


APLICAÇÕES DAS TEORIAS DE ESTIMAÇÃO E  
INTERPOLAÇÃO EM CARTOGRAFIA-UM PROGRAMA  
GERADOR DE CURVAS DE ISOVALORES

Luis Paulo Vieira Braga

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE POS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS(D.Sc.) EM ENGENHARIA  
DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

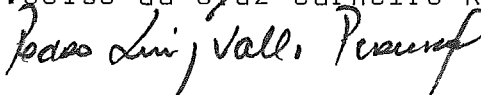
Aprovada por

  
Prof. Nelson Maculan Filho  
(Presidente)

  
Prof. Antonio Alberto Fernandes de Oliveira

  
Prof. Paulo Roberto Oliveira

  
Prof. Celso da Cruz Carneiro Ribeiro

  
Prof. Pedro Luiz Valls Pereira

SETEMBRO DE 1984

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

VIEIRA BRAGA, LUIS PAULO

Aplicações das Teorias de Estimação e Interpolação  
em Cartografia-Um Programa Gerador de Curvas de Isovalores  
Rio de Janeiro 1984.

X , 203 p 29,7 cm (COPPE-UFRJ, D.Sc., Engenharia  
de Sistemas e Computação , 1984)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro  
COPPE.

1. Assunto I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação e à Direção da COPPE pelo apoio e estímulo recebidos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa a mim concedida e renovada.

Ao professor Nelson Maculan Filho pela inestimável orientação e encorajamento durante a realização deste trabalho

Ao professor Michael Florian pelo apoio à minha estadia no Departamento de Informática e Pesquisa Operacional da Universidade de Montreal.

Ao professor Michel David pelo apoio à minha estadia no Departamento de Engenharia Mineral da Escola Politécnica de Montreal.

Ao professor Hernani Chaves do Centro de Pesquisas da Petrobrás (CENPES) pelas valiosas discussões e sugestões.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

Aplicações das Teorias de Estimação e Interpolação em Cartografia—Um Programa Gerador de Curvas de Isovalor

Luís Paulo Vieira Braga

Julho 1984

Orientador: Nelson Maculan Filho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho faz-se uma análise de alguns métodos das Teorias de Estimação e Interpolação e suas aplicações em programas para traçados de curvas de isovalores.

São abordadas as técnicas baseadas em redes triangulares e retangulares. O problema de estimação é tratado no contexto da Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas, desenvolvida por G. Matheron. O desenvolvimento desta teoria é apresentado em detalhe, cobrindo um período que vai de 1960 a 1983.

O problema de interpolação é tratado via função interpoladora "spline" e em seguida via função interpoladora de "krigeagem", mostrando-se as relações que existem entre as duas formulações.

É proposto um programa gerador de curvas de isovalores que a partir do conjunto de dados estima os nós de uma malha retangular regular e em seguida interpola as celas desta malha traçando as curvas de isovalor.

Finalmente são abordados alguns tópicos recentes tais como: considerações sobre a inferência da Covariância Generalizada (CG), vizinhança única e variograma generalizado de ordem  $k$ .

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

Some Applications of the Estimation and Interpolation Theories in Cartography-A Isovalue Contouring Program

Luis Paulo Vieira Braga

July 1984

Chairman: Nelson Maculan Filho

Department: Engenharia de Sistemas e Computação

In this work we analyze some methods of the Estimation and the Interpolation theories and their applications for the Isovalues Contouring programs.

Triangular and Rectangular Networks techniques are approached. The estimation problem is solved within the context of the Intrinsic Random Functions Theory, developed by Matheron, G. The development of this theory is presented, covering a period from 1960 till 1983. The Interpolation Problem is studied using "Splines" and "Kriging" as an interpolator. The relationship between the two methods is shown.

It's proposed an Iso-value Contouring Program that from a sample of points accomplishes the estimation of the vertices of a regular rectangular grid and the interpolation of the cells of this grid, drawing the contours.

Some recent topics are also presented: some alternative ways to infer the Generalized Covariance (GC), the unique neighborhood technique and the generalized variogram.

Índice

	<u>Páginas</u>
I. Introdução .....	01
II. Sistemas Cartográficos .....	04
III. Superfícies de Tendência .....	10
1. Introdução .....	10
2. A Determinação dos Coeficientes de Regressão .....	11
3. As Limitações do Modelo .....	14
IV. Estruturas de Malhas Triangulares e Traçado de Isocontornos .....	16
1. Introdução .....	16
2. Métodos de Triangulação .....	16
3. Métodos de Interpolação .....	21
4. Um Método de Pseudo-Triangulação .....	23
5. As Limitações do Modelo .....	27
V. Estruturas de Malhas Retangulares e Algoritmos de Isocontorno .....	29
1. Introdução .....	29
2. Estruturas Retangulares e Algoritmos de Busca .....	29
3. Modelos de Interpolação .....	37
VI. A Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas .....	41
1. Introdução .....	41

	<u>Páginas</u>
2. As Funções Aleatórias de Ordem 2 .....	41
3. As Funções Aleatórias Intrínsecas .....	49
4. Análise Estrutural .....	52
5. Estimação e Krigeagem .....	55
VII. A Teoria das Funções Aleatórias	
Intrínsecas de Ordem k .....	59
1. Introdução .....	59
2. Funções Aleatórias Intrínsecas	
Generalizadas .....	60
3. A Covariância Generalizada(CG) .....	64
4. O Sistema de Krigeagem .....	69
5. Modelos Polinomiais de CG .....	71
6. Forma Geral do Problema de	
Splines .....	73
7. O Método de Krigeagem visto	
como Interpolador .....	77
8. Splines e Krigeagem .....	79
VIII. Um Sistema Cartográfico Geológico .....	87
1. Introdução .....	87
2. O Programa SCG1 .....	87
3. Estudo de Caso .....	106
4. O Programa SCG2 .....	115
5. Estudo de Caso .....	125
IX. Perspectivas e Conclusões .....	137
1. Introdução .....	137
2. Inferência dos Coeficientes	
da CG .....	137
3. A Utilização de Vizinhança Única .....	139
4. A Noção de Variograma Generalizado	

	<u>Páginas</u>
de ordem k .....	145
Bibliografia .....	149
Apêndice I -Funções Aleatórias	
de Ordem 2 .....	162
Apêndice II-Dados da Amostra Kansas .....	168
Apêndice III-Dados da Amostra Himmag .....	177
Apêndice IV-Malha Gerada por SCG2, Amostra Himmag .....	193
Índice de Ilustrações	
Capítulo II	
II.1 Esquema de um Sistema .....	4
II.2 Etapas de um Sistema Cartográfico .....	7
Capítulo IV	
IV.1 Triangulação de Dirichlet, Delaünay e Voronoi .....	17
IV.2 O Critério de Gold .....	18
IV.3 Triangulação de Gold .....	19
IV.4 Localização de um Ponto <del>em um Ponto</del> em um Triân- gulo .....	20
IV.5 Localização de um Ponto na rede Triangular .....	21
IV.6 Geração de uma rede pseudo-triangular .....	23
IV.7 Uma estrutura de dados para uma rede triangular ..	24
IV.8 Ordem de geração dos arcos .....	25
IV.9 Interpolação Linear em uma rede Triangular .....	26
IV.10 Traçado de curvas de nível em uma rede triangular.	27



## Capítulo V

V.1	Uma cela retangular .....	30
V.2	Celas com quatro marcas .....	32
V.3	Cela com três marcas .....	32
V.4	Traçado de curva de nível em uma cela .....	33
V.5	Esquema de Crane .....	34
V.6	Busca global em uma rede retangular .....	35
V.7	Esquema de Bhattacharya (I) .....	35
V.8	Esquema de Bhattacharya (II) .....	37
V.9	Esquema de Bhattacharya (III) .....	37
V.10	Interpolação em uma cela .....	40

## Capítulo VIII

VIII.1	O programa SCG1 .....	88
VIII.2	O programa SCG2 .....	89
VIII.3	Os vetores IGRASU e INDSU .....	90
VIII.4	Vizinhança de um nó .....	95
VIII.5	Geração de Vizinhanças .....	96
VIII.6	Traçado de Curvas de Nível .....	121
VIII.7	Marcação de celas .....	122
VIII.8	Vetor BITMAP .....	123
VIII.9	Carta de Curvas de Nível da Amostra Kansas (I).	129
VIII.10	Carta de Curvas de Nível da Amostra Kansas (II) .....	130
VIII.11	Carta de Curvas de Nível da amostra Himmag (I).	132
VIII.12	Carta de Curvas de Nível da amostra Himmag (II) .....	136

## Lista de Abreviaturas

SQT	soma dos quadrados dos totais
SQE	soma dos quadrados das estimativas
SQR	soma dos quadrados dos resíduos
MSR	média quadrática dos resíduos
MSE	média quadrática das estimativas
FAST	função aleatória de ordem 2
FAI	Função aleatória intrínseca
SSS	se e somente se
FAI-K	função aleatória intrínseca de ordem K
CG	covariância generalizada

## I. Introdução

As origens deste trabalho situam-se no ano de 1981 quando de uma consultoria realizada para PETROBRÁS S.A. através da COPPETEC-UFRJ. O projeto em questão se referia ao desenvolvimento de um sistema cartográfico assistido por computador. Evidentemente um projeto deste porte implicou na divisão da equipe em vários grupos de trabalho. A mim coube o módulo de estimação dos nós de uma malha retangular regular a partir de uma amostra aleatória de dados. Nesta época alguns sistemas foram analisados, BRAGA, MORGADO e BASTOS (10), e juntamente com os autores citados foi desenvolvido o que seria a base do módulo MALHA que faz parte do PGM, Programa Gerador de Mapas, PERSIANO e colaboradores (95). Durante minha participação no projeto interessei-me pela utilização do modelo de estimação baseado na teoria de Krigeagem. Em meados de 1981 o professor Nelson Maculan Filho, então coordenador do projeto, foi convidado pelo Departamento de Informática e Pesquisa Operacional da Universidade de Montreal a residir neste departamento como professor e pesquisador pelo período de dois anos. Após um entendimento com o professor Maculan e com o apoio da COPPE e da CAPES tive a possibilidade de prosseguir minhas pesquisas na área de estimação, interpolação e cartografia na Universidade de Montreal. Posteriormente este período foi estendido por cinco meses devido a um convite do professor Michel David da Escola Politécnica de Montreal. Desta residência resultaram diversos trabalhos que serão citados oportunamente e a presente tese cujos capítulos estão descritos a seguir.

No capítulo II é feita uma introdução geral ao problema dos sistemas cartográficos e à representação de superfícies por curvas de nível. Alguns pacotes disponíveis são sumariamente apresentados.

Os elementos básicos da teoria de superfícies de tendência são discutidos no capítulo II.

Uma forma de resolver o problema de estimação é eliminá-lo, isto é feito quando se utiliza uma rede triangular a partir dos dados disponíveis. Os nós desta rede coincidem com as coordenadas dos dados, de modo que o problema de interpolação para a geração de curvas de nível pode ser imediatamente abordado. No capítulo IV discute-se diferentes técnicas para a geração de uma rede triangular, modelos de interpolação e um algoritmo de pseudo-triangulação.

Muito frequentemente várias medidas distintas são tomadas em um mesmo local, levando à manipulação tais como cálculo de isópacas, razões, mudanças de escala as quais supõem uma regularização dos dados. Isto é feito por intermédio de uma estrutura de malha retangular regular a qual permite também um traçado mais homogêneo de curvas de nível. A utilização destas estruturas assim como a definição de modelos de interpolação e tradução de contornos a partir de celas retangulares é objeto do capítulo V.

Como foi dito anteriormente, o modelo de krigeagem atraiu meu interesse como solução para o problema de estimação, este modelo que está compreendido na Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas é introduzido no capítulo VI. Nele são estudados os

casos estacionários e não estacionários com deriva simples. É feita uma apresentação no contexto e com o formalismo da Teoria das Funções Aleatórias.

O capítulo VII é uma continuação e mesmo uma generalização do capítulo anterior. É apresentada a Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas de Ordem K. Esta teoria vai permitir generalizar o conceito de variograma e introduzir a covariância generalizada, conceito chave para a resolução de sistemas de Krigeagem no caso não estacionário com deriva complexa. A inferência da covariância generalizada e o modelo de covariância com termo "spline" também são discutidos.

Um programa gerador de cartas é detalhadamente apresentado no capítulo VIII. O módulo de estimação baseado na teoria de Krigeagem é uma aplicação do que foi visto nos capítulos VI e VII. O módulo de interpolação e geração de contornos se baseia no capítulo V. Alguns estudos de caso são apresentados.

Finalmente o capítulo IX discute alguns tópicos adicionais de muito interesse para a cartografia geológica. Como a utilização do sistema de krigeagem com vizinhança única para a cartografia de bacias petrolíferas, a obtenção de novos modelos de covariância generalizada, inferência e escolha de índices para validação de modelos de covariância generalizada.

Evidentemente uma tese é uma fotografia do andamento de uma pesquisa e neste sentido este trabalho não foge à regra. Porém ele pretende ser um instrumento de trabalho e de fomento à pesquisa em cartografia geológica.

## II. Sistemas Cartográficos

De um modo geral um sistema que processa informações geoçodificadas pode ser representado na forma abaixo:

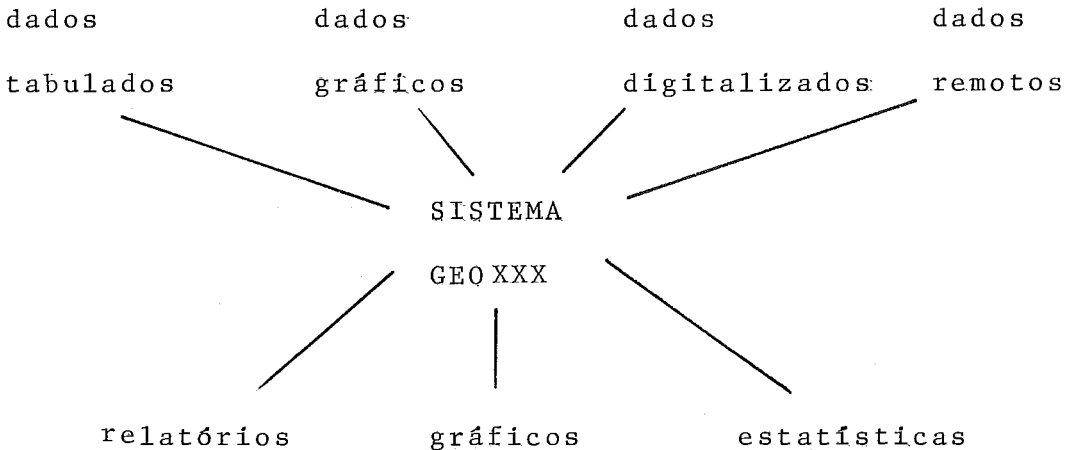


Fig. II.1

Neste trabalho a concentração será sobre as técnicas que possibilitam a obtenção de cartas, particularmente cartas de isocontornos, a partir de uma amostra de dados bi-dimensionais associados a uma variável de interesse que em princípio medirá parâmetros associados a fenômenos geológicos. Antes, porém de se abordar especificamente este problema será feita uma introdução ao problema da cartografia e uma resumida apresentação de alguns sistemas em uso.

PEUCKER (97) situa a cartografia no contexto da teoria da informação. Os elementos de um mapa, signos, têm diferentes conteúdos de informação, bits. Por exemplo, em uma carta os elementos relativos à altura, temperatura, etc, são portadores de informação enquanto que os elementos relativos à cor e efeitos visuais

são redundantes. Os elementos redundantes complementam os elementos de informação.

Os signos mais importantes em um mapa são o ponto, a curva e a superfície. Através das cartas estabelece-se uma linguagem que é uma coleção institucionalizada de signos que têm uma designação comum aos membros de uma dada comunidade (cartógrafos, geólogos) e podem ser combinados de algumas formas. Uma característica de línguas (formais ou naturais) é a concatenação. Nas línguas lineares isto é feito seguindo-se uma ordem do tipo "antes-depois". Mas para línguas cartográficas outras concatenações são possíveis: proximidade, conectividade, superposição, acima, abaixo, à esquerda, à direita, aglomeração, dispersividade, etc. Outro ponto a considerar é a interrelação dos signos, isto é, como as classes de signos são organizadas. Por exemplo, curvas de nível de um determinado valor.

O cartógrafo deve considerar também as limitações humanas em assimilar informações. Estas limitações são determinadas pelo olho, cérebro e treinamento específico de quem usa o mapa. Ao observarmos um mapa temos as possíveis seguintes reações:

- desvio da informação para áreas do inconsciente
- concentração em classes
- associação a alguma informação familiar
- limitação consciente a somente um aspecto do conteúdo

teúdo

Estas considerações são principalmente importantes para a confecção de mapas temáticos destinados ao público em geral. No caso de cartas geológicas que são destinadas a especialistas, um menor grau de generalização (mais detalhes) é admitido

e mesmo desejado.

Um dos elementos mais presentes em mapas é a superfície. Podendo representar uma porção de área do globo terrestre ou uma camada sub-superficial. Uma superfície (um objeto 3-D) pode ser representada de diferentes maneiras: perspectiva de um bloco, projeção planimétrica com sombreado do relevo, isocontornos. Outras representações possíveis compreenderiam uma amostragem aleatória da superfície ou a representação de seus pontos singulares

As representações 2-D de superfícies devem levar em conta as deformações causadas pelos diversos sistemas de projeção: azimuth, cilíndrica, cônica, mercator, loxodrômica, etc.

O processamento de uma superfície envolve diferentes operações, qual seja o de criar uma superfície a partir dos dados disponíveis (estimação e interpolação), eliminação ou acen-tuação de certas variações e comparação entre duas superfícies diferentes. Os mapas geológicos guardam algumas diferenças importantes em relação aos mapas de superfície com respeito a certas características da amostra, GOLD (50) :

- conteúdo da amostra
- dimensão da amostra, dados superficiais são em geral mais numerosos porque são mais fáceis de se coletar
- estrutura espacial da amostra é em geral muito importante em mapas geológicos

A obtenção de mapas passa em geral por diferentes fases, ver figura II.2, das quais a estimação e interpolação são essenciais para a precisão da carta final. Em BRAGA e MACULAN (13) encontramos uma discussão sobre a concepção de Sistemas Cartográficos. Antes, porém de se passar ao próximo capítulo



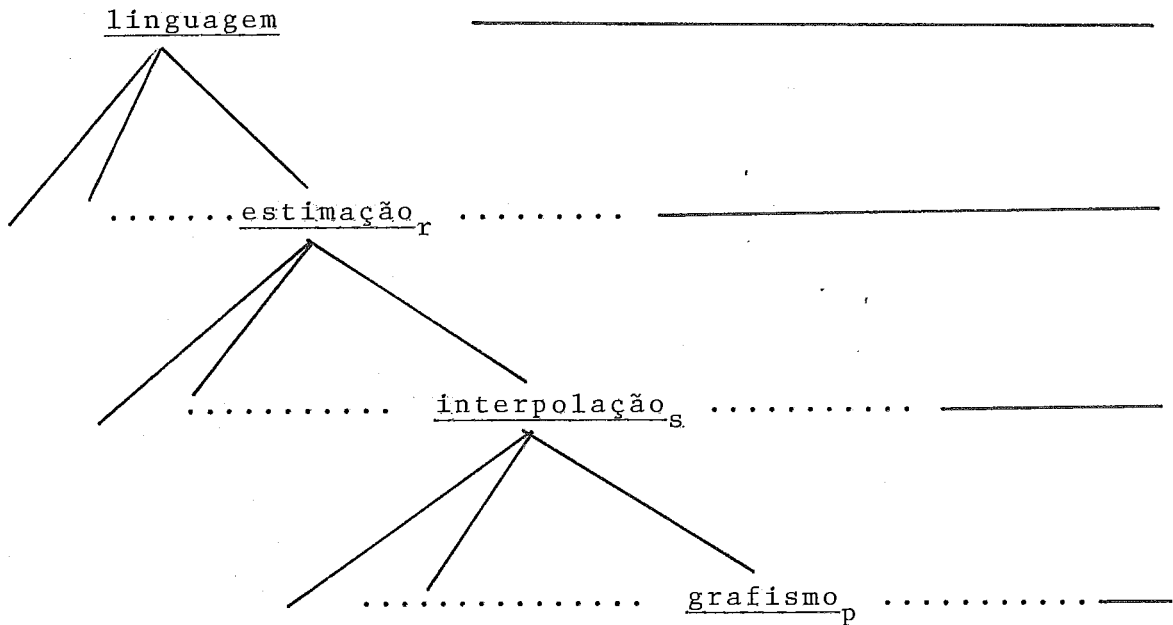


Fig.II.2

vai-se listar alguns sistemas cartográficos em uso. A lista longe de ser extensiva procura apenas dar uma idéia e contribuir para levantamentos mais completos. A descrição destes sistemas não é completa, concentra-se em indicar os tipos de carta gerados, a técnica de estimação empregada e o local onde foi desenvolvido assim como referências adicionais.

- Symap, Calform e Symvu

Symap é um sistema desenvolvido pelo Laboratório de Grafismo por Computador e Análise Espacial da Universidade de Harvard. É um sistema bastante popular pela sua portatibilidade, facilidade de uso e relativa eficiência. Gera mapas de isocontornos e mapas temáticos. O mapa de isocontornos é obtido a partir de uma malha regular. Os nós desta malha são estimados por uma média ponderada dos valores amostrais. Esta ponderação

é baseada no inverso da distância do nó considerado. A edição dos mapas é feita em uma impressora serial. SHEPARD (113) e SCHMIDT e ZAFT (111). Dois sistemas que complementam Symap são : CALFORM e SYMVU. Calform edita mapas em um "plotter" e Symvu gera perspectiva de bloco, LABLOG (62).

- Surface II

Desenvolvido no "Kansas Geological Survey", é um sistema criado com o objetivo de gerar mapas de estruturas subsuperficiais. O sistema tem uma linguagem de controle de fácil utilização, é portátil e modular. Os mapas gerados são mapas de isocontornos ou perspectivas de bloco. Havendo também a opção para saída em impressoras seriais. A estimação de uma malha regular pode ser feita por quatro métodos distintos: média ponderada, ajustes locais por mínimos quadrados, krigeagem universal e superfície de tendência, SAMPSON (108).

- PGM

Desenvolvido por COPPETEC/UFRJ para Petrobrás. Concebido para processar dados geológicos. Sua linguagem de controle é de fácil utilização e emprega termos correntes em cartografia e geologia. Gera cartas de isocontorno e processa operações entre malhas. Os módulos de estimação compreendem opções com mínimos quadrados locais e superfícies de tendência, sendo também previstos módulos que utilizem a teoria de Krigeagem, PERSIANO (95).

- Coypac/Polypac

Desenvolvido e aperfeiçoado na École Polytechnique

de Montreal e Geostat Inc. Faz estimação de variáveis geológicas com suporte pontual ou de bloco. Gera cartas de isocontornos e perspectivas de bloco. O módulo de estimação baseia-se na Teoria de Funções Aleatórias Intrínsecas de Ordem K, DAVID (36).

- Bluepack

Sistema orientado para o processamento de dados geológicos desenvolvido no "Centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique", Fontainebleau, França. Realiza basicamente a estimação de uma variável com suporte pontual ou de bloco. O módulo de estimação baseia-se na teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas de Ordem K, incluindo-se o modelo de covariância generalizada com termo spline e o modelo com vizinhança única. Gera mapas de isocontorno e perspectiva de bloco, DELFINER e DELHOMME (39), DELFINER, DELHOME e CHILES (42).

Citaríamos ainda os sistemas Odissey, TEICHOLZ (121) e Gimms, WAUGH (127). Uma lista mais extensa de sistemas para processamento de informações cartográficas e geológicas pode ser encontrada em NAGY e WAGLE (88).

### III. Superfícies de Tendência

#### III.1 Introdução

As técnicas baseadas em superfícies de tendência estão entre as mais utilizadas para a análise de dados. Em WHITTEN (131) a determinação da superfície de tendência é definida como uma técnica de filtragem dos dados. Na maior parte dos casos uma variável  $z$  é suposta dependente de variáveis não correlacionadas. Inicialmente deve-se determinar uma função  $z = f(x)$  que represente essencialmente a variação de  $z$  e isolar as componentes local e de ruído das observações disponíveis de  $z$ . A função  $f$  é então usada para preparar mapas e auxiliar na análise do fenômeno em estudo.

O modelo geral de superfície de tendência representado por:

$$z(x) = f(x)^t \beta + \varepsilon(x) \quad (\text{III.1})$$

onde

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

$f_i(x)$  pode ser uma família de polinômios ortogonais ou não, de termos de uma série de Fourier, etc. Em WHITTEN (129) e (131), CZEGLEDY (30), WERNER (128) e SHEPARD (113) diferentes escolhas são apresentadas.

### III.2 A Determinação dos Coeficientes de Regressão

Os coeficientes  $\beta$  são estimados por  $\hat{\beta}$  que minimiza a soma dos erros quadráticos. Isto é, se  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são os pontos para os quais os valores  $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_m)$  da variável  $z$  são conhecidos, então o erro quadrático associado a uma dada escolha de coeficientes  $\beta$  é dado por :

$$\sum (z(x_i) - f(x_i)^t \beta)^2 \quad (\text{III.2})$$

Se denotarmos  $\begin{vmatrix} z(x_1) \\ \vdots \\ z(x_m) \end{vmatrix}$  por  $z_m$  e  $\begin{vmatrix} f(x_1)^t \\ \vdots \\ f(x_m)^t \end{vmatrix}$  por  $F_m$

$$(\text{III.2}) \text{ é escrito como } (z_m - F_m \beta)^t (z_m - F_m \beta) \quad (\text{III.3})$$

Para determinar  $\beta$  iguala-se as derivadas parciais de (III.3) com respeito a  $\beta_1, \dots, \beta_p$  a zero e obtem-se um sistema de equações lineares, o sistema de equações de normais. Entretanto, em termos de algoritmos prefere-se determinar uma matriz ortogonal  $Q$  e uma matriz superior triangular  $\tilde{R}$  tal que :

$$Q F_m = R = \begin{vmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Multiplicando (III.3) por  $Q^t Q$  tem-se :

$$\begin{aligned} \{Q(z_m - F_m \beta)\}^t \{Q(z_m - F_m \beta)\} = \\ \{Qz_m - R\beta\}^t \{Qz_m - R\beta\} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

denotando  $Qz_m$  por  $\begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{vmatrix}$  e substituindo em (III.5)

$$Y_2^t Y_2 + (Y_1 - \tilde{R} \beta)^t (Y_1 - \tilde{R} \beta) \quad (\text{III.6})$$

Se  $\tilde{R}$  tem posto igual a  $p$  então o menor erro quadrático é obtido quando

$$Y_1 = \tilde{R} \beta \quad (\text{III.7})$$

logo 
$$\hat{\beta} = \tilde{R}^{-1} Y_1 \quad (\text{III.8})$$

as respectivas dimensões são:  $Q(m,m)$ ,  $F_m(m,p)$ ,  $R(p,p)$ ,  $Y_1(p,1)$ ,  $Y_2(m-p,1)$

Se denotarmos  $(f(x_i)^t \hat{\beta})$  por  $\hat{Y}_i$ ,  $z(x_i)$  por  $Y_i$  e  $\sum Y_i/m$  por  $\bar{Y}$  pode-se definir os seguintes componentes :

$$SQT = \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{III.9})$$

$$SQE = \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (\text{III.10})$$

$$SQR = \sum_{i=1}^m (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{III.11})$$

Estes termos estão relacionados pela igualdade :

$$SQT = SQE + SQR \quad (\text{III.12})$$

O modelo mais simples de superfície de tendência é o modelo linear:

$$z(x) = \alpha + \beta^t x + \varepsilon(x) \quad (\text{III.13})$$

$\beta$  é um vetor  $p \times 1$

$\alpha$  é um escalar

Tomando para estatísticas de  $\alpha$  e  $\beta$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} \quad (\text{III.14})$$

$$\hat{\beta} = S^{-1} P \quad (\text{III.15})$$

$$P = \begin{vmatrix} \Sigma(x_{i1} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}) \\ \Sigma(x_{i2} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}) \\ \vdots \\ \Sigma(x_{ip} - \bar{x}_p)(y_i - \bar{y}) \end{vmatrix} \quad (\text{III.16})$$

$$S = \begin{vmatrix} \Sigma(x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i1} - \bar{x}_1) & \Sigma(x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2) & \dots & \Sigma(x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{ip} - \bar{x}_p) \\ \Sigma(x_{i2} - \bar{x}_2)(x_{i1} - \bar{x}_1) & \Sigma(x_{i2} - \bar{x}_2)(x_{i2} - \bar{x}_2) & \dots & \Sigma(x_{i2} - \bar{x}_2)(x_{ip} - \bar{x}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma(x_{ip} - \bar{x}_p)(x_{i1} - \bar{x}_1) & \Sigma(x_{ip} - \bar{x}_p)(x_{i2} - \bar{x}_2) & \dots & \Sigma(x_{ip} - \bar{x}_p)(x_{ip} - \bar{x}_p) \end{vmatrix}$$

(III.17)

Sob as hipóteses de independência e existência dos momentos de 1a. e 2a. ordem o estimador de mínimos quadrados é o melhor estimador não viciado. A tabela de análise de variância se torna:

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Média Quadrática	F
Termos de Regressão	SQR	P	$MQR = \frac{SSR}{P}$	$\frac{MQR}{MQE}$
Termos Residuais	SQE	m-p-1	$MQE = \frac{SQE}{m-p-1}$	
Total	SQT	m-1		

Se MQR é muito maior que MQE então a variabilidade é explicada pelo modelo. Em termos quantitativos isto é avaliado a partir da distribuição  $F(p, m-p-1)$  desde que um coeficiente de significância seja escolhido. Outro coeficiente que pode ser utilizado é o coeficiente de correlação:

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} \quad (\text{III.18})$$

$R^2$  varia entre 0 (pior caso) e 1 (ajuste perfeito) .

### III.3 As Limitações do Modelo

O comportamento de uma variável geológica pode incluir duas ou mais componentes (regional, local, residual), AGTERBERG (2) uma destas componentes representa a tendência se existe uma variação sistemática na média ou esperança matemática da variável  $z$ . Os resíduos que são desvios da tendência não são necessariamente sem comportamento sistemático. Ainda condições locais podem provocar variações em  $z$ . O objetivo essencial é identificar a componente regional. Para isso muitas técnicas complementares foram desenvolvidas, como por exemplo utilizar o coeficiente de correlação serial, KENDALL (60), para identificar se os resíduos relativos a um dado modelo de regressão são aleatórios ou não. Outro procedimento consiste em determinar um modelo em duas diferentes etapas separando as variáveis, AGTERBERG (1).

Se as variáveis independentes observadas forem correlacionadas, o sistema  $S\hat{\beta} = p$  (III.19) pode ser muito instável, JONES (55) sugere uma matriz  $S + KI$



onde  $K$  é escolhido a partir da análise do gráfico : valores de  $K$  x valores dos coeficientes de regressão. É escolhido o valor de  $K$  para o qual todos os coeficientes são estáveis.

WILSON (132) sugere, que quanto na presença de variações acentuadas, se utilize o critério de mínimo desvio absoluto ao invés do critério de mínimos quadrados.

A análise de tendência permite o estudo do comportamento global de uma variável. Não se deve confundir a análise de tendência com a análise de regressão, a primeira permite estimar a tendência do valor da variável em estudo enquanto que a segunda procura identificar a relação entre as variáveis independentes e a variável observada.

## IV. Estruturas de Malhas Triangulares e Traçado de Isocontornos

### IV.1 Introdução

Como foi mencionado no capítulo II os sistemas cartográficos são estruturados em módulos. Neste trabalho o interesse se concentra no problema de estimação e no traçado de isocontornos, considerado um problema de interpolação. No caso das estruturas de malhas triangulares não é necessária a estimação de  $z$  em uma posição onde este valor é desconhecido, isto porque esta estrutura faz coincidir as coordenadas de posição dos dados com os nós da malha. Em seguida é feita a interpolação visando o traçado de contornos. Neste capítulo discutiremos alguns algoritmos para a geração de malhas triangulares e traçado de isocontornos.

### IV.2 Métodos de Triangulação

Um dos procedimentos mais conhecidos é a tecelagem de Dirichlet (ou diagrama de Voronoi) seguida da triangulação de Delaunay. Na primeira fase são construídas regiões  $T_i$  associadas a cada ponto  $P_i$ , todos os pontos pertencentes a  $T_i$  estão mais próximos de  $P_i$  do que de qualquer outro ponto (em relação às coordenadas de posição), na segunda fase todos os pontos cujas regiões (polígonos) tem uma aresta em comum são ligados, gerando portanto a triangulação de Delaunay. Ver figura IV.1. A definição de  $T_i$  é dada por:

$$T_i = \{ (x, y) \mid \|(x, y) - (x_i, y_i)\| \leq \|(x, y) - (x_j, y_j)\| ;$$

$$\forall j, j \neq i \} \quad (IV.1)$$

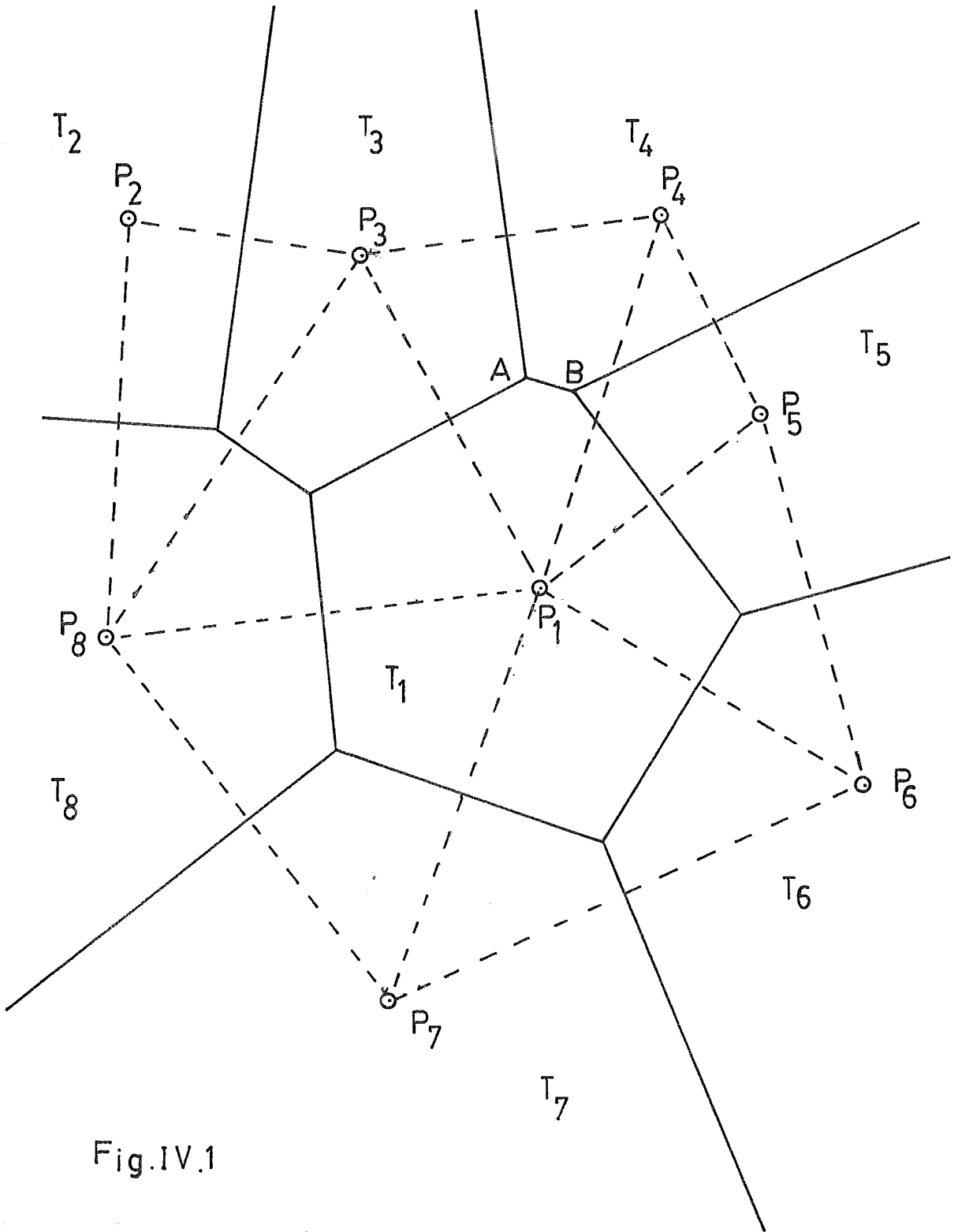


Fig.IV.1

A tecelagem de Dirichlet pode levar a casos degenerados, por exemplo, mais de três polígonos encontrando-se em um vértice. Esta situação elimina a unicidade da triangulação de Delaunay. Em GREEN e SIBSON (51) é apresentado um algoritmo que gera os polígonos de Dirichlet. Foi provado que em casos não degenerados o critério do ângulo max-min gera a tecelagem de Dirichlet e vice-versa, SIBSON (114). O critério do ângulo max-min, criado por C.L. Lawson, afirma que os quadriláteros estritamente convexos, formados em uma rede triangular pelos triângulos com uma aresta comum, devem ser tais que a substituição da diagonal definida pela aresta comum pela outra diagonal não deve aumentar o mínimo dos seis ângulos internos a este quadrilátero e uma diagonal. Outro critério sugerido por McLAIN (64) afirma que a melhor rede triangular é aquela que particiona o plano de uma forma tal que para cada ponto pertencente a um triângulo, este ponto está, no mínimo, tão perto de um dos vértices deste triângulo quanto de qualquer outro ponto. LAWSON (65) mostra que este critério é equivalente a triangulação de Delaunay. Generalizações do método de Dirichlet-Voronoi-Delaunay são apresentadas em BOWYER (9) e WATSON (126).

Em GOLD (49) um outro critério é proposto: a maximização da menor altura do triângulo. A figura IV.2 ilustra este critério, a menor altura em (a) é  $|BH|$  e em (b) é  $|AH|$ , desta forma (a) é escolhido porque  $|BH| > |AH|$ .

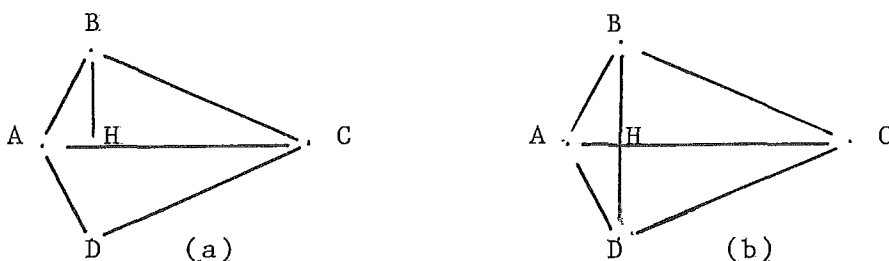


Fig. IV.2

Uma rede triangular irregular implica na definição de uma estrutura de dados que permita uma fácil manipulação de seus elementos. GOLD (49) sugere a seguinte proposição:

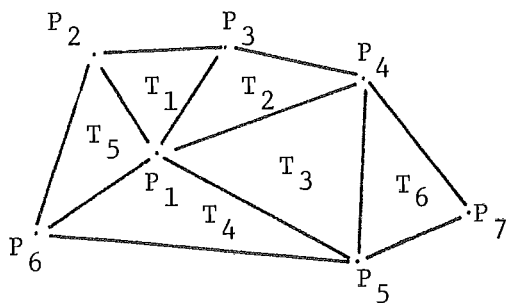


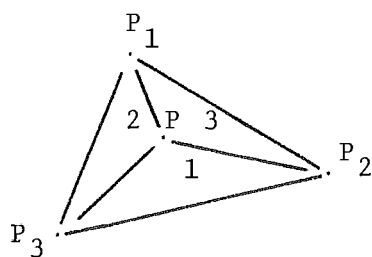
Fig.IV.3

triângulo	triângulo adjacente	pontos associados
1	<u>5</u> , <u>2</u>	<u>1</u> , <u>3</u> , <u>2</u>
2	<u>1</u> , <u>3</u>	<u>1</u> , <u>4</u> , <u>3</u>
3	<u>6</u> , <u>2</u> , <u>4</u>	<u>1</u> , <u>5</u> , <u>4</u>
4	<u>3</u> , <u>5</u>	<u>1</u> , <u>6</u> , <u>5</u>
5	<u>4</u> , <u>1</u>	<u>1</u> , <u>2</u> , <u>6</u>
6	<u>3</u> , <u> </u> , <u> </u>	<u>7</u> , <u>4</u> , <u>5</u>

pontos	x	y	z
1	$x_1$	$y_1$	$z_1$
2	$x_2$	$y_2$	$z_2$
3	$x_3$	$y_3$	$z_3$
4	$x_4$	$y_4$	$z_4$
5	$x_5$	$y_5$	$z_5$
6	$x_6$	$y_6$	$z_6$
7	$x_7$	$y_7$	$z_7$

Dado um triângulo pelos seus vértices  $P_1, P_2$  e  $P_3$  e um ponto  $P$ , a posição relativa deste ponto em relação ao triângulo é dada pelos coeficientes  $r_i$  definidos por :

$$r_i = \frac{\text{área do subtriângulo } i}{\text{área total do triângulo}} \quad (\text{IV.2})$$



$$P = (x_p, y_p)$$

Fig.IV.4

Estes coeficientes são calculados a partir do sistema linear:

$$\begin{aligned} x_p &= r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 \\ y_p &= r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_3 y_3 \\ 1 &= r_1 + r_2 + r_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Os coeficientes  $r_i$  dão também a estratégia de busca caso o ponto  $P$  não esteja dentro do triângulo, neste caso o sinal do coeficiente correspondente indica qual a posição relativa de  $P$ . Ver figura IV.5.

Uma vez definido o critério que a rede triangular deve satisfazer é preciso estabelecer de que forma ela será gerada. Em geral os algoritmos que se baseiam nos critérios de Delaunay, McLain ou Lawson começam a partir de um ponto, o centróide por exemplo MIRANTE e WEINGARTEN (86), e geram um triângulo a cada vez. É também uma prática comum exigir as propriedades de definição da rede somente a nível local, assim IV.1 tor

na-se :

$$T_i^* = \{ (x,y) \in E \mid \begin{aligned} &|| (x,y) - (x_i, y_i) || \leq \\ &|| (x,y) - (x_j, y_j) || ; \forall j, j \neq i \end{aligned} \}$$

$P_i$  e  $P_j \in E$ , onde  $E$  é definido por um conjunto de desigualdades lineares, GREEN e SIBSON (51).

Ainda em relação à geração da rede, GOLD (49) propõe um método de inserção de triângulos a partir de um triângulo inicial que engloba os dados.

