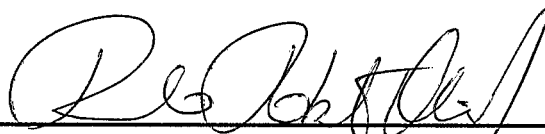


UMA VARIANTE DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE
BENDERS

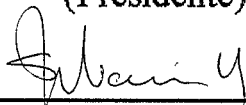
LUCÍDIO DOS ANJOS FORMIGA CABRAL

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E
COMPUTAÇÃO.

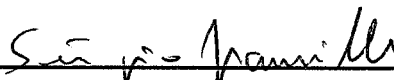
Aprovada por :



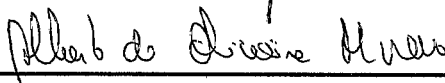
Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr. ING.
(Presidente)



Prof. Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.



Prof. Sergio Granville, Ph. D.



Eng. Alberto de Oliveira Moreno, M. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1993

CABRAL, LUCÍDIO DOS ANJOS FORMIGA

Uma Variante do Método de Decomposição de Benders. [Rio de Janeiro] 1993.

VIII, 51 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1993)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Decomposição de Benders

2. Programação Linear Mista

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais, Lisboa e Socorro.
Às minhas irmãs Luciane e Lucimary.
Aos meus irmãos Lisboa Jr. e Adriano.
À Ana Maria.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Paulo Roberto Oliveira, pela sua orientação, amizade e apoio, que possibilitaram o desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo Plácido Rogério Pinheiro e a Sandra Isabel Marques Rodrigues pelo trabalho conjunto no projeto e pela amizade sincera.

Ao Professor Antonio Clécio Fontenele pelo incentivo durante a graduação, o que motivou a realização deste mestrado.

A Marcílio, Arlene, Manoel e Washington que sempre foram uma referência de apoio irrestrito.

Aos amigos, em especial, a Walmir, Erivaldo, Paulinho, Assis, Ademir, Carré, Lilian, Sônia, Denise, Marcelo, Evandro, Xavier, Renato Volponi, Ana Paula e Marcelo Dib pelos momentos de grata confraternização.

A Digna Faria, Lícia, Gláucia, Sueli e Luís pelo carinho, amizade e apoio recebidos.

A Universidade Federal do Piauí pela licença concedida.

Ao CNPQ e a CAPES pelas Bolsas concedidas.

RESUMO DA TESE APRESENTADA A COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.).

UMA VARIANTE DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

DEZEMBRO, 1993

Orientador : Paulo Roberto de Oliveira

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

No tratamento de problemas lineares inteiros mistos de grande porte é usual a utilização de técnicas de decomposição, que se aproveitem da estrutura do modelo. Assim inicialmente revisa-se sucintamente as principais estruturas que aparecem em problemas reais.

Nesta tese ilustra-se a aplicação de algumas destas técnicas a um problema proveniente do processo de planejamento da configuração da rede de transmissão digital da TELERJ. O enfoque principal, no entanto, é dado ao método de decomposição de Benders.

O método de decomposição de Benders é um processo iterativo, no qual cortes são gerados a partir da solução exata do subproblema gerador de restrições; aqui propomos que tais cortes passem a ser gerados a partir da solução de um novo subproblema sujeito agora também a uma região de confiança.

Uma implementação para o método de Benders usual foi desenvolvida e testada para cenários diferentes em uma rede hipotética envolvendo 4 estações telefônicas.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M. Sc.).

A VARIANT OF BENDERS' DECOMPOSITION METHOD

Lucídio dos Anjos Formiga Cabral

DECEMBER, 1993

Thesis Supervisor: Paulo Roberto de Oliveira

Department : Systems Engineering and Computer Science

In large scale mixed integer linear problems it's usual the utilization of decomposition technics, that take advantage of the model structure. So first, a quick revision of the principal structures that arise in real problems is made.

This work presents the application of some of these technics to a problem deriving from the project configuration process of the digital transmission network of TELERJ. Special attention is given to Benders' decomposition method.

The Bender's decomposition method is an iterative process, in which cuts are produced from the exact solution of constraints generation subproblem; this work suggests theses cuts to be produced from the solution of a new subproblem subject to a trust region.

An implementation of Benders' usual method was developed and tested to different situation in a hypothetical network consisted of four stations.

ÍNDICE

	página
I. - INTRODUÇÃO	1
I.1 - A estrutura de problemas lineares de grande porte	1
I.1.1 Estrutura bloco angular	2
I.1.2 Estrutura escada (staircase)	3
I.1.3 Problemas lineares com muitas linhas ou colunas ..	4
I.2 - Apresentação do problema	5
II. - TÉCNICAS DE DECOMPOSIÇÃO	8
II.1- Relaxação Lagrangeana e Dantzig-Wolfe	8
II.1.1 Relaxação Lagrangeana e cálculo da função dual por decomposição	8
II.1.2 Método de decomposição de Dantzig-Wolfe	11
II.2 - Decomposição de Benders	14
II.4.1 - Princípio da decomposição de Benders	16
II.4.2 - Algoritmo	18
II.4.3 - Convergência	20
II.4.4 - Conexão com o método de decomposição de Dantzig-Wolfe	23

III. - APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM REGIÕES DE CONFIANÇA	27
III.1 - Incorporando o conceito de regiões de confiança	27
III.2 - Formulação proximal e um novo subproblema equivalente a (DLRC)	28
III.3 - Algoritmo interno	32
III.4 - Algoritmo proposto	33
III.5 - Convergência	35
IV. - RESULTADOS COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES	
IV.1 - Introdução	39
IV.2 - Cenários para 4 estações	39
IV.3 - Implementação e Estruturas de dados	46
IV.4- Conclusões e Extensões	48
V. - BIBLIOGRAFIA	50

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - A estrutura de problemas lineares de grande porte

Com o advento da era do computador, a programação linear tornou-se uma importante ferramenta para solucionar problemas práticos. Aplicações de programação inteira também foram largamente propostas, mas infelizmente nenhum método para resolver problemas inteiros tem obtido tanto sucesso como o método simplex para a programação linear. Entretanto, é frequentemente possível melhorar o tempo computacional explorando a estrutura especial de um problema. E felizmente, problemas de grande dimensão quase sempre possuem uma estrutura especial.

Para problemas lineares, a estrutura do sistema é refletida pela distribuição dos elementos não nulos na matriz dos coeficientes das restrições. Quando o problema é grande, a densidade de elementos não nulos na matriz, normalmente, é menor que 5 %.

As técnicas para resolver problemas matemáticos grandes podem ser divididas em duas classes: métodos diretos e técnicas de decomposição (Lasdon [1970]). Os métodos diretos especializam um algoritmo existente para uma classe particular de problemas. A segunda classe é composta por algoritmos de decomposição, os quais subdividem os problemas grandes, de acordo com sua estrutura especial, em subproblemas menores que são tratados separadamente. As dependências entre subproblemas são usualmente tratadas por um subproblema mestre que os coordena e permite trocar informação. As vantagens desta última técnica incluem a liberdade de resolver cada subproblema usando qualquer algoritmo desejado; a capacidade de escrever e analisar módulos independentes do programa principal e além disso reduz a quantidade requerida de memória. A principal desvantagem é que os subproblemas devem ser resolvido várias vezes, uma vez a cada iteração do algoritmo.

Nas seções subsequentes examinaremos algumas estruturas especiais, a saber: estrutura bloco-diagonal, estrutura escada e

mais a estrutura de problemas lineares com muitas linhas ou colunas, conforme apresentado, por exemplo, em (Minoux [1986]).

I.1.1 - Estrutura bloco-diagonal

A1	A2	Ak
B1		
	B2	
		Bk

Fig. I.1(a) Estrutura bloco-diagonal c/ restrições de acoplamento

B1		F1
	B2	F2
		Bk
		Fk

Fig. I.1(b) Estrutura bloco-diagonal c/ variáveis de acoplamento

A1	A2	A3	F0
B1			F1
	B2		F2
		Bk	Fk

Fig. I.1(c) Estrutura bloco-diagonal com ambas variáveis e restrições de acoplamento

A figura I.1(a) corresponde ao caso de k blocos associados com k subproblemas, os quais seriam independentes se não houvesse a presença das restrições de acoplamento. A partir desta observação, é natural fazer-se uso da relaxação lagrangeana para as restrições de acoplamento, a qual nos leva ao cálculo da função dual por decomposição. Outras técnicas usuais são: decomposição por recursos e decomposição Dantzig-Wolfe. Este tipo de estrutura usualmente ocorre quando os k blocos ou subsistemas de variáveis ocorrem juntos compartilhando recursos nas restrições de acoplamento.

A figura I.1(b) corresponde ao caso de k blocos que seriam independentes sem a presença das variáveis de acoplamento. Isto nos leva a considerar o particionamento, separando as variáveis de acoplamento das demais. Resultaria então, em k blocos associados a k subproblemas independentes. Para este caso, a decomposição de Benders é uma técnica usual. Neste tipo de estrutura, os k blocos ou subsistemas de variáveis interagem somente por participarem em algumas atividades comuns.

A figura I.1(c) mostra os k blocos acoplados devido à presença de ambas variáveis e restrições de acoplamento. Este é o caso mais complexo de tratar-se, e para ele foi desenvolvido um procedimento de particionamento particular (Ritter [1967]). Neste caso, os k blocos ou subsistemas de variáveis tanto compartilham algum tipo de recurso, como também participam de algumas atividades comuns.

Desde já esclarecemos que o problema de interesse específico deste trabalho possui uma estrutura bloco diagonal com ambas restrições e variáveis de acoplamento, gozando portanto de um maior grau de complexidade. Para resolvermos tal problema adotaremos um enfoque de decomposição de Benders, devido ao fato das variáveis de acoplamento, serem inteiras. O desenvolvimento será detalhado na seção II.2.

I.1.2 Estrutura escada

Consideremos a seguinte estrutura

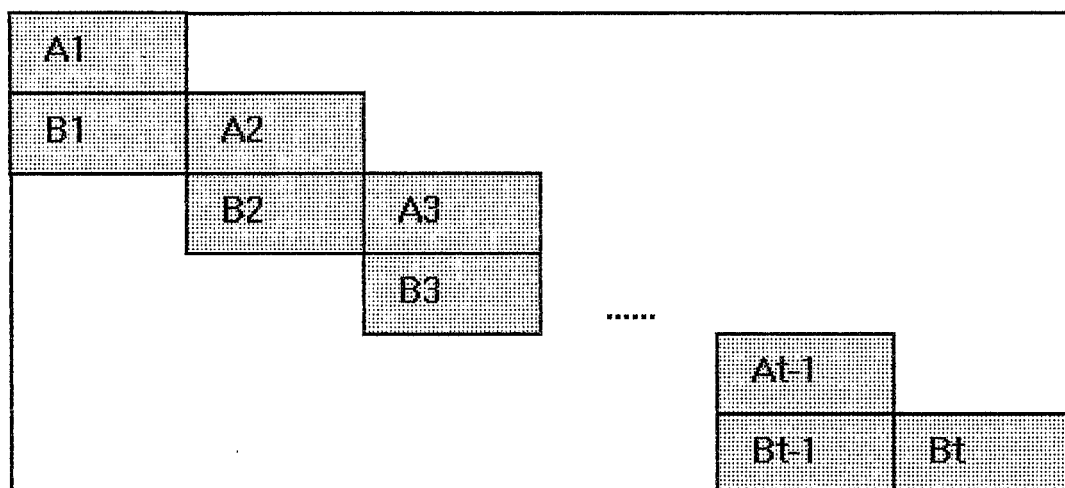


Fig. I.2 - Matriz escada

A qual apresenta todos os seus elementos não nulos em blocos centrados aproximadamente sobre e abaixo da diagonal principal. Tal estrutura é chamada matriz escada .

