

# Relaxação Lagrangeana e Subgradientes com Dilatação de Espaço Aplicados a um Problema de Grande Porte

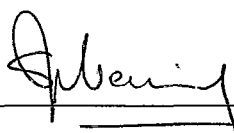
Sandra Isabel Marques Rodrigues

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovado por :



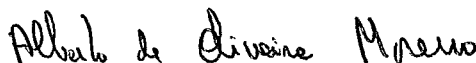
Paulo Roberto Oliveira, Dr. Ing.  
(Presidente)



Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.



Cláudio Thomaz Bornstein, Dr. Rer. Nat.



Alberto de Oliveira Moreno, M.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

Março de 1994

RODRIGUES, SANDRA ISABEL MARQUES

Relaxação Lagrangeana e Subgradientes com Dilatação de Espaço Aplicados a um Problema de Grande Porte [Rio de Janeiro] 1993.

IX, 75 p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1993)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1 – Programação Linear Inteira

2 – Relaxação Lagrangeana

3 – Subgradientes

4 – Planejamento de Transmissão Digital

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série).

*Aos meus pais Fernando e Odete.*  
*Ao meu irmão Luiz.*  
*Aos meus amigos Natália e Afonso.*

## AGRADECIMENTOS

Várias pessoas contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. A elas serei eternamente grata pela conquista desta etapa importante da minha vida. Em especial, aos meus pais pelo apoio que sempre me deram em todos os momentos; ao prof. Paulo Roberto Oliveira pela sua constante atenção, disponibilidade, paciência, orientação e participação; aos eng.<sup>os</sup> Alberto de Oliveira Moreno e Celso Alves dos Santos, e ao prof. Nelson Maculan por terem sido sempre tão prestativos e pelas inúmeras discussões e sugestões; aos profs. Clóvis Gonzaga, Cláudio Bornstein, Clécio Thomaz e Wamberto Weber pelo incentivo; aos colegas de projeto Erivaldo Vidal, Lucídio Formiga e Plácido Pinheiro pelo ambiente de trabalho agradável e descontraído; a Lucídio Formiga, Manoel Campelo, Ricardo Arantes, Marcelo Aragão, Odinaldo e Hsing pelo grande auxílio na parte computacional; a Gudélia e José Arica pelos sábios ensinamentos; a Sérgio, Lilian, Ivan e Paulinho pelo apoio incontestável nos momentos finais; às secretárias Cláudia, Ana Paula e Rose, e aos responsáveis pelo laboratório, Maurício, Edu, Júlio e Adilson, pela sua simpatia; ao CNPq, CAPES e FAPERJ, pelas bolsas de estudo concedidas; aos meus tios, Helena e Soares, por me acolherem com carinho em seu lar.

Não poderia deixar de agradecer também aos meus amigos a quem devo dias felizes de um convívio intenso e ajuda mútua. O “ Rio ” são vocês e sem vocês nada teria sido possível. Muito obrigada ao meu “ nego querido ”, Assis, pelo seu amor e dedicação; a Sonia e Rafa†, Natália e Zezinho, Neiva e Eduardo, Arlene e Marcílio, Sueli e Luís, Chris e Ricardo, Ivan e Lise, Paulinho, Afonso, Alkimin, Lucídio, Manoel, Erivaldo, Plácido, Sandra Regina, Lina, Lilian e Denise pelo grande aprendizado nesta nossa vida “ republicana ”; a Celso Alves por ser um amigo muito especial.

---

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## **Relaxação Lagrangeana e Subgradientes com Dilatação de Espaço Aplicados a um Problema de Grande Porte**

Sandra Isabel Marques Rodrigues

Dezembro, 1993

Orientador : Paulo Roberto Oliveira

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Apresentamos um algoritmo para a solução de um problema linear inteiro misto de grande porte que otimiza a compra de equipamentos de uma companhia telefônica.

Utilizamos Relaxação Lagrangeana a fim de evitar restrições “difíceis” (as de acoplamento) e, em seguida, estudamos alguns métodos para a resolução do problema dual. Entre eles, o método de subgradientes com dilatação de espaço na direção da diferença de dois subgradientes sucessivos (técnicas de Shor). Este algoritmo é implementado e testado para alguns exemplos hipotéticos (três e quatro estações telefônicas) com até 254 variáveis (42 inteiras) e 256 restrições. O salto de dualidade é significativo e os resultados são apenas satisfatórios, podendo servir de ponto de partida para métodos heurísticos que melhorem a solução obtida (tipo “Branch-and-Bound”).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## **Lagrangian Relaxation and Subgradients with Space Dilatation Applied to a Large Problem**

Sandra Isabel Marques Rodrigues

December, 1993

Thesis Supervisor : Paulo Roberto Oliveira  
Department : Computing and Systems Engineering

An algorithm to solve a large mixed linear integer problem which optimizes the purchase of equipments in a telephone company is presented.

First, the Lagrangian Relaxation is used in order to avoid " difficult " constraints (coupled constraints). Second, several methods for solving the dual problem are studied. Among these methods, the subgradient method with space dilatation in the direction of the difference between two successive subgradients is presented (Shor techniques).

The afore mentioned method is implemented and tested against several hypothetical examples. The duality gap is significant and the numerical results show the effectiveness of the presented algorithm. Even in cases where the numerical results are not good enough, they still be used as a starting point for heuristic methods, e.g. Branch-and-Bound.

# FIGURAS

2.1	Sistema de telecomunicações . . . . .	5
2.2	Multiplexação . . . . .	6
2.3	Frente de transmissão de 34Mbit/seg - ELO 34 . . . . .	7
2.4	Frente de transmissão de 140Mbit/seg - ELO 140 . . . . .	8
2.5	Centrais digitais . . . . .	10
2.6	Carona . . . . .	11
3.1	Rede hipotética com 3 estações . . . . .	13
3.2	Rede hipotética com 4 estações . . . . .	14
4.1	Subgradiente - direção de descida com relação a $d(\Lambda^*, \Lambda)$ . . . . .	36
4.2	Efeito do operador de dilatação . . . . .	40
4.3	Direção da diferença de dois subgradientes sucessivos . . . . .	42
4.4	Exemplo . . . . .	44

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DA TEORIA DE SISTEMAS URBANOS DE TELECOMUNICAÇÕES</b>	<b>3</b>
2.1	Definições . . . . .	3
2.2	Uma Visão Simplificada de um Sistema de Telecomunicações . . . . .	4
<b>3</b>	<b>O MODELO</b>	<b>12</b>
3.1	Descrição do Problema . . . . .	12
3.2	Variáveis do Modelo . . . . .	16
3.3	Restrições do modelo . . . . .	17
3.3.1	Atendimento à demanda . . . . .	17
3.3.2	Conservação de Fluxo . . . . .	17
3.3.3	Frentes de Transmissão . . . . .	18
3.3.4	Capacidade dos Nós . . . . .	19
3.3.5	Capacidade dos Arcos . . . . .	19
3.3.6	Relação Entre as Capacidades dos Nós . . . . .	20
3.3.7	Condições de Integralidade e Não-Negatividade . . . . .	20
3.3.8	Função Objetivo . . . . .	20
3.4	Estrutura do modelo . . . . .	21
3.5	Validação do Modelo . . . . .	23



---

<b>4</b>	<b>ALGUNS MÉTODOS BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO DO LAGRANGEANO RELAXADO</b>	<b>24</b>
4.1	Relaxação e Decomposição Lagrangeana . . . . .	25
4.2	Propriedades da Função Dual . . . . .	28
4.3	Condições de otimalidade do Primal . . . . .	32
4.4	Algoritmo dos Planos Secantes e Decomposição de Dantzig-Wolfe . . . . .	32
4.4.1	Propriedades do Problema Mestre . . . . .	33
4.4.2	Algoritmo de Decomposição de Dantzig-Wolfe . . . . .	34
4.5	Subgradientes com Dilatação do Espaço . . . . .	35
4.5.1	Algoritmo Conceitual de Subgradientes . . . . .	35
4.5.2	Método de Subgradientes com Dilatação do Espaço . . . . .	38
4.5.3	Metodologia de Subgradientes com Dilatação do Espaço na Direção da Diferença de Dois Subgradientes Sucessivos: Aplicação a $(PD)$ . . . . .	42
4.6	Métodos de Feixes . . . . .	48
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS</b>	<b>50</b>
5.1	O Programa . . . . .	50
5.2	Testes . . . . .	55
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E EXTENSÕES</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O problema abordado neste trabalho surgiu no Departamento de Planejamento da Companhia Telefônica do Rio de Janeiro, a TELERJ, e trata da otimização da rede de transmissão digital em vigor nesta empresa.

No Rio de Janeiro, existem cerca de 50 estações telefônicas que se comunicam entre si. Cada comunicação entre duas estações é atendida por sistemas de 2Mbit/s. Cada vez que a demanda aumenta consideravelmente, os meios de transmissão existentes se tornam insuficientes para efetuar o roteamento, sendo necessária a aquisição de novos cabos (de fibras óticas) e equipamentos. Além disto, não há ligação direta entre todos os pares de estações, o que faz com que os sinais de transmissão possam percorrer longos caminhos até chegar às estações destino. Esse roteamento é feito apenas em função das folgas existentes nos cabos e equipamentos das estações envolvidas (origem e destino) e de cada estação intermediária, não levando em consideração caminhos otimizados.

Vê-se, portanto, que nem o roteamento de sistemas, e conseqüentemente, nem a compra de cabos e equipamentos são feitos de maneira otimizada. Consideram-se tão somente *critérios de planejamento*, os quais não utilizam qualquer método otimizador, a não ser a própria *intuição* dos planejadores.

Isto levou à formulação de um modelo matemático, que está apresentado com detalhes em [MVS<sup>+</sup>92] e [Vid92], e gerou um problema bastante complexo de **programação linear inteira mista** de grande porte.

Apresentamos algumas metodologias de solução para o problema acima mencionado e, em seguida, escolhemos um dos métodos apresentados para propor um algo-

ritmo de solução. Ao final, são feitas comparações computacionais entre os resultados obtidos com o algoritmo proposto e os obtidos através de “softwares” comerciais, mostrados em [Vid92]. Observamos também que em [OPRC92] [OPC93] são desenvolvidos métodos de feixes, apenas abordados em nosso trabalho.

# Capítulo 2

## ELEMENTOS DA TEORIA DE SISTEMAS URBANOS DE TELECOMUNICAÇÕES

Este capítulo é perfeitamente dispensável àqueles leitores que não se interessarem por entender a terminologia específica da área de telecomunicações. Por outro lado, àqueles que desejam uma compreensão mais detalhada, recomenda-se, além deste texto, a leitura de [MVS<sup>+</sup>92] e [Vid92].

### 2.1 Definições

São dadas aqui algumas definições técnicas que ajudam a entender a seção a seguir. Cabe ressaltar que houve a preocupação de se enfatizar apenas os aspectos relevantes para a compreensão do problema.

**Sinal:** Fenômeno ou fato físico cuja variação perceptível pode representar informação.

**Sinal Analógico:** Sinal contínuo no tempo e cuja variação é análoga à do fenômeno observado.

**Sinal Digital:** Sinal condicionado a ter uma característica descontínua no tempo podendo assumir apenas um conjunto de valores discretos.

**Multiplexação:** Emprego de um canal comum para formar diversos canais de comunicação, seja através da divisão da faixa de frequências transmitidas por este canal comum em faixas menores, as quais se constituem cada uma em um canal de transmissão distinto (Multiplex por divisão de frequências), seja através da utilização deste canal comum para constituir, por distribuição no tempo, diferentes canais de transmissão intermitentes (Multiplex por divisão em tempo).

**Central Telefônica:** Conjunto de equipamentos de comutação destinados ao encaminhamento e/ou estabelecimento de chamadas telefônicas.

**Central Analógica:** Central telefônica na qual os sinais são processados em sua forma analógica, sendo os troncos destinados à sua interligação com a rede compostos de circuitos analógicos individuais.

**Central Digital:** Central telefônica na qual os sinais são processados em sua forma digital, sendo os troncos destinados à sua interligação com a rede compostos de grupos de 30 circuitos digitais.

**Rede Externa:** Conjunto de cabos destinados a interligar os assinantes às estações telefônicas.

**Entroncamento:** Grupo de pares de um ou mais cabos, ou de circuitos de transmissão por multiplexação, que interliga duas estações.

**Fibra Ótica:** Meio de transmissão no qual podem trafegar sinais digitais multiplexados no tempo e convertidos em feixes luminosos (sinais óticos).

**Fibra Multimodo:** Fibra ótica onde os feixes luminosos se propagam de diversos modos. Devido a este espalhamento dos feixes luminosos, a perda neste tipo de fibra é superior à verificada no tipo monomodo.

**Fibra Monomodo:** Fibra ótica na qual os feixes luminosos se propagam em único modo.

## 2.2 Uma Visão Simplificada de um Sistema de Telecomunicações

A figura 2.1 representa, de forma simplificada, um sistema de telecomunicações.

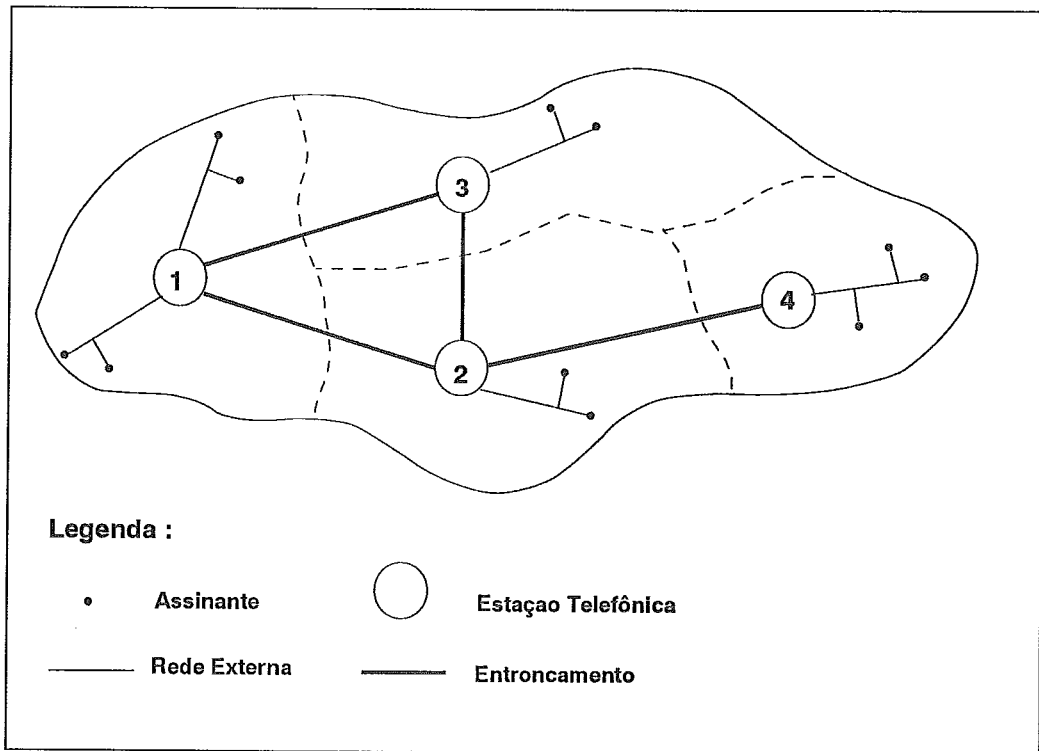


Figura 2.1: Sistema de telecomunicações

Quando um assinante A, interligado a uma central telefônica através da rede externa, efetua uma ligação para um assinante B, suas palavras são imediatamente transformadas de sinal acústico de voz para **sinais elétricos analógicos**. Estes sinais são transportados, através da **rede externa**, até a central telefônica, de onde serão encaminhados para o destino solicitado. O assinante chamado (B) pode estar conectado à mesma central do assinante chamador ou a qualquer outra central da rede, na mesma **estação telefônica** ou em uma estação distinta.

No caso em que o chamador e chamado se encontram conectados a centrais diferentes em estações distintas, a chamada telefônica deve ser encaminhada através dos cabos de **entroncamento** entre as duas estações. Assim, na figura 2.1, o entroncamento entre as estações 1 e 2 deve cursar o tráfego originado pelos assinantes de todas as centrais existentes na estação 1 e direcionado às centrais da estação 2 e vice-versa.

No passado, o entroncamento entre as estações era efetuado através de cabos de pares metálicos, utilizando-se um par de fios para cada ligação efetuada. Com o advento da tecnologia digital, passou a ser possível o agrupamento (**multiplexação**) de 30 ligações simultâneas em um único par de fios, através da utilização de um equipamento multiplex PCM (Pulse Code Modulation), conforme a figura 2.2.