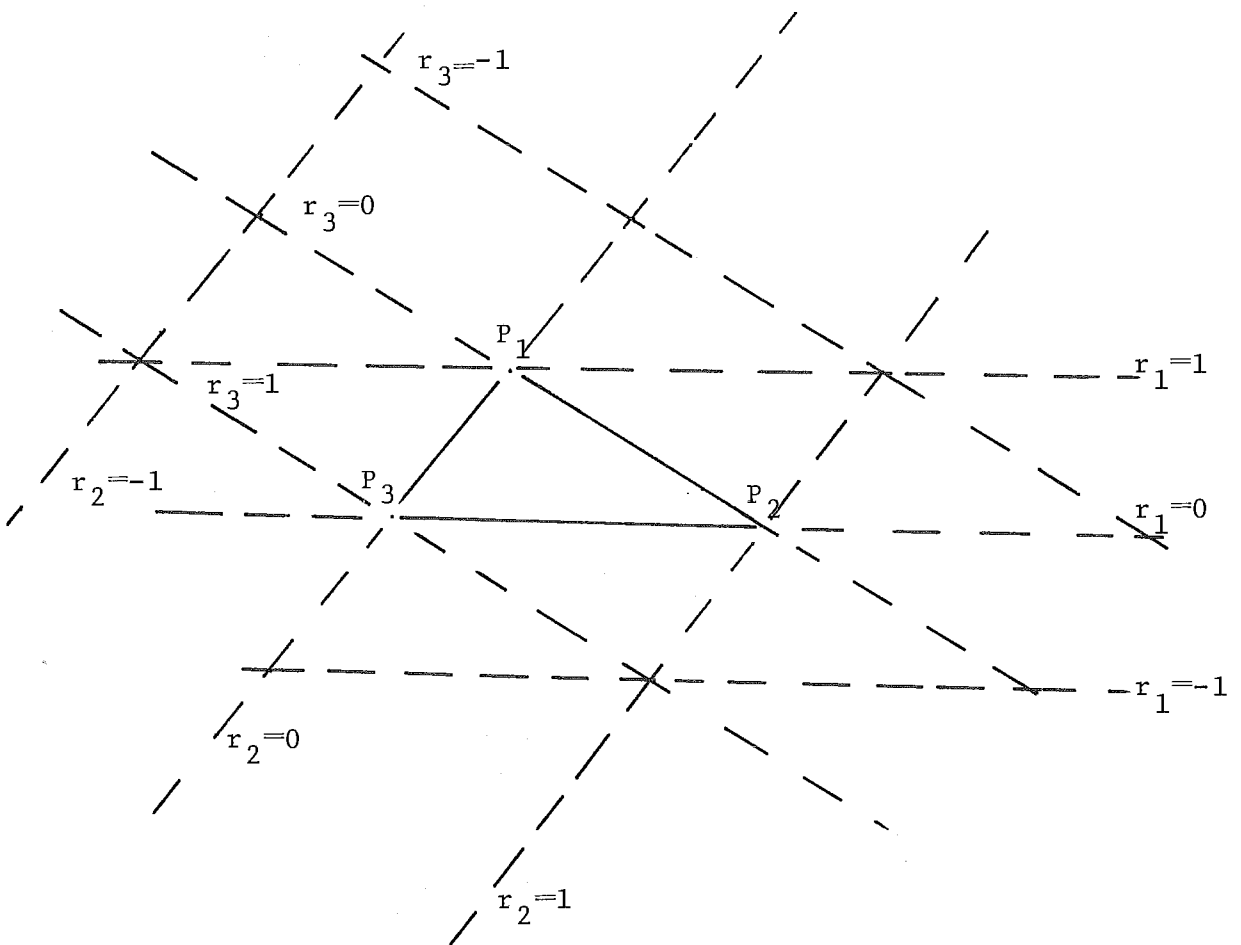


Fig. IV.5

### IV.3 Métodos de Interpolação

Após a construção da rede triangular é necessário

definir uma função de interpolação que vai permitir o traçado de isocontornos. Várias soluções são propostas, por exemplo um interpolador linear para a rede gerada segundo a estrutura de dados de GOLD, seria da forma:

$$z_p = r_1 z_1 + r_2 z_2 + r_3 z_3 \quad (\text{IV.4})$$

MAUDE (85) sugere uma média ponderada de polinômios. Considere o caso unidimensional, entre os pontos  $x_n$  e  $x_{n+1}$  dois polinômios de segundo grau podem ser considerados, um deles  $F_n$  passando pelos pontos  $z_{n-1}, z_n, z_{n+1}$  e o outro  $F_{n+1}$  pelos pontos  $z_n, z_{n+1}, z_{n+2}$ , (por abuso de linguagem diz-se  $z$  ao invés de  $(x, z)$ ). A média ponderada é:

$$F = wF_n + (1-w)F_{n+1} \quad (\text{IV.5})$$

onde  $w$  é uma função de  $x$  tal que:

$$w(x_n) = 1, w(x_{n+1}) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_n} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_{n+1}} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Em MacLAIN (63) é sugerido um mínimos quadrados ponderado. Outro interpolador, AKIMA (3), é um polinômio de grau cinco em  $x$  e  $y$ :

$$z(x, y) = \sum_{j=0}^5 \sum_{k=0}^{5-j} q_{jk} x^j y^k \quad (\text{IV.8})$$

Para determinar estes 21 coeficientes, os valores da função e de suas derivadas de primeira e segunda ordem (estimadas) são necessários em cada vértice do triângulo. Além disso, a derivada direcional normal a cada aresta do triângulo também é estimada e acrescentada ao conjunto de equações.



As derivadas parciais são calculadas a partir de somas de produtos vetoriais entre o vértice e pontos vizinhos.

Menciona-se ainda o interpolador quadrático por partes de POWELL e SABIN (100) e o interpolador cúbico por partes de LAWSON (65).

#### IV.4 Um Método de Pseudo-Triangulação

Uma outra abordagem é a geração de uma rede pseudo-triangular, BRAGA e MACULAN (12), isto é, alguns triângulos não são completados porque a distância entre dois pontos é maior que um raio escolhido a priori. O objetivo desta restrição é evitar triângulos muito alongados. Na figura IV.6 dá-se um exemplo de uma rede pseudo-triangular.

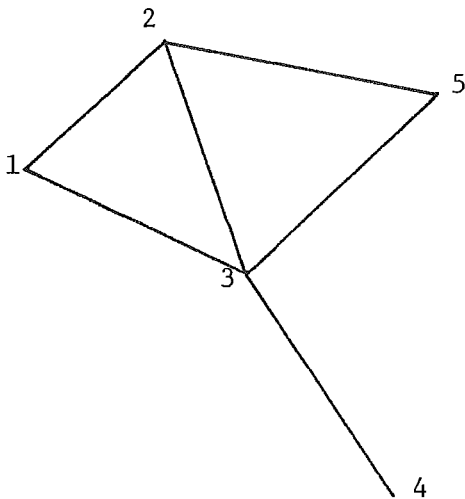


Fig. IV.6

Suponha que tem-se  $n$  dados :  $N = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$  e  $i \in N$  está associado ao ponto  $(x_i, y_i, z_i)$ . Vai-se definir a seguinte ordem para este conjunto:

$$\begin{aligned}
 i < j \quad \text{se} \quad x_i < x_j \\
 \text{ou} \\
 x_i = x_j \quad \text{e} \quad y_i < y_j
 \end{aligned}
 \tag{IV.9}$$

A rede triangular é considerada como um grafo direto, GOND<sub>DRAN</sub> e MINOUX (48),  $G = (N,A)$ , onde  $N$  é o conjunto amostral e  $A$  denota o conjunto de arcos (neste caso os arcos são as arestas do triângulo). Se o arco  $(i,j) \in A$  então  $i < j$ . Usa-se duas estruturas de dados para representar o grafo: a primeira representa todos os arcos que partem de um ponto amostral, a segunda todos os arcos que chegam em um ponto amostral. Estas estruturas vão facilitar a busca de interseções entre arestas e isocontornos.

Estas duas estruturas são exemplificadas a seguir, ver figura IV.7

Estrutura 1 :  $(1,5), (1,3), (1,4), (1,2); (2,4), (2,7) \dots$   
 $\dots (6,8), (6,9), (6,7); \dots (9,10)$ .

Estrutura 2 :  $(10,7), (10,9), (10,8); (9,7), (9,6),$   
 $(9,8); \dots (4,2), (4,1), (4,3); \dots ; (2,1)$ .

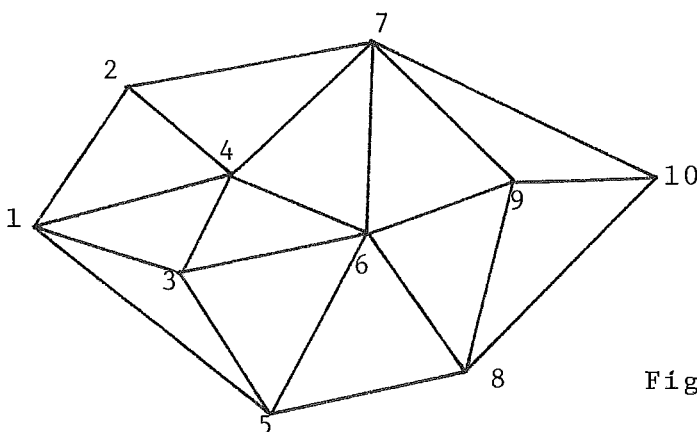


Fig. IV.7

A ordem em cada estrutura, por exemplo na estrutura 1 é definida da seguinte forma: seja  $i$  um vértice a ordem  $(i, j_1), (i, j_2), \dots, (i, j_k)$  é assumida se a inclinação da aresta  $(i, j_{i-1})$  é menor que a inclinação da aresta  $(i, j_i)$ . Ver figura IV.8. A mesma idéia é utilizada para a estrutura 2. Um par de vetores é usado para representar cada estrutura:  $NA(\cdot)$  e  $AA(\cdot)$  para 1 e  $NB(\cdot)$  e  $AB(\cdot)$  para 2. Isto é, todos os pontos conectados com  $i$  quando se considera os predecessores estão no conjunto  $\{AA(NA(i)), AA(NA(i)+1), \dots, AA(NA(i+1)-1)\}$ , caso se considere os sucessores o conjunto será  $\{AB(NB(i)), AB(NB(i)+1), \dots, AB(NB(i+1)-1)\}$ .

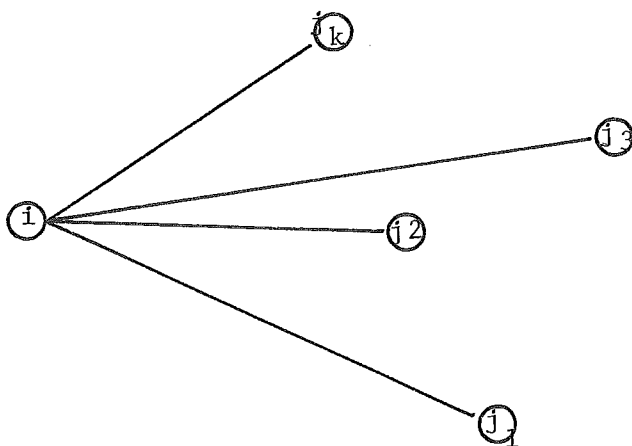


Fig. IV.8

Considere agora a figura IV.9, os pontos  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  e  $(x_3, y_3, z_3)$  definem um plano. Se quisermos determinar a curva de nível ou isocontorno  $\bar{z}$  verifica-se que esta curva é uma reta no plano  $z=\bar{z}$ . Se a função de interpolação não for linear a curva de nível é definida pela interseção entre o gráfico da função interpoladora (superfície) e o plano  $z=\bar{z}$ . O procedimento geral é construir para cada nível todos os contor

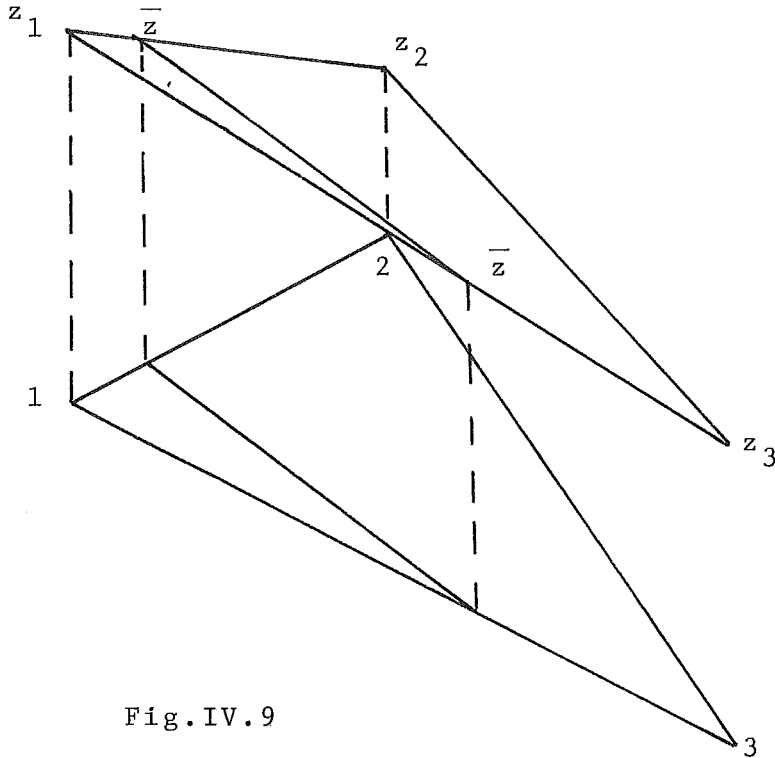


Fig. IV.9

nos. A cada arco é associada uma variável Booleana (.V. se o arco não está rotulado e .F. em caso contrário). No início todos os valores são .V. . O método determina completamente uma curva de nível antes de determinar outra, caso exista. Em um arco  $(i, j)$  para o qual  $z_i \leq \bar{z} \leq z_j$  ou  $z_j \leq \bar{z} \leq z_i$  calcula-se a interpolação linear  $(\bar{x}, \bar{y})$  e conecta-se ao último ponto interpolado, rotulando  $(i, j)$ , isto é, a variável Booleana associada assume o valor .F. . Uma curva de nível é completada quando se retorna ao primeiro ponto determinado ou quando o arco é constituído de dois pontos limites. Todas as curvas de nível referentes a um valor  $\bar{z}$  são consideradas obtidas após todos os arcos terem sido investigados. Na figura IV.10 mostra-se um exemplo deste algoritmo. Os valores dentro dos círculos representam a ordem dos nós, os valores indicados ao lado representam o valor de  $z$  no nó correspondente, finalmente os valores entre colchetes indi-

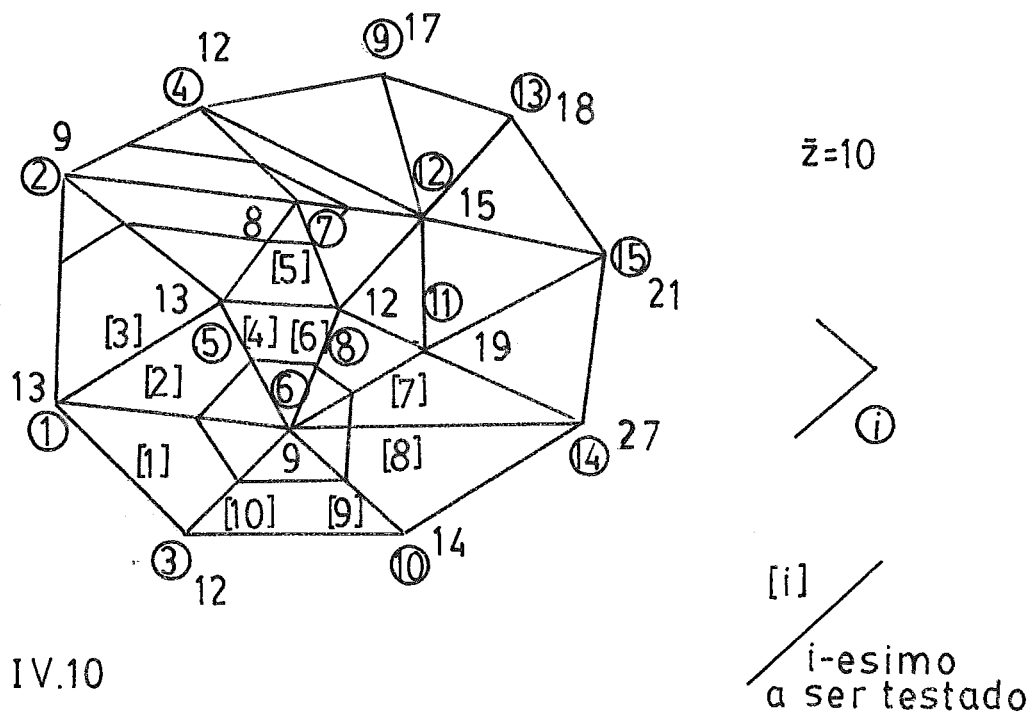


Fig. IV.10

cam a ordem em que os arcos foram pesquisados. No exemplo as curvas de nível 10 são determinadas. A busca começa no nó 1 e vai determinar um contorno fechado, após, um contorno aberto será de terminado.

#### IV.5 As Limitações do Modelo

A adequação deste modelo em um módulo para cartografia supõe algumas condições: ausência de erro nas medidas ou estabilidade do fenômeno estudado; distribuição equilibrada locais onde as medidas foram tomadas e interesse restrito à obtenção de cartas já que manipulações com redes triangulares podem ser custosas tendo em vista a estrutura de dados que elas su

põem, salvo quando a rede é regular o que permitira a transformação imediata para uma rede retangular quando aqueles cálculos fossem necessários. A utilização de redes triangulares se faz com bons resultados no caso de topografia.

## V. Estruturas de Malhas Retangulares e Algoritmos de Iso-Con torno

### V.1 Introdução

Há diversas razões pelas quais as estruturas de malhas retangulares tenham sido e ainda sejam largamente utilizadas nos sistemas cartográficos assistidos por computador a facilidade de se trabalhar com tal estrutura é certamente uma delas. Mas também muitos algoritmos de interpolação e traçado de contornos supõem uma estrutura retangular. É o caso de algumas famílias de funções "splines". No caso da cartografia geológica deve-se acrescentar ainda que diversas operações além do traçado de contornos são necessárias: cubagem, mudanças de escala, cálculo de proporções, etc e neste caso uma malha retangular regular fornece um suporte mais homogêneo e flexível que uma malha triangular. Ver-se-á a seguir diferentes soluções para o traçado de curvas de nível.

### V.2 Estruturas Retangulares e Algoritmos de Busca

Seja uma rede retangular regular com  $m$  linhas indexadas por  $i=1, \dots, m$  e  $n$  colunas indexadas por  $j=1, \dots, n$ . Um nó  $(i, j)$  nesta estrutura é o ponto determinado pela interseção de uma linha  $i$  com uma coluna  $j$ . A cada nó está associado um valor da variável estudada. Uma cela  $(i, j)$  nesta estrutura corresponde à região delimitada pelas colunas  $j$  e  $j+1$  e as linhas  $i$  e  $i+1$ . Ver figura V.1.

Em COTTAFAVA e LeMOLI (26) o problema de traçado de curvas de nível é dividido em duas etapas: determinação das

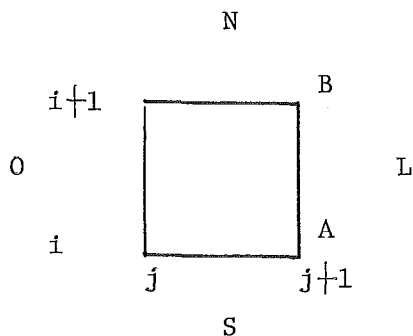


Fig.V.1

interseções entre as curvas de nível e as arestas de cada cela e a ligação entre estas interseções. Com respeito a estas duas etapas pode-se optar por uma abordagem simultânea para cada nível de todas as curvas referentes a este nível ou seguir cada curva até completar seu traçado. Parece que este tratamento é mais adequado quando se necessita economizar memória e também por facilitar a identificação de diferentes ramos de uma mesma curva de nível.

A fim de identificar se a aresta de uma cela é interceptada os seguintes testes podem ser feitos, ver fig.V.1 :

$$\min (z(A), z(B)) \leq \bar{z} < \max(z(A), z(B)) \quad (V.1)$$

ou

$$(z(A) - \bar{z}) * (z(B) - \bar{z}) \leq 0 \quad (V.2)$$

O procedimento de busca compreende dois aspectos , um local e outro global. O local diz respeito à busca em cada cela. A ordem de busca nas arestas pode por exemplo , obedecer a seqüência: leste, sul, oeste, norte ou a permutações circulares desta seqüência. Os seguintes passos são então realizados:

1. Respeitando a ordem dada procura-se a interse



ção em cada aresta.

2. Quando uma interseção é encontrada, marca-se para que não seja encontrada novamente.

3. Calcula-se as coordenadas das interseções (interpolação linear) e dependendo do método de interpolação gera-se a curva de nível naquela cela.

4. A análise continua na cela adjacente à aresta interceptada repetindo o procedimento de 1.

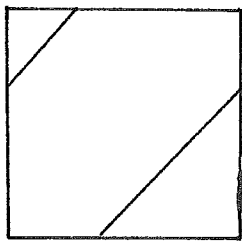
O problema global por outro lado diz respeito ao encadeamento das operações locais:

1. Procura-se um ponto de partida, isto é feito entre as arestas na fronteira ou limite da rede ou entre as arestas verticais.

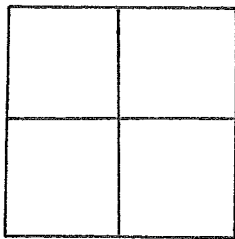
2. O ponto final do contorno é determinado ou quando se atinge os limites da rede ou quando não se encontram mais interseções nas celas adjacentes à última interseção. Como podem haver contornos fechados, o primeiro ponto de cada contorno não é cancelado para que naquela eventualidade o contorno possa ser fechado.

No caso das operações locais um problema que precisa ser considerado é o da degeneração. Existem dois casos a considerar: uma cela com quatro marcas e um contorno coincidente com um vértice. No primeiro caso existem três possibilidades a considerar, fig.V.2.

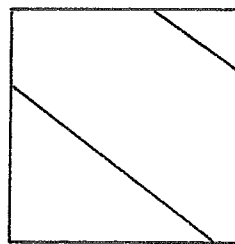
Uma proposta de solução é dada pela tabela a seguir:



(a)



(b)



(c)

Fig.V.2

aresta de entrada

leste

sul

oeste

norte

aresta com interseção  
mais próxima da aresta de entrada

sul -> (V.2a)

oeste -> (V.2b)

norte -> (V.2a)

oeste -> (V.2c)

Tabela V.1

Uma outra solução é continuar a busca local sempre pela aresta leste independentemente da aresta de entrada. Neste caso para a mesma seqüência de entradas da tabela V.1, as alternativas são : 3a,3a,3b e 3c.0 encontro das curvas 3b corresponde a reconhecer um ponto de sela.

O segundo caso de degeneração é descrito pela figura V.3 . Neste caso três arestas podem ser consideradas inter

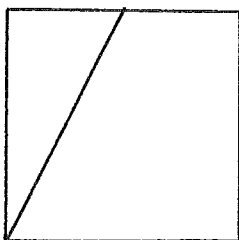
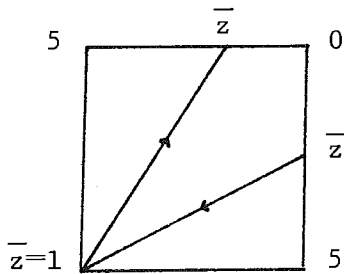
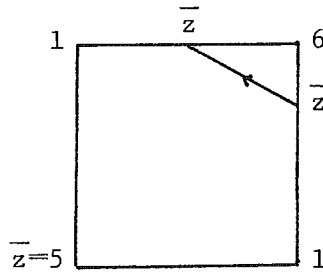


Fig.V.3

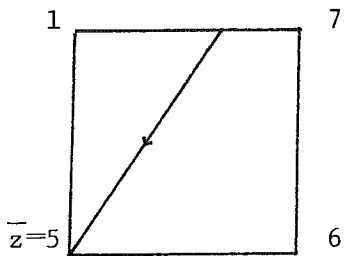
ceptadas. Se for escolhida como seqüência, leste-sul-oeste-norte, o traçado de contorno irá parar na passagem da aresta sul para a aresta oeste, dado que a interseção é coincidente. Este tipo de problema não ocorrerá se for usado o teste V.1. As figuras V.4 a-d mostram diversas possibilidades.



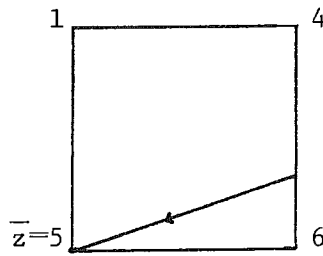
(a) as 4 arestas são marcadas



(b) 2 arestas são marcadas



(c) as arestas norte e sul são marcadas



(d) as arestas leste e sul são marcadas

Fig.V.4

A desvantagem deste teste é perder interseções como em V.4b). Isto pode ser compensado por uma busca posterior de nós mínimos ou máximos que não sejam adjacentes às arestas marcadas. Outra é fazer uma variação virtual no valor ou no sinal de  $z(i,j)$  de modo que alguma aresta seja considerada interceptada. Neste caso emprega-se o teste dado por V.2.

Em CRANE (27) é apresentado um tratamento semelhante, as diferenças se dão na forma de manipular as informações. Por exemplo, a localização de uma interseção é armazenada em  $u$

ma matriz ITG. Seja uma cela como na figura V.5, se um contorno passa entre:

$$A \text{ e } B - ITG(i, j) = ITG(i, j) + 2$$

$$B \text{ e } C - ITG(i, j + 1) = ITG(i, j + 1) + 1$$

$$C \text{ e } D - ITG(i + 1, j) = ITG(i + 1, j) + 2$$

$$D \text{ e } A - ITG(i, j) = ITG(i, j) + 1$$

Os testes seguintes permitem localizar estas interseções:

$$A \text{ e } B \quad \text{se } ITG(i, j) \geq 2$$

$$B \text{ e } C \quad \text{se } ITG(i, j + 1) = 1 \text{ ou } 3$$

$$C \text{ e } D \quad \text{se } ITG(i + 1, j) = 2$$

$$D \text{ e } A \quad \text{se } ITG(i, j) = 1 \text{ ou } 3$$

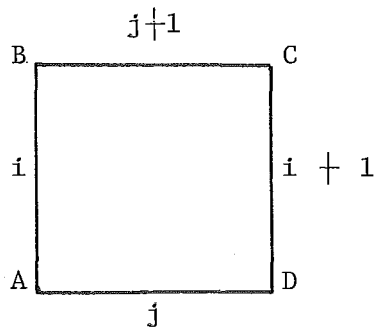


Fig.V.5

Uma variável inteira indica a aresta de entrada em cada cela oeste, ent 1; norte, ent 2; leste, ent 3 e sul, ent 4.

Em caso de degenerações, celas com quatro interseções dão origem a pontos de sela. E nós degenerados são evitados porque para cada valor de contorno uma pesquisa nos nós altera seus valores virtualmente quando há uma coincidência com o valor da curva de nível.

SYNDER (120) insere-se também na mesma linha de a bordagem. A rede em princípio não precisa ser regular mas topologicamente retangular. A busca em termos locais é semelhante à COTTAFAVA e LeMOLI (26), e em termos globais são seguidas espirais de fora para dentro da região, Fig.V.6.

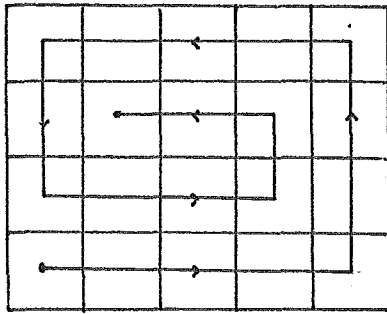


Fig.V.6

Os passos gerais do algoritmo são procurar ao longo de uma espiral por um segmento que tenha as propriedades:

1. os pontos extremos não são excluídos
2. nenhuma marca foi atribuída ao segmento
3. o valor de nível deve estar compreendido entre os valores de  $z$  nos nós

4. uma curva de nível é inteiramente determinada antes de se passar a outra.

Uma abordagem distinta é dada por BHATTACHARYYA e HOLROYD (6). Divide-se uma malha retangular regular em faixas, cada faixa em blocos de celas e ainda cada cela em uma submalha de pontos cujos valores associados são interpolados por uma função spline bi-cúbica. Ver figura V.7.

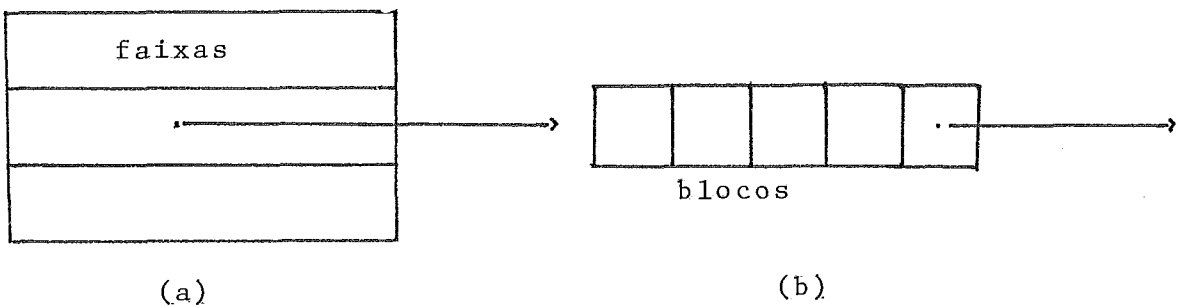


Fig.V.7

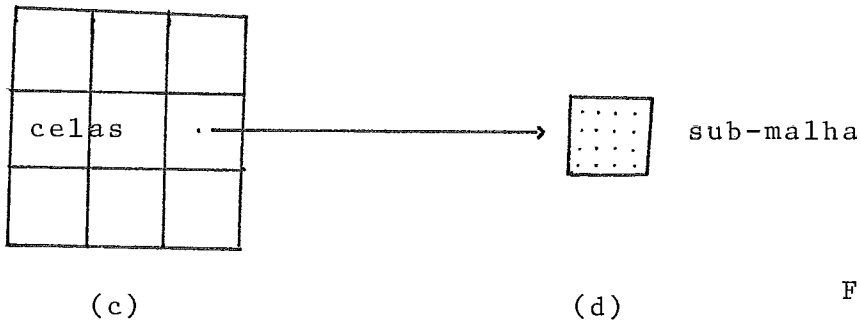


Fig.V.7

Resumidamente os principais passos do algoritmo são

1. Em um bloco procuram-se nós que sejam mínimos ou máximos relativos. Esta busca é feita a partir dos nós adjacentes.

2. Para a localização mais precisa deste ponto quando ele ocorrer no interior de uma cela é utilizada a sub-malha respectiva.

3. Os mínimos ou máximos assim obtidos são em seguida tratados em sua significância para o mapeamento, ou seja, se há linhas de contorno que passem entre estes pontos e as fronteiras do bloco ou as linhas horizontais determinadas pelos outros pontos de mínimo ou máximo.

4. Definem-se os caminhos de busca para as interseções: fronteiras de blocos e linhas horizontais que passem por pontos extremos significativos. Calculam-se sobre estes caminhos utilizando a função "spline" associada à cela, os valores de  $z$  nos pontos dispostos na mesma escala da sub-malha. As interseções entre as curvas de nível e as arestas auxiliares são então determinadas a partir de interpolações lineares. Ver figura V.8

5. Para traçar o contorno ligam-se as diferentes interseções em cada bloco. De modo a evitar que muitos contornos sejam traçados em uma região de gradiente elevado, é feita uma

estimativa da densidade de contornos a partir das diferenças entre os valores dos pontos da sub-malha que circundeiam um contorno a traçar. Fig. V.9. É feita uma média de densidades e o valor do contorno em uma região dada determinará se deverá ser traçado ou não.

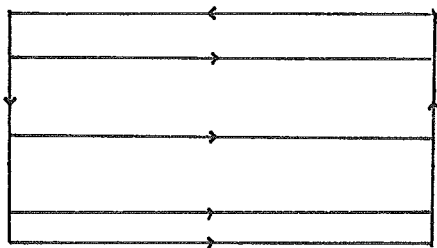


Fig. V.8 bloco com caminhos de busca

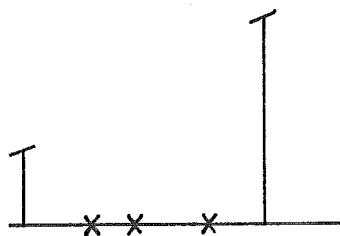


Fig. V.9

### V.3. Modelos de Interpolação

Em muitos procedimentos baseados em redes retangulares distinguem-se duas etapas, na primeira, celas são marcadas e em seguida alguma forma de ligar os pontos é adotada. Vai-se denominar esta segunda fase de interpolação. Vários modelos são disponíveis. Um exemplo elementar é encontrado em VAN TROYS e GROS (123). Para cada três pontos em uma seqüência de um contorno construir a parábola que em cujo ponto do meio a tangente é paralela à corda que une os pontos extremos. Desta forma para cada dois pontos consecutivos passam dois distintos arcos de parábola. Toma-se a média destes dois arcos como a curva final. No entanto não há nenhuma garantia que contornos diferentes não se cruzem no interior de uma mesma cela.

Uma formulação mais sofisticada é apresentada em CONALOGUE (24) e (25). A partir de um conjunto de pontos dados e dos valores das tangentes determina-se uma curva cúbica parametrizada em  $x$  e  $y$ . A curva é tangencialmente contínua e sua velocidade  $(ds/dt = \{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2\}^{1/2})$  satisfaz um crité

rio de proximidade em relação à unidade, ou seja a derivada de:

$$\int_0^T (ds/dt - 1)^2 dt \quad (V.3)$$

em relação a T deve ser zero.

Entretanto é o tratamento por "splines" que parece ser o mais utilizado para o traçado de cartas. O termo "spline" foi introduzido na teoria de interpolação por I.J.Schoenberg em 1946. Nesta seção vai-se apresentar uma formulação particular, a dos "splines" bi-cúbicos em  $R^1$  e  $R^2$ . No capítulo VII, será apresentada uma formulação mais geral do problema de determinação das funções "splines".

#### Def.V.1 Spline Cúbico Natural

Seja uma subdivisão do intervalo  $[a, b]$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ . Uma função  $s: [a, b] \rightarrow R^1$  é dita um spline cúbico natural se

- i)  $s$  é um polinômio de grau 3 ao máximo em cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$   $i=1, \dots, n-1$ .
- ii)  $s$  é um polinômio de grau 1 ao máximo em  $[x_0, x_1]$  e  $[x_n, x_{n+1}]$ .
- iii)  $s, s'$  e  $s''$  são funções contínuas

#### Def.V.2 $L^2(a, b)$ , $H^2(a, b)$ e $S^n(a, b)$

$L^2(a, b)$  é o espaço das funções t.q.  $\int_a^b |f(x)|^2 dx$  existe

$H^2(a, b)$  é o espaço das funções contínuas em  $[a, b]$  t.q. suas derivadas de ordem 1 também são contínuas em  $[a, b]$  e suas derivadas de ordem 2 pertencem a  $L^2(a, b)$ .

$S^n(a, b)$  é o espaço das funções splines associadas



ã subdivisão  $n$ .

A partir destes conceitos formula-se a seguir o problema de interpolação por funções splines.

Seja uma função  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$  conhecida nos pontos  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$  de  $[a, b]$ . Deve-se determinar  $s \in S^n(a, b)$  t.q.  $s(x_i) = z(x_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ . A função  $s_z$  que interpola  $z$  é única e é a solução do seguinte problema:

$$\|s_z''\| = \min_{g \in H^2(a, b)} \|g''\| = \int_a^b |g''(x)|^2 dx \quad (V.4)$$

$g$  interpola  $z$

Se denotarmos  $s(x)$  por  $p_i(x)$  em cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  para  $i=0, \dots, n$ , as condições se escrevem como:

$$\begin{aligned} p_i(x) &\text{ de grau } 3 \text{ para } i=1, \dots, n-1 \\ p_1(x) &\text{ e } p_n(x) \text{ de grau } 1 \\ p_{i-1}(x_i) &= p_i(x_i) \\ p'_{i-1}(x_i) &= p'_i(x_i) \quad i=1, \dots, n \\ p''_{i-1}(x_i) &= p''_i(x_i) \end{aligned} \quad (V.5)$$

A determinação dos coeficientes de  $p_i$  recai na resolução de um sistema linear de equações cuja matriz é tridiagonal, diagonal dominante, simétrica e definida positiva, POTIER e VERCKEN (98).

No caso de uma superfície a função a ser interpolada é definida de  $z : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ . O conjunto de funções splines bi-cúbicas para uma subdivisão  $n$  de  $[a, b]$  e  $m$  de  $[c, d]$  é definido pelas funções  $t \in S^n[a, b] \times S^m[c, d]$  t.q.  $t(x, y) = r(x)s(y)$  onde  $r \in S^n[a, b]$  e  $s \in S^m[c, d]$ . De forma análoga ao caso unidimensional a função  $t$  que interpola  $z$  satisfaz:

$$\|t_z''\| = \min \|g''\| = \int_a^b \int_c^d \{ \partial^4 g / \partial^2 x \partial^2 y \}^2 dx dy \quad (V.6)$$

$g$  interpola  $z$

$g$  tem as derivadas parciais ,contínuas

O esquema para determinação do valor interpolado em uma cela retangular é dado a seguir ,figura V.10,mais de talhes podem ser encontrados em POTIER e VERCKEN (98).

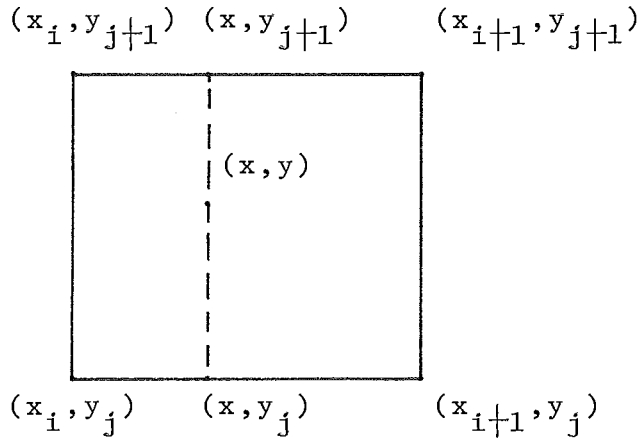


Fig.V.10

I) determinação de  $s(x, y_{j+1})$  e  $\partial s(x, y_{j+1})/\partial y$  e  $s(x, y_j)$  e  $\partial s(x, y_j)/\partial y$

II) determinação de  $s(x, y)$  a partir de I)

No capítulo VII será apresentada uma formulação mais geral do problema de funções splines e sua relação com o dual do sistema de krigeagem. Será então feita uma análise do problema precisão versus estética do desenho.

## VI. A Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas

### VI.1 Introdução

Vai-se assumir que cada fenômeno natural pode ser representado por uma variável regionalizada  $z$ , MATHERON (67) Este termo denota uma função com propriedades bastante complexas. Sua variação depende da geometria de seu domínio, tem um comportamento aproximadamente contínuo, em geral é anisotrópica e apresenta ainda outras características relacionadas com os problemas encontrados na avaliação de recursos naturais. Esta variável  $z$  vai ser assumida como a realização de uma função aleatória  $Z$ . É a partir deste formalismo que serão apresentados os principais resultados e conceitos da Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas e sua aplicação no problema de estimação. Aconselha-se a leitura do Apêndice I e da referência LOÈVE (66) relativo à Teoria da Medida e Probabilidade e da referência YAGLON (124) como uma introdução à Teoria das Funções Aleatórias. Parte do material deste capítulo foi apresentado em BRAGA (11) e BRAGA e MACULAN (12). Algumas referências básicas para este capítulo são MATHERON (75), uma exposição rigorosa desta teoria; JOURNEL e HUIJBREGTS (58) e DAVID (33), referências clássicas em Geostatística que apresentam em linguagem matemática menos sofisticada os principais conceitos e técnicas derivadas da teoria das FAI, assim como estudos de caso. Ressalta-se ainda o texto clássico de MATHERON (68).

### VI.2 As Funções Aleatórias de Ordem 2

#### def. VI.1 Função Aleatória de Ordem 2

Seja  $E = \mathbb{R}^n$  e  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  o espaço de Hilbert das V.A.

$$Z : E \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad (\text{VI.1})$$

é uma função aleatória de ordem 2. Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Z(x)$  é uma classe de V.A. com valores reais ou complexos.

def.VI.2 Covariância Não-Centrada

$$C(x, y) = E\{Z(x)Z(y)\} = \langle Z(x), Z(y) \rangle \quad (\text{VI.2})$$

def.VI.3 Esperança de Z

$$m(x) = E\{Z(x)\} = \langle Z(x), 1 \rangle \quad (\text{VI.3})$$

def.VI.4 Covariância Centrada

$$C''(x, y) = \langle Z(x) - m(x), Z(y) - m(y) \rangle \quad (\text{VI.4})$$

def.VI.5 Continuidade em Média Quadrática

Z é fortemente contínua em E (ou contínua em média quadrática) se e somente se

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow Z(x_n) \rightarrow Z(x) \text{ fortemente em } L^2 \quad (\text{VI.5})$$

teo.VI.1 As Propriedades seguintes são equivalentes:

a) A F.A. de ordem 2, Z, é contínua em média quadrática (VI.6)

b) A Covariância C é contínua em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (VI.7)

c) A Covariância C é contínua sobre a diagonal de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (VI.8)

dem.

a)  $\Rightarrow$  b) , Sejam  $x_n$  e  $y_n$  duas sequências em E, convergentes aos pontos x e y. Precisa-se mostrar que  $C(x_n, y_n)$

$\rightarrow C(x,y)$ . Como  $Z$  é contínua  $Z(x_n) \rightarrow Z(x)$  e  $Z(y_n) \rightarrow Z(y)$  e como  $L^2$  é um espaço de Hilbert,  $\langle Z(x_n), Z(y_n) \rangle$  converge a  $\langle Z(x), Z(y) \rangle$

b)  $\Rightarrow$  c) é evidente

c)  $\Rightarrow$  a) , Seja  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , é preciso mostrar que  $\|Z(x_n) - Z(x)\| \rightarrow 0$ . Escreva-se  $\|Z(x_n) - Z(x)\|^2 = \langle Z(x_n) - Z(x), Z(x_n) - Z(x) \rangle = \langle Z(x_n), Z(x_n) \rangle - \langle Z(x_n), Z(x) \rangle - \langle Z(x), Z(x_n) \rangle + \langle Z(x), Z(x) \rangle = C(x_n, x_n) - C(x, x)$ , usando a continuidade na diagonal tem-se a).

teo.VI.2 Se  $C$  é uma covariância então para todo conjunto de  $K$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_k$  e  $K$  escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , onde  $K$  é um inteiro positivo tem-se que  $\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j C(x_i, x_j) \geq 0$ .

dem.

Considere a soma de V.A.'s  $\sum \lambda_i Z(x_i)$  tome-se a variancia desta soma  $E\{|\sum \lambda_i Z(x_i)|^2\} = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle Z(x_i), Z(x_j) \rangle$  que por definição do produto interno é positiva. Aplicando ainda uma vez a def.VI.2 tem-se o resultado.

