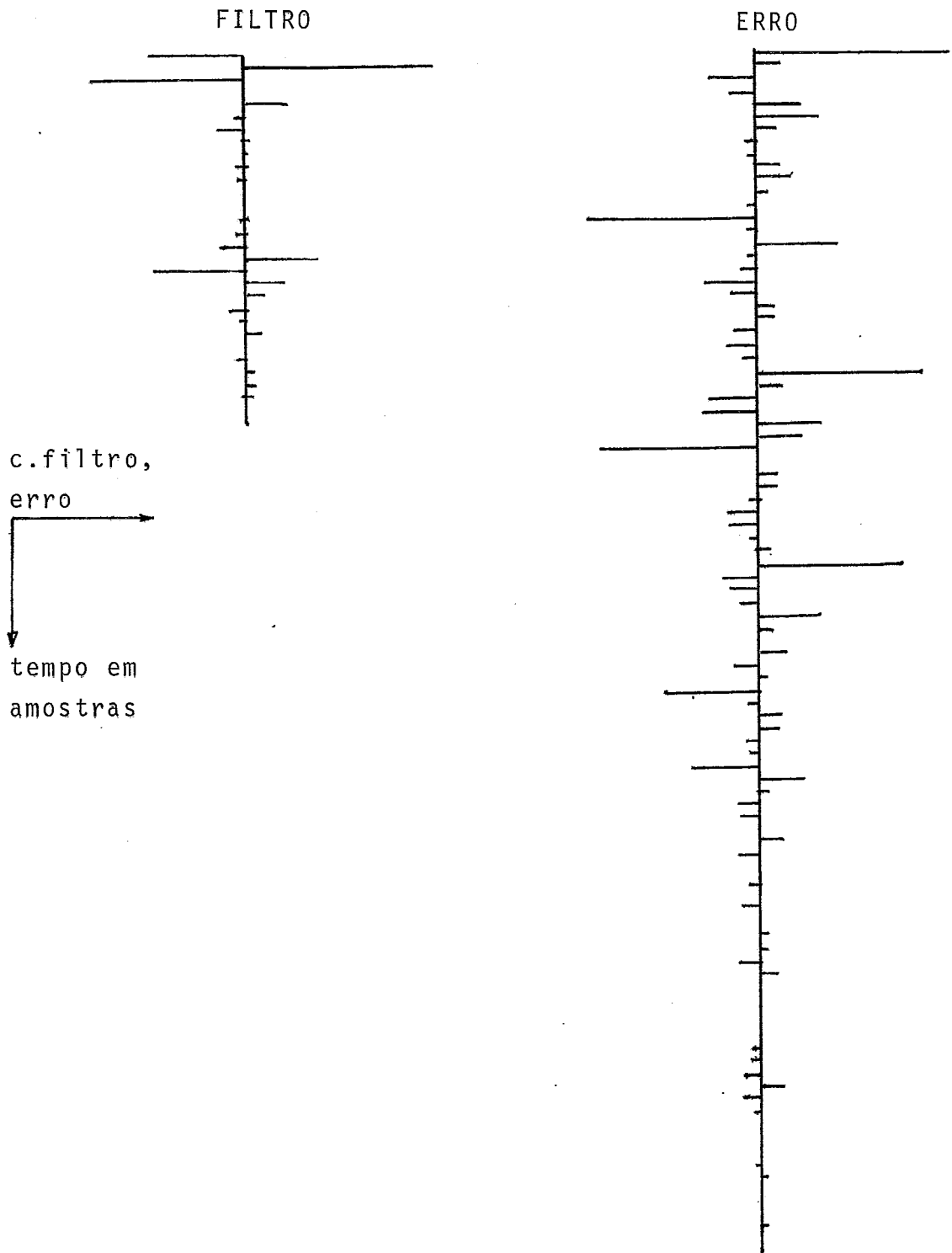
Nota: Gráficos normalizados individualmente.
Escala vertical = 1 mm/amostra.