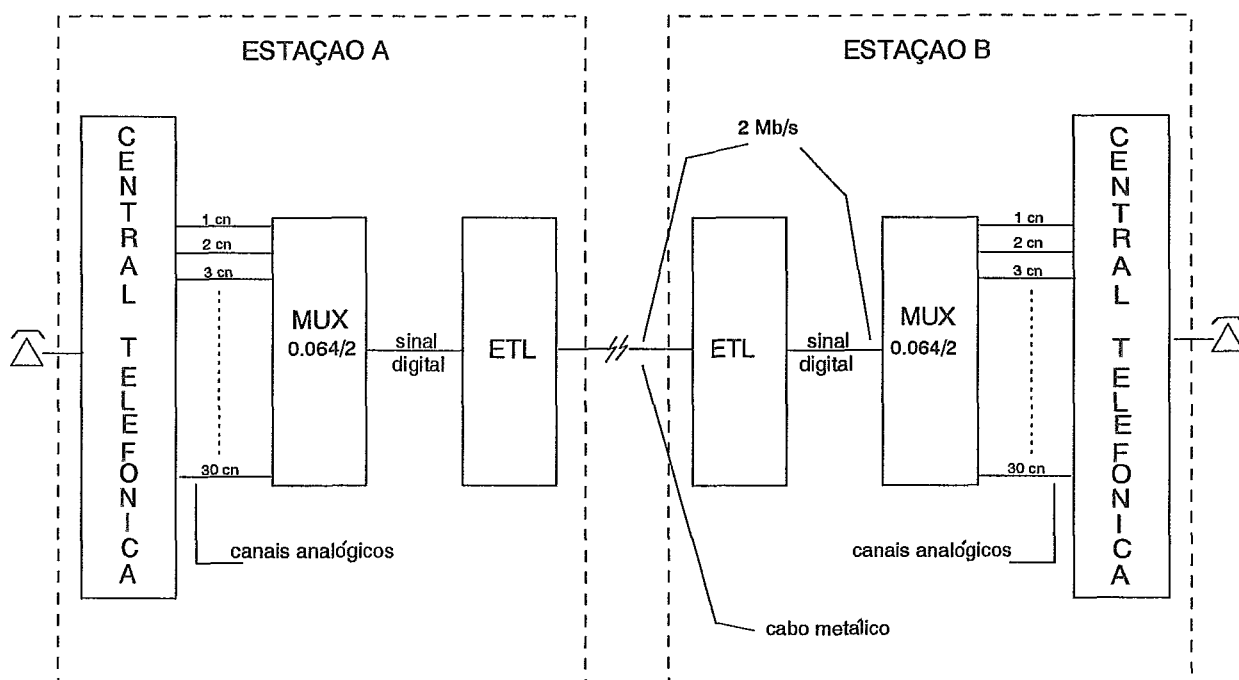


Figura 2.2: Multiplexação

Atualmente, as técnicas de multiplexação digital em altas velocidades, aliadas à utilização de cabos de **fibras óticas** em substituição aos cabos de fios de cobre, permitem que se agrupem milhares de canais (ligações telefônicas) em um único par de fibras. As figuras 2.3 e 2.4 ilustram a configuração de equipamentos de transmissão instalados nas estações telefônicas e destinados a efetuar a multiplexação e a transmissão do sinal, em meio ótico. As fibras óticas podem ser **multimodo** ou **monomodo** dependendo do modo de propagação dos feixes luminosos através das mesmas. As fibras multimodo apresentam maior perda quando comparadas com as do tipo monomodo tendo, por isto, sua utilização restrita a algumas situações específicas.

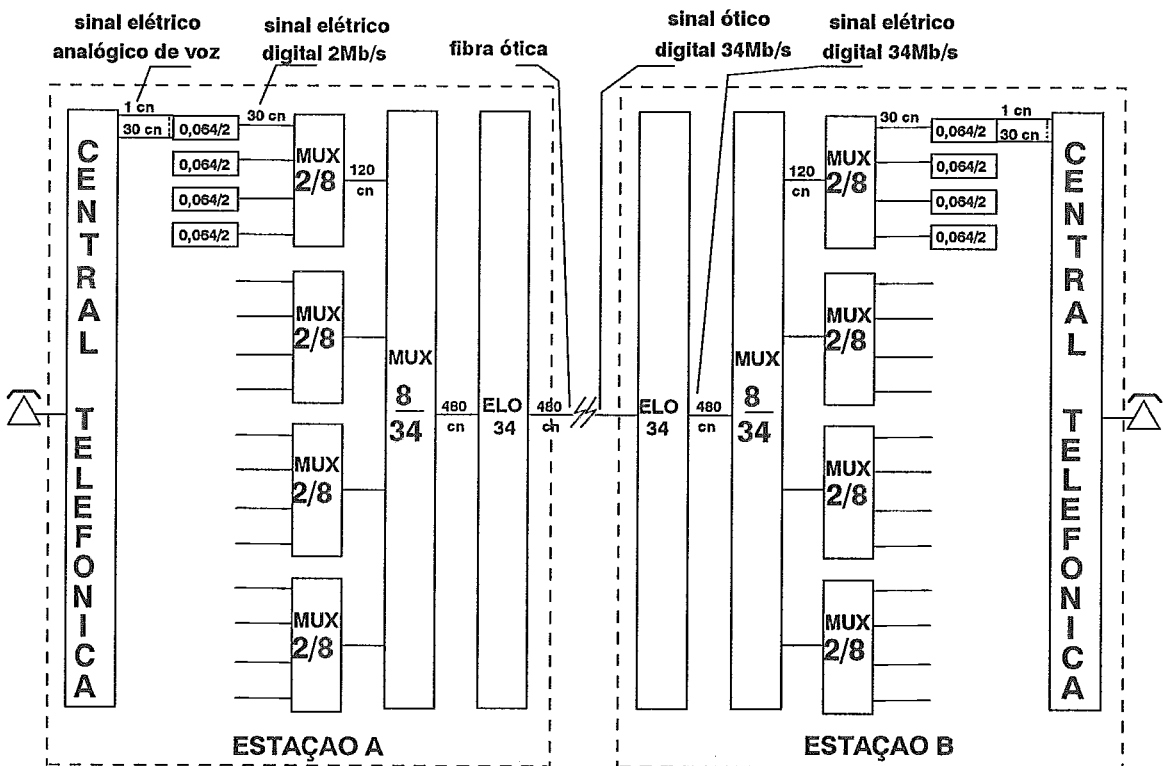


Figura 2.3: Frente de transmissão de 34Mbit/seg - ELO 34

Na figura 2.3, 30 canais analógicos, provenientes da central telefônica, são agrupados em um sinal elétrico digital de 2 Mbit/seg através do equipamento MUX 0,064/2<sup>1</sup>. Uma nova fase de multiplexação agrupa as saídas de quatro MUX 0,064/2 e as transforma, através do equipamento MUX 2/8, em um sinal digital com velocidade de 8 Mbit/seg.

<sup>1</sup>Por ser um equipamento que não afeta o roteamento de sistemas na rede digital, o MUX 0,064/2 não é considerado no modelo matemático apresentado no próximo capítulo.



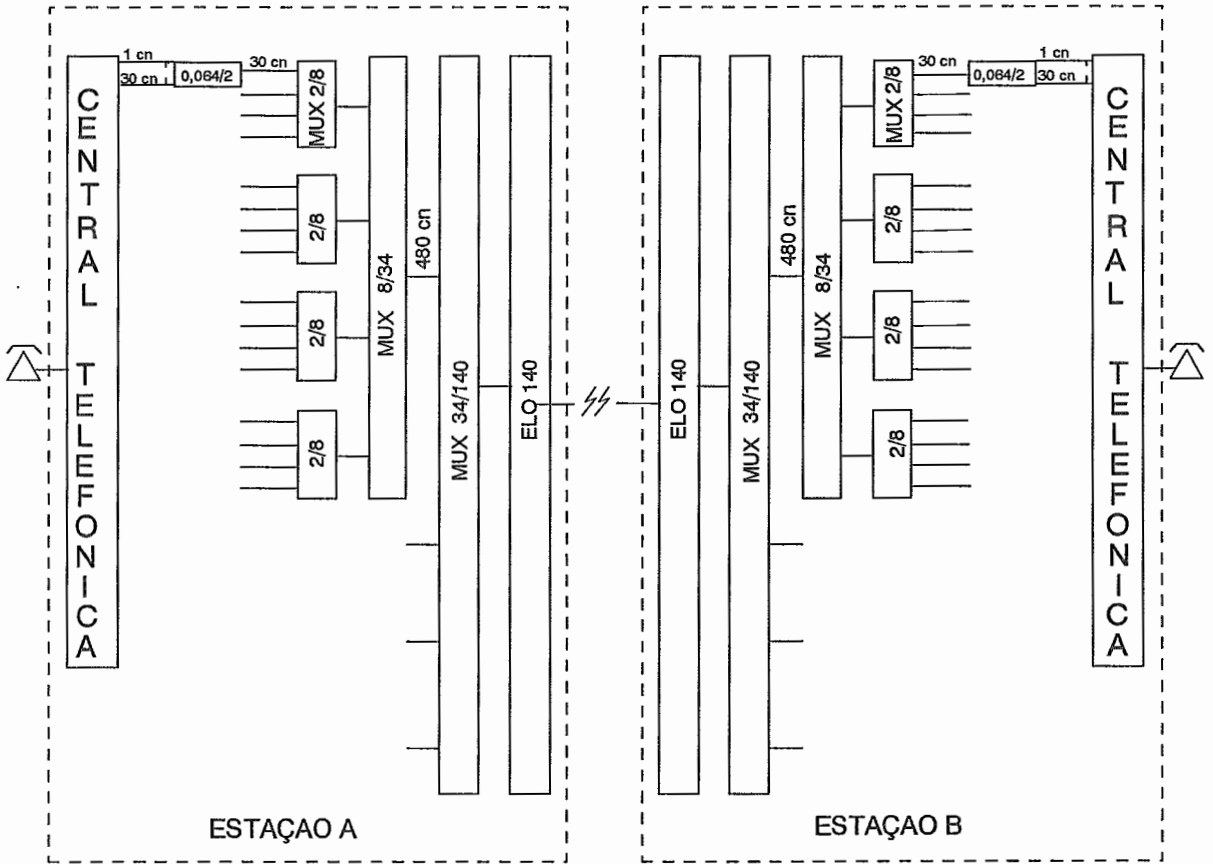


Figura 2.4: Frente de transmissão de 140Mbit/seg - ELO 140

De forma análoga, 4 feixes de 8 Mbit/seg são multiplexados em um sinal de 34 Mbit/seg através do equipamento MUX 8/34. Este sinal elétrico contendo, agora, informação de 480 canais de voz é transformado em sinal ótico pelo equipamento ELO 34 e é transmitido através de um par de fibras óticas até a central destino, onde o processo inverso (demultiplexação) permitirá que se separem todos os canais de voz iniciais. A este conjunto de equipamentos rigidamente associados em ambas as estações denominaremos de **frente de transmissão**.

Deve-se ressaltar que as frentes de transmissão entre duas estações são utilizadas para a interligação de todas as centrais que estejam abrigadas nas mesmas.

A figura 2.4 descreve um processo análogo ao anterior, obtendo-se, entretanto, um sinal com velocidade de 140 Mbit/seg. Consegue-se isto ao agrupar as saídas de 4 MUX 8/34 e transformá-las, através do equipamento MUX 34/140, num sinal digital de 140 Mbit/seg. Utiliza-se, também nesta configuração, apenas um par de fibras óticas para a transmissão do sinal.

Cada fase de multiplexação eleva a hierarquia digital do sinal de entrada. Assim, podemos dizer que a figura 2.3 representa a obtenção de um sinal de 3ª hierarquia (34 Mbit/seg) uma vez que são necessárias 3 fases de multiplexação. A figura 2.4 apresenta uma frente de 4ª hierarquia.

Quando as centrais de comutação envolvidas são digitais, a 1ª fase de multiplexação torna-se desnecessária uma vez que o sinal à saída da central já traz a informação de voz a 2 Mbit/seg, ou seja, a 1ª fase de multiplexação se dá internamente à central. A figura 2.5 ilustra uma frente de 3ª hierarquia interligando centrais digitais.

Dois assinantes A e B, conectados a centrais digitais diferentes, em estações diferentes, podem se comunicar mesmo que não haja frente direta entre suas estações. O atendimento é realizado através de um processo de *carona*, o qual utiliza uma estação C que possui frente com A e com B. Na figura 2.6 este processo é ilustrado entre uma frente de 34 Mbit/seg e outra de 140 Mbit/seg à velocidade de 34Mbit/s.

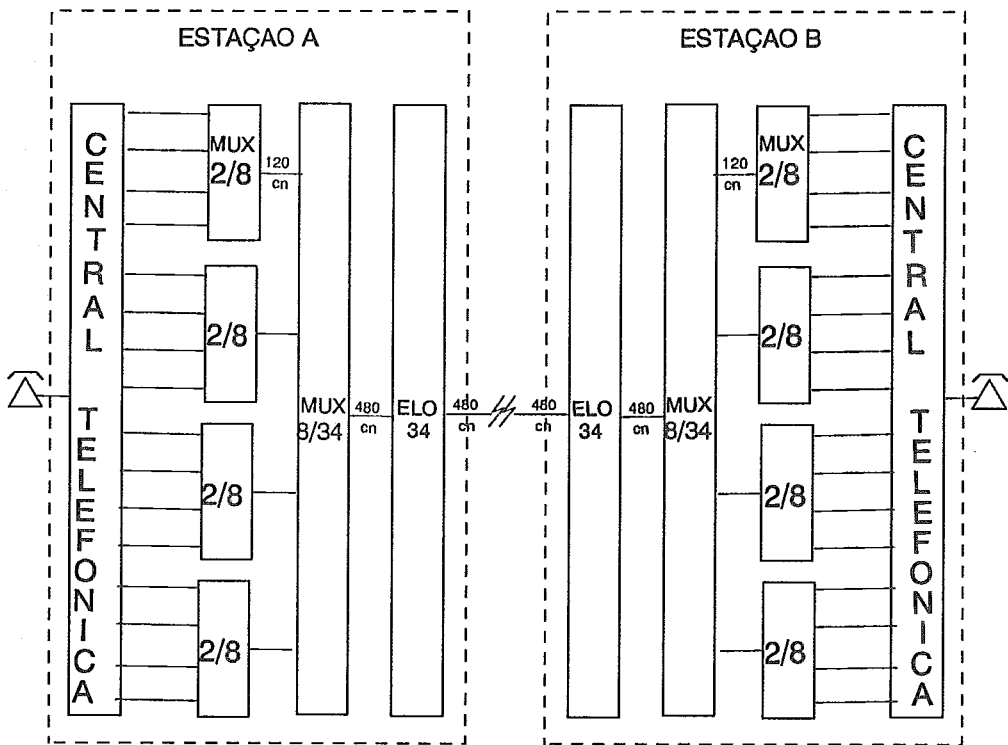


Figura 2.5: Centrais digitais

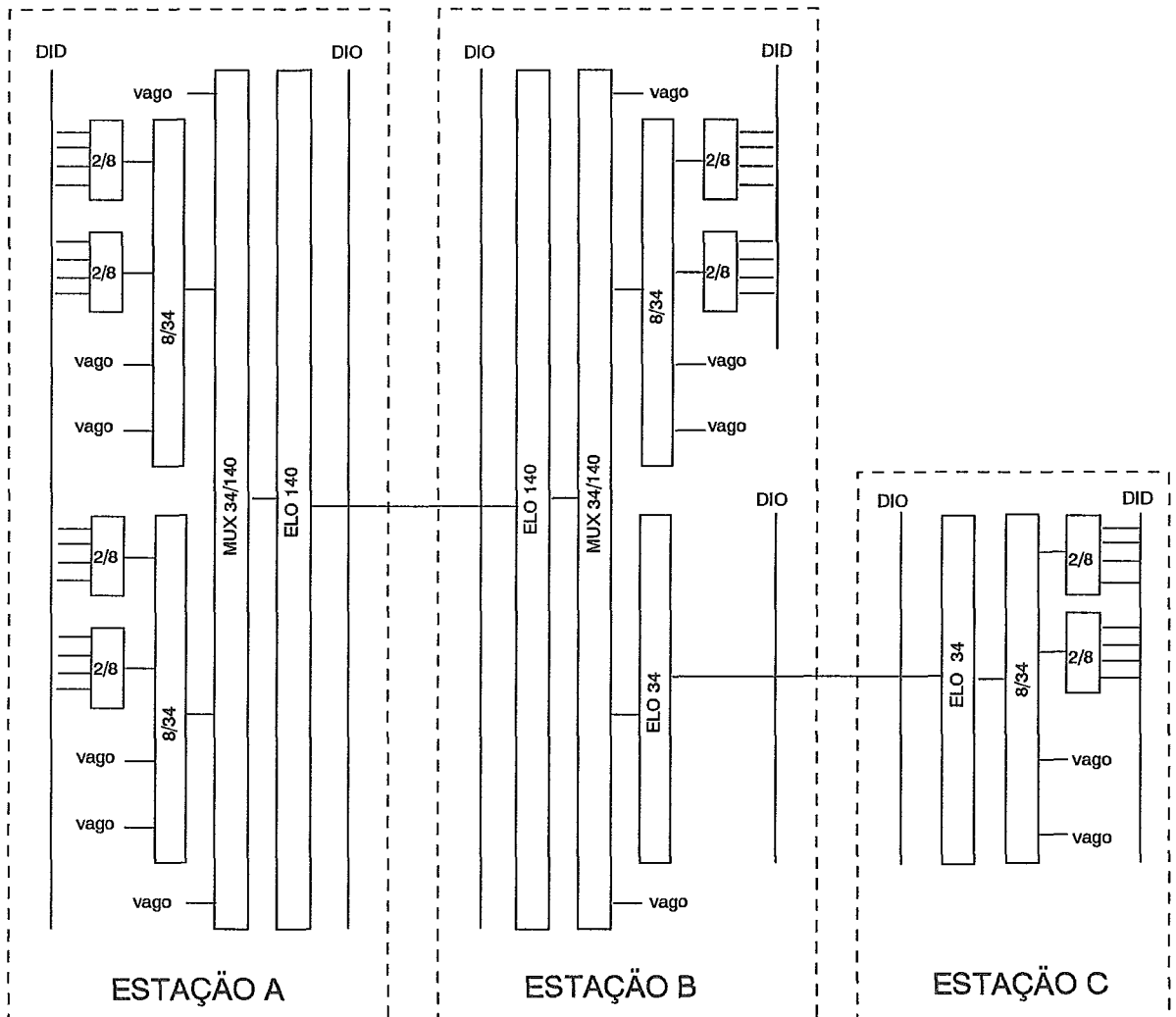


Figura 2.6: Carona

# Capítulo 3

## O MODELO

As seções a seguir apresentam brevemente o modelo, os detalhes podendo ser vistos em [MVS<sup>+</sup>92] e [Vid92].

