

# TRIANGULAÇÃO ADAPTATIVA DE SÓLIDOS CSG PARA GERAÇÃO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS

**Valéria Maria de Souza Barbalho**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

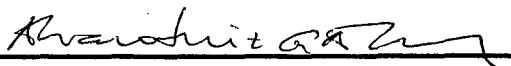
Aprovada por:



---

Prof. Ronaldo César Marinho Persiano, D. Sc.

(Presidente)



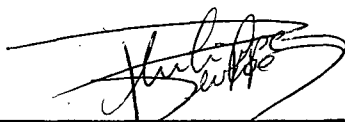
---

Prof. Alvaro Luiz G. de Azeredo Coutinho, D. Sc.



---

Prof. Paulo Roma Cavalcanti, D. Sc.



---

Prof. Philippe Rémy Bernard Devloo, Ph. D.

BARBALHO, VALÉRIA MARIA DE SOUZA

Triangulação Adaptativa De Sólidos CSG Para Geração de Malhas de Elementos Finitos. [Rio de Janeiro] 1994.

viii, 92 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1994)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Geração de Malhas                      2. Algoritmos Adaptativos

3. Método de Elementos Finitos

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série).

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

## **TRIANGULAÇÃO ADAPTATIVA DE SÓLIDOS CSG PARA GERAÇÃO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS**

**Valéria Maria de Souza Barbalho**

Maio de 1994

Orientador: Prof. Ronaldo C. Marinho Persiano

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O ponto central da geração de malhas para o método de elementos finitos é a discretização do domínio no qual o problema está descrito. Os métodos usuais de geração automática de malhas têm se baseado em subdivisão espacial.

O presente trabalho apresenta um esquema para triangulação adaptativa de sólidos CSG, baseado em uma nova proposta de refinamento adaptativo de triangulações que garante a transição suave entre grandes e pequenos elementos, sem degradação dos tetraedros. O esquema simples e recursivo tem o suporte de uma triangulação particular do espaço.

O refinamento adaptativo é controlado por critério de refinamento definido pela aplicação, o que propicia ao esquema um potencial para diversas aplicações.

A aplicação para geração de malhas de elementos finitos para domínios representáveis por sólidos CSG é considerada, onde são apresentados alguns aspectos relacionados com a aproximação geométrica do modelo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

## **ADAPTIVE TRIANGULATION OF CSG SOLIDS TO FINITE ELEMENT MESH GENERATION**

**Valéria Maria de Souza Barbalho**

May, 1994

Thesis Supervisor: Ronaldo C. Marinho Persiano

Department: Computation and System Engineering

Finite elements analysis of solid models usually requires that the model be approximated by a discrete set of polyhedral elements. Traditional methods to solve this problem has been based upon cubic meshes.

Adaptive meshes have smaller elements in areas that requires more precise analysis. An adaptive mesh, however, must not include highly irregular tetrahedra, for their presence allows numerical instability to render the results of the analysis suspect.

This work presents a general scheme for adaptive triangulation of CSG solids. The scheme is based on a new proposal for adaptive refinement triangulations. Smooth transition between large and small elements is guaranteed without any degradation of the aspect ratio of the elements. The simple and recursive scheme is supported by a particular spatial triangulation.

The adaptive refinement is built by halving bisection of tetrahedra in such a way that their form factor is kept constant avoiding degeneration. The refinement is dependent only on criterion that is application dependent, providing the scheme with a potential utility to many applications.

Some aspects of the application to finite elements mesh generation are considered.

## AGRADECIMENTOS

Aos amigos Luís e Helena, padrinhos desta tese, por terem sido os responsáveis pela retomada dos trabalhos após período de interrupção.

À Ronaldo Marinho Persiano, orientador desta tese, por todos os conhecimentos transmitidos e pelas contribuições tanto na concepção das idéias como na redação do texto.

À Alvaro Luiz Coutinho pela empolgação contagiante de grande valia para a arrancada dos trabalhos.

À João Comba pelas idéias e sugestões durante a fase de estudos.

Aos amigos Gandra, Célia, Daisy, Adailton, Zé Maria, Luis Paulo, André Guedes, Carla Godinho pelos grandes momentos de descontração que propiciaram nos inesquecíveis rodízios de Pizza e outras festas. E também pela compreensão e paciência com que me aturaram nos momentos mais difíceis.

Ao colega Antonio lopes que, pela semelhança de nossos estudos, contribuiu com valiosas discussões e sugestões e eliminou a maioria das minhas dúvidas de programação.

Ao colega José Brito pelo interesse na revisão do texto e pela contribuição inestimável nas inúmeras partes dos software e hardware, me fazendo, às vezes, esquecer as dificuldades devidas a falta de uma equipe de suporte no laboratório.

Ao amigo Julian Quezada pela sua maneira inteligente e cuidadosa de discordar sistematicamente de minhas opiniões.

À CAPES e CNPQ pelo suporte financeiro.

Um reconhecimento especial à Pedro Nascimento pelo apoio emocional, paciência e amizade demonstrada em longas e valiosas conversas sobre astrologia que me fizeram ver limitações e potencialidades e me deram forças para continuar mesmo nos piores momentos de crise.

**À minha família**

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geração de Malhas de Elementos Finitos</b>	<b>4</b>
2.1.	Introdução .....	4
2.2.	O Método de Elementos Finitos (MEF) .....	5
2.3.	Discretização de Domínios .....	8
2.4.	Métodos Adaptativos .....	9
2.5.	Geração Automática de Malhas .....	11
2.6.	Nossa Proposta .....	14
<b>3</b>	<b>Refinamento Adaptativo</b>	<b>16</b>
3.1.	Introdução .....	16
3.2.	Triangulações CFK.....	17
3.3.	Subdivisão Binária.....	19
3.4.	Refinamento de Triangulações.....	23
3.5.	Refinamento Básico.....	24
3.6.	Refinamento Adaptativo de Triangulações CFK .....	27
3.7.	Propriedades das Triangulações CFK .....	28
3.8.	Refinamento Básico Modificado.....	30
3.9.	Estrutura de Representação da Triangulação.....	32
3.10.	Conclusão.....	33
<b>4</b>	<b>Triangulação Adaptativa de Sólidos CSG</b>	<b>34</b>
4.1.	Introdução .....	34
4.2.	Modelos CSG .....	35
4.3.	Funções Características de Sólidos CSG.....	37
4.4.	Localização de Sólidos CSG.....	40
4.5.	Classificação de Tetraedros Contra Primitivas .....	42
4.6.	Triangulação Adaptativa do Sólido .....	44
4.7.	Conclusão.....	48

<b>5</b>	<b>Geração de Malhas de Elementos Finitos de Sólidos CSG</b>	<b>49</b>
5.1.	Introdução .....	49
5.2.	Domínios de Elementos Finitos .....	49
5.3.	Critério de Refinamento.....	50
5.4.	Triangulação Adaptativa do Domínio .....	51
5.5.	Abordagens para Aproximação da Fronteira do Sólido .....	54
5.5.1.	Interpolação Linear da Fronteira do Sólido .....	54
5.5.2.	Relocação dos Vértices para a Superfície do Sólido .....	56
5.5.3.	Triangulação de Delaunay.....	56
5.6.	Conclusão.....	57
<b>6</b>	<b>Aspectos Gerais da Implementação</b>	<b>59</b>
6.1.	Visão Geral .....	59
6.2.	Módulo CSG2CSPG.....	60
6.3.	Módulo GERATRIANG .....	61
6.3.1.	Módulo ESTRUTURA .....	61
6.3.2.	Módulo CRITERIO .....	62
6.3.3.	Módulo BEZIER.....	62
6.3.4.	Módulo CSG.....	63
6.4.	Conclusão.....	63
<b>7</b>	<b>Avaliações e Considerações Finais</b>	<b>64</b>
7.1.	Descrição do Trabalho.....	64
7.2.	Avaliação do Esquema Proposto.....	65
7.2.1.	Complexidade do algoritmo .....	65
7.2.2.	Exemplos e Resultados .....	67
7.3.	Conclusões .....	77
7.3.	Sugestões para Futuros Trabalhos.....	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>



# CAPÍTULO 1

## Introdução

---

Por mais de duas décadas, o método de elementos finitos tem sido uma ferramenta largamente utilizada na resolução numérica de fenômenos físicos nas mais diversas áreas.

A geração manual ou semi-automática de malhas para o método de elementos finitos é geralmente tarefa que consome muito tempo, além de estar sujeita a erros. Além disso, pode ser inviável para domínios tridimensionais com geometria complexa. A geração automática de malhas para geometrias tridimensionais tem sido tópico de estudo e pesquisa ativa por aproximadamente uma década. Vários algoritmos têm sido propostos [SCHR91], [LOHN92], [DEVL91].

Em geral, estes algoritmos se baseiam nos métodos adaptativos, onde uma solução de elementos finitos é obtida para uma malha inicial que é, então, refinada seletivamente com base nos erros encontrados. Os métodos adaptativos interagem entre a obtenção da solução e o refinamento da malha até que uma solução dentro de erros aceitáveis tenha sido alcançada.

Com o propósito de automatizar o processo de geração de malhas, triangulações do espaço têm sido utilizadas por causa de sua flexibilidade em aproximar geometrias irregulares.

No escopo deste trabalho, estamos particularmente interessados em gerar malhas para domínios tridimensionais, especialmente aqueles que podem ser representados por objetos sólidos.

Quando modelos geométricos complexos estão sendo analisados, o refinamento da triangulação deve levar em conta tanto a aproximação da geometria do modelo como a adequação da triangulação ao fenômeno que está sendo estudado. O uso de métodos adaptativos traz vantagens específicas, tais como a possibilidade de se modificar seletiva e localmente a malha garantindo

resultados ótimos no sentido de que são obtidas malhas satisfatórias com um número mínimo de elementos.

Neste trabalho abordaremos a aproximação de modelos tridimensionais descritos por expressões CSG com a finalidade de geração de malhas de elementos finitos. A idéia consiste em moldar uma cobertura do sólido constituída por uma triangulação tridimensional irregular.

Nossa proposta é o refinamento adaptativo de uma triangulação CFK inicial do espaço no qual o sólido está inserido. O Refinamento é controlado por critério de refinamento definido pela aplicação e a geometria do modelo é aproximada simultaneamente à adequação da triangulação aos requisitos do problema. A precisão desta aproximação é determinada pelo nível máximo de refinamento.

Este trabalho é dividido em sete capítulos. No capítulo 2 abordaremos o problema da geração de malhas para o método de elementos finitos, começando com uma breve descrição do método de elementos finitos e discutindo em seguida os problemas relacionados com a discretização de domínios. Falaremos também dos métodos adaptativos para a análise de elementos finitos e das principais técnicas utilizadas na geração automática de malhas.

O capítulo 3 é dedicado a apresentação da nossa proposta de refinamento adaptativo de triangulações CFK. Descreveremos as triangulações CFK e o processo de subdivisão binária de tetraedros em que se baseia o refinamento. Discutiremos os problemas relacionados com o refinamento adaptativo de triangulações e de como podemos garantir a validade destas triangulações. As propriedades das triangulações CFK e a estrutura de representação das triangulações são também apresentadas neste capítulo.

No capítulo 4 mostraremos como o refinamento adaptativo proposto pode ser útil para construir uma triangulação de um domínio geométrico descrito por um sólido CSG. Apresentaremos o modelo matemático de representação de sólidos CSG e, em seguida, as funções características que os representam implicitamente. Na sequência apresentaremos os conceitos de localização de sólidos que simplificam expressões CSG e o critério de classificação de tetraedros baseado na representação Bézier das funções características. Por fim, apresentaremos a construção da triangulação adaptativa para o sólido.

No capítulo 5 veremos a utilização da triangulação adaptativa proposta para a geração de malhas tridimensionais para o método de elementos finitos. Abordaremos principalmente a questão da aproximação geométrica do modelo.

Alguns aspectos da implementação desenvolvida e uma visão geral do sistema são apresentados no capítulo 6.

Finalmente, no capítulo 7, apresentaremos alguns exemplos de aplicação e resultados, bem como as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

# Geração de Malhas de Elementos Finitos

---

### 2.1. Introdução

O ponto central da utilização do método de elementos finitos para resolução numérica de problemas físicos descritos por equações diferenciais parciais é a discretização do domínio no qual o problema está descrito em uma malha de elementos finitos.

A geração de uma malha válida para um domínio com uma geometria complexa não é, contudo, uma operação trivial e pode ser muito cara em termos computacionais. Por outro lado, a qualidade da solução aproximada é fortemente dependente da malha gerada ser bem adaptada às propriedades físicas do problema. A confiabilidade dos resultados é, na verdade, questão fundamental no método de elementos finitos.

Os métodos adaptativos têm sido cada vez mais utilizados na simulação de fenômenos complexos. Estes métodos se valem de medidas de erros locais da solução para executar um refinamento seletivo da malha, adaptando-a às propriedades físicas do problema em consideração.

A popularização destes métodos tem sido fator decisivo para o desenvolvimento de ferramentas automáticas para geração de malhas de elementos finitos. Muitos algoritmos têm sido propostos [SCHR89], [SCHR91], [ODEN90], [LOHN92], [NAMB93].

Iniciaremos o capítulo apresentando uma breve descrição do método de elementos finitos. Na seção seguinte discutiremos mais detalhadamente o problema da discretização de domínios e a questão dos erros envolvidos com esta aproximação. Na sequência apresentaremos os métodos adaptativos para abordagem do problema e as principais técnicas para geração automática de malhas.

## 2.2. O Método de Elementos Finitos (MEF)

Um problema típico de elementos finitos consiste em determinar o comportamento de uma determinada grandeza física (temperatura, pressão, velocidade, deslocamento, etc.) descrito por uma equação diferencial parcial em um domínio contínuo, e sujeito a determinadas condições impostas no contorno deste domínio. Para este problema, em geral, não é possível obter explicitamente uma solução exata e o método de elementos finitos é utilizado para resolver numericamente o problema.

Uma formulação geral para um problema deste tipo é da forma [RIBE90]:

$$\mathcal{L}u + p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

$$\mathcal{M}u = u_0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$\mathcal{N}u + q = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3)$$

onde  $u$  é a grandeza cujo comportamento dentro do domínio  $\Omega$  se quer determinar,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  são operadores diferenciais,  $p$  e  $q$  independem de  $u$  e, (2) e (3) são as condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente.

Em geral, este problema é reescrito em uma formulação mais adequada para resolução numérica, denominada formulação fraca ou variacional. Nesta formulação procura-se uma solução  $u$  em um espaço  $H$  de funções suficientemente bem comportadas que satisfazem as condições de contorno essenciais, tal que a integral:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot v \cdot d\Omega + \int_{\Omega} p \cdot v \cdot d\Omega - \int_{\Gamma} q \cdot \mathcal{M}v \cdot d\Gamma = 0 \quad (4)$$

seja satisfeita para todo  $v \in H$ .

O problema contínuo é então substituído por um problema aproximado empregando-se o método de Ritz ou de Galerkin. A aproximação de Galerkin consiste em formular o problema em um espaço  $H^h$ , um subespaço de dimensão finita do espaço  $H$ , e buscar uma solução aproximada  $u^h \in H^h$ , tal que [ODEN82]:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u^h \cdot v^h \cdot d\Omega + \int_{\Omega} p \cdot v^h \cdot d\Omega - \int_{\Gamma} q \cdot \mathcal{M}v^h \cdot d\Gamma = 0 \quad \forall v^h \in H^h \quad (5)$$

onde  $h$  é um parâmetro real relacionado com a dimensão de  $H^h$ .

Assim, a solução aproximada de Galerkin pode ser expressa por:

$$u^h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \quad (6)$$

onde  $\phi_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$  são funções linearmente independentes que geram o espaço  $H^h$  e  $\alpha_i$ ,  $i=1,\dots,N$  são os parâmetros a determinar e correspondem às incógnitas do problema.

O MEF fornece um método sistemático para a construção das funções  $\phi_i$  [ODEN 82]. Inicialmente, o domínio  $\Omega$  contínuo é discretizado em um conjunto de células de dimensão finita, os elementos finitos. Dentro de cada elemento a solução é aproximada por uma combinação linear das funções de forma do elemento. Estas funções, tipicamente polinomiais de grau baixo, assumem característica de funções de interpolação dos valores da solução nos pontos nodais do elemento.

A cada ponto nodal do elemento está associado uma função de forma e o número de pontos nodais depende do grau destas polinomiais. A fig. 2.1 mostra alguns elementos planos e seus pontos nodais para algumas funções de forma mais comumente usadas.

A construção das funções base  $\phi_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , pode ser vista como um processo de colagem das funções de forma nos pontos nodais da discretização. Construída desta forma, uma função  $\phi_i$  é não nula somente sobre os elementos que contêm o nó  $i$ , ou seja, as funções têm "suporte" local:

$$\phi_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

sendo  $N$  o número de pontos nodais da discretização.

Tal característica das funções  $\phi_i$  faz com que seja atribuído às incógnitas  $\alpha_i$  da expressão (6) o significado físico de valores da função aproximada  $u^h$  nos pontos nodais da discretização.

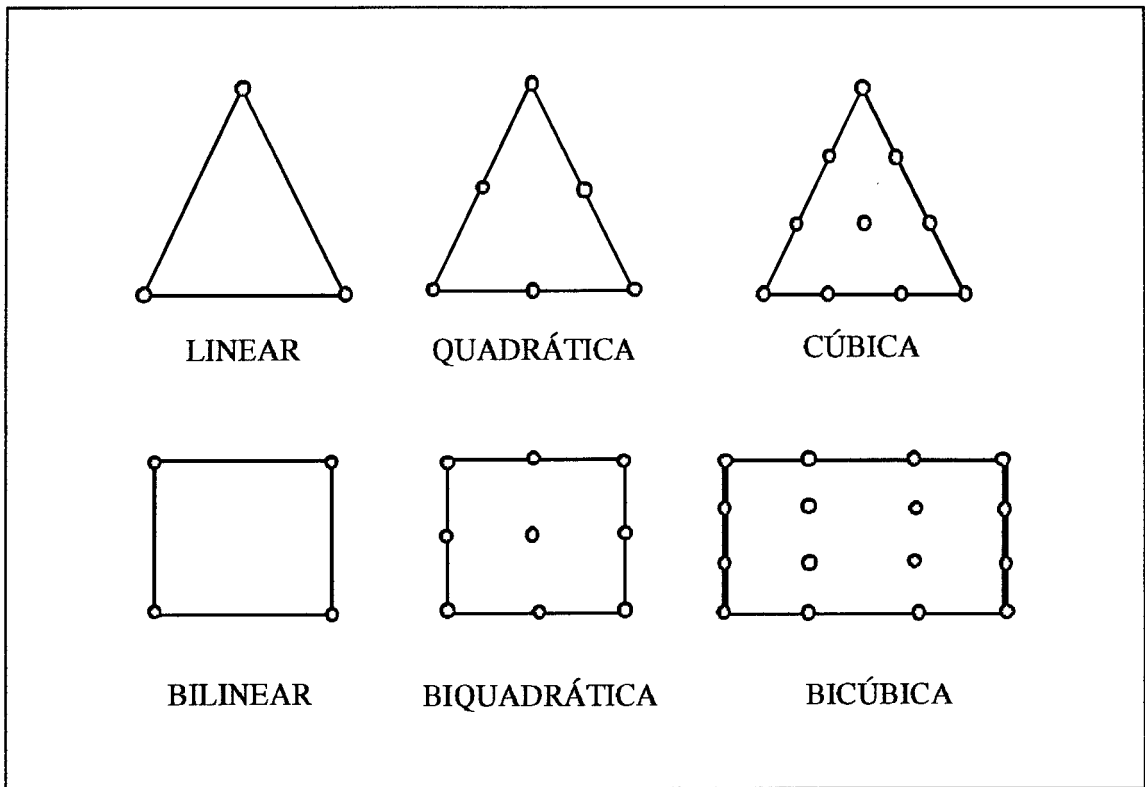


Fig. 2.1 - Pontos Nodais e funções de forma em elementos planos.

A substituição da aproximação (6) em (5) fazendo  $v^h \in \{\phi_i, i=1,2,\dots,N\}$ , resulta em um sistema de  $N$  equações lineares na forma:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \right) \cdot \phi_i \cdot d\Omega + \int_{\Omega} p \cdot \phi_i \cdot d\Omega - \int_{\Gamma} q \cdot m \phi_i \cdot d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

que pode ser escrito em forma matricial como:

$$K_{NN} U_N = F_N$$

sendo,

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mathcal{L} \phi_j \cdot \phi_i \cdot d\Omega \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

os coeficientes da matriz  $K_{NN}$ ,  $U_N$  o vetor de incógnitas nodais e  $F_N$  o vetor definido pelas condições de contorno do problema.

A matriz  $K_{NN}$  é construída assumindo contribuições individuais de cada elemento, o que lhe dá a característica de matriz esparsa, em muitos casos diagonal dominante, cuja largura de banda depende da numeração dos pontos nodais da discretização.

### 2.3. Discretização de Domínios

Geração de malhas de elementos finitos é o processo de obter uma discretização válida para aproximar um domínio de integração contínuo. Esta discretização é denominada malha de elementos finitos.

A esta discretização, é claro, está associado um erro que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais que regem o problema. Este erro é uma função e definida como sendo a diferença entre a solução exata e a solução aproximada, cuja magnitude pode ser medida através da sua norma em um espaço  $H$  apropriado:

$$\|e\|_H^2 = \|u - \hat{u}\|_H^2$$

A norma do erro é uma medida natural da qualidade da aproximação e portanto está diretamente relacionada à maneira como é construída a discretização do domínio, o que faz com que a geração de malhas de elementos finitos seja um problema não trivial.

Numa discretização uniforme, onde as células têm tamanho  $h$ , estes erros são em geral de ordem  $O(h^p)$ , onde  $p$  é um expoente que depende do grau dos polinômios de interpolação adotados para cada elemento. Ou seja, se  $p$  é positivo, a norma do erro se aproxima de zero quando  $h$  tende para zero. Em contrapartida, o aumento do número de elementos pode ser extremamente inconveniente no sentido de que aumenta significativamente a complexidade do sistema a ser resolvido.

De modo geral, não existe uma regra fixa para determinar a quantidade de elementos que deve ser utilizada em uma malha de elementos finitos. Idealmente, a distribuição dos pontos nodais na discretização deve, primeiramente, representar adequadamente a geometria da região. Em geral, regiões do contorno do domínio que apresentam grandes variações requerem uma maior concentração de pontos para representar adequadamente a forma. Por outro lado, para a simulação precisa



do fenômeno é necessário que haja pontos adequadamente distribuídos em regiões do domínio onde a variável muda mais rapidamente.

Também as funções polinomiais adotadas para os elementos influenciam diretamente a qualidade da aproximação. Quanto maior o grau desses polinômios (maior  $p$ ) menor o erro de aproximação.

Assim, o ponto chave na discretização de um domínio consiste em obter uma malha que seja a mais simples possível (considerando número de elementos e polinômios de interpolação) que produza uma solução numérica dentro da precisão desejada.

Igualmente importante para a caracterização de uma malha de elementos finitos é a definição da forma geométrica de seus elementos. A escolha da forma geométrica depende geralmente da geometria do domínio, entre outros fatores. As formas geométricas mais utilizadas são quadriláteros e triângulos, em problemas planos e hexaedros e tetraedros, em problemas tridimensionais.

Nada impede que sejam utilizados vários tipos de elementos com diferentes graus para suas funções de interpolação numa mesma discretização. A prática comum, entretanto, é adotar um único tipo de elemento com funções de interpolação de grau baixo (linear ou no máximo grau 2) em todos os elementos.

As discretizações em triângulos ou tetraedros são genericamente chamadas triangulações e tem se mostrado as mais populares e que melhor se ajustam a geometrias irregulares. Devem ser evitados, contudo, elementos demasiadamente finos ou alongados pois estes em geral causam instabilidades numéricas na resolução do sistema de equações.

## **2.4. Métodos Adaptativos**

O objetivo de uma análise adaptativa dentro do método de elementos finitos é fornecer, em princípio, um mecanismo para controlar erros e eventualmente permitir a usuários especificar o grau de precisão necessário em um cálculo. Os métodos adaptativos se valem de estimativas de erros locais da solução para executar um refinamento seletivo da malha, adaptando-a às propriedades físicas do problema em consideração.

Uma estratégia adaptativa segue o seguinte esquema geral:

1. Construção de uma malha inicial.
2. Obtenção de uma solução de elementos finitos.
3. Cálculo das estimativas de erro.
4. Enquanto o erro não é aceitável
  - 4.1. Refinamento de elementos de acordo com indicadores de erro locais
  - 4.2. Obtenção de uma solução de elementos finitos.
  - 4.3. Cálculo das estimativas de erro.