As submatrizes A_t , $t=1,2,\dots,T$, são chamadas blocos diagonais e as submatrizes B_t , $t=1,2,\dots,T$, são chamadas blocos fora da diagonal. Para qualquer coluna não nula de um bloco fora da diagonal, a coluna associada de A é chamada coluna de acoplamento, com a correspondente variável de acoplamento sendo a componente adequada do vetor de variáveis do problema.

Este tipo de estrutura aparece, por exemplo, em problemas de controle ótimo. Problemas deste tipo requerem o desenvolvimento de algoritmos especiais, que explorem a estrutura escada (Pollenz [1980]).

I.1.3 Problemas lineares com muitas linhas ou colunas

O elevado número de linhas e/ou colunas em um problema linear pode tornar difícil o tratamento da respectiva matriz dos coeficientes das restrições. Nestes casos é usual aplicar o princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe para reduzir o número de linhas, havendo no entanto o custo adicional de muito mais colunas; entretanto, se apenas um deles é elevado, podemos resolver o problema através dos métodos simplex (ou dual simplex), de tal modo que não seja necessário examinar todas as colunas (ou linhas).

Assim, diferentemente da maneira padrão como esses métodos funcionam, a coluna ou a linha do tableau, requerida pelo método simplex ou dual simplex para a atualização da matriz base corrente através de operações de pivoteamento, é gerada através da resolução de um subproblema construído adequadamente. Como gerar uma linha do tableau dual é equivalente a gerar uma coluna do primal, tal procedimento é chamado geração de coluna, o qual será desenvolvido na seção II.1.2.

Então se o problema a ser resolvido possui muitas colunas, pode-se aplicar ao seu primal os métodos simplex ou dual simplex; se possui muitas linhas, usa-se o seu dual ao invés do primal e procede-se similarmente. Em ambos os casos, o método de resolução será combinado com um procedimento de geração de colunas.

I.2 Apresentação do problema

O modelo para o planejamento da configuração otimizada da rede de transmissão digital, desenvolvido sob o convênio COPPE/TELERJ, (Moreno [1992], Vidal [1992] e outros), configura um problema linear inteiro misto, cuja resolução é abordada neste trabalho. Este pode ser escrito da seguinte forma:

$$(PIM) \text{ Min } c^t m + c^t n + \sum_{i=0}^2 e_i^t u_i$$

s. a:

$$A_1 f = K_0 \quad (1)$$

$$A_2 f = 0 \quad (2)$$

$$A_3 f = 0 \quad (3)$$

$$A_{4,0} u_0 = 0 \quad (4)$$

$$A_5 u_0 \leq K_1 \quad (5)$$

$$A_{4,1} u_1 = 0 \quad (6)$$

$$A_{4,2} u_2 = 0 \quad (7)$$

$$A_6 m \leq 0 \quad (8)$$

$$A_7 m \leq K_2 \quad (9)$$

$$A_{8,0} u_0 + A_{9,0} m = 0 \quad (10)$$

$$A_{8,1} u_1 + A_{9,1} m = 0 \quad (11)$$

$$A_{8,2} u_2 + A_{9,2} m = 0 \quad (12)$$

$$A_{10,1} u_1 + A_{10,2} u_2 + A_{11} n \leq K_3 \quad (13)$$

$$A_{12} f + A_{13} m \leq K_4 \quad (14)$$

$$m \geq 0, n \geq 0 \text{ inteiros; } f, u_i \geq 0, i = 0, 1, 2.$$

Note-se que as restrições (10)-(14) são de acoplamento, e além disto, as variáveis inteiras m e n aparecem como variáveis de acoplamento.

Nos capítulos subsequentes, todos os enfoques serão dados com base neste problema, a menos de exceções explicitadas.

O problema inteiro misto (PIM) pode ser condensado na seguinte notação, onde consideramos, para efeito de simplicidade, as restrições (5),(13) e (14) como sendo igualdades.

CAPÍTULO II

TÉCNICAS DE DECOMPOSIÇÃO

Nas seções deste capítulo aplicaremos algumas técnicas de decomposição ao problema apresentado na seção I.2.

I.1 Relaxação Lagrangeana e Dantzig-Wolfe

Estas técnicas possuem aspectos altamente vantajosos quando a estrutura do problema é naturalmente bloco-diagonal com restrições de acoplamento, uma vez que permite decompor trivialmente o problema mestre, no caso de Dantzig-Wolfe e a função dual, no caso da relaxação lagrangeana.

Inicialmente trataremos da relaxação lagrangeana e em seguida apresentamos a decomposição de Dantzig-Wolfe diferentemente da apresentação clássica (Dantzig [1961]), de modo a mostrar a profunda relação existente entre estas duas técnicas (Magnanti [1976]).

II.1.1 Relaxação Lagrangeana e cálculo da função dual por decomposição

Consideremos o problema inteiro misto apresentado na seção I.2, ou seja:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^t y + e^t x \\ \text{s. a:} & \\ \text{(P)} & Bx \quad \quad = b \quad \quad (1) \\ & \quad \quad Cy \leq d \quad \quad (2) \\ & Dx + Fy = f \quad \quad (3) \\ & y \geq 0 \text{ inteiro, } x \geq 0 \end{array}$$

Para simplificar a apresentação, introduzimos os seguintes politopos $X = \{x / Bx = b, x \geq 0\}$, $Y = \{y / Cy \leq d, y \geq 0, \text{inteiro}\}$ e $S = \{(x, y) / x \in X \text{ e } y \in Y\}$, os quais suporemos limitados e não vazios. Com algumas modificações a relaxação lagrangeana pode ser aplicada sem dificuldades para o caso de politopos não limitados.

Observando o problema acima, podemos constatar que o conjunto de restrições (3) consiste das restrições complicadoras do problema, assim a relaxação lagrangeana destas é indicada. Associando a estas um vetor γ , o qual denota os multiplicadores de Lagrange, definimos para qualquer γ a função lagrangeana $L(x, y, \gamma)$ por

$$\begin{aligned} L(x, y, \gamma) &= c^t y + e^t x - \gamma^t (Dx + Fy - f) \\ &= \gamma^t f + (e^t - \gamma^t D)x + (c^t - \gamma^t F)y, \quad (x, y) \in S \end{aligned}$$

e a função dual $W(\gamma)$ é dada por

$$\begin{aligned} W(\gamma) &= \underset{(x, y) \in S}{\text{Min}} \{L(x, y, \gamma)\} \\ &= \gamma^t f + \underset{(x, y) \in S}{\text{Min}} \{(e^t - \gamma^t D)x + (c^t - \gamma^t F)y\} \\ &= \gamma^t f + \underset{x \in X}{\text{Min}} \{(e^t - \gamma^t D)x\} + \underset{y \in Y}{\text{Min}} \{(c^t - \gamma^t F)y\} \end{aligned}$$

É fácil perceber que a função dual se decompõe em dois subproblemas onde as respectivas funções objetivo têm seus coeficientes perturbados pelo valor da variável dual γ multiplicada pela submatriz apropriada.

Assim o cálculo da função dual reduz-se a solução de subproblemas lineares e lineares inteiros independentes e de dimensões reduzidas, cada um correspondendo a um bloco do problema original. Tal propriedade da função dual é que possibilita resolvermos o problema original por decomposição.

Agora, definamos o problema dual (D) de (P) :

$$(D) \quad \begin{array}{l} \text{Max } W(\gamma) \\ \gamma \text{ livre} \end{array}$$

A teoria da dualidade lagrangeana nos permite afirmar as seguintes propriedades :

i) $W(\cdot)$ é uma função côncava de γ é diferenciável em quase todos os pontos.

ii) Se (P) tem uma solução ótima finita (x^*, y^*) , então $L(x, y, \gamma)$ possui um ponto de sela (x^*, y^*, γ^*) , e para todo γ e para todo (x, y) viável para (P), temos

$$W(\gamma) \leq W(\gamma^*) \leq e^t x^* + c^t y^* \leq e^t x + c^t y$$

iii) Seja \tilde{x} e \tilde{y} soluções ótimas de seus respectivos subproblemas, então o vetor

$$\gamma = f - D\tilde{x} - F\tilde{y}$$

é um subgradiente da função $W(\cdot)$ no ponto γ .

Deste modo, dispomos de uma maneira direta de calcular um subgradiente de $W(\gamma)$ em γ , o qual é um elemento do subdiferencial $\partial W(\gamma)$. Em virtude de conhecermos um subgradiente em cada ponto da função, podemos assim aplicar um método de subgradientes para resolver o problema dual (D). Tal método obtém boas aproximações do valor ótimo da função dual $W(\gamma^*)$ e bons limites inferiores sobre o custo de uma solução ótima para o problema original (P).

Outras técnicas podem ser aplicadas na resolução do problema dual, uma delas é o uso do procedimento de geração de colunas, o que é mostrado na próxima subseção.

II.1.2 Método de Decomposição de Dantzig-Wolfe

O problema dual (D) pode ser resolvido pelo método de decomposição de Dantzig-Wolfe, como a seguir. Antes porém, devemos enunciá-lo como um problema linear.

Usando o fato de que o ótimo dos subproblemas em x e y são alcançados em um vértice dos seus respectivos poliedros e denotando por V^x o conjunto dos vértices de X e por V^y o conjunto dos vértices (inteiros) de Y , obtemos a equivalente expressão

$$W(\gamma) = \gamma^t f + \underset{x \in V^x}{\text{Min}}\{(e^t - \gamma^t D)x\} + \underset{y \in V^y}{\text{Min}}\{(c^t - \gamma^t F)y\}$$

Se denotarmos por V^s o conjunto dos vértices de S , onde $(X, Y) \subset S$, assumindo conhecidos todos os vértices do poliedro S , tal que $|V^s| = p$, então a função dual para todo γ deve satisfazer

$$W(\gamma) \leq \gamma^t f + (e^t - \gamma^t D)x^i + (c^t - \gamma^t F)y^i$$

para todo $(x^i, y^i) \in V^s$, $i=1, 2, \dots, p$.

Como, para todo γ^* , a igualdade é verificada na inequação acima para pelo menos uma desigualdade, podemos concluir que $W(\gamma^*)$ corresponde ao valor ótimo do seguinte problema linear:

Max v

v, γ

s.a.

$$v \leq \gamma^t f + (e^t - \gamma^t D)x^i + (c^t - \gamma^t F)y^i \quad i=1, 2, \dots, p$$

o qual pode também ser escrito, fazendo (para $i=1,2,\dots,p$)

$$z^i = c^t y^i + e^t x^i \quad e \quad f - Dx^i - Fy^i = \alpha^i$$

Como

$$\begin{aligned} & \text{Max } v \\ & \quad v, \gamma \\ & \quad \text{s.a.} \\ \text{(I)} \quad & v - \gamma^t \alpha^i \leq z^i \quad , i=1,2,\dots,p \end{aligned}$$

Desde que o número de vértices do conjunto V^s seja muito grande, isto é, $p \gg 0$, é impraticável tentar resolver (I) com todas as suas restrições. Neste caso podemos recorrer ao método de decomposição de Dantzig-Wolfe, o qual consiste em aplicar um procedimento de geração de colunas para o dual de (I).

Associando um vetor u de variáveis duais às restrições de (I), podemos formular o seu dual, como a seguir:

$$\begin{aligned} \text{(ID)} \quad & \text{Min } \sum_{i=1}^p z^i u^i \\ & \text{s.a} \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^p \alpha^i u_i = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^p u_i = 1 \quad (5)$$

$$u_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,p \quad (6)$$

Apesar deste problema possuir um número limitado de restrições (uma a mais que o número de restrições relaxadas), tem o inconveniente da enorme quantidade de variáveis; além disso, ele não pode ser resolvido como um problema comum, uma vez

que não se conhece todos os vértices dos poliedros X e Y , que aparecem na formulação do problema (I).