### 3.1 Descrição do Problema

De acordo com [MVS<sup>+</sup>92] e [Vid92], a estrutura da rede de transmissão digital de uma cidade pode ser representada através de um grafo com arcos orientados.

Nas figuras 3.1 e 3.2 estão representadas as redes de transmissão digital de duas pequenas cidades hipotéticas, com três e quatro estações telefônicas, respectivamente. Através da figura 3.1 pode-se identificar as estações telefônicas, a rede externa, ligando as estações entre si através de cabos de fibras óticas, os equipamentos e os distribuidores (tanto os digitais como os óticos).

Pelos arcos do grafo circula um fluxo de sinais orientados a uma certa velocidade (sistemas de 2Mbit/s), cuja finalidade é atender a demanda de chamadas telefônicas entre as estações.

A notação das figuras é explicada em seguida, juntamente com alguns critérios considerados na modelagem.

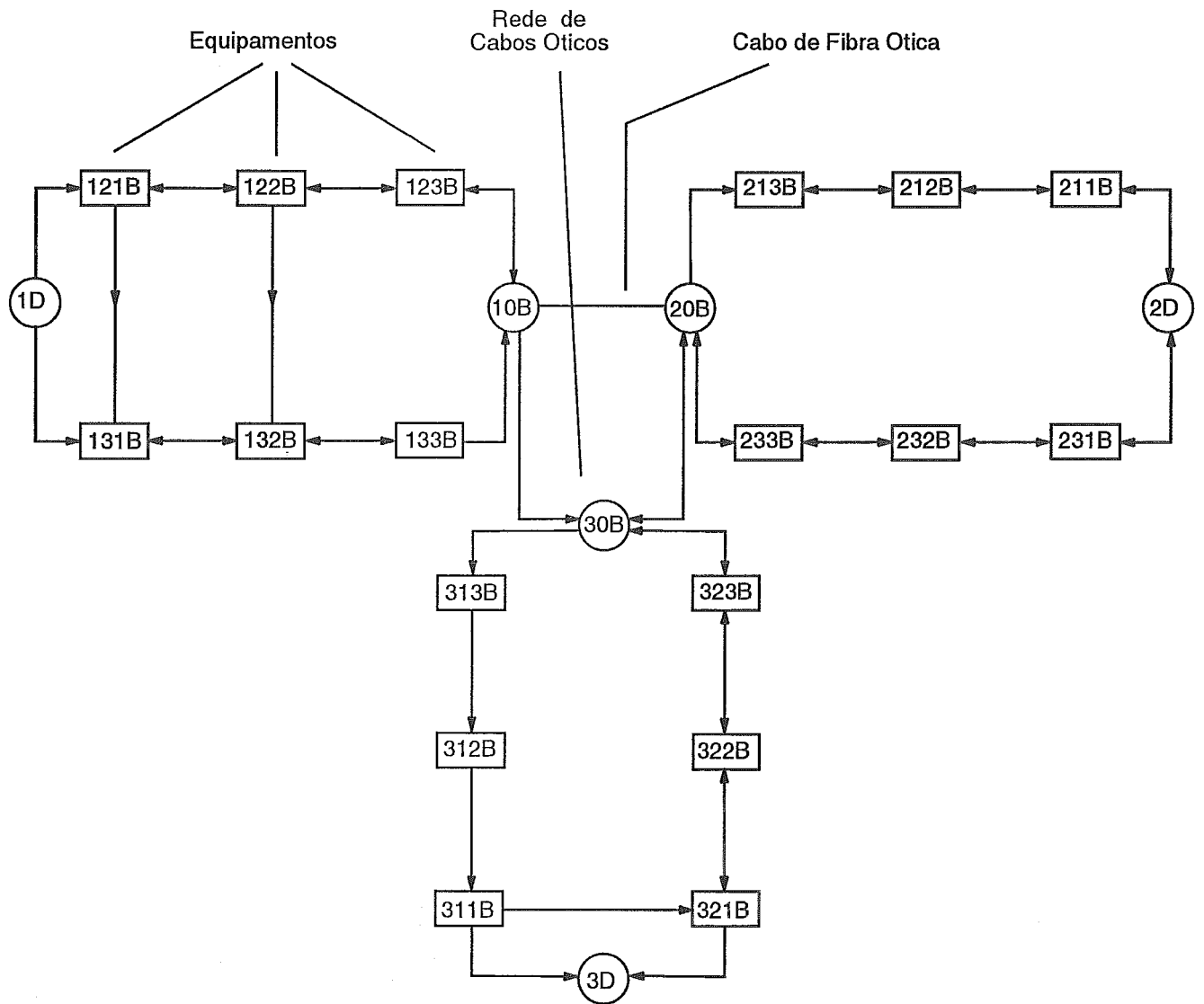


Figura 3.1: Rede hipotética com 3 estações

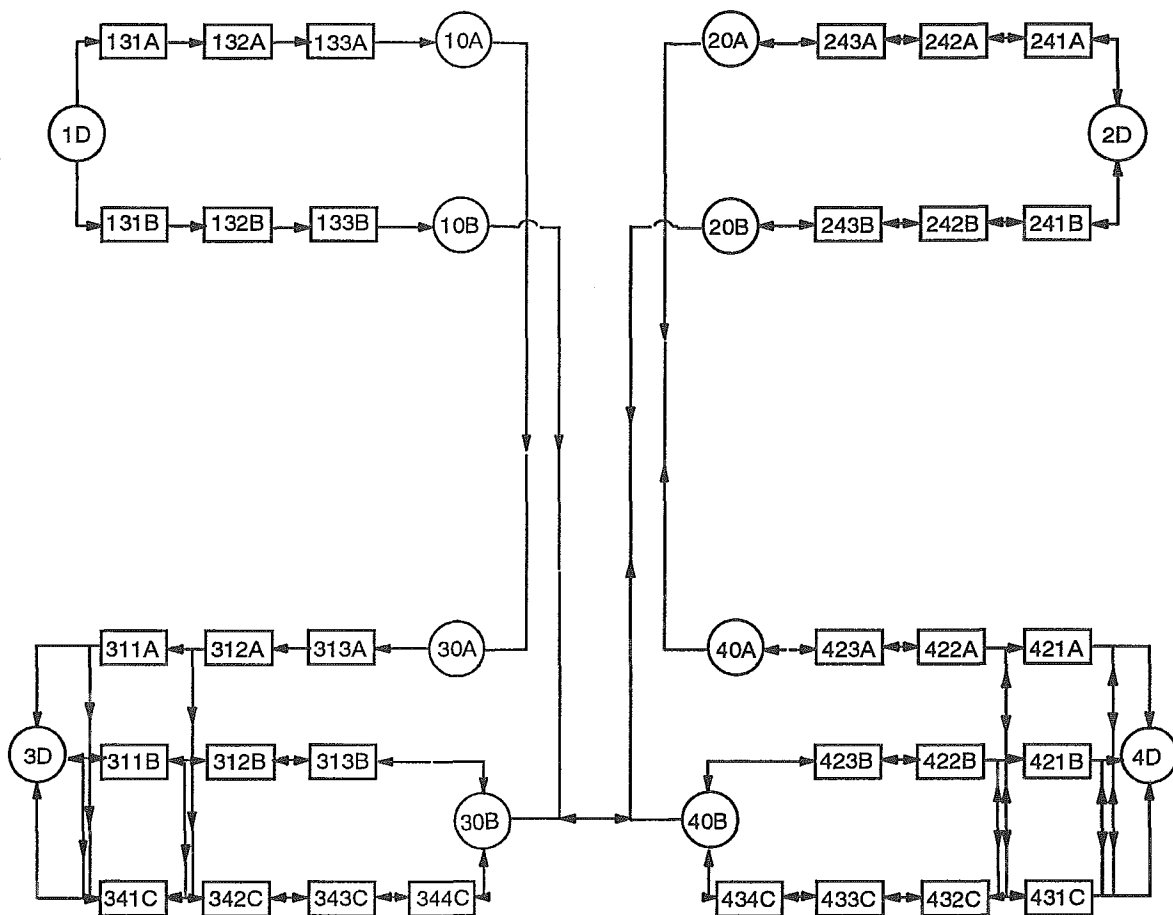


Figura 3.2: Rede hipotética com 4 estações

## Notação

- Cada nó de origem representa o DID, **Distribuidor Intermediário Digital** (notação iD, onde i é uma estação genérica) de uma estação, o que significa que existirão tantos nós de origem quantas forem as estações onde haja demanda de sistemas de 2 Mbit/seg.
- O número de arcos ligados ao DID de uma estação determina quantas frentes estão sendo utilizadas para atender alguma demanda nessa estação.
- Para cada frente existe uma sequência de nós que correspondem aos equipamentos (multiplexadores e conversores) já definidos anteriormente. Numa estação, uma frente será identificada pelos dois primeiros dígitos que aparecem no nome de um nó de equipamento. Por exemplo, no nó 131B da figura 3.1 a frente em uso é a 1-3.
- Estes equipamentos distribuem-se da seguinte maneira: o nó que está mais próximo do DID corresponde ao MUX 2/8 e é identificado pelo número 1 na terceira posição do seu nome; o segundo nó corresponde ao MUX 8/34 e é identificado pelo número 2 na terceira posição do seu nome; o terceiro nó, dependendo da hierarquia, pode ser ou um ELO 34 ou um MUX 34/140, ambos representados pelo número 3 na terceira posição do nome. Caso seja um MUX 34/140, o próximo nó representa o ELO 140 (número 4 na terceira posição do nome). O último nó corresponde ao **Distribuidor Intermediário Ótico** daquela estação, o qual, dependendo da fibra em questão (multimodo ou monomodo), tem a representação iOA ou iOB, respectivamente.
- Existe ainda uma classificação para as frentes, dependendo da hierarquia. As frentes podem ser de três tipos: 3a hierarquia para fibra multimodo (frente de 34 Mbit/seg), a qual é representada pela letra A na última posição do nome do nó; 3a hierarquia para fibra monomodo (frente de 34 Mbit/seg), identificada pela letra B na última posição do nome do nó; e 4a hierarquia para fibra monomodo (frente de 140 Mbit/seg), identificada pela letra C na mesma posição que as anteriores. Por exemplo, o nó 132B da figura 3.1 corresponde a um MUX 8/34 na frente 1-3 do tipo monomodo.
- Uma frente pode estar sendo usada para atender sua própria demanda ou demanda entre estações que não possuam frente direta. Por exemplo, na rede de 4 estações da figura 3.2 não existe frente direta da estação 1 para a estação 2. Assim, para se



atender a demanda 1-2 é necessário usar as frentes 1-3, 3-4 e 4-2 ou as frentes 1-4 e 4-2.

- Os equipamentos DIO são a porta de entrada e saída de fluxo de sistemas de 2 Mbit/seg entre as estações e, portanto, estão todos ligados entre si. Só não são possíveis ligações entre DIOs do tipo iOA com iOB e vice-versa.

Passemos agora à apresentação das variáveis e restrições do modelo, explicando sucintamente o significado de cada uma delas.

## 3.2 Variáveis do Modelo

$f_{ij}(l, k)$  Fluxo de sistemas de 2Mbit/s da estação  $i$  para a estação  $j$ , no arco  $(l, k)$ .

$u_{0pq}(l, k)$  Número de pares de fibras adicionais do tipo multimodo utilizadas no arco  $(l, k)$  para suportar a frente de transmissão de 34Mbit/s, entre a estação  $p$  e a estação  $q$ .

$u_{1pq}(l, k)$  Número de pares de fibras adicionais do tipo monomodo utilizadas no arco  $(l, k)$  para suportar a frente de transmissão de 34Mbit/s, entre a estação  $p$  e a estação  $q$ .

$u_{2pq}(l, k)$  Número de pares de fibras adicionais do tipo monomodo utilizadas no arco  $(l, k)$  para suportar a frente de transmissão de 140Mbit/s, entre a estação  $p$  e a estação  $q$ .

$m(k)$  Número de módulos de equipamentos a serem implantados no nó  $k$ .

$n(l, k)$  Número de cabos de fibras óticas a serem lançados no arco  $(l, k)$ .

### Observações

1. As variáveis do tipo  $u$  estão definidas somente para os arcos  $(l, k)$  em que tanto  $l$  como  $k$  são nós correspondentes a DIOs (representáveis na forma iOA ou iOB). Por outro lado, as variáveis do tipo  $f$  estão definidas apenas para os arcos  $(l, k)$  em que pelo menos um dos nós  $l$  ou  $k$  não corresponde a DIO.

2. Denomina-se  $A_1$  o conjunto dos arcos para os quais a variável  $f$  está definida, ao passo que o complementar de  $A_1$  será representado por  $A_2$ .
3. As variáveis  $u_1$  e  $u_2$  são necessárias pelo fato de um par de fibras poder ser o suporte para 16 sistemas de 2Mbit/s de uma frente de 34 Mbit/s ou 64 sistemas de 2 Mbit/s de uma frente de 140 Mbit/s. Assim, um cabo de fibras monomodo tem capacidade de suportar uma quantidade variável de sistemas, em função da natureza das frentes de transmissão que nele se apóiam (34 Mbit/s ou 140 Mbit/s).
4. O conjunto das frentes de transmissão que se apóiam em cabos de fibras multimodo é denominado  $TA$ , enquanto que  $TB$  é o conjunto das frentes que se apóiam em cabos de fibras monomodo.  $TB$  é ainda decomposto em  $TB^1$  e  $TB^2$ , dependendo se a frente é de 34Mbit/s ou 140Mbit/s, respectivamente.

### 3.3 Restrições do modelo

#### 3.3.1 Atendimento à demanda

A demanda de sistemas de 2 Mbit/s entre estações deve ser atendida. Assim, se há demanda entre as estações  $i$  e  $j$ , o fluxo total de saída do nó  $iD$ , bem como o fluxo total de entrada  $jD$  deve ser igual à demanda prevista:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} f_{ij}(iD, k) &= d_{ij}, \quad \forall (i, j) \in S, \\ \sum_{k \in \bar{K}} f_{ij}(k, jD) &= d_{ij}, \quad \forall (i, j) \in S, \end{aligned}$$

onde  $K$  e  $\bar{K}$  são conjuntos que designam os nós que se ligam aos DIOS e  $S$  é o conjunto dos pares de estações que possuem demanda.

#### 3.3.2 Conservação de Fluxo

Garante a continuidade do fluxo de sistemas dentro da estação. Em um nó correspondente a equipamento MUX ou terminal ELO (não representável em uma das formas  $iD$ ,  $iOA$  ou  $iOB$ ), o fluxo de entrada de sistemas de 2 Mbit/s deve ser igual ao fluxo de saída:

$$\sum_{k \in L(k)} f_{ij}(l, k) = \sum_{\bar{l} \in \bar{L}(k)} f_{ij}(k, \bar{l}), \quad \forall k \in N_1, \quad \forall (i, j) \in S,$$

onde  $N_1$ ,  $L(k)$  e  $\bar{L}(k)$  são conjuntos que definem os nós possíveis naquelas ligações.

### 3.3.3 Frentes de Transmissão

Para cada frente de transmissão deve ser garantida a continuidade de fluxo total entre terminais ELO que participam da frente em questão. Assim, os fluxos totais nos terminais ELO correspondentes a estações de uma frente de transmissão qualquer devem ser iguais:

$$f_{ij}(l, k) + f_{ij}(k, l) = f_{ij}(\bar{l}, \bar{k}) + f_{ij}(\bar{k}, \bar{l}), \quad \forall (i, j) \in S, \quad \forall ((l, k), (\bar{l}, \bar{k})) \in LK,$$

onde  $LK$  é o conjunto dos pares de arcos que possibilitam a continuidade de fluxo.

Considere uma frente  $pq$ , onde  $p$  e  $q$  são estações genéricas. Ainda no que se refere a frentes de transmissão, deve-se acrescentar o seguinte:

- O número de pares de fibras adicionais que entram e saem do DIO da estação  $p$  da frente de transmissão  $pq$  fornece a quantidade de equipamentos ELO que devem ser instalados naquela estação. Matematicamente, escreve-se

$$m(k(p, A)) = \sum_{h \in H(pOA)} u_{0pq}(pOA, h) + \sum_{\bar{h} \in \bar{H}(pOA)} u_{0pq}(\bar{h}, pOA),$$

onde  $k(p, A)$  é o nó da estação  $p$  correspondente à entrada de terminal ELO da frente  $pq$  de 34 Mbit/s, apoiada em cabos de fibras multimodo, e  $H(pOA)$  e  $\bar{H}(pOA)$  são conjuntos de nós que possibilitam a existência dos arcos utilizados acima.

- A mesma afirmação se aplica à outra estação  $q$  daquela frente, originando

$$m(\bar{k}(q, A)) = \sum_{\bar{h} \in \bar{H}(qOA)} u_{0pq}(\bar{h}, qOA) + \sum_{h \in H(qOA)} u_{0pq}(qOA, h),$$

onde  $\bar{k}(q, A)$  é o nó da estação  $q$  correspondente à entrada de terminal ELO da frente  $pq$  de 34 Mbit/s, apoiada em cabos de fibras multimodo, e  $H(qOA)$  e  $\bar{H}(qOA)$  são conjuntos semelhantes aos anteriores.

- O número de pares de fibras adicionais utilizadas nas estações  $p$  e  $q$  deve ser repassado para as estações intermediárias que se ligam a elas. É uma restrição que garante a continuidade do fluxo de fibras na rede externa. Tem-se, então,

$$\sum_{v \in V(kOA)} u_{0pq}(v, kOA) = \sum_{\bar{v} \in \bar{V}(kOA)} u_{0pq}(\bar{v}, kOA), \quad \forall kOA \in N_2(p, q),$$

onde  $N_2(p, q)$  é o conjunto formado pelos nós DIO das estações distintas de  $p$  e  $q$ , e  $V(kOA)$  e  $\bar{V}(kOA)$  são conjuntos de nós que estabelecem a existência dos arcos utilizados acima.