Pode-se mostrar ainda que se existe uma função  $C$  que satisfaça a condição acima, então existe um F.A. com distribuição de Gauss que admite  $C$  como covariância.

def.VI.6 O Espaço  $H(\Lambda)$  de combinações lineares finitas e o espaço  $H$

$\Lambda$  denota o conjunto de medidas sobre  $E$  com suporte finito i.e. medidas da forma

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_{x_i} \quad (\text{VI.9})$$

$\delta_{x_i}$  denota a medida de Dirac no ponto  $x_i$  e designemos por  $Z(\lambda)$  a integral:

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx) Z(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(x_i) \quad (\text{VI.10})$$

Esta integral sempre tem sentido porque é uma combinação linear finita de elementos de  $L^2$ . Considere agora a transformação  $Z: \Lambda \rightarrow L^2$  e  $H(\Lambda)$  o espaço imagem de  $\Lambda$  em  $L^2$ . Vai-se denotar por  $H = \overline{H(\Lambda)}$  a aderência de  $H(\Lambda)$ .  $H$  é um subespaço fechado de  $L^2$  e portanto um espaço de Hilbert.  $H$  contém todas as combinações lineares finitas de  $Z(x)$  e também os limites em média quadrática destas combinações. Por construção  $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^n\}$  é uma parte total em  $H$  (envelope convexo denso).

def.VI.7 O Produto Escalar entre elementos de  $H(\Lambda)$

$$\langle Z(\lambda), Z(\lambda') \rangle = \iint \lambda(dx) C(x, y) \overline{\lambda'}(dy), \quad \lambda, \lambda' \in \Lambda \quad (\text{VI.11})$$

$$\begin{aligned} \langle Z(\lambda), Z(\lambda') \rangle &= \langle \sum_i \lambda_i Z(x_i), \sum_j \lambda'_j Z(y_j) \rangle = \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda'_j} C(x_i, x_j) = \\ &= \iint \lambda(dx) C(x, y) \overline{\lambda'}(dy) \end{aligned}$$

$$\langle Z(\lambda), X \rangle = \int \lambda(dx) \langle Z(x), X \rangle \quad (\text{VI.12})$$

$$\begin{aligned} \langle Z(\lambda), X \rangle &= \langle \sum_i \lambda_i Z(x_i), X \rangle = \sum_i \lambda_i \langle Z(x_i), X \rangle \\ &= \int \lambda(dx) \langle Z(x), X \rangle \end{aligned}$$

O objetivo seguinte será o de generalizar estas fórmulas no caso de medidas com suporte não finito.

def.VI.8 A Integral Estocástica

Seja  $\mu$  uma medida de Radon i.e. formas lineares contínuas sobre o espaço das funções contínuas com suporte com

compacto. Quer-se definir a integral:

$$\int \mu(dx) Z(x) \quad (\text{VI.13})$$

Supõe-se que  $Z$  é uma função aleatória contínua em média quadrática e que a covariância é contínua em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Vai-se caracterizar fracamente esta integral. Se a medida  $\mu$  é tal que a integral  $\int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle$  existe, então a aplicação:

$X \rightarrow \int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle$ ,  $X \in L^2$ , é uma forma linear contínua definida em  $L^2$ . O teorema de Riesz garante então a existência de um elemento  $Z(\mu)$  tal que  $\langle Z(\mu), X \rangle = \int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle$ .  $Z(\mu)$  é a integral estocástica para a medida  $\mu$ .

$$\int \mu(dx) Z(x) = Z(\mu) \quad (\text{VI.14})$$

No entanto para garantir a existência da integral:

$$\int \mu(dx) \langle Z(x), X \rangle \text{ é preciso que } \mu \text{ seja tal que}$$

$$\int |\mu|(dx) \|Z(x)\|^2 < \infty \quad (\text{VI.15})$$

def.VI.9 O Espaço  $M_c$  de medidas com suporte compacto

Denota-se  $M_c$  como o espaço de medidas de Radon com suporte compacto.

Enuncia-se a seguir sem demonstração a caracterização forte da integral estocástica, ver MATHERON (75).

teo.VI.3 Para toda medida  $\mu \in M_c$ , existe uma sequência  $\lambda_n$  de medidas com suporte finito que converge a  $\mu$  e a sequência:

$$\int \lambda_n(dx) Z(x) \rightarrow Z(\mu) = \int \mu(dx) Z(x) \quad (\text{VI.16})$$

fort.

cor.VI.3.1 Sejam  $\mu$  e  $\mu'$  medidas de suporte compacto, então:

$$\|Z(\mu)\|^2 = \iint \mu(dx) C(x, y) \bar{\mu}(dy) \quad (\text{VI.17})$$

$$\langle Z(\mu), Z(\mu') \rangle = \iint \mu(dx) C(x, y) \bar{\mu}'(dy) \quad (\text{VI.18})$$

$$E\{\int \mu(dx) Z(x)\} = \int \mu(dx) E\{Z(x)\} \quad (\text{VI.19})$$

def.VI.10 As Funções Aleatórias de Ordem 2 (FAST)

Uma função aleatória de ordem 2,  $Z(x)$ , é estacionária se  $E\{Z(x)\}$  é uma constante  $m$  e se  $E\{Z(x)Z(y)\} = C(x-y)$  para uma função  $C(h)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  chamada covariância estacionária.

$$C(0) = E\{|Z(x)|^2\} \geq 0$$

$$C(h) = \overline{C(-h)} \quad (\text{VI.20})$$

$$|C(h)| \leq C(0)$$

Quando  $Z(x)$  é contínua em média quadrática,  $C(h)$  é contínua, a integral estocástica  $\int \mu(dx) Z(x)$  existe para toda medida limitada ( $\int |\mu|(dx) < \infty$ ). As relações (VI.18) e (VI.19) neste caso tornam-se:

$$\langle Z(\mu), Z(\mu') \rangle = \iint \mu(dx) C(x-y) \bar{\mu}'(dy) \quad (\text{VI.21})$$

$$E\{\int Z(x) \mu(dx)\} = m \int \mu(dx) \quad (\text{VI.22})$$

def.VI.11 Regularização de uma F.A.

Introduz-se a F.A.  $Y$  :

$$Y(x) = \int \mu(dy) Z(y + x) \quad (\text{VI.23})$$

def.VI.12 O Grupo Contínuo  $U_h$  de Operadores Unitários

Sejam  $Z$  uma FAST,  $C(h)$  uma covariância estacionária e  $H$  como na definição VI.6, o objetivo é definir um operador sobre  $H$ . Seja  $h \in \mathbb{R}^n$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , defina-se:

$$U_h Z(x) = Z(x + h) \quad (\text{VI.24})$$

$U_h$  é bijetivo, o conjunto  $U_h$  é um grupo comutativo. Estende-se  $U_h$  sobre o espaço  $H(\Lambda)$  das combinações lineares finitas defi



nindo-se :

$$\begin{aligned} U_h(Z(\lambda)) &= U_h \int \lambda(dx) Z(x) = \\ &= \int \lambda(dx) Z(x+h) \quad , \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (\text{VI.25})$$

$U_h$  é um operador linear,  $U_h$  é um operador unitário:

$$\begin{aligned} \langle U_h Z(\lambda), U_h Z(\lambda') \rangle &= \int \lambda(dx) C(x-y) \bar{\lambda}'(dy) \\ &= \langle Z(\lambda), Z(\lambda') \rangle \end{aligned} \quad (\text{VI.26})$$

$U_h$  estende-se a  $H = \overline{H(\lambda)}$  definindo-se para todo  $Y \in H(Z)$  ,  $U_h Y = \lim U_h Z(\lambda_n)$  , para uma sequência  $\lambda_n$  t.q.  $Z(\lambda_n) \rightarrow Y$ . A toda FAST  $Z(x)$  está associado o operador  $U_x$ .

#### def.VI.13 Elementos Invariantes

Sejam  $H$  e  $U_h$  grupo de operadores,  $X \in H$  é invariante ' para o grupo  $U_h$  se  $U_h X = X$  para todo  $h \in \mathbb{R}^n$  (VI.27)  
Denote-se  $H_0$  o subconjunto de invariantes de  $H$  e  $E_0$  o proje tor do espaço  $H_0$  i.e.  $E_0(H) = H_0$ .

#### teo.VI.4 O Teorema de Bochner

Uma função definida em  $\mathbb{R}^n$  é contínua e positiva ' definida s.s.s. esta função é a transformada de Fourier de uma medida positiva aditiva

dem.

< = > Seja  $F(dx)$  uma medida positiva tal que  $\int F(dx) < \infty$  e  $\phi(u) = \int e^{-2i\pi\langle ux \rangle} F(dx)$  sua Transformada de Fourier. Sejam  $u_j$  ,  $j=1,2, \dots, N$  pontos de  $\mathbb{R}^n$  e  $\lambda_j$  ,  $j=1, 2, \dots, N$  numeros complexos.

$$\sum_{j,\ell} \lambda_j \bar{\lambda}_\ell \phi(u_j - u_\ell) = \sum_{j,\ell} \lambda_j \bar{\lambda}_\ell \int e^{-2i\pi\langle x(u_j - u_\ell) \rangle} F(dx) =$$

$$\int \sum_{j,\ell} \lambda_j \bar{\lambda}_\ell e^{-2i\pi\langle x(u_j - u_\ell) \rangle} F(dx) =$$

$$= \int \left| \sum_j \lambda_j e^{-2i(xu_j)} \right|^2 F(dx) \geq 0$$

logo  $\phi$  é de tipo positivo.

= > ) Seja uma função contínua positiva definida em  $R^n$ . Existe uma FAST  $Z(x)$  que admite a covariância esta cionária  $\phi(x)$  e existe a integral estocástica  $\int \rho(x) Z(x) dx$  para toda função  $\rho$  mensurável. Tem-se que  $E(|Z(x)|^2) \geq 0$ , i.e.

$$\iint \rho(x)\phi(x-y)\rho(y) dx dy \geq 0 \quad (\text{VI.28})$$

Em particular para

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2b^2} + 2i\pi(ux)} \quad (\text{VI.29})$$

Substituindo  $\rho(x)$  em (VI.28)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \iint e^{-\frac{x^2+y^2}{2b^2} + 2i\pi u(x-y)} \phi(x-y) dx dy = \\ & \frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \int e^{2i\pi uh} \phi(h) dh \int e^{-\frac{(x+h)^2+y^2}{2b^2}} dy \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.30})$$

A segunda integral de (VI.30) é a convolução de duas funções de densidade gaussianas :

$$\frac{1}{(2\pi b^2)^{n/2}} \int e^{-\frac{(x+h)^2+y^2}{2b^2}} dy = \frac{1}{(4\pi b^2)^{n/2}} e^{-\frac{h^2}{4b^2}}$$

Denotando  $1/4 \cdot b^2$  por  $a$ , vê-se que para  $a > 0$  a Transformada de Fourier  $f_a(u)$  da função  $e^{-ah^2} \phi(h)$  é uma função positiva:

$$f_a(u) = \int e^{2i\pi uh} e^{-ah^2} \phi(h) dh \geq 0 \quad (\text{VI.31})$$

Enunciamos sem demonstração que (VI.31) pode ser invertida:

$$e^{-ah^2} \phi(h) = \int e^{-2i\pi uh} f_a(u) du \quad (\text{VI.32})$$

Fazendo  $a \rightarrow 0$  tem-se que a seqüência de Transformadas de Fourier tende a  $\phi(h)$  pontualmente, isto implica que  $\phi(h)$  é a transformada do limite de  $f_a(u) du$ , denote-se por  $F(du)$  este limite, ou seja:

$$\phi(h) = \int e^{-2i\pi uh} F(du) \quad (\text{VI.33})$$

Em seguida enunciaremos o teorema ergódico. Este teorema permite identificar os elementos invariantes para  $X$  pertencente a  $H$ . Em outras palavras o teorema Ergódico permite identificar a média de  $X$ , já que o projetor  $E_0$  se identifica com a esperança matemática quando os elementos invariantes são constantes.

#### teo.VI.5 O Teorema Ergódico

Seja  $\mu_t$ ,  $t > 0$  uma família de medidas positivas t.q.  $\int \mu_t(dx) = 1$  e  $\tilde{\mu}_t$  as transformadas de Fourier destas medidas. Se para todo  $u \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_t(u) = 0$  então  $\int \mu_t(dx) U_X$  converge fortemente a  $E_0 X$  para  $t \rightarrow \infty$ .

### VI.3 As Funções Aleatórias Intrínsecas

## def.VI.14 Função Aleatória Intrínseca

Seja  $Z$  uma F.A., considere para cada  $h \in \mathbb{R}^n$  a F.A.  $x \rightarrow Z(x+h) - Z(x)$  que também pode ser representada por  $x \rightarrow U_x Y(h) = U_x \{Z(h) - Z(0)\}$ .  $Z$  é uma FAI s.s.s.

$$E\{Z(x)\} = m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{VI.34})$$

$$\gamma(h) = 1/2 E\{U_x Y(h)\}^2 = 1/2 E\{Z(x+h) - Z(x)\}^2 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{VI.35})$$

A condição (VI.35) expressa que a variância dos incrementos depende da distância relativa entre os pontos e não da sua posição. A função é chamada de semi-variograma.

## teo.VI.6 Relação entre FAI e FAST

Se  $Z$  é uma FAST então  $Z$  é também uma FAI e existe a seguinte relação entre a covariância e o semi-variograma :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (\text{VI.36})$$

dem.

Evidentemente  $Z$  satisfaz (VI.34), vai-se mostrar que  $Z$  admite o semi-variograma  $C(0) - C(h)$ .

$$1/2 E\{Z(x+h) - Z(x)\}^2 = 1/2 E\{Z(x+h)\}^2 + 1/2 E\{Z(x)\}^2 - E\{Z(x+h)Z(x)\}.$$

Como  $Z$  é uma FAST os dois primeiros termos do segundo membro da igualdade precedente são iguais a  $C(0)$ . Por sua vez o terceiro termo é igual a  $C(h)$ . Logo o semi-variograma de  $Z$  pode ser representado por  $C(0) - C(h)$ .

Uma definição equivalente à def.VI.14 estabelece que  $Z$  é uma FAI s.s.s.  $Y(x+h) = Z(x+h) - Z(x)$  é uma FAST para todo  $h \in \mathbb{R}^n$

## def.VI.15 Função Condicionalmente Positiva Definida

Seja  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  o espaço das medidas  $\lambda$  com suporte finito que verificam a condição  $\int \lambda(dx) = 0$ . Uma função é condicionalmente positiva definida sss

$$\iint \lambda(dx) g(x-y) \lambda(dy) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_0 \quad (\text{VI.37})$$

## teo.VI.7 Caracterização do Semi-Variograma

Uma função  $\gamma$  definida em  $\mathbb{R}^n$  é um semi-variograma'   
 $\langle = \rangle$   $-\gamma$  é condicionalmente positiva definida e  $\gamma(0) = 0$    
 dem.

$\langle = \rangle$  )

Seja  $Z(x)$  uma FAI e  $\gamma$  o seu semi-variograma, defina-se  $Y(x) = Z(x) - Z(0)$ ,  $Y$  é uma FAST e sua covariância é   
 $\langle Y(x), Y(y) \rangle = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)$ . A partir da def.VI.7 :   
 $E\{Y(\lambda)\}^2 = \langle Y(\lambda), Y(\lambda) \rangle =$

$$= \iint \lambda(dx) \{ \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y) \} \lambda(dy)$$

Mas, para  $\lambda \in \Lambda_0$  esta integral se reduz a :   
 $= - \iint \lambda(dx) \gamma(x-y) \lambda(dy)$ , que é positiva porque   
 $E\{Y(\lambda)\}^2 \geq 0$ , logo  $-\gamma$  é condicionalmente positiva definida

$\langle = \rangle$  )

Seja  $-\gamma$  condicionalmente positiva definida e  $\gamma(0) = 0$ .  $\gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)$  é positiva definida para  $\lambda \in \Lambda$  logo esta expressão é uma covariância para alguma F.A.  $Y$ . Mas  $Y(x + h)$  é uma FAST para  $h \in \mathbb{R}^n$ , logo  $\gamma$  é um semi-variograma

Desde que  $\lambda \in \Lambda_0$  pode-se trabalhar sobre uma FAI como se tratasse de uma FAST com covariância  $-\gamma(h)$ .

São válidas para  $\lambda \in \Lambda_0$  as seguintes relações :

$$Z(\lambda) = Y(\lambda) \quad (\text{VI.38})$$

$$E\{Z(\lambda)\}^2 = - \iint \lambda(dx) \gamma(x-y) \lambda(dy) \quad (\text{VI.39})$$

$$\langle Z(\lambda), Z(\lambda') \rangle = - \iint \lambda(dx) \gamma(x-y) \lambda'(dy) \quad (\text{VI.40})$$

teo.VI.8 Uma FAI  $Z$  é contínua em média quadrática (ou fortemente convergente) sss seu semivariograma é contínuo em  $h=0$  e portanto contínuo em todo  $h \in \mathbb{R}^n$

O conceito de semi-variograma permite tratar processos estocásticos com dispersão infinita i.e.  $\text{Var } Z(x) = \infty$ . As relações (VI.39) e (VI.40) serão generalizadas quando estudarmos a Teoria das Funções Intrínsecas de Ordem  $K$ .

Enunciamos ainda sem demonstrar o resultado :

teo.VI.9 Seja  $Z$  uma FAI e  $\gamma$  o seu semi-variograma então

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \gamma(h) / |h|^2 = 0 \quad \text{quando} \quad |h| \rightarrow \infty$$

O estudo e a determinação do semi-variograma associado a uma determinada FAI é chamado de Análise Estrutural, discutiremos a seguir alguns aspectos deste procedimento.

#### VI.4 Análise Estrutural

teo.VI.10 Um estimador não tendencioso para o semi-variograma

é dado por  $\gamma^*(h) = 1/2N(h) \sum_{i=1}^{N(h)} \{ Z(x_i + h) - Z(x_i) \}^2$ , onde  $N(h)$  denota o número de pares  $Z(x_i + h), Z(x_i)$ .

dem.

Evidente, a partir da definição de  $\gamma$

O teo.VI.10 permite determinar o chamado variograma experimental. Em geral não dispomos das leis de distribuição das variáveis aleatórias  $Z(x_i + h)$  e  $Z(x_i)$  mas dos valores assumidos em uma regionalização determinada. São estes valores que serão utilizados para a determinação do variograma experimental. A partir do variograma experimental pode-se escolher um modelo apropriado de variograma, o variograma teórico, para em seguida ajustar os parâmetros deste modelo e determinar finalmente o semi-variograma associado a FAI Z, da qual se dispõe de uma regionalização particular.

Da-se a seguir alguns modelos de semi-variograma :

a) Modelo Esférico

$$\gamma(h) = 3/2 |h| / a - 1/2 |h|^3 / a^3, |h| \in ]0, a)$$

$$\gamma(h) = 1, |h| \geq a$$

b) Modelo Exponencial

$$\gamma(h) = 1 - \exp(- |h| / a)$$

c) Modelo Gaussiano

$$\gamma(h) = 1 - \exp(- |h|^2 / a^2)$$

d) Modelo Linear

$$\gamma(h) = w|h|$$

e) Modelo DeWijs

$$\gamma(h) = 3 \cdot a \log|h|$$

Ocasionalmente devido ao comportamento caótico de Z podem se observar descontinuidades na função  $\gamma(h)$ . Neste caso o semi-variograma é modelado por uma função descontínua que é denominada de efeito de pepita. Evidentemente este modelo não corresponde mais a uma função Z contínua.

f) Efeito de Pepita

$$\gamma(h) = C_0, \quad h > 0$$

$$\gamma(0) = 0$$

Usualmente os fenômenos naturais não são isotrópicos, vai-se considerar duas classes de modelos anisotrópicos:

Anisotropia Geométrica, é representada por um modelo que reduz o fenômeno a um fenômeno isotrópico por meio de uma transformação de coordenadas.

g) Anisotropia Geométrica

$$\gamma(h) = \gamma'(|h'|)$$

$$h' = Ah$$

Anisotropia Zonal, quando não é possível representar a anisotropia por um modelo geométrico, faz-se uma combinação de modelos isotrópicos e geométricos.

Para maiores considerações sobre análise estrutural recomenda-se a leitura das referências citadas no início do capítulo, assim como de OLEA (92) e (93), ARMSTRONG (5), CRESSIE (28) e (29), DOWD (44), JOURNAL (59) e OMRE (94).



### VI.5 Estimação e Krigeagem

O termo krigeagem denota o procedimento de escolha entre uma dada classe de estimadores, qual aquela que corresponde ao valor mínimo da variancia de estimação. O problema de estimação a ser considerado consiste na determinação de um estimador  $Z^*$  para a variável aleatória  $Z(x_0)$ , trata-se portanto de um problema de estimação pontual. Entretanto em mineração encontra-se também o problema de estimar o valor médio de  $Z(x)$  em um domínio  $V_{x_0}$ , centrado em  $x_0$ , representado por :

$$1/V_{x_0} \int_{V_{x_0}} Z(x) dx \quad (\text{VI.41})$$

Para a cartografia vai-se concentrar no problema de estimação pontual. Neste caso dispõe-se dos valores de  $n$  V.A.  $Z(x_i)$ ,  $i=1 \dots n$  em uma dada regionalização e deseja-se estimar o valor da V.A.  $Z(x_0)$  para esta regionalização. Vai-se restringir à família de estimadores lineares, para o caso não-linear recomenda-se a leitura de JOURNAL (57).

Suponha  $Z(x)$  uma FAI, o estimador  $Z^*$  é da forma

$$Z^* = \sum \lambda_\alpha Z_\alpha = \lambda^\alpha Z_\alpha \quad (\text{VI.42})$$

a partir das condições de não-tendenciosidade:

$$E\{Z^*\} = m \quad (\text{VI.43})$$

e de variancia mínima

$$\min E\{Z(x_0) - Z^*\}^2 \quad (\text{VI.44})$$

de (VI.43) resulta que  $\lambda^\alpha = \sum \lambda_\alpha = 1$  (VI.45)

e da aplicação de (VI.39) a (VI.44)

$$E\{Z(x_0) - \lambda^\alpha Z_\alpha\}^2 = 2\lambda^\alpha \gamma(x_0, x_\alpha) - \gamma(x_0, x_0) - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma(x_\alpha, x_\beta) \quad (\text{VI.46})$$

Denotando-se  $\sigma_E^2$  como a variancia de estimação formula-se o problema de otimização:

$$\min \sigma_E^2$$

s.a.

$$\lambda^\alpha = 1$$

Aplicando-se o teorema de Multiplicadores de Lagrange obtem-se o sistema em  $n + 1$  incógnitas e  $n + 1$  equações.

$$\begin{aligned} \lambda^\beta \gamma(x_\alpha, x_\beta) + \mu &= \gamma(x_\alpha, x_0) \quad , \quad \alpha = 1, \dots, n \\ \lambda^\beta &= 1 \end{aligned} \quad (\text{VI.47})$$

Uma vez resolvido o sistema a variancia de estimação vale :

$$\sigma_E^2 = \lambda^\alpha \gamma(x_\alpha, x_0) + \mu - \gamma(x_0, x_0) \quad (\text{VI.48})$$

O sistema de Krigeagem tem uma solução única sss a matriz do sistema é positiva definida. Para isto é suficiente que o modelo de variograma seja condicionalmente positivo definido. Neste caso a combinação a considerar é  $Z(x_0) - \lambda_\alpha Z_\alpha$  os coeficientes 1 e  $\lambda_\alpha$  satisfazem (VI.37).

A Krigeagem além de um estimador não tendencioso provê também um interpolador exato i.e. se  $x_0$  coincidir com um dos pontos  $x_\alpha$  , o valor de  $Z^*$  é igual a  $Z(x_\alpha)$ .

#### def.VI.16 A Deriva de $Z(x)$

Em muitos casos  $Z(x)$  satisfaz a condição (VI.35) mas não a condição (VI.36) i.e.  $Z(x)$  nao é estacionária de primeira ordem. Neste caso definir-se-á a deriva de  $Z(x)$  como  $E\{Z(x)\} = m(x)$  ,  $m(x)$  sera representada por uma função ana

lítica da forma  $\sum a_{\ell} f_{\ell}(x)$ , onde os coeficientes  $a_{\ell}$  dependem da região considerada.

Outra formulação é a Krigeagem Universal este sistema se aplica quando a deriva não é estacionária. Neste caso vai-se determinar o variograma associado ao termo:

$$Y(x) = Z(x) - m(x) \quad (\text{VI.49})$$

chamado de resíduo. Este variograma será então utilizado para estimar  $Z(x_0)$ . A condição de não tendenciosidade e a variancia' de estimação no caso de Krigeagem Universal são:

$$\lambda^{\alpha} f_{\ell}(x_{\alpha}) = f_{\ell}(x_0) \quad , \quad \ell = 1, \dots, k \quad (\text{VI.50})$$

$$\sigma_E^2 = 2\lambda^{\alpha} \gamma(x_0, x_{\alpha}) - \gamma(x_0, x_0) - \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma(x_{\alpha}, x_{\beta}) \quad (\text{VI.51})$$

Aplicando o teorema de Lagrange, obtem-se :

$$\begin{aligned} \lambda^{\beta} \gamma(x_{\alpha}, x_{\beta}) + \mu^{\ell} f^{\ell}(x_{\alpha}) &= \gamma(x_{\alpha}, x_0) \quad , \alpha=1, \dots, n \\ \lambda^{\beta} f_{\ell}(x_{\beta}) &= f_{\ell}(x_0) \quad , \ell=1, \dots, k \end{aligned} \quad (\text{VI.52})$$

A variancia de estimação é:

$$\sigma_E^2 = \lambda^{\alpha} \gamma(x, x_0) + \mu^{\ell} f^{\ell}(x_0) - \gamma(x_0, x_0) \quad (\text{VI.53})$$

A aplicação do sistema (VI.52) depende do conhecimento do semi-variograma e dos termos da deriva. Mas em geral não se conhece estas expressões e estatisticamente é impossível determiná-los a partir de uma única realização de  $Z(x)$ . O que se faz na prática é tentar vários modelos de semi-variograma e deriva até que um certo nível de ajuste seja atingido. Esquemáticamente tem-se as etapas:

- 1) Escolher um modelo de variograma
- 2) Escolher um modelo de deriva
- 3) Determinar os coeficientes da deriva
- 4) Calcular o resíduo estimado
- 5) Calcular o variograma estimado. Se há uma coincidência entre o variograma estimado e o teórico passar para a solução do sistema de Krigeagem, senão recomeçar em 1).

Outro caso de Krigeagem é a Krigeagem Simples, neste caso a deriva estacionária ou não, é conhecida. O estimador  $Z^*$  é da forma  $Z^* = \lambda_0 + \lambda^\alpha Z_\alpha$ , a dedução do sistema e da variância segue os mesmos moldes que nos casos anteriores.

Evidentemente os sistemas de krigeagem podem ser expressos em termos da covariância. Sem nenhuma perda de generalidade as demonstrações são feitas com a função de covariância e depois através da relação (VI.36) obtém-se a versão com o semi-variograma.

Pode-se interpretar o problema de estimação como um problema de projeção. Seja CE o conjunto de combinações lineares finitas das V.A.  $Z(x)$ ,  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \notin D$ . A estimação de  $Z(x_0)$  corresponde à determinação da projeção de  $Z(x_0)$  sobre CE, pois esta projeção  $Z^*$  vai minimizar  $\| Z(x_0) - Z^* \|^2$  que representa a variância de estimação. Os diferentes sistemas de Krigeagem serão obtidos a partir dos conjuntos CE.

Procurando generalizar a teoria das FAI tendo em vista uma melhor automatização dos métodos de determinação do variograma, Matheron desenvolveu a teoria das Funções Aleatórias de ordem K, FAI-k, que será o assunto do próximo capítulo.

## VII. A Teoria das Funções Aleatórias Intrínsecas de Ordem K

### VII.1 Introdução

No capítulo precedente foi visto que o conceito de semivariograma permite o estudo de fenômenos, sem as limitações impostas pela covariância, como no caso de processos com dispersão infinita. A classe de semivariogramas é também mais vasta que a classe de covariâncias já que a sua condição de positiva definida restringe-se as combinações lineares finitas  $\lambda^\alpha Z_\alpha$  t.q.  $\lambda^\alpha = 0$ . Entretanto no caso de uma deriva complexa a determinação da deriva e do variograma dos resíduos pode se tornar um processo de resultados insatisfatórios. Mesmo a dicotomia  $Z(x) = Y(x) \perp m(x)$  que é facilmente identificável em uma situação como a da figura VII.1, pode perder sentido em uma situação mais complexa, figura VII.2.

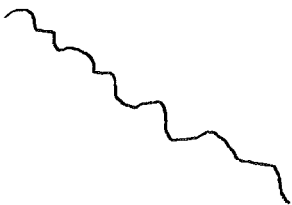


Fig.VII.1



Fig.VII.2

Para tratar os casos com deriva complexa propõe-se definir uma função -a covariância generalizada-, que será positiva definida para uma restrição de combinações lineares. Neste capítulo vai-se apresentar os elementos necessários à definição da covariância generalizada, c.g., o sistema de krigeagem, os modelos de C.G., a relação entre krigeagem e interpolação e

o modelo de C.G. com termos splines.

As referências básicas para este capítulo são : MATHERON (76) e (81), MATHERON e DELFINER (80) e DUBRULE (45) . Parte deste capítulo é apresentada em BRAGA e MACULAN (13). Também são úteis o capítulo III e os apêndices de MATHERON (68).

## VII.2 Funções Aleatórias Intrínsecas Generalizadas

Vai-se recordar alguns conceitos do capítulo anterior e progressivamente serão introduzidos os novos elementos relativos a esta teoria.

def.VII.1 Função Aleatória de Ordem 2

$$Z: \mathbb{R}^n \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad (\text{VII.1})$$

Z admite uma extensão a  $\Lambda$  o espaço de medidas em  $\mathbb{R}^n$  com suporte finito.

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx) Z(x) \quad , \quad \lambda \in \Lambda \quad (\text{VII.2})$$

Se  $\tilde{\Lambda}$  denota o completamento de  $\Lambda$  pode-se mostrar que existe uma identificação entre  $\tilde{\Lambda}$  e  $H = \{ Z(x), x \in \mathbb{R}^n \}$

Seja agora  $M_c$  o espaço de medidas com suporte compacto, se Z é contínua em  $\Lambda$ , Z admite uma única extensão em  $M_c$  denotada por

$$Z(\lambda) = \int \mu(dx) Z(x) \quad , \quad \lambda \in M_c \quad (\text{VII.3})$$

def.VII.2 Translação de uma Medida

Seja  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in M_c$  a translação da medida  $\mu$ , denotada por  $\tau_h \mu$  é definida por

$$\int \tau_h \mu(dx) f(x) = \int \mu(dx) f(x+h), f \text{ uma função contínua} \quad (\text{VII.4})$$

def.VII.3 FAST

Se Z é uma FAST então existe grupo de operadores  $u$

nitários  $U_h$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ , definidos em  $H = Z(\tilde{\Lambda})$  que satisfazem

$$U_h Z(\lambda) = Z(\tau_h \lambda) \quad , \quad \lambda \in \tilde{\Lambda} \quad (\text{VII.5})$$

Se  $Z$  é contínuo,  $U_h$  é contínuo e (VII.5) pode ser extendido a  $M_c$

$$U_h Z(\mu) = Z(\tau_h \mu) \quad , \quad \mu \in M_c \quad (\text{VII.6})$$

def.VII.4 Função Aleatória Generalizada (FAI-F)

Seja  $\Lambda_F \subset \Lambda$ ,

$$\Lambda_F = \{ \lambda \mid \int \lambda(dx) f^1(x) = 0, \quad 1 \in L \text{ e } \lambda \in \Lambda \} \quad (\text{VII.7})$$

$\lambda$  é dito um incremento generalizado ou combinação autorizada

$\Lambda_F$  pode ser representado também por

$$\Lambda_F = M_F \cap \Lambda \quad (\text{VII.8})$$

onde  $M_F \subset M_c$  denota o subespaço ortogonal à família  $f^1$ ,  $1 \in L$

A função  $Z: \Lambda_F \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  de ordem 2 é denominada uma função aleatória generalizada em  $\Lambda_F$ .

$\tilde{\Lambda}_F$  pode ser identificada a  $H = \overline{Z(\Lambda_F)}$

Se  $Z$  é contínua em  $\Lambda_F$  para a topologia de  $M_c$ ,  $Z$  pode ser extendida a  $M_F$ .

def.VII.5 Função Aleatória Intrínseca Generalizada

Suponha que  $\Lambda_F$  seja fechado para translações i.e.

$$\tau_h \lambda \in \Lambda_F \quad , \quad h \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \lambda \in \Lambda_F \quad (\text{VII.9})$$

$Z$  é uma função aleatória intrínseca generalizada se para cada  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \rightarrow Z(\tau_h \lambda)$  é uma FAST para todo  $\lambda \in \Lambda_F$ .

de forma equivalente pode-se enunciar:  $Z$  é uma FAI-F se existe um grupo  $U_h$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  definido em  $H = Z(\tilde{\Lambda}_F)$  t.q.

$$U_h Z(\lambda) = Z(\tau_h \lambda) \quad , \quad \lambda \in \Lambda_F \quad (\text{VII.10})$$

Se  $Z$  é contínua em  $\Lambda_F$ ,  $Z$  é extensível unicamente a

$M_F$  e neste caso (VII.10) se torna

$$U_h Z(\mu) = Z(\tau_h \mu), \quad \mu \in M_F \subset M_c \quad (\text{VII.11})$$

def.VII.6 Funções Aleatórias Intrínsecas de Ordem  $K$  (FAI- $k$ )

Vai-se considerar um conjunto particular  $\Lambda_K$ , constituído pelos monômios polinomiais de ordem  $\leq K$ ,  $K$  inteiro. Este conjunto é fechado para translações e será representado da seguinte forma:

$$f^1(x) \Leftrightarrow x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

$$1 \Leftrightarrow (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad (\text{VII.12})$$

$$1 \leq K \Leftrightarrow i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq K$$

Vai-se definir

$$M_k = \{\mu \in M_c \mid \int f^1(x) \mu(dx) = 0\} \quad (\text{VII.13})$$

$$\Lambda_K = M_K \cap \Lambda \quad (\text{VII.14})$$

Uma função aleatória intrínseca de ordem  $k$  é uma função aleatória intrínseca em  $\Lambda_K$ . Se  $Z$  é contínua ela admite a única extensão a  $M_k$ .

def.VII.7 Representação de uma FAI-F

Seja uma FAI em  $\Lambda_F \subset \Lambda$ , uma função aleatória de ordem 2,  $Y: R^n \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  é uma representação de  $Z$  se

$$Z(\lambda) = \int Y(x) \lambda(dx), \quad \forall \lambda \in \Lambda_F \quad (\text{VII.15})$$

teo.VII.1 Seja  $Z$  uma FAI- $k$ , então

a)  $Z$  admite uma representação

b) Se  $Y(x)$  é uma representação de  $Z$  todas as outras

representações são da forma:

$$X(x) = Y(x) + A_1 f^1(x) \quad (\text{VII.16})$$

onde  $A_1$  é uma v.a. que satisfaz  $A_1 = \int \lambda_1(dx) X(x)$



dem:

$$a) \text{ Seja } \lambda_\ell \in \Lambda \text{ uma medida t.q. } \int \lambda_\ell(dx) f^s(x) = \delta_\ell^s \quad (\text{VII.17})$$

,  $\delta_\ell^s = 0$  se  $\ell \neq s$  e  $\delta_\ell^s = 1$  se  $\ell = s$ . Defina-se a medida  $(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell) \in \Lambda_K$  então a F.A.  $Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell)$  (VII.18) é uma representação de Z.

b) Seja  $X(x)$  uma outra representação de Z,

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx) Y(x) = \int \lambda(dx) X(x), \lambda \in \Lambda_K$$

em particular para  $\lambda = \delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell$ , tem-se

$$Y(x) = Y(x) - f_x^\ell \int \lambda_\ell(dy) Y(y) = X(x) - f_x^\ell \int \lambda_\ell(dy) X(y) \quad (\text{VII.19})$$

isto vai implicar que  $\int \lambda_\ell(dy) Y(y) = 0$ . Assim a partir de (VII.18) tem-se que:

$$X(x) = Y(x) + f_x^\ell \int \lambda_\ell(dy) X(y) = Y(x) + A_\ell f_x^\ell$$

Vamos enunciar sem demonstração o teorema que dá as fórmulas de translação, MATHERON (73).

#### teo. VII.2 Fórmulas de Translação

Seja Z uma FAI-K contínua e  $\lambda_\ell$  medidas que satisfazem (VII.17) e  $Y(x)$  uma representação da forma (VII.18) para Z então as seguintes fórmulas de translação são válidas:

$$U_h Y(x) = Y(x+h) - A_\ell(h) f^\ell(x) \quad (\text{VII.20})$$

$$A_\ell(h) = \int \lambda_\ell(dy) Y(y+h) \quad (\text{VII.21})$$

#### def.VII.8 Deriva de uma FAI-K

Seja Z uma FAI-K contínua,  $H_0$  um subespaço de  $H = H(\tilde{\Lambda}_K)$  que contem os elementos invariantes de  $U_h$  i.e.  $(X \in H_0 \text{ se } X \in H \text{ e } U_h X = X \forall h \in \mathbb{R}^n)$  e  $\pi_0$  o projetor sobre  $H_0$ . ( $\pi_0 X \in H_0$ , para  $X \in H$ ).

Suponha que estamos no caso ergódico no qual os elementos de  $H_0$  são constantes.

$$\mathbb{1}_0 Z(\lambda) = E\{Z(\lambda)\} = m_0(\lambda) \quad (\text{VII.22})$$

é a deriva de  $Z$ ,  $m_0(\lambda)$  é uma FAI-K

### teo.VII.3 Representação da Deriva

Seja  $Z$  infinitamente diferenciável e  $m_0(x)$  uma representação de  $m_0(\lambda)$  da forma  $m_0(x) = m_0(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell)$  então esta representação é um polinômio de grau  $\leq K+1$  com coeficientes em  $H_0$ .  
dem.

Se  $Z$  é infinitamente diferenciável,  $m_0$  e sua representação  $m_0(x)$  também são. Aplicando a fórmula de translação (VI I.20) e considerando que  $m_0(x) \in H_0$

$$U_h m_0(x) = m_0(x) = m_0(x+h) - A_\ell(h) f^\ell(x) \quad (\text{VII.23})$$

derivando (VII.23) com respeito a  $x$  ( $k+1$ ) vezes eliminam-se os termos  $A_\ell(h) f^\ell(x)$  e então derivando 1 vez com respeito a  $h$  elimina-se  $m_0(x)$ . Assim todas as derivadas de ordem ( $k+2$ ) de  $m_0(x)$  se anulam, o que implica que  $m_0(x)$  é um polinômio de grau  $\leq K+1$

Este teorema vale também se  $Z$  é somente contínua. Para isto deve-se aplicar o teorema de decomposição, MATHERON (73), uma FAI-K contínua é a soma de uma FAST e uma FAI-K infinitamente diferenciável.

### VII.3 A Covariância Generalizada (CG)

def.VII.9 Seja  $Z$  uma FAI-K contínua,  $K$  uma função contínua e simétrica em  $\mathbb{R}^n$  é uma covariância generalizada associada a  $Z$  se

$$\langle Z(\lambda), Z(\mu) \rangle = \int \lambda(dx) K(x-y) \mu(dy), \lambda, \mu \in \Lambda_K \quad (\text{VII.24})$$

ou se  $\|Z(\lambda)\|^2 = \int \lambda(dx)K(x-y)\lambda(dy)$ ,  $\lambda \in \Lambda_K$  (VII.25)

def.VII.10 Função Definida Positiva Condicional de ordem K

Seja K contínua simétrica em  $\mathbb{R}^n$ , K é definida positiva condicional se

$$\int \lambda(dx)K(x-y)\lambda(dy) \geq 0, \lambda \in \Lambda_K \quad (\text{VII.26})$$

Toda CG deve satisfazer (VII.26) e também se uma função satisfaz (VII.26) ela é uma CG.

Vai-se enunciar um teorema de existência e um de unicidade. A demonstração no caso geral pode ser encontrada em MATHERON (70) e (72). Neste trabalho será demonstrado um caso particular,  $n=1$  e Z diferenciável, baseado em MATHERON e DELFINER (80).

teo.VII.4 Teorema de Existência para CG

Toda FAI-k com uma representação  $Z(x)$  diferenciável  $k+1$  vezes (contínua no caso geral) admite uma CG.

dem.

Sejam  $C(x,y)$  a covariância de Z e  $C_d(h)$  a covariância da derivada  $Z^{(k+1)}(x)$  de Z, que é uma FAST

$$\frac{\partial^{2(k+1)}}{\partial x^{k+1} \partial y^{k+1}} C(x,y) = C_d(h) \quad (\text{VII.27})$$

(VII.27) resulta da aplicação do resultado que relaciona a covariância da derivada de Z com a derivada da covariância de Z, ver MATHERON (68), capítulo III.

Sejam  $F(h)$  uma primitiva de ordem  $k+1$  de  $C_d(h)$  e  $K(h)$  uma primitiva de ordem  $2(k+1)$  a menos do sinal.

$$F(h) = \int_0^h (h-u)^k / k! C(u) du \quad (\text{VII.28})$$

$$K(h) = (-1)^{k-1} \int_0^h (h-u)^{2k+1} / (2k+1)! C(u) du \quad (\text{VII.29})$$

Integrando-se (VII.27)  $(k+1)$  vezes em  $x$ , obtém-se no segundo membro  $F(x-y)$  a menos de um polinômio de grau  $K$  em  $x$ .

$$\partial^{(k+1)} / y^{k+1} C(x,y) = F(x-y) + b_\ell(y) f^\ell(x) \quad (\text{VII.30})$$

Novamente integrando-se (VII.30)  $k+1$  vezes em  $y$ , mantendo-se  $x$  fixo. Designando  $a_\ell(y)$  como a primitiva de ordem  $k+1$  de  $b_\ell(y)$  obtém-se:

$$C(x,y) = K(x-y) + a_\ell(y) f^\ell(x) + a'_\ell(x) f^\ell(y) \quad (\text{VII.31})$$

Como  $C$  e  $K$  são funções simétricas,  $a_\ell(y) = a'_\ell(y)$

(VII.31) torna-se

$$C(x,y) = K(x-y) + a_\ell(y) f^\ell(x) + a_\ell(x) f^\ell(y) \quad (\text{VII.32})$$

Se mostrarmos que  $K$  é uma função positivo condicional para  $\Lambda_k$  tem-se a tese. Considere portanto  $\lambda$  e  $\mu \in \Lambda_K$  (com combinações autorizadas), logo  $\int f^\ell(x) \lambda(dx) = 0$  e  $\int f^\ell(x) \mu(dx) = 0$  (de acordo com (VII.13) e (VII.14)) o que vai implicar:

$$\langle C(\lambda), C(\mu) \rangle = \int \lambda(dx) K(x-y) \mu(dy) \geq 0$$

de acordo portanto com a definição VII.9 assim  $K$  é uma CG.

#### teo.VII.5 Teorema de Unicidade

A CG  $K(h)$  é única a menos de um polinômio par de grau  $\leq 2k$ .

dem.

Suponha que  $Z$  admita duas CG  $K_1(h)$  e  $K_2(h)$  como (VII.32) vai se verificar para cada CG tem-se que:

$$K_0(x-y) = K_1(x-y) - K_2(x-y) + c_\ell(y) f^\ell(x) + c_\ell(x) f^\ell(y) \quad (\text{VII.33})$$

Como  $Z$  é diferenciável de ordem  $2k+2$  e  $f$  são mo

nômios de ordem  $\leq K$  ao derivar  $K_0$   $(k+1)$  vezes em  $x$  e  $(k+1)$  vezes em  $y$  (VII.33) reduz-se a  $\partial^{2(k+1)} / \partial x^{k+1} \partial y^{k+1} K_0(x-y) = 0$

$K_0$  é portanto um polinômio de grau  $\leq 2K+1$ . Mas  $K_0$  é uma função simétrica, portanto é necessariamente de grau  $\leq 2K$ .

A forma geral de uma CG será apresentada a seguir e como as demonstrações serão omitidas, remete-se o leitor a MATHERON (70), (71) e (72).