Usaremos então o problema dual (ID) restrito a um pequeno número de suas variáveis, o qual será chamado problema mestre restrito. Adota-se um procedimento de geração de colunas a adicionar ao problema mestre restrito. Tal procedimento deve ser eficiente e no intuito de o formalizarmos, denotemos por v e γ os vetores de variáveis duais associadas com as restrições (4) e (5) respectivamente de (ID), então deve existir um método capaz de encontrar a variável u_s tal que

$$z^s + \gamma^t \alpha^s - v = \underset{i=1, \dots, p}{\text{Min}} \{z^i + \gamma^t \alpha^i - v\}$$

Isto significa encontrar a coluna s tal que

$$z^s + \gamma^t \alpha^s = \underset{i=1, \dots, p}{\text{Min}} \{z^i + \gamma^t \alpha^i\}$$

o que é estritamente equivalente a calcular a função dual $W(\cdot)$ no ponto γ .

Neste caso o algoritmo de gerar as colunas não é senão um método para calcular $W(\gamma)$. Os subproblemas são resolvidos independentemente um do outro, em x , podendo ser pelo método simplex. Se denotarmos por \bar{x} e \bar{y} os vértices soluções destes subproblemas, então o elemento $(x^s, y^s) \in V^s$ é dado por $x^s = \bar{x}$ e $y^s = \bar{y}$.

Assim, a cada iteração produz-se uma coluna adicional para o problema mestre, definida por

$$\begin{aligned} \alpha^s &= f - Dx^s - Fy^s \\ z^s &= c^t y^s + e^t x^s \end{aligned}$$

Em seguida, adiciona-se esta coluna ao problema mestre corrente resultando num problema mestre aumentado, o qual quando resolvido produz um novo vetor de variáveis duais γ e

este é passado ao algoritmo gerador de colunas, o qual irá produzir uma nova coluna, e o processo se repetirá, se a nova variável gerada satisfizer

$$z^s + \gamma^t \alpha^s - v < 0$$

caso contrário, o critério de parada é satisfeito, uma vez que todas as variáveis de (ID) possuem custo reduzido maior ou igual a zero; então a corrente solução do problema mestre é uma solução ótima de (ID).

Assim, se u^* é a solução ótima do problema mestre corrente, então v denota o valor ótimo de (I) e podemos encontrar a solução do problema original por

$$x^* = \sum_{i/u_i^* \geq 0} x^i u_i^* \quad (7)$$

e

$$y^* = \sum_{i/u_i^* \geq 0} y^i u_i^* \quad (8)$$

Isto decorre da definição de $\alpha^i = f - Dx^i - Fy^i$, da verificação óbvia de (4),(5) e (6). Então, por substituição, chegamos (7) e (8).

A expressão acima para y^* levará, em geral, a uma proposta de solução não inteira, que no entanto pode ser utilizada como ponto de partida para alguma heurística visando à melhoria da solução.

II.2 Decomposição de Benders

O método de decomposição de Benders (Benders [1962]) é uma forma clássica de abordar problemas lineares de grande porte, tendo sido originalmente desenvolvido para problemas de programação linear inteira-mista. Não obstante, se aplica a problemas mais gerais, por exemplo se as variáveis puderem ser decompostas em dois subconjuntos, de tal forma que fixados os

valores das variáveis em um dos subconjuntos, resulte em problema de programação linear.

Consideremos o problema inteiro misto apresentado na seção I.2, ou seja:

$$(P) \quad \text{Min} \quad c^t y + e^t x$$

s. a:

$$Bx \quad = \quad b \quad (9)$$

$$Cy \quad \leq \quad d \quad (10)$$

$$Dx + Fy \quad = \quad f \quad (11)$$

$$y \geq 0 \text{ inteiro, } x \geq 0 \quad (12)$$

Antes de prosseguirmos com a exposição, daremos a interpretação real para as variáveis x e y . Esta última representa as variáveis de compra de módulos de equipamentos, sendo o custo de compra dado por $c^t y$ e as restrições que dizem somente respeito as variáveis de compra de módulos de equipamentos são representados por (10). As variáveis x representam as variáveis de operação (fluxos de sistemas de 2 Mbit/seg, número de pares de fibras monomodo e multimodo) e o custo de operação (ou utilização) é dado por $e^t x$. As restrições de atendimento à demanda, conservação de fluxo, frentes de transmissão, capacidade dos nós e capacidade dos arcos são representadas por (9) e (11).

Podemos observar que fixando um vetor de variáveis y em $y=y^*$ que satisfaça às restrições (10) e (11), o problema resultante é:

$$(PL) \quad \text{Min} \quad e^t x$$

s. a:

$$Bx \quad = \quad b \quad (13)$$

$$Dx \quad = \quad f - Fy^* \quad (14)$$

$$x \geq 0 \quad (15)$$

o qual é um problema linear. A idéia do algoritmo de decomposição de Benders consiste em a cada iteração escolher um vetor de variáveis inteiras y (uma proposta de compra de módulos de equipamento); resolver o problema (PL) e usar a

informação do dual do mesmo para determinar uma nova proposta de compra de módulos de equipamentos "melhor" que a anterior. Observe-se que desta forma se aproveita a linearidade do problema (PL) podendo ser resolvido com algoritmos especializados.

II.2.1 Princípio de decomposição de Benders

A técnica de decomposição de Benders consiste em reformular o problema original (P) em um problema teoricamente equivalente, consistindo somente das variáveis y e uma variável contínua. Para tanto, observemos inicialmente que somente y viáveis podem ser considerados para (PL), ou seja, y deve estar no conjunto

$$\bar{Y} = \{ y / \exists x \geq 0 \text{ tal que } Bx = b, Dx = f - Fy, Cy \leq d, y \geq 0 \text{ inteiro} \}$$

Assim, \bar{Y} é o conjunto das propostas de compra de módulos de equipamentos.

Podemos agora reescrever o problema original (P) como

$$\underset{y \in \bar{Y}}{\text{Min}} \{ c^t y + \underset{x}{\text{Min}} \{ e^t x / Bx = b, Dx = f - Fy \} \} \quad (16)$$

Para $y \in \bar{Y}$ fixo, o problema de minimização interno em (16), toma a forma de (PL) e o seu dual é dado por

$$\text{(DL) } \underset{\text{s.a}}{\text{Max}} \quad \gamma^t b + \theta^t (f - Fy) \quad (17)$$

$$B^t \gamma + D^t \theta \leq e \quad (18)$$

onde γ, θ são os vetores de multiplicadores duais correspondentes às restrições do problema (PL). Seja $U = \{ (\gamma, \theta) / (18) \text{ sendo verificada} \}$. Note-se que o conjunto U não depende da decisão de compra de módulos de equipamentos, dado por y .

Assumiremos neste trabalho que o problema (PL) é viável e tem solução ótima finita, logo o seu dual (DL) também é viável e

tem solução finita. Tal suposição é feita aqui visando simplificar a apresentação, e poderia ser facilmente retirada em uma análise mais detalhada, onde os raios extremais do conjunto $U = \{(\gamma, \theta) / B^t \gamma + D^t \theta \leq 0\}$ seriam considerados.

Temos ainda que, se o problema dual (DL) possui solução ótima finita, então o máximo ocorre em um dos vértices do poliedro convexo U . Assim o problema pode ser reescrito como

$$\text{Max}_{i=1, \dots, p} \{ \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \} \quad (19)$$

onde (γ_i, θ_i) , $i=1, 2, \dots, p$ são os pontos extremos do conjunto U .

Sob nossas suposições e usando o teorema da dualidade da programação linear, podemos ainda reescrever o problema original (P) como:

$$\text{Min}_{y \in \bar{Y}} \{ c^t y + \text{Maximo}_{i=1, \dots, p} \{ \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \} \} \quad (20)$$

Definindo

$$z = c^t y + \text{máximo}_{i=1, \dots, p} \{ \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \} \quad (21)$$

Nós temos $z \geq c^t y + [\gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy)]$ para $i=1, \dots, p$ e o problema original (P) torna-se equivalente ao seguinte problema inteiro:

$$(PM) \quad \text{Minimizar } z$$

$$z \geq c^t y + \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad , i=1, \dots, p$$

$$Cy \leq d$$

$$y \geq 0 \text{ inteiro}$$

ou em outra forma equivalente (Nemhauser [1988])

$$\begin{aligned}
 \text{(PM')} \quad & \text{Minimizar} \quad c^t y + z' \\
 & z', y \\
 & z' \geq \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad , i=1, \dots, p \\
 & Cy \leq d \\
 & y \geq 0 \text{ inteiro}
 \end{aligned}$$

Note-se que o problema mestre (PM') pode conter um número muito grande de restrições, dependendo do número de vértices de U; no entanto, na solução ótima apenas algumas das restrições serão ativas (isto é, atendidas na igualdade), o que sugere o uso de técnicas de relaxação.

O algoritmo de decomposição de Benders, descrito a seguir, é uma técnica de relaxação que consiste na solução iterativa dos problemas (DL) e (PM'), gerando-se a cada iteração uma restrição, que passa a compor o problema (PM'). Isto é repetido até se alcançar a precisão desejada para o critério de parada.

II.2.2 Algoritmo de Decomposição de Benders

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo (0): Calcule (γ_0, θ_0) , solução viável de (DL). Se (γ_0, θ_0) não existe, pare; (P) não tem solução viável. Caso contrário, faça $I=1$, $z_L = -\infty$, $z_U = +\infty$ e vá para o passo (1).

Passo (1): Resolva o problema relaxado (problema mestre);

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad c^t y + z' \\
 & z', y \\
 & z' \geq \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad , i=0, \dots, I-1 \\
 & Cy \leq d \\
 & y \geq 0, \text{ inteiro}
 \end{aligned}$$

Seja (y_I, z_I') a sua solução ótima. Então faça

$$z_l = c^t y_I + z_I'$$

o limite inferior para o valor ótimo da função objetivo para o problema original.

Vá para o passo (2)

Passo (2): Resolva (DL) para $y = y_I$ dado,

$$w = \text{Max } \gamma^t b + \theta^t (f - Fy)$$

s.a

$$B^t \gamma + D^t \theta \leq e$$

Seja (γ_I, θ_I) a sua solução ótima. Então faça

$$z_u = \min \{z_u, c^t y_I + w\}$$

o limite superior para a função objetivo do problema original. Vá para o passo (3).

Passo (3): Se $z_u - z_l$ satisfaz a precisão desejada, então y_I é ótimo para o problema original e z_u é o valor ótimo; vá para o passo (4). Caso contrário, faça $I=I+1$, gere uma nova restrição,

$$z' \geq \gamma_I^t b + \theta_I^t (f - Fy)$$

e volte ao passo (1).

Passo (4): Seja $y^* = y_I$, então resolva (PL) dado por

$$\begin{aligned} \text{(PL)} \quad & \text{Min } e^t x \\ & \text{s. a:} \\ & Bx = b \\ & Dx = f - Fy^* \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

O algoritmo de Benders, como descrito acima, adequa-se a problemas que envolvem processos de decisão sequenciais. No

passo (2) obtemos os custos das variáveis x associados a uma decisão y tomada no passo (1), então tais custos são usados para determinar uma nova proposta y , melhor que a anterior.

O critério de parada usado está baseado em limites inferiores e superiores sobre o valor ótimo z^* da função objetivo do problema original, ou seja, $z_l \leq z^* \leq z_u$. Para provar que z_l e z_u são válidos, basta observar que no passo (1) temos uma relaxação do problema original escrito na forma equivalente (PM'). Então z_l é um limite inferior do valor ótimo do problema original. Para z_u , basta observar que a cada iteração obtemos y_I e substituindo este em (PL), temos como solução x_I e por fim o desejado limite superior $z_u = c^t y_I + e^t x_I$, uma vez que o par (y_I, x_I) é solução viável do problema original (P).