- Os três grupos de restrições acima formam, na verdade, nove grupos. Observe que são três para determinar a quantidade de equipamentos ELO 34 em frentes pertencentes ao conjunto  $TA$ ; mais três para determinar a quantidade de equipamentos ELO 34 em frentes pertencentes ao conjunto  $TB^1$ ; e outras três para fornecer a quantidade de equipamentos ELO 140 em frentes pertencentes ao conjunto  $TB^2$ .

### 3.3.4 Capacidade dos Nós

Para cada nó associado a equipamento multiplex ou à entrada de terminal ELO, o fluxo total de entrada e saída de sistemas de 2 Mbit/s é limitado superiormente pelos recursos instalados, disponíveis para uso, ou a instalar.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in S} \sum_{l \in L(k)} f_{ij}(l, k) + \sum_{(i,j) \in S} \sum_{\bar{l} \in \bar{L}(k)} f_{ij}(k, \bar{l}) &\leq \\ &\leq 2 * [e(k) + m(k) * mod(k)], \quad \forall k \in N_1, \end{aligned}$$

onde  $e(k)$  é a folga em sistemas de 2Mbit/s disponíveis para uso no nó  $k$  e  $mod(k)$  é a modularidade do equipamento associado ao nó  $k$ .

### 3.3.5 Capacidade dos Arcos

Em cada arco associado a cabos de fibras óticas, o fluxo total é limitado superiormente pela disponibilidade de fibras instaladas ou a instalar.

- Para fibras multimodo temos que o número de pares de fibras adicionais não pode ser maior do que a folga existente:

$$\sum_{(p,q) \in TA} [u_{0pq}(l, k) + u_{0pq}(k, l)] \leq e(l, k), \quad \forall (l, k) \in A_2$$

onde  $e(l, k)$  é o número de pares de fibras óticas multimodo disponíveis no arco  $(l, k)$ .

- Para fibras monomodo temos que o número de pares de fibras adicionais não pode ser maior do que a folga existente mais a aquisição:

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in TB} [u_{1pq}(l, k) + u_{1pq}(k, l) + u_{2pq}(l, k) + u_{2pq}(k, l)] &\leq \\ &\leq \bar{e}(l, k) + n(l, k) * modc(l, k), \quad \forall (l, k) \in A_2 \end{aligned}$$

onde  $modc(l, k)$  é o número de pares de fibras de um cabo de fibras óticas monomodo, e  $\bar{e}(l, k)$  é o número de pares de fibras óticas monomodo disponíveis para uso no arco  $(l, k)$ .

### 3.3.6 Relação Entre as Capacidades dos Nós

As capacidades dos nós associados a equipamentos e terminais ELO de uma mesma frente estão relacionados de tal forma que a expansão da capacidade de um dos nós implica na expansão dos demais nós associados:

$$m(l) \geq m(k), \quad \forall (l, k) \in LK_1,$$

onde  $LK_1$  é o conjunto dos pares de nós que permite esta associação. Além disto,

$$4 * m(l) \geq m(k), \quad \forall (l, k) \in LK_2,$$

onde  $LK_2$  é o conjunto dos pares de nós que permite esta associação.

### 3.3.7 Condições de Integralidade e Não-Negatividade

- $m(k)$  é inteiro não-negativo,  $\forall k \in N_1$
- $n(l, k)$  é inteiro não-negativo,  $\forall (l, k) \in A_1$
- $u_{0pq}(l, k) \geq 0$ ,  $\forall (p, q) \in TA$ ,  $\forall (l, k) \in A_2$
- $u_{1pq}(l, k) \geq 0$ ,  $\forall (p, q) \in TB^1$ ,  $\forall (l, k) \in A_2$
- $u_{2pq}(l, k) \geq 0$ ,  $\forall (p, q) \in TB^2$ ,  $\forall (l, k) \in A_2$
- $f_{ij}(l, k) \geq 0$ ,  $\forall (i, j) \in S$ ,  $\forall (l, k) \in A_1$

### 3.3.8 Função Objetivo

O objetivo é determinar os valores das variáveis, respeitando o conjunto de restrições, de modo a otimizar o investimento global em equipamentos, terminais e cabos óticos. Para evitar caminhos desnecessários entre arcos da rede externa, adicionou-se à função objetivo um termo que penaliza as variáveis de pares de fibras. A função objetivo é dada então por

$$\sum_{k \in N_1} c(k) * m(k) + \sum_{(l, k) \in A_1} c'(l, k) * n(l, k) + \sum_{(p, q) \in (TA \cup TB)} \sum_{i \in I} \sum_{(l, k) \in A_2} e_{ipq} * u_{ipq}(l, k),$$

onde

- $c(k)$  é o investimento associado à implantação de um módulo de equipamento ou de terminal no nó  $k$ ;
- $c'(l, k)$  é o investimento associado à implantação de um cabo ótico de fibra monomodo no arco  $(l, k)$ ;
- $e_{ipq}$  é um peso de pequeno valor associado às variáveis de pares de fibras na frente  $pq$ ;
- $I = \{0, 1, 2\}$ .

### 3.4 Estrutura do modelo

Como esta modelagem faz uso de uma notação muito carregada, é necessário escrevê-la de uma forma mais fácil de manipular. Para isto, é feita abaixo uma associação entre cada grupo de restrições e uma forma matricial que o representa.

#### Forma Matricial do Modelo

- Função objetivo:

$$c^t m + (c')^t n + \sum_{i=0}^2 e_i^t u_i$$

- Restrições de demanda:

$$A_1 f = k_0$$

- Restrições de conservação de fluxo:

$$A_2 f = 0$$

- Restrições de frentes de transmissão:

$$A_3 f = 0$$

$$A_{8,i} u_i + A_{9,i} m = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

$$A_{4,i} u_i = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

- Restrições de capacidade dos nós:

$$A_{12}f + A_{13}m \leq k_4$$

- Restrições de capacidade dos arcos:

$$A_5u_0 \leq k_1$$

$$A_{10,1}u_1 + A_{10,2}u_2 + A_{11}n \leq k_3$$

- Restrições da relação entre a capacidade dos nós:

$$A_6m \leq 0$$

$$A_7m \leq k_2$$

- Restrições de positividade e integralidade:

$$m, n \in Z_+$$

$$f, u_0, u_1, u_2 \geq 0$$

Com isso, o modelo fica estruturado da seguinte maneira:

$$(PP) \left\{ \begin{array}{l}
 \min \quad c^t m \quad + (c')^t n \quad + \sum_{i=0}^2 e_i^t u_i \\
 \text{s.a.} \quad A_1 f \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = k_0 \quad (1) \\
 \quad \quad A_2 f \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 0 \quad (2) \\
 \quad \quad A_3 f \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 0 \quad (3) \\
 \quad \quad \quad \quad A_{4,0} u_0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 0 \quad (4) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad A_5 u_0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \leq k_1 \quad (5) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{4,1} u_1 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 0 \quad (6) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{4,2} u_2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = 0 \quad (7) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_6 m \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \leq 0 \quad (8) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_7 m \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \leq k_2 \quad (9) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{8,0} u_0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{9,0} m \quad \quad \quad = 0 \quad (10) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{8,1} u_1 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{9,1} m \quad \quad \quad = 0 \quad (11) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{8,2} u_2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{9,2} m \quad \quad \quad = 0 \quad (12) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{10,1} u_1 \quad \quad \quad + A_{10,2} u_2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{11} n \quad \leq k_3 \quad (13) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{12} f \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + A_{13} m \quad \leq k_4 \quad (14) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad m, n \quad \in Z_+ \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad f, u_0, u_1, u_2 \geq 0
 \end{array} \right.$$

Cabem aqui algumas observações a respeito desta estrutura:

- As matrizes de coeficientes são bastante esparsas e apresentam quase sempre uma estrutura bloco-diagonal.
- Existem tanto variáveis como restrições de acoplamento, o que dificulta a resolução de  $(PP)$ .
- Estima-se que para o caso real (50 estações telefônicas) o modelo chegue a atingir dezenas de milhares de restrições e de variáveis, entre as quais alguns milhares serão inteiras.

## 3.5 Validação do Modelo

Em [MVS<sup>+</sup>92], caracteriza-se o problema mencionado acima, sua modelagem e a validação do modelo para exemplos hipotéticos de 3 e 4 estações. Para uma das configurações do exemplo de 3 estações tem-se 111 variáveis (das quais 21 são inteiras) e 112 restrições; já para um determinado cenário do exemplo de 4 estações os números foram: 254 variáveis (42 inteiras) e 256 restrições.

Posteriormente, apresentou-se em [VCO<sup>+</sup>93] os resultados para um caso real de 15 estações, onde se aplicou o modelo à rede de transmissão digital de Fortaleza (TELE-CEARÁ). Para este exemplo obteve-se 2754 variáveis (190 inteiras) e 1965 restrições.

Foi utilizado o “pacote” LINDO/386 (Linear, Interactive and Discrete Optimization), versão 5.01 para microcomputadores. Os tempos obtidos em um PC 486 - 50 levam a crer na inexecuibilidade do uso daquele pacote na resolução de problemas reais (50 estações).

Fica clara a necessidade de desenvolvimento de métodos que levem em conta a estrutura específica do modelo. Técnicas de decomposição e relaxação lagrangeana serão particularmente úteis para uma abordagem adequada, assuntos discutidos nos próximos capítulos.



## Capítulo 4

# ALGUNS MÉTODOS BASEADOS NA DECOMPOSIÇÃO DO LAGRANGEANO RELAXADO

Nos capítulos anteriores apresentou-se o problema da rede de transmissão digital da TELERJ, suas características peculiares e um modelo capaz de representá-lo.

Neste capítulo, aplicamos a técnica da *Relaxação Lagrangeana* a esse modelo, descrevendo, em seguida, três diferentes abordagens para a resolução do dual: método *Simplex (Dantzig-Wolfe)* com geração de colunas, métodos de *Subgradientes* (Shor e derivados) e métodos de *Feixes*. Destas, deter-nos-emos nos **métodos de subgradientes**, que serão objeto de programação e testes computacionais.

## 4.1 Relaxação e Decomposição Lagrangeana

Retomemos o problema original ( $PP$ ):

$$(PP) \left\{ \begin{array}{llll} \min & c^t m & + (c')^t n & + \sum_{i=0}^2 e_i^t u_i \\ \text{s.a.} & A_1 f & & = k_0 & (1) \\ & A_2 f & & = 0 & (2) \\ & A_3 f & & = 0 & (3) \\ & & A_{4,0} u_0 & = 0 & (4) \\ & & A_5 u_0 & \leq k_1 & (5) \\ & & & A_{4,1} u_1 & = 0 & (6) \\ & & & & A_{4,2} u_2 & = 0 & (7) \\ & & & & & A_6 m & \leq 0 & (8) \\ & & & & & A_7 m & \leq k_2 & (9) \\ & & A_{8,0} u_0 & & + A_{9,0} m & = 0 & (10) \\ & & & A_{8,1} u_1 & + A_{9,1} m & = 0 & (11) \\ & & & & A_{8,2} u_2 & + A_{9,2} m & = 0 & (12) \\ & & & A_{10,1} u_1 & + A_{10,2} u_2 & & + A_{11} n & \leq k_3 & (13) \\ & A_{12} f & & & & + A_{13} m & \leq k_4 & (14) \\ & m, n & \in Z_+ & & & & & \\ & f, u_0, & u_1, u_2 & \geq 0 & & & & \end{array} \right.$$

A idéia é relaxar as restrições “ mais difíceis ”, no caso as de acoplamento (10) a (14), obtendo a seguinte **função Lagrangeana**:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; \Lambda) &= c^t m + (c')^t n + \sum_{i=0}^2 e_i^t u_i \\ &+ \sum_{i=0}^2 \lambda_i^t (A_{8,i} u_i + A_{9,i} m) \\ &+ \lambda_3^t (\sum_{i=1}^2 A_{10,i} u_i + A_{11} n - k_3) \\ &+ \lambda_4^t (A_{12} f + A_{13} m - k_4) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde os **multiplicadores**  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ , com  $\lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ , se referem, respectivamente, às restrições (10) a(14). Além disto, as variáveis primais devem verificar as demais restrições (não relaxadas).

Denotam-se as variáveis primais por  $x = (f, m, n, u_0, u_1, u_2)$  e as duais por  $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ; o conjunto das restrições não relaxado, (1) a (9), junto às condições

de positividade e integralidade será denominado  $X$ .

O problema ( $PP$ ) com a relaxação proposta é então dado por

$$(PR) \quad \left\{ \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda) \right.$$

É fácil ver que, para cada  $\Lambda$ , com  $\lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ , e  $\bar{x}$  viável ( $\bar{x}$  verificando (1) a (9)), o custo de ( $PR$ ), que denominaremos  $v(PR)$ , é uma *cota inferior* para a custo do problema original  $v(PP)$ . De fato, sob aquelas hipóteses,

$$v(PP(\bar{x})) = c^t \bar{m} + (c')^t \bar{n} + \sum_{i=0}^2 e_i^t \bar{u}_i \geq \mathcal{L}(\bar{x}, \Lambda) = v(PR(\bar{x}));$$

por outro lado,

$$v(PP(\bar{x})) \geq v(PR(\bar{x})) \geq \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda), \quad (4.2)$$

que é o chamado **Teorema da Dualidade Fraca** (ver [Sha79]).

Devido às características do problema em questão, podemos acrescentar cotas superiores e inferiores às suas variáveis de modo a tornar compacto o conjunto viável do problema relaxado ( $PR$ ). Assim, de agora em diante, podemos substituir na formulação (4.2) o termo  $\inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda)$  por  $\min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda)$ .

Com as desigualdades acima fica claro o objetivo de se encontrar a maior das cotas inferiores dadas em (4.2), ou seja, encontrar a solução do **problema dual** de ( $PP$ ):

$$(PD) \quad \left\{ \max_{\lambda_3, \lambda_4 \geq 0} \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda) \right.$$

ou, equivalentemente,

$$(PD) \quad \left\{ \max_{\lambda_3, \lambda_4 \geq 0} \varphi(\Lambda) \right., \quad (4.3)$$

onde

$$\varphi(\Lambda) := \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda)$$

é a chamada **função dual**. É no cálculo desta função que se realiza o processo de decomposição, como o que se propõe a seguir.

$$\begin{aligned}
\varphi(\Lambda) &:= \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda) = -\lambda_3^t k_3 - \lambda_4^t k_4 + \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \min [A_{12}^t \lambda_4]^t f \\ \text{s.a. } A_1 f = k_0 \\ A_2 f = 0 \\ A_3 f = 0 \\ f \geq 0 \end{array} \right. \quad (S_1) \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \min [e_0 + A_{8,0}^t \lambda_0]^t u_0 \\ \text{s.a. } A_{4,0} u_0 = 0 \\ A_5 u_0 \leq k_1 \\ u_0 \geq 0 \end{array} \right. \quad (S_2) \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \min [e_1 + A_{8,1}^t \lambda_1 + A_{10,1}^t \lambda_3]^t u_1 \\ \text{s.a. } A_{4,1} u_1 = 0 \\ u_1 \geq 0 \end{array} \right. \quad (S_3) \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \min [e_2 + A_{8,2}^t \lambda_2 + A_{10,2}^t \lambda_3]^t u_2 \\ \text{s.a. } A_{4,2} u_2 = 0 \\ u_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (S_4) \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \min [c + \sum_{i=0}^2 A_{9,i}^t \lambda_i + A_{13}^t \lambda_4]^t m \\ \text{s.a. } A_6 m \leq 0 \\ A_7 m \leq k_2 \\ m \in Z_+ \end{array} \right. \quad (S_5) \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \min [c' + A_{11}^t \lambda_3]^t n \\ \text{s.a. } (c')^t n \leq (c')^t \bar{n} \\ n \leq n^0 \\ n \in Z_+ \end{array} \right. \quad (S_6)
\end{aligned}$$

O cálculo de  $\varphi$  é feito através de 6 subproblemas. Destes, 4 são de programação linear contínua, e os outros 2 são de programação inteira pura. Mesmo que a solução destes dois últimos não seja tão simples, principalmente se eles forem de alta dimensão, ainda assim serão mais fáceis de resolver do que o problema original.

O 6º subproblema é originalmente sem restrições, porque o único grupo em que  $n$  aparece, o (13), foi relaxado. Entretanto, não interessam soluções do tipo 0 ou  $\infty$ , e se lhe adiciona uma restrição artificial, que limita os valores do custo através de alguma estimativa superior  $(c')^t \bar{n}$ , e uma cota superior para o número de cabos, fornecida pela TELERJ.

A título de ilustração, são apresentadas na tabela abaixo as dimensões de (PP) e dos 6 subproblemas para exemplos fictícios de 3, 4 estações descritos em [Vid92] e [MVS<sup>+</sup>92], e um real (Fortaleza - TELECEARÁ), descrito em [VCO<sup>+</sup>93].

		PP	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
3 estações	restrições	86	69	0	3	0	12	2
	variáveis	111	72	0	18	0	18	3
4 estações	restrições	256	160	8	4	2	25	2
	variáveis	254	172	16	16	8	38	4
15 estações	restrições	1965	1089	185	300	0	389	2
	variáveis	2754	996	224	1344	0	174	16

## 4.2 Propriedades da Função Dual

### 1. Concavidade

$\varphi(\Lambda)$  é a envoltória inferior de uma infinidade de funções afins de  $\Lambda$  para cada  $x \in X$ , portanto *côncava*.

### 2. Não-diferenciabilidade

A determinação de  $\varphi(\Lambda)$  pela resolução de (PR) tem, em geral, uma multiplicidade de soluções, o que comumente acarreta sua *não-diferenciabilidade*.

Dessa forma, encontrar a solução de (PD) corresponde a resolver um problema de otimização não-diferenciável de maximização. Como  $\varphi(\Lambda)$  é côncava, possui subgradiente em todos os pontos onde está definida. Um subgradiente facilmente calculável é mostrado a seguir.