Numa primeira fase é criada uma malha inicial do domínio. A escolha de um critério apropriado permite detetar zonas para refinamento da malha inicial, sendo obtida uma nova malha mais refinada; este é geralmente um processo iterativo.

Medidas de erro globais fornecem uma medida quantitativa da qualidade da aproximação durante o processo de análise, e servem para indicar a necessidade ou não de se melhorar a solução. Medidas de erro locais calculadas a nível de cada elemento, por sua vez, servem para definir critérios que vão apontar quais elementos devem ser refinados no processo.

Na prática, são feitas estimativas destes erros, que são chamadas *a priori*, quando são obtidas antes de se calcular a solução e, *a posteriori* quando são avaliadas a partir de informações fornecidas pela solução obtida na iteração anterior.

Para o refinamento de elementos um dos seguintes métodos é utilizado:

- método h - subdivisão dos elementos em elementos menores mantendo-se constante o grau dos polinômios de interpolação.
- método p - aumento do grau dos polinômios de interpolação mantendo-se constante o número de elementos da malha.
- método r - reposicionamento dos pontos nodais de acordo com a distribuição de erros.

Combinações dos métodos acima são técnicas também utilizadas [RIBE91], [DEVL87] contudo, a complexidade das estruturas de dados neste caso pode ser significativa. Em geral, o uso do método  $h$  com elementos de baixa ordem ( $p=1, 2$ ) é suficiente. Quando é requerida precisão mais alta, o uso dos métodos  $p$  e  $h$ - $p$  torna-se necessário.

A fig. 2.2 apresenta os principais tipos de refinamento  $h$  para duas e três dimensões. Apesar de simples, este refinamento, freqüentemente, quebra a continuidade entre células vizinhas. Esta condição é geralmente referida como "não conformidade" da malha.

Alguns métodos adaptativos oferecem também a opção de "desrefinamento" de malhas para diminuir o número de elementos em regiões onde os erros locais são demasiadamente pequenos. Esta opção é, em geral, requerida por problemas variáveis no tempo.

Recentemente, Oden [ODEN89], [ODEN90] introduziu a noção de algoritmos "inteligentes" onde medidas de precisão locais e estabilidade dos algoritmos são calculadas ao longo do processo, e os algoritmos vão se auto-ajustando para alcançar precisão e eficiência desejadas.

## 2.5. Geração Automática de Malhas

A geração manual ou semi-automática de malhas é geralmente tarefa sujeita a erros além de consumir muito tempo. Pode mesmo ser inviável para domínios tridimensionais com geometria complexa.

A geração automática de malhas de elementos finitos para geometrias 3D tem sido tópico de pesquisa ativa por aproximadamente uma década [GEOR91], [SHEP93], [SCHR88], [SCHR91]. Um variedade de algoritmos têm sido propostos [ODEN90], [NAMB93], [DEVL91], [LOHN92].

Os métodos de geração automática de malhas se ajustam naturalmente dentro do conceito dos métodos adaptativos. Em geral eles se baseiam no refinamento do tamanho dos elementos (método  $h$ ) e podem ser divididos em duas grandes classes, dependendo se geram malhas estruturadas ou não estruturadas.

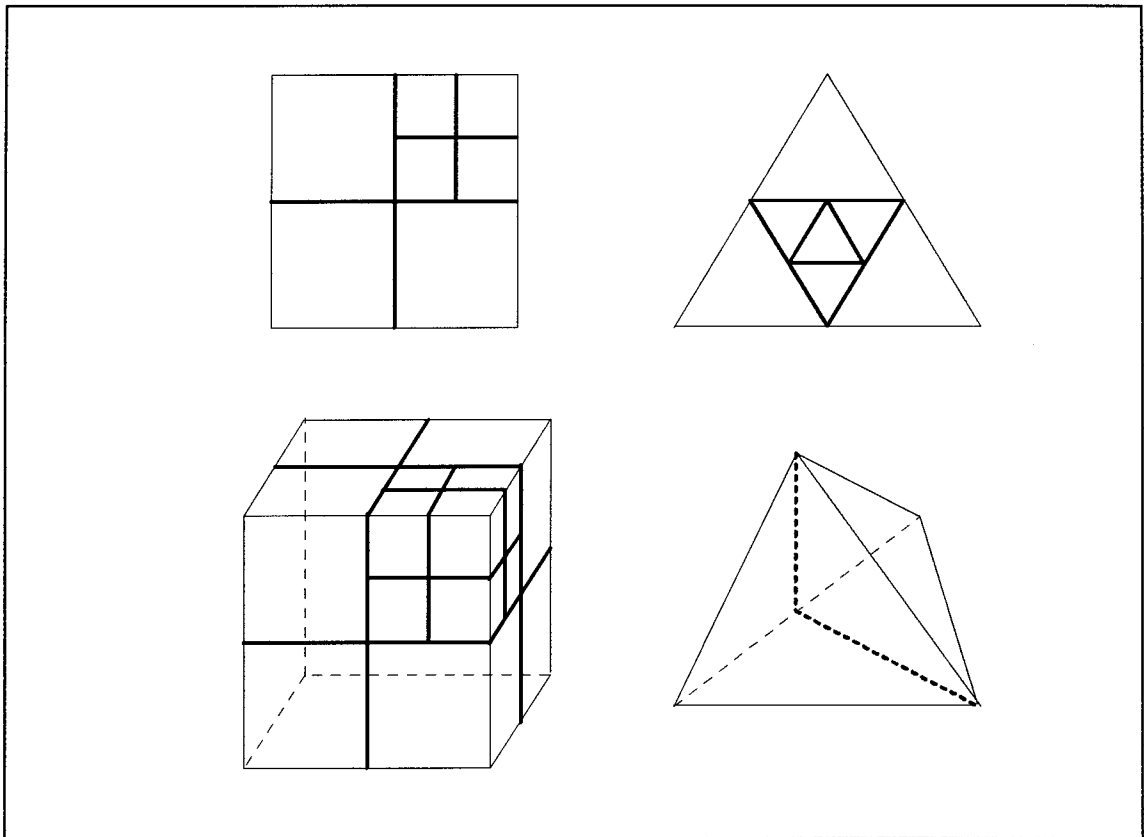


Fig. 2.2 - Tipos de refinamento pelo método h.

A diferença básica entre as duas malhas está na forma da estrutura de dados que a representa. Em uma malha estruturada o conjunto de células e pontos nodais é naturalmente mapeado em um sistema de coordenadas apropriado. Células vizinhas na malha são facilmente identificadas através do sistema de coordenadas, ou seja, a topologia da malha é definida implicitamente.

Uma malha não estruturada, contudo, não pode ser representada tão diretamente e informação adicional deve ser fornecida. Para uma célula em particular, a conexão com outras células deve ser definida explicitamente na estrutura de dados.

A principal vantagem das malhas não estruturadas é a facilidade com que permitem adicionar e remover nós e células de acordo com os requisitos do problema. A reconexão de células neste tipo de malha é simples e resulta em malhas que têm a mesma forma da malha inicial. Daí os métodos adaptativos trabalham, geralmente, com malhas não estruturadas. Sem dúvida, uma das principais áreas de desenvolvimento de malhas não estruturadas é o uso de adaptação de malhas. A literatura é vasta [ODEN88], [ZIENK91], [LOHN90].

Nas malhas estruturadas, o refinamento não é tão direto. A adição de pontos, freqüentemente, quebra a regularidade da malha, fazendo com que alguns nós tenham número diferente de células conectadas.

As técnicas de geração de malhas de elementos finitos, de uma forma geral, podem ser classificadas em três grupos [CAMP91]: mapeamento transfinito, enumeração espacial (quadtree/octree) [SCHR93],[ODEN90], e algoritmos de tecelagem [SCHR88].

Os algoritmos de mapeamento transfinito são os mais rápidos e produzem malhas estruturadas. A desvantagem desta técnica é que só podem ser aplicadas à regiões com topologia triangular ou quadrangular, e que também atendam a algumas restrições quanto à subdivisão de suas fronteiras. Isto implica na necessidade de se dividir o domínio em regiões isomorfas a estas formas mais simples.

Técnicas de enumeração espacial são atualmente muito populares para uma geração de malha de forma completamente automática. A vantagem destes algoritmos é que eles são robustos para domínios com forma arbitrária. Sua aplicação em domínios com pequena razão entre volume e área de superfície pode ser desvantajosa. Os principais representantes desta classe são os métodos de Quadtree e Octree, nos quais o modelo geométrico é colocado em um paralelepípedo envolvente que é recursivamente subdividido. A profundidade da subdivisão é controlada associando-se um tamanho de elemento às entidades topológicas que compõem o modelo, de forma que o processo continua até que o tamanho da célula seja o tamanho de elemento especificado. O passo final é gerar uma malha dentro de cada célula, assegurando-se que seja "compatível" com a malha gerada nas células vizinhas.

Estes métodos fornecem algoritmos simples para decomposição de um modelo geométrico. Contudo, até recentemente, a geração de malha dentro de cada célula tem sido baseada em algoritmos heurísticos complexos, o que contrasta com a simplicidade dos processos de decomposição espacial e torna o método ineficiente e pouco robusto para geração automática de malhas.

Os demais algoritmos de geração de malha são classificados como arbitrários ou de tecelagem. Tipicamente [GEOR91], estes algoritmos derivam a malha final, célula por célula, a partir dos dados de fronteira. Há dois representantes: métodos de avanço de fronteira e métodos baseados na construção de Delaunay. Estes métodos

criam pontos internos e células a partir da fronteira do domínio. A vantagem destes métodos é que fornecem algoritmos simples e elegantes para geração de malhas, mas sua principal desvantagem é que o conjunto inicial de pontos deve estar disponível, e a obtenção destes pontos, geralmente, não é automática e pode mesmo ser bastante difícil, especialmente em modelos 3D complexos. Além disso, a triangulação de Delaunay, baseando-se somente em pontos, ignora informações topológicas do modelo. Em geral são lentos, tipicamente de ordem quadrática com o número de elementos gerados.

## 2.6. Nossa Proposta

Vimos que o refinamento adaptativo de malhas baseado no método-h requer tratamento específico para garantia de continuidade na vizinhança de células onde é requerida adaptatividade. Na verdade, para se utilizar o método h em um esquema de refinamento adaptativo para geração de malha de elementos finitos, duas perguntas devem ser respondidas:

Qual a subdivisão ideal de um elemento para que não resultem elementos demasiadamente alongados?

Como garantir a continuidade da malha na vizinhança de células refinadas?

Um procedimento baseado em subdivisão binária de tetraedros, que garante "conformidade" em refinamentos de triangulações gerais do espaço, é proposto em [RIVA91]. A idéia básica deste procedimento é que um certo conjunto de tetraedros da triangulação deve ser subdividido para que seja eliminada a interseção problemática criada pela subdivisão binária de um determinado tetraedro, garantindo assim a conformidade da subdivisão resultante. Com este procedimento é garantido também uma transição suave entre pequenos e grandes elementos da triangulação. O procedimento garante ainda um ângulo interno mínimo para os tetraedros, que seguramente não degeneram. Tais propriedades tornam o procedimento apropriado para geração de malhas de elementos finitos.

Utilizando a idéia deste procedimento, propomos neste trabalho um esquema para construção de triangulações adaptativas para sólidos CSG, baseado em refinamento adaptativo de triangulações CFK. As triangulações CFK possuem propriedades geométricas e combinatórias bastante interessantes. A idéia é que uma triangulação CFK inicial de uma região do espaço que envolve completamente um

sólido CSG, vá sendo refinada adaptativamente com base em um critério de refinamento definido apropriadamente para cada aplicação.

Neste esquema, não existe a preocupação com a localização das diversas componentes conexas do sólido. Durante o refinamento, os tetraedros gerados que não interceptam o sólido vão sendo eliminados da triangulação. Ao final, uma triangulação adaptativa contendo somente tetraedros contendo parte do sólido é obtida. O bordo desta triangulação será uma aproximação para a casca do sólido dentro da precisão definida pelo nível de refinamento da triangulação.

A modelagem de sólidos conhecida como Geometria Sólida Construtiva ou CSG (Constructive Solid Geometry) será utilizada para construção dos sólidos.

## CAPÍTULO 3

# Refinamento Adaptativo

---

### 3.1. Introdução

Freqüentemente, aplicações requerem que triangulações sejam refinadas suficientemente até que um certo requisito do problema seja atendido.

Aplicações como geração de malhas para o método de elementos finitos, em geral, utilizam algum critério de refinamento que varia no espaço do domínio do problema para guiar a escolha do tamanho dos tetraedros em cada região do domínio.

Refinamentos uniformes neste tipo de aplicação são inconvenientes, porque a profundidade do refinamento (tamanho dos tetraedros) é determinado pelo ponto crítico do problema levando à triangulações, muitas vezes, excessivamente refinadas.

Os refinamentos não uniformes apresentam-se como mais eficazes pois podem ser adaptados ao problema, de tal modo que cada tetraedro é subdividido apenas o suficiente para garantir que um dado critério de precisão seja satisfeito.

Entretanto, refinamentos não uniformes de triangulações, também chamados adaptativos, em geral, requerem mecanismos especiais de subdivisão para garantir a construção de novas triangulações.

Neste capítulo apresentaremos a nossa proposta para refinamento adaptativo de triangulações CFK, que se baseia no procedimento proposto em [RIVA91]. As triangulações CFK têm propriedades geométricas e combinatorias interessantes e têm sido base para várias aplicações de triangulação do espaço [SALI92], [PERS93], [PERS94], [APOL94].

Inicialmente apresentaremos a classe de triangulações CFK e o processo de subdivisão binária em que se baseia o refinamento proposto. Em seguida,



apresentaremos o refinamento básico que assegura a construção de novas triangulações em refinamentos não uniformes e o refinamento adaptativo proposto. Na sequência falaremos das propriedades das triangulações CFK adaptativas e das simplificações possíveis no refinamento básico devido à estas propriedades. Finalmente, na última seção, apresentaremos a estrutura de armazenamento da triangulação e as principais operações nesta estrutura.

### 3.2. Triangulações CFK

Decomposições do espaço em tetraedros onde a interseção de quaisquer dois tetraedros ou é vazia, ou é um vértice, uma aresta, ou uma face comum a ambos os tetraedros são genericamente denominadas Triangulações. Elas estão entre as formas de decomposição do espaço tridimensional mais utilizadas pelo fato dos tetraedros serem estruturas lineares extremamente simples que facilitam muitas tarefas de exploração do espaço.

Triangulações deste tipo são ditas regulares quando os vértices dos tetraedros são igualmente distribuídos no espaço. Quando o espaçamento dos seus vértices é variável são ditas irregulares.

As triangulações regulares são interessantes porque possuem uma representação implícita de simples manipulação que permite a utilização de estruturas de dados extremamente simples para sua representação. Nestas triangulações, a determinação das relações de adjacências entre os tetraedros, por exemplo, são imediatas.

Uma particular triangulação regular é a Triangulação CFK que tem seu nome em homenagem aos três pesquisadores que independentemente a estudaram: Coxeter, Freudenthal e Kuhn [MIRA89].

Uma triangulação CFK pode ser obtida através de decomposição regular do espaço inicialmente em regiões cúbicas, seguida de triangulação consistente de cada região.

Uma triangulação para uma região cúbica do espaço pode ser obtida subdividindo-a por três cortes planares, cujos planos passam por uma das diagonais do cubo e uma das arestas do cubo. Esta subdivisão, apresentada na fig. 3.1, é formada por seis tetraedros idênticos, cujos interiores são disjuntos e a

interseção entre quaisquer dois tetraedros é uma face comum aos dois tetraedros, ou a diagonal do cubo (comum a todos os seis tetraedros). Cada face do cubo, dividida em duas por sua diagonal, contém faces de dois tetraedros distintos.

Uma triangulação CFK para todo o espaço é, então, obtida refletindo-se recursivamente a triangulação de uma região cúbica pelas faces do cubo, para cada uma das regiões cúbicas vizinhas.

A fig 3.2 mostra dois exemplos de triangulações CFK no plano.

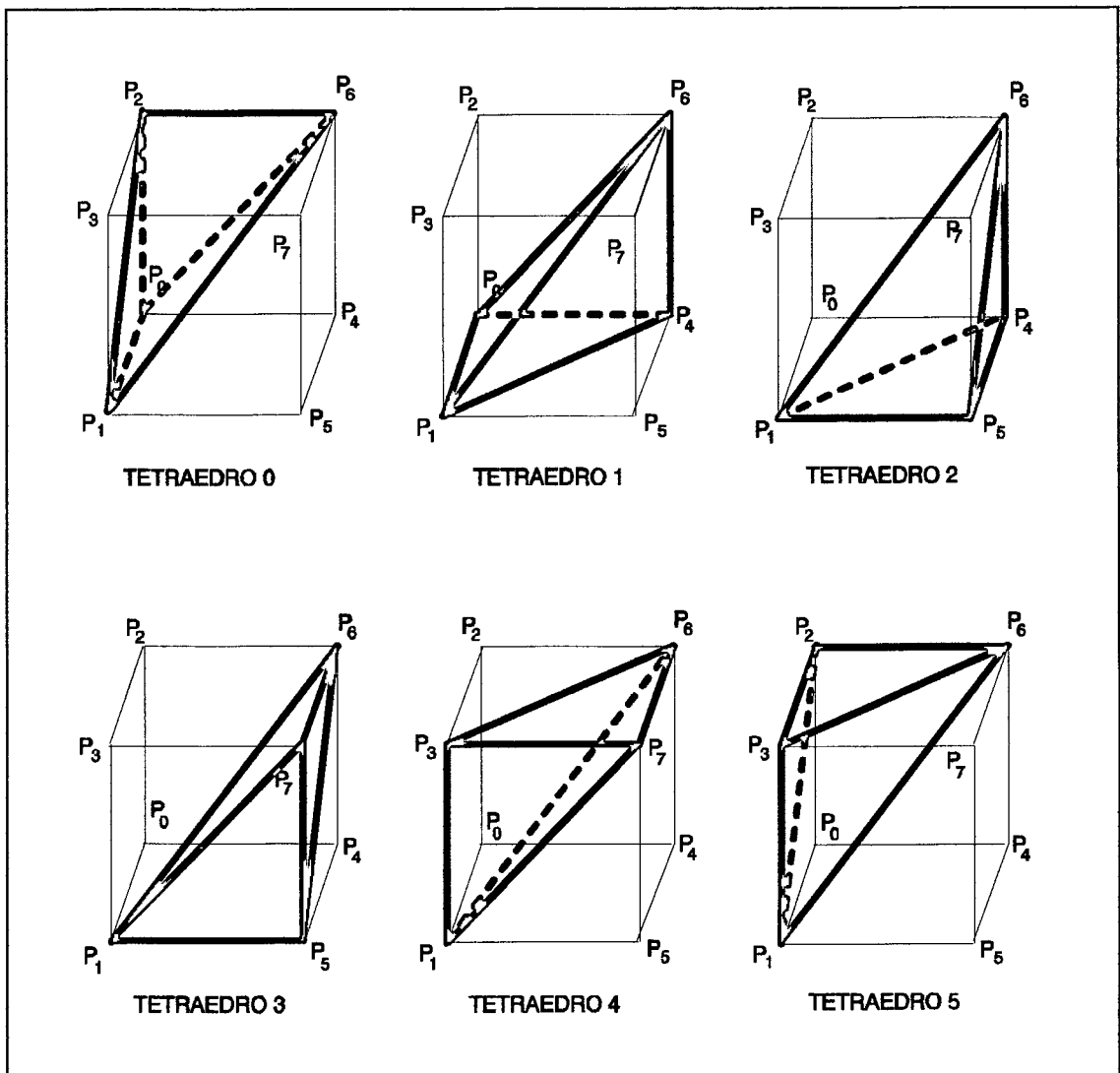


Fig. 3.1 - Triangulação CFK de um cubo

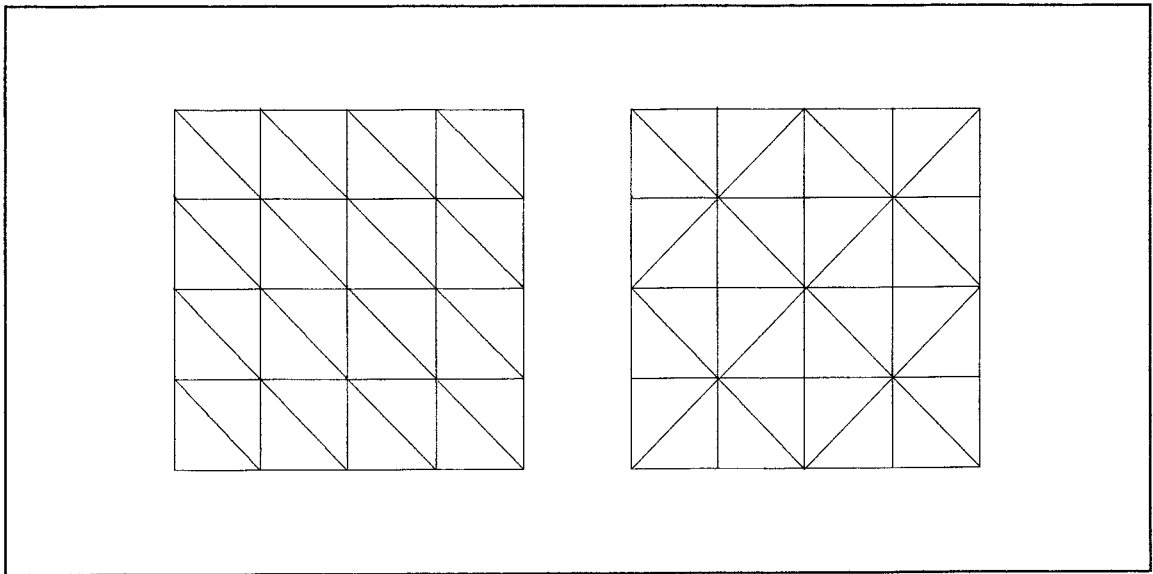


Fig. 3.2 - Exemplos de triangulações CFK no plano

### 3.3. Subdivisão Binária

Uma subdivisão binária de um tetraedro pode ser definida como a bisseção do tetraedro por um plano que corta o ponto mediano da sua aresta mais longa e passa pela aresta oposta à esta. Esta é a subdivisão mais conveniente que pode ser aplicada a um tetraedro no sentido de garantir uma boa razão de aspecto para os tetraedros gerados. Com esta subdivisão, os ângulos sólidos internos dos tetraedros diminui muito pouco de um nível de refinamento para outro e, além disso, não ocorrem degenerações, mesmo com sua aplicação sucessiva [RIVA90].

Cada tetraedro de uma triangulação CFK tal como vimos tem a diagonal do cubo como sua aresta mais longa e uma das arestas do cubo como sua menor aresta. A subdivisão binária aplicada recursivamente a um destes tetraedros é como apresentado na fig. 3.3. Cada subdivisão gera dois tetraedros idênticos. Os tetraedros resultantes da primeira subdivisão têm como maior aresta a diagonal de uma face do cubo e como menor aresta a metade da diagonal do cubo. Da segunda subdivisão, resultam tetraedros que têm como maior aresta uma das arestas do cubo e a menor aresta é a metade da diagonal de uma face. Após a terceira subdivisão, os tetraedros resultantes são idênticos ao tetraedro CFK inicial, exceto pelo tamanho de suas arestas, reduzido a metade em relação aquele. Nestes tetraedros, a aresta mais longa é a metade da diagonal do cubo e a menor aresta a metade de uma aresta do cubo. Obviamente que, com a

continuação do processo de subdivisão, os tetraedros terão os mesmos formatos já gerados, diferenciando-se apenas pelo tamanho de suas arestas, o qual é determinado pelo número de subdivisões aplicadas ao tetraedro inicial, ou seja, o nível de refinamento da triangulação.

Vemos, portanto, que aplicações sucessivas da subdivisão binária a triangulações CFK produzem apenas três formatos distintos de tetraedros. A estes chamaremos genericamente tetraedros CFK. Os três formatos distintos serão identificados por: tipo A ( $1/6$  do cubo), tipo B ( $1/12$  do cubo) e tipo C ( $1/24$  do cubo). Assim, a subdivisão binária de um tipo A gera dois tetraedros do tipo B, cuja subdivisão gera dois tetraedros do tipo C, que, por sua vez, gera dois tetraedros do tipo A. Estes tetraedros terão tamanhos de arestas proporcionais aos mostrados na tabela 3.1.