Como (PL) e (DL) são duais e equivalentes, se (γ_I, θ_I) é solução de (DL) para y_I dado, então é verdade que

$$z_u = c^t y + \gamma_I^t b + \theta_I^t (f - Fy_I)$$

e portanto z_u é um limite superior para z^* .

Vale ressaltar que cada limite superior está associado a uma solução viável, assim sendo o algoritmo procura por soluções viáveis cada vez melhores, sendo que uma vez satisfeita uma dada tolerância, escolhe-se a última solução viável como solução do problema.

II.2.3 Convergência finita

A convergência do algoritmo é garantida pelo fato de que U tem um número finito de pontos extremos. É necessário ainda mostrar que a cada iteração, obtém-se no passo (2) um novo ponto extremo, ou seja, o procedimento enumera estes pontos sem repeti-los (Salkin [1989]).

Suponha que k vértices de U já tenham sido gerados, todos distintos, a partir do problema (DL) no passo (2). Então o problema inteiro no passo (1) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && c^t y + z^t \\ & && z^t, y \\ & && z^t \geq \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad , i=1, \dots, k \\ & && Cy \leq d \\ & && y \geq 0 \text{ inteiro} \end{aligned}$$

Seja (y^*, x^*) a solução ótima associada a este problema. Sabe-se que

$$z_l = c^t y^* + z^* \geq c^t y^* + \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy^*) \quad , i=1, \dots, k \quad (22)$$

é um limite inferior para o valor ótimo da função objetivo do problema original a qual denota z^* . Logo, temos que

$$c^t y^* + \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy^*) \leq z_l \leq z^* \quad \forall i=1, \dots, k \quad (23)$$

Agora resolvendo-se o problema (DL) no passo (2), obtem-se o vértice $(\gamma_{k+1}^t, \theta_{k+1}^t)$ e pela teoria da dualidade da programação linear tem-se que

$$\gamma_{k+1}^t b + \theta_{k+1}^t (f - Fy^*) = e^t x^* \quad (24)$$

onde x^* é a solução ótima para o problema (PL).

Como $z_u = c^t y^* + e^t x^*$ é um limite superior para o valor ótimo z^* da função objetivo do problema original, então

$$z^* \leq z_u = c^t y^* + e^t x^* = c^t y^* + \gamma_{k+1}^t b + \theta_{k+1}^t (f - Fy^*) \quad (25)$$

Combinando (23) e (25) tem-se que:

$$c^t y^* + \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy^*) \leq z_l \leq z^*$$

e

$$z^* \leq z_u = c^t y^* + \gamma_{k+1}^t b + \theta_{k+1}^t (f - Fy^*)$$

para todo $i, i=1, \dots, k$. Agora se a igualdade vale, $z_l = z_u$, então (y^*, x^*) resolve o problema original (P). Caso contrário,

$$\gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy^*) < \gamma_{k+1}^t b + \theta_{k+1}^t (f - Fy^*) \quad , \forall i=1, \dots, k$$

Portanto $(\gamma_{k+1}, \theta_{k+1}) \neq (\gamma_i, \theta_i)$, para todo $i=1, \dots, k$. Então, a menos que o critério de otimalidade seja satisfeito, um novo vértice, diferente dos anteriores, é gerado. Assim sendo, no pior caso, todos os vértices serão enumerados antes de achar a solução ótima.

A prova de convergência mostra também que a cada vez que o problema (PM') é resolvido no passo (1), uma nova solução inteira é gerada. Por absurdo, suponha que ao resolver (PM') com k cortes, a solução encontrada y^* seja repetida. Nesse caso, ao resolver o problema (DL) no passo (2), obteríamos o vetor $(\gamma_{k+1}, \theta_{k+1})$, satisfazendo

$$\gamma_{k+1}^t b + \theta_{k+1}^t (f - Fy^*) = \gamma_l^t b + \theta_l^t (f - Fy^*)$$

para algum $l \in \{1, \dots, k\}$. No entanto, isto só ocorre quando o critério de otimalidade é atingido.

Assim fica demonstrado que o algoritmo não repete soluções já enumeradas e que converge após um número finito de iterações.

II.2.4 Conexão com o método de decomposição de Dantzig-Wolfe

É interessante observar que quando o problema (P) é linear existe uma relação importante entre os supra citados métodos (Eiselt [1987]). Consideremos novamente o problema apresentado na seção I.4, ou seja:

$$\begin{aligned}
 (\text{Po}) \quad & \text{Min} \quad c^t y + e^t x \\
 & \text{s. a:} \\
 & \quad Bx \quad = b \\
 & \quad \quad Cy \leq d \\
 & \quad Dx + Fy = f
 \end{aligned}$$

$$y \geq 0 \text{ inteiro, } x \geq 0$$

e seu dual

$$\begin{aligned}
 (\text{Do}) \quad & \text{Max} \quad \gamma^t b + \mu^t d + \theta^t f \\
 & \text{s.a} \\
 & \quad B^t \gamma + D^t \theta \leq e \\
 & \quad C^t \mu + F^t \theta \leq c \\
 & \quad \mu \leq 0
 \end{aligned}$$

Demonstraremos que aplicar o algoritmo de Benders ao problema (Po) é equivalente a aplicar o algoritmo de decomposição de Dantzig-Wolfe ao problema dual (Do).

Por simplicidade, suponhamos que o $\Lambda = \{(\gamma, \theta) / B^t \gamma + D^t \theta \leq e\}$ seja um polítopo convexo, e assim podemos expressar qualquer ponto contido nele, como uma combinação convexa de seus vértices. Note-se ainda que o conjunto Λ é o mesmo conjunto U das soluções viáveis do dual do subproblema de Benders. Como antes, para o conjunto U, pode-se generalizar para o caso em que P é ilimitado; nesse caso, expressamos qualquer ponto de P como a soma de uma combinação convexa de seus pontos extremos e uma combinação linear com coeficientes não-negativos de seus raios extremos. Mas por suposição Λ é

limitado e portanto possui um número finito de vértices. Então escrevendo qualquer $(\gamma, \theta) \in \Lambda$ como mencionado acima, temos:

$$\gamma = \sum_j \lambda_j \gamma_j, \theta = \sum_j \lambda_j \theta_j \quad (26)$$

$$\sum_j \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \quad (27)$$

e substituindo (γ, θ) no problema dual (Do), obtemos o problema mestre de Dantzig-Wolfe.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_j (b^t \gamma_j + f^t \theta_j) \lambda_j + d^t \mu \\ \text{s.a.} \quad & \end{aligned}$$

$$C^t \mu + \sum_j (F^t \theta_j) \lambda_j \leq c \quad (28)$$

$$\sum_j \lambda_j = 1 \quad (29)$$

$$\lambda_j \geq 0, \forall j$$

$$\mu \leq 0$$

Tomando y como sendo o vetor de variáveis duais associadas ao primeiro grupo de restrições (28) e z' a variável dual que corresponde à restrição (29), obtemos o dual do problema mestre acima, como a seguir

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^t y + z' \\ & z', y \end{aligned}$$

$$z' \geq \gamma_j^t b + \theta_j^t (f - Fy), \forall j$$

$$Cy \leq d$$

$$y \geq 0 \text{ inteiro}$$

Comparando o problema acima com o programa mestre de Benders, percebe-se que:

"dual do problema mestre de Dantzig-Wolfe \equiv problema mestre de Benders "

Tanto o algoritmo de Benders como o algoritmo de Dantzig-Wolfe não trabalham com o problema mestre completo; este último consiste em uma técnica de geração de colunas, gerando as colunas a entrar na base conforme elas sejam requeridas.

Suponhamos que (y_o, z'_o) sejam as variáveis duais associadas a solução ótima de algum problema mestre restrito. Para ver se esta solução resolve o problema mestre, calcula-se o fator de máximo custo reduzido; se for maior que zero, a solução não satisfaz, caso contrário ela é ótima para o problema mestre completo.

$$\bar{c}_j = \gamma_j^t b + \theta_j^t (f - Fy_o) - z'_o$$

Desde que (γ_j, θ_j) é um ponto extremo de Λ , maximizar \bar{c}_j é equivalente a resolver o subproblema

$$\begin{aligned} \text{Max } & \gamma^t b + \theta^t (f - Fy) \\ \text{s.a} & \end{aligned}$$

$$B^t \gamma + D^t \theta \leq e$$

o que nos leva a concluir que

"subproblema Dantzig-Wolfe \equiv subproblema de Benders "

Em relação aos testes de otimalidade dos dois algoritmos, pode-se mostrar que existe uma equivalência. No algoritmo de Dantzig-Wolfe a otimalidade é atingida quando se verifica

$$\max \bar{c}_j \leq 0$$

o que implica satisfazer

$$\begin{aligned} Cy &\leq d \\ z' &\geq \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad , i=0,1,\dots,k \end{aligned}$$

A última relação pode ser expressada como

$$z' \geq \underset{i=0,1,\dots,k}{\text{máximo}} \{ \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \}$$

e pela teoria da dualidade, tem-se

$$z' \geq \max \{ e^t x / Bx = b, Dx = f - Fy, x \geq 0 \}$$

Assim sendo

$$z_l = c^t y + z' \leq z^* \leq z_u = c^t y + e^t x$$

o que implica $z' \leq e^t x$. Logo, o algoritmo de Dantzig-Wolfe converge quando $z' = e^t x$, o que é equivalente à condição de otimalidade do algoritmo de Benders: $z_l = z_u$.

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM REGIÕES DE CONFIANÇA

Aqui desenvolveremos uma aplicação que incorpora o conceito de regiões de confiança ou proximal na resolução do subproblema gerador de restrições.

III.1 Incorporando o conceito de regiões de confiança

Da seção II.2.1 temos que para $y = \bar{y}$ fixado (solução do problema mestre restrito), o subproblema gerador de restrições consiste em resolver

$$(DL) \quad \begin{cases} \text{Max} & \phi(\gamma, \theta, \bar{y}) = \gamma^t b + \theta^t (f - F\bar{y}) \\ \text{s.a} & \\ & B^t \gamma + D^t \theta \leq e \end{cases}$$

Agora suponha que resolveremos o subproblema gerador de restrições pela k -ésima vez, de modo que sejam conhecidas estimativas $(\hat{\gamma}_k, \hat{\theta}_k)$ da sua solução ótima. Visando evitar oscilações excessivas no cálculo dos multiplicadores (γ, θ) , podemos adicionar ao problema uma restrição do tipo região de confiança e obtermos assim um novo subproblema, ou seja:

$$(DLRC) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad \phi(\gamma, \theta, \bar{y}) = \gamma^t b + \theta^t (f - F\bar{y}) \\ \text{s.a} \\ B^t \gamma + D^t \theta \leq e \\ \|\gamma - \hat{\gamma}_k\|^2 + \|\theta - \hat{\theta}_k\|^2 \leq \rho_k \end{array} \right.$$

Para o estudo de convergência do algoritmo a ser proposto, assumimos que encontraremos uma ε -solução do problema (DLRC), tal que:

$$\phi(\bar{\gamma}, \bar{\theta}, \bar{y}) \leq \phi(\gamma^*, \theta^*, \bar{y}) \leq \phi(\bar{\gamma}, \bar{\theta}, \bar{y}) + \varepsilon,$$

onde $\varepsilon > 0$ é uma dada precisão e $(\bar{\gamma}, \bar{\theta}), (\gamma^*, \theta^*)$ são respectivamente uma solução aproximada e uma solução ótima do problema (DLRC) para $y = \bar{y}$.