### 3. Determinação de um subgradiente

Se  $\bar{x}$  minimiza  $\mathcal{L}(x, \Lambda)$  em  $\bar{\Lambda}$ , tem-se, por definição de  $\varphi(\Lambda)$ , para um  $\Lambda$  qualquer:

$$\varphi(\Lambda) \leq c^t \bar{m} + (c')^t \bar{n} + \sum_{i=0}^2 e_i^t \bar{u}_i + \Lambda^t \begin{pmatrix} A_{8,0} \bar{u}_0 + A_{9,0} \bar{m} \\ A_{8,1} \bar{u}_1 + A_{9,1} \bar{m} \\ A_{8,2} \bar{u}_2 + A_{9,2} \bar{m} \\ \sum_{i=1}^2 A_{10,i} \bar{u}_i + A_{11} \bar{n} - k_3 \\ A_{12} \bar{f} + A_{13} \bar{m} - k_4 \end{pmatrix}$$

Seja o resíduo denotado por

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} A_{8,0} \bar{u}_0 + A_{9,0} \bar{m} \\ A_{8,1} \bar{u}_1 + A_{9,1} \bar{m} \\ A_{8,2} \bar{u}_2 + A_{9,2} \bar{m} \\ A_{10,1} \bar{u}_1 + A_{10,2} \bar{u}_2 + A_{11} \bar{n} - k_3 \\ A_{12} \bar{f} + A_{13} \bar{m} - k_4 \end{pmatrix}$$

e a função custo por

$$f(\bar{x}) := c^t \bar{m} + (c')^t \bar{n} + \sum_{i=0}^2 e_i^t \bar{u}_i.$$

Temos então:

$$\varphi(\Lambda) \leq f(\bar{x}) + \bar{\Lambda}^t \bar{\gamma} - (\bar{\Lambda} - \Lambda)^t \bar{\gamma},$$

e, por definição de  $(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ :

$$\varphi(\Lambda) \leq \varphi(\bar{\Lambda}) - (\bar{\Lambda} - \Lambda)^t \bar{\gamma}.$$

Portanto, o *resíduo*  $\bar{\gamma}$ , correspondente às restrições relaxadas, é um *subgradiente* de  $\varphi$  em  $\bar{\Lambda}$ .

**Observação:** Este resultado é suficiente para os métodos de subgradientes de que trataremos computacionalmente. Será útil, também, para a verificação de existência de solução dual e para o caso de algoritmos tipo feixes, a propriedade de que, sob hipótese de compacidade de  $X$ , o subdiferencial de  $\varphi$  (suposta finita) em  $\bar{\Lambda}$  é o próprio envelope convexo do conjunto de todos os resíduos  $\gamma(x)$ , que correspondem às soluções  $x(\Lambda)$ , com  $\lambda_3, \lambda_4 \geq 0$  (veja [Min86]).

## 4. Soluções sub-ótimas

Dada uma solução  $\bar{x}(\Lambda)$  definindo  $\varphi$  em  $\Lambda$ , a qualidade desta solução como aproximação da solução ótima de (PP) pode ser analisada a partir do seguinte resultado, devido a Everett.

**Proposição 1** (*H. Everett [Eve63]*) Denominemos  $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x))$  o vetor dos conjuntos de restrições relaxadas de igualdade e desigualdade, respectivamente:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} A_{8,0}u_0 + A_{9,0}m \\ A_{8,1}u_1 + A_{9,1}m \\ A_{8,2}u_2 + A_{9,2}m \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} A_{10,1}u_1 + A_{10,2}u_2 + A_{11}n - k_3 \\ A_{12}f + A_{13}m - k_4 \end{pmatrix},$$

e  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$  a respectiva partição dos multiplicadores.

Então  $\bar{x}(\Lambda)$  é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ \text{s.a. } \gamma_1(x) = \gamma_1(\bar{x}(\Lambda)) \\ \gamma_2(x) \leq \gamma_2(\bar{x}(\Lambda)), \text{ para as componentes de } \Lambda_2 \text{ estritamente positivas,} \\ \gamma_2(x) \text{ irrestrito para as demais componentes de } \Lambda_2, \\ x \in X \end{array} \right. \quad (4.4)$$

onde  $f(x)$  representa a função primal. (É de se esperar, portanto, que pequenos resíduos  $\gamma(\bar{x}(\Lambda))$  correspondam a boas estimativas  $\bar{x}(\Lambda)$  da solução primal. Isto será verdadeiro para problemas bem-condicionados.)

**Demonstração:** Observe que se trata de uma perturbação em (PP), que tem em  $\bar{x}(\Lambda)$  um ponto viável.

Seguimos [Min86]. Substituamos  $\tilde{\gamma}_i(x) = \gamma_i(x) - \gamma_i(\bar{x}(\Lambda))$ ,  $i = 1, 2$ . O problema (4.4) se reescreve como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ \tilde{\gamma}_1(x) = 0 \\ \tilde{\gamma}_2(x) \leq 0, \text{ para as componentes de } \Lambda_2 \text{ estritamente positivas} \\ \tilde{\gamma}_2(x) \text{ irrestrito para as demais componentes de } \Lambda_2, \\ x \in X \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Associemos a (4.5) a função de Lagrange

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^2 \Lambda_i \tilde{\gamma}_i(x), \quad \Lambda_2 \geq 0.$$

É evidente que  $\bar{x}(\Lambda)$  é mínimo de  $\tilde{\mathcal{L}}$  em  $x$ . Além disto, as restrições em (4.5) são verificadas, e, conseqüentemente,  $\bar{x}(\Lambda)$  é ponto de mínimo de (4.5), logo de (4.4).

## 6. Existência da Solução Dual

Por ser (PD) um problema côncavo, em geral não-diferenciável, as condições de otimalidade significam essencialmente a existência do elemento nulo no subdiferencial da função de Lagrange associada.

A (4.3) corresponde a função lagrangeana

$$\mathcal{L}_\varphi = \varphi(\Lambda) + s^t \Lambda_2, \quad s \geq 0,$$

e a condição necessária é

$$0 \in \partial_\Lambda[\varphi(\Lambda) + s^t \Lambda_2].$$

Esta inclusão pode ser reescrita separando-se os multiplicadores correspondentes a igualdades e desigualdades:

$$0 \in \begin{pmatrix} \partial_{\Lambda_1} \varphi(\Lambda) \\ \partial_{\Lambda_2} \varphi(\Lambda) + s \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Graças à observação feita na propriedade 3 sabemos que o subdiferencial de  $\varphi$  é dado pelo conjunto de todas as combinações convexas das soluções  $x(\Lambda)$ . É de interesse observar que estas são, para cada  $\Lambda$ , geradas por uma quantidade finita de soluções pertencentes ao conjunto (suposto compacto)  $X$ . Deste modo (4.6) ainda se escreve

$$0 \in \begin{pmatrix} \sum \alpha_i \gamma_1(x^i(\Lambda)) \\ \sum \beta_j \gamma_2(x^j(\Lambda)) + s \end{pmatrix},$$

onde os  $\{\alpha_i\}$  e os  $\{\beta_j\}$  estão no simplex unitário positivo, sendo os somatórios finitos.

É equivalente afirmar que existem multiplicadores  $\{\alpha_i\}$  e  $\{\beta_j\}$  formando uma combinação convexa tais que

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i \gamma_1(x^i(\Lambda)) &= 0, \\ \sum \beta_j \gamma_2(x^j(\Lambda)) &\leq 0. \end{aligned}$$



## 4.3 Condições de otimalidade do Primal

Embora dificilmente verificáveis na Programação Discreta, as condições de otimalidade, além de outros resultados de dualidade, são importantes instrumentos teóricos e algorítmicos.

**Teorema 1** ([Sha79]) *Se o par  $(\bar{x}, \Lambda)$ , onde  $\bar{x} \in X$  e  $\Lambda_2 \geq 0$ , satisfaz as condições*

$$1. \mathcal{L}(\bar{x}, \Lambda) = \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \Lambda)$$

$$2. \gamma_1(\bar{x}) = 0$$

$$\gamma_2(\bar{x}) \leq 0$$

$$3. \bar{\Lambda}_2^t \gamma_2(\bar{x}) = 0,$$

então  $\bar{x}$  é ótimo para (PP).

Nos métodos de decomposição lagrangeana a verificação das condições (1) e (2) levaria, em princípio, a soluções aproximadas. Entretanto, o mais provável é que haja salto de dualidade (não se verificando (3)), quando a desigualdade (4.2) é estrita:

$$v(PP(\bar{x})) > \begin{cases} \max_{\Lambda} \varphi(\Lambda) \\ s.a \quad \Lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Neste caso, as soluções obtidas por técnicas de multiplicadores podem ser melhoradas por heurísticas tipo “Branch and Bound”.

## 4.4 Algoritmo dos Planos Secantes e Decomposição de Dantzig-Wolfe

(Cheney, Goldstein, 1959; Kelley, 1960; Dantzig, Wolfe, 1961)

Na procura do multiplicador ótimo, o dual (4.3) pode ser reescrito sob a forma

$$\begin{cases} \max_{v, \Lambda} & v \\ s.a & v \leq \mathcal{L}(x, \Lambda), x \in X \\ & \Lambda_2 \geq 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde  $v \in \mathfrak{R}$ . Visto assim, trata-se de um problema de programação paramétrica. A técnica de algoritmos de planos secantes é baseada na substituição do conjunto  $X$  por sucessivas aproximações.

Admita conhecidos  $x_1, \dots, x_{k-1}$ ; definimos o chamado **Problema Mestre**:

$$\begin{cases} \max_{v, \Lambda} & v \\ \text{s.a} & v \leq \mathcal{L}(x^i, \Lambda), \quad i = 1, \dots, k-1 \\ & \Lambda_2 \geq 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

cuja solução, suposta existir, é denotada  $(v^k, \Lambda^k)$ .

Com  $\Lambda = \Lambda^k$ , retorna-se ao problema relaxado ( $PR$ ) que fornecerá  $x^k = x(\Lambda^k)$ .

A fim de estabelecermos um teste de parada, observamos que (4.7) é mais restritivo do que (4.8), levando, de modo evidente, à majoração

$$\varphi^* := \max_{\Lambda_2 \geq 0} \varphi(\Lambda) \leq v^k,$$

onde  $\varphi^*$  é a solução ótima do problema dual ( $PD$ ).

Portanto podemos propor o *teste de parada* para a iteração em que ocorrer

$$\varphi(\Lambda^k) \geq v^k - \epsilon,$$

para uma dada tolerância  $\epsilon > 0$ .

#### 4.4.1 Propriedades do Problema Mestre

##### 1. Uma forma alternativa (dual) para (4.8)

O problema linear (4.8) pode ser expresso apenas em termos da variável dual  $\Lambda$  e da função dual  $\varphi$ . De fato, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^i, \Lambda) &= f(x^i) + \Lambda_1^t \gamma_1(x^i) + \Lambda_2^t \gamma_2(x^i) \\ &= \varphi(\Lambda^i) + (\Lambda_1 - \Lambda_1^i)^t \gamma_1(x^i) + (\Lambda_2 - \Lambda_2^i)^t \gamma_2(x^i), \end{aligned}$$

que, substituído em (4.8), fornece:

$$\begin{cases} \max_{v, \Lambda} & v \\ \text{s.a} & v \leq \varphi(\Lambda^i) + (\Lambda_1 - \Lambda_1^i)^t \gamma_1(x^i) + (\Lambda_2 - \Lambda_2^i)^t \gamma_2(x^i), \\ & i = 1, \dots, k-1 \\ & \Lambda_2 \geq 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

Com esta formulação fica também clara a visão dos planos secantes como um método de aproximações sucessivas de  $\varphi$ , seccionalmente afins, que são determinadas pelos subgradientes  $\gamma(x^i)$ .

## 2. Existência de solução do problema-mestre

O problema mestre pode não ter solução finita; basta ver o caso  $k = 1$ , em que não se pode garantir a existência de solução finita. Será necessário limitar artificialmente as variáveis  $\Lambda$ .

## 3. Propriedades das sequências $\{x^k\}$ e $\{v^k\}$

Uma propriedade importante do algoritmo é que, a menos de que o teste de parada seja realizado, é garantido que os  $x^i$  sejam diferentes. Com efeito, se  $x^k = x^i$ , para algum  $i < k$ , teríamos também, segundo (4.8), que

$$\varphi(\Lambda^k) = \mathcal{L}(x^k, \Lambda^k) = \mathcal{L}(x^i, \Lambda^k) \geq v^k.$$

Acrescente-se o fato simples, porém útil, de que  $\{v^k\}$  é uma sequência não-crescente.

## 4. Convergência

A convergência de  $\varphi(\Lambda^k)$  e  $v^k$  para  $\varphi^*$  é obtida quando  $\Lambda$  está em um conjunto compacto (veja [Min86]).

### 4.4.2 Algoritmo de Decomposição de Dantzig-Wolfe

A forma (4.8) ou (4.9) do problema mestre corresponde a um processo de geração sucessiva de restrições (ou linhas). O algoritmo de Dantzig-Wolfe é obtido pela dualização daqueles problemas, e corresponde a um processo de geração de colunas.

É fácil verificar que o dual de (4.9) é

$$\begin{cases} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^{k-1}} & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i [\varphi(\Lambda^i) - \gamma_1(x^i)^t \Lambda_1^i - \gamma_2(x^i)^t \Lambda_2^i] \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \gamma_1(x^i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \gamma_2(x^i) \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (4.10)$$

**Observação:** É imediato que o conteúdo dos colchetes na função a ser minimizada é igual à própria função custo de (PP). Assim (4.10) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^{k-1}} & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(x^i) \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \gamma_1(x^i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \gamma_2(x^i) \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k-1, \end{cases} \quad (4.11)$$

que é uma forma dependente apenas das variáveis primais  $x^i$  e das funções primais  $f$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Decorre daí a usual aproximação da solução primal,

$$x(\alpha) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x^i. \quad (4.12)$$

Com ( 4.11) e ( 4.12), tanto  $x$  quanto  $f$  são aproximadas baricêtricamente.

O tratamento computacional de ( 4.11) deve produzir, além da solução  $\alpha$ , os multiplicadores de Lagrange respectivos, com os quais se resolve o problema relaxado ( $PR$ ).

Notamos que as diferenças entre as duas metodologias, *planos secantes* e *Dantzig-Wolfe*, são sobretudo de ordem computacional, mais do que conceitual. Entretanto, em ambos os casos, a típica observação experimental é de que convergem muito lentamente.

## 4.5 Subgradientes com Dilatação do Espaço

Os métodos que acabamos de apresentar aproximam a função dual  $\varphi$  para gerar os multiplicadores ótimos do problema dual ( $PD$ ) sendo, a cada iteração, necessário resolver o problema relaxado ( $PR$ ).

Uma abordagem bastante diversa será agora desenvolvida. Trata-se dos **métodos de subgradientes de Shor** ([Sho70b]) e derivados. Eles são a extensão imediata do algoritmo de Cauchy para funções diferenciáveis.

São baseados na propriedade simples e essencial, que se aplica às funções côncavas: *em um ponto qualquer  $\Lambda$ , todo subgradiente é direção de descida relativamente à função distância  $d(\Lambda^*, \Lambda)$*  (veja figura 4.1).

Na figura (4.1), em  $\bar{\Lambda}$ , todos os subgradientes são direções de subida em relação a  $\varphi$ , e de descida em relação a  $d(\Lambda^*, \Lambda)$ ; em  $\bar{\Lambda}$ , o subgradiente  $\gamma$  não melhora a função  $\varphi$ , porém, para um passo suficientemente pequeno, obtém-se um ponto  $\bar{\Lambda}^+$  mais próximo de  $\Lambda^*$ , conforme atestam os círculos centrados em  $\Lambda^*$ .

### 4.5.1 Algoritmo Conceitual de Subgradientes

O algoritmo conceitual é o seguinte (supomos, por enquanto, o problema irrestrito):

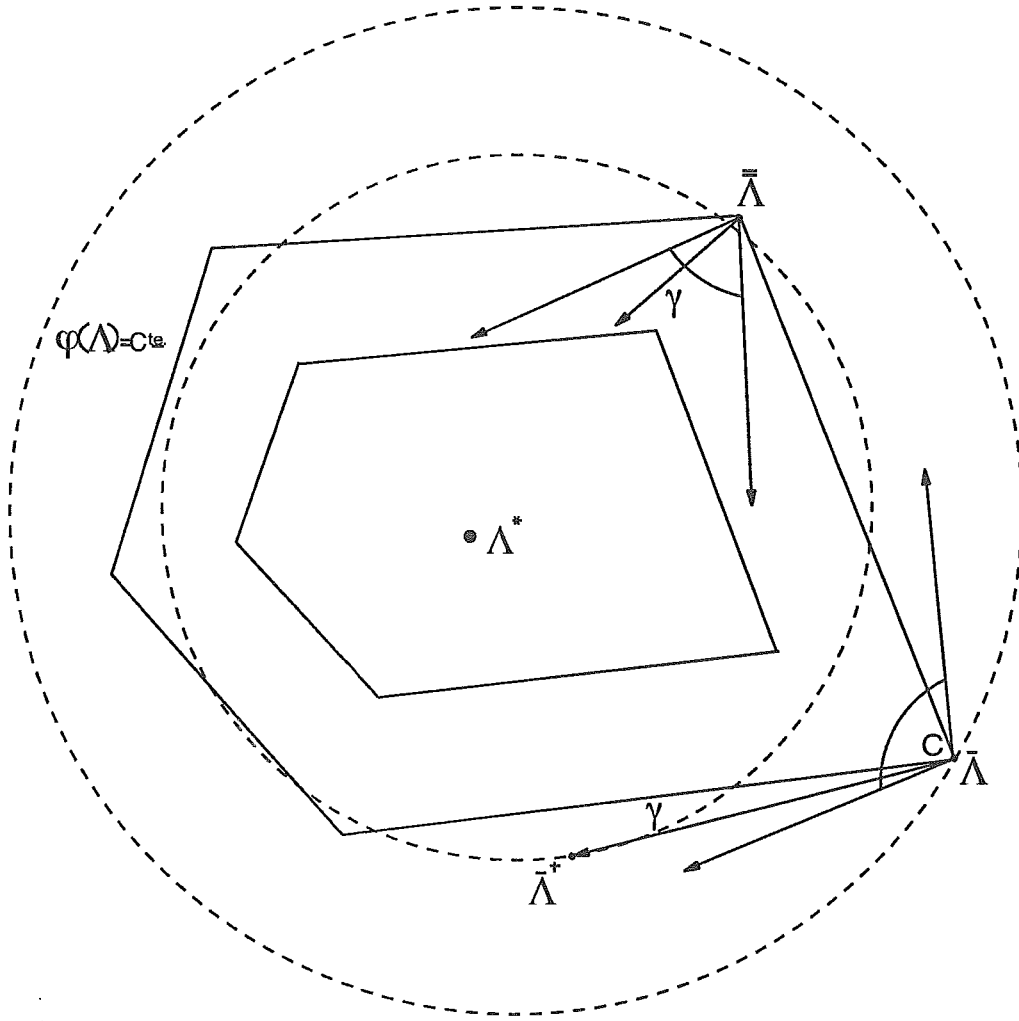


Figura 4.1: Subgradiente - direção de descida com relação a  $d(\Lambda^*, \Lambda)$

**Algoritmo I****Inicialização :**

Faça  $k = 0$ ;  
 Escolha  $\Lambda^0$ ;  
 calcule  $\gamma^0 \in \partial\varphi(\Lambda^0)$ .