(V-3,2,2)

ASSINATURA	COEF. REFLET	TR SISMICO	TR*FILTRC
-0.1471	1.0000	-0.14710	0.99983
-0.2668	0.0	-0.26680	0.00014
-0.3760	0.0	-0.37600	0.00002
-0.3712	0.0	-0.37120	0.00013
-0.1516	0.0	-0.15160	-0.00010
0.2685	0.0	0.26850	0.00006
0.7010	0.0	0.70100	-0.00016
0.8863	0.0	0.88630	-0.00017
0.7010	0.0	0.70100	0.00010
0.2685	0.0	0.26850	-0.00003
-0.1516	0.0	-0.15160	0.00026
-0.3712	0.0	-0.37120	0.00015
-0.3760	0.0	-0.37600	0.00046
-0.2668	-0.5000	-0.13441	-0.89968
-0.1471	0.0	0.09302	0.00031
0.0	0.0	0.33840	-0.00003
0.0	0.0	0.33408	0.00014
0.0	0.0	0.13644	-0.00031
0.0	0.0	-0.24165	-0.00014
0.0	0.0	-0.63090	-0.00042
0.0	0.0	-0.79767	-0.00011
0.0	0.0	-0.63090	-0.00019
0.0	0.0	-0.24165	0.00012
0.0	0.0	0.13644	0.00014
0.0	0.0	0.33408	0.00009
0.0	0.8000	0.22072	0.80003
0.0	0.0	0.02668	0.00005
0.0	0.0	-0.16841	0.00011
0.0	0.0	-0.29696	-0.00008
0.0	0.0	-0.12128	-0.00011
0.0	0.0	0.21480	-0.00006
0.0	-0.7500	0.67112	-0.74965
0.0	0.0	0.90914	-0.00005
0.0	0.0	0.84280	0.00014
0.0	0.0	0.49320	-0.00024
0.0	0.0	-0.00758	-0.00013
0.0	0.0	-0.49833	-0.00028
0.0	0.0	-0.82655	-0.00001
0.0	0.0	-0.87816	0.00017
0.0	0.0	-0.64343	0.00009
0.0	0.7000	-0.30434	0.70020
0.0	0.0	-0.07306	0.00020
0.0	0.0	0.01520	0.0
0.0	0.0	0.02216	-0.00037
0.0	0.0	0.09398	-0.00030
0.0	0.0	0.29827	-0.00017
0.0	0.0	0.49070	0.00002
0.0	0.0	0.62041	0.00012
0.0	0.0	0.49070	0.00018
0.0	0.0	0.18795	0.00000
0.0	-0.6800	-0.00609	-0.67990

(V-3.2.3)

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS



Nota: Gráficos normalizados individualmente.

Escala vertical = 2 mm/ amostra.

(V-3.2.4)

ASSINATURA	COEF. REFLET	TR SISMIC	TR*FILTRC
-.1471	1.0000	-0.14710	0.33755
-.2668	C.C	-0.26680	-0.08009
-.3760	C.C	-0.37600	0.16199
-.3712	C.C	-0.37120	0.08174
-.1516	C.C	-0.15160	-0.15721
0.2685	C.C	0.26850	-0.22993
0.7010	C.C	0.70100	-0.08829
0.8863	C.C	0.88630	0.04809
0.7010	C.C	0.70100	0.02322
0.2685	C.C	0.26850	-0.08644
-.1516	C.C	-0.15160	-0.12277
-.3712	C.C	-0.37120	-0.05367
-.3760	C.C	-0.37600	0.02047
-.2668	-0.9000	-0.13441	-0.29797
-.1471	C.C	0.09302	0.02257
0.0	C.C	0.33840	-0.28440
0.0	C.C	0.33408	0.02593
0.0	C.C	0.13644	0.07104
0.0	C.C	-0.24165	0.17790
0.0	C.C	-0.63090	0.08264
0.0	C.C	-0.79767	-0.06731
0.0	C.C	-0.63090	-0.05577
0.0	C.C	-0.24165	0.07121
0.0	C.C	0.13644	0.11738
0.0	C.C	0.33408	0.03351
0.0	0.8000	0.22072	0.22493
0.0	C.C	0.02668	-0.07702
0.0	C.C	-0.16841	0.18552
0.0	C.C	-0.29696	0.18856
0.0	C.C	-0.12128	-0.23015
0.0	C.C	0.21480	-0.16376
0.0	-0.7500	0.67112	-0.18709
0.0	C.C	0.90914	-0.01058
0.0	C.C	0.84280	-0.05710
0.0	C.C	0.49320	-0.05534
0.0	C.C	-0.00758	0.01379
0.0	C.C	-0.49833	0.10843
0.0	C.C	-0.82655	0.11281
0.0	C.C	-0.87816	0.01157
0.0	C.C	-0.64343	-0.04420
0.0	0.7000	-0.30434	0.19459
0.0	C.C	-0.07306	0.13599
0.0	C.C	0.01520	0.11515
0.0	C.C	0.02216	0.06068
0.0	C.C	0.09398	-0.21139
0.0	C.C	0.29827	-0.04741
0.0	C.C	0.49070	-0.00751
0.0	C.C	0.62041	-0.08559
0.0	C.C	0.49070	0.08526
0.0	C.C	0.18795	-0.03716
0.0	-0.8600	-0.00609	-0.35441