#### def.VII.11 Medida Espectral

Seja  $K$  definido em  $\mathbb{R}^n$ , a medida espectral associada a  $K$ , denotada por  $\chi_0$  é uma medida positiva somável, sem átomo na origem ( $\chi_0(\{0\})=0$ ) t.q.

$$K(h) = \int \cos 2\pi \langle u, h \rangle \chi_0(du) \quad (\text{VII.34})$$

teo.VII.6 Forma da CG para uma FAI- $K$   $(K+1)$  vezes diferenciável e sem deriva

A função  $K(h)$  definida por

$$K(h) = \int \frac{\cos 2\pi \langle u, h \rangle - P_k(2\pi \langle u, h \rangle)}{(4\pi^2 \langle u, u \rangle)^{k+1}} \chi_0(du) \quad (\text{VII.35})$$

$$P_k(2\pi \langle u, h \rangle) = 1 - \frac{(2\pi \langle u, h \rangle)^2}{2!} \dots \frac{(-1)^k (2\pi \langle u, h \rangle)^{2k}}{(2k)!}$$

(VII.36)

$\chi_0$  é a medida espectral associada à função

$$K_0(h) = \sum_{i \in I} K_i(h) \quad (\text{VII.37})$$

$$I = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq k+1\}$$

$$K_i(h) = \delta_{i_1, i_2} \dots i_n Y(x) \quad (\text{VII.38})$$

$Y(x)$  é uma representação para  $Z(x)$  t.q.  $E(Y(x)) = 0$

#### teo.VII.7 Forma Geral de um Variograma Contínuo

Seja um variograma contínuo então existe uma forma quadrática positiva  $Q(h)$  e uma medida positiva simétrica, sem  $\hat{a}$  tomo na origem, t.q.  $\chi_0(du)/(1+4\pi^2\langle u, u \rangle)$  seja somável e que :

$$\gamma(h) = Q(h) + \int \frac{1 - \cos 2\pi\langle u, h \rangle}{4\pi^2\langle u, u \rangle} \chi_0(du) \quad (\text{VII.39})$$

#### teo.VII.8 Forma Geral de uma CG

Uma função  $K$  contínua e simétrica é positivo condicional se  $K$  é da forma

$$K(h) = Q_0(h) + K_0(h) \quad (\text{VII.40})$$

onde  $Q_0$  é um polinômio par de grau  $2k+2$  positivo definido e  $K_0$  é dado por:

$$K_0(h) = \int \frac{1}{(4\pi^2\langle u, u \rangle)^{k+1}} \cos 2\pi\langle u, h \rangle - \frac{(I-\Delta)^{k+1}}{(1+4\pi^2)^2}$$

$$\frac{P_k(2\pi\langle u, h \rangle)}{\langle u, u \rangle^{k+1}} \chi_0(du) \quad (\text{VII.41})$$

$$\chi_0 \text{ t.q. } \int \frac{\chi_0(du)}{(1+4\pi^2\langle u, u \rangle)} < \infty \text{ e } \chi_0\{0\}=0 \quad (\text{VII.42})$$

$P_k$  é como em (VII.36)

$\Delta^{k+1}$  denota o Laplaciano de ordem  $k+1$

Este teorema é chamado de teorema de Bochner generalizado, ver teo.VI.4, e pode ser suscintamente enunciado como a CNS para que  $K(h)$  seja positivo condicional de ordem  $k$  em  $\mathbb{R}^n$  é

que  $(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(h)$  tenha por transformada de Fourier uma medida positiva  $\chi(du)$  que satisfaz (VII.42).

#### VII.4 O SISTEMA DE KRIGEAGEM

A teoria das FAI supõe que o fenômeno em estudo seja representado por uma variável regionalizada (V.R.), cap.VI, que é uma função definida em  $R^n$ . A interpretação de uma V.R. em termos probabilísticos consiste em considerar esta V.R. como uma realização de uma F.A., ou mais precisamente como uma realização de uma representação  $Y(x)$ , def.VII.7, de uma FAI-K  $Z(x)$ .

$$\int \lambda(dx) Y(x) = Z(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_k \quad (\text{VII.43})$$

A forma geral de uma representação para  $Z$ , teo.VII.1, é

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell) + A_\ell f_x^\ell(x) \quad (\text{VII.44})$$

$$\int \lambda_\ell(dx) f_x^\ell(x) = \delta_\ell^S \quad (\text{VII.45})$$

e  $A_\ell$  é uma V.A.

Seja  $H$  o espaço de Hilbert gerado por  $Z(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_k$

$$A_\ell \text{ é da forma } A_\ell = \mathbb{1}_H A_\ell + a_\ell \quad (\text{VII.46})$$

$\mathbb{1}_H A_\ell \in H$  logo existe  $\lambda'_\ell \in \tilde{\Lambda}_k$  (complemento de  $\Lambda_k$ )

t.q.  $Z(\lambda'_\ell) = \mathbb{1}_H A_\ell$ , logo (VII.44) pode ser escrito como :

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell (\lambda_\ell - \lambda'_\ell)) + a_\ell f_x^\ell(x) \quad (\text{VII.47})$$

Vai-se denotar  $(\lambda_\ell - \lambda'_\ell)$  por  $\tilde{\lambda}_\ell$ , assim (VII.47) torna-se

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell \tilde{\lambda}_\ell) + a_\ell f_x^\ell(x) \quad (\text{VII.48})$$

Esta forma permite decompor a representação de  $Y$  em uma parte associada unicamente à variável  $Z$  e outro termo

ortogonal ao primeiro. Vai-se assumir que  $a_\ell$  são constantes, MATHERON (70), a partir desta hipótese a esperança de  $Y(x)$  é da forma:

$$E(Y(x)) = m(x) = a_\ell f^\ell(x) \quad (\text{VII.49})$$

Se  $K(h)$  denota uma CG da FAI-k  $Z$ , a covariância de  $Y(x)$  é:

$$C(x,y) = E\{Z(\delta_x - \tilde{\lambda}_x f_x^S) Z(\delta_y - \tilde{\lambda}_y f_y^S)\} \quad (\text{VII.50})$$

desenvolvendo (VII.50)

$$C(x,y) = K(x-y) - f_x \int \tilde{\lambda}_\ell(dz) K(z-y) - f_y \int \tilde{\lambda}_\ell(dz) K(z-x) + f_x f_y \int \int \tilde{\lambda}_\ell(dz) K(z-z') \tilde{\lambda}_\ell(dz') \quad (\text{VII.51})$$

(VII.51) pode ainda ser representado como:

$$C(x,y) = K(x-y) - f_x^\ell C_\ell(y) - f_y^\ell C_\ell(x) + T_{\ell S} f_x^\ell f_y^S \quad (\text{VII.52})$$

na qual as funções  $C_\ell$  e  $T_{\ell S}$  não podem ser inferidos mas isto não será impedimento para inferência de  $K$  e posterior estimação de  $Y(x)$  em um ponto cujo valor é desconhecido.

$$\int \lambda(dx) Y(x) = Z(\lambda) \quad (\text{VII.53})$$

$$E\{(\int \lambda(dx) Y(x))^2\} = \int \int \lambda(dx) K(x-y) \lambda(dy) \quad (\text{VII.54})$$

Seja portanto o problema de estimar  $Y(x)$  dados  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , duas condições serão consideradas: não tendência e o erro de estimação.

$$E(\lambda^\alpha Y_\alpha) = \lambda^\alpha E(Y_\alpha) = \lambda^\alpha a_\ell f^\ell(x_\alpha) = E(Y(x)) = a_\ell f^\ell(x)$$

$$\Rightarrow \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = f_x^\ell \quad (\text{VII.55})$$

O resíduo, ou erro de estimação  $Y(x) - \lambda^\alpha Y_\alpha$  é uma combinação autorizada,

$$Y(x) - \lambda^\alpha Y_\alpha = \int \{\delta_x(dz) - \lambda^\alpha \delta_{x_\alpha}(dz)\} Y(z) \quad (\text{VII.56})$$

mas de (VII.55) tem-se que



$$\int \{ \delta_{x_\alpha}(dz) - \lambda^\alpha \delta_{x_\alpha}(dz) \} f^\ell(z) = 0 \quad (\text{VII.57})$$

logo pode-se exprimir a variancia deste erro em termos de K, ou seja

$$E(Y_x - \lambda^\alpha Y_\alpha)^2 = K(0) - 2\lambda^\alpha K(x-x_\alpha) + \lambda^\alpha \lambda^\beta K(x_\alpha - x_\beta) \quad (\text{VII.58})$$

Escolhendo  $\lambda$  de modo a minimizar (VII.58) esta variancia sujeito à condição (VII.55) obtem-se o sistema:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha K_{\alpha\beta} &= K_{x\beta} + \mu_\ell f_\beta^\ell \\ \lambda^\alpha f_\alpha^\ell &= f_x^\ell \end{aligned} \quad (\text{VII.59})$$

e a variancia de estimação é:

$$\sigma_K^2 = K(0) - \lambda^\alpha K(x-x_\alpha) + \mu_\ell f_x^\ell \quad (\text{VII.60})$$

Fazendo hipóteses suplementares sobre a estrutura de  $Y(x)$ , pode-se também inferir os coeficientes  $a_\ell$ , MATHERON (70).

## VII.5 MODELOS POLINOMIAIS DE CG

### def.VII.12 CG Polinomial

Um modelo polinomial para uma CG é da forma:

$$K(h) = -a_0 |h| + a_1/3! |h|^3 - \dots (-1)^{k+1} a_k / (2k+1)! |h|^{2k+1} \quad (\text{VII.61})$$

Estas funções apresentam razões evidentes para serem escolhidas como instrumentos de trabalho. A partir do artigo de MATHERON (73) enunciam-se os seguintes resultados:

1. Para  $k=1$  e  $R^1$

$$K(h) = -a_0 |h| + a_1/6 |h|^3, |h| \leq L \text{ é uma CG} \quad (\text{VII.62})$$

se  $a_0 \geq 0$  e  $a_1 \geq -6/L^2 a_0$

e a FAI-k associada a  $K(h)$  admite uma representação em  $(0, L)$  que coincide com a representação de uma FAST. A expressão da covariância estacionária  $C$  é dada por:

$$C(h) = A + a_0(L/2 - |h|) + a_1(|h|^3/6 - Lh^2/4 + L^3/24) \quad (\text{VII.63})$$

Servindo-se do método de faixas rotativas MATHERON (76) e JOURNEL (58) que estabelece uma correspondência entre as covariâncias isotrópicas (estacionárias ou generalizadas) localmente polinomiais em  $R^1$  e  $R^n$ , são estabelecidos os seguintes resultados:

2. Para  $K=1$  e  $R^n$

Seja  $r=|h|$  e  $\Gamma$  que denota a função de Euler

$$K_n(r) = - \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} a_0 r + \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+3/2)} \frac{a_3}{6} r^3$$

para  $r \leq L$

(VII.64)

é a restrição de uma CG isotrópica em  $R^n$  se  $a_0 \geq 0$  e  $a_1 \geq \pi^2/L^2 a_0$

3. A expressão da covariância estacionária da FAST que tem uma representação em  $r \leq L$  coincidente com uma representação de  $Z$  é

$$C(r) = A + a_0 \left\{ \frac{L}{2} - \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \right\} r + a_1 \left\{ \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+3/2)} \frac{r^3}{6} - Lr^2/4n + L^3/24 \right\} \quad (\text{VII.65})$$

4. Explicitamente para  $n=2$

$$K_2(r) = -\frac{2}{\pi} a_0 r + \frac{2}{9\pi} a_1 r^3 \quad (\text{VII.66})$$

$$C_2(r) = A + a_0(L/2 - \frac{2r}{\pi}) + a_1 \left\{ \frac{2r^3}{9\pi} - \frac{Lr^2}{8} + \frac{L^3}{24} \right\}$$

5. Para  $K=1$  e  $n=3$

$$K_3(r) = -a_0/2 r + a_1/24 r^3 \quad (\text{VII.67})$$

$$C_3(r) = A + a_0 \frac{(L-r)}{2} + a_1 \frac{(L-r)(L^2 + Lr - r^2)}{24} \quad (\text{VII.68})$$

6. Para  $K=2$  e  $n=1$

$$K(h) = -a_0|h| + a_1/6|h|^3 - a_2/120|h|^5 \quad (\text{VII.69})$$

é uma CG se  $a_0 \geq 0$ ,  $a_2 \geq 0$ ,  $a_1 \geq -2\sqrt{a_0 a_2}$

A covariância estacionária associada em  $|h| \leq L$  é:

$$C(h) = a_0(L/2 - |h|) + a_1(|h|^3/6 - L|h|^2/4 + L^3/24) - a_2(|h|^5/120 - L|h|^4/48 + L^3|h|^2/48 - L^3/240) \quad (\text{VII.70})$$

7. Explicitamente para  $n=2$ ,  $r=|h|$

$$K_2(r) = -\frac{2}{11} a_0 r + \frac{2}{91} a_1 r^3 - \frac{2}{2251} a_2 r^5 \quad (\text{VII.71})$$

$$C_2(r) = a_0 \left( \frac{L}{2} - \frac{2}{11} r \right) + a_1 \left( \frac{2}{91} r^3 - \frac{L}{8} r^2 + \frac{L^3}{24} \right) + a_2 \left( \frac{L^5}{240} - \frac{L^3 r^2}{96} + \frac{Lr^4}{128} - \frac{2}{2251} r^5 \right) \quad (\text{VII.72})$$

8. Para  $n=3$ ,  $r=|h|$

$$K_3(r) = -a_0/2 r + a_1/24 r^3 - a_2/720 r^5 \quad (\text{VII.73})$$

$$C_3(r) = a_0 (L-r)/2 + a_1 (r^3 - 2Lr^2 + L^3)/24 + a_2 (L^5/240 - L^3 r^2/144 + Lr^4/240 - r^5/720) \quad (\text{VII.74})$$

## VII.6 FORMA GERAL DO PROBLEMA DE SPLINES

### def.VII.13 Forma do Problema de Splines

Sejam  $H, H'$  espaços de Hilbert de funções,  $L$  e  $T$  funções lineares contínuas respectivamente de  $H$  em  $R^m$  e de  $H$  em  $H'$

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{T} & H' \\
 \left. \begin{array}{c} L \\ \left. \begin{array}{c} (L_1(\cdot), L_2(\cdot), \dots, L_m(\cdot)) \\ R^m \end{array} \right\} \end{array} \right\} & & 
 \end{array}$$

Encontrar uma função  $f \in H$  que minimize:

$$|Tf|_{H'} \quad (\text{VII.75})$$

sob as condições :

$$L_\alpha(f) = f_\alpha \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{VII.76})$$

teo.VII.9  $N(T) \cap N(L) = \{0\} \Rightarrow$  a solução do Problema de Splines existe e é única.  $N(\cdot)$  denota o núcleo da transformação.

Em POTIER e VERCKEN (98) há uma demonstração para o caso de splines bi-cúbicos, cap.V, e em DUBRULE (45) cita-se o texto de LAURENT P.J. , Approximation et Optimisation, para o problema geral.

teo.VII.10  $N(T)$  é de dimensão finita dem.

$L_\alpha(f)$  são formas lineares contínuas. Pelo teorema de Riesz, Apêndice I, podem ser identificadas a funções de  $H$ , denotadas por  $L_\alpha$ .

$$L_\alpha(f) = \langle L_\alpha, f \rangle \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad \forall f \in H$$

$$\text{Seja } N(L) = S^\perp, \quad S = [L_\alpha]$$

$$\mathbb{1}_S : H/N(T) \longrightarrow S \quad (\mathbb{1}_S \text{ projeção ortogonal})$$

A restrição é uma injeção de  $N(T)$  em  $S$ .  $S$  é de dimensão finita, logo  $N(T)$  também é, e  $\dim N(T) \leq \dim S$ .

teo.VII.11 Se  $s$  é a função solução do problema de splines ,  
tem-se necessariamente

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = 0 \quad \forall f \in N(L) \quad (\text{VII.77})$$

dem.

Sejam  $s + \psi f$  ,  $\psi \in R^+$  ,  $f \in N(L)$  e  $s$  solução do problema de splines.

$$\langle L_\alpha, s \rangle_H = f_\alpha, \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad \Rightarrow$$

$$\langle L_\alpha, s + \psi f \rangle_H = f_\alpha \quad (s \text{ é } \Rightarrow \text{sol. probl. splines})$$

$$|Ts|_{H'} \leq |T(s + \psi f)|_{H'}$$

elevando ao quadrado e simplificando

$$\varepsilon |Tf|_{H'}^2 + 2\langle Ts, Tf \rangle_{H'} \geq 0$$

Se  $\psi \rightarrow 0$  então  $\langle Ts, Tf \rangle_{H'} \geq 0$  , fazendo a mesma operação para  $\psi \in R^-$   $\langle Ts, Tf \rangle_{H'} \leq 0$  , logo  $\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = 0 \quad \forall f \in N(L)$ .

teo.VII.12  $\forall f \in H$  , existem  $m$  reais  $b^\alpha$  t.q.

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \sum_{\alpha=1}^m b^\alpha \langle L_\alpha, f \rangle_H \quad (\text{VII.78})$$

dem.

$$\text{Seja } B^{\alpha\beta} = (\langle L_\alpha, L_\beta \rangle_H)^{-1}$$

$$f - \sum_{\alpha} \langle f, L_\alpha \rangle_H B^{\alpha\beta} L_\alpha \in N(L) \quad (\text{VII.79})$$

(VII.79) resulta de

$$\langle f - \sum_{\alpha} \langle f, L_\alpha \rangle_H B^{\alpha\beta} L_\alpha, L_\gamma \rangle_H = \langle f, L_\gamma \rangle_H - \sum_{\alpha, \beta} \langle f, L_\beta \rangle_H B^{\alpha\beta}$$

$$\langle L_\alpha, L_\gamma \rangle_H = \langle f, L_\gamma \rangle_H - \sum_{\beta} \langle f, L_\beta \rangle_H \delta_{\alpha\gamma}^\beta = 0 \quad , \gamma \in \{1, \dots, m\}$$

aplicando o teo.VII.11 a (VII.79)

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \langle \sum_{\alpha} \langle Ts, TL_\alpha \rangle_{H'} B^{\alpha\beta} L_\beta, f \rangle_H \quad , \text{denotando}$$

$\sum_{\alpha} \langle Ts, TL_{\alpha} \rangle_{H'} B^{\alpha\beta}$  por  $b^{\beta}$  tem-se a tese:

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \sum_{\beta} b^{\beta} \langle L_{\beta}, f \rangle_H \quad (\text{VII.80})$$

cor.VII.12.1 Se  $f \in N(T)$  o segundo membro de (VII.80) é 0

teo.VII.13 Se  $s$  é a solução do problema de splines então

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \sum_{\alpha} b^{\alpha} \langle L_{\alpha}, f \rangle_H, \forall f \in H \quad (\text{VII.81})$$

$$\sum_{\alpha} b^{\alpha} \langle L_{\alpha}, f^{\ell} \rangle_H = 0, \forall \ell \in \{0, \dots, K\} \quad (\text{VII.82})$$

$f^{\ell}$  uma base para  $N(T)$

$$\langle L_{\alpha}, s \rangle_H = f_{\alpha}, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{VII.83})$$

dem.

(VII.81) teo.VII.12

(VII.82) cor.VII.12.1

(VII.83) por hipótese

cor.VII.13.1 Forma do Problema de Splines de Interpolação

Neste caso  $\langle L_{\alpha}, f \rangle_H = f(x_{\alpha})$

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \sum_{\alpha} b^{\alpha} f(x_{\alpha}) \quad (\text{VII.84})$$

$$\sum_{\alpha} b^{\alpha} f^{\ell}(x_{\alpha}) = 0 \quad \forall \ell \in \{0, \dots, K\} \quad (\text{VII.85})$$

$$s(x_{\alpha}) = f(x_{\alpha}) \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad (\text{VII.86})$$

teo.VII.14 Forma da Condição de Solução Única no caso do cor. 13.1

$$\sum_{\ell} c_{\ell} f^{\ell}(x_{\alpha}) = 0, \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \Rightarrow c_{\ell} = 0 \quad (\text{VII.87})$$

dem.

$$f \in N(L) \Leftrightarrow f(x_{\alpha}) = 0$$

$$f \in N(T) \iff f = \sum c_\ell f^\ell$$

$$f \in N(L) \cap N(T) \iff \sum c_\ell f^\ell(x_\alpha) = 0$$

logo se  $N(L) \cap N(T) = 0$  necessariamente  $c_\ell = 0$

### VII.7 O MÉTODO DE KRIGEAGEM VISTO COMO INTERPOLADOR

Sejam o sistema de Krigeagem e a sua matriz inversa:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & & f_1^\ell & \\
 & & \vdots & \\
 & K_{\alpha\beta} & \vdots & \\
 & & f_m^\ell & \\
 \hline
 f_1^\ell \dots & f_m^\ell & 0 & \\
 \hline
 & & \lambda^1 & \\
 & & \vdots & \\
 & & \lambda^m & \\
 \hline
 & & \mu_0 & \\
 & & \vdots & \\
 & & \mu_k & \\
 \hline
 & & K_{1x} & \\
 & & \vdots & \\
 & & \vdots & \\
 & & K_{mx} & \\
 \hline
 & & f_x^0 & \\
 & & \vdots & \\
 & & \vdots & \\
 & & f_x^k & \\
 & & \vdots & \\
 & & f_x & \\
 \hline
 \end{array} =$$

(VII.88)

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \lambda_\ell^1 & \\
 & \vdots & \\
 & \lambda_\ell^m & \\
 \hline
 \lambda_\ell^1 \dots & \lambda_\ell^m & \mu_{\ell s} \\
 \hline
 \end{array}$$

O produto destas duas matrizes é igual à identidade, derivam-se quatro relações :

$$\sum_\gamma b^{\alpha\gamma} K_{\alpha\beta} + \sum_\ell \lambda_\ell^\alpha f_\beta^\ell = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{VII.89})$$

$$\sum_{\gamma} \lambda_{\ell}^{\gamma} f_{\gamma}^{\ell'} = \delta_{\ell}^{\ell'} \quad (\text{VII.90})$$

$$\sum_{\gamma} b^{\alpha\gamma} f_{\gamma}^{\ell} = 0 \quad (\text{VII.91})$$

$$\sum_{\gamma} \lambda_{\ell}^{\gamma} K_{\alpha\gamma} + \sum_s \mu_{\ell s} f_{\alpha}^s = 0 \quad (\text{VII.92})$$

onde  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in \{1, \dots, m\}$  e  $\ell, \ell' \in \{0, \dots, k\}$

Os coeficientes de krigagem podem portanto se escrever como

$$\lambda_{\alpha} = \sum_{\gamma} b^{\alpha\gamma} K_{\gamma x} + \sum_s \lambda_s^{\alpha} f_x^s \quad (\text{VII.93})$$

logo o valor estimado em  $x$  é

$$Z_k(x) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha} = \sum_{\alpha, \gamma} b^{\alpha\gamma} Z_{\alpha} K_{\gamma x} + \sum_{\alpha, s} \lambda_s^{\alpha} Z_{\alpha} f_x^s \quad (\text{VII.94})$$

onde  $Z_{\alpha}$  denota os valores conhecidos de  $Z(x)$  e  $b^{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha} b^{\alpha\gamma} Z_{\alpha}$

$$c_s = \sum_{\alpha} \lambda_s^{\alpha} Z_{\alpha} \quad (\text{VII.95})$$

da relação (VII.91)

$$\sum_{\gamma} b^{\gamma} f_{\gamma}^{\ell} = \sum_{\alpha, \gamma} b^{\alpha\gamma} Z_{\alpha} f_{\gamma}^{\ell} = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \left( \sum_{\gamma} b^{\alpha\gamma} f_{\gamma}^{\ell} \right) = 0 \quad (\text{VII.96})$$

pode-se finalmente escrever :

$$Z_k(x) = \sum_{\gamma} b^{\gamma} K_{\gamma x} + \sum_s c_s f_x^s \quad (\text{VII.97})$$

$$\sum_{\gamma} b^{\gamma} f_{\gamma}^{\ell} = 0 \quad (\text{VII.98})$$

$$Z_K(x_{\alpha}) = Z_{\alpha} \quad (\text{VII.99})$$

A partir destas equações pode-se definir a krigagem como um problema de interpolação: passar por  $m$  pontos experimentais uma curva que depende linearmente das  $m+k+1$  funções  $K_{\gamma x}$  e  $f_x^s$ , e os  $(m+k+1)$  coeficientes dados pelo sistema:



$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c} K_{\alpha\beta} \\ \vdots \\ f_1^\ell \dots f_m^\ell \end{array} & \begin{array}{c} f_1^\ell \\ \vdots \\ f_m^\ell \\ 0 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} f_1^\ell \dots f_m^\ell \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c} \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ c_0 \\ \vdots \\ c_k \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \end{array} \end{array}
 \begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \end{array}
 \quad (VII.100)$$

### VIII.8 SPLINES E KRIGEAGEM

def.VII.14 Caso Unidimensional-Definição do Problema

Sejam  $f_\alpha$  valores conhecidos da função a interpo-  
lar em  $m$  pontos  $x_\alpha$  pertencentes ao intervalo  $[a,b]$ .

$H = H^{k+1}(a,b)$  espaço das funções reais definidas em  
 $[a,b]$  que são deriváveis até a ordem  $k+1$  e cuja derivada de or-  
dem  $k+1$  é quadrado integrável,  $\int_a^b \{f^{(k+1)}(t)\}^2 dt < \infty$

O produto interno em  $H$  é dado por:

$$\langle f, g \rangle_H = \sum_{i=0}^{k+1} \int_a^b f^{(i)}(t) g^{(i)}(t) dt \quad (VII.101)$$

$$H' = H^0[a,b] = L^2[a,b]$$

O produto interno em  $H'$  é dado por:

$$\langle f, g \rangle_{H'} = \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (VII.102)$$

A transformação  $T$  é definida por:

$$T = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \frac{d^i}{dx^i} \quad (VII.103)$$

a dimensão do  $N(T)$  é  $k+1$ .

A transformação  $L$  é definida por:

$$L = (f_1, \dots, f_\alpha, \dots, f_m) \quad (VII.104)$$

Vai-se mostrar que a função spline que minimiza  
 $|TF|_{H'}$ , e passa por  $(x_\alpha, f_\alpha)$  é uma krigeagem em FAI-F.

Observações Preliminares:

1. Seja a equação diferencial

$$Tf = \zeta \quad (\text{VII.105})$$

$$T = \sum_{i=0}^{k+1} a_i D^i = \prod_{j=1}^p (D - \lambda_j)^{k_j} \quad (\text{VII.106})$$

onde  $D = d/dx$ ,  $\lambda_j$  são as raízes de ordem  $k_j$  do polinômio

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_i s^i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^p k_j = k + 1$$

2. Uma base de  $N(T)$  é a família de monômios exponenciais  $e^{\lambda_j x}$ ,  $x e^{\lambda_j x}$ , ...,  $x^{k_j-1} e^{\lambda_j x}$ ,  $j=1, \dots, p$

3. A decomposição da fração racional em elementos simples é:

$$1/T(s) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{k_j} B_{i,j} / (D - \lambda_j)^i \quad (\text{VII.107})$$

$$4. R(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{k_j} B_{i,j} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{\lambda_j x} \quad (\text{VII.108})$$

tem as seguintes propriedades:

$$- R \in N(T)$$

$$- f(x) = \int_a^x R(x-\xi) \zeta(\xi) d\xi \text{ é solução de (VII.105)}$$

5. A solução geral de (VII.105) é

$$f(x) = \psi(x) + \int_a^x R(x-\xi) \zeta(\xi) d\xi \quad (\text{VII.109})$$

$$\psi(x) \in N(T)$$

6. Ainda

$$\begin{aligned} R &, x \geq 0 \\ R &+ 0, x < 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.110})$$

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^k c_\ell f^\ell(x) + \int_a^b R_+(x-\xi) \zeta(\xi) d\xi \quad (\text{VII.111})$$

teo.VII.15 Forma Geral do Spline de Interpolação

$$s(x) = \sum_{\ell=0}^k c_{\ell} f^{\ell}(x) + \sum_{\alpha=1}^m b^{\alpha} \int_a^b R_{+}(x-\xi) R_{+}(x_{\alpha}-\xi) d\xi$$

$$\forall x \in [a, b] \quad (\text{VII.112})$$

dem.

do cor.VII.13.1  $\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \sum_{\alpha} b^{\alpha} f(x_{\alpha})$ ,  $\forall f \in H$ ,

Considere a equação  $Tf = Tf$ , da Obs. 6 tem-se

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^k c_{\ell} f^{\ell}(x) + \int_a^b R_{+}(x-\xi) Tf(\xi) d\xi$$

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \sum_{\alpha} \sum_{\ell} b^{\alpha} c_{\ell} f^{\ell}(x_{\alpha}) + \int_a^b \sum_{\alpha} b^{\alpha} R_{+}(x_{\alpha}-\xi) Tf_{\xi} d\xi$$

mas de (VII.85) tem-se que o primeiro termo do segundo membro se anula, logo

$$\langle Ts, Tf \rangle_{H'} = \langle \sum_{\alpha} b^{\alpha} R_{+}(x_{\alpha}-\xi), Tf \rangle_{H'} \quad , \forall f \in H \quad (\text{VII.113})$$

Como T é sobrejetora (VII.113) se reduz a

$$\langle \sum_{\alpha} b^{\alpha} R_{+}(x_{\alpha}-\xi), g \rangle_{H'} \quad , \quad \forall g \in H'$$

que permite a identificação:

$$(Ts)(\xi) = \sum_{\alpha} b^{\alpha} R_{+}(x_{\alpha}-\xi) \quad , \quad \forall \xi \in [a, b]$$

que é uma equação diferencial do tipo (VII.105), aplicando Obs. 6 obtem-se a expressão (VII.112)

teo.VII.16 A forma geral (VII.112) não depende de a e b, s(x) pode então ser representado por

$$s(x) = \sum_{\ell} c_{\ell} f^{\ell}(x) + \sum_{\alpha} b^{\alpha} \int_{x_1}^{x_m} R_{+}(x-\xi) R_{+}(x_{\alpha}-\xi) d\xi$$

$$(\text{VII.114})$$

dem.

$R(x) \in N(T)$ , este subespaço é invariante para translações, assim existe uma função  $B_{\ell}(\xi)$  tal que :

$$R(x-\xi) = \sum_{\ell} B_{\ell}(\xi) f^{\ell}(x) , \forall x, \xi \in [a, b]$$

substituindo esta expressão em (VII.112) mostra-se que as integrais  $\int_a^{x_1}$  e  $\int_{x_m}^b$  dependem somente de  $f^{\ell}(x)$  podendo-se portanto tomar não importa que valores de  $a$  e  $b$  externos à amostra dada.

cor.VII.16.1  $s$  é a solução do problema de splines definido em  $R^1$  e tomando-se:

$$|f|_H^2 = \sum_{i=0}^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} \{f^{(i)}(t)\}^2 dt \quad (\text{VII.115})$$

$$|f|_{H'}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (\text{VII.116})$$

teo.VII.17  $C(x, y) = \int_a^b R_{+}(x-\xi) R_{+}(y-\xi) d\xi$  é uma função positiva definida e simétrica.

dem.

$C$  é evidentemente simétrica

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} C(x_{\alpha}, x_{\beta}) &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \langle R_{+}(x_{\alpha}-\xi), R_{+}(x_{\beta}-\xi) \rangle \\ &= \left| \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} R_{+}(x_{\alpha}-\xi) \right|_H^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.118})$$

O objetivo a seguir é obter as relações VII.97, 98 e 99 a partir dos resultados obtidos para o problema de splines .

Suponha que existe  $K(h)$  t.q.  $\forall x, y \in R^1$

$$C(x, y) = K(x-y) + \sum_{\ell} a_{\ell}(x) f^{\ell}(y) + \sum_s a_s(y) f^s(x) +$$

$$+ \sum_{\ell, s} T_{\ell s} f^{\ell}(x) f^s(y) \quad (\text{VII.119})$$

Ver a este propósito (VII.52)

Se  $\lambda_{\alpha} \in \Lambda_N(T)$

$$\sum_{\alpha, \beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta C(x_\alpha, x_\beta) = \sum_{\alpha, \beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta K(x_\alpha - x_\beta) \geq 0$$

voltando ao teo.VII.12., (VII.114), tem-se que:

$$s(x) = \sum_{\ell} c_{\ell} f^{\ell}(x) + \sum_{\alpha} b^{\alpha} C(x_{\alpha}, x) \quad (\text{VII.120})$$

e as outras duas condições seguem-se:

$$s(x_{\alpha}) = f_{\alpha} \quad (\text{VII.121})$$

$$\sum_{\alpha} b^{\alpha} f^{\ell}(x_{\alpha}) = 0 \quad (\text{VII.122})$$

que evidentemente coincidem com (VII.97, 98 e 99). Se ao invés de se utilizar C trabalha-se com K, (VII.120) torna-se

$$s(x) = \sum_{\ell} c'_{\ell} f^{\ell}(x) + \sum_{\alpha} b^{\alpha} K(x_{\alpha} - x) \quad (\text{VII.123})$$

teo.VII.18 A função spline de interpolação que minimiza

$$|f^{(k+1)}|_H, \text{ é equivalente ao sistema de krigeagem}$$

relativo a uma FAI-k com CG associada da forma, em  $R^1$ ,

$$K(h) = (-1)^{k+1} |h|^{2k+1} \quad (\text{VII.124})$$

dem.

Ver DUBRULE (45)

De uma forma geral estabelece-se uma equivalência entre a formulação em termos de splines e em termos de krigeagem, MATHERON (81), mas o cálculo via krigeagem é mais prático uma vez que se disponha do modelo adequado de CG.

Além da importância teórica dos resultados vistos a relação entre splines e krigeagem vai permitir também o estabelecimento de um novo modelo de CG em  $R^1$  e  $R^2$  que é equivalente ao problema de splines de interpolação. Este resultado foi estabelecido a partir do trabalho de DUCHON, "Fonctions

Splines du Type Plaque Mince en dimension 2", que provou uma expressão para (VII.120) da forma :

$$s(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + \sum_{\alpha} b_{\alpha} \{ (x-x_{\alpha})^2 + (y-y_{\alpha})^2 \} * \text{Log} \{ \sqrt{(x-x_{\alpha})^2 + (y-y_{\alpha})^2} \} \quad (\text{VII.125})$$

teo.VII.19 Um novo modelo de CG para  $k=1$  , em  $R^1$  e  $R^2$

$$\text{Seja } C(h) = -b_0 |h| + b_s |h|^2 \log |h| + b_1 |h|^3 \quad (\text{VII.126})$$

então sob certas condições sobre os coeficientes  $b_0, b_s$  e  $b_1$  ,  $C(h)$  é uma CG para  $k \geq 1$  em  $R^1$  e  $R^2$

dem.

- Mostra-se que em  $R^1$  ,  $(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} (|h|^2 \log |h|)$  tem por transformada de Fourier uma medida espectral  $\chi(du)$ .

- Mostra-se que em  $R^1$  ,  $(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} (-b_0 |h| + b_s |h|^2 \log |h| + b_1 |h|^3)$  tem por transformada de Fourier uma medida espectral  $\chi_0$  desde que :  $b_0 \geq 0, b_1 \geq 0$  e  $b_s \geq -\sqrt{24 b_0 b_1} / \pi$

- Utilizando o operador de faixas rotativas ,  $(K_2(h) = 2/\pi \int_0^{\pi/2} K_1(h |\cos \theta|) d\theta)$  mostra-se que a  $K_1(h)$  em  $R^1$  corresponde  $C(h)$  da forma (VII.126) desde que:

$$b_0 \geq 0, b_1 \geq 0 \text{ e } b_s \geq -3/2 \sqrt{b_0 b_1}$$

Ver DUBRULE (45) para detalhes.

Resumindo os resultados sobre CG, tem-se os seguintes modelos:

$$K(h) = c_0 \delta(h) + \sum (-1)^{k+1} |h|^{2k+1} b_k, k=0, 1 \text{ e } 2$$

com as seguintes condições sobre  $b_k$  e  $c_0$  :

$$\text{em } R^1 : c_0 \geq 0, b_0 \geq 0, b_2 \geq 0 \text{ e } b_1 \geq -\sqrt{40/3} \sqrt{b_0 b_2}$$

$$\text{em } R^2 : C_0 \geq 0, b_0 \geq 0, b_2 \geq 0 \text{ e } b_1 \geq -10/3\sqrt{b_0 b_2}$$

$$\text{em } R^3 : C_0 \geq 0, b_0 \geq 0, b_2 \geq 0 \text{ e } b_1 \geq -\sqrt{10}\sqrt{b_0 b_2}$$

$$K(h) = C_0 \delta(h) - b_0 |h| + b_s |h|^2 \log |h| + b_1 |h|^3, K=1$$

$$\text{em } R^1 : b_0 \geq 0, b_1 \geq 0 \text{ e } b_s \geq -\sqrt{24 b_0 b_1} / \pi$$

$$\text{em } R^2 : b_0 \geq 0, b_1 \geq 0 \text{ e } b_s \geq -3/2\sqrt{b_0 b_1}$$

A inferência dos coeficientes é feita a partir da resolução de um problema de mínimos quadrados baseado na relação (VII.25) entre a variância de uma combinação autorizada e a CG.

Seja  $\lambda_m$  uma combinação autorizada, então:

$$\text{Var}\{Z(\lambda_m)\} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_m^{\alpha} \lambda_m^{\beta} K(x_{\alpha} - x_{\beta}) \quad (\text{VII.127})$$

O valor experimental de  $\text{Var } Z(\lambda_m)$  é conhecido e igual a  $\{\sum \lambda_m^{\alpha} Z_{\alpha}\}^2$  e o valor teórico é obtido a partir da substituição de  $\lambda_m$  e  $x_{\alpha}$  no segundo termo de (VII.127). Formula-se o problema de mínimos quadrados de modo que os coeficientes  $C_0$  e  $b_k$  da CG minimizem o erro quadrático. Como ponderador utiliza-se para cada termo

$$W_m^2 = 1/\{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_m^{\alpha} \lambda_m^{\beta} |x_{\alpha} - x_{\beta}|\}^2 \text{ se } k=0 \quad (\text{VII.128})$$

$$W_m^2 = 1/\{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_m^{\alpha} \lambda_m^{\beta} |x_{\alpha} - x_{\beta}|^3\}^2 \text{ se } k=1 \text{ ou } 2 \quad (\text{VII.129})$$

Estes resultados foram aplicados no programa apresentado no cap.VIII.A geração dos incrementos generalizados de ordem  $k$  é obtida a partir da resolução de um sistema de krigagem de ordem  $k$  com covariância pepítica.Os resíduos da estim

ção de pontos previamente conhecidos e retirados da amostra são combinações autorizadas de ordem  $k$ . Este resultado foi utilizado para gerar os incrementos generalizados em SCG1, cap. VIII. Ver STARKS e FANG (117) para outros métodos de geração. A comparação entre os modelos de CG é avaliada a partir do erro quadrático, relativo a pontos conhecidos e artificialmente retirados da amostra. Ou também pela razão da média entre a variancia experimental e a variancia teórica de cada combinação autorizada.

$$\rho = \frac{\sum \text{Var}\{Z(\lambda_m)\}}{\sum K(\lambda_m)} \quad (\text{VII.130})$$

Este é o critério adotado em SCG1. No capítulo IX será discutida em mais profundidade a questão da inferência dos coeficientes dos modelos de CG.

A relação entre o modelo de splines e krigeagem permite ver a generalidade deste último. A questão da estética das cartas obtidas, geralmente uma exigência do usuário, insere-se de forma bem clara neste contexto. Quando a avaliação dos modelos de CG indica que o modelo spline é o mais adequado vai-se obter um resultado ao mesmo tempo estético e preciso, entretanto não necessariamente todos os fenômenos vão se enquadrar nesta categoria. Um outro fator para a estética do desenho é o tamanho da vizinhança, local ou global. Evidentemente um método de vizinhança única tende a suavizar a realização da variável  $Z$ . Esta questão será discutida no capítulo IX.



## VIII. Um Sistema Cartográfico Geológico

### VIII.1 Introdução

Como aplicação do material teórico desenvolvido foi concebido e implementado um sistema cartográfico geológico baseado na teoria das funções aleatórias intrínsecas de ordem  $k$ . Este sistema, a partir de uma amostra de dados localizados sobre um plano e associados a um fenômeno em estudo: pressão, profundidade, temperatura, etc; determina um ou mais modelos de covariância generalizada que em seguida serão utilizados para estimar os valores nos nós de uma malha regular, estrutura básica para diversas manipulações e cálculos geológicos. O sistema compreende também um programa para traçado de isocontornos a partir de uma estrutura de malha retangular regular.

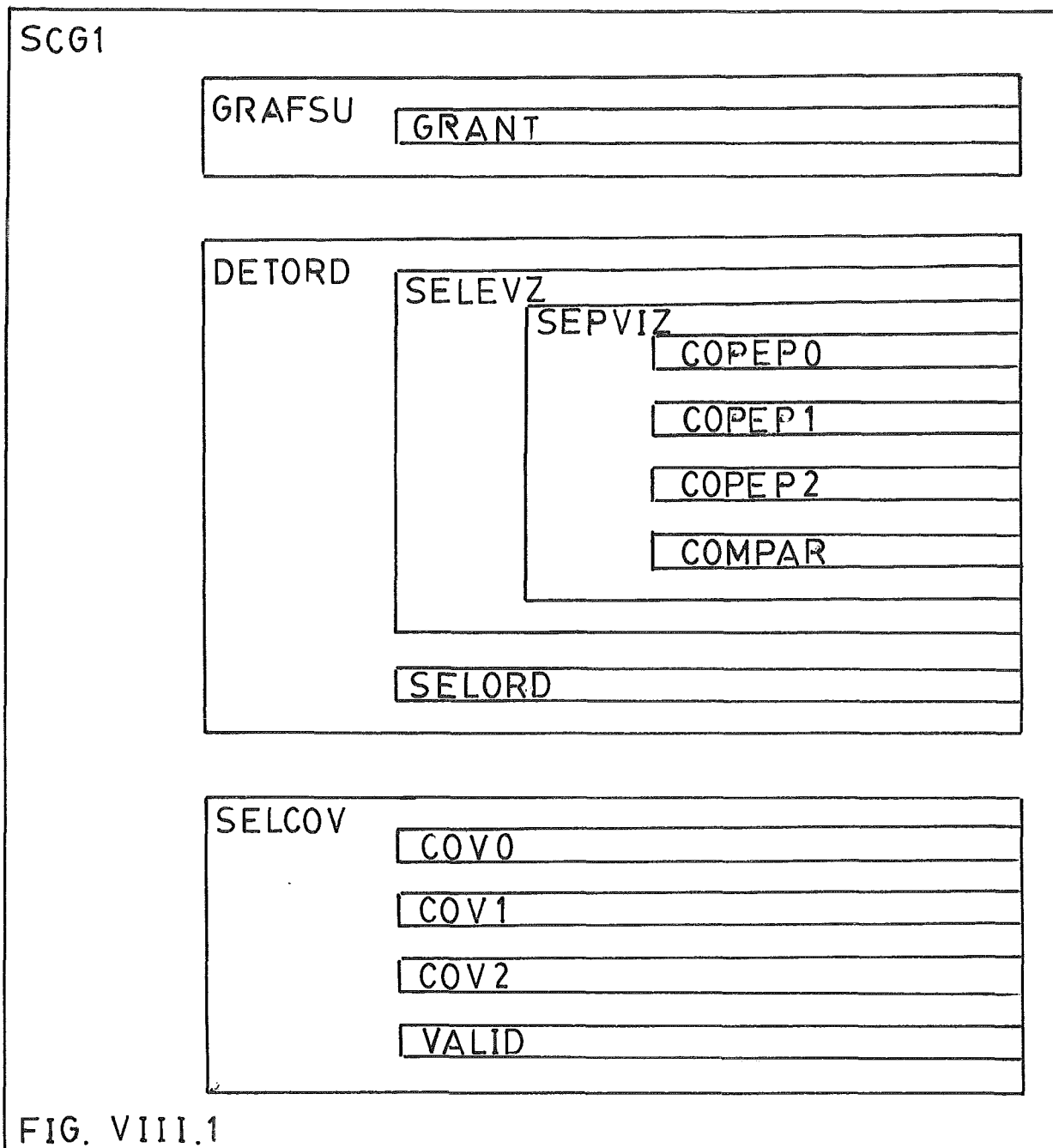
O sistema está estruturado em dois diferentes programas: SCG1 e SCG2. O primeiro deles compreende três módulos: GRAFSU, DETORD e SELCOV. SCG1 essencialmente determina um ou mais modelos de covariância generalizada. O programa SCG2 realiza a estimação dos valores nos nós de uma malha regular e em seguida faz o traçado de isocontornos. A variância de estimação também é obtida possibilitando o desenho da carta do desvio padrão de estimação. SCG2 é constituído de dois módulos: SEPVIC e TRAC. Um diagrama de cada programa é mostrado respectivamente nas figuras (VIII.1) e (VIII.2).