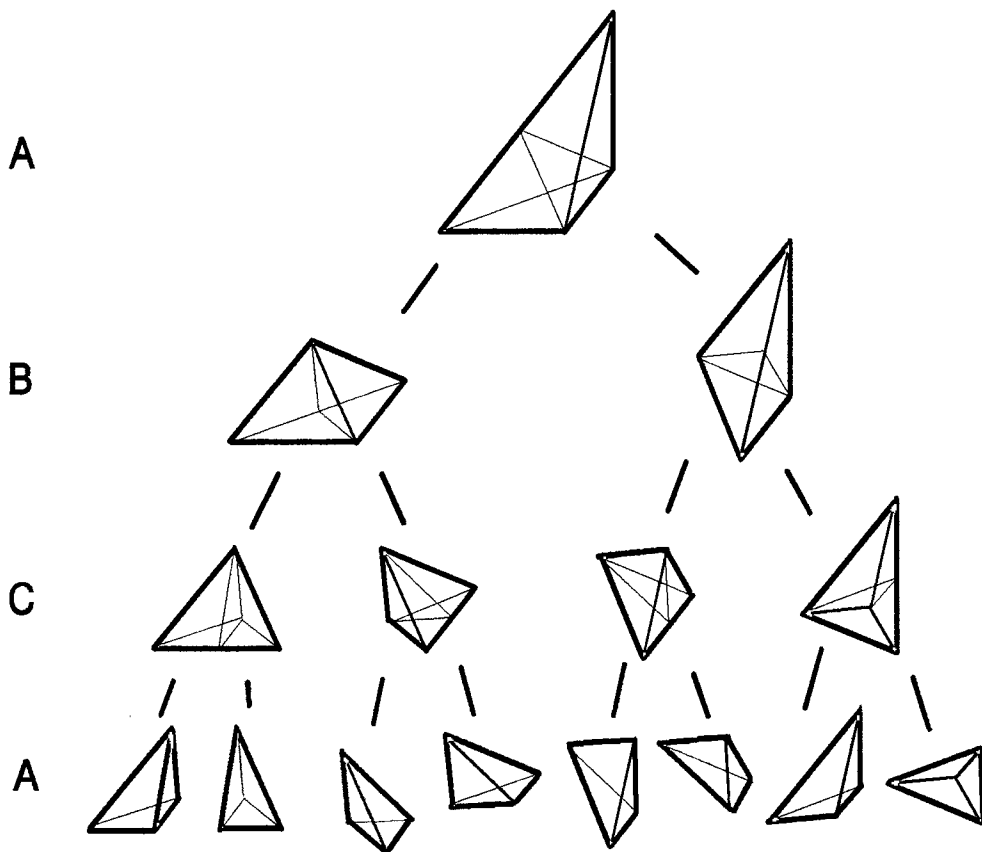


Fig. 3.3 - Árvore de Subdivisão Binária de um tetraedro CFK

Tipo de Tetraedro	Rotulação das Arestas					
	0	1	2	3	4	5
A	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1
B	$\sqrt{2}$	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
C	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 3.1: Comprimento relativo das arestas de cada tipo de tetraedro

A fig. 3.4 mostra uma subdivisão de um tetraedro genérico, onde os vértices estão rotulados convenientemente de forma que a maior aresta é dada pelos vértices 0 e 3 e sua segunda maior aresta pelos vértices 0 e 2. Com esta rotulação podemos, na verdade, definir um critério combinatório fixo para subdivisão dos três tipos de tetraedros. O esquema de subdivisão é apresentado na tabela 3.2, onde  $v_0, v_1, v_2, v_3$  são os vértices do tetraedro pai. Note-se que o esquema de subdivisão é tal que preserva a rotulação dos vértices nos tetraedros filhos.

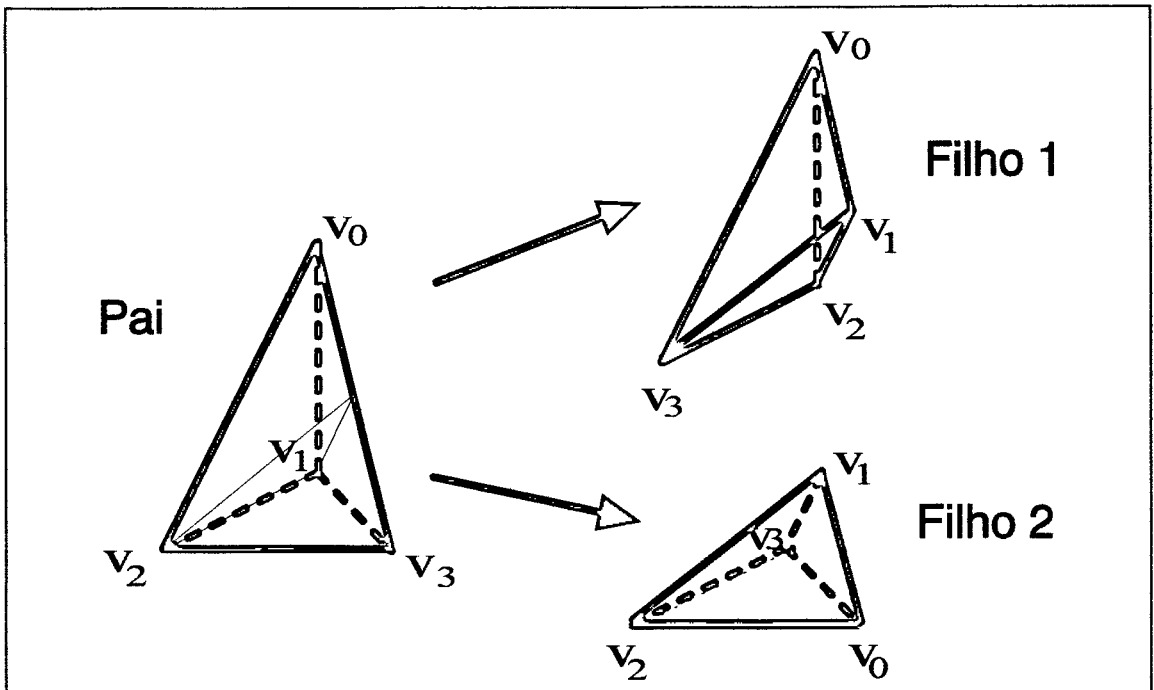


Fig. 3.4 : Subdivisão binária de um tetraedro

Rótulos dos vértices no filho	Pai do tipo A		Pai do tipo B ou C	
	Filho 1	Filho 2	Filho 1	Filho 2
0	$v_0$	$v_3$	$v_0$	$v_3$
1	$(v_0+v_3)/2$	$(v_0+v_3)/2$	$(v_0+v_3)/2$	$(v_0+v_3)/2$
2	$v_1$	$v_2$	$v_1$	$v_1$
3	$v_2$	$v_1$	$v_2$	$v_2$

Tabela 3.2 : esquema de distribuição de vértices na subdivisão de cada tipo de tetraedro

A utilização de regiões definidas por paralelepípedos ao invés de cubos também é possível. A subdivisão será feita da mesma forma, bastando-se imaginar o processo como sendo constituído de três fases: transformação afim do paralelepípedo em um cubo, subdivisão do cubo nos tetraedros iniciais, subdivisão conforme o processo e transformação dos tetraedros filhos de volta para o espaço do paralelepípedo. As relações geométricas afins da tabela 3.1 são preservadas neste caso.

Deve ser evitada, contudo, a utilização de paralelepípedos muito achatados, o que levaria a má formações dos tetraedros iniciais. Como o processo de subdivisão binária preserva de certa forma o formato dos tetraedros iniciais, a triangulação seria constituída por tetraedros achatados, o que levaria a um comprometimento da qualidade da triangulação em aplicações tais como a análise de elementos finitos.

Igualmente importante para a representação completa de uma triangulação são as relações de adjacências entre seus tetraedros, relações estas que permitem o percurso através da triangulação.

Se rotulamos adequadamente cada uma das quatro adjacências de um tetraedro, de forma que o vizinho  $i$  de um tetraedro seja o tetraedro adjacente à face oposta ao vértice  $i$ , então podemos estabelecer, tal como foi feito para os vértices, um critério combinatório fixo para determinação das novas relações de adjacências após a subdivisão binária de um tetraedro. Esta combinatória é

apresentada na tabela 3.3, onde  $T_0, T_1, T_2, T_3$  são os tetraedros vizinhos do tetraedro pai. A fig. 3.5 ilustra estas relações.

Rótulos dos vizinhos do filho	Pai tipo A		Pai tipo B ou C (filho 1)		Pai tipo C (filho 2)	
	Filho 1	Filho 2	Filho 1	Filho 2	Filho 1	Filho 2
0	<i>Filho2</i>	<i>Filho1</i>	<i>Filho2</i>	<i>Filho1</i>	<i>Filho2</i>	<i>Filho1</i>
1	$T_3$	$T_0$	$T_3$	$T_0$	$T_3$	$T_0$
2	<i>Filho1(T<sub>1</sub>)</i>	<i>Filho2(T<sub>2</sub>)</i>	<i>Filho1 (T<sub>1</sub>)</i>	<i>Filho2(T<sub>1</sub>)</i>	<i>Filho2(T<sub>1</sub>)</i>	<i>Filho1(T<sub>1</sub>)</i>
3	<i>Filho1(T<sub>2</sub>)</i>	<i>Filho2(T<sub>1</sub>)</i>	<i>Filho1(T<sub>2</sub>)</i>	<i>Filho2(T<sub>2</sub>)</i>	<i>Filho1(T<sub>2</sub>)</i>	<i>Filho2(T<sub>2</sub>)</i>

Tabela 3.3 : esquema de distribuição de vizinhos na subdivisão de cada tipo de tetraedro

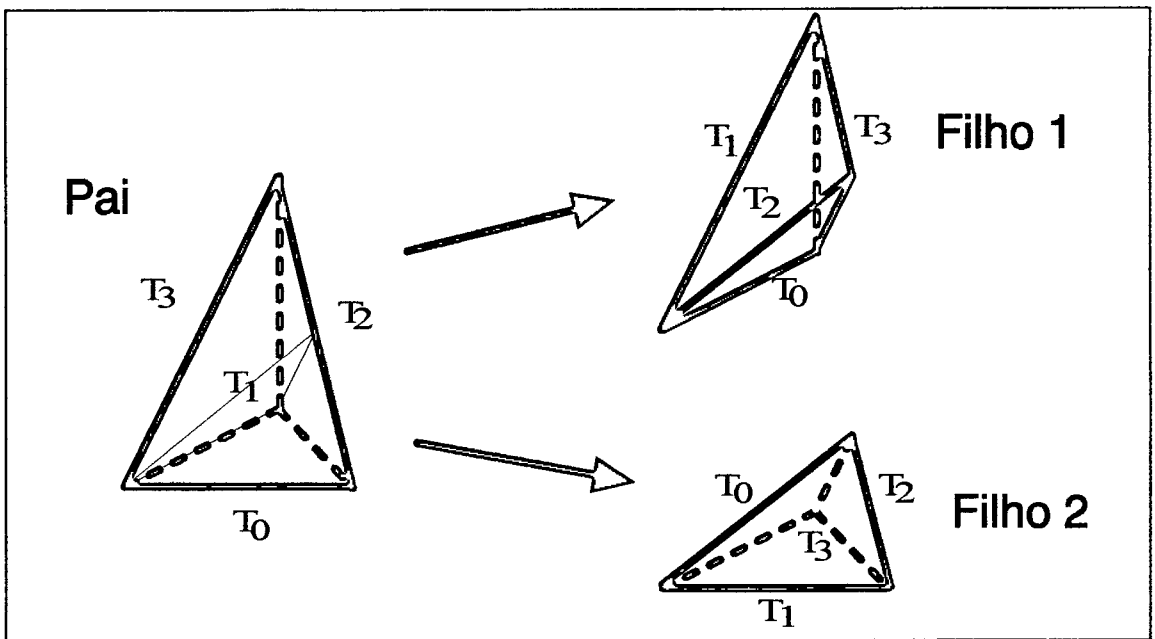


Fig. 3.5 - Novas relações de adjacências após a subdivisão de um tetraedro

### 3.4. Refinamento de Triangulações

Subdivisões conformes do espaço em tetraedros são genericamente chamadas triangulações. Definiremos refinamento de triangulações como o

processo de subdividir tetraedros, resultando em novas triangulações mais refinadas.

Na seção anterior, vimos um processo de subdivisão que pode ser utilizado para construir refinamentos de triangulações. Aplicações sucessivas desta subdivisão a todos os tetraedros de uma triangulação CFK, por exemplo, resulta em novas triangulações. Em particular, após três subdivisões, estas triangulações são oito vezes mais refinadas que a triangulação original e o formato dos tetraedros é o mesmo.

Refinamentos uniformes, entretanto, não são eficientes na maioria das aplicações porque repartem igualmente todo o espaço. Muitas vezes estaremos interessados em um refinamento não uniforme, onde somente alguns tetraedros devem ser subdivididos. O problema com este tipo de refinamento é que o processo de subdivisão binária, ao criar um vértice sobre a maior aresta do tetraedro, cria uma condição de não conformidade com todos os tetraedros que compartilham esta mesma aresta, resultando, por isso, em subdivisões que não constituem triangulações.

### 3.5. Refinamento Básico

Visando aplicações como geração de malhas de elementos finitos, [RIVA91] propõe um procedimento que garante a construção de novas triangulações em refinamentos não uniformes de triangulações. A idéia do procedimento é que, para garantia de conformidade na subdivisão binária de um determinado tetraedro, se faz necessária a subdivisão de um certo conjunto de tetraedros da triangulação de forma a eliminar a interseção problemática criada com a subdivisão.

Dada uma triangulação  $\mathcal{T}$  e um tetraedro  $T$  a ser subdividido, o procedimento executa a subdivisão binária de  $T$  e, em seguida, de todos os vizinhos de  $T$  que compartilham a aresta subdividida. A subdivisão de um vizinho, por sua vez, pode envolver novas subdivisões dos vizinhos que compartilham a aresta subdividida, e assim sucessivamente. Este processo é recursivo e pode ser visto como uma propagação de refinamento pela triangulação para acomodar a subdivisão de um determinado tetraedro.



Para definir mais precisamente o procedimento [RIVA91] define o conjunto-vizinho de um tetraedro.

*Conjunto-vizinho* de um tetraedro  $T$  é o conjunto dos tetraedros que compartilham com  $T$  a maior aresta de  $T$ .

Transcrevemos abaixo a versão recursiva do procedimento:

*RefinamentoTetraedro* ( $T, \mathfrak{S}$ )

*Execute subdivisão binária de  $T$*

*Enquanto  $\mathfrak{S}$  não é conforme faça*

*Para cada tetraedro  $T^*$  do conjunto-vizinho de  $T$  faça*

*RefinamentoTetraedro* ( $T^*, \mathfrak{S}$ )

Geometricamente, o processo pode ser visto como o refinamento de uma sequência de poliedros (os conjuntos-vizinho), onde cada um tem seu eixo maior do que o anterior na recursão. Esta propriedade garante que o procedimento é finito.

É importante ressaltar que a recursão se estende apenas o necessário para tornar a subdivisão conforme e obviamente não se estende além da união de todos os tetraedros. O final de uma trajetória recursiva ocorre quando o conjunto-vizinho de  $T$  contém somente tetraedros do mesmo tipo de  $T$ . Neste caso, a maior aresta de  $T$  é também a maior aresta de todos os tetraedros do conjunto, e a subdivisão deste conjunto não implicará em novas "não conformidades".

Uma característica deste procedimento é que durante a propagação o procedimento lida apenas com subdivisões não conformes. As não conformidades são eliminadas somente no retorno da recursão. A estrutura de dados para representar tais condições pode por isso se tornar bastante complexa.

A fig. 3.6 mostra um exemplo de aplicação do refinamento em 2D. Os segmentos tracejados representam as arestas inseridas na triangulação pelo procedimento para acomodar a subdivisão binária do triângulo hachurado. Os números indicam a ordem em que as arestas foram inseridas. Note que a recursão pára quando o conjunto-vizinho contém dois triângulos do mesmo tipo. Em 3D, este conjunto-vizinho é um poliedro onde o número de tetraedros depende do tipo

do tetraedro. Além disso, podemos observar que, em 2D, o procedimento, particularmente no caso das triangulações CFK, segue um único caminho de triângulos subdivididos. Em 3D, entretanto, múltiplos caminhos podem ser seguidos.

Finalmente, devemos destacar ainda duas propriedades do procedimento. A primeira é que ele é mínimo, no sentido de que é o menor refinamento de uma triangulação necessário para acomodar a subdivisão de um determinado tetraedro. Chamaremos a este refinamento mínimo *Refinamento Básico*. Além disso, o procedimento é "invariante a ordem", no sentido de que a aplicação sucessiva do refinamento a dois triângulos,  $T_1$  e  $T_2$ , de uma triangulação resultará exatamente a mesma triangulação, independentemente se refinamos primeiramente  $T_1$  e depois  $T_2$ , ou em ordem inversa.

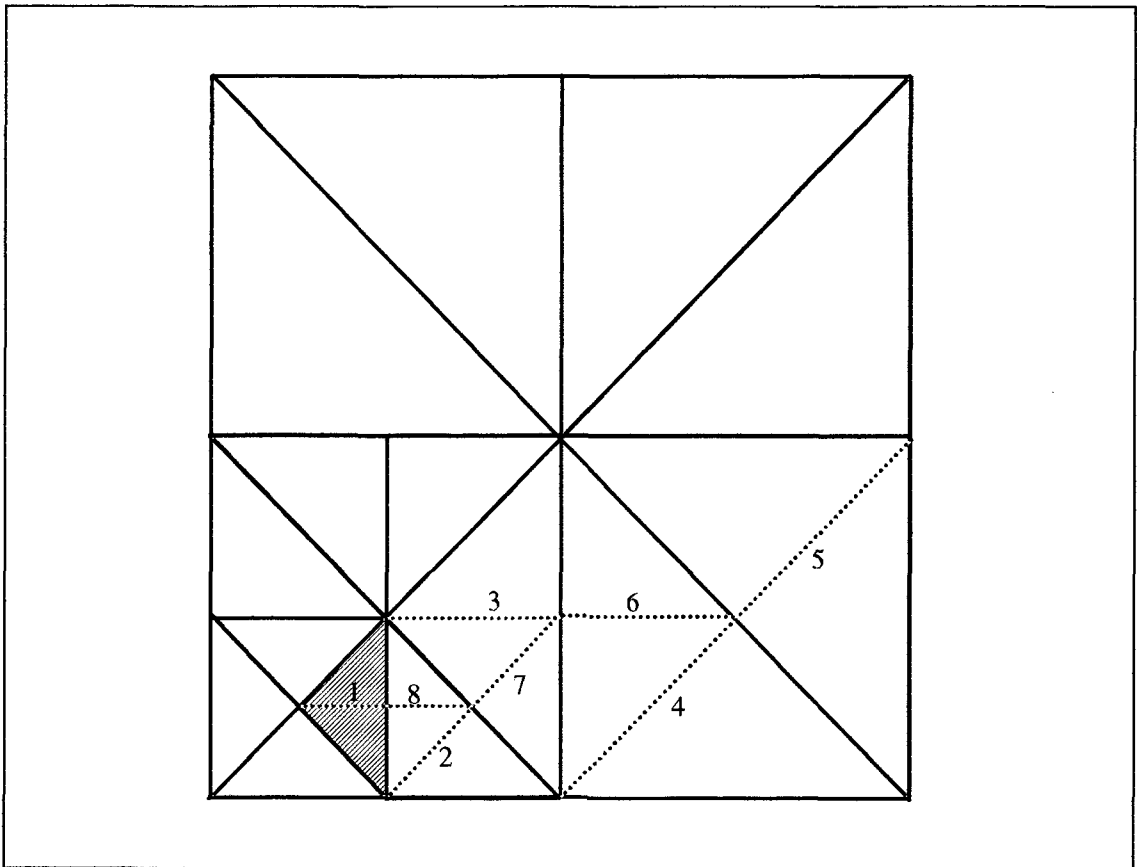


Fig. 3.6 - Refinamento básico que acomoda a subdivisão do triângulo hachurado.

### 3.6. Refinamento Adaptativo de Triangulações CFK

Refinamentos adaptativos são requeridos freqüentemente por aplicações nas quais um determinado requisito que varia no domínio do problema deve ser satisfeito em todo o domínio. Este é geralmente o caso de geração de malhas para o método de elementos finitos.

Em geral estes requisitos podem ser expressos por algum critério que, ao ser avaliado para cada tetraedro da triangulação, pode aprová-lo ou não. Desta forma, uma triangulação é aceitável para a aplicação se todos os os seus tetraedros são aprovados pelo critério.

De posse de um processo de subdivisão e de um procedimento que garante a conformidade em refinamentos não uniformes de triangulações podemos finalmente construir refinamentos adaptativos de triangulações CFK.

Para o refinamento que iremos propor a seguir é necessário, também, que o critério de refinamento seja "invariante a inclusão", o que pode ser traduzido por: se um tetraedro é aprovado pelo critério, então qualquer tetraedro obtido por refinamento dele será também aprovado.

Apresentamos então o procedimento para refinamento adaptativo de triangulações CFK.

*Procedimento 3.1 : Refinamento Adaptativo*

*Refinamento Adaptativo ( $\mathfrak{S}$ )*

*Enquanto houver tetraedro  $T$  em  $\mathfrak{S}$  não avaliado faça {*

*Se  $\text{CritérioRefinamento}(T)$  não aprovado faça {*

*RefinamentoBasico( $T$ )*

*}*

*}*

O procedimento recebe a triangulação  $\mathfrak{S}$  e, com base em um critério de refinamento definido pela aplicação, avalia cada tetraedro  $T$  em  $\mathfrak{S}$ . Se  $T$  não é aprovado pelo critério, aplica-se o refinamento básico à ele. Os novos tetraedros gerados são marcados em  $\mathfrak{S}$  como não avaliados.

É fácil ver que, se existe algum refinamento de  $\mathcal{T}$  que preencha os requisitos do problema, o procedimento termina em um número finito de passos. Além disso, a triangulação resultante é mínima [PERS93], no sentido de que é o menor refinamento possível de  $\mathcal{T}$ , na qual todos os tetraedros satisfazem o critério de refinamento. Esta propriedade se deve ao fato de que o refinamento básico, como vimos, é o refinamento mínimo de uma triangulação que acomoda a subdivisão de um tetraedro e também porque é invariante a ordem, ou seja, a triangulação resultante de aplicações sucessivas do refinamento básico é exatamente a mesma, independentemente de qualquer ordem específica em que o refinamento básico é aplicado aos tetraedros.

### 3.7. Propriedades das Triangulações CFK

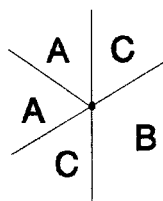
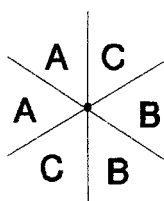
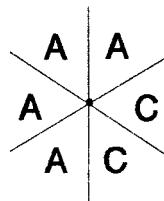
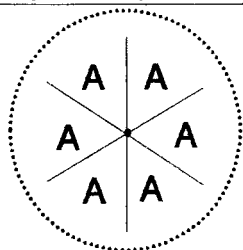
Apresentaremos nesta seção algumas propriedades bastante interessantes das triangulações CFK que acabamos de descrever. A primeira delas é que obviamente a triangulação contém apenas três tipos de tetraedros. Além disso, eles têm o mesmo ângulo interno mínimo que é igual a um terço do correspondente a um tetraedro regular. Se considerarmos que nos tetraedros degenerados este ângulo é igual a zero e nos tetraedros regulares ele é máximo, podemos aceitar que os tetraedros têm "boa forma".

É, contudo, nas relações de adjacências que residem as propriedades mais importantes da triangulação. Observando a fig. 3.4 vemos que, na subdivisão binária de um tetraedro, somente as duas faces do tetraedro que contém a sua maior aresta são subdivididas pelo processo. As outras duas faces (não subdivididas) passam uma para cada filho gerado. Ou seja, existe uma única face comum entre dois tetraedros de níveis de refinamento imediatamente subsequentes.

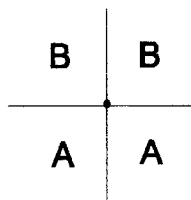
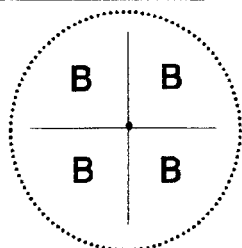
Tal propriedade impõe restrições às relações de adjacência de forma que dois tetraedros vizinhos podem diferir de no máximo um nível de refinamento.