**Passo 1 :**

Se  $\gamma^k = 0$ , **pare**;  
 senão, faça  
 $\Lambda^{k+1} = \Lambda^k + t_k \frac{\gamma^k}{\|\gamma^k\|}$ .  
 (ver obs. 2)

**Passo 2 :**

Calcule  
 $\gamma^{k+1} \in \partial\varphi(\Lambda^{k+1})$ ;  
 substitua  $k$  por  $k + 1$ ;  
 retorne ao passo 1.

**Observações:**

1. O teste  $\gamma^k = 0$  pode jamais ser alcançado, mesmo que  $\Lambda^*$  seja ótimo. Outros testes práticos deverão ser utilizados, levando em consideração a especificidade do problema.
2. O fato de não ser um método de subida para  $\varphi$  faz com que os passos  $t_k$  não possam ser, em princípio, obtidos por busca linear. Há diversas propostas, das quais listaremos abaixo as mais usuais:

**(a) Passo da série divergente:**

A exigência de  $t_k$  pequeno leva naturalmente a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0. \quad (4.13)$$

Por outro lado, isto pode impedir de se chegar ao conjunto dos pontos de mínimo. Observe também que

$$\|\Lambda^{k+1} - \Lambda^*\| \leq \sum_{i=1}^k t_i + \|\Lambda^0 - \Lambda^*\|.$$

Assim, é razoável exigir que

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = +\infty. \quad (4.14)$$

Com ( 4.13) e ( 4.14) demonstra-se, para funções côncavas (ou convexas, com  $\gamma^k$  substituído por  $-\gamma^k$  no algoritmo), que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max\{\varphi(\Lambda^j), j = 1, \dots, k\} = \sup_{\Lambda}(\varphi). \quad ([\text{Sho85}])$$

Este resultado parcial deve-se ao fato de que a sequência  $\varphi(\Lambda^k)$  não é monótona.

(b) **Passo constante:**

$$t_k = c,$$

onde  $c$  é uma constante.

(c) **Passo da série convergente (Shor, Goffin):**

$$t_k = t_0(\alpha)^k,$$

com  $0 < \alpha < 1$ .

(d) **Relaxação (Held, Wolfe, Crowder) :**

$$t_k = \rho \frac{\bar{\varphi} - \varphi(\Lambda^k)}{\|\gamma^k\|},$$

onde  $\bar{\varphi}$  é uma estimativa para o valor ótimo  $\varphi^*$  e  $0 < \rho \leq 2$  é o *coeficiente de relaxação*.

(Para detalhes dos três últimos, veja [Min86])

## 4.5.2 Método de Subgradientes com Dilatação do Espaço

A convergência do algoritmo acima é, em geral, muito lenta e depende, essencialmente, do tamanho do passo escolhido e da forma da função (angulosidade das curvas de nível, à qual se associa o chamado *número de condicionamento*). Em [Sho70b], encontra-se uma das numerosas variantes para o algoritmo anterior, desenvolvida com a finalidade de melhorar o número de condicionamento da função, e, portanto, de melhorar a taxa de

convergência. Shor sugere uma modificação na direção do movimento visando diminuir o ângulo entre o subgradiente e a direção do ótimo. Ele considera transformações de variáveis adequadamente escolhidas. São os chamados *métodos de dilatação do espaço*, que no caso de funções diferenciáveis correspondem à família dos métodos de Quasi-Newton de posto 1.

Considere o problema de maximização

$$\left\{ \max_{\Lambda \geq 0} \varphi(\Lambda) \right\}.$$

Suponha que numa iteração  $k$  do método dos subgradientes seja feita uma mudança de variáveis

$$\Lambda = B_k \sigma,$$

onde  $B_k$  é uma matriz não-singular com dimensão apropriada. Aplica-se, em seguida, o método dos subgradientes à função  $\psi(\sigma) = \varphi(B_k \sigma)$ . Isto significa fazer um movimento no espaço das variáveis  $\Lambda$  de acordo com a direção

$$d = B_k B_k^t \gamma$$

onde  $\gamma$  é o subgradiente de  $\varphi$  no ponto atual  $\Lambda^k$ .

De fato, sendo  $\varphi$  côncava, temos

$$\varphi(\Lambda) \leq \varphi(\Lambda^k) + \gamma^t (\Lambda - \Lambda^k), \forall \Lambda.$$

Então, a mudança de variáveis  $\Lambda = B_k \sigma$  fornece

$$\psi(\sigma) \leq \psi(\sigma^k) + \gamma^t B_k (\sigma - \sigma^k), \forall \sigma$$

e isto prova que  $B_k^t \gamma$  é um subgradiente de  $\psi$  em  $\sigma^k = B_k^{-1} \Lambda^k$ .

Sendo  $t_k > 0$  o tamanho do passo escolhido no algoritmo aplicado a  $\psi(\sigma)$ , devemos ter

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + t_k B_k^t \gamma,$$

e, conseqüentemente, é possível encontrar  $\Lambda^{k+1} = B_k \sigma^{k+1}$  pela fórmula

$$\Lambda^{k+1} = B_k \sigma^k + t_k B_k B_k^t \gamma \tag{4.15}$$

$$= \Lambda^k + t_k B_k B_k^t \gamma. \tag{4.16}$$



Como  $B_k$  é não-singular, a matriz  $B_k B_k^t$  é simétrica e positiva definida (logo, se  $\varphi$  fosse continuamente diferenciável, então a direção  $B_k B_k^t \gamma$  seria uma direção de subida). Observa-se que a fórmula (4.16) é análoga àquela usada nos métodos de métricas variáveis (métodos de Quasi-Newton), estando a diferença principal no modo pelo qual as matrizes  $B_k$  são atualizadas a cada passo. Para isto, Shor introduziu o conceito de **operador de dilatação**.

**Definição 1** *Seja  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|d\| = 1$ . Chamamos o operador linear  $R_\alpha(d)$  definido por*

$$R_\alpha(d)\Lambda = \Lambda + (\alpha - 1)\Lambda_d, \quad \forall \Lambda \in \mathbb{R}^n,$$

*um operador de dilatação na direção  $d$  com coeficiente de dilatação  $\alpha \geq 0$ , onde  $\Lambda_d = (\Lambda^t d)d$  é a projeção de  $\Lambda$  na direção  $d$ .*

Para melhor visualizar este operador observe na figura 4.2 o seu efeito para  $\alpha < 1$  e  $\alpha > 1$ . Note que para  $\alpha < 1$ , o vetor é contraído e para  $\alpha > 1$  é dilatado.

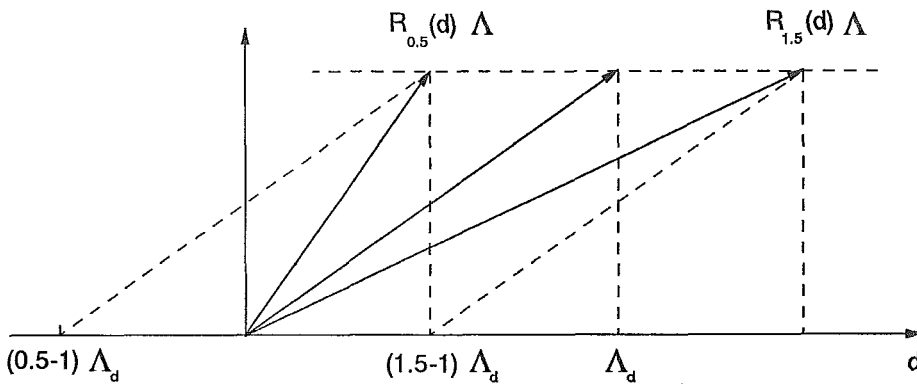


Figura 4.2: Efeito do operador de dilatação

O operador  $R_\alpha(d)$  tem, portanto, a propriedade de deixar intacto todo vetor ortogonal a  $d$ , mas multiplica por  $\alpha \geq 0$  todo vetor colinear com  $d$  ( $\alpha$  pode, dependendo do caso, ser maior ou menor que 1). Observe que  $R_\alpha(d)$  pode também ser colocado na forma

$$R_\alpha(d)\Lambda = \Lambda + (\alpha - 1)(dd^t)\Lambda, \quad \forall \Lambda \in \mathbb{R}^n$$

e, portanto, a matriz associada com este operador linear é

$$I + (\alpha - 1)(dd^t)$$

onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Nos métodos de dilatação do espaço, as matrizes  $B_k$  são atualizadas de acordo com a fórmula

$$B_{k+1} = B_k R_{\alpha_k}(d_k)$$

onde o coeficiente  $\alpha_k$  e a direção  $d_k$  dependem da variante particular escolhida.

A matriz inicial é geralmente a identidade ( $B_0 = I$ ). Numa iteração  $k$ , a matriz  $B_k$  obtida é o produto dos  $k$  operadores de dilatação anteriores

$$B_k = R_{\alpha_0}(d_0)R_{\alpha_1}(d_1) \cdots R_{\alpha_{k-1}}(d_{k-1})$$

A estrutura do algoritmo conceitual de dilatação do espaço é a seguinte:

### Algoritmo II

#### Inicialização :

São dados um ponto inicial  $\Lambda^0$ ,  
um subgradiente  $\gamma^0$  de  $\varphi$  em  $\Lambda^0$ ,  
e  $B_0 = I$ .

#### Passo 1 :

Na iteração  $k$ ,  $\Lambda^k$  é o ponto atual.  
Determine  $\Lambda^{k+1}$  através da fórmula ( 4.16), onde  $t_k$  é o tamanho do passo.  
Determine  $\gamma^{k+1}$ , subgradiente de  $\varphi$  em  $\Lambda^{k+1}$ .  
Obtenha uma direção  $d_k$  ( $\|d_k\| = 1$ ) (geralmente determinada a partir de  $\gamma^k$  ou da diferença  $\gamma^{k+1} - \gamma^k$ ) e  $\alpha_k$ , o coeficiente de relaxação na iteração  $k$ .  
Calcule  $B_{k+1} = B_k R_{\alpha_k}(d_k)$

#### Passo 2 :

Se o teste de parada for verificado, **pare**;  
senão, faça  $k \leftarrow k + 1$  e retorne ao passo 1.

Apresentamos a seguir a idéia de um método de dilatação que utiliza a direção obtida pela diferença de dois subgradientes sucessivos. A figura 4.3 ilustra o processo na primeira iteração de um exemplo simples. Os arcos representam o conjunto dos subgradientes nos pontos  $\Lambda^0$  e  $\Lambda^1$ . Em  $\Lambda^0$  aplicou-se a direção  $d_0 = -\gamma^0$  (o subgradiente fornecido), e em  $\Lambda^1$ , a direção  $d_1 = -\gamma^1 + \gamma^0$ . Observe que  $-\gamma^1$  não é direção de descida para  $\varphi$ , porém  $d_1$  o é.

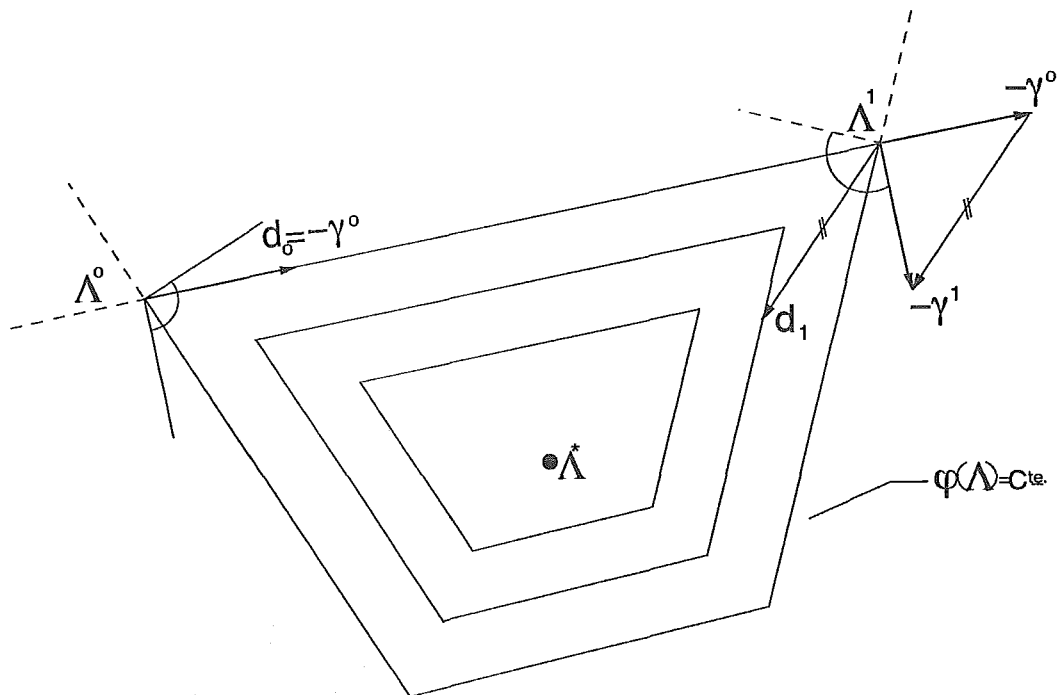


Figura 4.3: Direção da diferença de dois subgradientes sucessivos

### 4.5.3 Metodologia de Subgradientes com Dilatação do Espaço na Direção da Diferença de Dois Subgradientes Sucessivos: Aplicação a (PD)

O algoritmo conceitual de dilatação do espaço que utiliza a direção da diferença de dois subgradientes sucessivos é o seguinte:

**Algoritmo III**

(Shor et Zhurbenko [1971]; Shor [1975])

**Inicialização :**Faça  $k = 0$ , $B_0 = I$  e escolha  $0 < \alpha < 1$ .São dados  $\Lambda^0$ , um ponto inicial, e $\gamma^0$ , um subgradiente de  $\varphi$  em  $\Lambda^0$ .**Passo 1 :**Na iteração  $k$ ,  $\Lambda^k$  é o ponto atual.Escolha  $t_k$  de modo a maximizar  $\varphi$  na direção $B_k B_k^t \gamma^k$ .Se  $t_k = 0$  (passo nulo), então

$$\Lambda^{k+1} \leftarrow \Lambda^k$$

$$\gamma^{k+1} \leftarrow \gamma^k$$

$$\gamma^k \leftarrow \gamma^{k-1};$$

senão ( $t_k \neq 0$ ), encontre

$$\Lambda^{k+1} = \Lambda^k + t_k B_k B_k^t \gamma^k$$

e calcule  $\gamma^{k+1}$ .**Passo 2 :**

Faça

$$d_k = r_k / \|r_k\|$$

onde  $r_k = B_k^t [\gamma^{k+1} - \gamma^k]$ .Atualize  $B_k$  pela fórmula

$$B_{k+1} = B_k R_\alpha(d_k)$$

**Passo 3 :**

Regra de parada:

se satisfeita, **pare**;senão, faça  $k \leftarrow k + 1$  e retorne ao passo 1.

Observa-se que ainda que o algoritmo permaneça no mesmo ponto durante um certo número de iterações sucessivas (passo nulo), as matrizes  $B_k$  continuam sendo atualizadas (pela dilatação do espaço na direção da diferença entre os dois últimos subgradients distintos), o que torna possível encontrar, a cada iteração, uma nova direção de deslocamento. O algoritmo é desbloqueado ao se encontrar uma direção de subida.

A vantagem deste algoritmo é que a sequência de valores  $\varphi(\Lambda^k)$  gerados é monotonicamente crescente. A convergência para o ótimo pode ser provada, mas requer algumas hipóteses restritivas ([Sho75]) e, apesar de existirem alguns casos patológicos de não convergência, a experiência mostra que este método é, de fato, um dos mais eficientes para a solução de problemas de otimização não-diferenciável, conforme citado por [Min86].

O exemplo a seguir ilustra o algoritmo apresentado:

#### 4.5.3.1 Exemplo:

Considere o problema de maximizar uma função cujas curvas de níveis estão representadas na figura 4.4.