Em seguida será feita uma descrição mais detalhada de cada módulo, assim como um estudo de caso. O sistema foi implementado em FORTRAN IV e submetido em um computador Cyber 173, sob o sistema operacional NOS/BE 1.5, disponível no Centro de Cálculo da Universidade de Montreal.

### VIII.2 O Programa SCG1

O programa SCG1 é composto de 3 módulos: GRAFSU, DETORD e SELCOV.

O módulo GRAFSU, a partir das coordenadas dos dados que devem estar ordenados lexicograficamente, constrói um grafo direto sujeito às condições de distância fixadas pelo usuário. A motivação para utilizar tal estrutura é facilitar o processo de busca que será necessário frequentemente

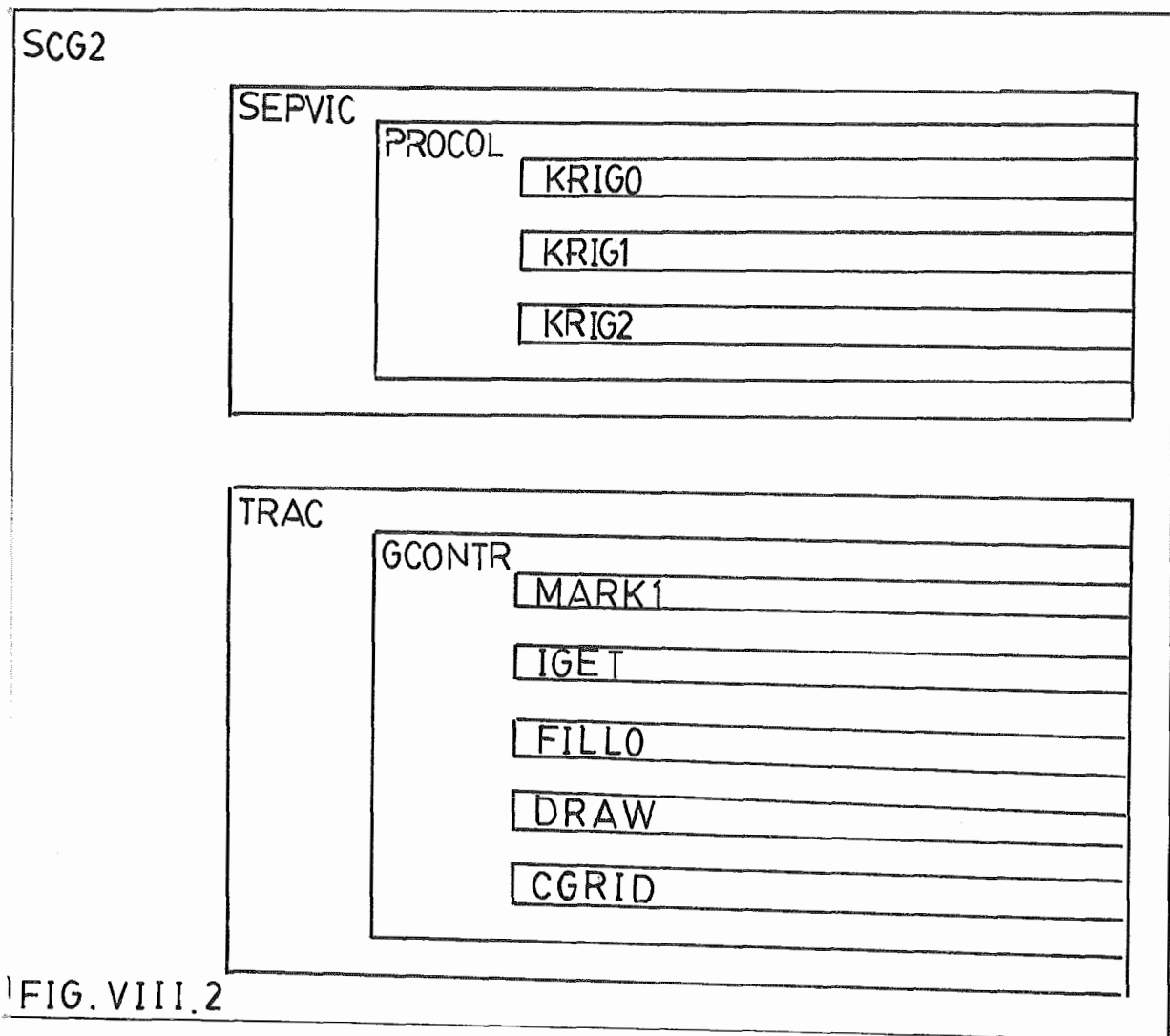


nos demais módulos. A definição do grafo é dada pelas condições abaixo.

$x_i = (x_i, y_i)$  é sucessor de  $x_j = (x_j, y_j)$  se e somente se

$(x_j) < (x_i)$  ou  $(x_j) = (x_i)$  e  $(y_i) > (y_j)$  e

$$\max \{ |(x_i) - (x_j)|, |(y_i) - (y_j)| \} \leq DMAX \quad (\text{VIII.1})$$



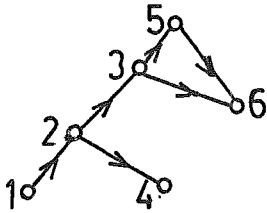
De forma análoga definimos o antecessor. Este grafo é representado por dois pares de vetores: INDSUC e IGRASU que se referem aos sucessores, e INDANT e IGRANT que se referem aos antecessores. Na figura (VIII.3) pode-se ver um exemplo para os vetores IGRASU e INDSUC. Analogamente constroem-se os vetores IGRANT e INDANT.

Os principais vetores e parâmetros deste módulo são:

X, Y e Z - vetores de dimensão igual ao número de dados (ND). X e Y contem a localização e Z a medida da variável em estudo.

INDSUC - apontador dos sucessores. Sua dimensão é igual a  $ND + 1$ .

IGRASU - lista de sucessores, sua dimensão é igual a  $8 * DMAX * ND$ . Mas, dependendo da densidade dos dados pode



```

IGRASU 2 3 4 5 6 0 6 0
        1 2 3 4 5 6 7 8

INDSUC 1 2 4 6 7 8
        1 2 3 4 5 6

```

FIG. VIII.3

ser necessário um valor maior.

INDANT - apontador dos antecessores. Sua dimensão é igual a  $ND + 1$ .

IGRANT - lista de antecessores. Mesma dimensão de IGRASU.

DMAX - raio máximo definido pelo usuário.

As principais subrotinas deste módulo são:

Subrotina GRAFSU, chamada no programa principal SCG1. Gerencia o módulo GRAFSU, calcula o grafo de sucessores. Chama a subrotina GRANT.

Subrotina GRANT, chamada pela subrotina GRAFSU. Calcula o grafo de antecessores.

O módulo DETORD tem como resultado uma ordem sugerida do modelo de covariância mais apropriada para o fenômeno em estudo. Este módulo gera ainda os incrementos generalizados de ordens 0, 1 e 2 que serão utilizados no módulo SELCOV. A determinação da melhor ordem é feita por comparação entre os modelos pepíticos de ordens 0, 1 e 2. Estes modelos são comparados a partir dos erros de estimação de valores conhecidos da

variável Z. No modelo pepítico a covariância generalizada tem a expressão seguinte:

$$K(h) = C_0 \vartheta, \quad \vartheta = 1 \quad \text{se } h = 0 \\ \vartheta = 0 \quad \text{se } h \neq 0 \quad (\text{VIII.2})$$

Seja  $x_0$  o ponto onde se quer estimar Z,  $x_\alpha$  os pontos cujos valores são conhecidos. Neste caso o valor em  $x_0$  é artificialmente desconhecido. O sistema de Krigeagem de ordem K reduz-se a:

$$\lambda^\alpha K_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha} K_{0\alpha} + \sum_{\alpha} \mu^\ell f_{\alpha}^{\ell} \\ \lambda^\alpha f_{\alpha}^{\ell} = f_0^{\ell}; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, K \quad (\text{VIII.3})$$

A primeira equação deste sistema é obtida somando-se as n primeiras equações do sistema de Krigeagem, onde n é o número de dados. Para  $K=0$ , (VIII.3) reduz-se a:

$$\lambda^\alpha = 0 + \sum_{\alpha} \mu_0 \\ \lambda^\alpha = 1 \quad (\text{VIII.4})$$

Neste caso pode-se tomar a solução  $\lambda_\alpha = 1/n$ ,

$$Z^* = 1/n * \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \quad (\text{VIII.5})$$

Para  $K=1$ , (VIII.3) reduz-se a:

$$\lambda^\alpha = 0 + \sum_{\alpha} \mu_0 + \mu_1 \sum_{\alpha} (x_{\alpha}) + \mu_2 \sum_{\alpha} (y_{\alpha}) \\ \lambda^\alpha = 1 \quad (\text{VIII.6}) \\ \lambda^\alpha (x_{\alpha}) = (x_0) \\ \lambda^\alpha (y_{\alpha}) = (y_0)$$

Podemos decompor a primeira linha de (VIII.6) em n equações

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \mu_0 + \mu_1(x_1) + \mu_2(y_1) \\
 \lambda_2 &= \mu_0 + \mu_1(x_2) + \mu_2(y_2) \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{aligned} \tag{VIII.7}$$

$$\lambda_n = \mu_0 + \mu_1(x_n) + \mu_2(y_n)$$

Substituindo estas equações na terceira linha de (VIII.6) tem-se que:

$$\begin{aligned}
 &\{ \mu_0 + \mu_1(x_1) + \mu_2(y_1) \} (x_1) + \\
 &\{ \mu_0 + \mu_1(x_2) + \mu_2(y_2) \} (x_2) + \\
 &\dots + \\
 &\{ \mu_0 + \mu_1(x_n) + \mu_2(y_n) \} (x_n) = (x_0) \tag{VIII.8}
 \end{aligned}$$

que se reduz a:

$$\mu_0 \Sigma (x_\alpha) + \mu_1 \Sigma (x_\alpha)^2 + \mu_2 \Sigma (y_\alpha)(x_\alpha) = (x_0) \tag{VIII.9}$$

Analogamente para a quarta linha de (VIII.6) tem-se que:

$$\mu_0 \Sigma (y_\alpha) + \mu_1 \Sigma (x_\alpha)(y_\alpha) + \mu_2 \Sigma (y_\alpha)^2 = (y_0) \tag{VIII.10}$$

e finalmente substituindo-se a segunda linha de (VIII.6) na primeira linha de (VIII.6) obtem-se o sistema:

$$n \mu_0 + \Sigma (x_\alpha) \mu_1 + \Sigma (y_\alpha) \mu_2 = 1$$

$$\Sigma (x_\alpha) \mu_0 + \Sigma (x_\alpha)^2 \mu_1 + \Sigma (x_\alpha)(y_\alpha) \mu_2 = x_0 \tag{VIII.11}$$

$$\Sigma (y_\alpha) \mu_0 + \Sigma (x_\alpha)(y_\alpha) \mu_1 + \Sigma (y_\alpha)^2 \mu_2 = y_0$$

A determinação dos valores  $\mu_0, \mu_1$  e  $\mu_2$  implica na determinação dos valores de  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  através das equações (VIII.7).

Para  $K = 2$  (VIII.3) se reduz a:

$$\lambda^\alpha = 0 + \sum_{\alpha} \mu_0 + \mu_1 \sum_{\alpha} (x_\alpha) + \mu_2 \sum_{\alpha} (y_\alpha) + \mu_3 \sum_{\alpha} (x_\alpha)^2 + \mu_4 \sum_{\alpha} (x_\alpha)(y_\alpha) + \mu_5 \sum_{\alpha} (y_\alpha)^2$$

$$\lambda^\alpha = 1$$

$$\lambda^\alpha (x_\alpha) = (x_\alpha)$$

$$\lambda^\alpha (y_\alpha) = (y_\alpha)$$

(VIII.12)

$$\lambda^\alpha (x_\alpha)^2 = (x_\alpha)^2$$

$$\lambda^\alpha (x_\alpha)(y_\alpha) = (x_\alpha)(y_\alpha)$$

$$\lambda^\alpha (y_\alpha)^2 = (y_\alpha)^2$$

Analogamente ao caso  $K=1$  tem-se que :

$$\lambda_1 = \mu_0 + \mu_1 (x_1) + \mu_2 (y_1) + \mu_3 (x_1)^2 + \mu_4 (x_1)(y_1) + \mu_5 (y_1)^2$$

$$\lambda_2 = \mu_0 + \mu_1 (x_2) + \mu_2 (y_2) + \mu_3 (x_2)^2 + \mu_4 (x_2)(y_2) + \mu_5 (y_2)^2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

(VIII.13)

$$\lambda_n = \mu_0 + \mu_1 (x_n) + \mu_2 (y_n) + \mu_3 (x_n)^2 + \mu_4 (x_n)(y_n) + \mu_5 (y_n)^2$$

Substituindo estas igualdades nas equações de (VIII.12) obtem-se o sistema:

$$\mu_0 \cdot 1 + \mu_1 \Sigma(x_\alpha) + \mu_2 \Sigma(y_\alpha) + \mu_3 \Sigma(x_\alpha)^2 + \mu_4 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha) + \mu_5 \Sigma(y_\alpha)^2 = 1$$

$$\mu_0 \Sigma(x_\alpha) + \mu_1 \Sigma(x_\alpha)^2 + \mu_2 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha) + \mu_3 \Sigma(x_\alpha)^3 + \mu_4 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha) + \mu_5 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha)^2 = x_0$$

$$\mu_0 \Sigma(y_\alpha) + \mu_1 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha) + \mu_2 \Sigma(y_\alpha)^2 + \mu_3 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha) + \mu_4 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha)^2 + \mu_5 \Sigma(y_\alpha)^3 = y_0$$

$$\mu_0 \Sigma(x_\alpha)^2 + \mu_1 \Sigma(x_\alpha)^3 + \mu_2 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha) + \mu_3 \Sigma(x_\alpha)^4 + \mu_4 \Sigma(x_\alpha)^3(y_\alpha) + \mu_5 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha)^2 = x_0^2$$

$$\mu_0 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha) + \mu_1 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha) + \mu_2 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha)^2 + \mu_3 \Sigma(x_\alpha)^3(y_\alpha) + \mu_4 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha)^2 + \mu_5 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha)^3 = x_0 y_0$$

$$\mu_0 \Sigma(y_\alpha)^2 + \mu_1 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha)^2 + \mu_2 \Sigma(y_\alpha)^3 + \mu_3 \Sigma(x_\alpha)^2(y_\alpha)^2 + \mu_4 \Sigma(x_\alpha)(y_\alpha)^4 + \mu_5 \Sigma(y_\alpha)^4 = y_0^2$$

(VIII.14)



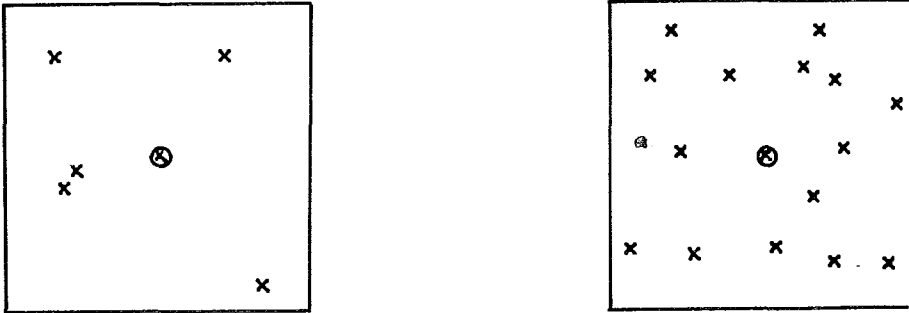


Fig.VIII.4

Quanto à determinação da vizinhança de pontos, i.e. os pontos  $x_\alpha$ , e da localização de  $x_0$  há vários métodos possíveis. Optou-se por um tratamento que considerasse a distribuição espacial da amostra ao invés de uma divisão em celas de posição fixa. Para cada ponto é investigada a vizinhança centrada neste ponto. Ver figuras (VIII.4) e (VIII.5). As restrições sobre os parâmetros ID1, ID2 e ID3, ver mais adiante definição, garantem uma não redundância parcial das vizinhanças. E a restrição sobre ID4 garante uma distribuição equilibrada dos pontos no interior da vizinhança. A partir dos resultados encontrados determina-se várias comparações entre os erros quadráticos de cada modelo. Os resultados destas comparações são armazenados no vetor NC. Dá-se a seguir o conteúdo de cada componente de NC.

NC(1): número de casos em que o modelo de ordem 0 é melhor que o modelo de ordem 1.

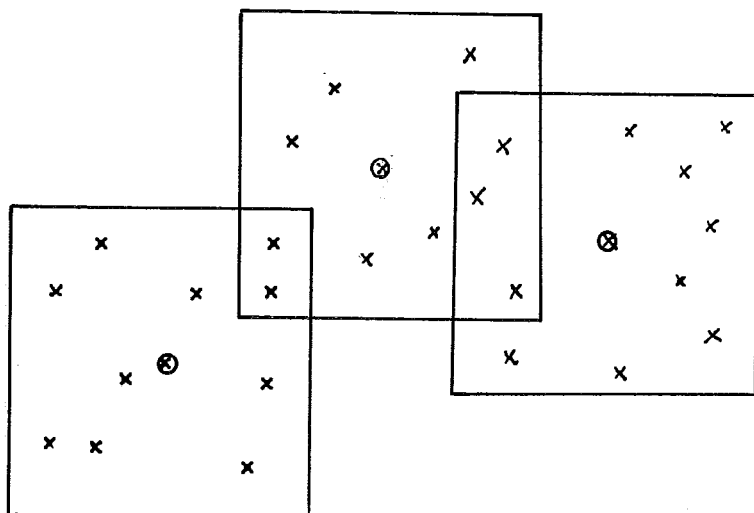


Fig.VIII.5

NC(2): número de casos em que o modelo de ordem 0 é melhor que o modelo de ordem 2.

NC(3): número de casos em que o modelo de ordem 1 é melhor que o modelo de ordem 0.

NC(4): número de casos em que o modelo de ordem 1 é melhor que o modelo de ordem 2.

NC(5): número de casos em que o modelo de ordem 2 é melhor que o modelo de ordem 0.

NC(6): número de casos em que o modelo de ordem 2 é melhor que o modelo de ordem 1.

NC(7): número de casos em que o modelo de ordem 0 é melhor que os modelos de ordem 1 e 2.

NC(8): número de casos em que o modelo de ordem 1 é melhor que os modelos de ordem 0 e 2.

NC(9): número de casos em que o modelo de ordem 2 é melhor que os modelos de ordem 0 e 1.

Um outro aspecto importante desta rotina é a geração dos incrementos generalizados (combinações autorizadas) de ordens 0, 1 e 2 a serem utilizados no módulo SELCOV. Estes incrementos são obtidos a partir dos erros de estimação i.e. o sistema de krigeagem fornece os coeficientes LAMBDA(I), o erro de estimação é dado por :

$$Z0 = \sum LAMBDA(I) * ZAUX(I)$$

e é também um incremento generalizado com coeficientes 1 e - LAMBDA(I) para os valores Z0 e ZAUX(I). Estes valores são armazenados em disco ou fita em código binário.

Os principais vetores e parametros do módulo DETORD são:

X, Y, Z - como em GRAFSU

IGRASU, INDSUC, INDANT e IGRANT - como em GRAFSU

XAUX, YAUX, ZAUX - vetores que armazenam os pontos de uma vizinhança móvel. A dimensão destes vetores é DAUX.

MARK - vetor de dimensão ND + 1 usado como indicador se um ponto já constou de alguma vizinhança ou não.

ID1 - número de sucessores e antecessores novos em uma vizinhança móvel.

ID2 - número de antecessores novos em uma vizinhança móvel.

ID3 - número de sucessores novos em uma vizinhança móvel.

ID4 - soma de sucessores e antecessores em uma vizinhança móvel.

As principais subrotinas deste módulo são:

Subrotina DETORD, chamada no programa principal de SCG1. Gerencia o módulo DETORD, chama as subrotinas SELEVZ e SELORD.

Subrotina SELEVZ, chamada pela subrotina DETORD, determina uma vizinhança dentro dos critérios estabelecidos pelos parâmetros ID1 a ID4. Chama a subrotina SEPVIZ.

Subrotina SEPVIZ, chamada pela subrotina SELEVZ, realiza manipulações com os pontos em uma vizinhança determinada por SELEVZ. Chama as subrotinas COPEP0, COPEP1, COPEP2 e COMPAR.

Subrotinas COPEP0, COPEP1 e COPEP2, chamadas pela subrotina SEPVIZ, estas rotinas resolvem o sistema de krigagem, determinando um valor estimado.

Subrotina COMPAR, chamada pela subrotina SEPVIZ, faz a contagem dos desempenhos relativos entre os modelos de cada ordem.

O modulo SELCOV determina os modelos de covariância generalizada "polinomial" associados a cada ordem.

Os modelos considerados são:

$K=0$

$$\begin{aligned} K(h) &= C_0 \delta - b_1 |h| \\ K(h) &= -b_1 |h| \end{aligned} \tag{VIII.15}$$

$K=1$

$$K(h) = C_0 \delta - b_1 |h| + b_2 |h|^3 \tag{VIII.16}$$

$$K(h) = -b_1 |h| + b_2 |h|^3$$

$$K(h) = C_0 \delta + b_s |h|^2 \log |h|$$

$$K(h) = b_s |h|^2 \log |h| \tag{VIII.17}$$

$$K=2$$

$$K(h) = c_0 \delta - b_1 |h| + b_2 |h|^3 \quad (\text{VIII.18})$$

$$K(h) = -b_1 |h| + b_2 |h|^3$$

Para estimar os coeficientes associados a cada modelo define-se um problema de mínimos quadrados a partir da igualdade seguinte:

$$E\{Z(\lambda_m)^2\} = c_0 T_m^0 + \sum_0^k b_p T_m^{2p+1} \quad (\text{VIII.19})$$

onde:

$$T_m^0 = \sum_i (\lambda_m^i)^2 \quad (\text{VIII.20})$$

$$T_m^{2p+1} = (-1)^{p+1} \sum_{i,j} \lambda_m^i \lambda_m^j |x_i - x_j|^{2p+1} \quad (\text{VIII.21})$$

Ou seja para um conjunto de  $m$  incrementos generalizados, determina-se os coeficientes  $c_0$  e  $b_p$  tal que o erro quadrático:

$$\sum_m w_m^2 \{Z(\lambda_m)^2 - c_0 T_m^0 - \sum_0^k b_p T_m^{2p+1}\}^2 \quad (\text{VIII.22})$$

seja mínimo. Neste módulo, os incrementos generalizados são

sempre da forma  $Z_o - Z(\lambda_m)$ . Dá-se a seguir a estrutura do sistema de mínimos quadrados em alguns casos.

$$K = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 + T_1^o & -2\lambda_{(1)} |x_o - x| + T_1^1 \\ 1 + T_2^o & -2\lambda_{(2)} |x_o - x| + T_2^1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 + T_m^o & -2\lambda_{(m)} |x_o - x| + T_m^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_o \\ b_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(\lambda_{(1)})^2 + z_o^2 \\ z(\lambda_{(2)})^2 + z_o^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z(\lambda_{(m)})^2 + z_o^2 \end{bmatrix}$$

(VIII.23)

onde  $K(h)$  corresponde a  $c_o \partial - b_o |h|$  (VIII.24)

$$K = -1$$

$$\begin{bmatrix}
 1 + T_1^o & -2\lambda_{(1)}^\alpha \log |x_o - x_\alpha| |x_o - x_\alpha|^2 + T_1^s \\
 1 + T_2^o & -2\lambda_{(2)}^\alpha \log |x_o - x_\alpha| |x_o - x_\alpha|^2 + T_2^s \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 1 + T_m^o & -2\lambda_{(m)}^\alpha \log |x_o - x_\alpha| |x_o - x_\alpha|^2 + T_m^s
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_o \\
 b_s
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 Z(\lambda_{(1)})^2 + Z_o^2 \\
 Z(\lambda_{(2)})^2 + Z_o^2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 Z(\lambda_{(m)})^2 + Z_o^2
 \end{bmatrix}$$

(VIII.25)

Neste sistema  $K(h)$  corresponde a:

$$c_o \partial + b_s |h|^2 \log |h| \quad \text{(VIII.26)}$$

$K = 2$



$1 + T_1^0$	$-2\lambda_1^\alpha K_0(x_0 - x_\alpha) + T_1^1$	$-2\lambda_1^\alpha K_1(x_0 - x_\alpha) + T_1^3$	$C_0$	=	$Z(\lambda_1)^2 + Z_0^2$
$1 + T_2^0$	$-2\lambda_2^\alpha K_0(x_0 - x_\alpha) + T_2^1$	$-2\lambda_2^\alpha K_1(x_0 - x_\alpha) + T_2^3$	$b_1$		$Z(\lambda_2)^2 + Z_0^2$
.	.	.	$b_2$		.
.	.	.			.
.	.	.			.
$1 + T_m^0$	$-2\lambda_m^\alpha K_0(x_0 - x_\alpha) + T_m^1$	$-2\lambda_m^\alpha K_1(x_0 - x_\alpha) + T_m^3$			$Z(\lambda_m)^2 + Z_0^2$

(VIII.27)

Neste sistema  $K(h)$  corresponde a :

(VIII.28)

$$\begin{aligned}
 K(h) &= C_0 \partial + K_0(h) + K_1(h) \\
 K_0(h) &= -b_1 |h| \\
 K_1(h) &= b_2 |h|^3
 \end{aligned}$$

Para equilibrar a importância relativa de cada termo utilizam-se os ponderadores:

$$W_m^2 = \frac{1}{(\lambda_m^i \lambda_m^j |x_i - x_j|)^2} \quad (\text{VIII.29})$$

para  $K=0$ , e

$$W_m^2 = \frac{1}{(\lambda_m^i \lambda_m^j |x_i - x_j|^3)^2} \quad (\text{VIII.30})$$

para  $K=1$  e 2.

Para a resolução dos sistemas lineares e mínimos quadrados foram utilizadas as rotinas LEQ1S e LEQIF da biblioteca IMSL, versão 9.1, disponível no Centro de Cálculo da Universidade de Montreal.

A avaliação dos modelos é feita pelo índice  $\rho$  :

$$\rho = \frac{E\{\sum_m Z(\lambda_m)^2\}}{\sum_m K(\lambda_m)} \quad (\text{VIII.31})$$

Um estimador para  $\rho$  é dado por  $r$  :

$$r = \frac{\sum_m Z(\lambda_m)^2}{\sum_m K(\lambda_m)} \quad (\text{VIII.32})$$

Evidentemente este valor deve ser o mais próximo possível de 1.

Os principais vetores e parametros de SELCOV são :

MXAUX1,MYAUX1,MZAUX1 e LAM - vetores que contem os incrementos generalizados gerados em DETORD.

NB - número de vizinhanças geradas por DETORD.

IORD - ordem do modelo sugerida por DETORD.

ICCOM - número de incrementos gerados por DETORD.

As principais subrotinas do módulo SELCOV são:

Subrotina SELCOV ,chamada no programa principal SCG1,gerencia o módulo SELCOV.Chama as subrotinas COV0,COV1,COV2 e VALID.

Subrotinas COV0,COV1,COV2 , chamadas por SELCOV.Determinam os diferentes modelos de covariancia generalizada para cada ordem de deriva 0,1 e 2.

Subrotina VALID,chamada por SELCOV. Lista os diferentes modelos de covariancia,calcula o indice r associado a cada modelo.

Como aplicação do programa SCG1 apresenta-se um estudo de caso.

### VIII.3 Estudo de Casos

#### VIII.3.1 Amostra Kansas

Foi analisada uma amostra referente ao topo da elevação de um horizonte sedimentário na região de Graham County, Kansas, EUA, SAMPSON (108). As coordenadas de posição são medidas em milhas e a variável profundidade em pés em relação ao nível do mar. No apêndice II encontra-se uma listagem da amostra considerada. Nas páginas seguintes apresentam-se os relatórios resumidos gerados por SCG1. Esta amostra foi estudada em SAMPSON (108) utilizando o sistema SURFACE II. Igualmente foi estudada em BRAGA e MACULAN (12), utilizando o sistema COVPAC, GEOSTAT (46). Da mesma forma que nos estudos anteriores foi identificada uma deriva de ordem 1.

MEDIA EM X 4.13091 DESVIO PADRAO EM X 2.78086

MEDIA EM Y 3.39167 DESVIO PADRAO EM Y 1.66085

MEDIA EM Z-1278.74603 DESVIO PADRAO EM Z 41.12538

RAIO DE VIZINHANCA# 1.00

DIMENSAO DE IGRASU= 1492 DIMENSAO DE IGRANT= 1491

FIM NORMAL DE ENTIDAD

ORDEM SELECIONADA=11 11

NUMERO DE CASOS ESTUDADOS= 268

NC( 1)= 104

NC( 2)= 105

NC( 3)= 164

NC( 4)= 124

NC( 5)= 163

NC( 6)= 144

NC( 7)= 88

NC( 8)= 94

NC( 9)= 86

NUMERO DE RESIDUOS TRANSFERIDOS A SELCOV 39

NUMERO DE VIZINHANCAS GERADAS 13

FIM NORMAL DE DETORD

ORDEM DO MODELO DE COVARIANCIA= 0

MODELO GERAL :  $A_0 \cdot \Delta T_0 - A_1 \cdot H$

MODELOS CALCULADOS

$A_0 = -.6291E+02$   $A_1 = .7610E+02$   $R = .2220E+01$

$A_1 = .1776E+03$   $R = .6800E+00$

ORDEM DO MODELO DE COVARIANCIA= 1 1

MODELO GERAL= $A_0 \cdot \Delta T_0 - A_1 \cdot H^{**2} \cdot \text{LOGH} + A_2 \cdot H^{**3}$

MODELOS CALCULADOS

A0= 18.51480 AS= 30.66327 R= 3.38905

AS= 158.04651 R= 1.15762

A0= -.5180E+01 A1= -.1978E+01 A2= .2568E+02 R= 0.6111E+01

A1= .7658E+01 A2= .9659E+02 R= 0.1233E+01



ORDEM DO MODELO DE COVARIANCIA= 2

MODELO GERAL=A0\*DELTA0-A1\*H+A2\*H\*\*3-A3\*H\*\*5

MODELOS CALCULADOS

A0= .3177E+02 A1= -.7688E+01 A2= .2192E+02 R= .3222E+01

A1= .1270E+03 A2= .8578E+02 R= .1064E+01

### VIII.3.2 Amostra HIMMAG

Esta amostra refere-se ao levantamento de um campo magnético na região de Abitibi, Quebec. Os dados foram colhidos em caminhos aproximadamente retilíneos. As coordenadas de posição são medidas em metros. No apêndice III encontra-se uma listagem da amostra considerada. Os valores do campo magnético tem uma variação bastante acentuada, isto se deve ao fenómeno de intrusão que vai implicar na intensidade do campo. Esta amostra é particularmente difícil devido à forte anisotropia observada e à elevada variancia dos valores observados. Foi identificada uma deriva de ordem 2 mas nem todos os modelos de covariancia generalizada são viáveis. A seguir os relatórios gerados por SCG1.

MEDIA EM X 228.77977 DESVIO PADRAO EM X 139.52377

MEDIA EM Y 304.14102 DESVIO PADRAO EM Y 172.04129

MEDIA EM Z 702.55990 DESVIO PADRAO EM Z 917.58840

RAIO DE VIZINHANCA=60.00

DIMENSAO DE IGRASU= 3063 DIMENSAO DE IGRANT= 3063

FIM NORMAL DE ENTIDAD

ORDEM SELECIONADA= 2

NUMERO DE CASOS ESTUDADOS= 505

NC( 1)= 195

NC( 2)= 183

NC( 3)= 310

NC( 4)= 208

NC( 5)= 322

NC( 6)= 297

NC( 7)= 133

NC( 8)= 156

NC( 9)= 216

NUMERO DE RESIDUOS TRANSFERIDOS A SELCOV 69

NUMERO DE VIZINHANCAS GERADAS 23

FIM NORMAL DE DETORD

#### VIII.4 O Programa SCG2

O programa SCG2 é composto de dois módulos: GRID e TRAC.

O módulo GRID a partir das exigências' do usuário quanto às características da malha e do modelo de covariancia faz a estimação da variável Z nos nós. Também é determinado o desvio padrão do erro de estimação. Para realizar estas operações é feita a determinação da vizinhança de cada coluna utilizando-se para isto os vetores INDSUC, INDANT, GRAFSU e GRANT e em seguida a vizinhança de cada nó. Ver figura ( VIII.5 ). Dada uma coluna determinam-se faixas de pontos a distâncias progressivas . Esta busca é feita sequencialmente sobre as vizinhanças dos pontos que estão a distâncias progressivas na direção do eixo das abcissas em relação à coluna processada. Para cada ponto dentro desta faixa mas anterior à coluna eliminam-se os antessores e incluem-se os sucessores. Um procedimento análogo é feito para os pontos posteriores à coluna. O limite de pontos em uma vizinhança de coluna é fixado pelo usuário. Nos exemplos considerados este limite é de 150 pontos. Após a determinação da vizinhança da coluna estima-se cada nó sujeito a critérios de distribuição, número mínimo de pontos (IK em PROCOL) e raio de busca (RV em SEPVIC). Após a seleção da vizinhança do nó resolve-se o sistema de Krigeagem.

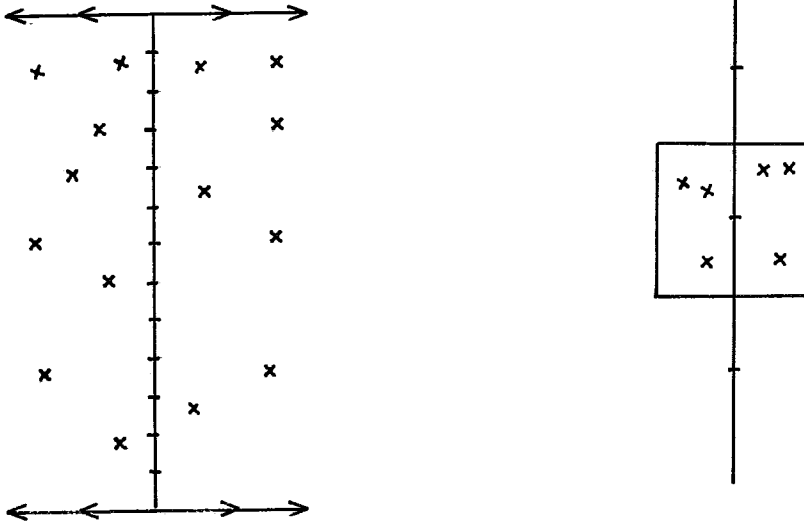


Fig.VIII.5

O sistema de Krigeagem em cada caso tem a forma seguinte:

$$K = 0$$

$$\lambda^i K_{1i} - \mu_0 * 1 = K_{10}$$

$$\lambda^i K_{2i} - \mu_0 * 1 = K_{20}$$

· · ·

$$\lambda^i K_{mi} - \mu_0 * 1 = K_{m0}$$

$$-\lambda^i = -1$$

(VIII.33)

A variancia de estimação é dada por:

$$\sigma_K^2 = K_{00} - \lambda^i K_{i0} + \mu_0^*1 \quad (\text{VIII.34})$$

$K_{00}$  será zero se não houver efeito de pepita.

$$K = 1$$

$$\lambda^i K_{1i} - \mu_0^*1 - \mu_1^*(x_1) - \mu_2^*(y_1) = K_{10}$$

$$\lambda^i K_{2i} - \mu_0^*1 - \mu_1^*(x_2) - \mu_2^*(y_2) = K_{20}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{array}$$

$$\lambda^i K_{mi} - \mu_0^*1 - \mu_1^*(x_m) - \mu_2^*(y_m) = K_{m0} \quad (\text{VIII.35})$$

$$-\lambda^i \quad \quad \quad = -1$$

$$-\lambda^i*(x_i) \quad \quad \quad = -x_0$$

$$-\lambda^i*(y_i) \quad \quad \quad = -y_0$$

Para a variancia de estimação:

$$\sigma_K^2 = K_{00} - \lambda^i K_{i0} + \mu_0^*1 + \mu_1^*(x_0) + \mu_2^*(y_0) \quad (\text{VIII.36})$$

$$K = 2$$

$$\lambda^i K_{1i} = \mu_0^* 1 - \mu_1^*(x_1) - \mu_2^*(y_1) - \mu_3^*(x_1)^2 - \mu_4^*(y_1)^2 - \mu_5^*(x_1)(y_1) = K_{10}$$

$$\lambda^i K_{2i} = \mu_0^* 1 - \mu_1^*(x_2) - \mu_2^*(y_2) - \mu_3^*(x_2)^2 - \mu_4^*(y_2)^2 - \mu_5^*(x_2)(y_2) = K_{20}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$\lambda^i K_{mi} = \mu_0^* 1 - \mu_1^*(x_m) - \mu_2^*(y_m) - \mu_3^*(x_m)^2 - \mu_4^*(y_m)^2 - \mu_5^*(x_m)(y_m) = K_{m0}$$

$$-\lambda^i = -1 \quad (\text{VIII.37})$$

$$-\lambda^i*(x_i) = -x_0$$

$$-\lambda^i*(y_i) = -y_0$$

$$-\lambda^i*(x_i)^2 = -x_0^2$$

$$-\lambda^i*(y_i)^2 = -y_0^2$$

$$-\lambda^i*(x_i)(y_i) = -x_0 y_0$$



A variancia de estimação é :

$$\sigma_k^2 = K_{00} - \lambda^i K_{i0} + \mu_0 * 1 + \mu_1 * (x_0) + \mu_2 * (y_0) + \mu_3 * (x_0)^2 + \mu_4 * (y_0)^2 + \mu_5 * (x_0)(y_0) \quad (\text{VIII.38})$$

Os principais vetores e parametros relativos a este módulo são:

X,Y e Z - vetores que contem os dados originais

ZZ,VAREZZ - matrizes de dimensão NC (número de colunas) por NL(número de linhas)

IGRANT,IGRASU,INDSUC e INDANT - como em SCG1

DMAX - distância máxima definida em ENT DAD

IORD - ordem do modelo de covariância

SC - tamanho do lado da cela

RV - raio de busca para cada nó,

1/SC \* DMAX

AOI,AII,ASI,A2I,AIII,ASII,A2II - coeficientes do modelo de covariância

As principais subrotinas deste módulo são:

Subrotina SEPVIC, chamada no programa principal de SCG2, determina a vizinhança de uma coluna. Chama a Subrotina PROCOL.

Subrotina PROCOL, chamada pela subrotina SEPVIC, determina a vizinhança de cada nó. Chama as subrotinas KRIG0, KRIG1 e KRIG2.

Subrotinas KRIG0, KRIG1 e KRIG2, chamadas pela subrotina PROCOL, resolvem o sistema de krigeagem estimando o valor de Z em um nó, o desvio padrão de estimação também é estimado.

O módulo TRAC a partir das especificações fornecidas pelo usuário, malha de nós, níveis de contorno, escala, etc, traça as cartas de isocontorno. O procedimento de busca e traçado de isocontornos se dá em um nível global e em outro local. No nível global a busca de intersecções dos níveis de contorno desejados e as celas da malha se dá a partir de uma busca em espiral do exterior para o interior da malha. Cada contorno é traçado até o fim, passando-se em seguida ao próximo nível. Ao nível local as celas são percorridas em sentido horário. Uma aresta é considerada interceptada por uma curva de nível se o valor do nível está compreendido entre os valores dos nós. O teste empregado é:

$$\min(Z^*(x_{ij}), Z^*(x_{lk})) \leq C < \max(Z^*(x_{ij}), Z^*(x_{lk})) \quad (\text{VIII.39})$$

Este teste evita um tipo de degeneração que é o de considerar 3 celas interceptadas quando um nível de contorno coincide com o valor atribuído em um nó. Outro tipo

de degeneração é o que corresponde a 4 arestas interceptadas em uma mesma cela. O cruzamento de contornos no interior de uma cela é evitado, adotando-se uma das duas configurações abaixo. Figura VIII.6 . Estas configurações são determinadas pelas posições relativas das abcissas das intersecções nas arestas norte e sul. O traçado de um segmento é feito imediatamente. O controle da busca de intersecções é feita baseada num vetor ,BITMAP, que contem valores 0 ou 1. Estes valores indicam se uma aresta já foi investigada para um dado valor de nível. Tres subrotinas ' FILL0, MARK1 e IGET realizam operações sobre este vetor. Ilustramos este procedimento na figura VIII. 7. Considere os segmentos' representados pelo seguinte código :

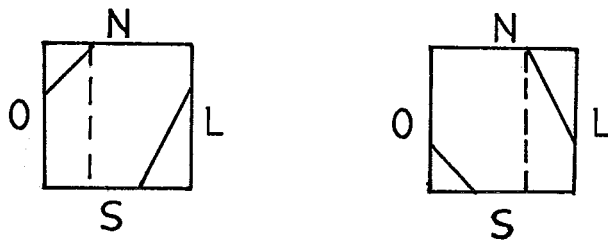


FIG.VIII.6.

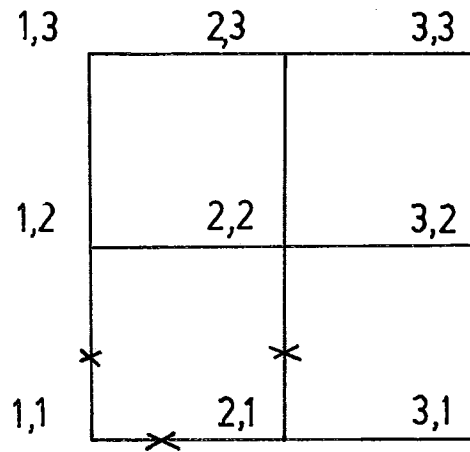


Fig.VIII.7

segmento que vai de (1,1) a (1,2)

$I = 1, J = 1, L = 2$  e  $ICV = 1$

segmento que vai de (1,1) a (2,1)

$I = 1, J = 1, L = 1$  e  $ICV = 1$

segmento que vai de (2,1) a (2,2)

$I = 2, J = 1, L = 2$  e  $ICV = 1$

segmento que vai de (2,1) a (3,1)

$I = 2, J = 1, L = 1$  e  $ICV = 1$

etc. Esta configuração será representada no vetor BITMAP

por :

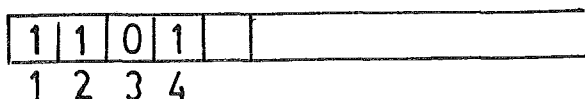


Fig.VIII.8

As posições correspondem às posições dos bits em BITMAP. A correspondência entre o segmento considerado e a posição é dada pela relação:

$$I, J, L, ICV \rightarrow 2 * (NX * (NY * (ICV - 1) + J - 1) + I - 1) + L \quad (\text{VIII.40})$$

Principais vetores e parâmetros do módulo TRAC

Z - matriz com os valores atribuídos a cada nó. Sua dimensão é igual ao número de colunas (NX) pelo número de linhas (NY).

C - vetor que contém os valores de nível.

WORK - vetor de trabalho que representa o vetor BITMAP. Sua dimensão deve ser suficiente para conter  $2 * NCV * NC * NL$  bits.

L - vetor que contém os símbolos associados à cada curva de nível.

XL EN - comprimento da carta na direção do eixo das abscissas.

YL EN - comprimento da carta na direção do eixo das ordenadas.

NXG - número de marcas na moldura da

carta na direção x.

NYG - número de marcas na moldura da carta na direção y.

NOPT - se igual a 0, somente as marcas são traçadas na moldura.

se igual a 1, meridianos são traçados dentro dos limites da carta.

se igual a 2, meridianos são traçados dentro dos limites da moldura.

Principais Subrotinas do módulo TRAC são:

Subrotina TRAC, chamada no programa principal de SCG2, gerencia o módulo TRAC. Inicializa e finaliza o "plotter". Chama as subrotinas CGRID e GCONTR.