Esta restrição, aliada ao fato de que os tetraedros têm faces, tamanhos de arestas e ângulos internos bem conhecidos (somente três tipos), faz com que as combinações de tetraedros em conjuntos-vizinhos sejam limitadas. Para maior clareza destas restrições vamos alterar ligeiramente a definição de conjunto-vizinho de um tetraedro para incluir o próprio tetraedro. Assim,

Tipo A ( maior aresta - diagonal do cubo )



Tipo B ( maior aresta - diagonal da face do cubo )



Tipo C ( maior aresta - aresta do cubo )

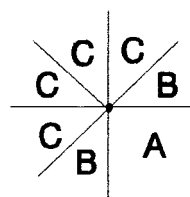
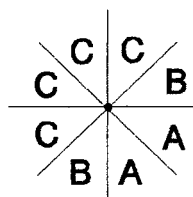
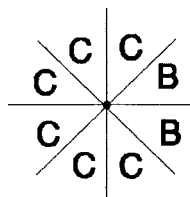
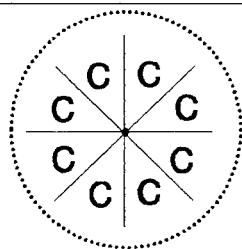


Fig. 3.7 - Conjuntos-vizinhos para cada tipo de tetraedro

*conjunto-vizinho* de um tetraedro  $T$  é o conjunto de tetraedros que compartilham a maior aresta de  $T$ .

Quando este conjunto-vizinho contiver somente tetraedros do mesmo tipo de  $T$ , o chamaremos de Núcleo de  $T$ .

As condições sobre um conjunto-vizinho de um tetraedro  $T$  em triangulações CFK são:

- 1) dos dois vizinhos adjacentes a  $T$  por uma face comum, pelo menos um é do mesmo tipo de  $T$ . O outro pode ser um nível menos refinado que  $T$ .
- 2) os demais vizinhos no conjunto (não adjacentes por face) podem ser menos refinado que  $T$  e neste caso diferem de no máximo dois níveis de refinamento.
- 3) o Núcleo de  $T$  é composto por 6 tetraedros quando  $T$  é do tipo A, 4 tetraedros quando  $T$  é do tipo B, e 8 tetraedros quando  $T$  é do tipo C. O poliedro formado por este Núcleo é um cubo para  $T$  do tipo A, e octaedro para  $T$  do tipo B ou C. Vale lembrar que estes poliedros correspondem aos conjuntos-vizinho que determinam o final das trajetórias de recursão do refinamento básico.

As possibilidades de conjuntos-vizinhos para cada tipo de tetraedro são apresentadas na fig. 3.7, onde os conjuntos estão representados como se fossem seções ortogonais às arestas comuns. Assim, a aresta comum é representada por um ponto e o conjunto-vizinho num ciclo em torno do ponto.

### 3.8. Refinamento Básico Modificado

As propriedades extremamente simples das triangulações CFK que acabamos de ver nos permitiram propor uma pequena modificação no procedimento de refinamento básico descrito anteriormente, para evitar o inconveniente de ter que representar na estrutura de dados condições de não conformidade. Mostraremos que, com esta modificação, pode-se garantir que a estrutura da triangulação é preservada durante todo o processo.

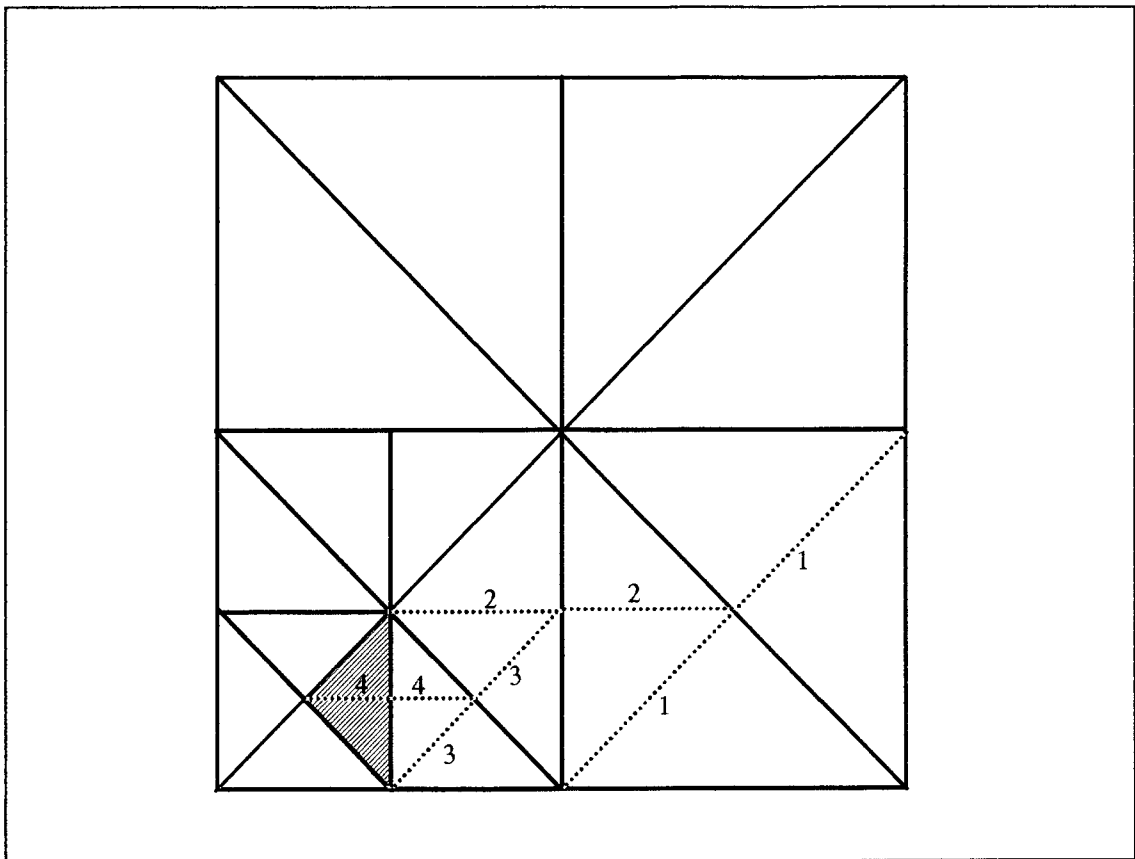


Fig. 3.8 - Refinamento básico modificado

Reescrevemos o procedimento para refinamento básico como:

*Procedimento 3.2 : RefinamentoBasico*

*RefinamentoBasico (T)*

*Para cada T\* no conjunto-vizinho de T faça {*

*Se Tipo (T\*) <> Tipo (T) faça {*

*RefinamentoBasico (T\*)*

*}*

*}*

*SubdivideNucleo (T)*

O procedimento é dividido em duas partes. Uma primeira parte, onde busca recursivamente um Núcleo de T. Para isto verifica cada tetraedro do conjunto-vizinho de T: se é de tipo diferente de T, chama recursivamente o procedimento

para este vizinho. Ao final desta recursão, todos os tetraedros no conjunto-vizinho são do mesmo tipo de T. Numa segunda parte, o procedimento executa, de uma única vez, a subdivisão binária de todos os tetraedros do Núcleo. A idéia é determinar primeiramente quais tetraedros devem ser subdivididos e subdividi-los somente no retorno da recursão. Modificações na estrutura de subdivisão são feitas exclusivamente na subdivisão do Núcleo, preservando desta forma, a estrutura da triangulação.

A fig. 3.8 mostra o mesmo exemplo da fig. 3.6, onde foi utilizado o procedimento modificado. Note-se a nova ordem em que as arestas foram inseridas na triangulação.

Com esta modificação, as propriedades de minimalidade e invariância a ordem do procedimento são preservadas.

### 3.9. Estrutura de Armazenamento da Triangulação

Uma estrutura de dados deve conter um mínimo de informações para representar corretamente a geometria e topologia do objeto a ser representado. Topologia de uma triangulação são as informações de adjacências entre seus tetraedros. A vantagem de armazenar este tipo de informação explicitamente na estrutura de dados é a maior eficiência dos algoritmos que manipulam a estrutura, principalmente os de percurso através da estrutura.

O objeto é uma triangulação CFK e o objetivo é o refinamento adaptativo. Devido às propriedades combinatórias das triangulações CFK e também à modificação no procedimento de refinamento básico foi possível adotar uma estrutura de dados, extremamente simples, para armazenamento da triangulação, o que é particularmente raro no caso de triangulações irregulares, como as triangulações CFK adaptativas.

A estrutura de dados adotada armazena, para cada tetraedro da triangulação:

- referências para os quatro vértices (*inform. geométrica*);
- referências para os quatro tetraedros adjacentes (*topologia*);
- o nível de refinamento do tetraedro;
- outros atributos.



Outros atributos referem-se à informações sobre o sólido como veremos no próximo capítulo. A separação entre informações geométricas e topológicas na estrutura permitiu a construção de procedimentos isolados e independentes para sua criação e manipulação.

Vimos que as modificações na triangulação estão restritas ao procedimento `SubdivideNúcleo`, que consiste essencialmente na aplicação da subdivisão binária a todos os tetraedros de um Núcleo. A subdivisão binária, como vimos, é facilmente implementada através da tabela 3.2 (modificação da geometria) e da tabela 3.3. (modificação da topologia).

Além desta, outras operações necessárias são operações de criação e eliminação de um tetraedro e de consulta às informações armazenadas.

### 3.10. Conclusão

Apresentamos um esquema para refinamento adaptativo de triangulações CFK baseado em um procedimento de refinamento básico que garante a conformidade do refinamento resultante. O esquema proposto é geral porque, a princípio, pode ser utilizado com qualquer critério de refinamento definido apropriadamente para cada aplicação. A única restrição é que o critério deve ser invariante a inclusão.

Devido às propriedades combinatórias e geométricas das triangulações CFK, o procedimento de refinamento básico pode ser ligeiramente modificado, permitindo que uma estrutura de dados extremamente simples fosse adotada para representação da triangulação. Além disso, pelo fato das triangulações geradas conterem somente três formatos distintos de tetraedros, que possuem mesmo ângulo interno mínimo, é garantida uma "boa forma" para os tetraedros.

## CAPÍTULO 4

# Triangulação Adaptativa de Sólidos CSG

---

### 4.1. Introdução

Inúmeras aplicações requerem a aproximação de um modelo geométrico por uma discretização poligonal do seu interior ou exterior.

Decomposições do espaço mostram-se extremamente úteis para a aproximação de modelos tridimensionais principalmente pela vantagem que oferecem na localização das diversas componentes conexas do sólido. Triangulações, por sua vez, são interessantes porque aproximam bem geometrias irregulares.

As triangulações adaptativas são ainda mais interessantes porque permitem otimizar a localização do sólido através de tratamento diferenciado do espaço.

Neste capítulo, veremos como o refinamento adaptativo proposto pode ser utilizado para construir triangulações adaptativas que aproximam, dentro de uma certa precisão, modelos descritos por sólidos CSG. A idéia é refinar adaptativamente uma região do espaço que envolve completamente o sólido com base em um critério de refinamento baseado na classificação de tetraedros em relação ao sólido. Durante este processo, tetraedros que não interceptam o sólido vão sendo eliminados. Um nível máximo de refinamento é arbitrado.

Inicialmente, apresentaremos o modelo matemático de representação de sólidos CSG baseado em semi-espacos polinomiais de grau arbitrário. Em seguida, descreveremos funções que caracterizam globalmente os sólidos CSG destacando sua utilidade para classificação de tetraedros com relação ao sólido. Veremos ainda como é possível reduzir a complexidade de expressões CSG utilizando a idéia de localização de sólidos. Em seguida descreveremos o critério de classificação de tetraedros baseado na representação Bézier das funções características dos sólidos e finalmente na última seção apresentaremos a construção da triangulação adaptativa.

## 4.2. Modelos CSG

A modelagem de sólidos conhecida como Geometria Sólida Construtiva (CSG), têm sido muito utilizada em modeladores de sólidos, porque apresenta mecanismos de construção de sólidos familiares à maioria das pessoas. A idéia básica é a de que sólidos complexos podem ser representados como uma combinação de sólidos mais simples.

Estes sólidos simples, conhecidos por primitivas sólidas, constituem, na verdade, uma família de sólidos que podem ser obtidos a partir de transformações geométricas afins (translação, rotação e escala) de formas básicas como cubos, cilindros, esferas e toros.

Com o intuito de construir um sólido complexo, estas primitivas sólidas são combinadas através de operações de conjunto (união, interseção, e diferença) denominadas operações Booleanas.

Algumas combinações de primitivas entretanto não satisfazem a nossa noção de objeto sólido, ou seja, a de que sólidos são homogeneamente tridimensionais e não possuem componentes de dimensão menor que três (linhas ou superfícies) penduradas em suas fronteiras. Sólidos homogeneamente tridimensionais são chamados sólidos regulares [REQU80]. Considere, por exemplo, o caso mostrado na fig. 4.1(a), onde o resultado da interseção de duas primitivas não é um sólido regular.

Para preservar a natureza sólida do resultado, os modelos CSG utilizam o conceito de operação Booleana regularizada [REQU80]. A operação regularizada entre duas primitivas A e B é definida como:

$$A \text{ op}^* B = \text{reg} (A \text{ op} B) = \text{fecho} (\text{interior} (A \text{ op} B) )$$

onde  $\text{op}$  é qualquer operador booleano,  $\text{op}^*$  denota sua regularização.

A operação de regularização pode ser vista como um operação de filtragem, no sentido de que ela elimina do conjunto ruídos e partes de dimensão inferior. A fig. 4.1(b) ilustra o resultado da operação de interseção regularizada das primitivas A e B.

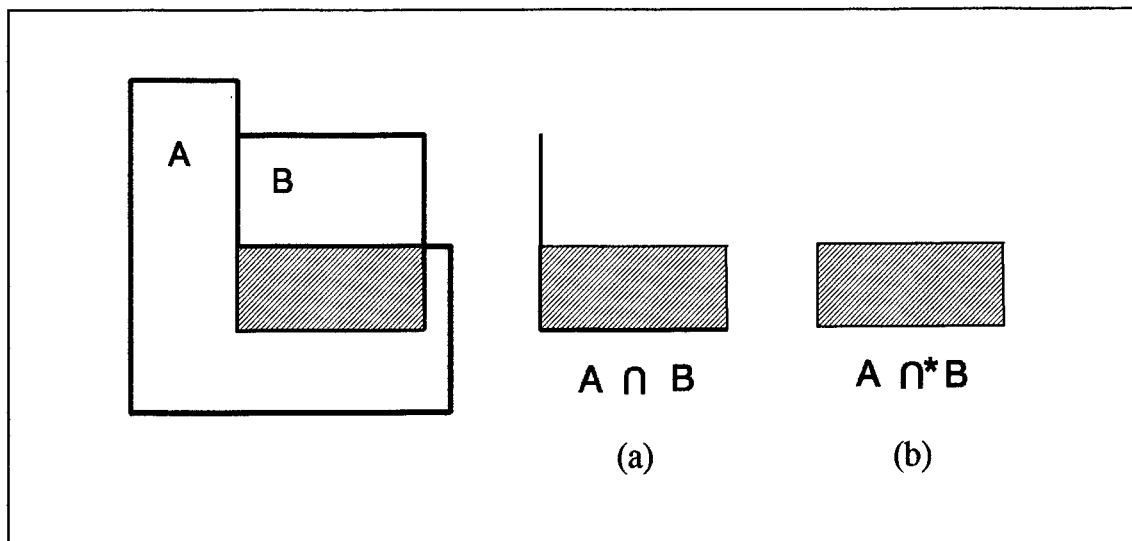


Fig. 4.1 - Interseções Booleanas simples e regularizada.

O uso de operações Booleanas regularizadas em combinações de primitivas sólidas regulares garante a construção de sólidos regulares [MORT85]. É interessante notar que não é necessário regularizar todas as operações booleanas na composição de um sólido CSG. De fato, o resultado será o mesmo se regularizarmos somente a operação booleana na raiz da árvore do modelo [PERS94].

Modelos CSG mais gerais estendem o conceito de primitiva e consideram como possíveis primitivas uma família de semi-espacos definidos por funções polinomiais trivariadas [SALI92], ou seja, os semi-espacos definidos por:

$$\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid f(p) \leq 0 \}$$

Tal família de primitivas inclui todas as quádricas, ciclides e semi-espacos planares e podem ser utilizadas para construir primitivas CSG mais gerais [PERS94]. A fig. 4.2 ilustra a representação CSG de um cilindro limitado através da interseção de dois semi-espacos planos ( $ax+by+cz+d=0$ ) e um cilíndrico ( $ax^2+by^2-r^2 \leq 0$ ).

Um problema com a utilização destas primitivas é que, mesmo com a utilização de operações booleanas regularizadas, não se pode garantir que sólidos regulares sejam construídos. Este deve ser um cuidado que o usuário deve ter na fase de modelagem.

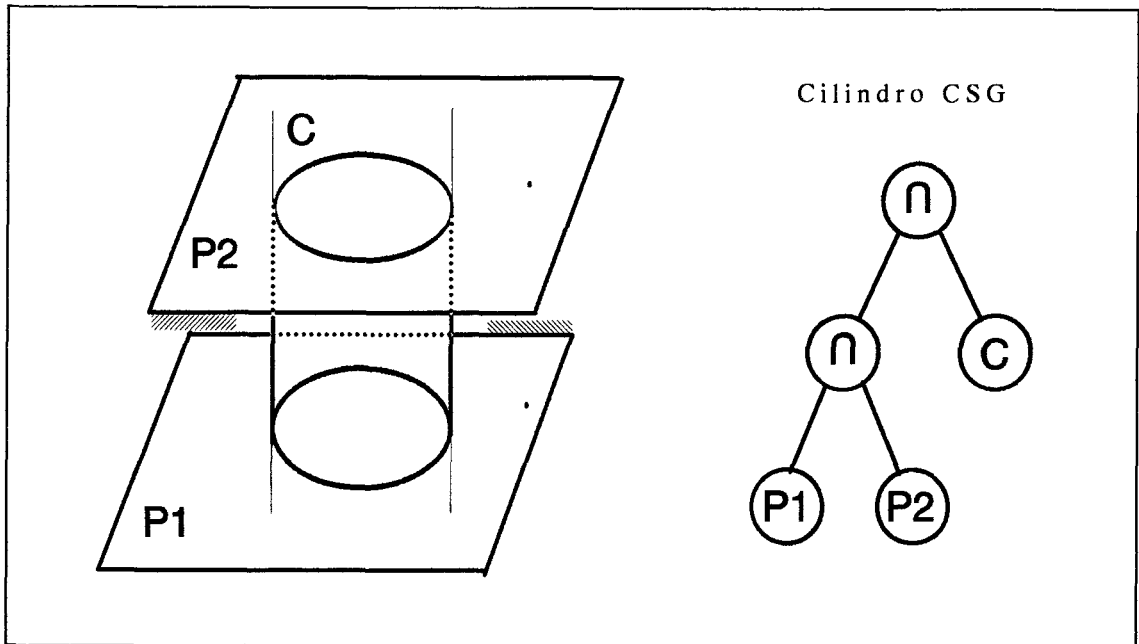


Fig. 4.2 - Representação CSG de um cilindro limitado

A modelagem CSG propriamente dita, apesar de simples, não apresenta muitas facilidades para a interatividade. Enquanto não dispomos de sistemas e equipamentos com sofisticados recursos de interatividade será sempre necessário definir alguma linguagem formal de especificação e construção do sólido. Neste trabalho utilizamos uma extensão da linguagem LDS definida em [ESPE90] para construção de modelos CSG.

### 4.3. Funções Características de Sólidos CSG

O uso de primitivas baseadas em semi-espacos polinomais, como vimos, aumenta o poder de expressão dos modelos CSG. Uma vantagem adicional é que nos permitem representar facilmente um sólido CSG por uma única função, como veremos a seguir.

A toda primitiva definida por um semi-espaco polinomial corresponde uma função  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que define uma superfície de nível no espaço dividindo-o em três regiões distintas:

$$\begin{aligned} f(p) &\leq 0 \\ f(p) &= 0 \\ f(p) &> 0 \end{aligned} \quad p \in \mathbb{R}^3$$

A função  $f$  é dita polinômio característico da primitiva.

A todo sólido construído por combinações de primitivas polinomiais desta forma podemos também associar uma função  $f:R^3 \rightarrow R$  que o representa globalmente. Na verdade existem várias funções que podem representá-lo, todas recebendo o nome de função característica do sólido.

As funções características são muito úteis para se expressar operações booleanas entre sólidos. A função característica entre dois sólidos  $A$  e  $B$ , por exemplo, é o máximo entre as funções características  $f_a$  e  $f_b$  [SALI92]. Em geral tem-se:

$$S = A \cap B, f_s = \max \{f_a, f_b\}$$

$$S = A \cup B, f_s = \min \{f_a, f_b\}$$

Através do uso recursivo das expressões acima, uma função característica de um sólido representado por uma expressão booleana pode ser escrita como uma expressão algébrica de operadores  $\min$  e  $\max$  aplicado às funções características das primitivas. Por exemplo, o sólido CSG dado pela expressão:

$$S = ((A \cap B) \cup C) \cap D$$

pode ser caracterizado pela função:

$$f_s = \max \{ \min \{ \max \{f_a, f_b\}, f_c \}, f_d \}$$

Por sua simplicidade na representação de operações Booleanas, as funções características são ideais para representação de sólidos CSG. Uma função característica de qualquer sólido pode ser avaliada simplesmente percorrendo a árvore CSG do sólido e substituindo operador  $\cap$  por  $\min$ ,  $\cup$  por  $\max$  e primitivas pelas respectivas funções características.

Uma função característica construída desta maneira será uma função contínua, polinomial por partes, se as funções características das primitivas forem polinomiais.

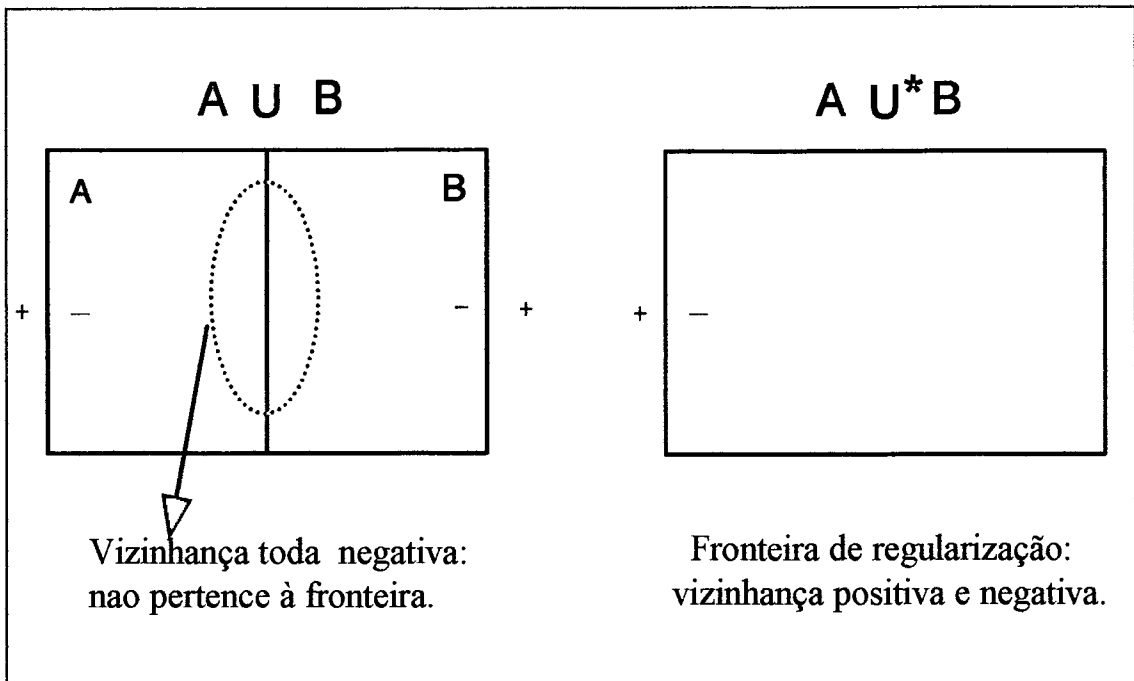


Fig. 4.3 - A fronteira da regularização está entre valores positivos e negativos

Como uma representação implícita, uma função característica é capaz de responder se um ponto qualquer do espaço está no interior, exterior ou na fronteira (não regularizada) do sólido [SALI92]. A fronteira da regularização do sólido, entretanto, não pode ser tão facilmente expressa pelas funções características. A fronteira regularizada não coincide necessariamente com o conjunto de zeros de sua função característica. A fig. 4.3 mostra, por exemplo, que esta função assume valor zero na face comum da união de dois cubos distintos, face esta que não pertence a fronteira regularizada do sólido. A fronteira de regularização pode ser entendida, portanto, como o subconjunto de zeros da função característica que possui em sua vizinhança valores tanto negativos quanto positivos.