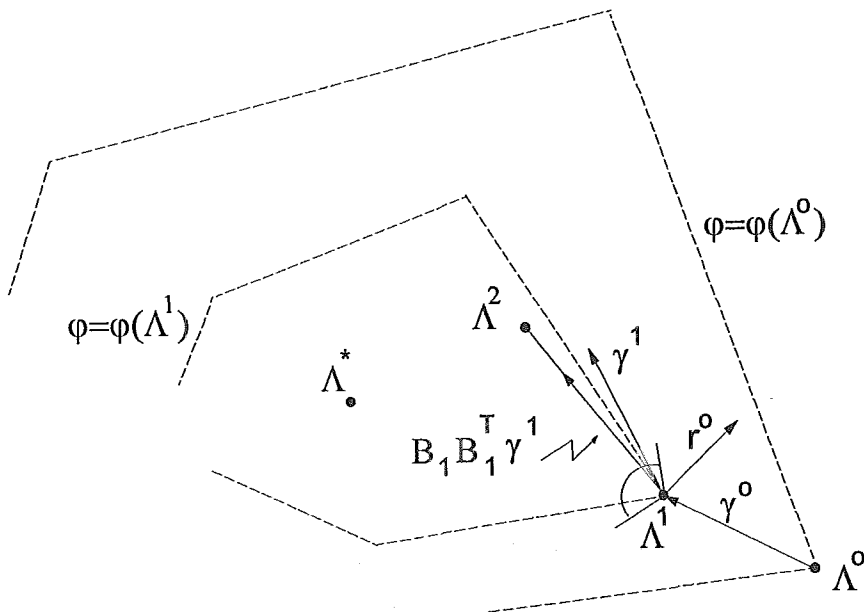


Figura 4.4: Exemplo

Sejam dados

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_0 = 0.9, \quad \Lambda^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Suponha que na 1ª iteração o subgradiente encontrado foi

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que ele não é uma direção de subida. Temos então que

$$r_0 = B_0^t[\gamma^1 - \gamma^0] = [\gamma^1 - \gamma^0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$d_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A nova matriz de dilatação será então dada por

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0.9 - 1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{0.1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.95 & -0.05 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \\ &= B_1^t \end{aligned}$$

Assim, na 2ª iteração, a nova direção será

$$B_1 B_1^t \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.05 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 & -0.05 \\ -0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.095 \\ 1.905 \end{pmatrix},$$

que, como atesta a figura 4.4, é uma direção de subida para a função.

## 4.5.3.2 Algoritmo Aplicado a (PD)

## Algoritmo IV

**Inicialização :**

São dados  $\Lambda^0 = (\Lambda_1^0, \Lambda_2^0) = (\lambda_0^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0)$ ,

$\Lambda_2^0 = (\lambda_3^0, \lambda_4^0) \geq 0$ ,

$x(\Lambda^0) = (f^0, u_0^0, u_1^0, u_2^0, m^0, n^0)$ ,

$\gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0)$ , construído de modo análogo a  $\Lambda^0$ ,

$0 < \alpha < 1$ .

$k \leftarrow 0$ .

$B_0 \leftarrow I$ .

**Passo 1 :**

Na iteração  $k$ ,

maximize  $\varphi(\Lambda)$  na direção  $B_k B_k^t \gamma^k$  para encontrar  $t_k$  (passo);

se  $t_k = 0$ , então faça

$$\Lambda^{k+1} \leftarrow \Lambda^k$$

$$\gamma_{k+1} \leftarrow \gamma^k$$

$$\gamma_k \leftarrow \gamma_{k-1}$$

e vá para o passo 4;

senão ( $t_k \neq 0$ ), então faça

$$\Lambda_1^{k+1} = \Lambda_1^k + t_k B_k B_k^t \gamma_1^k,$$

$$\Lambda_2^{k+1} = [\Lambda_2^k + t_k B_k B_k^t \gamma_2^k]^+.$$

**Passo 2 :**

Resolva os 6 subproblemas  $S_1$  a  $S_6$  e encontre

$$x(\Lambda^k) = (f^k, u_0^k, u_1^k, u_2^k, m^k, n^k).$$

Calcule o subgradiente  $\gamma^k$  de  $\varphi$  em  $\Lambda^k$

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \gamma_2^k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{8,0}u_0^k + A_{9,0}m^k \\ A_{8,1}u_1^k + A_{9,1}m^k \\ A_{8,2}u_2^k + A_{9,2}m^k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_{10,1}u_1^k + A_{10,2}u_2^k + A_{11}n^k - k_3 \\ A_{12}f^k + A_{13}m^k - k_4 \end{pmatrix} \end{bmatrix};$$

**Passo 3 :**

Testes de parada (indicativos):

- Viabilidade:

$$A_{8,0}u_0^k + A_{9,0}m^k = 0$$

$$A_{8,1}u_1^k + A_{9,1}m^k = 0$$

$$A_{8,2}u_2^k + A_{9,2}m^k = 0$$

$$\sum_{i=1}^2 A_{10,i}u_i^k + A_{11}n^k \leq k_3$$

$$A_{12}f^k + A_{13}m^k \leq k_4$$

- Verifique se o número de iterações não excedeu um número pré-determinado;
- Verifique se a diferença entre o valor da função objetivo primal e o da função objetivo dual nesse ponto  $(\Lambda_k, x(\Lambda_k))$  é menor do que uma certa tolerância;
- Verifique se a diferença entre os dois últimos valores da função objetivo dual obtidos é menor do que alguma tolerância;

**Passo 4 :**

Faça

$$r_k = B_k^t[\gamma^{k+1} - \gamma^k],$$

$$d_k = r_k / \|r_k\|,$$

$$B_{k+1} = B_k[I + (\alpha - 1)d_k d_k^t],$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

Retorne ao passo 1.



Observações:

1. No passo 1, os multiplicadores não negativos são atualizados de forma a manter a positividade, o que é obtido pela simples projeção do novo  $\Lambda_2^{k+1}$  no ortante positivo.
2.  $x(\Lambda^0)$  e  $\gamma^0$  são obtidos utilizando-se o passo 2. Esta duas passagem não foram explicitadas no algoritmo.
3. Caso o passo seja nulo na iteração 0, a atualização da matriz B será feita em função de apenas um subgradiente e não dois.

## 4.6 Métodos de Feixes

Apenas com o objetivo de mostrar uma outra aplicação do Lagrangeano Relaxado, apresentamos uma visão sucinta dos *métodos de feixes*.

Recordemos que o método dos planos secantes realizam, em essência, uma aproximação seccionalmente afim de  $\varphi$  dada por:

$$\varphi_{pc}(\Lambda^k, d) := \min_{1 \leq i \leq n} \{(\gamma^i)^t d + (\gamma^i)^t (\Lambda^k - \Lambda^i) + \varphi(\Lambda^i)\}, \quad \forall d \in \mathfrak{R}^n \quad (4.17)$$

onde  $d = \Lambda - \Lambda^k$ .

A fim de evitar a usual instabilidade dos modelos de corte, um termo estabilizador  $(1/2\mu)d^t d$ , com  $\mu$  positivo, é adicionado a (4.17). Espera-se que o mínimo  $d_k$  de

$$\varphi_{pc}(\Lambda^k, d) + (1/2\mu)d^t d$$

seja uma direção de subida para  $\varphi$ , de modo que uma busca linear ao longo de  $\Lambda^k + td_k$  (para algum  $t \geq 0$ ) proporcione o novo ponto  $\Lambda^{k+1}$  com  $\varphi(\Lambda^{k+1}) < \varphi(\Lambda^k)$ . Se ocorrer de  $\varphi_{pc}$  ser uma aproximação pobre para  $\varphi$  e  $d_k$  não ser uma direção de subuda (ou ainda se a busca linear levar a um acréscimo desprezível de  $\varphi$ ), o modelo poderá ser enriquecido através de um ou mais subgradientes do  $\partial\varphi(\Lambda^k + td_k)$  (com  $t > 0$  pequeno). Omitindo os detalhes, temos o seguinte algoritmo conceitual:

## ALGORITMO V

Na iteração  $k$ ,

**Passo 1:** Calcule  $d_k := d(\mu_k) := \operatorname{argmax}\{\varphi_{pc}(\Lambda^k, d) + (1/2\mu_k)d^t d, d \in \mathfrak{R}^n\}$ .

**Passo 2:** Faça uma busca linear de  $\varphi$  ao longo de  $\Lambda^k + td_k, t \geq 0$ .

Duas situações podem ocorrer:

- se na busca linear tem-se acréscimo “suficiente” em  $\varphi$ ,  
então tem-se um **passo sério**:

considere  $\Lambda^{k+1} := \Lambda^k + t_k d_k$ ,

com  $t_k \in \operatorname{argmin}_{t \geq 0} \varphi(\Lambda^k + t_k d_k)$ ,  $\Lambda_2 \geq 0$ ;

calcule  $\gamma^{k+1} \in \partial\varphi(\Lambda^{k+1} + t_k d_k)$ .

- se na busca linear tem-se um acréscimo “insuficiente” em  $\varphi$ ,  
então tem-se um **passo nulo**:

considere  $\Lambda^{k+1} := \Lambda^k$ ;

calcule  $\gamma^{k+1} \in \partial\varphi(\Lambda^{k+1} + t_k d_k)$ , para  $t > 0$  suficientemente pequeno.

Diferentemente dos métodos de subgradientes, a iteração acima garante um acréscimo para cada passo sério. Por outro lado, dispomos de um critério de parada:  $\Lambda^k$  é ótimo logo que  $d_k$  se aproxime de zero. Além disto, o ajuste da busca linear, com o comprimento de  $t_k$ , para a escolha de  $d_k$ , tem uma influência considerável na velocidade de convergência. Uma análise completa de convergência para funções convexas e não-convexas é encontrada em [LSB81], [Mif82] ou em [Kiw85].

## Capítulo 5

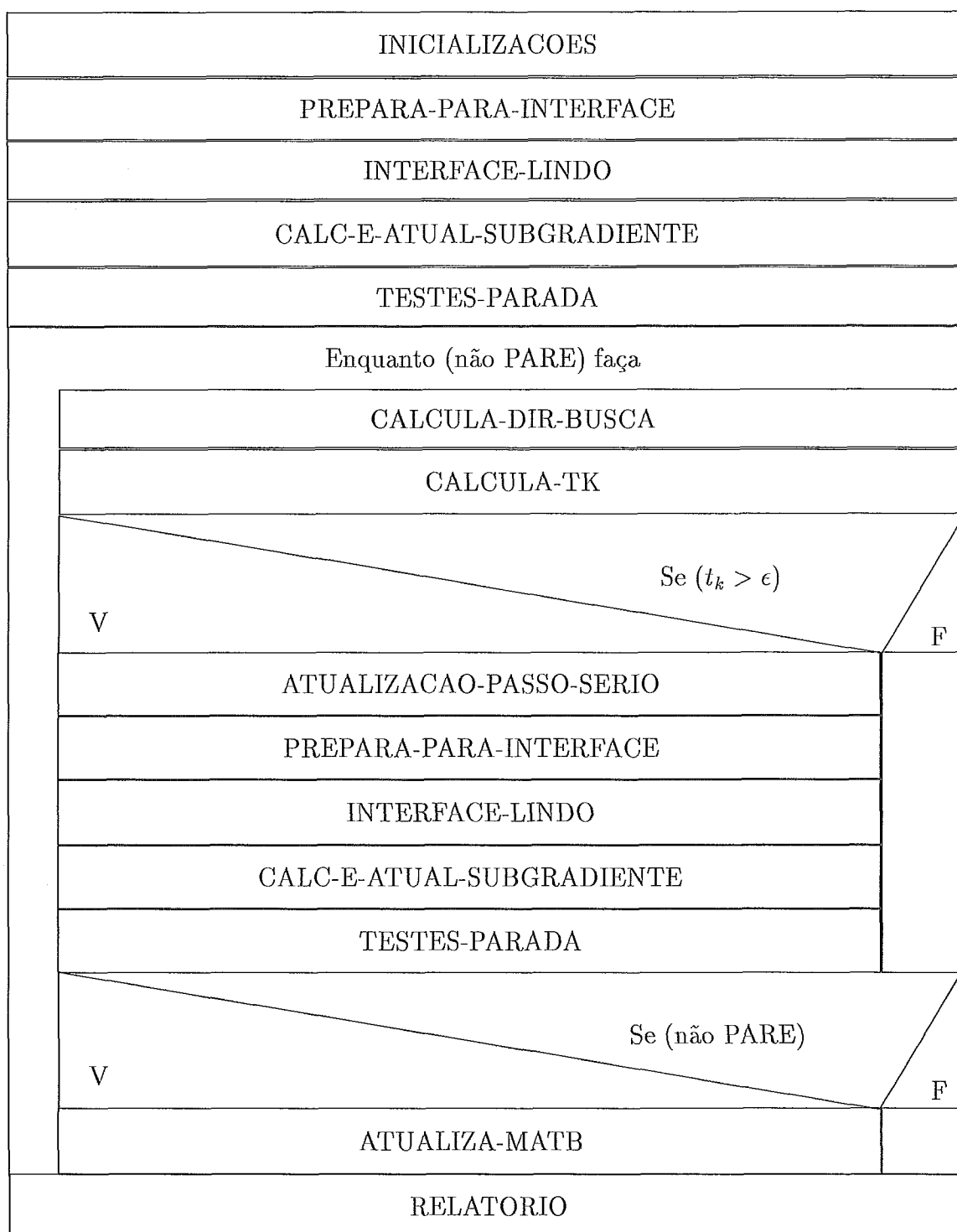
# IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

O algoritmo IV apresentado no capítulo anterior foi implementado e testado para diversas situações. Este capítulo mostrará alguns aspectos da sua implementação, e, em seguida, apresentará os resultados dos testes realizados, comparando-os com os resultados obtidos por [Vid92] usando o software LINDO.

### 5.1 O Programa

O programa computacional foi desenvolvido para microcomputadores compatíveis com IBM PC, utilizando a linguagem FORTRAN77.

As rotinas principais do programa são as enunciadas no diagrama NS abaixo:



O programa recebe como dado de entrada o arquivo do problema principal (no formato MPS) já devidamente particionado em 20 arquivos. Seis destes arquivos contêm os seis subproblemas (formato MPS), suas funções objetivos sendo formadas apenas com os termos que já existiam na função objetivo do problema original (*PP*). As matrizes  $A_{8,0}$ ,  $A_{8,1}$ ,  $A_{8,2}$ ,  $A_{9,0}$ ,  $A_{9,1}$ ,  $A_{9,2}$ ,  $A_{10,1}$ ,  $A_{10,2}$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  e  $A_{13}$  estão armazenadas em mais 13

arquivos. Existem ainda um arquivo com o nome das linhas (das restrições (10) a (14)), outro com o nome das variáveis e outro com os coeficientes não-nulos do lado direito (das restrições (10) a (14)).

Comentamos abaixo algumas das subrotinas:

**INICIALIZACOES:** Carrega todos os arquivos descritos acima (com exceção dos seis subproblemas) para vetores adequadamente construídos. Em seguida, inicializa o vetor de multiplicadores com valores viáveis, inicializa a matriz de dilatação com a identidade, e inicializa a variável lógica PARE com o valor “ falso ”. Quando ela assumir o valor verdadeiro é porque algum critério de parada foi aceito.

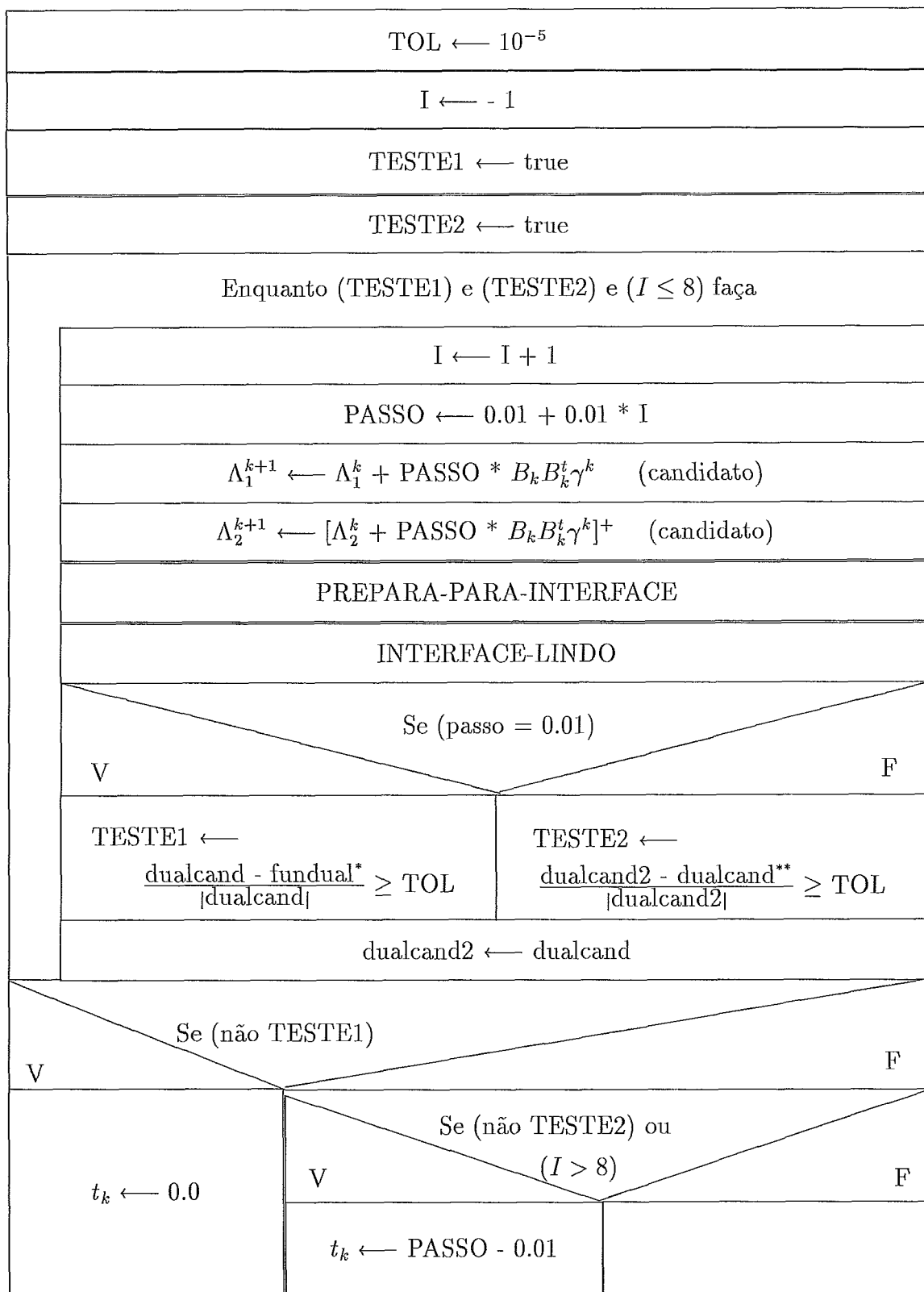
**INTERFACE\_LINDO:** Chama o software LINDO para resolver cada um dos subproblemas. Cria-se um arquivo “ .BAT ” que conterà todos os comandos a serem executados pelo LINDO. Cada subproblema terá sua função objetivo construída de forma atualizada (os multiplicadores mudam a cada iteração) e sua solução armazenada (função objetivo e variáveis). Após resolver cada subproblema, esta rotina chama uma outra que atualiza os valores das variáveis primais daquela iteração no vetor de variáveis correspondente.