III.2 Formulação proximal e um novo subproblema equivalente a (DLRC)

Lema

Se o multiplicador de Lagrange da restrição $\|\gamma - \hat{\gamma}_k\|^2 + \|\theta - \hat{\theta}_k\|^2 \leq \rho_k$ do problema (DLRC) for positivo, então existirá $t_k > 0$ tal que o problema a seguir:

$$(F) \quad \begin{cases} \text{Max} & \gamma^t b + \theta^t (f - F\bar{y}) - \frac{1}{2t_k} [\|\gamma - \hat{\gamma}_k\|^2 + \|\theta - \hat{\theta}_k\|^2] \\ \text{s.a} & \\ & B^t \gamma + D^t \theta \leq e \end{cases}$$

é equivalente ao problema (DLRC).

prova

Observe-se que se trata de problemas convexos diferenciáveis, envolvendo apenas funções quadráticas e lineares. Sob a hipótese de consistência nas restrições, a existência da solução está garantida em (DLRC) porque o conjunto de restrições é compacto, e em (F) porque a função objetivo é fortemente côncava. A solução de cada um destes problemas é única, por ser a função objetivo em (F) estritamente côncava, e o conjunto de restrições em (DLRC) estritamente convexo.

As condições de Karush-Kuhn-Tucker para o problema (DLRC) no ponto (γ, θ) garantem a existência de $\lambda \geq 0$, onde λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição $B^t \gamma + D^t \theta \leq e$ e $\tau > 0$ em \mathfrak{R} , tais que:

$$b - 2\tau(\gamma - \hat{\gamma}_k) - B\lambda = 0 \quad (1)$$

$$(f - F\bar{y}) - 2\tau(\theta - \hat{\theta}_k) - D\lambda = 0 \quad (2)$$

$$(B^t \gamma + D^t \theta - e)\lambda = 0 \quad (3)$$

$$\tau(\|\gamma - \hat{\gamma}_k\|^2 + \|\theta - \hat{\theta}_k\|^2 - \rho_k) = 0 \quad (4)$$

Analogamente, as condições de K.K.T. associadas a (F) são (chamamos também aqui de λ o multiplicador associado às restrições $B^t \gamma + D^t \theta \leq e$)

$$b - \frac{1}{t_k}(\gamma - \hat{\gamma}_k) - B\lambda = 0 \quad (5)$$

$$(f - F\bar{y}) - \frac{1}{t_k}(\theta - \hat{\theta}_k) - D\lambda = 0 \quad (6)$$

$$(B^t \gamma + D^t \theta - e)\lambda = 0 \quad (7)$$

Sendo $\tau > 0$ (a restrição de R.C. é ativa), temos, para $t_k = \frac{1}{2\tau}$, que a solução $(\gamma, \theta, \lambda)$ que verifica (1),(2) e (3), também verifica (5),(6) e (7). \square

Pode-se obter também a relação que explicita o raio ρ_k da região de confiança em função do multiplicador τ em (4), e conseqüentemente, de t_k . Basta substituir as condições de otimalidade (1) e (2) na expressão do lagrangeano de (DLRC) e minimizar em τ o resultado obtido, chegando-se sucessivamente a:

$$L(\gamma, \theta, \lambda, \tau) = \gamma^t b + \theta^t (f - F\bar{y}) - \tau [\|\gamma - \hat{\gamma}_k\|^2 + \|\theta - \hat{\theta}_k\|^2 - \rho_k] - (B^t \gamma + D^t \theta - e)\lambda$$

$$L(\gamma, \theta, \lambda, \tau) = 2\tau \gamma^t (\gamma - \hat{\gamma}_k) + 2\tau \theta^t (\theta - \hat{\theta}_k) - \tau [\|\gamma - \hat{\gamma}_k\|^2 + \|\theta - \hat{\theta}_k\|^2 - \rho_k] + \lambda^t e$$

$$L(\lambda, \tau) = \frac{1}{4\tau} [\| -B\lambda + b \|^2 + \| -D\lambda + (f - F\bar{y}) \|^2] + \tau\rho_k + \lambda^t e \\ + \hat{\gamma}_k^t (-B\lambda + b) + \hat{\theta}_k^t (-D\lambda + (f - F\bar{y}))$$

Logo

$$\bar{\tau} = \frac{\sqrt{\| -B\lambda + b \|^2 + \| -D\lambda + (f - F\bar{y}) \|^2}}{2\sqrt{\rho_k}}$$

A obtenção de (γ, θ) , solução de (F) será computacionalmente calculada a partir de seu dual (análogo à geração de restrições em Benders). Das condições de K.K.T. (5), (6) e (7) chega-se ao problema numericamente mais simples dado por :

$$(F_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad \frac{t_k}{2} [\| -B\lambda + b \|^2 + \| -D\lambda + (f - F\bar{y}) \|^2] \\ \quad + \hat{\gamma}_k^t (-B\lambda + b) + \hat{\theta}_k^t (-D\lambda + (f - F\bar{y})) + \lambda^t e \\ \text{s.a.} \\ \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos (F_D) e recorremos às relações (5) e (6) para formar a solução

$$\gamma_{k+1} = \hat{\gamma}_k + t_k(-B\lambda(t_k) + b) \\ \theta_{k+1} = \hat{\theta}_k + t_k(-D\lambda(t_k) + (f - (F\bar{y})))$$

III.3 Algoritmo interno

Iteração: $(\hat{\gamma}_k, \hat{\theta}_k) \rightarrow (\hat{\gamma}_{k+1}, \hat{\theta}_{k+1})$

(a) Faça $j=1, t_j = t_k, m_1 = 0.1$

(b) Resolva o problema (FD) para t_j

(c) Se $\|\lambda\|_\infty > 0$

então

{ encontre multiplicador candidato }

$$\gamma_j = \hat{\gamma}_k + t_k(-B\lambda(t_k) + b)$$

$$\theta_j = \hat{\theta}_k + t_k(-D\lambda(t_k) + (f - (F\bar{y})))$$

Calcule $\phi(\gamma_j, \theta_j, \bar{y})$

Se $\phi(\gamma_j, \theta_j, \bar{y})$ suficientemente

maior que $\phi(\hat{\gamma}_k, \hat{\theta}_k, \bar{y})$

então

{ aceite o novo multiplicador }

$$\hat{\gamma}_{k+1} = \gamma_j$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \theta_j$$

Pare

senão

{ aumente raio da região de confiança }

{ aumentando o valor de t_k }

$$t_{j+1} = (1 + m_2)t_j$$

$$j=j+1$$

Volte ao passo (b)

senão { região confiança interior }

{ aumente o valor de t_k }

$$t_{j+1} = (1 + m_2)t_j$$

$$j=j+1$$

Volte ao passo (b)

III.4 Algoritmo proposto

O algoritmo proposto consiste nos seguintes passos:

Passo (0) : Determine (γ_0, θ_0) , solução viável de (F). Se (γ_0, θ_0) não existe, pare; o problema original não tem solução. Caso contrário, faça $z_u = \infty$, $z_l = -\infty$ e $I=1$. Vá para o passo (1).

Passo (1): Resolva o problema mestre relaxado limitado

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad c^t y + z' \\ \text{s.a} \\ z' \geq \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad , i = 0, \dots, I-1 \\ Cy \leq d \\ 0 \leq y \leq 1M \\ y \text{ inteiro} \end{array} \right.$$

onde M é um número muito grande e 1 é o vetor unitário.

Seja (z'_I, y_I) a sua solução ótima. Então faça

$z_l = c^t y_I + z'$ e vá para o passo (2).

Passo (2): Obtenha (γ_I, θ_I) executando o algoritmo interno
Faça

$$z_u = \min \{z_u, c^t y_I + \gamma_I^t b + \theta_I^t (f - Fy_I)\}$$

Vá para o passo (3)

Passo (3): Se $z_u - z_l$ não satisfaz a precisão desejada, então

adicione a nova restrição

$$z' \geq \gamma_I^t b + \theta_I^t (f - Fy_I)$$

ao problema mestre relaxado. Faça $I=I+1$ e volte para o passo (1). Caso contrário devemos ter

$z' = \gamma_I^t b + \theta_I^t (f - Fy_I)$ e então y_I é ótimo para o problema original. Vá para o passo (4).

Passo (4): Seja $y^* = y_I$, então resolva o problema linear dado por

$$(PL) \begin{cases} \text{Min} & e^t x \\ \text{s.a} & \\ & Bx = b \\ & Dx = f - Fy^* \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Seja x^* solução de (PL). Então (x^*, y^*) é solução ótima do problema original com valor ótimo igual a z^* .

É fácil notar que o algoritmo apresentado aqui difere do algoritmo tradicional de Benders, colocado na seção II.2.2, apenas pelo passo (2).

A convergência deste algoritmo será provada nas seções subsequentes.

III.5 Convergência

Teorema

Tome $(\bar{z}, \bar{y}, \bar{x})$ como sendo um ponto limite da sequência $\{(\bar{z}^j, \bar{y}^j, \bar{x}^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ gerada pelo algoritmo, então $(\bar{z}, \bar{y}, \bar{x})$ é uma solução do problema original (P) tal que $\bar{z} \leq c^t \bar{y} + e^t \bar{x}$, onde \bar{x} é solução do problema

$$PL(\bar{y}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } e^t x \\ \text{s.a.} \\ Bx = b \\ Dx = f - F\bar{y} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

prova

Suponhamos que as primeiras j ($j \geq 1$) soluções ótimas de (F), digamos $(\bar{\gamma}^1, \bar{\theta}^1), \dots, (\bar{\gamma}^j, \bar{\theta}^j)$ tenham sido geradas a partir do passo (2) do algoritmo. Então o problema inteiro misto no passo (1) é

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z \\ \text{s.a} \\ z \geq c^t y + \gamma_i^t b + \theta_i^t (f - Fy) \quad i = 1, \dots, j \\ Cy \leq d \\ y \geq 0 \text{ inteiro} \end{array} \right.$$

Denotemos a solução ótima desse problema por (\bar{z}^j, \bar{y}^j) . E para todo k ($1 \leq k \leq j$) vale

$$\bar{z}^j \geq \bar{z}^k$$

e

$$\bar{z}^j \leq c^t \bar{y}^j + \bar{\gamma}_k^t b + \bar{\theta}_k^t (f - F \bar{y}^j)$$

Como \bar{z}^j é um limite inferior para z^* , solução ótima do problema original, nós temos $\bar{z}^j \leq z^*$.

E desde que (\bar{y}^j, \bar{x}^j) é uma solução para o problema inteiro misto original (P), vale a desigualdade

$$z^* \leq c^t \bar{y}^j + e^t \bar{x}^j$$

Então

$$z^j \leq c^t \bar{y}^j + e^t \bar{x}^j$$

Tomemos $\{(\bar{z}^j, \bar{y}^j, \bar{x}^j)\}_{j \in J}$ uma subsequência convergindo convergindo para $(\bar{z}, \bar{y}, \bar{x})$, cuja existência é garantida pela construção da mesma.

Assim então

$$\bar{z} \leq c^t \bar{y} + e^t \bar{x}$$

onde \bar{x} é solução ótima de $PL(\bar{x})$.

Correspondendo a cada $(\bar{z}^j, \bar{y}^j, \bar{x}^j)$ existe um $(\bar{\gamma}^j, \bar{\theta}^j)$ o qual é uma solução de (F). Lembremos que (F) tem garantida a existência de solução, devido à função objetivo ser estritamente côncava e a suposição de consistência nas restrições do mesmo.

Suponhamos que o conjunto de restrições de (F) seja compacto, se necessário adicionando uma restrição de regularidade. Então existe uma subsequência de $\{(\bar{\gamma}^j, \bar{\theta}^j)\}_{j \in J}$ convergindo para algum $(\bar{\gamma}, \bar{\theta}) \in U$.