Funções características, contudo, são ainda úteis para aproximação do interior e exterior de um sólido. De fato, se funções nulas são evitadas, podemos estabelecer que:

$$\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid f_s(p) < 0 \} \subset \text{interior}(S)$$

e além disso, vale que:

$$\text{reg}(S) = \text{fecho}(\text{interior}(S)) = \text{fecho}(\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid f_s(p) < 0 \})$$

Graças a esta propriedade, podemos expressar também o operador diferença através das funções características como a interseção com o complemento do segundo operando, ou seja [PERS94]:

$$\begin{aligned} \text{reg}(A/B) &= \text{reg}(A \cap \text{Compl}(B)) \\ &= \text{fecho}(\{p \in R^3 \mid f_a(p) \leq 0, -f_b(p) < 0\}) \\ &= \text{fecho}(\{p \in R^3 \mid f_a(p) < 0, -f_b(p) < 0\}) \end{aligned}$$

Na seção 4.5 veremos um critério baseado na representação Bézier das funções características para a verificação do tipo de interferência de tetraedros em relação ao sólido.

#### 4.4. Localização de Sólidos CSG

No âmbito das representações CSG, as subdivisões espaciais são interessantes porque podem aproveitar as vantagens da localização de sólidos [TILO84]. A idéia de localização de sólidos CSG em subdivisões espaciais é a de que dentro de cada célula da decomposição o sólido pode ser representado somente pela porção do sólido nela contida.

A localização de um sólido consiste basicamente na simplificação da árvore CSG do sólido, de modo que nela estejam representadas somente as primitivas que efetivamente influenciam a região onde a célula está localizada. A fig. 4.4 mostra um exemplo de simplificação possível.

Para nós, a idéia de localização é interessante na medida em que conseguimos simplificar consideravelmente a função característica que descreve o sólido dentro do tetraedro, a qual, como vimos, é obtida diretamente da árvore CSG, e com isso reduzir significativamente o número de avaliações da função característica necessárias para a classificação de tetraedros, como veremos na próxima seção.

A simplificação consiste basicamente em localizar na árvore CSG do sólido, as sub-árvores que representam porções do sólido que podem ser substituídas pelo conjunto vazio ( $\emptyset$ ) ou universo ( $W$ ). Primeiramente, cada primitiva  $P$  da árvore CSG é classificada em relação a um tetraedro em uma das seguintes categorias:



Interior ( $P \supset T$ )

Exterior ( $P \cap T = \emptyset$ )

Interceptante (Fronteira de P intercepta T)

Em seguida as primitivas classificadas como Interior e Exterior, são substituídas pelo conjunto Universo ( $W$ ) e vazio ( $\emptyset$ ), respectivamente, na árvore CSG. Finalmente as operações booleanas da árvore CSG são avaliadas recursivamente, aplicando-se as regras de simplificação da teoria dos conjuntos:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap W = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup W = W$$

Neste trabalho utilizamos um procedimento, implementado por Salim [SALI92], que simultaneamente classifica os tetraedros em relação ao sólido e simplifica a árvore CSG. O procedimento se baseia exclusivamente na classificação das primitivas da árvore CSG e posterior simplificação da árvore tal como acabamos de descrever. O tetraedro é classificado como interceptante sempre que a árvore não puder ser simplificada. No caso da árvore ser simplificada para uma única primitiva esta é classificada em relação ao tetredro.

Utilizando as idéias de localização conseguimos otimizar sensivelmente o procedimento de refinamento pois, à medida que os tetraedros vão sendo subdivididos, as árvores CSG representativas do sólido em cada um deles vão sendo bastante simplificadas, o mesmo acontecendo com as respectivas funções características. A utilização das funções min-max, por conseguinte, fica reduzida a algumas poucas regiões do espaço onde existem mais de uma primitiva na árvore CSG do sólido restrita ao tetraedro, tipicamente a fronteira do sólido.

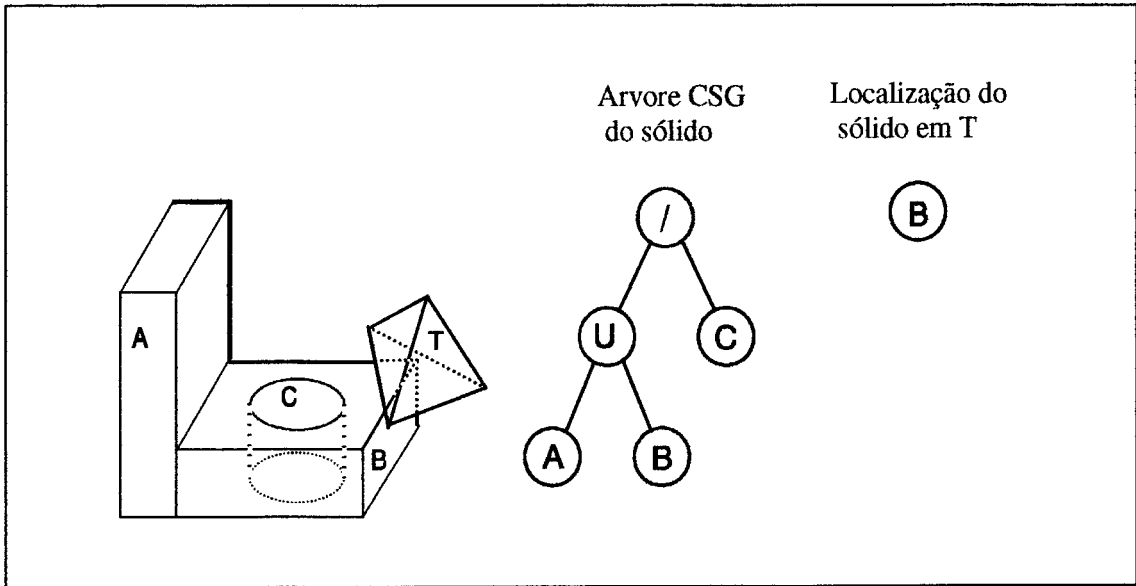


Fig. 4.4 - Localização de um Sólido em um tetraedro.

### 4.5. Classificação de Tetraedros Contra Primitivas

A classificação de tetraedros é a chave do nosso esquema para triangulação adaptativa de sólidos CSG porque permite, ao mesmo tempo, a adaptação, no sentido de manter tão grande quanto possível os tetraedros que se encontram inteiramente dentro do sólido, como também a eliminação durante o processo dos tetraedros que se encontram inteiramente fora do sólido.

Na seção 4.4, vimos que o procedimento utilizado para classificação de tetraedros é baseada em sucessivas simplificações da árvore CSG do sólido, sendo necessárias apenas as classificações das primitivas da árvore CSG. Esta classificação é feita a partir da representação da polinomial que descreve a primitiva na forma Bézier.

Uma função polinomial trivariada de grau n pode ser expressa em coordenadas baricentricas (u,v,w,t) relativas ao tetraedro por:

$$p(u,v,w,t) = \sum_{i+j+k+t=n} C_{ijkl} B_{ijkl}^n(u,v,w,t)$$

onde  $C_{ijkl}$  são os coeficientes de Bézier da polinomial e,

$$B_{ijkl}^n(u,v,w,t) = \frac{n!}{i!j!k!l!} u^i v^j w^k t^l \quad u+v+w+t=1 \quad e \quad i+j+k+l=n$$

são as funções de base de Bernstein.

A vantagem desta representação é que os coeficientes de Bézier dão limites para os extremos da polinomial dentro do tetraedro, isto é:

$$\min C_{ijkl} \leq p(u,v,w,t) \leq \max C_{ijkl} \quad u,v,w,t \geq 0$$

Portanto, é possível obter uma primeira classificação para o tetraedro simplesmente examinando os sinais dos coeficientes de Bézier da função característica dentro do tetraedro. Se todos os coeficientes de Bezier são positivos, pode-se garantir que o tetraedro está inteiramente fora da primitiva. Se, por outro lado, todos os coeficientes de Bezier são negativos, o tetraedro está inteiramente dentro da primitiva.

No caso de haver alternância de sinais nos coeficientes de Bézier, a classificação não é precisa porque o tetraedro pode ou não interceptar a fronteira da primitiva. A fig. 4.5 ilustra, sem perda de generalidade, para a reta e uma polinomial cúbica, três casos onde há alternância de sinais. Existe um único caso, entretanto, quando os extremos dos coeficientes de Bézier estão nos vértices do tetraedro, em que se pode garantir que o tetraedro intercepta a fronteira da primitiva. Neste caso o tetraedro é classificado como f-interceptante [SALI92].

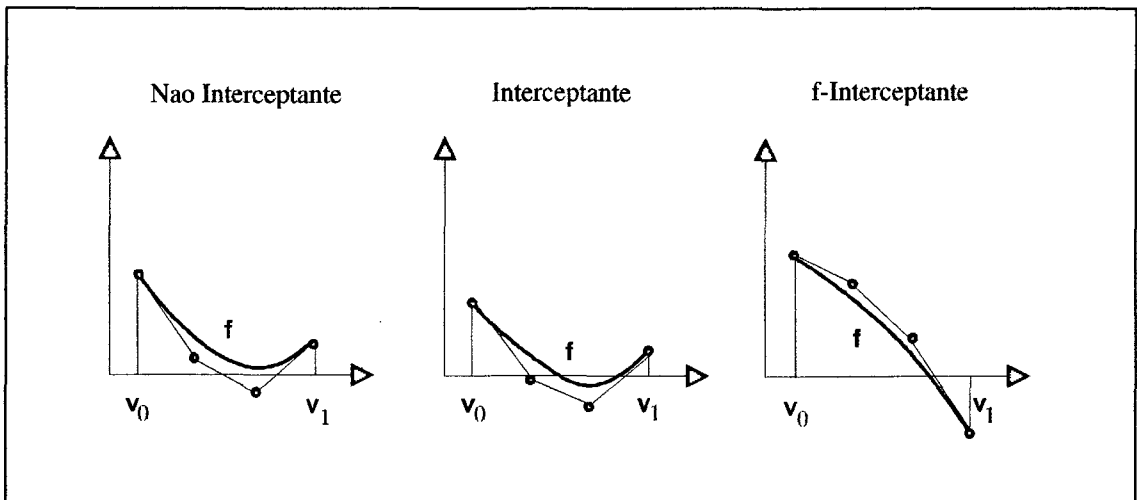


Fig. 4.5 - Casos em que há alternância de sinais dos coeficientes de Bézier.

A representação Bézier da função característica de uma primitiva apresenta ainda vantagens na subdivisão binária de um tetraedro. Os coeficientes de Bézier relativos aos dois tetraedros filhos devem ser avaliados a fim de permitir o refinamento dos testes de interferência e localização. Pelo princípio da subdivisão de Bézier, os coeficientes da polinomial para os dois tetraedros podem ser calculados a partir dos coeficientes relativos ao tetraedro pai por uma execução do algoritmo de Casteljau [SALI92].

#### 4.6. Triangulação Adaptativa do Sólido

Baseado nas classificações de tetraedros que acabamos de ver, podemos definir um critério de refinamento que nos permite utilizar o esquema de refinamento adaptativo do capítulo 3 para construir uma triangulação adaptativa que aproxima a fronteira de um modelo CSG.

Um critério simples pode ser: o tetraedro satisfaz ao critério se está totalmente contido no sólido (sua classificação é Interior) ou se está no último nível de refinamento (seu tamanho é menor do que a precisão especificada). Se, por outro lado, é interceptante à fronteira do sólido e não está no último nível de refinamento, então não satisfaz ao critério, devendo portanto ser refinado.

Com este critério conseguimos também otimizar o processo de aproximação, refinando somente as regiões mais próximas da fronteira do sólido.

Um sólido  $S$  é inicialmente suposto dentro de uma caixa envolvente  $C$ , para a qual é construída uma triangulação CFK conforme descrito em 3.1. Esta triangulação inicial vai sendo refinada adaptativamente com base na classificação do tetraedro em relação ao sólido. Cada tetraedro gerado é também classificado em relação ao sólido e no caso de não interceptar o sólido é eliminado da triangulação. Um nível máximo (NivelMax) é definido pela precisão desejada.

O seguinte algoritmo constrói uma triangulação adaptativa para o Sólido  $S$ .

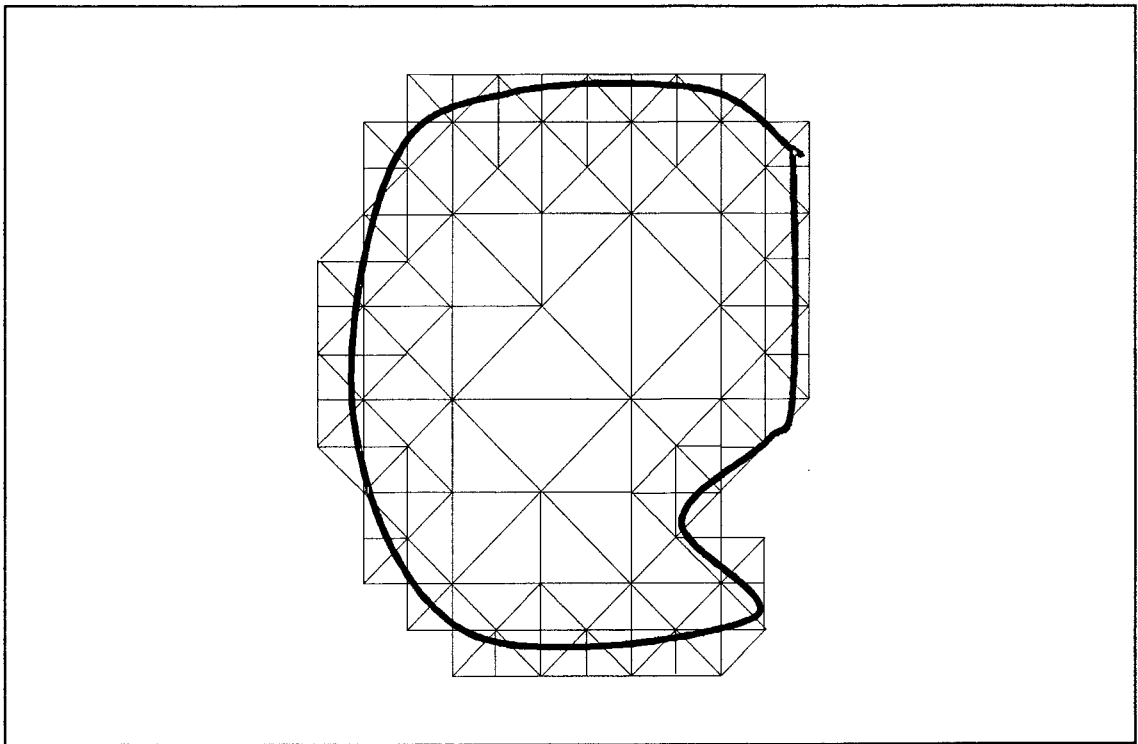


Fig. 4.6: Triangulação adaptativa de uma região no plano

*Procedimento 4.1: TriangAdaptCSG*

*TriangAdaptCSG (S, C, NivelMax)*

$\mathfrak{S} \leftarrow \text{ConstroiTriangInicial}(C)$

*Enq. existir tetraedro T em  $\mathfrak{S}$  nao avaliado faça*

*Se Classificacao(T, S)=INTERCEPTANTE ou*

*NivelRefinamento(T) < NivelMax {*

*RefinamentoBasico(T)*

*Para cada tetraedro T\* gerado acima faça {*

*Se Classificação(T\*, S)=EXTERIOR {*

*remove T\* de  $\mathfrak{S}$*

*}*

*}*

*}*

*}*

O procedimento recebe o sólido  $S$ , a caixa  $C$  envolvente ao sólido, e o nível máximo  $\text{NivelMax}$  de refinamento da triangulação. Inicialmente é feita a triangulação da caixa envolvente, através do procedimento  $\text{ConstroiTriangInicial}$  e os seis tetraedros iniciais são gerados. Após isto, é feito o laço que trata individualmente cada tetraedro gerado.

O procedimento  $\text{RefinamentoBasico}$  é tal como descrito em 3.3. Todos os novos tetraedros gerados pelo refinamento básico são classificados em relação ao sólido e, não contendo parte do sólido, são excluídos da triangulação. No último nível de refinamento, os tetraedros classificados como interceptantes à fronteira do sólido são considerados como interiores ou exteriores, dependendo da avaliação da função característica nos vértices do tetraedro. Desta forma, como vimos na seção 4.3, a fronteira não regular do sólido é eliminada.

O procedimento é capaz de gerar uma triangulação cujo bordo, em certas condições, pode ser uma aproximação para a fronteira do sólido. Esta fronteira estará dentro de uma vizinhança de espessura  $\alpha$  do bordo desta triangulação, onde  $\alpha$  é o tamanho do tetraedro que intercepta a fronteira, e, obviamente, depende do nível máximo de refinamento. A fig. 4.6 mostra uma aproximação de uma região no plano. Obviamente, quanto menor o  $\alpha$  melhor a aproximação.

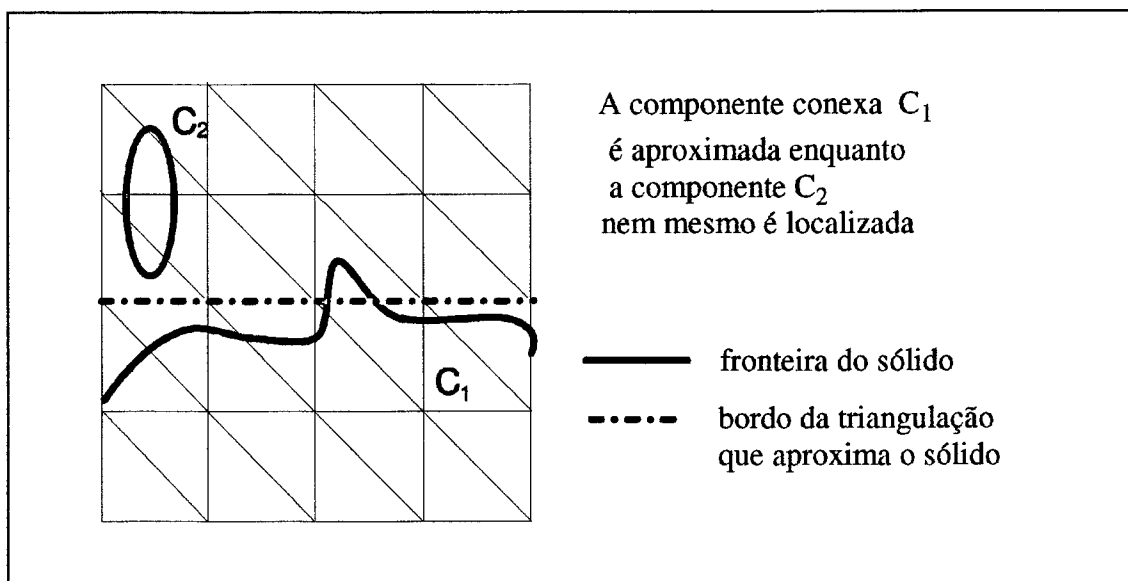


Fig. 4.7: Exemplo de filtragem feita pela aproximação

Numa aproximação deste tipo, aparecem alguns problemas inerentes às discretizações. Podem haver tetraedros que interceptam a fronteira do sólido que, entretanto, não podem ser classificados satisfatoriamente como interceptantes. Nos

vértices destes tetraedros, a função característica possui sempre o mesmo sinal, sugerindo a inexistência de porções do sólido dentro do tetraedro. Isto se deve ao fato dos vértices das triangulações serem amostragens finitas do espaço.

As porções do sólido que podem estar contidas nesses tetraedros são relativamente pequenas para serem percebidas pela amostragem representada pela triangulação. Assim, ao se aproximar o sólido pela triangulação desaparecem partes do sólido, bem como componentes conexas inteiramente contidas em um tetraedro. A fig. 4.7 mostra um exemplo no plano.

Dependendo também do posicionamento da triangulação no espaço, alguns grupos de componentes conexas podem ser fundidas em uma única componente, fazendo com que a topologia da aproximação seja diferente da topologia original do sólido. A fig.4.8 mostra um sólido composto de duas componentes conexas, onde, dependendo da posição dos tetraedros na região tracejada, o resultado final pode ser um sólido com apenas uma componente conexa. Este problema é bastante sério e evidencia a questão da qualidade da aproximação [SALI92].

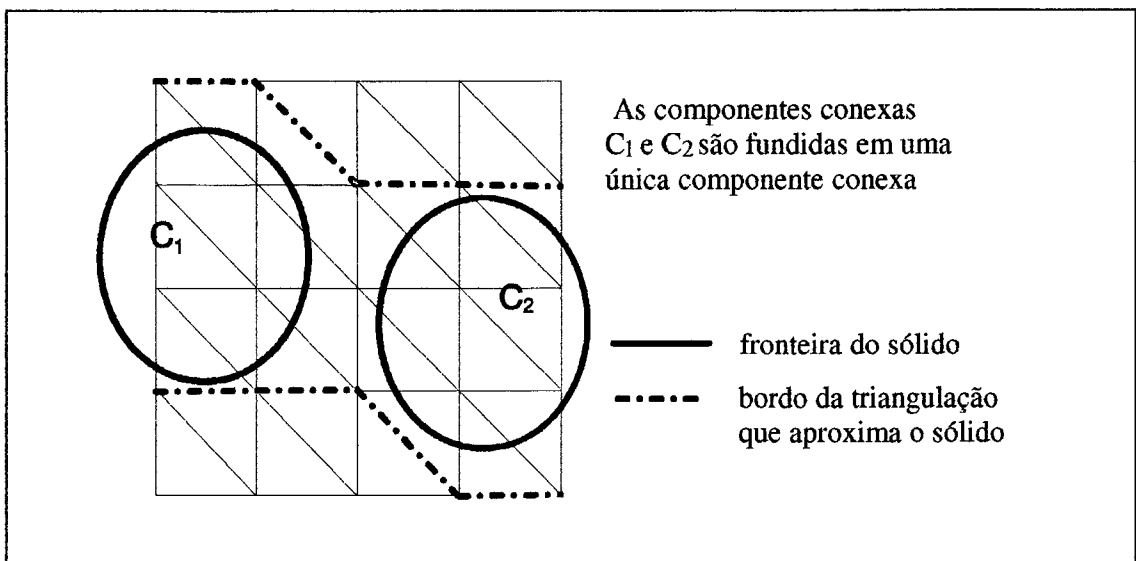


Fig. 4.8: Exemplo de modificação da topologia devido a aproximação

A qualidade da aproximação, assim como em qualquer problema de discretização, é diretamente dependente da qualidade da amostragem, isto é, quanto mais densa a triangulação e, portanto, menores os tetraedros, melhor a aproximação. A definição do nível de refinamento ideal para que a aproximação seja aceitável, depende de estudo da localização do sólido dentro da região de interesse.

## 4.7. Conclusão

Neste capítulo vimos que, com a definição de um critério de refinamento baseado na classificação de tetraedros quanto a interferência com o sólido, podemos utilizar o esquema de refinamento adaptativo proposto no capítulo 3 em um esquema que permite construir uma triangulação adaptativa cuja borda aproxima, dentro de uma precisão especificada, a fronteira de um sólido CSG.

O esquema é bastante geral porque permite, a princípio, a construção de triangulações para sólidos com geometrias arbitrárias, inclusive com várias componentes conexas. Uma aproximação, tão boa quanto se queira, é possível através da especificação de um nível máximo de refinamento.

No próximo capítulo veremos como o esquema proposto pode ser útil para construção de malhas para o método de elementos finitos.



## CAPÍTULO 5

# Geração de Malhas de Elementos Finitos de Sólidos CSG

---

### 5.1. Introdução

A principal motivação deste trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta eficiente e robusta para a geração automática de malhas tridimensionais para o método de elementos finitos.

O ponto central na geração automática de malhas para o método de elementos finitos é a adequação da malha ao modelo de representação do domínio de integração. Uma malha adequada deve representar corretamente a geometria do domínio, bem como ser bem adaptada às propriedades físicas do fenômeno que está sendo analisado. A qualidade da solução de elementos finitos depende destes dois aspectos.

Neste capítulo procuraremos mostrar como o esquema de triangulação adaptativa proposto pode ser útil para a geração de malhas de elementos finitos de domínios tridimensionais descritos por sólidos CSG. Veremos essencialmente como é possível adaptar uma malha a um problema específico através da definição de critérios de refinamento que levam em conta as características do problema.

Em seguida, discutiremos uma questão importante, relacionada com a aproximação geométrica do modelo, e finalizaremos apresentando algumas idéias para abordagem desta questão.

### 5.2. Domínios de Elementos Finitos

A modelagem de sólidos, área da computação gráfica que estuda a criação e manutenção de estruturas de dados que representam no computador objetos do

mundo real, tem se revelado uma importante ferramenta para a definição de domínios tridimensionais para o método de elementos finitos.