(V-3,2,5)

4. DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS

4.1 - No caso da deconvolução preditiva, os gráficos do vetor erro, relativo ao método da programação matemática, em referência com a sequência de coeficientes de refletividade, mostra uma menor incidência de desvios que o mesmo gráfico de erro para o método dos mínimos quadrados.

4.2 - Para o filtro shaper, através de valores em listagens de computador relativos ao trecho de interesse, nota-se uma nítida superioridade do método do sistema linear sobre método dos mínimos quadrados.

4.3 - Com relação ao tempo de processamento, o método dos mínimos quadrados é muito superior. O quadro (V-2.2.2) mostra que quando o número de elementos da entrada aumenta o tempo de processamento, para o método da programação matemática, cresce acima da proporção linear, enquanto que para o método dos mínimos quadrados apresenta aumento insignificante. Esse resultado é de se esperar uma vez que a matriz fundamental de cálculos para o primeiro é a de pivoteamento, dimensionada pelo número de elementos da saída, ao passo que para o segundo ela é dimensionada pelo número de elementos de filtro. Além disso, o método dos mínimos quadrados está otimizado pelo algoritmo de Levinson.

4.4 - O quadro (V-2.2.1) mostra três exemplos de casos que deram soluções ilimitadas, quando não se aplica o critério de se impedir que uma variável entre mais que uma vez na base, e minimizante quando se aplica o critério. Como o segundo caso é satisfatório para os objetivos práticos não foi feito maiores investigações sobre o primeiro.

4.5 - O exemplo de traço escolhido para todos os testes é gerado por uma onda de misto atraso. Essa escolha é proposital, pois se alguma vantagem é a ser obtida é de supor resultados mais promissores em casos mais favoráveis.

4.6 - O aspecto do filtro calculado pelo método do sistema linear é de uma sequência periódica. Este fato constitui uma

curiosidade, pois que o método não faz nenhuma exigência quanto ao tipo do sinal de entrada e nenhuma previsão sobre o tipo do filtro calculado.

5. CONCLUSÕES

5.1 - Os tempos de processamento para os dois métodos propostos são bem superiores aos tempos do método dos mínimos quadrados. Para o método da programação matemática foi mostrado uma maneira de produzir uma sensível melhora. Dessa forma tentativas ainda podem ser exploradas nesse sentido. Sobre o método do sistema linear, não existe ainda nenhuma rotina adequada ao caso (a solução tem sido feita com utilização de rotinas da biblioteca IMSL). Não há grau de comparação entre o tempo de processamento por esse método e o dos mínimos quadrados. A justificativa da vantagem do emprego deste método sobre o dos mínimos quadrados está no elevado grau de precisão dos resultados.

5.2 - O problema da redução do número de iterações quando se adota o critério de que uma variável entre na base uma só vez, para o método da programação matemática, permanece em aberto para investigações teóricas.