Subrotina CGRID, chamada pela rotina TRAC. Faz a moldura da carta.

Subrotina GCONTR - chamada por TRAC. Determina as curvas de nível. Chama as subrotinas FILL0, MARK1 e a função IGET.

Subrotina FILL0, chamada por GCONTR. Aloca zeros nos N primeiros bits de BITMAP, onde N é um parâmetro da subrotina.

Subrotina MARK1, chamada por GCONTR. Aloca o valor 1 no N-ésimo bit de BITMAP.

Função IGET, chamada por GCONTR. Retorna o valor 0 se o N-ésimo bit de BITMAP é zero. Senão retorna o valor 1.

## VIII.5 Estudo de Casos (Continuação)

### VIII.5.1 Amostra Kansas

Como aplicação do programa SCG<sup>1/2</sup> foi gerada uma carta de iso-contornos da região considerada. A carta, figura VIII.9, coincide razoavelmente com as cartas obtidas pelos sistemas COVPAC e SURFACE II. Compare-se por exemplo a carta gerada pelo programa COVPAC com contornos gerados por TRAC, figura VIII.10 com a carta anterior. Na carta obtida por SCG<sup>2</sup> a origem está situada em (-1.5, -1.5) e a escala é 1 : 0.5 milhas. O tempo de execução dos dois programas foi de 51.461 segundos. Sem querer fazer nenhuma comparação cita-se o tempo de execução de COVPAC, que faz a estimação da malha, sem portanto traçar os iso contornos, este tempo foi de 176,405 segundos. Deve-se acrescentar que este sistema faz cálculos adicionais em relação a SCG.

## DADOS DA MALHA

NC 22 NL 12 SCN .50000 RV 4.00000

ORDEM DO MODELO DE COVARIANCIA 01

## COEFICIENTES DO MODELO

AOI 0.00000

AII 7.65800

AZI 96.59000

ASI 0.00000

AIII 0.00000

ASII 0.00000

AZII 0.00000

FIM NORMAL DE GRIDA



MALHA PROCESSADA PELO CONTORNO

NO.DE LINHAS 12 NO.DE COLUNAS 22

MUDANCA DE ESCALA EM X .40 MUDANCA DE ESCALA EM Y .40

CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 01))=-1240.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 02))=-1250.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 03))=-1260.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 04))=-1270.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 05))=-1280.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 06))=-1290.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 07))=-1300.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 08))=-1310.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 09))=-1320.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 10))=-1330.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 11))=-1340.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 12))=-1350.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 13))=-1360.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 14))=-1370.00  
CURVA DE NIVEL TRACADA (C( 15))=-1380.00

FIM NORMAL DE TRACADA

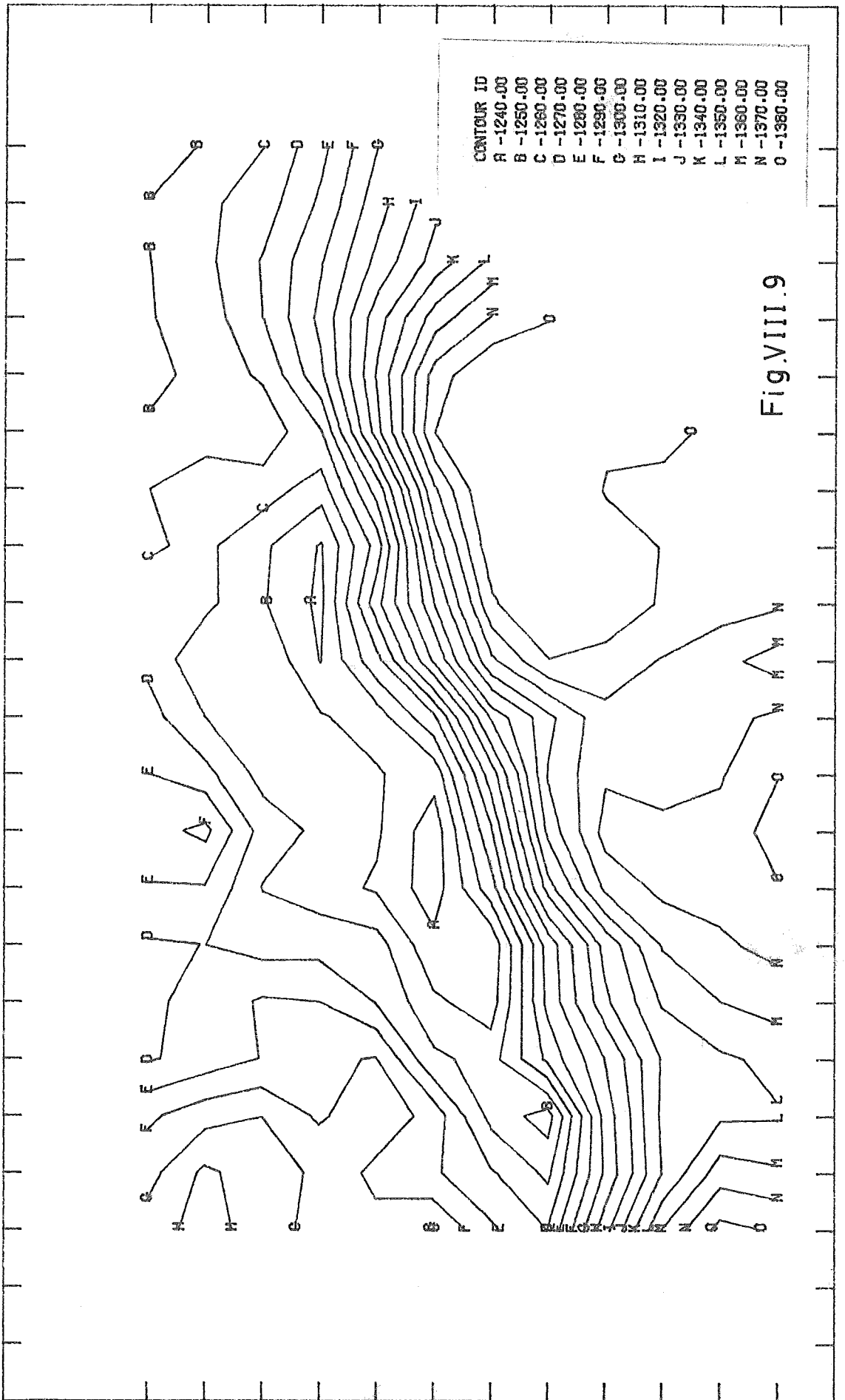


Fig.VIII.9

CONTOUR ID  
 A 1260.00  
 B 1260.00  
 C 1270.00  
 D 1280.00  
 E 1290.00  
 F 1300.00  
 G 1310.00  
 H 1320.00  
 I 1330.00  
 J 1340.00  
 K 1350.00  
 L 1360.00  
 M 1370.00  
 N 1380.00  
 O 1390.00



Fig.VIII.10

## VIII.5.2 Amostra HIMMAG

Na figura VIII.11 apresenta-se uma carta feita manualmente que considera também a informação geológica. O problema reside na descontinuidade do fenômeno geológico que implica na variabilidade do campo magnético. Pode-se observar na carta gerada por SCG2, figura VIII.12, e na malha gerada por GRID, apêndice IV, que o modelo de covariância generalizada suaviza esta tendência. Observa-se também a limitação em reconhecer a anisotropia observada na carta manual. As cartas obtidas por COVPAC apresentaram problemas semelhantes. Outro aspecto a considerar é o efeito do plano de amostragem sobre a geração da carta.

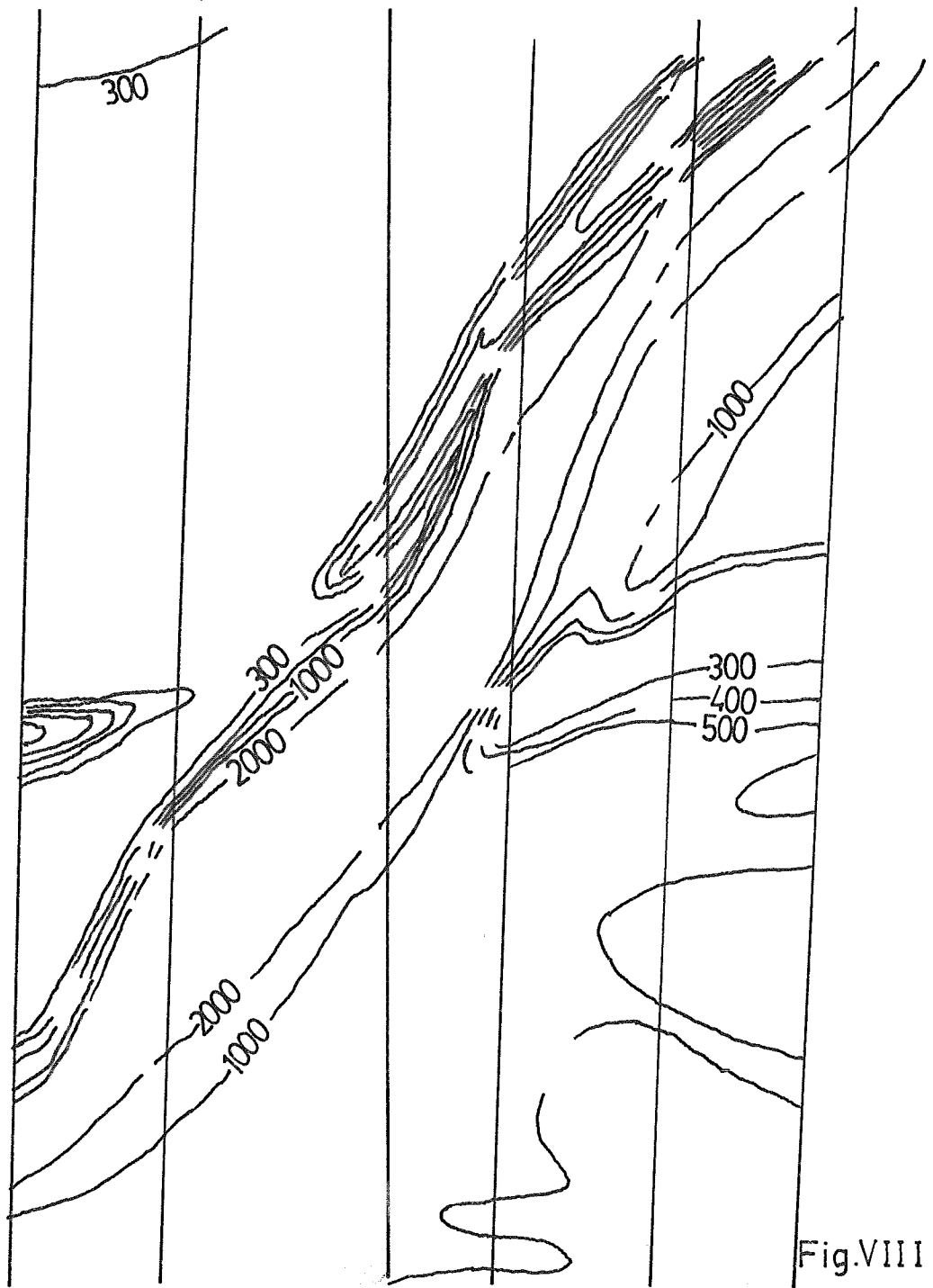


Fig.VIII.11

## DADOS DA MALHA

NC 13 NL 25 SCM 20:00000 RV 7.50000

ORDEM DO MODELO DE COVARIANCIA 1

## COEFICIENTES DO MODELO

AOI 0.00000

AII 0.00000

AZI 0.00000

ASI 250.55521

AIII 0.00000

ASII 0.00000

AZII 0.00000

## MALHA PROCESSADA PELO CONTORNO

NO. DE LINHAS 25 NO. DE COLUNAS 13

MUDANCA DE ESCALA EM X .32 MUDANCA DE ESCALA EM Y .32



CURVA DE NIVEL TRACADA C( 1)= 300.00

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 2)= 400.00

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 3)= 500.00

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 4)= 1000.00

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 5)= 2000.00

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 6)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 7)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 8)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 9)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 10)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 11)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 12)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 13)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 14)=\*\*\*\*\*

CURVA DE NIVEL TRACADA C( 15)=\*\*\*\*\*

FIM NORMAL DE TRAC.

CONTOUR ID  
 A 300.00  
 B 400.00  
 C 500.00  
 D 1000.00  
 E 2000.00  
 F #####  
 G #####  
 H #####  
 I #####  
 J #####  
 K #####  
 L #####  
 M #####  
 N #####  
 O #####

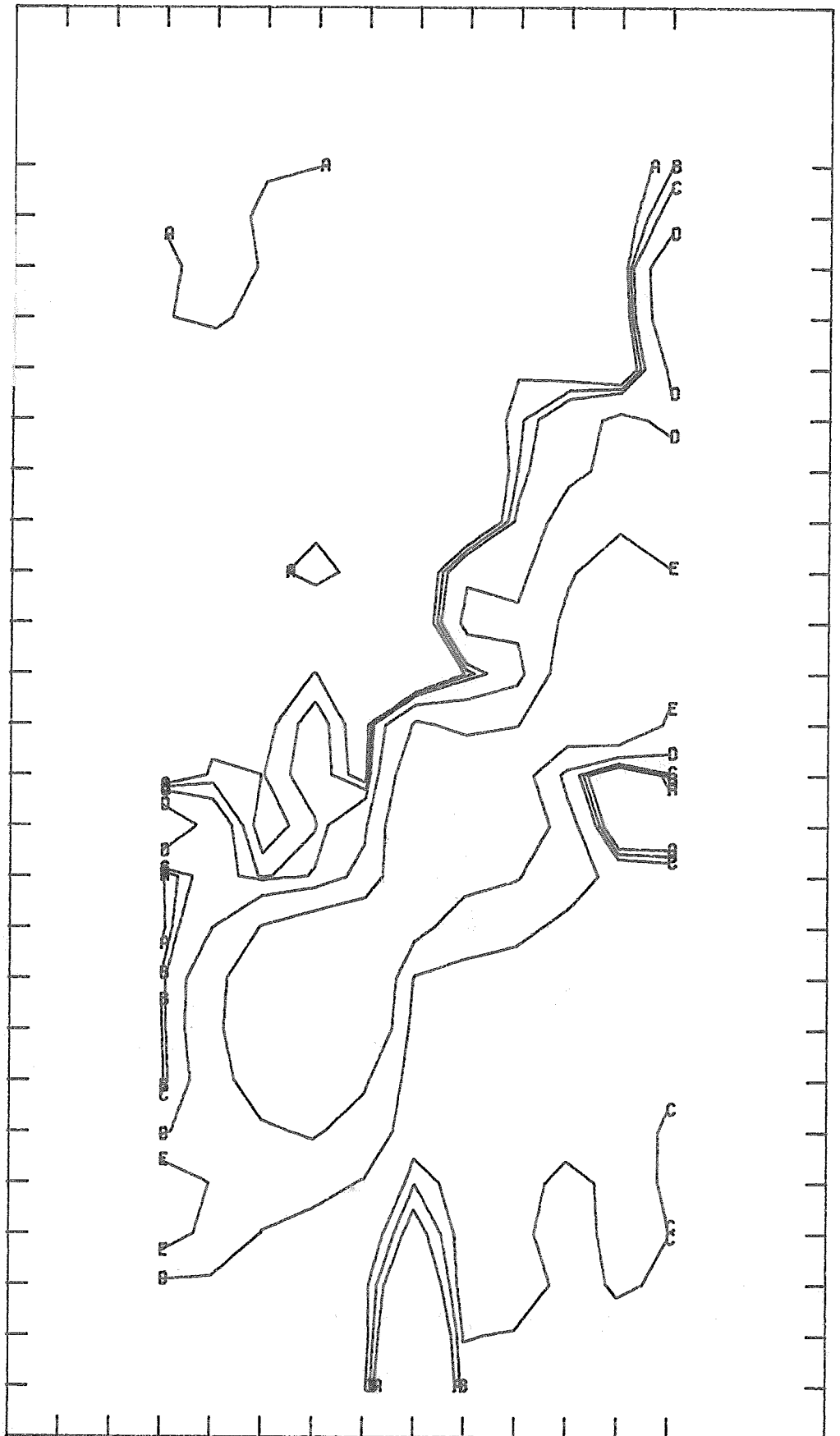


Fig.VIII.12

## IX. Perpectivas e Conclusões

### IX.1 Introdução

Neste último capítulo são abordados alguns tópicos de interesse para o modelo de krigeagem. Na primeira seção será tratada a questão da inferência dos coeficientes da CG. Em seguida a utilização da vizinhança única no sistema de krigeagem e a introdução de novos modelos de CG serão respectivamente apresentados nas seções 3 e 4. Finalmente faz-se uma avaliação das tendências de pesquisa na teoria das FAI-k.

### IX.2 Inferência dos coeficientes da CG

Sejam

$$K(h) = c\delta + \sum_{j=0}^k \tau_j |h|^{2j+1} \quad (1)$$

$$\text{VAR}(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} K(x_{\alpha} - x_{\beta}) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2)

$$\text{VAR}(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha}) = c \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 + \sum_j \tau_j \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} |x_{\alpha} - x_{\beta}|^{2j+1} \quad (3)$$

A estimação dos coeficientes  $c$  e  $\tau_j$  vai ser feita a partir da regressão da variável

$$Q_i = \left( \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha_i} Z_{\alpha} \right)^2 \quad (4)$$

pelas variáveis

$$\Lambda = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha_i}^2 \quad T_{ji} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha_i} \lambda_{\beta_i} |x_{\alpha} - x_{\beta}|^{2j+1} \quad (5)$$

Supondo-se a distribuição de  $Q_i$  normal

$$\begin{aligned} \text{VAR}(Q) &= 2\{\text{Var}(\sum \lambda_\alpha Z_\alpha)\}^2 = \\ &= 2\{E(Q)\}^2 = \\ &= 2\{\sum \sum \lambda_\alpha \lambda_\beta K(x_\alpha - x_\beta)\}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{logo se } K(h) = |h|, \text{ VAR}(Q) \text{ é proporcional a } T_0^2 = |h|^2 \quad (7)$$

$$\text{e se } K(h) = |h|^3, \text{ VAR}(Q) \text{ é proporcional a } T_1^2 = |h|^6 \quad (8)$$

o que justifica tomar como pesos na equação de regressão (3)

$$W_{oi}^2 = T_{oi}^{-2} \quad \text{ou} \quad W_{li}^2 = T_{li}^{-2} \quad (9)$$

Ainda baseando-se na hipótese de normalidade  $N(0, \sigma^2)$ , tem-se que :

$$Q^2/\sigma^2 \sim \chi_1^2 \quad (10)$$

permitindo a determinação de intervalos de confiança para os coeficientes  $\tau_j$ . Ver STARKS e FANG (118).

Como índices para o ajuste de mínimos quadrados po de-se considerar

$$R(C; \tau_j) = \sum_m w_m \{ \lambda_m^2 - C\lambda_m - \sum_j \tau_j T_{jm} \} \quad (11)$$

$$R(0; 0) = \sum_m w_m \lambda_m^2 \quad (12)$$

$$E\{R(0; 0)\} = \sum_m w_m 3K(\lambda_m)^4 \quad (13)$$

$$E\{R(C; \tau_j)\} = \sum_m w_m 2K(\lambda_m)^4 \quad (14)$$

$$E\{R(C; \tau_j)\}/E\{R(0; 0)\} = 2/3 \quad (15)$$

(15) fornece portanto um índice para avaliar os valores estima dos dos coeficientes da CG.

Outro critério é obtido a partir da expressão (2)

$$r = \frac{\sum \text{VAR}(\lambda_m)}{\sum K(\lambda_m)} \quad (16)$$

que é um estimador tendencioso de

$$\rho = \frac{\sum E\{\text{VAR}(\lambda_m)\}}{\sum E\{K(\lambda_m)\}} \quad (17)$$

se o modelo de CG é bem adaptado  $\rho$  é 1. Para reduzir a tendenciosidade de  $r$  usa-se o critério "jack-knife", MATHERON (80). O conjunto de pontos em uma vizinhança é dividido em duas partes: um anel interno e outro externo. Calculam-se os valores de  $r$  em cada um destes anéis. O estimador "jack-knife"  $\hat{\rho}$  para  $\rho$  é então dado por :

$$\hat{\rho} = 2r - (n_1 r_1 + n_2 r_2) / (n_1 + n_2) \quad (18)$$

Para testar a estimação de  $Z$  pode-se adotar o procedimento seguinte: eliminar um ponto conhecido da amostra e estima-lo por krigeagem. Sejam  $Z(x_\alpha)$  e  $Z^*(x_\alpha)$  respectivamente os valores real e estimado. Denota-se  $Z^*(x_\alpha) - Z(x_\alpha)$  por  $S_\alpha$  e a variância teórica por  $\sigma_\alpha$ . Se o ajustamento é correto deve-se ter

$$1/n \sum s_\alpha^2 / \sigma_\alpha^2 = 1 \quad (19)$$

Deve-se tomar  $n \geq 30$  para se ter uma média correta, supõe-se também  $s_\alpha / \sigma_\alpha$  normal e independente, CHILES (21).

Aplicam-se nas equações de regressão vistas as técnicas desenvolvidas para melhorar a inferência dos coeficientes. Assim pode-se pensar em utilizar o critério de Mínimo Valor Absoluto, WILSON (132), como um critério mais resistente que o de mínimos quadrados. Ou ainda compensar a multicolinearidade com o método de regressão limitada (ridge regression), JONES (55)

### IX.3 A utilização de vizinhança única

Ao menos uma motivação importante para a utilização

do sistema de krigeagem com vizinhança única reside nas exigências que geólogos na área de petróleo tem em relação às cartas de isovalores. Em JONES (56) quatro delas são citadas: coerência dos contornos com respeito aos dados iniciais, curvas suaves e regulares, extrapolação contínua e ausência de variações abruptas do gradiente. O emprego de vizinhanças locais é identificado por varios autores, DAVIS (38) e DUBRULE (45), como fonte de variações irregulares da função estimada ou interpolada. A utilização da vizinhança única vai também permitir a aplicação do sistema de krigeagem no traçado de curvas de isovalores, OLAYO (90). Em termos praticos trabalha-se com vizinhanças pseudo-únicas. Em DUBRULE (45) é proposto o esquema abaixo:

$R_1$	$R_1 \cap R_2$	$R_2$
$R_1 \cap R_4$	$R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$	$R_2 \cap R_3$
$R_4$	$R_4 \cap R_3$	$R_3$

A utilização do sistema com vizinhança única traz um problema ao nível da resolução de sistemas de médio e grande porte. Entretanto dispõe-se atualmente de algoritmos eficientes para tratar alguns casos particulares como o do sistema de krigeagem, cuja matriz pode ser reduzida a uma matriz de banda, DAVIS (38).

Para este problema propõe-se um algoritmo a ser aplicado a partir dos vetores IGRASU, IGRANT, INDSUC e INDANT gerados pelo módulo ENTIDAD, cap. VIII. Vai-se supor que o alcance do variograma ou da covariância é  $\leq d$ , ou seja para pontos locais

lizados a uma distância  $> d$  o valor da covariância é zero. Isto vai implicar que a matriz de krigagem vai ter elementos nulos distribuídos irregularmente em suas linhas e colunas. Para se obter uma matriz de banda vai-se proceder por etapas

etapa 1: ordenação dos dados segundo o critério lexicográfico (cap. VIII).

etapa 2: aplicação do módulo entidad igual a  $d$ .

etapa 3: aplicação do algoritmo PERMUT.

O algoritmo aplica-se a grafos com uma única origem ou a grafos compostos por sub-grafos desconexos entre si tais que cada sub-grafo tem aquela propriedade.

#### Algoritmo Permut

$i$  : índice do  $i$ -ésimo ponto da amostra

$\mathbb{I}(i)$  : vetor permutação, dá a posição do vetor  $i$

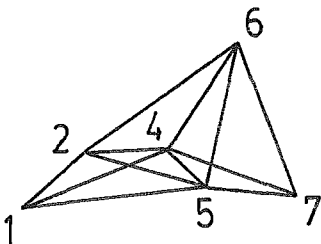
$\mathbb{I}^{-1}(i)$  : vetor inverso de  $\mathbb{I}$ , para cada posição diz qual ponto está associado

INDSUC, IGRASU : como no cap. VIII.

$n$  : número total de pontos

O algoritmo vai ser apresentado por meio de um exemplo:

3.



INDSUC

1	4	7	8	11	13	14
---	---	---	---	----	----	----

IGRASU

2	4	5	4	5	6	0	5	6	7	6	7	7	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$\pi(i)=i$  e  $\pi I(i)=i$  ,  $i=1, \dots, n$  ;

$i=1$  ;

$\ell=1$  ;

$j=2, 4, 5$  ;

$\pi(2)=2 > \ell=1 \rightarrow \pi(j=2)=\ell+1=2$

$\pi I(2)=2$

$\ell=\ell+1=2$

$\ell=2 < n=7 \rightarrow \text{continue}$

$\pi(4)=4 > \ell=2 \rightarrow \pi(j=4)=\ell+1=3$

$\pi I(3)=3 \rightarrow \pi(3)=4$

$\pi I(4)=3$

$\pi I(3)=4$

$\ell=\ell+1=3$

$\ell=3 < n=7 \rightarrow \text{continue}$

$\pi(5)=5 > \ell=3 \rightarrow \pi(j=5)=\ell+1=4$

$\pi I(4)=3 \rightarrow \pi(3)=5$

$\pi I(5)=3$

$\pi I(4)=5$

$\ell=\ell+1=4$

$\ell=4 < n=7 \rightarrow \text{continue}$

$i=2$  ;

$\ell=4$  ;

$j=4, 5, 6$  ;



$\pi(4)=3 > 4$  ? Não.  $\rightarrow j=5$   
 $\pi(5)=4 > 4$  ? Não.  $\rightarrow j=6$   
 $\pi(6)=6 > 4$   $\rightarrow \pi(6)=5$   
 $\pi I(5)=3 \rightarrow \pi(3)=6$   
 $\pi I(6)=3$   
 $\pi I(5)=6$   
 $l=l+1=5$   
 $l=5 < n=7$   $\rightarrow$  continue

$i=4$  ;  
 $l=5$  ;  
 $j=5,6,7$  ;  
 $\pi(5)=4 > 5$  ? Não.  $\rightarrow j=6$   
 $\pi(6)=5 > 5$  ? Não.  $\rightarrow j=7$   
 $\pi(7)=7 > 5$   $\rightarrow \pi(7)=6$   
 $\pi I(6)=3 \rightarrow \pi(3)=7$   
 $\pi I(7)=3$   
 $\pi I(6)=7$   
 $l=l+1=6$   
 $l=6 < n=7$   $\rightarrow$  continue

$i=5$  ;  
 $l=6$  ;  
 $j=6,7$  ;  
 $\pi(6)=5 > 6$  ? Não.  $\rightarrow j=7$   
 $\pi(7)=6 > 6$  ? Não.  $\rightarrow$  novo  $i$

$i=2$  ;

$l=6$  ;

$j=4, 5, 6$  ;

$\pi(4)=3 > 6$  ? Não.  $\rightarrow j=5$

$\pi(5)=4 > 6$  ? Não.  $\rightarrow j=6$

$\pi(6)=5 > 6$  ? Não.  $\rightarrow$  novo  $i$

$i=3$  ;

$l=6$  ;

$j=0$  ;

$\pi(3)=7 > 6$   $\rightarrow \pi(3)=7$

$\pi I(7)=3$

$l=l+1=7$

$l=7 < n=7$  ? Não. Pare.

A matriz de covariância na ordem original é :

	1	2	3	4	5	6	7
1	x	x		x	x		
2		x		x	x	x	
3			x				
4				x	x	x	x
5					x	x	x
6						x	x
7							x

Na nova ordem tem-se:

	1	2	4	5	6	7	3
1	x	x	x	x			
2		x	x	x	x		
4			x	x	x	x	
5				x	x	x	
6					x	x	
7						x	
3							x

#### IX.4 A noção de variograma generalizado de ordem k

Nesta seção vai-se supor que os dados estão dispostos regularmente sobre retas no espaço. Esta restrição não é estranha à prática dos métodos de krigeagem, JOURNEL (58). O conceito de variograma generalizado, MATHERON (84), CHAUVET (15), (16) e OLAYO (90), vai permitir trabalhar com os métodos da análise estrutural clássica no contexto da teoria das FAI-k.

No capítulo VI a função variograma foi definida como

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{VAR}\{Z(x+h) - Z(x)\} \quad (20)$$

$Z(x+h) - Z(x)$  é uma diferença de ordem 1 e pode ser definida como o resultado do operador linear  $\Delta$  aplicado a  $Z(x)$ . Aplicações sucessivas de  $\Delta$  nos dão a diferença de ordem  $k+1$ .

$$\Delta^{k+1} Z(x) = \sum_{q=0}^{k+1} (-1)^q C_{k+1}^q Z(x+(k+1-q)h) \quad (21)$$

A esta diferença,  $Y_h^k(x)$ , corrigida de um certo fator  $M_k$  vai-se associar o variograma generalizado de ordem  $k$ .

$$\Gamma_k(h) = \frac{1}{M_k} \text{VAR}\{Y_h^k(x)\} \quad (22)$$

( $M_k$  é tal que  $\Gamma_k(h) = C_0$  se a variável  $Z$  representa um efeito de pepita puro)

$$M_k = C \frac{k+1}{2k+2} \quad (23)$$

A partir de (21) pode-se estabelecer uma relação entre  $\Gamma_k$  e a covariância generalizada, OLAYO (90).

$$\Gamma_k(h) = \frac{1}{M_k} \sum_{p=-k-1}^{k+1} (-1)^p C \frac{k+1-p}{2k+2} K(hp) \quad (24)$$

Em particular para  $k=1, 2$  e  $3$  tem-se

$$\Gamma_1(h) = K(0) - \frac{4}{3}K(h) + \frac{1}{3}K(2h) \quad (25)$$

$$\Gamma_2(h) = K(0) - \frac{3}{2}K(h) + \frac{3}{5}K(2h) - \frac{1}{10}K(3h) \quad (26)$$

$$\Gamma_3(h) = K(0) - \frac{8}{5}K(h) + \frac{4}{5}K(2h) - \frac{8}{35}K(3h) + \frac{1}{35}K(4h) \quad (27)$$

desta forma estabelecem-se modelos teóricos para  $\Gamma$ . Por exemplo para  $k=1$  e  $K(h) = -b_0 h + b_1 h^3$  tem-se  $\Gamma_1(h) = \frac{2}{3}b_0 h + \frac{4}{3}b_1 h^3$ .

Outros exemplos podem ser encontrados em OLAYO (90).

Para determinar a ordem vai-se definir o variograma dos incrementos:

$$\gamma_k(h, \ell) = \frac{1}{2} \text{VAR}\{Y_h^k(x+\ell) - Y_h^k(x)\} \quad (28)$$

Ora , quando os incrementos de ordem  $k$  são estacionários, o variograma dos incrementos vai ter uma "portée" além da qual seu valor é constante.

A metodologia de análise estrutural se estabelece nas seguintes etapas:

- 1-Cálculo do variograma generalizado experimental  $\Gamma_k^*(h)$  a partir da expressão (22) para as ordens 0,1 e 2.
- 2-Construção dos incrementos  $Y_h^k(x+l) - Y_h^k(x)$  e calcular o variograma experimental dos acréscimos.
- 3-Analisar os graficos e determinar a ordem  $k$ .
- 4-Utilizando a expressao (24) determinar os parâmetros da covariância generalizada a partir de  $\Gamma_k^*$ .

Pode-se também utilizar a covariância dos incrementos :

$$C_k(h, l) = C\{Y_h^k(x), Y_h^k(x+l)\} \quad (29)$$

ao invés do variograma dos incrementos. Obtem-se expressões de  $C_k(h, l)$  em função de  $K$  ou de  $K$  em função de  $C_k$ . Para mais detalhes remete-se o leitor às referências citadas.

## IX.5 Conclusões

Do modelo estacionário intrínseco evoluiu-se ao modelo não estacionário intrínseco de ordem  $k$  que engloba o precedente. A limitação às expressões "polinomiais" para a CG foi diminuída com a introdução da CG com termo "spline" e com as possibilidades que se abrem a partir do variograma generalizado de ordem  $k$ .

A inferência estatística antes limitada à norma eu

clideana e portanto associada a certas hipóteses de normalidade no que diz respeito à otimalidade dos estimadores obtidos adota outros critérios tais como o de mínimo valor absoluto ou de resistência ou ainda robustez.

A influência dos métodos de Algebra Linear Computacional se faz presente quando se introduz a condição de vizinhança única.

A teoria de Krigeagem portanto se enriquece não somente a partir dos conceitos que são gerados em seu interior , mas, também das aplicações de outros ramos da estatística ou da Análise Numérica.

A sua aplicação em cartografia se torna cada vez ' mais importante na medida que disponha de uma variedade de modelos representativos dos conjuntos particulares de caracterís'ticas associados à cada fenômeno em estudo.

Bibliografia

1. AGTERBERG, F.P. e CABILIO, P., "Two Stage Least-Squares Model for the Relationship between Mappable Geological Variables", Mathematical Geology, vol. 1, n<sup>o</sup> 2, pp. 250-266 (1969).
2. AGTERBERG, F.P., Geomathematics, Elsevier Scientific Company, (1974).
3. AKIMA, H., "A Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Irregularly Distributed Data Points ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 4, n<sup>o</sup> 2, pp. 148-159, Jun. 1978.
4. ARMSTRONG, M., "A Cross Classification of the Internal Reports on Geostatistics of the Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique Fontainebleau, France", Mathematical Geology, vol. 14, n<sup>o</sup> 5 pp. 509-537, (1982).
5. ARMSTRONG, M., "Improving the Estimation and Modelling of the Variogram", In: Geostatistics for Natural Resources Characterization, 2nd NATO Advanced Study Institute, pre-prints, (1983).
6. BHATTACHARYYA, B.K. e HOLROYD, M.T., "Automatic Contouring of Geophysical Data Using Bicubic Spline Interpolation Geological Survey of Canada, paper 70-55, (1970).
7. BOOR, C., A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag (1978)

8. BOYLE, A.R., "Development in Equipment and Techniques", In :  
The Computer in Contemporary Cartography, editado por  
TAYLOR, D.P.F., John & Wiley, (1980).
9. BOWYER, A., "Computing Dirichlet Tesselations", The Computer  
Journal, vol. 24, n<sup>o</sup> 2, pp. 162-166, (1981).
10. BRAGA, L.P.V., MORGADO, J.C.S., BASTOS, V.M., "Análise de um pro  
grama Gerador de Malha e suas consequências sobre o tra  
çado de Contornos", Relatorio Técnico do Programa de En  
genharia de Sistemas e Computação, COPPE, UFRJ, (1981).
11. BRAGA, L.P.V., "Mapping Techniques using Universal Kriging"  
Publication #453, Département d'informatique et de  
Recherche Opérationnelle, Université de Montreal, (1982).
12. BRAGA, L.P.V. e MACULAN N., "Kriging Theory and Applications  
for Automated Cartography", Publication #477, Département  
d'informatique et de Recherche Opérationnelle, Université  
de Montréal, (1983).
13. BRAGA, L.P.V. e MACULAN N., "Une Méthodologie pour la  
Réalisation de Cartes Géologiques", Publication #496  
Département d'informatique et de Recherche  
Opérationnelle, Université de Montréal, (1984).
14. CARLSON, E.D. et alia, "The Design and Evaluation of an  
Interactive Geo-Data Analysis and Display System", Rep. RJ  
1342, IBM Research Laboratory, San Jose, California. (1974).
15. CHAUVET, P., "Analyse Structurale Directe d'une FAI-k a 1  
dimension", N-752 CGMM, Fontainebleau, (1982).
16. CHAUVET, P., "Construction de Modeles Nouveaux de Covariances  
Generalisees", N-845 CGMM, Fontainebleau, (1983).



17. CHAVES, H.A.F., "Mapas Batimétricos, Problemas de Construção e de Análise Automática", Tese de Mestrado, Departamento de Informática, PUC-RJ, (1978).
18. CHILES, J.P. e CHAUVET, P., "Application du Krigeage Universel à la Cartographie des fonds marins", N-354 CGMM, (1973).
19. CHILES, J.P., "Etude de la Bathymétrie de la Mer d'Iroise " N-361 CGMM, (1973).
20. CHILES, J.P. e DELFINER, P., "Reconstitution par Krigeage de la Surface Topographique à partir de Divers Schemas d'Echantillonnage Photogrammétrique", N-388 CGMM, (1974).
21. CHILES, J.P., "Geostatistique des Phénomènes Non Stationnaires", Thèse Docteur Ingénieur, Université de Nancy, (1977).
22. CHILES, J.P., "L'inference Statistique Automatique des FAI-K" N-584 CGMM, (1978).
23. CHILES, J.P., "La Derive à la Derive", N-591 CGMM, (1979).
24. McCONALOGUE, D.J., "A Quasi-Intrinsic Scheme for Passing a Smooth Curve through a Discrete Set of Points", The Computer Journal, vol.13 n<sup>o</sup> 4, pp. 392-396, Nov. 1970.
25. McCONALOGUE, D.J., "An Automatic French Curve Procedure for use with an Incremental Plotter", The Computer Journal vol. 14, pp. 207-209, (1971).
26. COTTAFAVA, G. e LE MOLI G., "Automatic Contour Map", Communications of the ACM, vol.12, n<sup>o</sup> 7, pp. 386-391 (1969)
27. CRANE, C.M., "Contour Plotting for Functions Specified at Nodal Points of an Irregular Mesh based on an arbitrary Two Parameter Co-Ordinate System", The Computer Journal, vol.15, n<sup>o</sup> 4, pp. 382-384, (1972).

28. CRESSIE, N. e HAWKINS, D., "Robust Estimation of the Variogram", Mathematical Geology, vol. 12, pp 115-125, 1980
29. CRESSIE, N., "Towards Resistant Geostatistics", In: Geostatistics for Natural Resources Characterization 2nd NATO Advanced Study Institute, pre-prints, (1983).
30. Czeglédy, P.F., "Efficiency of Local Polynomials in Contour Mapping", Mathematical Geology, vol. 4, n<sup>o</sup> 4, pp 291-305 (1972).
31. DAVID, M., "The Practice of Kriging", In: Advanced Geostatistics in the Mining Industry, editado por GUARASCIO, M. e alii, publicado por REIDEL, D., (1976).
32. DAVID, M. e DAVIS, M., "Polypac 1, Version 1, Users Guide", IREM McGill University e Ecole Polytechnique de Montréal (1977).
33. DAVID, M., Geostatistical Ore Reserve Estimation, Elsevier Scientific Publishing Company, (1977).
34. DAVID, M. e DAVIS, M.W.D., "Automatic Kriging and Contouring in the Presence of Trends", The Journal of Canadian Petroleum Technology, vol. 17, n<sup>o</sup> 1, (1978).
35. DAVID M., DAVIS, M.W.D. e BELISLE, J.M., "A Fast Method for the Solution of a System of Simultaneous Linear Equations-A Method Adapted to a Particular Problem", Mathematical Geology, vol. 10, n<sup>o</sup> 4, pp. 369-374, (1978).
36. DAVID, M. e colaboradores, "Geostat Systems", Internal Report (1982).
37. DAVID M. e DAVIS M.W.D., "Generating Bicubic Spline Coefficients on a Large Regular Grid", Computer & Geosciences, vol. 6, pp. 1-6, (1980).