No escopo deste trabalho estamos particularmente interessados na geração de malhas de elementos finitos para domínios representáveis por sólidos CSG.

A modelagem CSG, como vimos, é interessante porque se baseia em mecanismos de construção de sólidos familiares a maioria das pessoas.

Naturalmente, ela não é capaz de modelar todos os domínios requeridos pelas aplicações de elementos finitos, entretanto, um grande número destas aplicações lidam com domínios representáveis por objetos sólidos, especialmente aplicações nas áreas de engenharia, mecânica, robótica, etc.

A obtenção de um modelo geométrico aproximado para um domínio contínuo não é, como vimos, uma operação trivial. Um malha de elementos finitos deve não só representar corretamente a geometria do domínio, bem como ser bem adaptada às características físicas do problema. Um gerador automático de malhas, por definição deve interagir diretamente com o modelo geométrico.

### 5.3. Critério de Refinamento

Vimos que, em uma análise de elementos finitos adaptativa, é necessário estabelecer uma precisão dentro da qual a solução é obtida: se a precisão não é alcançada, a malha de elementos finitos é modificada até que uma solução dentro da precisão seja obtida. O objetivo é chegar a uma malha final que seja ótima em termos de custo computacional para a precisão desejada.

Os métodos adaptativos utilizam geralmente um indicador de erro que pode ser calculado independentemente para cada elemento, para definir um critério para refinamento seletivo da malha, produzindo malhas com erros significativamente menores.

Em geral, estes métodos se baseiam no princípio da equidistribuição de erro. Um critério normalmente utilizado é: refine todos os elementos para o qual,

$$\|e\|_i \geq \theta \|e\|_{\max} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

onde  $\theta$  é uma tolerância pre-definida e  $\|e\|_{\max}$  o erro máximo entre os elementos.

Freqüentemente procuram-se estabelecer limites superiores para as medidas de erro. Isto significa, dada uma malha com elementos de tamanhos iguais a  $h$ , estabelecer uma inequação (válida para valores pequenos de  $h$ ) do tipo [RIBE91],

$$\|e\| \leq Ch^p$$

onde  $C$  é uma constante dependente dos dados do problema, e  $p$  é um inteiro que depende da função de interpolação utilizada. O expoente  $p$  é chamado de taxa de convergência em relação a norma  $\|\cdot\|$  empregada. Se  $p$  for positivo, a medida de erro  $\|e\|$  se aproxima de zero quando o tamanho  $h$  dos elementos tende a zero.

O critério de refinamento é a chave da nossa proposta de geração de malhas de elementos finitos através do esquema de triangulação adaptativa de sólidos CSG, porque permite a adequação da malha a um problema de elementos finitos específico.

A única restrição sobre este critério, como visto anteriormente, é que seja "invariante a inclusão", ou seja, o refinamento de um elemento deve melhorar a sua avaliação em relação ao critério.

Critérios de refinamento baseado em estimativas de erro, como os que vimos acima, possuem esta característica.

#### 5.4. Triangulação Adaptativa do Domínio

No capítulo 4 vimos um esquema para construção de triangulações adaptativas que aproximam a fronteira de sólidos CSG. Podemos pensar em utilizar este esquema para construir uma discretização que aproxime a geometria de um domínio de elementos finitos que pode ser descrito por um sólido CSG.

Uma triangulação, entretanto, para ser adequada à um problema de elementos finitos deve não somente representar corretamente o modelo geométrico, mas também ser bem adaptada ao fenômeno físico que está sendo estudado, o qual, em geral, varia de maneira não uniforme dentro do domínio.

Dentro de um enfoque adaptativo para geração de malhas de elementos finitos, geralmente, uma malha inicial que apenas aproxima a geometria é construída e posteriormente refinada com base em critérios definidos apropriadamente para cada problema. De posse de um critério de refinamento adequado, o esquema para triangulação adaptativa pode ser utilizado para construir uma discretização do domínio, adequada ao problema.

O esquema que começa com uma triangulação inicial de uma "caixa envolvente" ao sólido, vai refinando adaptativamente tetraedros da triangulação com base no critério de refinamento definido e, simultaneamente, eliminando tetraedros que não interceptam o sólido. Ao final, uma triangulação que contém somente tetraedros interiores ao sólido ou interceptantes à sua fronteira é obtida. Tal como vimos, o bordo desta triangulação, pode ser uma aproximação tão boa quanto se queira da geometria do sólido, e estará dentro de uma vizinhança  $\alpha$  da fronteira do sólido, onde  $\alpha$  é a precisão especificada.

Numa aproximação deste tipo, além dos problemas já mencionados, relacionados com a regularização topológica do sólido, aparecem alguns outros relacionados com a sua utilização pelo método de elementos finitos.

Pelo fato de utilizarmos um critério de refinamento que não é baseado na classificação do tetraedro em relação a fronteira do sólido, mas sim, em estimativas de erros da solução do problema, a vizinhança  $\alpha$  pode não ser constante em toda a fronteira. As triangulações serão mais refinadas nas regiões críticas (onde os erros são grandes) do domínio. Ou seja, a geometria do modelo será bem aproximada quando toda a fronteira for região crítica para o problema. Sempre que estas regiões críticas não estiverem na fronteira do domínio, o bordo da triangulação poderá estar bem afastado da fronteira do sólido. A fig. 5.1 mostra um exemplo onde o critério de refinamento é um ponto no interior de um círculo. A geometria do círculo é aproximada por um quadrado.

À primeira vista, isto não constitui um problema grave já que, pelo critério de refinamento, os erros encontrados nestas regiões são aceitáveis. Contudo, estas malhas são inaceitáveis para o método de elementos finitos sobretudo porque as condições de contorno são aplicadas sobre o bordo da triangulação e, neste caso, estariam sendo colocadas de forma inadequada.

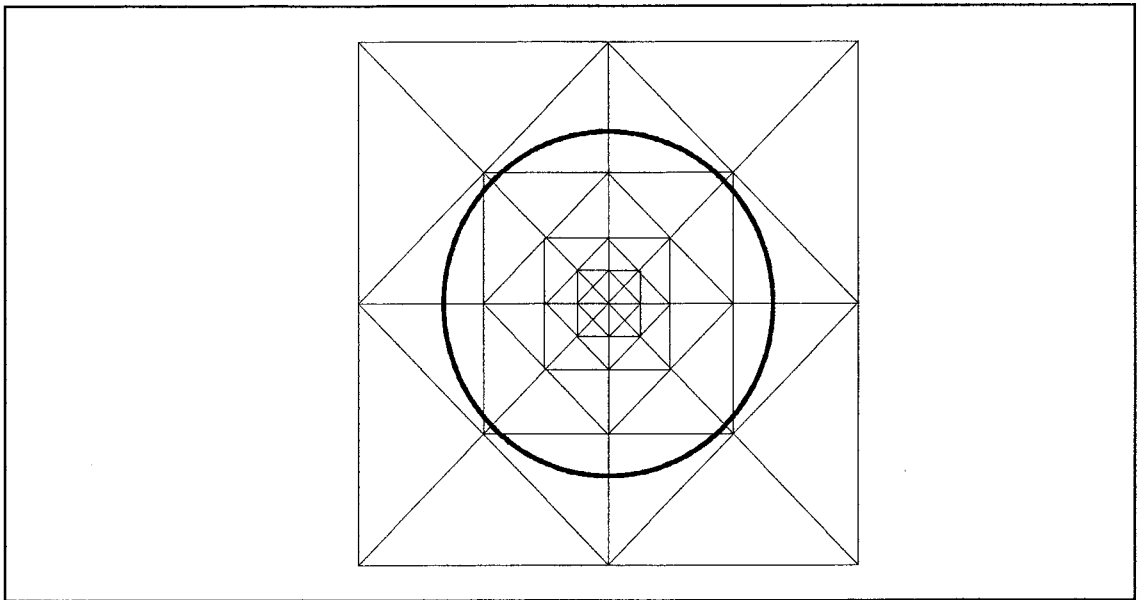


Fig. 5.1 - Refinamento adaptativo de um círculo

Uma solução satisfatória para este problema é simplesmente considerar um critério de refinamento que leva em conta também a aproximação geométrica, refinando, além das regiões críticas, também os tetraedros que interceptam a fronteira do sólido, até uma precisão geométrica especificada.

Esta solução, entretanto, pode levar à triangulações, muitas vezes, excessivamente refinadas, simplesmente para a aproximar a geometria do domínio.

Veremos a seguir, algumas técnicas comumente utilizadas para aproximação geométrica, que não chegaram a ser implementadas neste trabalho por requererem ainda estudo mais aprofundado para se adequar ao esquema proposto.

## 5.5. Abordagens para Aproximação da Fronteira do Sólido

Um gerador automático de malhas de elementos finitos deve assegurar que a malha produzida seja uma boa aproximação geométrica para o domínio de integração.

Em sua grande maioria estes geradores introduzem algum tipo de aproximação geométrica no processo. Frequentemente, eles aproximam o contorno do domínio de integração por uma superfície poligonal definida pelo bordo da discretização, cujos vértices são distribuídos sobre o contorno.

Não obstante, um esquema baseado em subdivisão espacial como a triangulação adaptativa que apresentamos, é bastante útil para aproximar fronteira de sólido CSG. O problema com esta aproximação, como vimos, é que os vértices do bordo da triangulação não coincidem com a superfície do sólido, podendo mesmo estar bem afastado desta. Por outro lado, vimos que uma aproximação, tão boa quanto se queira, pode ser obtida simplesmente reduzindo-se a precisão  $\alpha$ . Esta estratégia, contudo, pode resultar em um número excessivamente alto de elementos na triangulação.

Nos processos baseados em subdivisão espacial, é comum a decomposição do domínio de interesse em uma representação secundária. A estratégia adotada pela maioria destes métodos [SHEP93] é refinar a triangulação até um nível de tolerância suficiente e, em seguida aplicar um processo de aproximação da fronteira do sólido dentro de cada célula. A estrutura da subdivisão é geralmente utilizada para localização dos processos dentro de cada célula.

A interação dos processos com a geometria original é um aspecto crítico para garantia de que a malha resultante é uma representação geométrica válida do domínio.

Naturalmente, o processo a ser empregado depende do tipo de decomposição utilizada. Descrevemos a seguir algumas técnicas apropriadas para triangulações.

### 5.5.1. Interpolação Linear da Fronteira do Sólido

Uma técnica simples para aproximar superfícies em triangulações é calcular uma interpolação linear para a porção da fronteira do sólido contida dentro do tetraedro. Uma aproximação deste tipo tem sido utilizada com o objetivo de aproximar somente a casca do sólido [SALI92], [APOL94]. Esta técnica consiste em avaliar a função característica do sólido nos vértices do tetraedro e utilizar interpolação linear para criar uma superfície poligonal que aproxima a fronteira do sólido dentro do tetraedro, como mostra a fig. 5.2. A superfície poligonal por partes compostas das interpolações lineares de todos os tetraedros que interceptam a fronteira do sólido é uma aproximação para esta fronteira.

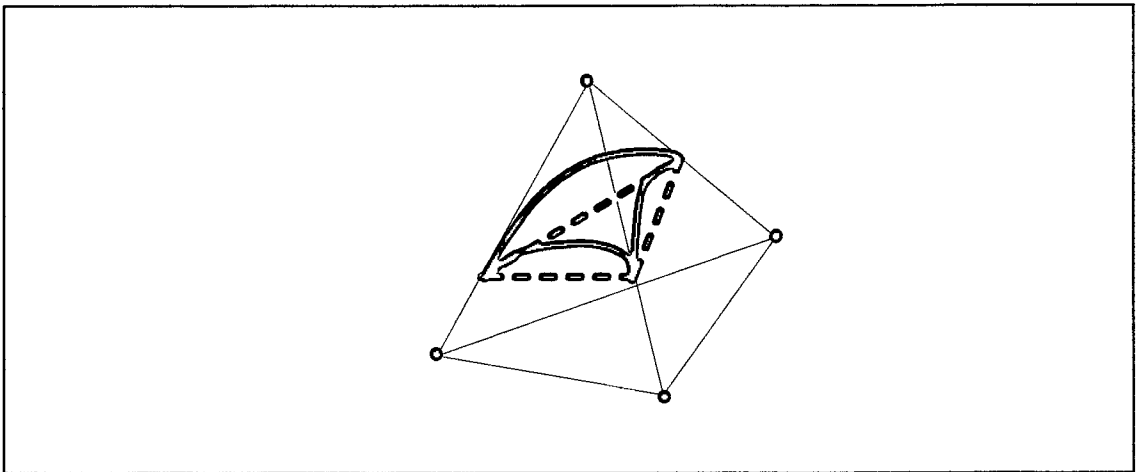


Fig. 5.2 - Aproximação linear da fronteira do sólido dentro de um tetraedro

O uso deste tipo de aproximação com a triangulação adaptativa para criar uma malha de elementos finitos que aproxime corretamente a fronteira do sólido, apresenta algumas desvantagens. Primeiramente que alguns tetraedros da triangulação podem resultar muito finos. Tais situações frequentemente surgem quando a superfície passa próximo a um vértice da triangulação. Como vimos anteriormente, estes tetraedros são indesejáveis em malhas de elementos finitos.

Uma outra desvantagem surge do fato de que a superfície pode particionar um tetraedro em prismas ou pirâmides, aos quais deve ser aplicada uma subdivisão adicional para produzir tetraedros. O problema com esta subdivisão adicional é que deve ser consistente entre tetraedros adjacentes, para assegurar que o conjunto de tetraedros forma uma triangulação. Implementar tal tarefa requer uma análise exaustiva de cada caso e pode resultar na criação de muitos novos tetraedros.

### 5.5.2. Relocação dos Vértices para a Superfície do Sólido

Uma outra abordagem também muito utilizada consiste simplesmente em mover os nós (ou deformar a geometria da célula) para coincidir com a fronteira do sólido. A principal vantagem deste método é que a superfície de aproximação é composta por faces da nova triangulação, mantendo assim o mesmo número de elementos da triangulação original.

Uma dificuldade associada a utilização deste método é que a relocação de vértices deve ser compatível entre células vizinhas. A fig. 5.3 mostra um exemplo

no plano onde a relocação de um vértice tende a ser diferente em duas células vizinhas.

Uma técnica proposta em [MOOR91], resolve esta dificuldade através do conceito de satélites de um vértice. [MOOR91] define como satélites de um vértice as interseções entre a superfície do sólido e as arestas incidentes a este vértice, que estão mais próximas deste. O vértice é relocado para o centróide de seus satélites. Desta forma, pequenos elementos formados quando a superfície passa próximo de um vértice são degenerados em um único vértice. Por este motivo, as malhas produzidas por este método são bem mais compactas do que aquelas produzidas por interpolação linear. Além disso, os tetraedros gerados têm muito melhor razão de aspectos.

Contudo, superfícies produzidas por este método, não são necessariamente variedades [MOOR91], o que torna o método insatisfatório para criar malhas que aproximem corretamente a fronteira de sólidos.

### 5.5.3. Triangulação de Delaunay

Este método simples tem sido empregado para criar triangulações no interior de células de decomposição Octree [SHEP93]. Uma triangulação de Delaunay é obtida a partir de um conjunto de pontos consistindo, geralmente, das interseções da fronteira do sólido com a célula e dos vértices da própria célula. Contudo, a triangulação de Delaunay usa somente informação de pontos e, portanto, não é possível assegurar que a triangulação resultante seja uma triangulação geométrica válida para a porção do sólido no interior da célula.

Poderíamos pensar na utilização deste método em conjunção com a aproximação linear descrita anteriormente. Um conjunto de pontos seria formado pelas interseções calculadas pela interpolação linear nas arestas e os vértices do tetraedro interiores ao sólido. Uma triangulação de Delaunay seria obtida para estes pontos. Esta aproximação, apesar de resolver o problema de compatibilidade com células vizinhas, pode também criar tetraedros muito pequenos ou finos. Como solução para este problema pode-se pensar em aplicar métodos de suavização de malhas.



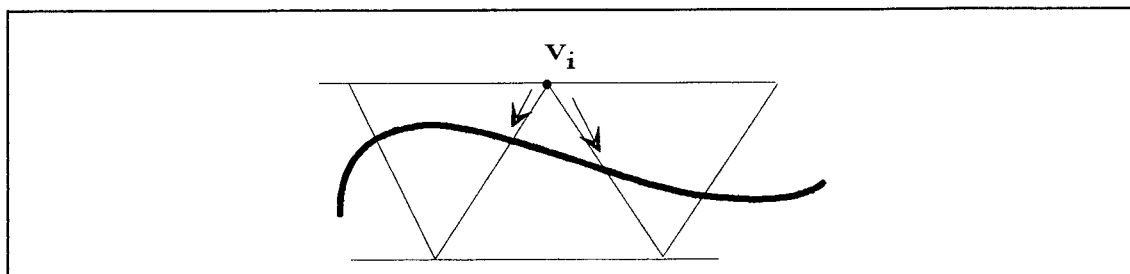


Fig. 5.3 - Problema com a relocação de vértice para uma curva

## 5.6. Conclusão

A utilização do esquema proposto no capítulo 4, simplifica muito a tarefa de gerar uma malha de elementos finitos para um sólido CSG, porque ao mesmo tempo que aproxima a geometria do modelo, adapta a malha aos requisitos do problema específico.

O método contido é bastante eficiente quando o problema requer refinamento em toda a fronteira do domínio. Nos casos mais gerais, no entanto, o método pode gerar malhas inadequadas devido a aproximação da geometria ser bastante ruim em algumas regiões.

Por outro lado, a maioria dos métodos de geração de malhas de elementos finitos baseados em decomposições do espaço utilizam algum processo de triangulação dentro de cada célula da decomposição para gerar malhas que representam corretamente os modelos geométricos.

O esquema proposto, contudo, apresenta muitas vantagens potenciais para a geração de malhas de elementos finitos.

A principal vantagem é que estas malhas podem ser facilmente adaptadas às propriedades físicas do problema, através da definição de um critério de refinamento apropriado. Além disso, estas malhas geradas são garantidamente conformes e contêm elementos razoavelmente "bem formados".

Por estas características, o esquema proposto é apropriado para geração de malhas de elementos finitos, e pode ser utilizado como base para construção de uma ferramenta eficiente e robusta de solução do método de elementos finitos.

## CAPÍTULO 6

# Aspectos Gerais da Implementação

---

O desenvolvimento deste trabalho foi acompanhado de uma implementação que permitiu avaliar o esquema proposto. Alguns aspectos a respeito desta implementação serão apresentados a seguir.

### 6.1. Visão Geral

O sistema que permite construir uma triangulação adaptativa de um sólido CSG consiste de três módulos principais, dentre os quais alguns implementados, anteriormente, por Esperança [ESPE90] e Salim [SALI92]. Estes módulos são programas executáveis que se comunicam por intermédio de arquivos utilizando o recurso de "pipelines" do sistema Unix. Cada módulo tem uma função específica, o que faz com que exista uma sequência em que os programas devem ser executados, visto que a entrada de uns é a saída de outros. Uma visão geral do relacionamento entre estes módulos é mostrada na fig. 6.1.

A disposição do sistema em módulos é interessante porque permite que outros módulos que eventualmente venham a ser construídos, possam ser integrados facilmente ao sistema, além das facilidades que traz para compreensão, construção e depuração dos programas.

O ponto de partida do processo é a descrição do sólido CSG. Para tal, foi utilizada uma linguagem de alto nível denominada LDS [ESPE90], que fornece meios para a construção de representações CSG de sólidos a partir de um conjunto de primitivas (bloco, esfera, cilindro, plano, cone, toro e polinomial) e de alguns operadores (união, interseção, diferença, rotação, translação e escala).

Através do programa COMPILACSG [ESPE90], o código LDS é transformado em uma representação da árvore CSG do sólido.

Esta árvore é, então, submetida ao módulo CSG2CSPG [SALI92], que gera uma versão modificada da árvore, na qual as primitivas polinomiais são expressas na forma Bezier.

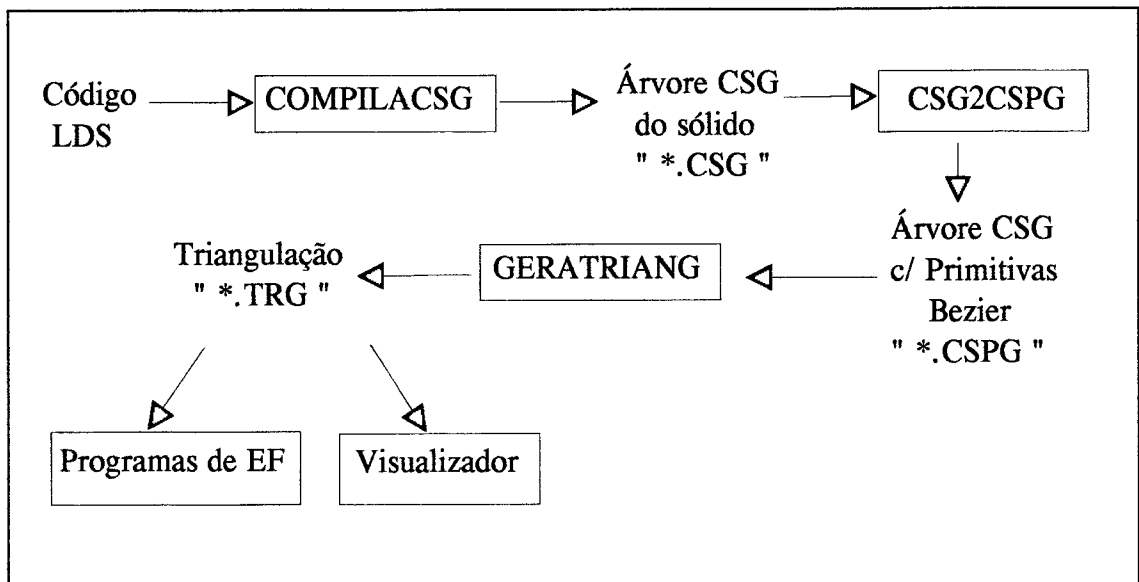


Fig. 6.1 - Relacionamento entre os módulos

Finalmente, a partir desta representação do sólido, é possível através do módulo GERATRIANG gerar uma triangulação para o sólido, que pode ser, então, visualizada pelo programa Lcgrender [FONS92] ou ser utilizada por algum programa de análise do método de elementos finitos.

Passamos, em seguida, a uma breve descrição de cada um destes módulos.

## 6.2. Módulo CSG2CSPG

Este módulo, como vimos, foi implementado anteriormente por Salim [SALI92]. Contudo, ele é de grande importância para nós porque se relaciona diretamente com o módulo GERATRIANG, que recebe através dele a descrição do sólido a ser triangulado. Sua função é a conversão da árvore CSG construída a partir da linguagem LDS, para um formato onde as primitivas estão representadas na forma Bézier. A finalidade desta conversão é permitir a classificação dos tetraedros da triangulação contra cada primitiva da árvore CSG, tal como descrito na seção 4.1.

Além disso o programa, para realizar esta conversão, necessita que se especifique os tetraedros iniciais da decomposição do espaço, o que é feito ao se especificar a caixa envolvente ao sólido. Uma descrição mais detalhada pode ser vista em [SALI92].

### 6.3. Módulo GERATRIANG

Este módulo, por nós desenvolvido, reúne todos os procedimentos necessários ao processo de construção de uma triangulação adaptativa para o sólido. Ele se relaciona com quatro outros módulos de apoio, dois dos quais (BEZIER e CSG) foram anteriormente implementadas por Salim [SALI92]. Os módulos de apoio são utilizados em tempo de compilação, fornecendo recursos através de várias funções.

A partir da árvore CSG do sólido com primitivas descritas na forma Bézier, produzida pelo programa CSG2SPG, o módulo gera a triangulação adaptativa que aproxima, dentro de uma certa precisão, o sólido.

O programa permite controle razoável da execução pelo usuário, que pode especificar um critério para refinamento e uma tolerância para a aproximação através de um nível máximo de refinamento ou um tamanho para o tetraedro mínimo. O módulo oferece também opções para dois tipos de saída. O usuário pode, por exemplo, decidir se deseja apenas visualizar a triangulação através do módulo Lcgrender ou utilizá-la como malha em programas de resolução do método de elementos finitos. Neste último caso, o formato de saída é um formato comumente utilizado pelo método de elementos finitos, mas pode ser facilmente adaptado para algum outro formato de um programa específico.

Faremos agora uma breve descrição de cada um dos módulos de apoio. O módulos de apoio são, na verdade, bibliotecas C utilizadas, especialmente, pelos módulos CSG2CSPG e GERATRIANG com diversas funções que visam fornecer subsídios para a realização das tarefas pertinentes a cada um. Um módulo de apoio contém tipos, variáveis e funções específicas para finalidades correlatas.