5.3 - É importante salientar que, como os erros são minimizados em conjunto, pode-se ter concentrações do valor total sobre alguns. Em se tratando do filtro shaper a concentração sobre um dado erro pode fazer com que este seja tomado como um coeficiente de refletividade. Isto vem evidenciar ainda mais a vantagem do método do sistema linear, o qual não permite que nenhum erro grosseiro caia sobre o trecho de interesse. No caso da aplicação do simplex, esse inconveniente poderia ser contornado introduzindo-se limitações superiores para as variáveis de erro. Acarretaria em contrapartida em se modificar o equacionamento básico com a adição de mais equações para essas limitações.

APÊNDICEJUSTIFICATIVA DA RELAÇÃO (III-2,1.7)

Seja I um problema de programação linear, PPL, dado pela forma padrão

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq b \\ c/ \quad & x_1, \dots, x_{n-k} \geq 0; \quad x_{n-k+1}, \dots, x_n \text{ livres} \end{aligned}$$

Seja $\forall i \in (n-k+1, \dots, n)$

$$x_i = x_i^+ - x_i^-; \quad x_i^+, x_i^- \geq 0$$

Pode-se então formar um outro PPL \tilde{I} tal que

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{c}' \tilde{x} \\ \text{s.a} \quad & \tilde{A} \tilde{x} \geq b \\ c/ \quad & \tilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-k} & a_{1,n-k+1} - a_{1,n-k+1} & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n-k} & a_{m,n-k+1} - a_{m,n-k+1} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}' = \begin{bmatrix} c_1, \dots, c_{n-k}, c_{n-k+1}, -c_{n-k+1}, \dots, \dots \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}^+, x_{n-k+1}^-, \dots, \dots \end{bmatrix}$$

Teorema 1: Seja uma solução básica ótima do PPL I; o PPL \tilde{I} tem uma solução básica ótima correspondente, para todo $i \in (n-k+1, \dots, n)$,

$$\begin{aligned} x_i \geq 0 & \quad \text{---} \quad x_i^- = 0 \\ x_i \leq 0 & \quad \text{---} \quad x_i^+ = 0 \end{aligned}$$

Demonstração: Imediato, vendo que toda solução de I pode ser convertida numa solução de \tilde{I} de modo a que pelo menos um de cada x_i^- , x_i^+ seja zero

Teorema 2: Uma solução de \tilde{I} ($i \in \{n-k+1, \dots, n\}$) na qual x_i^+ , $x_i^- > 0$ ou não é ótima ou não é de dimensão mínima.

Demonstração: Em primeiro lugar, suponha que temos uma solução básica ótima de \tilde{I} com x_i^+ , $x_i^- > 0$. Observemos que a função objetivo: $= \tilde{c}'\tilde{x} = \text{cte} + c_i(x_i^+ - x_i^-)$

$$\text{e } \tilde{A}\tilde{x} \geq b \text{ — } \text{cte} + (a_i)(x_i^+ - x_i^-) \geq b$$

a_i - vetor coluna

Notamos que, mantendo-se $x_i^+ - x_i^- = x_i = \text{cte}$, nem a função objetivo nem as restrições são afetadas.

Assim, podemos ter uma solução com

$$x_i^+ = x_i, x_i^- = 0 \quad \text{se } x_i \geq 0$$

$$x_i^- = x_i, x_i^+ = 0 \quad \text{se } x_i \leq 0$$

Esta solução tem uma dimensão a menos do que a anterior, contradizendo a hipótese de que era básica e ótima.

Corolário: O único caso em que podem aparecer x_i^+ , $x_i^- > 0$ é quando a solução básica ótima de I é degenerada.

Demonstração: Neste caso a solução básica ótima tem componente zero.

BIBLIOGRAFIA

1. LEVINSON, N. - The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction, J. Math. Phys., 25 (1947), 261-278.
2. ROBINSON, E.A. AND S. TREITEL - Digital Signal Processing in Geophysics, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1980.
3. CLAERBOUT, JON F. - Fundamental of Geophysical Data Processing: with Applications to Petroleum Prospecting, McGraw-Hill international series in the earth and planetary sciences, 1976.
4. CARMO, P.F.B. E OLIVEIRA, A.A.F E BORNSTEIN, C.T. - Introdução à Programação Linear, PDD-01/1979.
5. MACULAN FILHO, N., E PEREIRA, M.V.F. - Programação Linear, Atlas, S. Paulo/1980.