38. DAVIS, M.W. e CULHANE, P.G., "Contouring Very Large Datasets Using Kriging", In: Geostatistics for Natural Resources Characterization 2nd NATO Advanced Study Institute, preprints, (1983).
39. DELFINER, P. e DELHOMME, J.P., "Presentation du Programme BLUEPACK", Tech. Rep., Ecole des Mines de Paris, (1973).
40. DELFINER, P. e DELHOMME, J.P., "Optimum Interpolation by Kriging", In: Display and Analysis of Spatial Data, ed. DAVIS, J.C. e McCULLAGH, M.J., publicado por John Wiley, (1975).
41. DELFINER, P., "Linear Estimation of Non Stationary Spatial Phenomena", In: Advanced Geostatistics in the Mining Industry, editado por GUARASCIO, M. e alii, publicado por REIDEL, D., (1976).
42. DELFINER, P., DELHOME, J.P., CHILES, J.P., "Bluepack, Manuel d'Utilization" Centre de Geostatistique, (1976).
43. DELFINER, P., "The Intrinsic Model of Order K", CG C77, CGMM, (1979).
44. DOWD, P.A., "The Variogram and Kriging: Robust and Resistant Estimators", In: Geostatistics for Natural Resources Characterization 2nd NATO Advanced Study Institute, preprints, (1983).
45. DUBRULE, O. "Krigage et Splines en Cartographie Automatique- Application à des exemples Pétroliers", Thèse Docteur Ingénieur, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1981).
46. GEOSTAT, "COVPAC User's Guide Version VI.2", GEOSTAT Int., Montreal, (1981)

47. GEOSTAT, "ISOPOLY USER'S GUIDE", GEOSTAT Int., Montréal (1981)
48. GONDRAN, M. e MINOUX, M., Graphes et Algorithmes, Eyrolles ,  
Paris.
49. GOLD, C.M., "The Practical Generation and use of Geographic  
Triangular Element Data Structures", First International  
Advanced Study Symposium on Topological Data Structures  
for Geographic Information Systems, vol.5, Harvard Papers  
on Geographic Information Systems, ed. por DUTTON, G. 1978
50. GOLD, C.M., "Geological Mapping by Computer", In: The Computer  
in Contemporary Cartography, editado por TAYLOR D.R.F. ,  
publicado por John Wiley. ( 1980 ).
51. GREEN, P.J. e SIBSON, R., "Computing Dirichlet Tessellations in  
the Plane", The Computer Journal, vol.21, n<sup>o</sup> 2, pp. 168-173  
1978.
52. HAAS, A. e JOUSSELIN, C., "Geostatistics in Petroleum Industry  
In: Advanced Geostatistics in the Mining Industry" ,  
Publicado por REIDEL, D., (1976).
53. HUIJBREGTS, C.J., "Courbes d'isovariance en Cartographie  
Automatique", N-254 CGMM, (1971).
54. HUIJBREGTS, C.J., "Regionalized Variables and Quantitative  
Analysis of Spatial Data", In: Display and Analysis of  
Spatial Data, editado por DAVIS J.C. e McCULLAGH ,  
publicado por John Wiley, (1975).
55. JONES, T.A., "Multiple Regression with Correlated Independent  
Variables", Mathematical Geology, vol.4, n<sup>o</sup> 3, pp 203-218 ,  
(1972).
56. JONES, T.A., "Problemas in using Geostatistics for Petroleum  
Applications", In: Geostatistics for Natural Resources

- Characterization, 2nd. NATO Advanced Study Institute ,  
pre-prints, (1983).
57. JOURNEL, A.G., "Kriging in Terms of Projections", Mathematical Geology, vol. 9, n<sup>o</sup> 6, pp. 563-586, (1977).
58. JOURNEL, A.G. e HUIJBREGTS, C.J., Mining Geostatistics ,  
Academic Press, (1978).
59. JOURNEL, A.G., "mAD and Conditional Quantile Estimators", In:  
Geostatistics for Natural Resources Characterization ,  
2nd NATO Advanced Study Institute, pre-prints, (1983).
60. KENDALL, M., Time Series, Hafner Press, (1976).
61. KOCH, G.S. Jr. e LINK, R.F., Statistical Analysis of Geological Data, Vol. II, John Wiley, (1971).
62. LABLOG, "Laboratory for Computer Graphics & Spatial Analysis"  
(1980).
63. McLAIN, D.H., "Drawing Contours from Arbitrary Data Points" ,  
The Computer Journal, Vol. 17, pp 318-324, (1974).
64. McLAIN, D.H., "Two Dimensional Interpolation from random data"  
The Computer Journal, vol. 19, pp. 178-181, (1976).
65. LAWSON, C.L., "Software for  $C^1$  Surface Interpolation", In :  
Mathematical Software III, editado por RICE, J.R. ,  
Academic Press, (1977).
66. LOÈVE, M., "Probability Theory", Van Nostrand, (1963).
67. MATHERON, G., "Principles of Geostatistics", Economic Geology  
Vol. 58, pp. 1246-1266, (1963).
68. MATHERON, G., Les Variables Régionalisées et leur Estimation,  
Masson et Cie., (1965).
69. MATHERON, G., "Kriging or Polynomial Interpolation  
Procedures?", Transactions of The Canadian Mining and

- Metallurgical Bulletin, Vol. LXX, pp. 240-244, (1967).
70. MATHERON, G., "La Théorie des Fonctions Aléatoires Intrinsèques Généralisées", Note Geostatistique No. 117, CGMM, (1971).
71. MATHERON, G., "Quelques Aspects de la Montée", Note Geostatistique No. 120, CGMM, (1972).
72. MATHERON, G., "Compléments sur les FAIG", Note Geostatistique No. 122, CGMM, (1972).
73. MATHERON, G., "Les Covariances Généralisées Polynomiales", Note Geostatistique No. 123, CGMM, (1972).
74. MATHERON, G., "Théorie des Variables Régionalisées", In : Traité d'Informatique Géologique, Masson et Cie., (1972).
75. MATHERON, G., "Leçons sur les Fonctions Aléatoires d'ordre 2", C-53 CGMM, (1972).
76. MATHERON, G., "The Intrinsic Random Functions and their Applications", Adv. Appl. Prob. 5, pp. 439-468, (1973).
77. MATHERON, G., "Représentations Stationnaires et Représentations Minimales pour les FAI-K", Note Geostatistique No. 125, CGMM, (1974).
78. MATHERON, G. e CHILES, J.P., "Interpolation Optimale et Carthographie", N.427, CGMM, (1975).
79. MATHERON, G., "Comment Translater les Catastrophes, La Structure des FAI Generales", N-617, CGMM, (1979).
80. MATHERON, G. e DELFINER, P., "Les Fonctions Aleatoires Intrinseques d'ordre K", CGMM, (1980).
81. MATHERON, G., "Splines et Krigeage: leur equivalence formelle" CGMM, (1980).
82. MATHERON, G., "Remarques sur le Krigeage et son Dual", N-695

- CGMM, (1981).
83. MATHERON, G., "Splines et Krigeage le cas fini", N-698, CGMM , (1981).
84. MATHERON, G., "Simulation des FAI-K discretés", N 751 CGMM , (1982).
85. MAUDE, A. D., "Interpolation—Mainly for Graph Plotters", The Computer Journal, vol. 16, pp. 64-65, (1973).
86. MIRANTE, A. e WEINGARTEN, N., "The Radial Sweep Algorithm for Constructing Triangulated Irregular Networks", IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 2, N<sup>o</sup> 3, pp. 11-21 (1982).
87. MONMONIER, M. S., "Maps, Distortion & Meaning", Association of American Geographers, Resource Paper n<sup>o</sup> 75-4, (1980).
88. NAGY, G. e WAGLE, S., "Geographic Data Processing", Computer Surveys, vol. 11, n<sup>o</sup> 2, pp. 139-181, (1979).
89. NORDBECK, S. e RYSTEDT, B., "Computer Cartography" , Studentlitteratur, Lund, Sweden, (1972).
90. OLAYO, E. M., "Geostatistique et Cartographie Automatique : Application aux Données Sismiques", Thèse de Docteur Ingénieur, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1982).
91. OLEA, R. A., "Optimal Contour Mapping Using Universal Kriging", Journal Geophysical Research, Vol. 79, N<sup>o</sup> 5 , PP. 695-702, (1974).
92. OLEA, R. A., "Optimum Mapping Techniques using Regionalized Variable Theory", Report # 2, Series on Spatial Analysis, Kansas Geological Survey, (1976).
93. OLEA, R. A., "Measuring Spatial Dependence with Semivariograms"

- Report # 3, Series on Spatial Analysis, Kansas Geological Survey, (1977).
94. OMRE, H., "The Variogram and its Estimation", In: Geostatistics for Natural Resources Characterization, 2nd NATO Advanced Study Institute, pre-prints, (1983).
95. PERSIANO, R.C. e colaboradores, "Programa Gerador de Mapas Versão 1.0", Relatorio COPPETEC, (1983).
96. PARTHASARATHY, K.R., Probability Measures on Metric Spaces, Academic Press, (1967).
97. PEUCKER, T.K., "Computer Cartography", Resource Paper n<sup>o</sup> 17, Association of American Geographers, (1972).
98. POTIER, C. e VERCKEN, C., "Interpolation par des Fonctions Splines", ENST-D-79001, Paris, (1979).
99. POTIER, C. e VERCKEN, C., "Approximation de Fonctions de deux Variables, Applications en Cartographie Cardiaque et en Meteorologie", ENST-E-83006, Paris, (1983).
100. POWELL, M.J.D. e SABIN, M.A., "Piecewise Quadratic Approximations on Triangles", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 3, n<sup>o</sup> 4, pp. 316-325, (1977).
101. RENARD, D. e YANCEY, J.D., "Smoothing Discontinuities when Kriging with Moving Neighborhood" In: Geostatistics for Natural Resources Characterization, 2nd NATO Advanced Study Institute, (1983).
102. RHIND, D., "The Nature of Computer Assisted Cartography", In: Computer in Contemporary Cartography, editado por TAYLOR, D.P.F., John Wiley, (1980).
103. RIPLEY, B.D., Spatial Statistics, John Wiley, (1981).
104. RIVOIRARD, J. e GUIBAL, D., "Comportement des Ponderateurs



- Role de la Moyenne dans le Krigeage", N-788 CGMM, (1982).
105. ROME AIR DEVELOPMENT, "A Comparison of Technical Papers on Experiments in Cartography", Rome Air Development Center (1972).
106. ROYLE, A.G., CLANSEM, F.L. e FREDERICKSEN, P., "Practical Universal Kriging and Automatic Contouring", Geo-Processing, #1, pp. 377-394, (1981).
107. RUSSELL, R.M., SHARPNACK, D.A., AMIDOU, E.L. "WRIS A Resource Information System for Wildlife Management", Res. Paper PSW-107, USDA Forest Service, (1975).
108. SAMPSON, R.J., "Surface II, Graphics System", Report Number 1 Series on Spatial Analysis, Kansas Geological Survey, (1975).
109. SCHAGEN, I.P., "Interpolation in Two Dimensions - A New Technique", J. Inst. Math. Applics 23, pp. 53-59, (1979).
110. SCHAGEN, I.P., "Automatic Contouring from Scattered Data Points", The Computer Journal, Vol. 25, N<sup>o</sup> 1, pp 7-11, (1982)
111. SCHMIDT, A.H. e ZAFT, W.A., "Programs of the Harvard University Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis", In: Display and Analysis of Spatial Data, editado por DAVIS J.C. e McCULLAGH, publicado por John Wiley, (1975).
112. SCHUMAKER, L., "Fitting Surfaces to Scattered Data", in Approximation Theory II, Academic Press, (1976).
113. SHEPARD, D., "A Two Dimensional Interpolation Function for Computer Mapping of Irregularly Spaced Data", Harvard Papers in Theoretical Geography Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis, N<sup>o</sup> 15, (1968).

114. SIBSON, R., "Locally Equiangular Triangulations", The Computer Journal, vol. 21, N<sup>o</sup> 3, pp. 243-245, (1978).
115. SILVER, J., "The GBF/Dime System: Development, design and use" US Bureau of The Census, Washington, D.C., (1977).
116. SOLOW, A.R., "The Analysis of Second Order Stationary Processes: Time Series Analysis, Spectral Analysis", In: Geostatistics for Natural Resources Characterization, 2nd NATO Advanced Study Institute, preprints, (1983).
117. STARKS, T.H. e FANG, J.H., "On The Estimation of the Generalized Covariance", Math. Geology, vol. 4, n<sup>o</sup> 1, pp. 57-64, (1982).
118. STARKS, T.H. e FANG, J.H., "The Effect of The Drift on the Experimental Semivariogram", Math. Geology, vol. 14, pp. 309-320, (1982).
119. STRUCK, R.L., "Making a Map with Digital Data", Defense Mapping Agency Topographic Center, Washington, D.C., 1975.
120. SYNDER, W.V., "Contour Plotting", ACM Transactions, vol. 4, n<sup>o</sup> 3 pp. 290-294. (1977).
121. TEICHOLZ, E., "Geographic Information Systems: The Odissey Project", Lab. for Computer Graphics and Spatial Analysis, (1980).
122. TONLINSON, R.F., "Computer Handling of Geographical Data" Unesco Press, Paris, (1976).
123. VANTROYS, M. e GROS, G., "Resultats Graphiques", In : Traité d'Informatique Géologique, Masson et Cie., (1972).
124. YAGLOM, A.M., An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions, Prentice-Hall, (1962).

125. WALTERS, R.F., "Contouring by Machine: A User's Guide" ,  
The American Association of Petroleum Geologists  
Bulletin, vol. 53, n<sup>o</sup> 11, pp. 2324-2349, (1969).
126. WATSON, D.E., "Computing The n-dimensional Delaunay  
Tesselation with Application to Voronoi Polytopes" ,  
The Computer Journal, vol. 24, n<sup>o</sup> 2, pp. 167-172, (1981).
127. WAUGH, T.C., "The Development of The GIMMS Computer Mapping  
System", The Computer in Contemporary Cartography ,  
editado por TAYLOR, D.R., John Wiley, (1980).
128. WERNER, H., "Numerical Algorithms for Interpolation and  
Smoothing", In: Map Data Processing, Academic Press, 1980.
129. WHITTEN, E.H.T., "Orthogonal Polynomial Trend Surfaces for  
Irregularly Spaced Data", Mathematical Geology, vol. 2, n<sup>o</sup> 2  
(1970).
130. WHITTEN, E.H.T. e KOELLING, M.E.V., "Spline Surface  
Interpolation, Spatial Filtering and Trend Surfaces for  
Geological Mapped Variables", Math. Geology, Vol. 5, n<sup>o</sup> 2 ,  
pp. 111-126, (1973).
131. WHITTEN, E.H.T., "The Practical Use of Trend Surface  
Analysis in The Geological Sciences", In: Display and  
Analysis of Spatial Data, editado por DAVIS, J.C. e  
McCULLAGH, M.J., John Wiley, (1975).
132. WILSON, H.G., "Least Squares Versus Minimum Absolute  
Absolute Deviations Estimation in Linear Models" ,  
Decision Sciences, vol. 9, pp. 332-335, (1978).

## Apêndice I. Funções Aleatórias de Ordem 2

def.AI.1  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  é o espaço das funções  $f$  em  $\Omega$  que verificam:

$$\int |f(w)|^2 P(dw) < \infty \quad (\text{AI.1})$$

$\Omega$  denota um conjunto  
 $\mathcal{A}$  denota uma sigma-algebra  
 $P$  denota uma probabilidade

def.AI.2 Produto Escalar

Define-se em  $L^2$  um produto escalar por

$$\langle f, g \rangle = \int f(w) \overline{g(w)} P(dw) \quad (\text{AI.2})$$

Mas este produto não satisfaz  $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f=0$ . Deve-se portanto,

definir um espaço quociente  $L^2(\Omega, P)/R$ , onde  $R$  é a relação

definida por  $fRg \Leftrightarrow f=g$  q.t.p. (quase toda a parte) (AI.3)

$L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  é a designação deste espaço, cujos elementos são

classes de equivalência de variáveis aleatórias de  $L^2$ . Por

abuso de linguagem estas classes serão chamadas de V.A. Neste

caso o produto AI.2 é um produto Interno.

teo.AI.1  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  é um espaço de Hilbert

dem.:

Seja  $X_n$  uma sequência de Cauchy em  $L^2$  ( i.e.  $\lim_{n,m} \int |X_n - X_m|^2 = 0$  ), desta sequência pode-se considerar uma subsequência  $X_{n_k}$  que verifica para todo  $K$  inteiro  $\geq 0$

$$\begin{aligned} \int |X_{n_k+1} - X_{n_k}|^2 &= \int |X_{n_k+1}(w) - X_{n_k}(w)|^2 P(dw) \\ &\leq 1/8^k \end{aligned} \quad (\text{AI.4})$$

Esta relação implica que:

$$P(|X_{n_k+1} - X_{n_k}| > 1/2^k) \leq 1/2^k \quad (\text{AI.5})$$

Considere agora os subconjuntos  $A_k \subset \Omega$  definidos por :

$$A_k = \bigcap_{r \geq k} \{|X_{n_r+1} - X_{n_r}| \leq 1/2^r\} \quad (\text{AI.6})$$

de (AI.5) tem-se que:

$$P(A_k) \leq \sum_{r \geq k} P(|X_{n_r+1} - X_{n_r}| > 1/2^r) \leq 1/2^{k-1} \quad (\text{AI.7})$$

Esta probabilidade tende a 0 e o conjunto  $A = \bigcup_k A_k$  verifica  $P(A) = 1$ . Em cada  $A_k$ , a sequência  $X_{n_r}(w)$  converge uniformemente. Seja  $X(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n_r}(w)$  para  $w \in A$  e  $X(w) = 0$  para  $w \notin A$  e a integral:

$$\int_{A_k} |X_m(w) - X_{n_r}(w)| P(dw) \leq \epsilon \quad (\text{AI.8})$$

passando ao limite resulta que  $\int_{A_k} |X_m - X|^2 P(dw) \leq \epsilon$  e finalmente

$$\int_A |X_m - X|^2 P(dw) \leq \epsilon, \text{ logo } X_m \text{ converge a } X \in L^2.$$

$L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sendo um espaço de Hilbert, as propriedades seguintes são válidas:

1.  $X_n \rightarrow X \Rightarrow ||X_n|| \rightarrow ||X||$
2.  $X_n \rightarrow X \Rightarrow \langle X_n, Y \rangle \rightarrow \langle X, Y \rangle, \forall Y \in H \quad (\text{AI.9})$
3.  $X_n \rightarrow X$  e  $Y_n \rightarrow Y \Rightarrow \lim_{n,m} \langle X_n, Y_n \rangle = \langle X, Y \rangle$
4.  $X_n$  converge  $\Leftrightarrow \lim_{n,m} \langle X_n, X_m \rangle$  existe

Em termos de esperança Matemática temos:

$$E(X) = \langle X, 1 \rangle$$

$$E(X\bar{Y}) = \langle X, Y \rangle \quad (\text{AI.10})$$

$$X_n \rightarrow X \text{ então } E(X_n) \rightarrow E(X)$$

def.AI.3 Convergência Forte é a convergência definida na norma do espaço de Hilbert

teo.AI.2 Teorema das Projeções

Seja  $H$  um espaço de Hilbert.  $K$  uma parte convexa e fechada de  $H$  e  $X$  um elemento qualquer de  $H$ . Existe um único elemento  $X_0 \in K$  que satisfaz  $\inf_{Y \in K} \|X - Y\|$ . Este elemento  $X_0$  é caracterizado pela relação:

$$\forall Y \in K, \operatorname{Re} \langle X - X_0, Y - Y_0 \rangle \leq 0 \quad (\text{AI.11})$$

cor.AI.2.1 Se  $K$  é um subespaço fechado,  $X_0$  é caracterizado pela relação  $\langle X - X_0, Y \rangle = 0 \quad \forall Y \in K$

teo.AI.3 Teorema de Riesz

Todo espaço de Hilbert  $H$  é identificável a seu dual, i.e. se  $\phi$  é uma forma linear contínua sobre  $H$ , existe um elemento único  $X_0 \in H$  t.q.  $\phi(Y) = \langle Y, X_0 \rangle$  para todo  $Y \in H$  e  $\|\phi\| = \|X_0\|$

def.AI.4 Convergência Fraca

$X_n$  converge fracamente a um limite  $X$  em  $H$  se  $\lim \langle X_n, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \quad \forall Y \in H$  (AI.12)

teo.AI.4 Se  $X_n$  converge fracamente a  $X$  em  $H$  tem-se que:

$$\|X\| \leq \liminf \|X_n\|$$

dem.

$$\|X\|^2 = \lim \langle X, X_n \rangle \leq \|X\| \liminf \|X_n\|$$

teo.AI.5  $X_n$  converge fortemente a  $X$  s.s.s

(AI.14)

$X_n$  converge fracamente a  $X$  e

$$||X|| = \lim ||X_n||$$

def.AI.5 Funcional Convexo  $p$

$$p(X + Y) \leq p(X) + p(Y)$$

$$p(\lambda X) = |\lambda| p(X)$$

def.AI.6 Funcional Semi-Contínuo Inferiormente

Para todo  $X_0$  e todo  $\epsilon > 0 \exists \eta > 0$  t.q.  $||X - X_0|| \leq \eta$

implica  $p(X) \geq p(X_0) - \epsilon$

lema AI.1 Seja  $E$  um espaço de Banach (espaço vetorial normado completo) e  $p$  um funcional convexo semi-contínuo inferiormente definido em  $E$ . Existe um número  $M < \infty$  t.q.  $p(X) \leq M ||X|| \forall X \in E$

teo.AI.6 Teorema de Banach-Steinhaus

Seja  $U_i, i \in I$  uma família de aplicações lineares contínuas de um espaço de Banach  $E$  em um espaço vetorial normado  $F$ . Se se tem  $\sup_{i \in I} ||U_i(X)|| < \infty$  para todo  $X \in E$ ,

então  $\sup_{i \in I} ||U_i|| < \infty$

dem:

$X \rightarrow ||U_i(X)||$  é linear contínuo para cada  $i$

$X \rightarrow \sup_{i \in I} ||U_i(X)||$  é um funcional convexo semi-

contínuo inferiormente

Pelo Lema  $\sup_{i \in I} ||U_i(X)|| \leq M ||X|| \Rightarrow$



$$\sup_{i \in I} \|U_i\| < \infty$$

teo.AI.7 Seja  $T$  um envelope convexo denso em  $H$ . Para que uma sequência convirja fracamente a  $X$  em  $H$  é necessário e suficiente que  $\sup_n \|X_n\| < \infty$  e  $\langle X_n, Y \rangle \rightarrow \langle X, Y \rangle \quad \forall Y \in T$

teo.AI.8 Todo Espaço de Hilbert é fracamente completo i.e.  
 $\lim_{n,m} \langle X_n - X_m, Y \rangle = 0 \quad \forall Y \in H$ ,  $X_n$  é fracamente convergente

Apêndice II. Dados da Amostra KANSAS

J=	1	X(J)=	.00239	Y(J)=	2.42004	Z(J)=-1289.00000
J=	2	X(J)=	.02175	Y(J)=	3.16929	Z(J)=-1314.00000
J=	3	X(J)=	.04215	Y(J)=	1.54430	Z(J)=-1321.00000
J=	4	X(J)=	.11673	Y(J)=	2.04218	Z(J)=-1290.00000
J=	5	X(J)=	.15635	Y(J)=	3.54070	Z(J)=-1304.00000
J=	6	X(J)=	.20730	Y(J)=	5.53875	Z(J)=-1312.00000
J=	7	X(J)=	.24097	Y(J)=	1.97649	Z(J)=-1277.00000
J=	8	X(J)=	.25231	Y(J)=	2.41357	Z(J)=-1269.00000
J=	9	X(J)=	.31324	Y(J)=	4.78629	Z(J)=-1312.00000
J=	10	X(J)=	.36105	Y(J)=	1.78592	Z(J)=-1291.00000
J=	11	X(J)=	.38373	Y(J)=	2.66010	Z(J)=-1296.00000
J=	12	X(J)=	.49575	Y(J)=	2.15732	Z(J)=-1265.00000
J=	13	X(J)=	.58160	Y(J)=	.65542	Z(J)=-1382.00000
J=	14	X(J)=	.61097	Y(J)=	1.77942	Z(J)=-1286.00000
J=	15	X(J)=	.62880	Y(J)=	2.46630	Z(J)=-1280.00000
J=	16	X(J)=	.68176	Y(J)=	4.52697	Z(J)=-1305.00000
J=	17	X(J)=	.71030	Y(J)=	5.65098	Z(J)=-1291.00000
J=	18	X(J)=	.72347	Y(J)=	3.71359	Z(J)=-1289.00000
J=	19	X(J)=	.74566	Y(J)=	2.15084	Z(J)=-1270.00000
J=	20	X(J)=	.82261	Y(J)=	5.14825	Z(J)=-1314.00000
J=	21	X(J)=	.85438	Y(J)=	1.52312	Z(J)=-1307.00000
J=	22	X(J)=	.87872	Y(J)=	2.45983	Z(J)=-1269.00000
J=	23	X(J)=	.88250	Y(J)=	.21010	Z(J)=-1352.00000
J=	24	X(J)=	.90610	Y(J)=	3.52143	Z(J)=-1286.00000
J=	25	X(J)=	.94004	Y(J)=	.02111	Z(J)=-1362.00000

J=	26	X(J)=	.96955	Y(J)=	1.14517	Z(J)=-1326.00000
J=	27	X(J)=	.98421	Y(J)=	1.70721	Z(J)=-1277.00000
J=	28	X(J)=	.99234	Y(J)=	2.01945	Z(J)=-1258.00000
J=	29	X(J)=	1.12054	Y(J)=	2.14111	Z(J)=-1265.00000
J=	30	X(J)=	1.16563	Y(J)=	3.88972	Z(J)=-1299.00000
J=	31	X(J)=	1.22925	Y(J)=	1.51335	Z(J)=-1295.00000
J=	32	X(J)=	1.23901	Y(J)=	1.88806	Z(J)=-1255.00000
J=	33	X(J)=	1.25521	Y(J)=	2.51257	Z(J)=-1274.00000
J=	34	X(J)=	1.26558	Y(J)=	.51249	Z(J)=-1368.00000
J=	35	X(J)=	1.35946	Y(J)=	4.13473	Z(J)=-1289.00000
J=	36	X(J)=	1.36425	Y(J)=	4.32208	Z(J)=-1299.00000
J=	37	X(J)=	1.43987	Y(J)=	.00793	Z(J)=-1350.00000
J=	38	X(J)=	1.44809	Y(J)=	.32020	Z(J)=-1345.00000
J=	39	X(J)=	1.48123	Y(J)=	4.00662	Z(J)=-1288.00000
J=	40	X(J)=	1.48242	Y(J)=	1.63174	Z(J)=-1288.00000
J=	41	X(J)=	1.49865	Y(J)=	2.25629	Z(J)=-1258.00000
J=	42	X(J)=	1.50836	Y(J)=	2.63101	Z(J)=-1256.00000
J=	43	X(J)=	1.56812	Y(J)=	.12955	Z(J)=-1344.00000
J=	44	X(J)=	1.57797	Y(J)=	.50428	Z(J)=-1344.00000
J=	45	X(J)=	1.61713	Y(J)=	2.00322	Z(J)=-1243.00000
J=	46	X(J)=	1.63977	Y(J)=	2.87761	Z(J)=-1275.00000
J=	47	X(J)=	1.67186	Y(J)=	4.12674	Z(J)=-1296.00000
J=	48	X(J)=	1.83179	Y(J)=	5.49762	Z(J)=-1278.00000
J=	49	X(J)=	1.86055	Y(J)=	1.74689	Z(J)=-1284.00000
J=	50	X(J)=	1.87029	Y(J)=	2.12165	Z(J)=-1264.00000
J=	51	X(J)=	1.88000	Y(J)=	2.49640	Z(J)=-1254.00000

J=	52	X(J)=	1.88968	Y(J)=	2.87116	Z(J)=-1255.00000
J=	53	X(J)=	1.94299	Y(J)=	.11968	Z(J)=-1348.00000
J=	54	X(J)=	1.98586	Y(J)=	4.18121	Z(J)=-1284.00000
J=	55	X(J)=	2.05631	Y(J)=	4.49192	Z(J)=-1280.00000
J=	56	X(J)=	2.06903	Y(J)=	4.99161	Z(J)=-1272.00000
J=	57	X(J)=	2.08108	Y(J)=	.61608	Z(J)=-1350.00000
J=	58	X(J)=	2.08487	Y(J)=	5.61622	Z(J)=-1263.00000
J=	59	X(J)=	2.12344	Y(J)=	2.24009	Z(J)=-1285.00000
J=	60	X(J)=	2.13315	Y(J)=	2.61486	Z(J)=-1245.00000
J=	61	X(J)=	2.14604	Y(J)=	3.11456	Z(J)=-1271.00000
J=	62	X(J)=	2.18445	Y(J)=	4.61366	Z(J)=-1279.00000
J=	63	X(J)=	2.20667	Y(J)=	5.48813	Z(J)=-1266.00000
J=	64	X(J)=	2.26617	Y(J)=	2.92394	Z(J)=-1241.00000
J=	65	X(J)=	2.28385	Y(J)=	3.61105	Z(J)=-1281.00000
J=	66	X(J)=	2.37336	Y(J)=	2.23360	Z(J)=-1273.00000
J=	67	X(J)=	2.38306	Y(J)=	2.60839	Z(J)=-1236.00000
J=	68	X(J)=	2.51609	Y(J)=	2.91750	Z(J)=-1244.00000
J=	69	X(J)=	2.53056	Y(J)=	3.47970	Z(J)=-1268.00000
J=	70	X(J)=	2.56252	Y(J)=	4.72904	Z(J)=-1279.00000
J=	71	X(J)=	2.59417	Y(J)=	5.97838	Z(J)=-1275.00000
J=	72	X(J)=	2.63298	Y(J)=	2.60193	Z(J)=-1240.00000
J=	73	X(J)=	2.64588	Y(J)=	3.10168	Z(J)=-1266.00000
J=	74	X(J)=	2.65231	Y(J)=	3.35155	Z(J)=-1263.00000
J=	75	X(J)=	2.65873	Y(J)=	3.60142	Z(J)=-1271.00000
J=	76	X(J)=	2.67154	Y(J)=	4.10117	Z(J)=-1277.00000
J=	77	X(J)=	2.68429	Y(J)=	4.60092	Z(J)=-1279.00000

J=	78	X(J)=	2. 78161	Y(J)=	5. 97366	Z(J)=-1266. 00000
J=	79	X(J)=	2. 86670	Y(J)=	1. 97076	Z(J)=-1293. 00000
J=	80	X(J)=	2. 87966	Y(J)=	2. 47053	Z(J)=-1245. 00000
J=	81	X(J)=	2. 88935	Y(J)=	2. 84535	Z(J)=-1233. 00000
J=	82	X(J)=	2. 97828	Y(J)=	4. 65543	Z(J)=-1266. 00000
J=	83	X(J)=	3. 03040	Y(J)=	3. 46685	Z(J)=-1263. 00000
J=	84	X(J)=	3. 07188	Y(J)=	5. 09115	Z(J)=-1271. 00000
J=	85	X(J)=	3. 08729	Y(J)=	. 83974	Z(J)=-1366. 00000
J=	86	X(J)=	3. 13927	Y(J)=	2. 83890	Z(J)=-1228. 00000
J=	87	X(J)=	3. 15857	Y(J)=	3. 58859	Z(J)=-1261. 00000
J=	88	X(J)=	3. 27067	Y(J)=	3. 08558	Z(J)=-1250. 00000
J=	89	X(J)=	3. 38918	Y(J)=	2. 83245	Z(J)=-1235. 00000
J=	90	X(J)=	3. 49175	Y(J)=	4. 39279	Z(J)=-1257. 00000
J=	91	X(J)=	3. 52059	Y(J)=	3. 07914	Z(J)=-1230. 00000
J=	92	X(J)=	3. 53341	Y(J)=	2. 68243	Z(J)=-1250. 00000
J=	93	X(J)=	3. 54101	Y(J)=	2. 99299	Z(J)=-1234. 00000
J=	94	X(J)=	3. 66293	Y(J)=	2. 86571	Z(J)=-1230. 00000
J=	95	X(J)=	3. 79549	Y(J)=	3. 17322	Z(J)=-1236. 00000
J=	96	X(J)=	3. 88062	Y(J)=	4. 10344	Z(J)=-1256. 00000
J=	97	X(J)=	3. 88692	Y(J)=	1. 80361	Z(J)=-1362. 00000
J=	98	X(J)=	3. 90459	Y(J)=	5. 09729	Z(J)=-1297. 00000
J=	99	X(J)=	3. 91742	Y(J)=	3. 04594	Z(J)=-1232. 00000
J=	100	X(J)=	3. 92348	Y(J)=	3. 29440	Z(J)=-1241. 00000
J=	101	X(J)=	4. 03934	Y(J)=	2. 91865	Z(J)=-1239. 00000
J=	102	X(J)=	4. 10840	Y(J)=	5. 77610	Z(J)=-1274. 00000
J=	103	X(J)=	4. 16734	Y(J)=	3. 03983	Z(J)=-1232. 00000

J=	104	X(J)=	4. 17340	Y(J)=	3. 28831	Z(J)=-1236. 00000
J=	105	X(J)=	4. 36214	Y(J)=	. 79733	Z(J)=-1366. 00000
J=	106	X(J)=	4. 36388	Y(J)=	3. 40799	Z(J)=-1253. 00000
J=	107	X(J)=	4. 41721	Y(J)=	3. 03373	Z(J)=-1238. 00000
J=	108	X(J)=	4. 42233	Y(J)=	3. 28222	Z(J)=-1232. 00000
J=	109	X(J)=	4. 54526	Y(J)=	3. 15492	Z(J)=-1237. 00000
J=	110	X(J)=	4. 57843	Y(J)=	4. 52166	Z(J)=-1254. 00000
J=	111	X(J)=	4. 67477	Y(J)=	3. 33825	Z(J)=-1231. 00000
J=	112	X(J)=	4. 67931	Y(J)=	3. 52463	Z(J)=-1244. 00000
J=	113	X(J)=	4. 86373	Y(J)=	3. 39581	Z(J)=-1240. 00000
J=	114	X(J)=	4. 96828	Y(J)=	5. 13391	Z(J)=-1267. 00000
J=	115	X(J)=	5. 08428	Y(J)=	4. 75812	Z(J)=-1250. 00000
J=	116	X(J)=	5. 10572	Y(J)=	. 53015	Z(J)=-1365. 00000
J=	117	X(J)=	5. 11808	Y(J)=	1. 02720	Z(J)=-1364. 00000
J=	118	X(J)=	5. 19123	Y(J)=	4. 00953	Z(J)=-1248. 00000
J=	119	X(J)=	5. 21827	Y(J)=	. 02998	Z(J)=-1366. 00000
J=	120	X(J)=	5. 34634	Y(J)=	. 15112	Z(J)=-1355. 00000
J=	121	X(J)=	5. 38952	Y(J)=	1. 89088	Z(J)=-1374. 00000
J=	122	X(J)=	5. 39219	Y(J)=	4. 56420	Z(J)=-1263. 00000
J=	123	X(J)=	5. 39818	Y(J)=	4. 81273	Z(J)=-1255. 00000
J=	124	X(J)=	5. 41012	Y(J)=	5. 30981	Z(J)=-1260. 00000
J=	125	X(J)=	5. 43211	Y(J)=	3. 63066	Z(J)=-1253. 00000
J=	126	X(J)=	5. 43814	Y(J)=	3. 87920	Z(J)=-1241. 00000
J=	127	X(J)=	5. 47130	Y(J)=	. 14799	Z(J)=-1350. 00000
J=	128	X(J)=	5. 47707	Y(J)=	5. 49472	Z(J)=-1268. 00000
J=	129	X(J)=	5. 52366	Y(J)=	2. 26062	Z(J)=-1376. 00000

J=	130	X(J)=	5.56612	Y(J)=	4.00044	Z(J)=-1239.00000
J=	131	X(J)=	5.59936	Y(J)=	.26915	Z(J)=-1361.00000
J=	132	X(J)=	5.61390	Y(J)=	5.98883	Z(J)=-1267.00000
J=	133	X(J)=	5.66005	Y(J)=	5.30382	Z(J)=-1254.00000
J=	134	X(J)=	5.70910	Y(J)=	4.74308	Z(J)=-1248.00000
J=	135	X(J)=	5.71966	Y(J)=	.07961	Z(J)=-1364.00000
J=	136	X(J)=	5.86797	Y(J)=	3.55789	Z(J)=-1284.00000
J=	137	X(J)=	5.89804	Y(J)=	4.80070	Z(J)=-1254.00000
J=	138	X(J)=	5.97990	Y(J)=	5.60704	Z(J)=-1263.00000
J=	139	X(J)=	6.09593	Y(J)=	5.23120	Z(J)=-1269.00000
J=	140	X(J)=	6.19094	Y(J)=	3.98530	Z(J)=-1232.00000
J=	141	X(J)=	6.19394	Y(J)=	4.10959	Z(J)=-1243.00000
J=	142	X(J)=	6.36152	Y(J)=	.74759	Z(J)=-1378.00000
J=	143	X(J)=	6.36369	Y(J)=	5.97096	Z(J)=-1254.00000
J=	144	X(J)=	6.37989	Y(J)=	4.04291	Z(J)=-1240.00000
J=	145	X(J)=	6.38590	Y(J)=	4.29150	Z(J)=-1253.00000
J=	146	X(J)=	6.39190	Y(J)=	4.54008	Z(J)=-1252.00000
J=	147	X(J)=	6.39789	Y(J)=	4.78867	Z(J)=-1269.00000
J=	148	X(J)=	6.40387	Y(J)=	5.03726	Z(J)=-1264.00000
J=	149	X(J)=	6.42173	Y(J)=	5.78303	Z(J)=-1260.00000
J=	150	X(J)=	6.56582	Y(J)=	3.97622	Z(J)=-1240.00000
J=	151	X(J)=	6.60472	Y(J)=	5.59211	Z(J)=-1256.00000
J=	152	X(J)=	6.62981	Y(J)=	4.03686	Z(J)=-1249.00000
J=	153	X(J)=	6.64183	Y(J)=	4.53406	Z(J)=-1253.00000
J=	154	X(J)=	6.64782	Y(J)=	4.78266	Z(J)=-1255.00000
J=	155	X(J)=	6.67166	Y(J)=	5.77706	Z(J)=-1256.00000



J=	156	X(J)=	6.90969	Y(J)=	5.27387	Z(J)=-1260.00000
J=	157	X(J)=	6.98258	Y(J)=	5.70745	Z(J)=-1260.00000
J=	158	X(J)=	7.07170	Y(J)=	4.21273	Z(J)=-1251.00000
J=	159	X(J)=	7.08070	Y(J)=	4.58566	Z(J)=-1270.00000
J=	160	X(J)=	7.41941	Y(J)=	3.08479	Z(J)=-1372.00000
J=	161	X(J)=	7.45109	Y(J)=	4.39015	Z(J)=-1252.00000
J=	162	X(J)=	7.47378	Y(J)=	.22234	Z(J)=-1371.00000
J=	163	X(J)=	7.57756	Y(J)=	4.44929	Z(J)=-1255.00000
J=	164	X(J)=	7.58355	Y(J)=	4.69794	Z(J)=-1250.00000
J=	165	X(J)=	7.58953	Y(J)=	4.94658	Z(J)=-1257.00000
J=	166	X(J)=	7.63553	Y(J)=	4.26130	Z(J)=-1260.00000
J=	167	X(J)=	7.72047	Y(J)=	5.19223	Z(J)=-1250.00000
J=	168	X(J)=	7.83647	Y(J)=	4.81625	Z(J)=-1255.00000
J=	169	X(J)=	7.84245	Y(J)=	5.06491	Z(J)=-1255.00000
J=	170	X(J)=	7.97039	Y(J)=	5.18624	Z(J)=-1250.00000
J=	171	X(J)=	8.21435	Y(J)=	4.93157	Z(J)=-1254.00000
J=	172	X(J)=	8.48586	Y(J)=	.69476	Z(J)=-1388.00000
J=	173	X(J)=	8.57726	Y(J)=	4.42517	Z(J)=-1274.00000
J=	174	X(J)=	8.72614	Y(J)=	5.41696	Z(J)=-1252.00000
J=	175	X(J)=	8.89458	Y(J)=	2.05334	Z(J)=-1365.00000
J=	176	X(J)=	8.97011	Y(J)=	5.16227	Z(J)=-1252.00000
J=	177	X(J)=	9.21406	Y(J)=	4.90754	Z(J)=-1264.00000
J=	178	X(J)=	9.32705	Y(J)=	4.40707	Z(J)=-1269.00000
J=	179	X(J)=	9.43093	Y(J)=	3.53347	Z(J)=-1305.00000
J=	180	X(J)=	9.46698	Y(J)=	5.02591	Z(J)=-1258.00000
J=	181	X(J)=	9.47315	Y(J)=	.17241	Z(J)=-1360.00000

J=	182	X(J)=	9.48484	Y(J)=	5.77213	Z(J)=-1245.00000
J=	183	X(J)=	9.73477	Y(J)=	5.76617	Z(J)=-1243.00000
J=	184	X(J)=	9.79131	Y(J)=	5.51592	Z(J)=-1248.00000
J=	185	X(J)=	9.84493	Y(J)=	.03867	Z(J)=-1372.00000
J=	186	X(J)=	9.85676	Y(J)=	5.63881	Z(J)=-1242.00000
J=	187	X(J)=	9.95487	Y(J)=	4.51638	Z(J)=-1260.00000
J=	188	X(J)=	9.97875	Y(J)=	5.51144	Z(J)=-1243.00000
J=	189	X(J)=	9.98470	Y(J)=	5.76020	Z(J)=-1235.00000

Apêndice III. Amostra HIMMAG

J=	1	X(J)=	12.98000	Y(J)=	36.87000	Z(J)=	878.00000
J=	2	X(J)=	13.00000	Y(J)=	19.11000	Z(J)=	710.00000
J=	3	X(J)=	13.25000	Y(J)=	25.35000	Z(J)=	738.00000
J=	4	X(J)=	13.47000	Y(J)=	59.74000	Z(J)=	2817.00000
J=	5	X(J)=	13.67000	Y(J)=	48.34000	Z(J)=	1116.00000
J=	6	X(J)=	13.76000	Y(J)=	87.01000	Z(J)=	2407.00000
J=	7	X(J)=	13.84000	Y(J)=	73.09000	Z(J)=	3294.00000
J=	8	X(J)=	13.94000	Y(J)=	98.97000	Z(J)=	746.00000
J=	9	X(J)=	14.11000	Y(J)=	110.94000	Z(J)=	224.00000
J=	10	X(J)=	14.47000	Y(J)=	135.81000	Z(J)=	109.00000
J=	11	X(J)=	14.93000	Y(J)=	124.23000	Z(J)=	127.00000
J=	12	X(J)=	15.16000	Y(J)=	147.84000	Z(J)=	143.00000
J=	13	X(J)=	15.19000	Y(J)=	172.53000	Z(J)=	141.00000
J=	14	X(J)=	15.24000	Y(J)=	185.76000	Z(J)=	177.00000
J=	15	X(J)=	15.46000	Y(J)=	159.87000	Z(J)=	196.00000
J=	16	X(J)=	15.61000	Y(J)=	197.41000	Z(J)=	239.00000
J=	17	X(J)=	16.04000	Y(J)=	211.33000	Z(J)=	447.00000
J=	18	X(J)=	16.08000	Y(J)=	235.45000	Z(J)=	-16.00000
J=	19	X(J)=	16.09000	Y(J)=	222.72000	Z(J)=	2099.00000
J=	20	X(J)=	16.36000	Y(J)=	272.04000	Z(J)=	295.00000
J=	21	X(J)=	16.37000	Y(J)=	260.13000	Z(J)=	88.00000
J=	22	X(J)=	16.51000	Y(J)=	247.79000	Z(J)=	131.00000
J=	23	X(J)=	16.84000	Y(J)=	297.29000	Z(J)=	216.00000
J=	24	X(J)=	16.86000	Y(J)=	283.62000	Z(J)=	227.00000
J=	25	X(J)=	17.31000	Y(J)=	335.02000	Z(J)=	257.00000

J=	26	X(J)=	17.34000	Y(J)=	3309.64000	Z(J)=	212.00000
J=	27	X(J)=	17.67000	Y(J)=	3358.25000	Z(J)=	293.00000
J=	28	X(J)=	17.71000	Y(J)=	3322.42000	Z(J)=	233.00000
J=	29	X(J)=	17.74000	Y(J)=	3347.04000	Z(J)=	289.00000
J=	30	X(J)=	18.09000	Y(J)=	3385.27000	Z(J)=	269.00000
J=	31	X(J)=	18.23000	Y(J)=	3372.68000	Z(J)=	269.00000
J=	32	X(J)=	18.63000	Y(J)=	3408.89000	Z(J)=	299.00000
J=	33	X(J)=	18.71000	Y(J)=	3396.29000	Z(J)=	272.00000
J=	34	X(J)=	18.73000	Y(J)=	3434.08000	Z(J)=	290.00000
J=	35	X(J)=	18.78000	Y(J)=	3455.74000	Z(J)=	303.00000
J=	36	X(J)=	18.87000	Y(J)=	3421.93000	Z(J)=	298.00000
J=	37	X(J)=	19.01000	Y(J)=	3472.25000	Z(J)=	312.00000
J=	38	X(J)=	19.13000	Y(J)=	3485.22000	Z(J)=	307.00000
J=	39	X(J)=	19.17000	Y(J)=	3446.87000	Z(J)=	288.00000
J=	40	X(J)=	19.36000	Y(J)=	3508.58000	Z(J)=	319.00000
J=	41	X(J)=	19.43000	Y(J)=	3496.37000	Z(J)=	303.00000
J=	42	X(J)=	19.65000	Y(J)=	3533.46000	Z(J)=	327.00000
J=	43	X(J)=	19.85000	Y(J)=	3521.24000	Z(J)=	320.00000
J=	44	X(J)=	19.94000	Y(J)=	3557.58000	Z(J)=	360.00000
J=	45	X(J)=	20.21000	Y(J)=	3546.62000	Z(J)=	339.00000
J=	46	X(J)=	20.37000	Y(J)=	3572.26000	Z(J)=	256.00000
J=	47	X(J)=	20.49000	Y(J)=	3583.40000	Z(J)=	364.00000
J=	48	X(J)=	21.04000	Y(J)=	3595.62000	Z(J)=	368.00000
J=	49	X(J)=	68.00000	Y(J)=	3015.59000	Z(J)=	640.00000
J=	50	X(J)=	68.42000	Y(J)=	3038.39000	Z(J)=	652.00000
J=	51	X(J)=	68.50000	Y(J)=	3024.28000	Z(J)=	630.00000

J=	52	X(J)=	68.97000	Y(J)=	60.62000	Z(J)=	829.00000
J=	53	X(J)=	69.11000	Y(J)=	49.41000	Z(J)=	743.00000
J=	54	X(J)=	69.21000	Y(J)=	73.21000	Z(J)=	1045.00000
J=	55	X(J)=	69.77000	Y(J)=	86.57000	Z(J)=	1221.00000
J=	56	X(J)=	70.00000	Y(J)=	113.33000	Z(J)=	2717.00000
J=	57	X(J)=	70.11000	Y(J)=	123.98000	Z(J)=	3314.00000
J=	58	X(J)=	70.14000	Y(J)=	98.66000	Z(J)=	1932.00000
J=	59	X(J)=	70.86000	Y(J)=	134.93000	Z(J)=	3487.00000
J=	60	X(J)=	71.23000	Y(J)=	148.35000	Z(J)=	3796.00000
J=	61	X(J)=	71.35000	Y(J)=	159.31000	Z(J)=	3552.00000
J=	62	X(J)=	71.65000	Y(J)=	172.41000	Z(J)=	2734.00000
J=	63	X(J)=	71.76000	Y(J)=	184.88000	Z(J)=	2221.00000
J=	64	X(J)=	72.19000	Y(J)=	199.61000	Z(J)=	27.00000
J=	65	X(J)=	72.50000	Y(J)=	209.25000	Z(J)=	100.00000
J=	66	X(J)=	72.68000	Y(J)=	223.36000	Z(J)=	184.00000
J=	67	X(J)=	73.17000	Y(J)=	235.39000	Z(J)=	301.00000
J=	68	X(J)=	73.66000	Y(J)=	258.44000	Z(J)=	280.00000
J=	69	X(J)=	73.67000	Y(J)=	247.73000	Z(J)=	256.00000
J=	70	X(J)=	73.90000	Y(J)=	272.17000	Z(J)=	129.00000
J=	71	X(J)=	74.33000	Y(J)=	284.89000	Z(J)=	218.00000
J=	72	X(J)=	74.44000	Y(J)=	296.92000	Z(J)=	211.00000
J=	73	X(J)=	74.75000	Y(J)=	309.64000	Z(J)=	213.00000
J=	74	X(J)=	74.91000	Y(J)=	331.56000	Z(J)=	222.00000
J=	75	X(J)=	75.49000	Y(J)=	321.86000	Z(J)=	213.00000
J=	76	X(J)=	75.58000	Y(J)=	360.21000	Z(J)=	246.00000
J=	77	X(J)=	75.98000	Y(J)=	346.17000	Z(J)=	231.00000