### 6.3.1. Módulo ESTRUTURA

Este módulo é responsável pela definição e manipulação da estrutura de dados que representa a triangulação. Nele se encontram, além da definição da estrutura de dados, os procedimentos para criação, subdivisão e eliminação de tetraedros. Mantém uma relação direta com os módulos Csg e Bezier para manipulação da árvore CSG armazenada na estrutura de dados.

A estrutura de dados é tal como discutida no capítulo 3. O procedimento de subdivisão é implementado através da aplicação das tabelas 3.2 e 3.3.

Foram também construídos procedimentos que fornecem informações genéricas sobre a estrutura, tais como o nível de refinamento, os vértices ou os vizinhos de um tetraedro. Informações adicionais podem ser obtidas no programa fonte "estrutura.c".

### 6.3.2. Módulo CRITERIO

Este módulo é responsável pela avaliação de um tetraedro com respeito a um critério de refinamento. Nele estão contidos os procedimentos que implementam um determinado critério. Ele foi criado com o único objetivo de oferecer uma maior facilidade para definição destes critérios, permitindo que novos procedimentos sejam incluídos sem que o programa tenha que ser modificado.

Um dos procedimentos implementados simplesmente avalia a classificação do tetraedro com relação ao sólido, e é utilizado para construção de triangulações nas quais o objetivo é exclusivamente a aproximação da geometria do sólido. Além deste, foram implementados mais três critérios que avaliam determinadas funções e variações de funções dentro do tetraedro, e servem para simular um critério tipicamente de elementos finitos. Informações adicionais podem ser obtidas no programa fonte "criterio.c".

### 6.3.3. Módulo BEZIER

Este módulo é responsável pela manipulação das primitivas na forma Bézier e, também pelo tratamento da geometria dos tetraedros. No seu interior estão procedimentos para criação, classificação e subdivisão de primitivas Bézier além

de um algoritmo de avaliação das primitivas pelo método de Casteljaou. Estão também presentes procedimentos para criação e subdivisão da geometria dos tetraedros, além de outros procedimentos que fornecem informações genéricas como, por exemplo, tipo dos tetraedros, vértices de um tetraedro, etc. Informações adicionais sobre este módulo podem ser obtidas em [SALI92].

#### 6.3.4. Módulo CSG

Este módulo contém os procedimentos específicos de criação, subdivisão e classificação das árvores CSG representativas dos sólidos. Ele tem estreitas ligações com o módulo BEZIER pelo fato das folhas das árvores serem primitivas Bézier. Ele contém também procedimentos para leitura e gravação das árvores em disco, que permite a interação com outros módulos. Informações adicionais podem ser obtidas em [SALI92].

### 6.4. Conclusão

Toda a implementação foi desenvolvida utilizando a linguagem de programação C (padrão K&R) rodando sob o sistema operacional SUNOS 4.1 (UNIX/BSD), sendo executáveis em estações gráficas Sun 260, 360, SPARC 1+, SPARC 2+.

A implementação foi idealizada de forma a permitir um princípio básico em programação: a abstração de dados. Com isso, os procedimentos implementados não precisam ter conhecimento da estrutura de dados utilizada, permitindo que esta possa ser modificada sem comprometer todo o desenvolvimento já efetuado. Além disso, a utilização de uma estrutura de dados apropriada permitiu uma separação entre topologia e geometria. Desta forma, foi possível construir procedimentos isolados e independentes, facilitando muito a construção e depuração dos programas.

## CAPÍTULO 7

### Avaliações e Considerações Finais

---

#### 7.1. Descrição do Trabalho

O desenvolvimento deste trabalho foi especialmente motivado pela necessidade cada vez maior de ferramentas eficientes e robustas para geração automática de malhas de elementos finitos.

A geração de malhas de elementos finitos tem se baseado nos métodos adaptativos, nos quais uma malha é refinada seletivamente até que uma determinada precisão da solução seja alcançada.

Técnicas baseadas em subdivisão do espaço são robustas para aproximar geometrias arbitrárias e as triangulações, em particular, são interessantes porque aproximam bem geometrias irregulares.

A nossa proposta é um esquema de triangulação adaptativa para aproximação de modelos geométricos tridimensionais descritos por sólidos CSG.

O esquema se baseia em refinamento adaptativo de triangulações onde uma região do espaço que envolve completamente o domínio de interesse é refinada adaptativamente com base em um critério de refinamento definido apropriadamente de acordo com a aplicação.

Nos métodos adaptativos de geração de malhas estes critérios são normalmente definidos com base em estimativas de erros da solução calculadas a nível de cada elemento. Com esta definição de critério é possível adequar uma triangulação às propriedades físicas do problema em consideração.

Para que a triangulação adaptativa aproxime satisfatoriamente a fronteira do modelo, o critério de refinamento deve levar em conta também os erros de aproximação geométrica.

Apresentaremos a seguir uma avaliação teórica e alguns exemplos de utilização do esquema proposto. Em seguida apresentaremos conclusões e algumas sugestões de trabalhos que podem ser desenvolvidos futuramente a partir deste trabalho.

## 7.2. Avaliação do Esquema Proposto

Nesta seção apresentaremos uma avaliação do esquema proposto enquanto ferramenta para geração automática de malhas de elementos finitos. Apresentaremos exemplos e resultados ilustrando a capacidade de adaptação do esquema.

Procuramos inicialmente estabelecer a complexidade do algoritmo através do número de elementos gerados e compará-lo com o esquema apresentado em [RIVA91], no qual se baseia o esquema proposto.

Para ilustrar a capacidade de adaptação do algoritmo, apresentamos exemplos de triangulações obtidas para alguns modelos escolhidos. Analisamos os resultados obtidos para diferentes critérios de refinamento e variando o nível máximo de refinamento. Apresentamos a distribuição de tamanho dos elementos gerados, bem como a distribuição de elementos no interior e na fronteira do sólido.

### 7.2.1. Complexidade do algoritmo

Uma medida para a complexidade do algoritmo pode ser obtida analisando o comportamento do algoritmo em termos da quantidade de elementos gerados em refinamento uniforme, à medida que o nível máximo de refinamento aumenta.

Como o algoritmo proposto parte sempre de uma triangulação CFK inicial com seis tetraedros e utiliza um processo de subdivisão binária para refinamento, a quantidade de elementos gerados em refinamento uniforme é dada por  $6 \times 2^N$ , onde  $N$  é o nível de refinamento. Este número nos dá uma noção da ordem de complexidade do algoritmo.

Contudo, percebemos realmente as vantagens do esquema proposto quando comparamos refinamentos de triangulações CFK com refinamento de triangulações gerais. Comparamos a quantidade de elementos gerados em refinamento uniforme de um tetraedro CFK com os resultados obtidos para um tetraedro retangular, tal



como definido em [RIVA91], isto é, com três das suas faces sobre cada um dos planos ortogonais e a quarta face inclinada à 45° em relação à cada um destes planos.

Nível de Refinamento	Nº Elem. Tetraedro CFK	Tetraedro Retangular	
		Nº de Elem.	$\phi_{\min}$
1	1	1	30.0
2	2	2	16.8
3	4	4	16.8
4	8	8	16.8
5	16	16	13.6
6	32	32	13.6
7	64	92	7.4
8	128	230	7.4
9	256	752	7.4
10	512	2127	7.4
11	1024	6693	7.4
12	2048	20804	7.4

Tab. 7.1 Comparação entre refinamentos uniformes de tetraedros CFK e Retangular.

A tabela 7.1 apresenta os resultados. A primeira coluna indica o nível de refinamento. A segunda coluna fornece a quantidade de elementos gerados pelo esquema proposto a partir de refinamento uniforme de um tetraedro CFK. As terceira e quarta colunas apresentam a quantidade de elementos gerados e o ângulo interno mínimo nas triangulações resultantes do refinamento uniforme do tetraedro retangular (valores transcritos de [RIVA91]). Observando estes resultados, verificamos que, até um certo nível de refinamento, o número de elementos gerados é idêntico nos dois casos. É, entretanto, para níveis altos de refinamento que vemos a vantagem das triangulações CFK. Os números de elementos gerados são bem inferiores aos obtidos nas triangulações gerais, o que pode ser atribuído ao fato de que em triangulações gerais, muitas subdivisões adicionais são necessárias para garantir a conformidade do refinamento resultante, enquanto refinamentos

uniformes de triangulações CFK são sempre conformes, não requerendo subdivisões adicionais para garantia de conformidade.

Além disso, apesar do tetraedro retangular possuir um ângulo interno mínimo maior do que um tetraedro CFK, com o refinamento este ângulo se deteriora até atingir o valor de 7,4 graus, enquanto nas triangulações CFK ele é constante e igual a 15 graus.

### 7.2.2. Exemplos e Resultados

Com o intuito de demonstrar a capacidade do esquema proposto em aproximar geometrias arbitrárias construímos triangulações adaptativas para quatro sólidos diferentes utilizando como critério de refinamento apenas a classificação do tetraedro em relação a fronteira do sólido, ou seja, procurando-se refinar somente os tetraedros que interceptam a fronteira do sólido.

Para cada sólido, verificamos as quantidades de elementos gerados para diferentes níveis máximos de refinamento (precisão da aproximação ou tamanho do tetraedro mínimo). Ilustramos a adaptatividade das triangulações através de uma análise da quantidade de elementos interceptantes a fronteira do sólido em relação a quantidade total de elementos. Apresentamos também o tempo gasto no processo de geração de cada malha (estação Sun SPARC2+).

O primeiro exemplo, apresentado na fig. 7.1 é uma placa fina, com uma das dimensões bem menor do que as outras, e portanto, com uma pequena relação volume/área. Os resultados são apresentados na tabela 7.2, onde a primeira coluna indica o nível máximo de refinamento, a segunda coluna o tamanho do tetraedro mínimo correspondente a este nível, a terceira coluna fornece o número de elementos gerados e a quarta e quinta colunas o número de elementos interceptantes a fronteira do sólido e o percentual deste em relação ao total de elementos. Na última coluna vemos o tempo gasto para geração da triangulação. Analisando estes resultados, podemos observar que, pela pequena relação volume/área do sólido, a maioria dos tetraedros gerados são interceptantes a fronteira do sólido e o comportamento do algoritmo é praticamente uniforme, com uma pequena melhora a medida que o nível de refinamento aumenta.

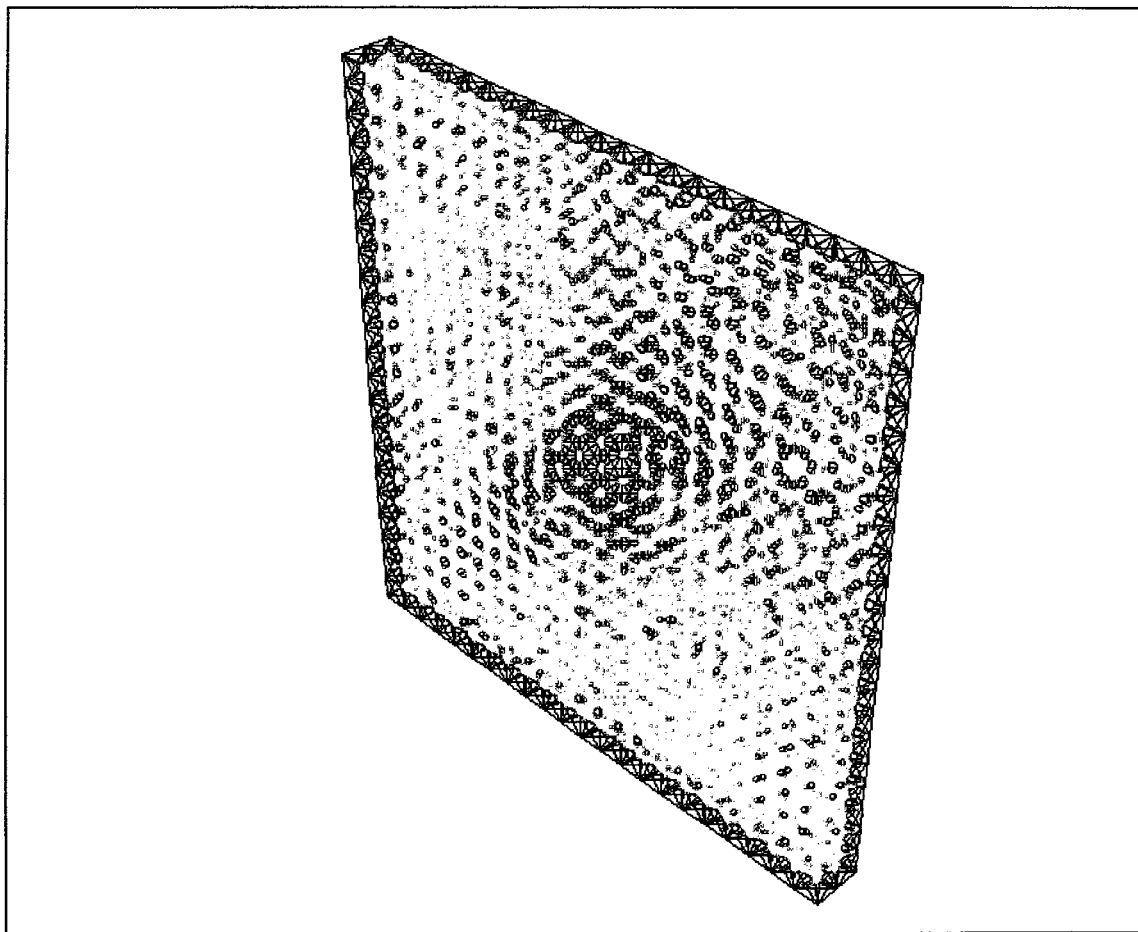


Fig. 7.1 - Triangulação adaptativa de uma placa fina

Nível Max.	$h_{\min}$	Nº Elem.	Nº Elem. Front.	% Elem. Front.	CPU
14	1.0	4048	4048	100	9.6 s
15	0.8	5808	5808	100	13.5 s
16	0.6	11616	10016	86.2	19.6 s
17	0.5	21632	16512	76.3	30.3 s
18	0.4	38144	25296	66.3	48.3 s
19	0.3	54288	41440	76.3	1 m 22.4 s

Tab. 7.2 Resultados numéricos para uma placa fina.

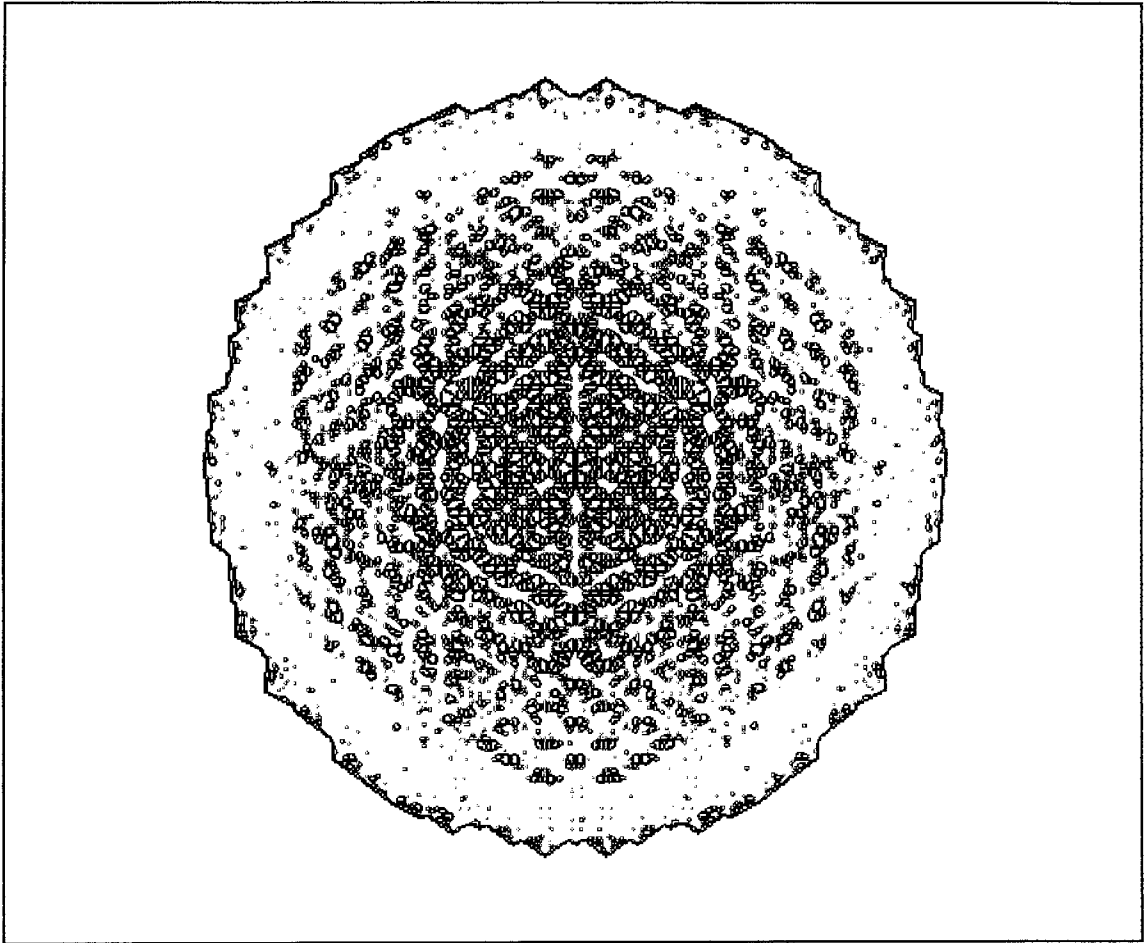


Fig. 7.2 - Triangulação adaptativa de uma esfera

Nível Max.	$h_{\min}$	Nº Elem.	Nº Elem. Front.	% Elem. Front.	CPU
14	1.0	4848	3264	67.3	6.2 s
15	0.8	9264	5328	57.5	10.7 s
16	0.6	15264	8592	56.3	18.4 s
17	0.5	24000	13632	56.8	28.5 s
18	0.4	42480	21936	51.6	50.1 s
19	0.3	68064	34992	51.4	1 m 31.9 s

Tab. 7.3 Resultados numéricos para uma Esfera.

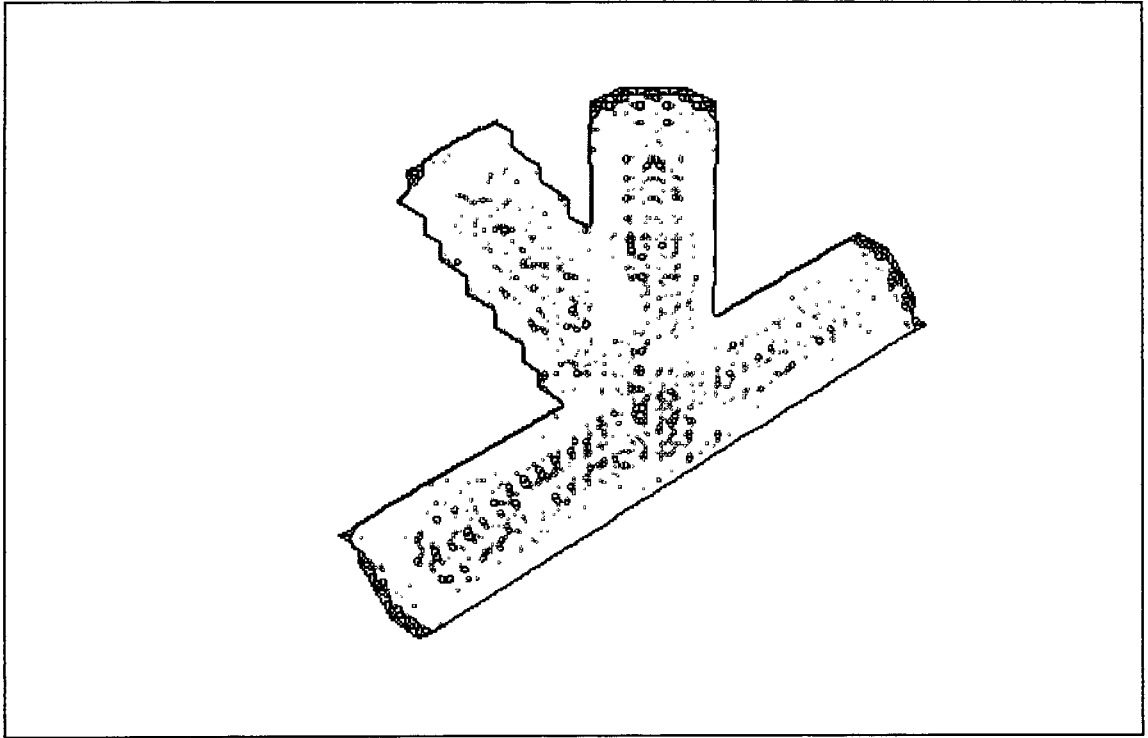


Fig. 7.3 - Triangulação adaptativa de 3 cilindros em união

Nível Max.	$h_{\min}$	Nº Elem.	Nº Elem. Front.	% Elem. Front.	CPU (s)
14	1.0	830	810	98.0	4.1 s
15	0.8	1584	1524	96.0	4.7 s
16	0.6	3024	2538	84.0	7.2 s
17	0.5	5234	4044	77.3	9.7 s
18	0.4	9132	6138	67.2	15.0 s
19	0.3	15250	10164	66.6	23.0 s
20	0.25	24694	16598	67.2	35.0 s
21	0.2	48366	26958	55.7	1 m 4.1 s

Tab. 7.4 - Resultados numéricos para o sólido composto de 3 cilindros.

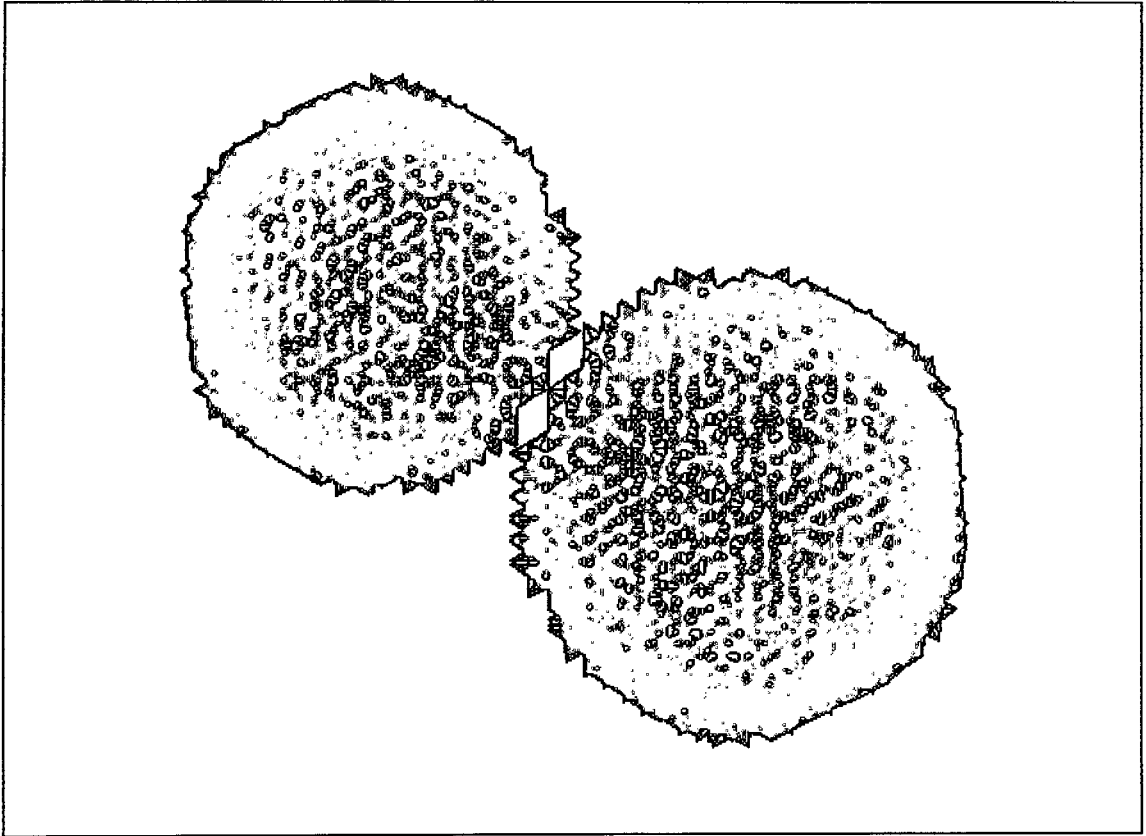


Fig. 7.4 - Triangulação adaptativa de um sólido composto de 2 esferas

Nível Max.	$h_{\min}$	Nº Elem.	Nº Elem. Front.	% Elem. Front.	CPU (s)
14	1.0	2144	1696	79.1	3.6 s
15	0.8	5202	3984	76.6	5.8 s
16	0.6	6592	4304	65.3	9.9 s
17	0.5	10080	6752	67.0	14.0 s
18	0.4	19088	10864	56.9	23.4 s
19	0.3	31008	17392	56.1	37.7 s
20	0.25	46512	27360	58.8	1 m 4.7 s

Tab. 7.5 - Resultados numéricos para o sólido composto de 2 esferas.