Em seguida, de posse dos valores atualizados tanto das variáveis duais quanto das primais, ela calcula os valores das funções dual e primal para aquela iteração.

**CALC\_E\_ATUAL\_SUBGRADIENTE:** Calcula todas as multiplicações de matrizes por variáveis que fazem parte do cálculo do subgradiente. Em seguida, chama uma rotina que monta cada uma das 5 partições do subgradiente e o obtém efetivamente. Feito isto, haverá uma atualização de subgradientes de modo a ter sempre dois subgradientes sucessivos distintos. É feito um teste que verifica se o subgradiente obtido na iteração atual é “ suficientemente ” diferente do obtido na iteração anterior. Em função disto é feita a atualização.

**CALCULA\_DIR\_BUSCA:** Calcula o vetor  $B_k B_k^t \gamma^k$  para a iteração  $k$ .

**CALCULA\_Tk:** Está descrita no diagrama NS a seguir. Fazemos uma busca linear para testar se a direção acima é de subida (o que se justifica por não se ter a garantia antecipada de que a direção corrente é de subida) e encontrar o tamanho do passo. O número máximo de subiterações (I) varia de acordo com o exemplo testado (em geral, oito). As variáveis lógicas TESTE1 e TESTE2 controlam o crescimento da função dual. A tolerância TOL usada também varia com os exemplos.



\* - *fundual* é o valor de  $\varphi$  em  $\Lambda^k$  e *dualcand* é o valor de  $\varphi$  em  $\Lambda^{k+1}$  candidato.

\*\* - *dualcand2* é o valor de  $\varphi$  em  $\Lambda^{k+1}$  candidato da subiteração anterior.

ATUALIZA\_MATB; Faz a atualização da matriz B. O coeficiente de dilatação  $\alpha$  também varia nos exemplos.

## 5.2 Testes

Foram utilizados 3 cenários descritos em [Vid92], 2 para 3 estações e 1 para 4 estações. A tabela a seguir discrimina as quantidades de variáveis e restrições para os três cenários.

Variáveis Cenários	Reais				Sub	Inteiras		Sub	Total	Total
	$f$	$u_0$	$u_1$	$u_2$	Total	$m$	$n$	Total	Variáveis	Restrições
1 (3 est.)	72	0	18	0	90	18	3	21	111	112
2 (3 est.)	72	0	18	0	90	18	3	21	111	112
3 (4 est.)	172	16	16	8	212	38	4	42	254	256

**Observação:** Os cenários 1 e 2 se diferenciam por demandas e folgas de equipamentos diferentes.

Deve-se observar que houve a necessidade de adicionar restrições artificiais aos subproblemas das variáveis  $u_0, u_1, u_2$  e  $m$ . Isto porque em certas iterações algumas componentes destas variáveis tinham seus coeficientes na função objetivo do problema relaxado negativos, sendo as mesmas ilimitadas superiormente. Estas componentes assumiam assim valores infinitamente grandes o que acarretava resultados muito ruins. Essas restrições são  $|u_0|_\infty \leq u_0^0, |u_1|_\infty \leq u_1^0, |u_2|_\infty \leq u_2^0$  e  $|m|_\infty \leq m^0$ , onde  $u_0^0, u_1^0, u_2^0$  e  $m^0$  são números obtidos a partir de resultados já conhecidos em [Vid92].

Observamos ainda o seguinte comportamento genérico: As componentes das variáveis de fluxo são geralmente ótimas nas primeiras iterações; as componentes das variáveis  $m, n, u_0, u_1$  e  $u_2$  são geralmente nulas exceto aquelas que assumem o valor das cotas  $m^0, n^0, u_0^0, u_1^0$  e  $u_2^0$ , respectivamente. Pode acontecer ainda de umas poucas dividirem o valor dessas cotas.

Diante desta situação, resolvemos restringir ainda mais os subproblemas, colocando uma cota superior para cada componente (“up bound”). Mais uma vez os valores

destas cotas foram obtidos a partir dos resultados já conhecidos em [Vid92].

Mostramos a seguir alguns resultados. Eles servem essencialmente para validar a metodologia, que, com certeza, ainda necessita de múltiplos refinamentos (veja capítulo seguinte). Ao todo testamos os cenários 1, 2 e 3 para 10 conjuntos de parâmetros diferentes cada um (30 exemplos). Como muitos resultados foram semelhantes entre os três cenários, descrevemos 6 casos típicos do cenário 1, 3 do cenário 2 e 2 do cenário 3.

Para cada cenário, dependendo do exemplo, o programa utilizou como ponto de partida dois vetores de multiplicadores ( $\Lambda$ ) distintos: um arbitrário e outro próximo da solução ótima. A tabela à esquerda exibe o conjunto de parâmetros escolhido (dependendo do exemplo, com ou sem cotas superiores). A da direita mostra os valores das funções dual e primal, além do número de variáveis primais corretas em determinadas iterações.

### Cenário 1:

Valor ótimo primal (LINDO): 0.0

#### **Exemplo 1:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 3654.6	116	108
PASSO = 0.01	1	- 3099.9	116	108
$\alpha = 0.5$	3	- 2158.5	116	108
$I \leq 8$	4	- 520.2	155	83
TOL = $10^{-2}$	6	- 442.8	155	83
Sem cotas	20	- 442.8	155	83

Na inicialização a solução das variáveis primais já foi a melhor (além de ser viável, errou apenas 3 das 111 variáveis). A partir da 6ª iteração não houve mais passo sério em 20 iterações.



**Exemplo 2:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 3654.6	116	108
PASSO = 0.01	6	- 587.3	155	83
$\alpha = 0.5$	10	- 156.0	155	83
$I \leq 4$	11	- 136.6	96	83
TOL = $10^{-5}$	14	- 96.5	96	107
Sem cotas	20	- 96.5	96	107

Solução primal inicial análoga à do exemplo anterior. A partir da 14ª iteração não houve mais passo sério em 20 iterações.

**Exemplo 3:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 3654.6	116	108
PASSO = 0.01	5	- 436.8	155	83
$\alpha = 0.1$	7	- 242.4	155	83
$I \leq 8$	8	- 160.0	1.0	90
TOL = $10^{-2}$	9	- 124.5	1.0	90
Sem cotas	20	- 124.5	1.0	90

Solução primal inicial análoga à do exemplo anterior. A partir da 10ª iteração não houve mais passo sério em 20 iterações. O valor da função primal quase chegou ao

ótimo. Entretanto, para esse valor (1.0) os valores das variáveis primais foram os piores (errou 21 das 111 variáveis, além desta solução ser não viável).

#### Exemplo 4:

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 3427.9	115.3	98
PASSO = 0.01	1	- 1873.7	115.3	92
$\alpha = 0.5$	2	- 821.9	128.9	70
$I \leq 8$	3	- 344.4	82.9	96
TOL = $10^{-2}$	5	- 79.5	41.9	99
Com cotas	20	- 79.5	41.9	99

Para este cenário, em que a solução primal é quase toda nula (exceto pelas variáveis de fluxo), as cotas superiores não ajudaram. A melhor solução encontrada teve 12 erros e foi não viável. A partir da 5ª iteração não houve mais passo sério.

#### Exemplo 5:

Usando como  $\Lambda^0$  inicial um vetor próximo do ótimo ( $\Lambda^* = 0.0$ ), a solução primal encontrada foi *ótima* na inicialização. Este resultado é o mesmo para quaisquer valores de  $\alpha$ , TOL, I, PASSO e acréscimo de cotas superiores.

**Exemplo 6:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda = 2.0$	0	- 930.0	116	88
PASSO = 0.01	1	- 708.0	116	108
$\alpha = 0.5$	3	- 58.4	96.0	108
$I \leq 8$	5	- 39.6	1.0	110
TOL = $10^{-2}$	6	- 26.5	1.0	110
Sem cotas	20	- 12.4	1.0	110

A solução inicial foi não viável com 23 erros. A partir da 5ª iteração o resultado foi o melhor obtido para todos os exemplos deste cenário (valor 1.0 com apenas um erro).

**Cenário 2:**

Valor ótimo primal (LINDO): 118.1

**Exemplo 1:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 2010.6	116	101
PASSO = 0.01	4	- 1724.9	116	101
$\alpha = 0.5$	9	- 301.1	155	88
$I \leq 8$	11	- 208.4	155	88
TOL = $10^{-2}$	14	- 139.8	155	88
Sem cotas	20	- 139.8	155	88

Na inicialização errou apenas 10 das 111 variáveis, com solução não viável. A partir da 14ª iteração não houve mais passo sério em 20 iterações.

Observação: Resultado análogo com  $TOL \leq 10^{-5}$ .

### Exemplo 2:

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 2010.6	116	102
PASSO = 0.01	8	- 536.7	116	102
$\alpha = 0.01$	9	- 440.2	155	77
$I \leq 4$	10	- 291.3	155	83
$TOL = 10^{-5}$	14	- 70.2	155	96
Sem cotas	20	- 70.2	155	96

Na inicialização errou 9 variáveis (entre  $m$  e  $u_1$ ). A partir da 14ª iteração errou 15 (observa-se que das 15, 13 eram de fluxo e apenas 2 eram do tipo  $m$  e  $u_1$ ). Ambas as soluções foram não viáveis.

Observação: Com  $PASSO = 0.05$  a diferença foi que a partir da 3ª iteração (7 erros) não houve mais passo sério em 20 iterações.

**Exemplo 3:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 1898.6	115.3	101
PASSO = 0.01	1	- 1743.0	115.3	101
$\alpha = 0.01$	4	- 742.5	115.9	102
$I \leq 4$	7	- 169.5	154.9	102
TOL = $10^{-5}$	8	- 96.8	154.9	102
Com cotas	20	- 69.8	154.9	102

Com cotas superiores os resultados não foram muito diferentes: na inicialização errou 10 variáveis (8 do tipo  $m$  e 2 do tipo  $u_1$ ) e a partir da 4ª iteração errou 9 (1 do tipo  $m$  e 8 do tipo  $u_1$ ).

**Cenário 3:**

Valor ótimo primal (LINDO): 1408.0

**Exemplo 1:**

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 49.6	6611.7	137
PASSO = 0.01	1	- 49.6	6611.7	137
$\alpha = 0.5$	3	”	”	”
$I \leq 8$	4	”	”	”
TOL = $10^{-2}$	6	”	”	”
Sem cotas	20	”	”	”

Na inicialização acertou 137 variáveis e os resultados permaneceram idênticos para o restante das iterações. As soluções foram não viáveis.

### Exemplo 2:

Parâmetros	Iteração	Fç. Dual	Primal	Acertos
$\Lambda^0$ arbitrário	0	- 49.6	4051.3	134
PASSO = 0.01	1	- 49.5	1148.3	134
$\alpha = 0.01$	3	"	"	"
$I \leq 8$	4	"	"	"
TOL = $10^{-2}$	6	"	"	"
Com cotas	20	"	"	"

Resultados análogos aos do exemplo anterior.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E EXTENSÕES

Este trabalho objetivou principalmente o seguinte:

1. Formulação por Relaxação Lagrangeana de um problema linear inteiro que modela um sistema telefônico urbano;
2. Aplicação do método de Dilatação de Shor na resolução do problema dual;
3. Programação do algoritmo de Shor e aplicação a exemplos simples;

Obtivemos essencialmente a validação da metodologia, que mereceria melhorias computacionais no sentido de bem dominar o parâmetro  $\alpha$  de dilatação, os testes que determinam a aceitação de uma nova iteração (“ passo sério ”), a resolução dos seis subproblemas de modo mais rápido (em vez do esquema LINDO tipo “ caixa preta ”).

Seria também interessante a comparação com o método de subgradientes clássico, assim como com os algoritmos de feixes.

De qualquer modo, o fato de, para 4 estações, os tempos computacionais serem compatíveis com os do LINDO, leva-nos a crer que soluções sub-ótimas de boa qualidade serão obtidas em tempos bem melhores que os do LINDO em problemas reais, podendo evidentemente servir como ponto de partida para heurísticas de melhoria de solução.

# BIBLIOGRAFIA

- [Cab93] Lucídio A. F. Cabral. Uma variante do método de Benders. Tese de Mestrado, COPPE /UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, PESC, 1993.
- [CG59] E. W. Cheney and A. A. Goldstein. Newton's method for convex programming and tchebycheff approximation. *Numerische Mathematik*, 1:253–268, 1959.
- [DW61] G. Dantzig and P. Wolfe. The decomposition algorithm for linear programs. *Econometrica*, 29:767–778, 1961.
- [Eve63] H. Everett. Generalized lagrange multipliers method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11:399–417, 1963.
- [Fis81] M. L. Fisher. The lagrangean relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, 27:1–18, 1981.
- [Geo74] A. Geoffrion. Lagrangean relaxation and its uses in integer programming. *Mathematical Programming Study*, 2:82–114, 1974.
- [Kel60] J. E. Kelley. The cutting plane method for solving convex programs. *S.I.A.M.*, 8:703–712, 1960.
- [Kiw85] K. C. Kiwiel. *Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Las70] L. S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. The Macmillian Company, 1970.
- [Lem80] C. Lemarechal. *Extensions diverses des méthodes de gradient et applications*. Tese de Doutorado, Université Paris IX, 1980.



- [Lem91] C. Lemarechal. Lagrangean decomposition and nonsmooth optimization: Bundle algorithm, prox-iteration, augmented lagangean. Research report, INRIA, 1991.
- [LSB81] C. Lemarechal, J. J. Strodiot, and A. Bihain. On a bundle algorithm for nonsmooth optimization. In S. M. Robinsons O. L. Mangasarian, R. R. Meyer, editor, *Nonlinear Programming 4*, pages 245–282. Academic Press, 1981.
- [Mif82] R. Mifflin. A modification and an extension of lemarchal’s algorithm for nonsmooth minimization. *Mathematical Programming Study*, 17, no 1:77–90, 1982.
- [Min86] M. Minoux. *Mathematical Programming, Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, 1986.
- [MVS+92] A. O. Moreno, E. Vidal Jr., C. A. Santos, P. R. Oliveira, and S. I. M. Rodrigues. Planejamento da configuração otimizada da rede de transmissão digital. *Revista TELEBRÁS*, pages 20–34, 1992.
- [NW88] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons, 1988.
- [OPC93] P. R. Oliveira, P. R. Pinheiro, and L. A. F. Cabral. Metodologia de feixes da programação não diferenciável aplicada a um problema linear inteiro de grande porte. In *XXV SBPO*, Campinas - SP, Novembro 1993.
- [OPRC92] P. R. Oliveira, P. R. Pinheiro, S. I. M. Rodrigues, and L. A. F. Cabral. Metodologia para um problema de grande porte em um sistema telefônico urbano: uma aplicação de métodos de feixes. In *XXIV SOBRAPO*, Salvador - BA, Novembro 1992.
- [Sha79] J. F. Shapiro. A survey of lagrangean techniques for discret optimization. *Ann. Discret Math.*, 5:113–138, 1979.
- [Sho70a] N. Z. Shor. Convergence rate of the gradient descent method with dilatation of the space. *Cybernetics*, 6(2):102–108, 1970.
- [Sho70b] N. Z. Shor. Utilization of the operation of space dilation in the minimization of convex functions. *Cybernetics*, 1:7–15, 1970.

- [Sho75] N. Z. Shor. Convergence of a gradient method with space dilatation in the direction of the difference between two successive gradients. *Kibernetika*, 11(4):48–53, 1975.
- [Sho85] N. Z. Shor. *Minimization Methods for Nondifferentiable Functions*. Springer-Verlag, 1985.
- [SZ70] N. Z. Shor and N. G. Zhurbenko. A minimization method using the operation of extension of the space in the direction of the difference of two successive gradients. *Cybernetics*, 7(3):450–459, 1970.
- [VCO<sup>+</sup>93] E. Vidal Jr., L. A. F. Cabral, P. R. Oliveira, P. R. Pinheiro, and S. I. M. Rodrigues. *Otimização da Configuração da Rede de Transmissão - Relatório no 1*. COPPETEC /UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.
- [Vid92] E. Vidal Jr. Planejamento da configuração otimizada da rede de transmissão digital. Tese de Mestrado, COPPE /UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, PESC, 1992.
- [XCO<sup>+</sup>93] G. Xexeo, L. A. F. Cabral, P. R. Oliveira, P. R. Pinheiro, and S. I. M. Rodrigues. *Otimização da Configuração da Rede de Transmissão - Relatório no 2*. COPPETEC /UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.