J=	78	X(J)=	76.01000	Y(J)=	372.62000	Z(J)=	265.00000
J=	79	X(J)=	76.07000	Y(J)=	383.20000	Z(J)=	260.00000
J=	80	X(J)=	76.42000	Y(J)=	409.27000	Z(J)=	293.00000
J=	81	X(J)=	77.13000	Y(J)=	396.61000	Z(J)=	268.00000
J=	82	X(J)=	77.49000	Y(J)=	420.99000	Z(J)=	274.00000
J=	83	X(J)=	77.59000	Y(J)=	447.88000	Z(J)=	302.00000
J=	84	X(J)=	77.64000	Y(J)=	460.60000	Z(J)=	288.00000
J=	85	X(J)=	77.73000	Y(J)=	433.08000	Z(J)=	291.00000
J=	86	X(J)=	78.12000	Y(J)=	483.59000	Z(J)=	301.00000
J=	87	X(J)=	78.20000	Y(J)=	471.75000	Z(J)=	303.00000
J=	88	X(J)=	78.43000	Y(J)=	495.74000	Z(J)=	320.00000
J=	89	X(J)=	78.48000	Y(J)=	508.02000	Z(J)=	322.00000
J=	90	X(J)=	79.42000	Y(J)=	520.37000	Z(J)=	324.00000
J=	91	X(J)=	79.84000	Y(J)=	545.37000	Z(J)=	334.00000
J=	92	X(J)=	79.91000	Y(J)=	532.84000	Z(J)=	340.00000
J=	93	X(J)=	80.06000	Y(J)=	571.44000	Z(J)=	318.00000
J=	94	X(J)=	80.18000	Y(J)=	581.33000	Z(J)=	337.00000
J=	95	X(J)=	80.20000	Y(J)=	560.04000	Z(J)=	351.00000
J=	96	X(J)=	80.99000	Y(J)=	594.18000	Z(J)=	366.00000
J=	97	X(J)=	146.20000	Y(J)=	596.14000	Z(J)=	327.00000
J=	98	X(J)=	146.21000	Y(J)=	583.36000	Z(J)=	313.00000
J=	99	X(J)=	146.29000	Y(J)=	571.33000	Z(J)=	309.00000
J=	100	X(J)=	146.55000	Y(J)=	558.42000	Z(J)=	303.00000
J=	101	X(J)=	146.76000	Y(J)=	546.14000	Z(J)=	318.00000
J=	102	X(J)=	146.85000	Y(J)=	521.01000	Z(J)=	287.00000
J=	103	X(J)=	146.96000	Y(J)=	534.49000	Z(J)=	314.00000

J=	104	X(J)=	147.07000	Y(J)=	0484.61000	Z(J)=	274.00000
J=	105	X(J)=	147.24000	Y(J)=	0509.05000	Z(J)=	291.00000
J=	106	X(J)=	147.25000	Y(J)=	0495.95000	Z(J)=	273.00000
J=	107	X(J)=	147.47000	Y(J)=	0471.89000	Z(J)=	267.00000
J=	108	X(J)=	147.61000	Y(J)=	0460.30000	Z(J)=	266.00000
J=	109	X(J)=	147.94000	Y(J)=	0446.57000	Z(J)=	256.00000
J=	110	X(J)=	147.96000	Y(J)=	0422.52000	Z(J)=	246.00000
J=	111	X(J)=	148.14000	Y(J)=	0434.42000	Z(J)=	230.00000
J=	112	X(J)=	148.23000	Y(J)=	0409.67000	Z(J)=	241.00000
J=	113	X(J)=	148.32000	Y(J)=	0384.48000	Z(J)=	238.00000
J=	114	X(J)=	148.46000	Y(J)=	0372.58000	Z(J)=	217.00000
J=	115	X(J)=	148.50000	Y(J)=	0395.94000	Z(J)=	232.00000
J=	116	X(J)=	148.66000	Y(J)=	0360.04000	Z(J)=	214.00000
J=	117	X(J)=	148.69000	Y(J)=	0334.35000	Z(J)=	165.00000
J=	118	X(J)=	148.80000	Y(J)=	0347.64000	Z(J)=	215.00000
J=	119	X(J)=	149.03000	Y(J)=	0310.17000	Z(J)=	159.00000
J=	120	X(J)=	149.14000	Y(J)=	0322.57000	Z(J)=	103.00000
J=	121	X(J)=	149.36000	Y(J)=	0297.76000	Z(J)=	964.00000
J=	122	X(J)=	149.39000	Y(J)=	0260.10000	Z(J)=	1672.00000
J=	123	X(J)=	149.43000	Y(J)=	0285.73000	Z(J)=	14.00000
J=	124	X(J)=	149.64000	Y(J)=	0271.94000	Z(J)=	100.00000
J=	125	X(J)=	149.80000	Y(J)=	0235.54000	Z(J)=	3153.00000
J=	126	X(J)=	149.85000	Y(J)=	0248.01000	Z(J)=	2974.00000
J=	127	X(J)=	150.01000	Y(J)=	0211.86000	Z(J)=	3601.00000
J=	128	X(J)=	150.07000	Y(J)=	0224.14000	Z(J)=	4423.00000
J=	129	X(J)=	150.15000	Y(J)=	0199.83000	Z(J)=	2270.00000



J=	130	X(J)=	150.30000	Y(J)=	0185.35000	Z(J)=	1587.00000
J=	131	X(J)=	150.34000	Y(J)=	0137.67000	Z(J)=	704.00000
J=	132	X(J)=	150.56000	Y(J)=	0172.25000	Z(J)=	1016.00000
J=	133	X(J)=	150.57000	Y(J)=	0160.97000	Z(J)=	768.00000
J=	134	X(J)=	150.86000	Y(J)=	0124.95000	Z(J)=	678.00000
J=	135	X(J)=	150.94000	Y(J)=	0112.80000	Z(J)=	636.00000
J=	136	X(J)=	150.97000	Y(J)=	0149.01000	Z(J)=	731.00000
J=	137	X(J)=	151.02000	Y(J)=	0099.89000	Z(J)=	585.00000
J=	138	X(J)=	151.16000	Y(J)=	0086.79000	Z(J)=	582.00000
J=	139	X(J)=	151.17000	Y(J)=	0072.81000	Z(J)=	544.00000
J=	140	X(J)=	151.50000	Y(J)=	0060.84000	Z(J)=	544.00000
J=	141	X(J)=	151.51000	Y(J)=	0049.95000	Z(J)=	548.00000
J=	142	X(J)=	151.90000	Y(J)=	0038.55000	Z(J)=	591.00000
J=	143	X(J)=	151.92000	Y(J)=	0025.57000	Z(J)=	508.00000
J=	144	X(J)=	152.12000	Y(J)=	0016.13000	Z(J)=	482.00000
J=	145	X(J)=	188.65000	Y(J)=	0016.42000	Z(J)=	489.00000
J=	146	X(J)=	188.84000	Y(J)=	0024.61000	Z(J)=	477.00000
J=	147	X(J)=	189.08000	Y(J)=	0037.77000	Z(J)=	544.00000
J=	148	X(J)=	189.19000	Y(J)=	0049.23000	Z(J)=	474.00000
J=	149	X(J)=	189.44000	Y(J)=	0059.06000	Z(J)=	569.00000
J=	150	X(J)=	189.55000	Y(J)=	0073.42000	Z(J)=	538.00000
J=	151	X(J)=	190.11000	Y(J)=	0086.20000	Z(J)=	532.00000
J=	152	X(J)=	190.54000	Y(J)=	0099.43000	Z(J)=	538.00000
J=	153	X(J)=	190.71000	Y(J)=	0111.71000	Z(J)=	544.00000
J=	154	X(J)=	191.02000	Y(J)=	0123.74000	Z(J)=	555.00000
J=	155	X(J)=	191.58000	Y(J)=	0136.08000	Z(J)=	586.00000

J=	156	X(J)=	191.82000	Y(J)=	0149.18000	Z(J)=	636.00000
J=	157	X(J)=	191.93000	Y(J)=	0161.46000	Z(J)=	632.00000
J=	158	X(J)=	192.11000	Y(J)=	0172.36000	Z(J)=	633.00000
J=	159	X(J)=	192.67000	Y(J)=	0186.53000	Z(J)=	661.00000
J=	160	X(J)=	193.10000	Y(J)=	0198.87000	Z(J)=	717.00000
J=	161	X(J)=	193.22000	Y(J)=	0210.33000	Z(J)=	699.00000
J=	162	X(J)=	193.27000	Y(J)=	0223.12000	Z(J)=	-188.00000
J=	163	X(J)=	193.76000	Y(J)=	0234.33000	Z(J)=	-1763.00000
J=	164	X(J)=	194.45000	Y(J)=	0248.19000	Z(J)=	1973.00000
J=	165	X(J)=	194.62000	Y(J)=	0259.65000	Z(J)=	3751.00000
J=	166	X(J)=	194.68000	Y(J)=	0271.49000	Z(J)=	4125.00000
J=	167	X(J)=	194.85000	Y(J)=	0283.64000	Z(J)=	3458.00000
J=	168	X(J)=	195.09000	Y(J)=	0296.93000	Z(J)=	2948.00000
J=	169	X(J)=	195.46000	Y(J)=	0308.27000	Z(J)=	3179.00000
J=	170	X(J)=	196.02000	Y(J)=	0321.12000	Z(J)=	2618.00000
J=	171	X(J)=	196.07000	Y(J)=	0332.64000	Z(J)=	2477.00000
J=	172	X(J)=	196.31000	Y(J)=	0346.62000	Z(J)=	1331.00000
J=	173	X(J)=	196.74000	Y(J)=	0360.10000	Z(J)=	1269.00000
J=	174	X(J)=	197.17000	Y(J)=	0372.44000	Z(J)=	477.00000
J=	175	X(J)=	197.54000	Y(J)=	0384.91000	Z(J)=	1444.00000
J=	176	X(J)=	197.77000	Y(J)=	0409.54000	Z(J)=	48.00000
J=	177	X(J)=	197.78000	Y(J)=	0396.12000	Z(J)=	21.00000
J=	178	X(J)=	198.20000	Y(J)=	0421.44000	Z(J)=	56.00000
J=	179	X(J)=	198.44000	Y(J)=	0434.10000	Z(J)=	81.00000
J=	180	X(J)=	198.62000	Y(J)=	0445.37000	Z(J)=	125.00000
J=	181	X(J)=	199.10000	Y(J)=	0471.89000	Z(J)=	159.00000

J=	182	X(J)=	199.24000	Y(J)=	457.72000	Z(J)=	155.00000
J=	183	X(J)=	199.47000	Y(J)=	484.67000	Z(J)=	180.00000
J=	184	X(J)=	199.65000	Y(J)=	496.01000	Z(J)=	205.00000
J=	185	X(J)=	200.02000	Y(J)=	508.42000	Z(J)=	228.00000
J=	186	X(J)=	200.45000	Y(J)=	520.32000	Z(J)=	280.00000
J=	187	X(J)=	200.75000	Y(J)=	533.42000	Z(J)=	369.00000
J=	188	X(J)=	201.12000	Y(J)=	544.82000	Z(J)=	381.00000
J=	189	X(J)=	201.43000	Y(J)=	558.04000	Z(J)=	319.00000
J=	190	X(J)=	201.48000	Y(J)=	571.46000	Z(J)=	281.00000
J=	191	X(J)=	202.03000	Y(J)=	583.11000	Z(J)=	283.00000
J=	192	X(J)=	202.47000	Y(J)=	594.38000	Z(J)=	314.00000
J=	193	X(J)=	246.32000	Y(J)=	17.18000	Z(J)=	408.00000
J=	194	X(J)=	246.63000	Y(J)=	24.05000	Z(J)=	456.00000
J=	195	X(J)=	247.06000	Y(J)=	36.64000	Z(J)=	439.00000
J=	196	X(J)=	247.49000	Y(J)=	49.05000	Z(J)=	457.00000
J=	197	X(J)=	247.67000	Y(J)=	61.83000	Z(J)=	469.00000
J=	198	X(J)=	248.15000	Y(J)=	86.33000	Z(J)=	487.00000
J=	199	X(J)=	248.23000	Y(J)=	72.92000	Z(J)=	352.00000
J=	200	X(J)=	248.45000	Y(J)=	98.87000	Z(J)=	441.00000
J=	201	X(J)=	248.76000	Y(J)=	112.03000	Z(J)=	401.00000
J=	202	X(J)=	249.38000	Y(J)=	124.50000	Z(J)=	509.00000
J=	203	X(J)=	249.73000	Y(J)=	148.68000	Z(J)=	443.00000
J=	204	X(J)=	249.94000	Y(J)=	135.77000	Z(J)=	461.00000
J=	205	X(J)=	250.36000	Y(J)=	160.46000	Z(J)=	460.00000
J=	206	X(J)=	250.47000	Y(J)=	172.36000	Z(J)=	510.00000
J=	207	X(J)=	250.97000	Y(J)=	185.84000	Z(J)=	539.00000

J= 208	X(J)= 251.46000	Y(J)= 198.25000	Z(J)= 522.00000
J= 209	X(J)= 251.76000	Y(J)= 211.41000	Z(J)= 552.00000
J= 210	X(J)= 252.01000	Y(J)= 222.49000	Z(J)= 537.00000
J= 211	X(J)= 252.31000	Y(J)= 235.59000	Z(J)= 477.00000
J= 212	X(J)= 252.55000	Y(J)= 247.43000	Z(J)= 299.00000
J= 213	X(J)= 253.11000	Y(J)= 260.03000	Z(J)= -1172.00000
J= 214	X(J)= 253.73000	Y(J)= 271.87000	Z(J)= -61.00000
J= 215	X(J)= 253.97000	Y(J)= 284.15000	Z(J)= 1843.00000
J= 216	X(J)= 254.28000	Y(J)= 296.69000	Z(J)= 1139.00000
J= 217	X(J)= 254.65000	Y(J)= 309.41000	Z(J)= 1746.00000
J= 218	X(J)= 254.95000	Y(J)= 321.94000	Z(J)= 757.00000
J= 219	X(J)= 255.38000	Y(J)= 334.41000	Z(J)= 759.00000
J= 220	X(J)= 255.69000	Y(J)= 346.38000	Z(J)= 790.00000
J= 221	X(J)= 256.12000	Y(J)= 358.66000	Z(J)= 833.00000
J= 222	X(J)= 256.36000	Y(J)= 372.07000	Z(J)= 926.00000
J= 223	X(J)= 256.54000	Y(J)= 383.16000	Z(J)= 1112.00000
J= 224	X(J)= 257.16000	Y(J)= 396.38000	Z(J)= 1499.00000
J= 225	X(J)= 257.34000	Y(J)= 408.91000	Z(J)= 2432.00000
J= 226	X(J)= 257.76000	Y(J)= 433.35000	Z(J)= -176.00000
J= 227	X(J)= 257.89000	Y(J)= 420.94000	Z(J)= 3023.00000
J= 228	X(J)= 258.49000	Y(J)= 458.98000	Z(J)= 2145.00000
J= 229	X(J)= 258.57000	Y(J)= 445.88000	Z(J)= 6767.00000
J= 230	X(J)= 258.97000	Y(J)= 482.98000	Z(J)= -169.00000
J= 231	X(J)= 259.37000	Y(J)= 471.45000	Z(J)= -363.00000
J= 232	X(J)= 259.84000	Y(J)= 507.73000	Z(J)= 9.00000
J= 233	X(J)= 259.85000	Y(J)= 495.45000	Z(J)= -75.00000

J= 234	X(J)= 260.20000	Y(J)= 519.63000	Z(J)= 85.00000
J= 235	X(J)= 261.08000	Y(J)= 533.05000	Z(J)= 93.00000
J= 236	X(J)= 261.19000	Y(J)= 545.52000	Z(J)= 331.00000
J= 237	X(J)= 261.44000	Y(J)= 557.42000	Z(J)= 215.00000
J= 238	X(J)= 261.80000	Y(J)= 571.40000	Z(J)= 216.00000
J= 239	X(J)= 262.17000	Y(J)= 582.30000	Z(J)= 232.00000
J= 240	X(J)= 262.48000	Y(J)= 593.89000	Z(J)= 248.00000
J= 241	X(J)= 297.28000	Y(J)= 618.57000	Z(J)= 412.00000
J= 242	X(J)= 297.78000	Y(J)= 626.19000	Z(J)= 423.00000
J= 243	X(J)= 298.22000	Y(J)= 639.85000	Z(J)= 411.00000
J= 244	X(J)= 298.65000	Y(J)= 651.37000	Z(J)= 446.00000
J= 245	X(J)= 299.15000	Y(J)= 662.70000	Z(J)= 452.00000
J= 246	X(J)= 299.71000	Y(J)= 674.66000	Z(J)= 427.00000
J= 247	X(J)= 300.14000	Y(J)= 688.95000	Z(J)= 481.00000
J= 248	X(J)= 300.64000	Y(J)= 701.28000	Z(J)= 548.00000
J= 249	X(J)= 301.32000	Y(J)= 713.68000	Z(J)= 479.00000
J= 250	X(J)= 301.56000	Y(J)= 726.15000	Z(J)= 441.00000
J= 251	X(J)= 302.44000	Y(J)= 737.73000	Z(J)= 413.00000
J= 252	X(J)= 302.69000	Y(J)= 750.25000	Z(J)= 485.00000
J= 253	X(J)= 303.25000	Y(J)= 762.15000	Z(J)= 472.00000
J= 254	X(J)= 303.49000	Y(J)= 773.80000	Z(J)= 485.00000
J= 255	X(J)= 304.17000	Y(J)= 787.27000	Z(J)= 522.00000
J= 256	X(J)= 304.42000	Y(J)= 800.30000	Z(J)= 491.00000
J= 257	X(J)= 305.04000	Y(J)= 811.44000	Z(J)= 475.00000
J= 258	X(J)= 305.92000	Y(J)= 825.03000	Z(J)= 503.00000
J= 259	X(J)= 306.41000	Y(J)= 837.62000	Z(J)= 422.00000

J=	260	X(J)=	306.85000	Y(J)=	0250.09000	Z(J)=	310.00000
J=	261	X(J)=	307.15000	Y(J)=	0261.92000	Z(J)=	111.00000
J=	262	X(J)=	307.59000	Y(J)=	0273.00000	Z(J)=	-310.00000
J=	263	X(J)=	308.34000	Y(J)=	0285.34000	Z(J)=	-50.00000
J=	264	X(J)=	308.83000	Y(J)=	0299.56000	Z(J)=	810.00000
J=	265	X(J)=	309.33000	Y(J)=	0312.34000	Z(J)=	680.00000
J=	266	X(J)=	309.89000	Y(J)=	0323.67000	Z(J)=	721.00000
J=	267	X(J)=	310.19000	Y(J)=	0337.20000	Z(J)=	673.00000
J=	268	X(J)=	310.88000	Y(J)=	0348.97000	Z(J)=	658.00000
J=	269	X(J)=	311.13000	Y(J)=	0360.68000	Z(J)=	661.00000
J=	270	X(J)=	311.68000	Y(J)=	0373.46000	Z(J)=	662.00000
J=	271	X(J)=	312.18000	Y(J)=	0386.11000	Z(J)=	1020.00000
J=	272	X(J)=	312.80000	Y(J)=	0398.64000	Z(J)=	837.00000
J=	273	X(J)=	313.24000	Y(J)=	0411.10000	Z(J)=	782.00000
J=	274	X(J)=	313.86000	Y(J)=	0423.82000	Z(J)=	905.00000
J=	275	X(J)=	313.98000	Y(J)=	0435.40000	Z(J)=	1079.00000
J=	276	X(J)=	314.54000	Y(J)=	0447.99000	Z(J)=	1408.00000
J=	277	X(J)=	315.03000	Y(J)=	0461.33000	Z(J)=	2058.00000
J=	278	X(J)=	315.66000	Y(J)=	0472.98000	Z(J)=	2840.00000
J=	279	X(J)=	316.09000	Y(J)=	0486.89000	Z(J)=	-134.00000
J=	280	X(J)=	316.71000	Y(J)=	0499.04000	Z(J)=	4895.00000
J=	281	X(J)=	317.15000	Y(J)=	0509.80000	Z(J)=	5574.00000
J=	282	X(J)=	317.77000	Y(J)=	0522.77000	Z(J)=	410.00000
J=	283	X(J)=	318.20000	Y(J)=	0535.35000	Z(J)=	1.00000
J=	284	X(J)=	318.76000	Y(J)=	0547.57000	Z(J)=	110.00000
J=	285	X(J)=	319.13000	Y(J)=	0560.72000	Z(J)=	125.00000

J=	286	X(J)=	319.50000	Y(J)=	0572.30000	Z(J)=	135.00000
J=	287	X(J)=	320.00000	Y(J)=	0584.39000	Z(J)=	122.00000
J=	288	X(J)=	320.56000	Y(J)=	0596.66000	Z(J)=	111.00000
J=	289	X(J)=	376.68000	Y(J)=	0019.00000	Z(J)=	357.00000
J=	290	X(J)=	377.17000	Y(J)=	0039.59000	Z(J)=	385.00000
J=	291	X(J)=	377.25000	Y(J)=	0024.23000	Z(J)=	351.00000
J=	292	X(J)=	377.41000	Y(J)=	0061.68000	Z(J)=	424.00000
J=	293	X(J)=	377.54000	Y(J)=	0049.59000	Z(J)=	440.00000
J=	294	X(J)=	377.65000	Y(J)=	0074.08000	Z(J)=	414.00000
J=	295	X(J)=	377.77000	Y(J)=	0087.55000	Z(J)=	414.00000
J=	296	X(J)=	378.20000	Y(J)=	0099.45000	Z(J)=	433.00000
J=	297	X(J)=	378.32000	Y(J)=	0111.47000	Z(J)=	406.00000
J=	298	X(J)=	378.62000	Y(J)=	0124.88000	Z(J)=	383.00000
J=	299	X(J)=	378.74000	Y(J)=	0136.40000	Z(J)=	427.00000
J=	300	X(J)=	378.86000	Y(J)=	0148.92000	Z(J)=	389.00000
J=	301	X(J)=	379.04000	Y(J)=	0160.63000	Z(J)=	457.00000
J=	302	X(J)=	379.15000	Y(J)=	0172.34000	Z(J)=	483.00000
J=	303	X(J)=	379.59000	Y(J)=	0184.86000	Z(J)=	450.00000
J=	304	X(J)=	379.89000	Y(J)=	0197.58000	Z(J)=	500.00000
J=	305	X(J)=	380.30000	Y(J)=	0237.36000	Z(J)=	435.00000
J=	306	X(J)=	380.50000	Y(J)=	0223.45000	Z(J)=	411.00000
J=	307	X(J)=	380.51000	Y(J)=	0210.23000	Z(J)=	435.00000
J=	308	X(J)=	380.61000	Y(J)=	0248.44000	Z(J)=	410.00000
J=	309	X(J)=	380.73000	Y(J)=	0260.53000	Z(J)=	438.00000
J=	310	X(J)=	381.08000	Y(J)=	0286.14000	Z(J)=	484.00000
J=	311	X(J)=	381.16000	Y(J)=	0272.48000	Z(J)=	475.00000

J=	312	X(J)=	381.45000	Y(J)=	3297.73000	Z(J)=	486.00000
J=	313	X(J)=	381.89000	Y(J)=	3311.01000	Z(J)=	526.00000
J=	314	X(J)=	382.00000	Y(J)=	3322.40000	Z(J)=	593.00000
J=	315	X(J)=	382.18000	Y(J)=	3334.61000	Z(J)=	647.00000
J=	316	X(J)=	382.36000	Y(J)=	3346.63000	Z(J)=	642.00000
J=	317	X(J)=	382.66000	Y(J)=	3372.76000	Z(J)=	561.00000
J=	318	X(J)=	382.73000	Y(J)=	3359.16000	Z(J)=	549.00000
J=	319	X(J)=	383.16000	Y(J)=	3384.65000	Z(J)=	573.00000
J=	320	X(J)=	383.26000	Y(J)=	3407.63000	Z(J)=	921.00000
J=	321	X(J)=	383.34000	Y(J)=	3395.92000	Z(J)=	637.00000
J=	322	X(J)=	383.37000	Y(J)=	3433.56000	Z(J)=	598.00000
J=	323	X(J)=	383.48000	Y(J)=	3446.03000	Z(J)=	562.00000
J=	324	X(J)=	383.63000	Y(J)=	3422.11000	Z(J)=	615.00000
J=	325	X(J)=	384.23000	Y(J)=	3458.93000	Z(J)=	539.00000
J=	326	X(J)=	384.28000	Y(J)=	3472.72000	Z(J)=	588.00000
J=	327	X(J)=	384.33000	Y(J)=	3496.63000	Z(J)=	995.00000
J=	328	X(J)=	384.38000	Y(J)=	3508.34000	Z(J)=	571.00000
J=	329	X(J)=	384.53000	Y(J)=	3484.11000	Z(J)=	679.00000
J=	330	X(J)=	384.81000	Y(J)=	3520.62000	Z(J)=	584.00000
J=	331	X(J)=	384.99000	Y(J)=	3534.21000	Z(J)=	619.00000
J=	332	X(J)=	385.34000	Y(J)=	3571.92000	Z(J)=	3275.00000
J=	333	X(J)=	385.49000	Y(J)=	3545.73000	Z(J)=	1028.00000
J=	334	X(J)=	385.60000	Y(J)=	3561.47000	Z(J)=	2752.00000
J=	335	X(J)=	385.97000	Y(J)=	3583.44000	Z(J)=	3086.00000
J=	336	X(J)=	386.02000	Y(J)=	3595.08000	Z(J)=	2858.00000
J=	337	X(J)=	448.85000	Y(J)=	3025.85000	Z(J)=	418.00000



J=	338	X(J)=	448.90000	Y(J)=	0123.04000	Z(J)=	486.00000
J=	339	X(J)=	448.98000	Y(J)=	0100.13000	Z(J)=	426.00000
J=	340	X(J)=	448.99000	Y(J)=	0160.43000	Z(J)=	451.00000
J=	341	X(J)=	449.01000	Y(J)=	0062.30000	Z(J)=	429.00000
J=	342	X(J)=	449.03000	Y(J)=	0038.07000	Z(J)=	413.00000
J=	343	X(J)=	449.14000	Y(J)=	00135.13000	Z(J)=	405.00000
J=	344	X(J)=	449.16000	Y(J)=	00186.55000	Z(J)=	456.00000
J=	345	X(J)=	449.18000	Y(J)=	00237.98000	Z(J)=	436.00000
J=	346	X(J)=	449.19000	Y(J)=	00149.35000	Z(J)=	427.00000
J=	347	X(J)=	449.21000	Y(J)=	00051.10000	Z(J)=	436.00000
J=	348	X(J)=	449.23000	Y(J)=	00259.07000	Z(J)=	461.00000
J=	349	X(J)=	449.23000	Y(J)=	00335.80000	Z(J)=	514.00000
J=	350	X(J)=	449.28000	Y(J)=	00496.44000	Z(J)=	501.00000
J=	351	X(J)=	449.30000	Y(J)=	00172.64000	Z(J)=	446.00000
J=	352	X(J)=	449.34000	Y(J)=	00572.29000	Z(J)=	658.00000
J=	353	X(J)=	449.34000	Y(J)=	00199.96000	Z(J)=	433.00000
J=	354	X(J)=	449.35000	Y(J)=	00112.34000	Z(J)=	427.00000
J=	355	X(J)=	449.37000	Y(J)=	00019.56000	Z(J)=	437.00000
J=	356	X(J)=	449.37000	Y(J)=	00088.23000	Z(J)=	430.00000
J=	357	X(J)=	449.38000	Y(J)=	00224.39000	Z(J)=	438.00000
J=	358	X(J)=	449.38000	Y(J)=	00073.38000	Z(J)=	425.00000
J=	359	X(J)=	449.39000	Y(J)=	00372.56000	Z(J)=	507.00000
J=	360	X(J)=	449.39000	Y(J)=	00212.93000	Z(J)=	434.00000
J=	361	X(J)=	449.39000	Y(J)=	00286.26000	Z(J)=	484.00000
J=	362	X(J)=	449.40000	Y(J)=	00360.79000	Z(J)=	505.00000
J=	363	X(J)=	449.45000	Y(J)=	00298.16000	Z(J)=	545.00000

J= 364	X(J)= 449.50000	Y(J)= 6386.03000	Z(J)= 610.00000
J= 365	X(J)= 449.51000	Y(J)= 6596.65000	Z(J)= 791.00000
J= 366	X(J)= 449.51000	Y(J)= 6522.12000	Z(J)= 544.00000
J= 367	X(J)= 449.54000	Y(J)= 6485.11000	Z(J)= 543.00000
J= 368	X(J)= 449.54000	Y(J)= 6410.64000	Z(J)= 818.00000
J= 369	X(J)= 449.60000	Y(J)= 6423.80000	Z(J)= 749.00000
J= 370	X(J)= 449.62000	Y(J)= 6546.54000	Z(J)= 609.00000
J= 371	X(J)= 449.62000	Y(J)= 6323.97000	Z(J)= 513.00000
J= 372	X(J)= 449.63000	Y(J)= 6460.50000	Z(J)= 520.00000
J= 373	X(J)= 449.63000	Y(J)= 6535.15000	Z(J)= 575.00000
J= 374	X(J)= 449.65000	Y(J)= 6509.53000	Z(J)= 511.00000
J= 375	X(J)= 449.68000	Y(J)= 6472.39000	Z(J)= 552.00000
J= 376	X(J)= 449.72000	Y(J)= 6348.58000	Z(J)= 579.00000
J= 377	X(J)= 449.72000	Y(J)= 6272.35000	Z(J)= 450.00000
J= 378	X(J)= 449.74000	Y(J)= 6398.24000	Z(J)= 591.00000
J= 379	X(J)= 449.77000	Y(J)= 6447.53000	Z(J)= 506.00000
J= 380	X(J)= 449.78000	Y(J)= 6435.19000	Z(J)= 537.00000
J= 381	X(J)= 449.78000	Y(J)= 6585.63000	Z(J)= 715.00000
J= 382	X(J)= 449.80000	Y(J)= 6559.45000	Z(J)= 640.00000
J= 383	X(J)= 449.82000	Y(J)= 6312.19000	Z(J)= 911.00000
J= 384	X(J)= 450.00000	Y(J)= 6249.00000	Z(J)= 473.00000

Apêndice IV. Malha gerada por SCG2 ,Amostra HIMMAG  
(listagem parcial)

Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	1
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	2
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	3
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	4
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	5
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	6
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	7
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	8
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	9
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	10
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	11
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	12
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	13
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	14
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	15
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	16
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	17
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	18
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	19
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	20
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	21
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	22
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	23
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	24

Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	1	LINHA	250
Z	597.73748	DPE	28.87098	COLUNA	2	LINHA	100
Z	678.86816	DPE	12.27112	COLUNA	2	LINHA	200
Z	836.76252	DPE	12.17741	COLUNA	2	LINHA	300
Z	2600.46415	DPE	11.60841	COLUNA	2	LINHA	400
Z	2882.99082	DPE	11.67741	COLUNA	2	LINHA	500
Z	867.19220	DPE	11.04503	COLUNA	2	LINHA	600
Z	344.63328	DPE	10.28641	COLUNA	2	LINHA	700
Z	380.13042	DPE	10.27677	COLUNA	2	LINHA	800
Z	414.84976	DPE	8.87394	COLUNA	2	LINHA	900
Z	245.13120	DPE	9.89497	COLUNA	2	LINHA	1000
Z	284.09421	DPE	8.83748	COLUNA	2	LINHA	1100
Z	1735.78831	DPE	8.17706	COLUNA	2	LINHA	1200
Z	-50.67283	DPE	8.35542	COLUNA	2	LINHA	1300
Z	121.89339	DPE	7.42229	COLUNA	2	LINHA	1400
Z	263.62453	DPE	7.44229	COLUNA	2	LINHA	1500
Z	220.91840	DPE	7.01762	COLUNA	2	LINHA	1600
Z	231.70546	DPE	5.80894	COLUNA	2	LINHA	1700
Z	269.93647	DPE	6.84016	COLUNA	2	LINHA	1800
Z	290.57696	DPE	5.51973	COLUNA	2	LINHA	1900
Z	267.26407	DPE	6.33555	COLUNA	2	LINHA	2000
Z	279.59389	DPE	5.23804	COLUNA	2	LINHA	2100
Z	298.78846	DPE	3.90426	COLUNA	2	LINHA	2200
Z	286.92679	DPE	5.82906	COLUNA	2	LINHA	2300
Z	307.12141	DPE	5.98696	COLUNA	2	LINHA	2400

Z	309.44755	DPE	5.72042	COLUNA 2	2 LINHA	251
Z	582.91435	DPE	31.62976	COLUNA 3	3 LINHA	100
Z	663.75642	DPE	24.98670	COLUNA 3	3 LINHA	200
Z	875.01386	DPE	25.19124	COLUNA 3	3 LINHA	300
Z	1682.76180	DPE	25.06874	COLUNA 3	3 LINHA	400
Z	1967.71602	DPE	25.12397	COLUNA 3	3 LINHA	500
Z	1509.60587	DPE	25.18427	COLUNA 3	3 LINHA	600
Z	1480.50166	DPE	24.99659	COLUNA 3	3 LINHA	700
Z	1682.72979	DPE	25.11262	COLUNA 3	3 LINHA	800
Z	1599.74219	DPE	25.25994	COLUNA 3	3 LINHA	900
Z	974.99736	DPE	25.30586	COLUNA 3	3 LINHA	1000
Z	635.29208	DPE	25.24642	COLUNA 3	3 LINHA	1100
Z	668.85904	DPE	25.29354	COLUNA 3	3 LINHA	1200
Z	342.25845	DPE	25.28647	COLUNA 3	3 LINHA	1300
Z	196.97978	DPE	25.45987	COLUNA 3	3 LINHA	1400
Z	212.49117	DPE	25.32014	COLUNA 3	3 LINHA	1500
Z	216.02472	DPE	25.20928	COLUNA 3	3 LINHA	1600
Z	232.63649	DPE	25.08280	COLUNA 3	3 LINHA	1700
Z	256.94136	DPE	25.05353	COLUNA 3	3 LINHA	1800
Z	281.35167	DPE	24.93892	COLUNA 3	3 LINHA	1900
Z	269.63540	DPE	24.94040	COLUNA 3	3 LINHA	2000
Z	276.42460	DPE	25.65360	COLUNA 3	3 LINHA	2100
Z	306.62685	DPE	27.42189	COLUNA 3	3 LINHA	2200
Z	329.61737	DPE	36.78332	COLUNA 3	3 LINHA	2300
Z	309.58437	DPE	34.06053	COLUNA 3	3 LINHA	2400

Z	321.65895	DPE	37.90171	COLUNA	3 LINHA	25
Z	595.91618	DPE	25.65933	COLUNA	4 LINHA	1
Z	665.03522	DPE	13.69650	COLUNA	4 LINHA	2
Z	708.23779	DPE	14.30964	COLUNA	4 LINHA	3
Z	987.48144	DPE	14.76597	COLUNA	4 LINHA	4
Z	1243.68923	DPE	15.42713	COLUNA	4 LINHA	5
Z	1817.64308	DPE	16.03061	COLUNA	4 LINHA	6
Z	2634.26460	DPE	15.96897	COLUNA	4 LINHA	7
Z	3035.70313	DPE	17.08487	COLUNA	4 LINHA	8
Z	2947.43513	DPE	17.63363	COLUNA	4 LINHA	9
Z	2065.75208	DPE	17.87303	COLUNA	4 LINHA	10
Z	373.54585	DPE	18.31385	COLUNA	4 LINHA	11
Z	212.48718	DPE	18.79481	COLUNA	4 LINHA	12
Z	298.38851	DPE	20.15686	COLUNA	4 LINHA	13
Z	239.24625	DPE	20.03824	COLUNA	4 LINHA	14
Z	154.85777	DPE	20.18782	COLUNA	4 LINHA	15
Z	183.95880	DPE	20.49277	COLUNA	4 LINHA	16
Z	224.59308	DPE	23.43291	COLUNA	4 LINHA	17
Z	239.97002	DPE	22.50570	COLUNA	4 LINHA	18
Z	256.34387	DPE	21.47217	COLUNA	4 LINHA	19
Z	263.45176	DPE	21.68573	COLUNA	4 LINHA	20
Z	274.78978	DPE	22.21473	COLUNA	4 LINHA	21
Z	286.39569	DPE	22.68761	COLUNA	4 LINHA	22
Z	293.76941	DPE	23.29412	COLUNA	4 LINHA	23
Z	295.31568	DPE	23.03626	COLUNA	4 LINHA	24

Z	302.07081	DPE	23.33532	COLUNA	4 LINHA	25
Z	539.54853	DPE	33.34264	COLUNA	5 LINHA	1
Z	540.48559	DPE	20.29047	COLUNA	5 LINHA	2
Z	690.28780	DPE	20.14373	COLUNA	5 LINHA	3
Z	825.20760	DPE	19.38366	COLUNA	5 LINHA	4
Z	1183.78301	DPE	18.73253	COLUNA	5 LINHA	5
Z	2151.39852	DPE	17.87803	COLUNA	5 LINHA	6
Z	3297.70158	DPE	18.03887	COLUNA	5 LINHA	7
Z	3562.25229	DPE	18.28560	COLUNA	5 LINHA	8
Z	3358.71558	DPE	18.31979	COLUNA	5 LINHA	9
Z	2651.61171	DPE	18.03516	COLUNA	5 LINHA	10
Z	520.77386	DPE	16.42119	COLUNA	5 LINHA	11
Z	381.43918	DPE	16.34337	COLUNA	5 LINHA	12
Z	493.79187	DPE	14.88148	COLUNA	5 LINHA	13
Z	476.07787	DPE	14.62221	COLUNA	5 LINHA	14
Z	303.77538	DPE	13.40391	COLUNA	5 LINHA	15
Z	49.88051	DPE	12.51408	COLUNA	5 LINHA	16
Z	389.39749	DPE	10.76904	COLUNA	5 LINHA	17
Z	231.66953	DPE	11.10416	COLUNA	5 LINHA	18
Z	227.09837	DPE	10.24868	COLUNA	5 LINHA	19
Z	265.15012	DPE	9.55395	COLUNA	5 LINHA	20
Z	276.05892	DPE	7.75926	COLUNA	5 LINHA	21
Z	273.28347	DPE	6.23598	COLUNA	5 LINHA	22
Z	296.93931	DPE	7.90560	COLUNA	5 LINHA	23
Z	286.61373	DPE	5.66043	COLUNA	5 LINHA	24





Z	194.39095 DPE	22.29771 COLUNA	10 LINHA	25
Z	458.61731 DPE	27.69462 COLUNA	11 LINHA	1
Z	474.65099 DPE	17.38387 COLUNA	11 LINHA	2
Z	508.17598 DPE	17.20212 COLUNA	11 LINHA	3
Z	537.33216 DPE	16.79853 COLUNA	11 LINHA	4
Z	522.10626 DPE	16.34388 COLUNA	11 LINHA	5
Z	523.15483 DPE	15.49018 COLUNA	11 LINHA	6
Z	535.89886 DPE	15.06875 COLUNA	11 LINHA	7
Z	583.93401 DPE	14.28497 COLUNA	11 LINHA	8
Z	613.76593 DPE	13.94364 COLUNA	11 LINHA	9
Z	630.50220 DPE	13.57092 COLUNA	11 LINHA	10
Z	805.94965 DPE	12.36206 COLUNA	11 LINHA	11
Z	-96.06623 DPE	12.31822 COLUNA	11 LINHA	12
Z	-392.84415 DPE	11.46831 COLUNA	11 LINHA	13
Z	3507.29518 DPE	10.19554 COLUNA	11 LINHA	14
Z	3541.22598 DPE	10.21781 COLUNA	11 LINHA	15
Z	2950.01030 DPE	9.58124 COLUNA	11 LINHA	16
Z	2606.03430 DPE	8.15169 COLUNA	11 LINHA	17
Z	1812.40692 DPE	8.92277 COLUNA	11 LINHA	18
Z	1184.93140 DPE	6.82679 COLUNA	11 LINHA	19
Z	1152.67559 DPE	6.99197 COLUNA	11 LINHA	20
Z	-67.80095 DPE	6.39775 COLUNA	11 LINHA	21
Z	63.07841 DPE	4.57308 COLUNA	11 LINHA	22
Z	120.11700 DPE	5.62853 COLUNA	11 LINHA	23
Z	158.14854 DPE	3.88143 COLUNA	11 LINHA	24

Z	164.08905 DPE	5.34732	COLUNA	11	LINHA	25
Z	415.10371 DPE	31.98170	COLUNA	12	LINHA	1
Z	459.00093 DPE	26.11428	COLUNA	12	LINHA	2
Z	491.83542 DPE	26.43103	COLUNA	12	LINHA	3
Z	500.87933 DPE	26.40831	COLUNA	12	LINHA	4
Z	494.27187 DPE	26.34714	COLUNA	12	LINHA	5
Z	494.24607 DPE	26.23960	COLUNA	12	LINHA	6
Z	507.41061 DPE	26.30742	COLUNA	12	LINHA	7
Z	533.14716 DPE	26.36883	COLUNA	12	LINHA	8
Z	555.80851 DPE	26.54948	COLUNA	12	LINHA	9
Z	593.82428 DPE	26.50047	COLUNA	12	LINHA	10
Z	722.70899 DPE	26.45017	COLUNA	12	LINHA	11
Z	-63.35460 DPE	26.55217	COLUNA	12	LINHA	12
Z	435.47088 DPE	26.25756	COLUNA	12	LINHA	13
Z	1749.71962 DPE	26.24814	COLUNA	12	LINHA	14
Z	2560.76963 DPE	26.35728	COLUNA	12	LINHA	15
Z	2618.72311 DPE	26.24573	COLUNA	12	LINHA	16
Z	2040.26051 DPE	26.05798	COLUNA	12	LINHA	17
Z	1520.99175 DPE	26.31196	COLUNA	12	LINHA	18
Z	1308.50888 DPE	28.39560	COLUNA	12	LINHA	19
Z	852.51291 DPE	29.89855	COLUNA	12	LINHA	20
Z	1136.73995 DPE	37.82590	COLUNA	12	LINHA	21
Z	1641.31389 DPE	43.37910	COLUNA	12	LINHA	22
Z	1740.96748 DPE	43.49361	COLUNA	12	LINHA	23
Z	640.26566 DPE	37.41115	COLUNA	12	LINHA	24

Z	398.40027	DPE	31.97566	COLUNA	12	LINHA	25
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	1
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	2
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	3
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	4
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	5
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	6
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	7
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	8
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	9
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	10
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	11
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	12
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	13
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	14
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	15
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	16
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	17
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	18
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	19
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	20
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	21
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	22
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	23
Z	2000000.00000	DPE	2000000.00000	COLUNA	13	LINHA	24

Z 200000.0000 DPE 200000.0000 COLUNA 13 LINHA 25L

FIM NORMAL DE GRIDA