$U = \{(\gamma, \theta) / \gamma^t b + \theta^t D \leq e, \|\gamma, \theta\| \leq M\}$, onde $M > 0$ é um número grande.

Tomemos $J' \subset J$ como sendo o correspondente conjunto índice desta subsequência.

Então

$$\{(\bar{z}^j, \bar{y}^j, \bar{x}^j)\}_{j \in J'} \rightarrow (\bar{z}, \bar{y}, \bar{x})$$

e

$$\{(\bar{\gamma}^j, \bar{\theta}^j)\}_{j \in J'} \rightarrow (\bar{\gamma}, \bar{\theta})$$

Agora pela construção das sequências $(\bar{\gamma}^j, \bar{\theta}^j)$ e $(\bar{z}^j, \bar{y}^j, \bar{x}^j)$ nós temos, do passo (1): (\bar{z}^j, \bar{y}^j) e do passo (2): $(\bar{\gamma}^j, \bar{\theta}^j)$. No passo (3), então se o critério de otimalidade não é atingido, então tem-se

$$\bar{z}^j < c^t \bar{y}^j + \bar{\gamma}^j b + \bar{\theta}^t (f - F\bar{y}^j)$$

onde o algoritmo toma como limite superior sobre z^*

$$z_u = c^t \bar{y}^j + \bar{\gamma}^j b + \bar{\theta}^t (f - F\bar{y}^j)$$

E então adiciona o novo corte

$$z \geq c^t \bar{y}^{j+1} + \bar{\gamma}^{j^t} b + \bar{\theta}^{j^t} (f - F\bar{y}^{j+1})$$

ao problema mestre do passo (1). Resolvendo-se este último obtemos um novo limite inferior sobre z^*

$$\bar{z}^{j+1} \geq z_l = c^t \bar{y}^{j+1} + \bar{\gamma}^{j^t} b + \bar{\theta}^{j^t} (f - F\bar{y}^{j+1})$$

Observamos que

$$\bar{\gamma}^{j^t} b \rightarrow \bar{\gamma}^t b$$

$$\bar{\theta}^{j^t} (f - F\bar{y}^j) \rightarrow \bar{\theta}^t (f - F\bar{y})$$

$$\bar{\theta}^{j^t} (f - F\bar{y}^{j+1}) \rightarrow \bar{\theta}^t (f - F\bar{y})$$

$$c^t \bar{y}^j \rightarrow c^t \bar{y}$$

$$c^t \bar{y}^{j+1} \rightarrow c^t \bar{y}$$

$$\bar{z}^j \rightarrow \bar{z}$$

$$\bar{z}^{j+1} \rightarrow \bar{z}$$

Então obtemos

$$z_u = c^t \bar{y} + \bar{\gamma}^t b + \bar{\theta}^t (f - F\bar{y})$$

e

$$z_l = c^t \bar{y} + \bar{\gamma}^t b + \bar{\theta}^t (f - F\bar{y})$$

E desde que $z_l \leq z^* \leq z_u$, temos que a igualdade verificada para os limites, ou seja, $z_u = z_l$, o que satisfaz o critério de otimalidade. \square

\square

CAPÍTULO IV

RESULTADOS COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

IV.1 Introdução

O problema apresentado, na seção I.2 (Moreno [1992] e Vidal [1992]) que visa determinar a configuração otimizada de uma rede de transmissão digital, foi resolvido para uma rede hipotética consistindo de 4 estações. Foram considerados alguns cenários, envolvendo diferentes situações de interesse de tráfego entre estações (demandas) e ocupações da rede. Os resultados serão apresentados e comentados.

Na seção IV.3, algumas ponderações a cerca da implementação computacional serão feitas, onde o enfoque principal reside na apelo à estrutura de dados usada, de modo a tomar vantagem da estrutura e esparsidade da matriz dos coeficientes das restrições do problema, que apresenta um densidade de 0.015 .

Na seção final, apresentam-se alguns comentários, conclusões e sugestões para estudos posteriores.

IV.2 Cenários para 4 estações

Uma rede configurada, conforme mostrado na figura IV.1, foi usada para gerar problemas testes.

Foram consideradas, ainda as seguintes informações necessárias para a geração dos problemas testes.

FRENTES DE TRANSMISSÃO

DESCRIÇÃO

1-3 e 2-4	34 Mbit/seg Multimodo (Tipo A)
1-3 e 2-4	34 Mbit/seg Monomodo (Tipo B)
3-4	140 Mbit/seg Monomodo (ELO 434): (Tipo C)

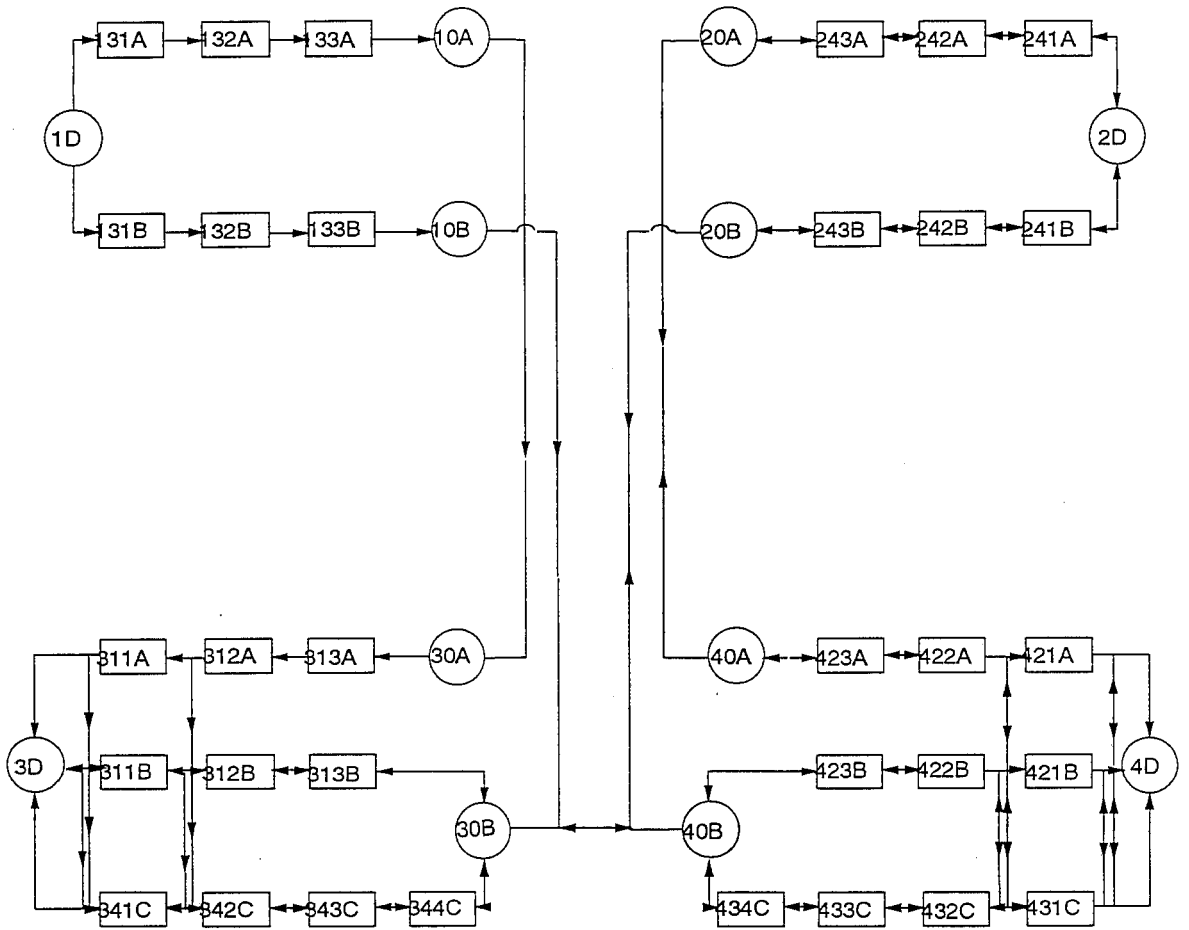


Figura 4.1: Rede com 4 estações

DEMANDA : Foram consideradas demandas entre os seguintes pares de estações: (1-2),(1-3),(1-4),(2-3),(2-4) e (3-4).

CUSTOS (hipotéticos em mil US\$)

Equipamentos:

MUX 2/8	18
MUX 8/34	15
MUX 34/140	30
ELO 34	8
ELO 434	60
ELO 140	20

Cabos de 12 pares de fibras óticas multimodo 5 por Km

Cabos de 18 pares de fibras óticas monomodo 6 por Km

DISTÂNCIAS ENTRE ESTAÇÕES

Arco	Tipo	Distância
(1,2)	1	3.5
(1,2)	2	3.5
(1,3)	1	4.3
(1,3)	2	4.0
(2,4)	1	5.0
(2,4)	2	5.5
(3,4)	1	2.5
(3,4)	2	2.0

Obs: Tipo 1 - Cabo de fibra ótica Monomodo
 Tipo 2 - Cabo de fibra ótica Monomodo

As informações acerca das frentes existentes, dos custos associados aos módulos de equipamentos e aos cabos, e das demandas consideradas (quant. de sistemas de 2 Mbit/seg) foram mantidas constantes em todos os testes, criando-se quatro cenários alternativos, em função das demandas entre as estações, bem como em função das folgas nos equipamentos e nos cabos óticos. A tabela a seguir apresenta as características dos cenários avaliados.

CENÁRIOS		1	2	3	4
DEMANDA					
	(1,2)	12	12	04	00
	(1,3)	8	08	08	12
	(1,4)	8	08	28	60
	(2,3)	17	17	16	04
	(2,4)	08	08	12	16
	(3,4)	30	30	32	64
FOLGA CABO					
	(1,2) Tipo 1	01	04	02	01
	(1,2) Tipo 2	00	00	02	01
	(1,3) Tipo 1	14	04	02	03
	(1,3) Tipo 2	00	00	02	03
	(2,4) Tipo 1	01	04	02	02
	(2,4) Tipo 2	00	00	02	02
	(3,4) Tipo 1	00	04	02	04
	(3,4) Tipo 2	00	00	02	04
FRETE 1-3					
Tipo (A)	FOLGA MUX 2/8	00	00	12	00
	MUX 8/34	00	00	12	08

		ELO 34	00	00	12	08
FRENTE 1-3						
Tipo (B)	FOLGA	MUX 2/8	00	00	04	00
		MUX 8/34	00	00	04	00
		ELO 34	00	00	04	00
FRENTE 2-4						
Tipo (A)	FOLGA	MUX 2/8	00	00	16	00
		MUX 8/34	04	00	16	04
		ELO 34	04	00	16	04
FRENTE 2-4						
Tipo (B)	FOLGA	MUX 2/8	00	00	00	00
		MUX 8/34	00	00	08	00
		ELO 34	00	00	08	00
FRENTE 3-4						
Tipo (C)	FOLGA	MUX 2/8	64	00	64	00
		MUX 8/34	64	00	64	00
		ELO 34	64	00	64	16

O objetivo é então determinar a configuração otimizada para a rede em questão, de tal maneira que a demanda adicional seja atendida e que o custo de investimento associado seja minimizado, ou seja o gasto com a aquisição de módulos de equipamentos e cabos. Considera-se no problema o aproveitamento da folga existente, ou seja, da capacidade ociosa da rede.