No exemplo seguinte (fig. 7.2), o sólido é uma esfera e, portanto, com uma grande relação volume/área. Observando os resultados na tabela 7.3 verificamos um ganho com a adaptatividade praticamente constante. Há uma tendência do número de elementos interceptantes à fronteira do sólido se estabilizar em torno de 50% do total de elementos gerados.

O exemplo da fig. 7.3 é uma união de 3 cilindros e ilustra a potencialidade do esquema em modelar domínios de geometria complexa. Na fig. 7.4, um sólido composto por duas esferas ilustra a capacidade do esquema em modelar domínios com mais de uma componente conexa. A tabela 7.4 e 7.5 mostram os resultados obtidos para estes dois casos. Verificamos, nestes dois casos, a mesma tendência dos exemplos anteriores, ou seja, que a adaptatividade é mais vantajosa para níveis mais altos de refinamento e o número de elementos interceptantes à fronteira do sólido tende para um valor igual a 50% total de elementos gerados.

A fim de ilustrar o uso do algoritmo em casos mais realistas construímos triangulações adaptativas para mais dois modelos utilizando critérios de refinamento seletivos.

Uma questão importante que procuramos analisar é a distribuição do tamanho dos tetraedros na triangulação. Em ambos os modelos utilizou-se uma precisão para a aproximação geométrica diferente da precisão para o critério de refinamento. Analisamos os resultados para quatro níveis máximo de refinamento.

No primeiro modelo utilizamos um critério de refinamento que considera o refinamento local de parte da fronteira do domínio. Apresentamos na fig. 7.5 as triangulações adaptativas para os quatro níveis máximo de refinamento. Em todos os casos, o nível para aproximação da geometria foi constante igual a 11. Nestas figuras percebemos claramente como a aproximação da geometria é melhorada nas regiões críticas do modelo.

Os resultados numéricos para as quatro triangulações são apresentados nas tabelas 7.6 a 7.9. Cada tabela corresponde a um nível máximo de refinamento e apresenta a distribuição de tamanho dos elementos na triangulação. A primeira coluna indica o nível de refinamento do tetraedro e a segunda coluna o tamanho do tetraedro para aquele nível. A terceira coluna fornece o número de elementos naquele nível e a quarta coluna o percentual deste em relação ao número total de elementos na malha.

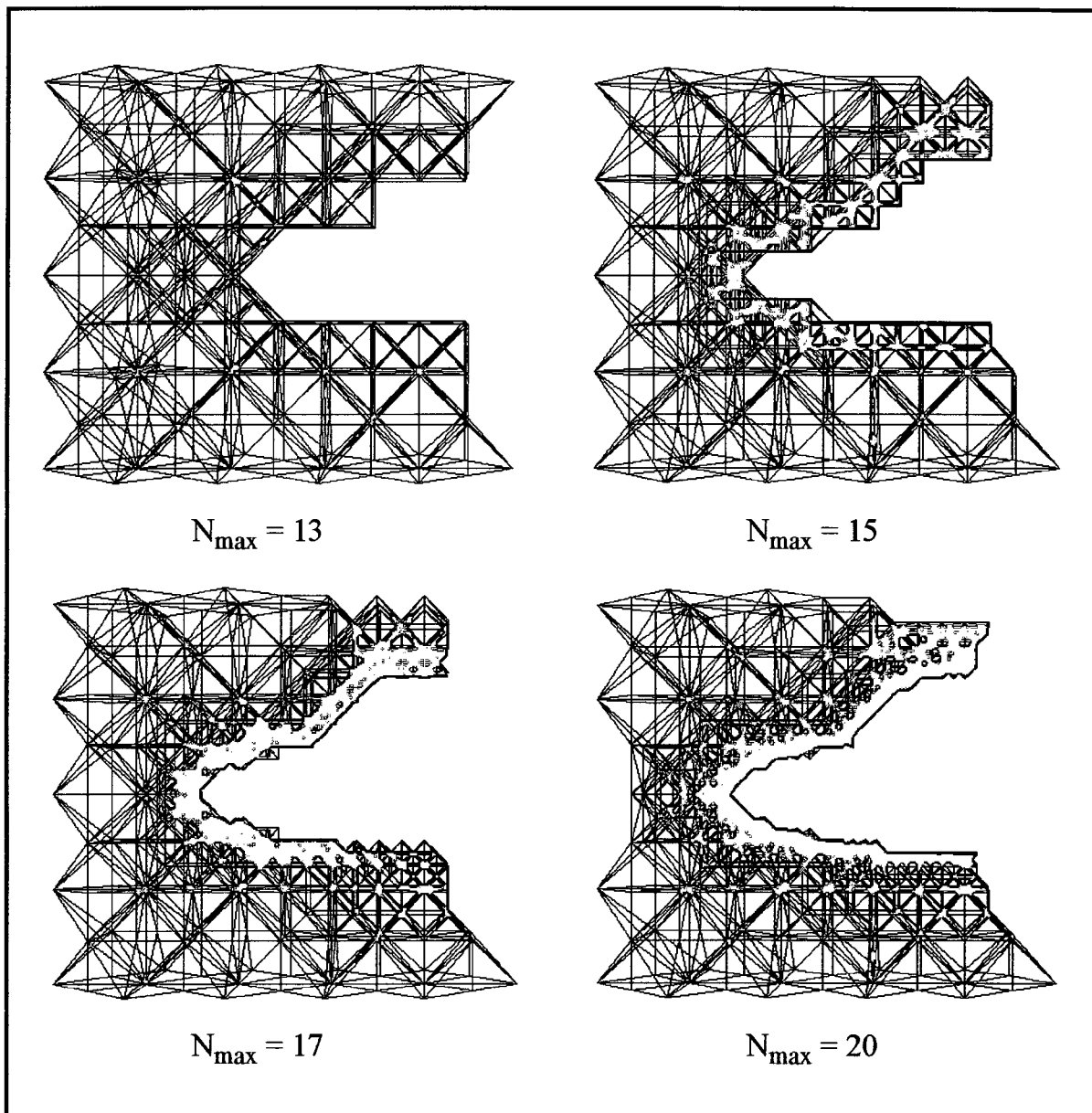


Fig. 7.5 - Triangulações adaptativas para quatro níveis máximos de refinamento

Nível Max. = 13		Nº. Elem. = 708	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
13	1.1	352	49.7
12	1.3	132	18.6
11	2.0	224	31.6

Tab. 7.6 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{max} = 13$



Nível Max. = 15		Nº. Elem. = 1584	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
15	0.8	960	60.6
14	0.9	244	15.4
13	1.1	100	6.3
12	1.3	128	8.1
11	2.0	152	9.6

Tab. 7.7 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{\max} = 15$ 

Nível Max. = 17		Nº. Elem. = 3114	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
17	0.5	1670	53.6
16	0.6	452	14.5
15	0.8	400	12.8
14	0.9	248	8.0
13	1.1	96	3.1
12	1.3	112	3.6
11	2.0	136	4.4

Tab. 7.8 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{\max} = 17$ 

Nível Max. = 20		Nº. Elem. = 10714	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
20	0.25	6036	56.3
19	0.3	1264	11.8
18	0.4	1332	12.4
17	0.5	758	7.1
16	0.6	308	2.9
15	0.8	448	4.2
14	0.9	260	2.4
13	1.1	100	0.9
12	1.3	100	0.9
11	2.0	108	1.0

Tab. 7.9 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{\max} = 20$

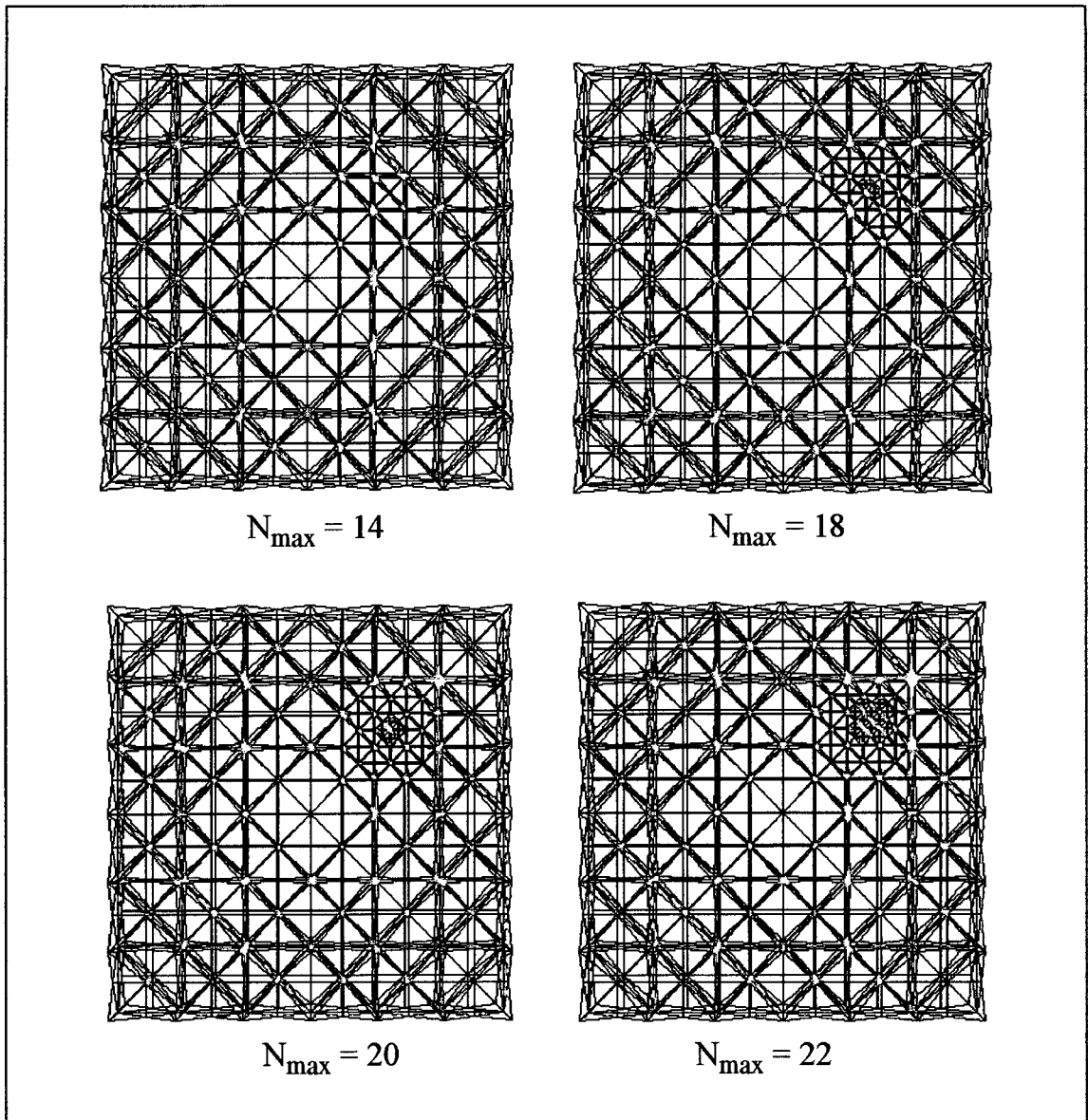


Fig. 7.6 - Triangulações adaptativas para quatro níveis máximo de refinamento

O segundo modelo é uma placa quadrada fina onde o refinamento ficou restrito a um único ponto no interior do domínio e uma precisão para a aproximação da geometria constante igual 2.0. A fig. 7.6 apresenta as triangulações para quatro níveis máximos de refinamento e as tabelas 7.10 a 7.13 os resultados. Analisando a distribuição de tamanhos dos elementos percebemos uma grande concentração de elementos no nível de aproximação geométrica, o que se deve ao fato já mencionado de que neste modelo grande quantidade de elementos interceptam a fronteira do sólido. Quanto aos demais tamanhos de elementos percebemos uma distribuição bem uniforme, demonstrando a suavidade da malha.

Nível Max. = 14		Nº. Elem. = 1180	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
14	0.9	8	0.7
13	1.1	16	1.4
12	1.3	36	3.1
11	2.0	1120	94.9

Tab. 7.10 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 2 e  $N_{\max} = 14$ 

Nível Max. = 18		Nº. Elem. = 1452	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
18	0.4	32	2.2
17	0.5	40	2.8
16	0.6	44	3.0
15	0.8	76	5.2
14	0.9	80	5.5
13	1.1	60	4.1
12	1.3	96	6.6
11	2.0	1024	70.5

Tab. 7.11 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{\max} = 18$ 

Nível Max. = 20		Nº. Elem. = 1528	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
20	0.25	8	0.5
19	0.3	20	1.3
18	0.4	52	3.4
17	0.5	56	3.7
16	0.6	52	3.4
15	0.8	80	5.2
14	0.9	88	5.8
13	1.1	64	4.2
12	1.3	84	5.5
11	2.0	1024	67.0

Tab. 7.12 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{\max} = 20$

Nível Max. = 22		Nº. Elem. = 1888	
Nível Refinamento	h	Nº. Elem. Tam. h	% Elem. Tam. h
22	0.15	24	1.3
21	0.2	52	2.8
20	0.25	56	3.0
19	0.3	52	2.8
18	0.4	144	7.6
17	0.5	136	7.2
16	0.6	100	5.3
15	0.8	84	4.4
14	0.9	80	4.2
13	1.1	52	2.8
12	1.3	84	4.4
11	2.0	1024	54.2

Tab. 7.13 - Distribuição de tamanho de tetraedros para o modelo 1 e  $N_{\max} = 22$

### 7.3. Conclusões

Apresentamos neste trabalho um esquema para construção de triangulações adaptativas de sólidos CSG visando, principalmente, a geração de malhas tridimensionais para o método de elementos finitos.

O esquema se baseia em refinamento adaptativo de triangulações CFK e possui propriedades interessantes do ponto de vista da geração de malhas de elementos finitos. A primeira delas é que o esquema garante a conformidade em refinamentos adaptativos, o que é especialmente importante para o método de elementos finitos. Um outro aspecto importante é que as triangulações produzidas contêm apenas três formatos distintos de tetraedros, garantindo assim uma "boa forma" para os elementos, a qual é geralmente medida através do seu ângulo interno mínimo.

As conclusões deste trabalho são:

a) A triangulação adaptativa fornece um método robusto para aproximação de modelos de geometria arbitrária;

b) A utilização de uma triangulação particular como a triangulação CFK conferiu ao esquema propriedades interessantes tais como a manutenção do ângulo interno mínimo constante para os tetraedros.

c) as modificações introduzidas no procedimento de refinamento básico possibilitaram a utilização de estruturas de dados extremamente simples para representação da triangulação.

d) O esquema proposto simplifica muito a tarefa de gerar uma malha de elementos finitos para um sólido CSG, porque ao mesmo tempo que aproxima a geometria do modelo, adapta a malha aos requisitos do problema específico.

Por estas características, o esquema proposto é apropriado para geração de malhas de elementos finitos e pode ser utilizado como base para construção de uma ferramenta eficiente e robusta de solução do método de elementos finitos.

### **7.3. Sugestões para Futuros Trabalhos**

Acreditamos que o objetivo principal visado no desenvolvimento deste trabalho foi alcançado, ou seja, podemos dispor de uma ferramenta eficiente e robusta para geração automática de malhas para o método de elementos finitos. Contudo, o principal impacto das ferramentas de análise de elementos finitos de um modelo físico ocorrerá quando forem alcançados graus mais elevados de automatização. Neste contexto encaixam-se as ferramentas integradas para análise de elementos finitos.

Embora a meta deve ser automatizar a análise de elementos finitos tanto quanto possível, deve ser enfatizado que estes procedimentos automáticos não devem substituir a criatividade do analista. Ao contrário, os procedimentos fornecerão ferramentas muito mais poderosas que permitem ao projetista investigar, de maneira mais flexível e criativa, idéias de projeto para estabelecer modelos de análise efetivos.

A análise completa de elementos finitos consiste em uma fase que corresponde a criação do modelo, e envolve a especificação do problema e a correspondente geração da geometria, e uma fase seguinte que corresponde à solução de elementos finitos do modelo, e envolve a geração totalmente automática da malha, a solução das equações que descrevem o modelo e a aplicação de melhoramentos à malha.

Um sistema integrado para análise de elementos finitos tipicamente dispõe dos seguintes componentes:

- um modelador geométrico para criar a geometria do componente a ser analisado;
- um pré-processador para gerar uma malha de elementos finitos;
- um processador da solução do modelo de elementos finitos;
- um pos-processador para avaliar a solução obtida.

Um pré-processador para geração eficiente de malha deve ser capaz de receber uma definição do problema baseada na geometria e automaticamente produzir uma discretização válida para o domínio, sem a intervenção do usuário.

O algoritmo proposto neste trabalho visa principalmente ser integrado a um sistema de geração automática de malhas para o método de elementos finitos.

Num sistema deste tipo, o gerador de malhas se insere no contexto dos métodos adaptativos de análise de elementos finitos, no qual o gerador deve ser capaz não só de produzir uma malha inicial para um domínio de interesse, bem como poder melhorar uma malha que não satisfaz aos requisitos de precisão especificados. O gerador de malha deve ser uma ferramenta eficiente já que será requisitado sempre que o erro encontrado após a análise não atender a precisão desejada. Além disso, ele deve interagir com o modelador geométrico para garantir a aproximação geométrica do modelo.

Portanto, nas aplicações integradas são importantes também programas que ajudem o projetista a estabelecer modelos automaticamente. Nesta área, com a ajuda de poderosas estações gráficas, muito progresso tem sido feito, mas muito ainda pode ser feito.

Poderíamos então sugerir como complementação do trabalho desenvolvido:

- a integração do esquema proposto em um sistema automático de resolução do método de elementos finitos.
- a ampliação do esquema proposto visando diversificar as possibilidades de geração de malhas através da inclusão, por exemplo, de procedimentos para desrefinamento de malhas, bem como para tratamento de diferentes materiais.

Além destas, um estudo mais detalhado da questão da aproximação da geometria do modelo pode ser também interessante.

## Referências Bibliográficas

---

- 1.[APOL94]                   Triangulação Adaptativa". Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1994.
- 2.[CAMP91]               Campos, J. A. P., "Geração de Malhas de Elementos Finitos Bidimensionais Baseada em uma Estrutura de Dados Topológica". Dissertação de Mestrado, PUC, 1991.
- 3.[CAVA92]               Cavalcanti, P. R., "Criação e Manutenção de Subdivisões do Espaço". Dissertação de Doutorado, PUC, 1992.
- 4.[CARE83]               Carey, G. F., e Oden, J. T., "Finite Element: A second Course", vol. II, Prentice-Hall, Inc., 1983.
- 5.[DEVL87]               Devloo, P. R., "An H-P Adaptive Finite Element Method for Steady Compressible Flow", Ph. D. Thesis, University of Texas, Austin, 1987.
- 6.[DEVL91]               Devloo, P. R., "A Three-Dimensional Adaptive Finite Element Strategy", Computer & Structures. - Vol.38 - No. 2, pp. 121-130, 1991.
- 7.[ESPE90]               Esperança, C., "Técnicas para Visualização Direta de Modelos CSG", Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1990.
- 8.[FARI88]               Farin, G., "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, a Pratical Guide", Academic Press, 1988.



- 9.[FONS92] Fonseca, A., "LCGRenderer: Um Visualizador de Modelos Baseado em PHIGS", Projeto Final de Curso de Graduação, IM/UFRJ, 1992.
- 10.[GEOR91] George, P. L., "Automatic Mesh Generation - Application to Finite Element Methods". John Wiley & Sons Ltd, Paris, 1991.
- 11.[GUIB85] Guibas, L. e Stolfi, J., "Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams". ACM Trans.Graph. - Vol.4 - No. 2 - 1985.
- 12.[HOFF89] Hoffman, C. M., "Geometric and Solid Modeling: An Introduction", Morgan Kauffman Publishers, 1989.
- 13.[LÖHN92] Löhner, R. e Baum, J., "Adaptive H-Refinement on 3D Unstructured Grids for Transient Problems". International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, pp. 1407-1419, 1992.
- 14.[MOOR90] Moore, D. e Warren, J., "Multidimensional Adaptive Mesh Generation". Rice COMP TR90-106, February, 1990.
- 15.[MOOR91] Moore, D. e Warren, J., "Adaptive Mesh Generation II: Packing Solids". Rice COMP TR90-139, March, 1991.
- 16.[NAMB93] Nambiar, R.V., Valera, R. e Lawrence, K., "An Algorithm for Adaptive Refinement of Triangular Element Meshes". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp 499-509, 1993.
- 17.[NEVE88] Neves, J., "Sistema Iterativo para Mapeamento Baseado na Triangulação dos Pontos do Plano". Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1988.
- 18.[ODEN88] Oden, J.T., "Progress in Adaptive Methods in Computational Fluid Dynamics". Proceedings of the Workshop on Adaptive

Computational Methods for Partial Differential Equations, Rensselaer Polytechnic Institute, 1988.

- 19.[ODEN90] Oden, J.T. et all., "Recent Results on Smart Algorithms and Adaptive Methods for Two and Three-Dimensional Problems in Computational Fluid Mechanics". Computers & Structures, Vol. 35, Nº 4 pp 381-396, 1990.
- 20.[MORT85] Mortenson, M., "Geometric Modeling". John Wiley & Sons, 1985.
- 21.[MIRA89] Miranda, J. e Tavares, G., "Métodos Simpliciais em Computação Gráfica", 17º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1989.
- 22.[MANT90] Mantyla, M., "An Introduction to Solid Modeling". Computer Science Press, 1990.
- 23.[MANT84] Mantyla, M., "A Note on the Modeling Space of Euler Operators". Computer Vision, Graphics and Image Processing, Nº 26, 1984.
- 24.[MANT82] Mantyla, M. e Sulonen, R., "A GWS Modeler with Euler Operators". IEEE CG&A, vol. 2, Nº 7, 1982.
- 25.[PERS93] Persiano, R., Comba, J. e Barbalho, V., "An Adaptive Triangulation Refinement Scheme and Construction". Anais do VI Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI) 1993.
- 26.[PERS94] Persiano, R. e Apolinário, A. "A Boundary Evaluation of CSG Models by Adaptive Triangulation", 1994.
- 27.[REQU80] Requicha, A. A. G., "Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems", Computing Surveys, vol 12, no. 4, pp 437-464, 1980.

- 28.[REQU82] Requicha, A. A. G., "Solid Modeling: A Historical Summary and Contemporary Assessment", IEEE CG&A, vol. 2, no. 2, 1980.
- 29.[REQU83] Requicha, A. A. G., "Solid Modeling: Current Status and Research Directions", IEEE CG&A, vol. 3, no. 7, 1983.
- 30.[RIBE91] Ribeiro L. F. B., "Estratégia H-P de Refinamento para o Método de Elementos Finitos". Tese de doutorado, UFRJ, 1991
- 31.[RIVA91] Rivara, M. C., "Local Modification of Meshes for Adaptive and/or Multigrid Finite-Element Methods". Journal of Computational and Applied Mathematics, No. 36, pp. 79-89, 1991.
- 32.[RIVA92] Rivara, M. C. e Levin, C., "A 3D Refinement Algorithm Suitable for Adaptive and Multi-Grid Techniques". Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 8, pp. 281-290, 1992.
- 33.[SALI92] Salim, M., "Aproximação Linear por Partes de Sólidos CSG através de Subdivisão Simplicial". Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, 1992.
- 34.[SCHR88] Schroeder, W. J., "Geometric Triangulations with Application to Automatic Mesh Generation". Proceedings of the Workshop on Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations, Rensselaer Polytechnic Institute, 1988.
- 35.[SHEP93] Shephard, M.S., "Automatic Generation of Finite Element Models". Capítulo do livro "Solving Large-Scale Problems in Mechanics, Edited by Papadrakakis, John Wiley & Sons Ltd, 1993.

- 36.[TILO84] Tilove, R. B., "A Null-Object Detection Algorithm for Constructive Solid Geometry", *Communications of the ACM*, vol. 27, no. 7, pp. 684-694, 1984.
- 37.[WEAT93] Weatherill, N. P. e Morgan, K., "Recent Developments in Computational Fluid Dynamics", *Notas de curso aplicado na PROPESA, São José dos Campos, SP*, 1993.