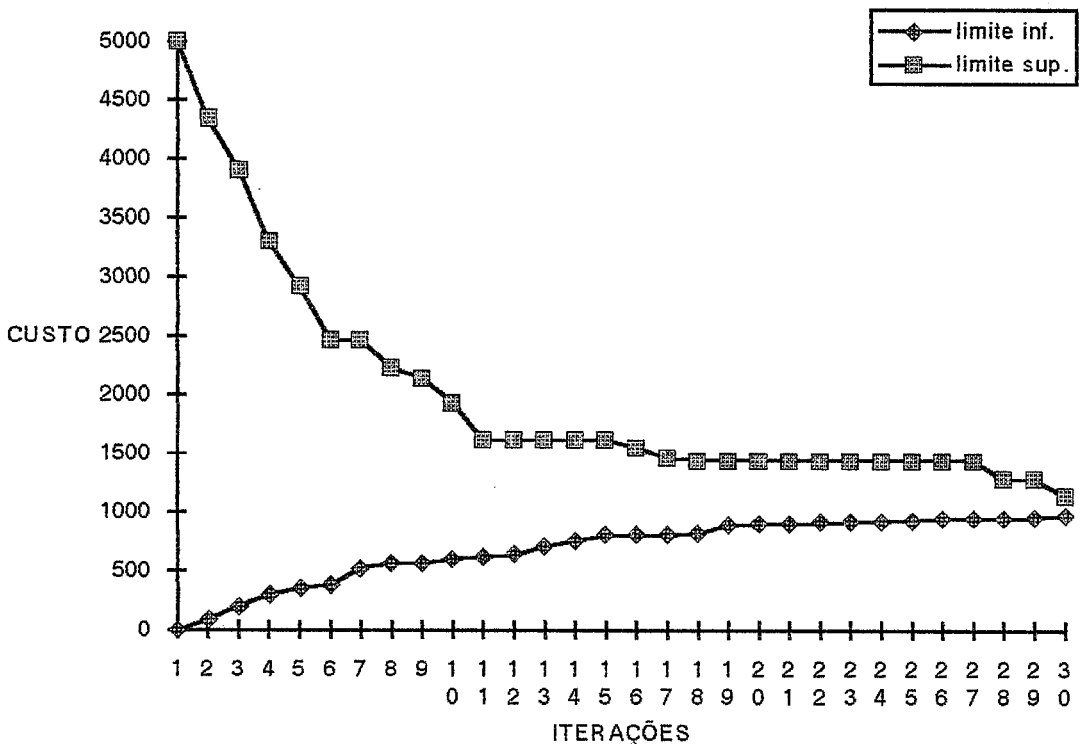
O problema foi resolvido aplicando-se a técnica de decomposição de Benders, a qual consiste em um processo iterativo envolvendo um subproblema de investimento e um subproblema de operação.

O subproblema de investimento (Problema Mestre) é um problema de programação linear mista. O número de variáveis de decisão (variáveis inteiras geral) é dado em função do número de frentes e da existência de interesse de tráfego entre as estações, o que significa que arcos devem ser considerados. O fluxo, em cada arco, é então limitado pela folga existente mais a capacidade adquirida. Nos referidos testes, o subproblema de investimento continha 42 variáveis inteiras geral. O número de restrições do subproblema é dado pelas 26 restrições, que expressam uma relação entre as capacidade dos nós associados a equipamentos e terminais ELO's (Equipamentos de conversão Eletro-Óticos) de uma mesma frente, de tal sorte que a expansão de um nó implica na expansão dos demais nós associados; mais o número de cortes sendo que o algoritmo acrescenta um corte a cada iteração.

Já o subproblema de operação consiste na determinação do fluxo ótimo, em função da capacidade ociosa existente e da adquirida. O mesmo envolve cerca de 200 variáveis de fluxo.

A configuração otimizada para a rede hipotética de 4 estações, segundo o cenário 1, foi determinada após 30 iterações em um computador 486/66, em aproximadamente 56 horas. O elevado tempo computacional deve-se a crescente complexidade adquirida com o aumento do número de restrições do problema de investimento, o que se traduz numa elevação significativa do tempo computacional gasto a cada nova iteração (neste teste usamos como número máximo de iterações, para a resolução do subproblema de investimento pelo LINDO um limite de 1000000 de "branch's"). O custo de investimento foi de 971,3 e o custo de operação de 407,92 dando um total de 1362,96 . Apresentamos a seguir o gráfico de convergência:

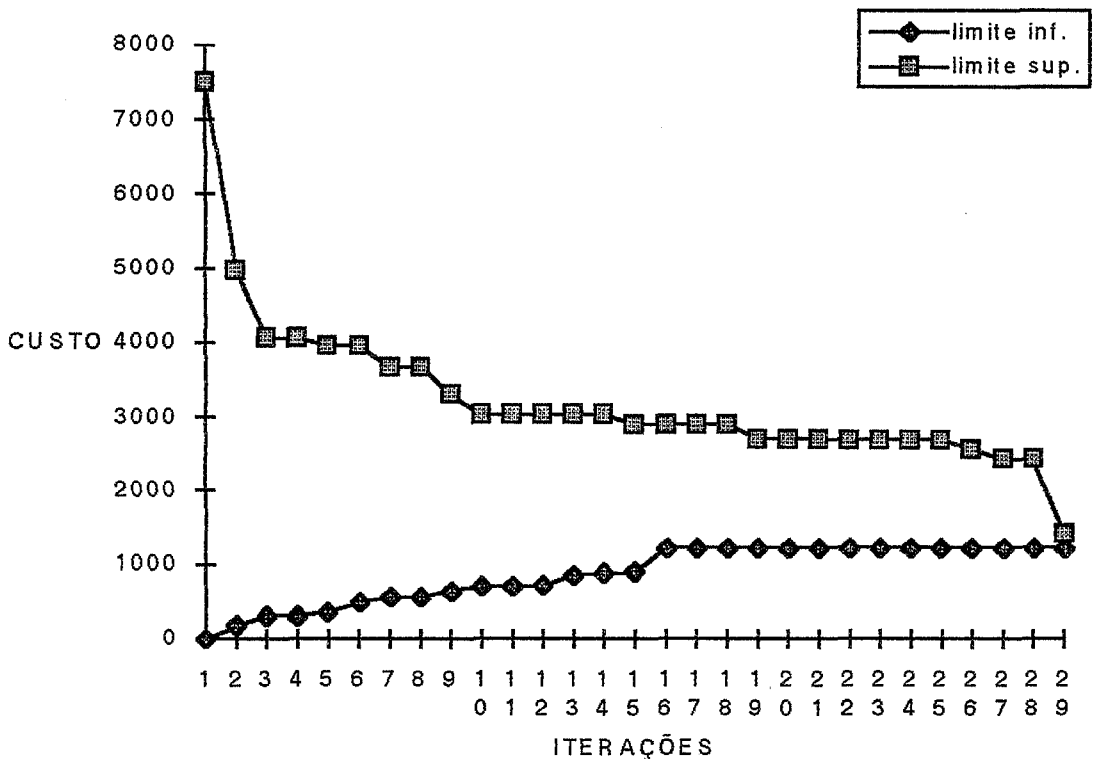
FIGURA 4.2 GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA P/ CENÁRIO 1
TOLERÂNCIA DE 10%



Considerando agora o cenário 2 , a configuração otimizada para a rede em estudo foi determinada após 29 iterações em um computador 486/33, em aproximadamente 26 horas. Na análise do tempo computacional vale a mesma observação que foi feita para o cenário 1 (neste caso um limite de 200000 iterações foi usado para a resolução do subproblema de

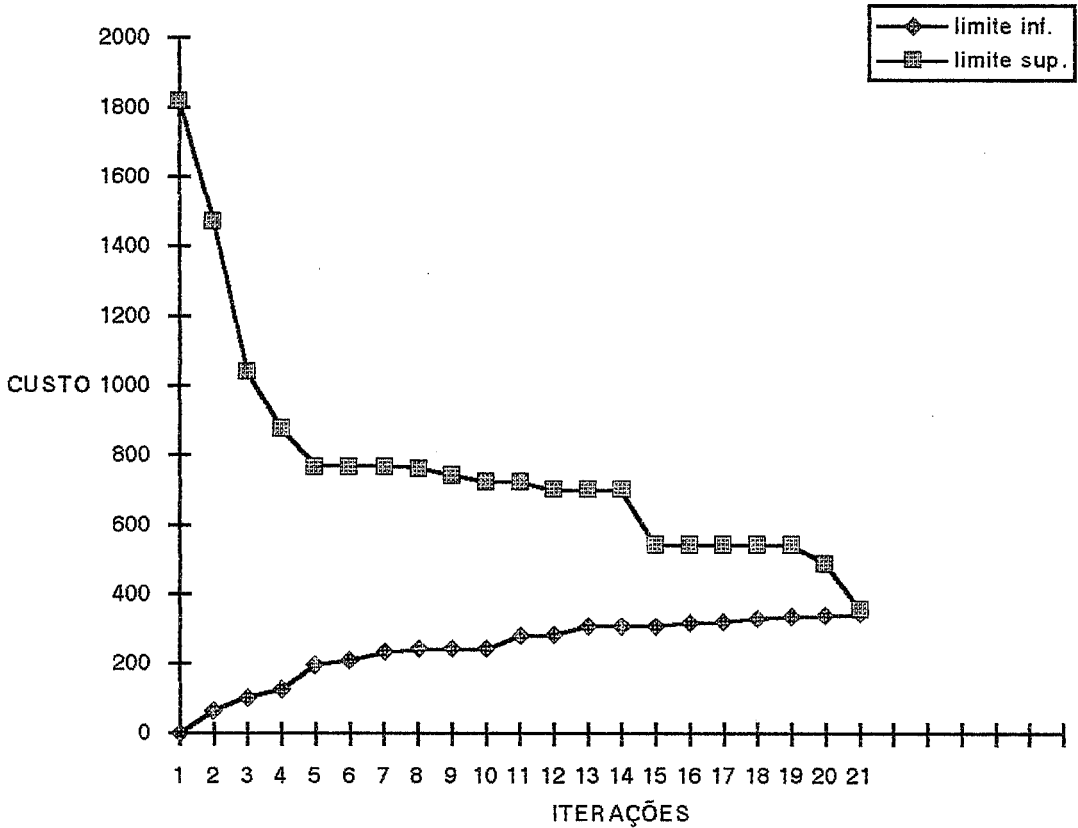
investimento). O custo de investimento foi de 1217,0 e o custo de operação de 1538,46 dando um total de 2744,46. Apresentamos a seguir o gráfico de convergência:

FIGURA 4.3 GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA P/ CENÁRIO 2
TOLERÂNCIA DE 10%



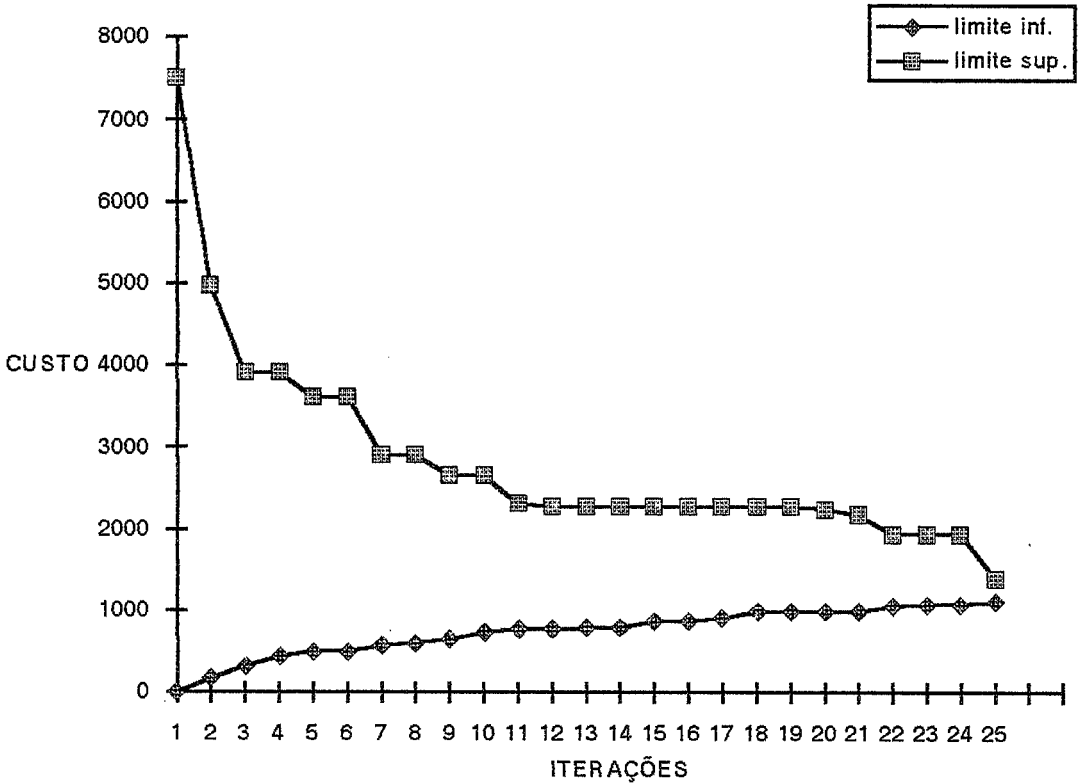
Considerando agora o cenário 3, a configuração otimizada para a rede em estudo foi determinada usando um computador 486/33, em aproximadamente 1 hora. Aqui vale resaltar o fato de que este cenário difere dos anteriores pela existência de folga, isto simplifica o problema uma vez que ao partimos de um limite inferior zero (isto é conseguido, em função do algoritmo partir de uma solução viável inteira), este por sua vez já consiste num bom limite inferior para o valor ótimo do problema, que é bem menor que o valor ótimo associado ao problema do cenário 2, pois necessita comprar um número menor de equipamentos. Assim menos iterações são executadas e desde que as primeiras iterações são muito rápidas, temos um queda bastante significativa no tempo computacional. O custo de investimento foi de 338 e o custo de operação de 148,28 dando um total de 486,28. Apresentamos a seguir o gráfico de convergência:

FIGURA 4.4 GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA P/ CENÁRIO 3
TOLERÂNCIA DE 5%



Considerando agora o cenário 4, a configuração otimizada para a rede em estudo foi determinada usando um computador 486/33, em aproximadamente 18 horas. Na análise do tempo computacional vale a mesma observação que foi feita para o cenário 1. O custo de investimento foi de 1106 e o custo de operação de 857,14 dando um total de 1963,14. Apresentamos a seguir o gráfico de convergência:

FIGURA 4.5 GRÁFICO DE CONVERGÊNCIA P/ CENÁRIO 4
TOLERÂNCIA DE 5%



IV.3 Implementação e Estruturas de dados

O algoritmo foi implementado em linguagem FORTRAN, mais precisamente utilizando o compilador FORTRAN LAHEY 5.0. Além disso é utilizado o pacote de otimização LINDO para resolver os subproblemas pertinentes a cada iteração. Isto é feito via a geração de um arquivo batch de comandos do LINDO e de uma chamada ao sistema operacional para que o referido programa seja carregado e o arquivo de comandos do mesmo seja executado. Feito isto, a solução de cada subproblema é gravada num arquivo em disco do qual o programa captura a solução para o subproblema e o processo se repete.

A estrutura da matriz associada ao problema, cuja densidade é muito baixa, é plotada a seguir:

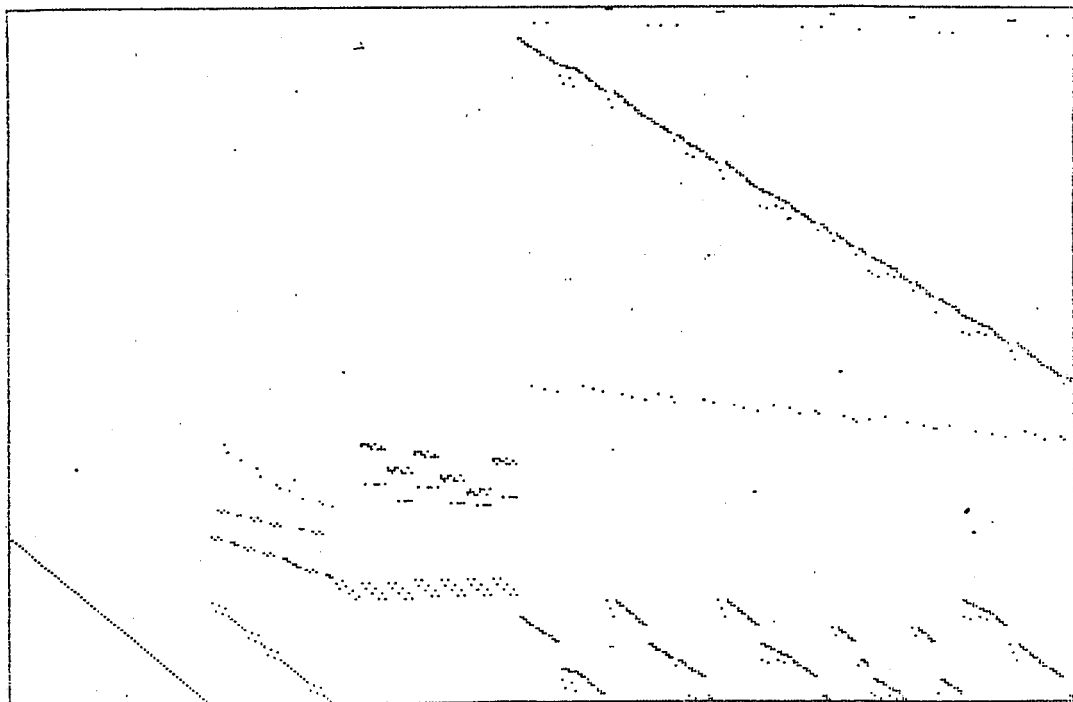


Figura 4.2. Estrutura da Matriz

Visando tomar vantagem da forma esparsa mostrada acima foi utilizado o seguinte esquema para o armazenamento da mesma. Inicialmente a decompos em várias submatrizes. Cada submatriz é armazenada por coluna, onde somente os elementos não nulos das colunas são armazenados. Para cada elemento não nulo guarda-se também informação sobre a linha à qual o elemento pertencia (ver XMP).

São utilizadas quatro estruturas de dados do tipo array, a saber:

CINDEX : É um vetor de índices onde o i -ésimo elemento aponta para o início das colunas da i -ésima submatriz sobre o vetor CMIL. Sua dimensão é igual ao número de submatrizes mais 1.

- CMIL : É um vetor de índices onde cada elemento aponta para o início sobre o vetor CMRV dos elementos não nulos da coluna. Sua dimensão é igual ao número total de colunas (considerando todas as submatrizes) mais 1.
- CMRV : É um vetor de reais. Contém todos os elementos não nulos das colunas das submatrizes.
- CMIP : É um vetor de inteiros com a mesma dimensão de CMRV, com o qual mantém correspondência biunívoca. Guarda a posição referente à linha para cada elemento não nulo.

Note-se que à medida que aumenta a dimensão do problema original, a estrutura de dados se torna ainda mais vantajosa, dado a baixa densidade do problema. Assim a sua adoção leva à considerável economia de memória requerida para o armazenamento da matriz associada ao problema.

IV.4 Conclusões e Extensões

Neste trabalho foi apresentado um modelo oriundo do processo de planejamento da expansão de uma rede de transmissão digital. A estrutura deste modelo foi estudada e técnicas de decomposição foram sugeridas e aplicadas ao problema. Foi adotada como temática básica deste trabalho, o método de decomposição de Benders.

Uma proposta para a geração dos cortes de Benders foi apresentada, a qual baseia-se na resolução do subproblema gerador de restrições sujeito a um restrição de região de confiança com um intuito de impedir grandes oscilações entre sucessivos pontos soluções do mesmo. A convergência do algoritmo de Benders com esta modificação foi provada. Fica então para um trabalho futuro a implementação deste algoritmo, a qual permitirá concluir se tal modificação leva a uma melhoria na sabidamente lenta convergência do método de Benders.

No tocante à resolução dos subproblemas que aparecem a cada iteração, ou seja, o problema mestre (subproblema de investimento) e subproblema gerador de restrições podemos comentar o seguinte. Ambos

os problemas foram resolvidos fazendo-se uso do pacote computacional LINDO, o qual não se mostrou eficiente para resolver o problema mestre (subproblema de investimento) de iterações adiantadas, que como já mencionamos possui variáveis inteiras gerais. À medida que cortes são incorporados ao problema mestre, considerável aumento no tempo computacional para se resolver o mesmo é observado. Além disso a escolha pelo uso do LINDO tem a desvantagem do pacote ser fechado, e o custo associado à interface via geração de arquivos soluções ser alto.

Ainda no que se refere ao tempo computacional despendido na resolução do problema mestre, fica como proposta o uso de seleção de cortes através de heurísticas de seleção, de modo a reduzir o número de restrições presentes no problema e por conseguinte, o tempo computacional associado à sua resolução. Porém, eventualmente um número maior de iterações serão necessárias (Salkin [1989]). O sucesso deste procedimento dependerá do número máximo de cortes permitidos, a cada iteração, no problema mestre e da heurística adotada.

Uma forma alternativa de abordar o problema seria aplicar o algoritmo de decomposição de Dantzig-Wolfe como foi mostrado na seção II.1.2. Tal alternativa é tratada em (Oliveira et alli [1993]).

CAPÍTULO V

BIBLIOGRAFIA

- Benders, J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems." *Numerische Mathematik* 4 (1962), 238-252.
- Dantzig, G.B., "The Decomposition Algorithm for Linear Programs", *Econometria* 29, 767-778, (1961).
- Eiselt, H. A. et al., *Continuous Optimization Models*, New York : De Gruyter (1987).
- Garfinkel, R.S. e G.L. Nemhauser, *Integer Programming*, Wiley & Sons, New York (1972).
- Geoffrion, A. M., "Generalized Benders Decomposition", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4), 237-260 (1972)
- Lasdon, Leon S., *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Company, New York (1970).
- Magnanti et al., *Applied Mathematical Programming*, Addison Wesley (1976).
- Minoux, M., "Subgradient Optimization and Benders Decomposition for Large Scale Programming". *Proceedings of the International Congress on Mathematical Programming (Rio de Janeiro)*, April 6-8, 1981, 271-288.
- Minoux, M., *Mathematical Programming Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York (1986).
- Moreno, A. O. et al., "Planejamento da Configuração Otimizada da Rede de Transmissão Digital", *Revista TELEBRÁS* (1992).
- Nemhauser, G. L. e Wolsey, L. A., *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York (1988).

- Oliveira, P. R., Rodrigues, S. I. M., Cabral, L. A. F., "Relaxação Lagrangeana e Subgradientes com Dilatação de Espaço Aplicados a um Problema de Grande Porte", Anais do XXV SBPO, Campinas, São Paulo (1993).
- Pollenz, L. J., "The Staircase and Related Structures in Integer Programming". Technical Report 80-13, Department of Operations Research, Stanford University (1980).
- Ritter, K., "A Decomposition Method for Linear Programming Problems with Coupling Constraints and Variables". Mathematic Research Center, University of Winconsin, Report 739 (1967).
- Salkin, H. M. e Kamlesh M., Foundations of Integer Programming, North-Holland (1989).
- Schrage, L., "User's Manual for Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO". Release 5.0, Scientific Press, (1991).
- Viacava, Nora M. C., "Um Modelo de Otimização para o Planejamento da Expansão da Capacidade de Geração de Um Sistema de Geração de um Sistema Hidrotérmico". IMPA, Informes de Matemática, série D-035-Julho/90.
- Vidal, E., "Planejamento da Configuração Otimizada de Rede de Transmissão Digital", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ (1992).
- XMP - Mathematical Programming Package, Manual do Usuário