AS EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS DINÂMICOS CLASSICOS

SOB O PONTO DE VISTA DA MODERNA GEOMETRIA DIFERENCIAL

Silvia Lucia de Oliveira Cavalcante

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
SETEMBRO DE 1974

A Marcos e Silvia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuiram para a realização deste trabalho, em especial ao Prof. Guilherme de La Penha.

SUMÁRIO

O objetivo é apresentar, de uma forma didática, algumas das relações existentes entre a Mecânica Clássica e os métodos recentes da Geometria Diferencial.

A utilização de conceitos modernos, tais como, a definição universal de produto tensorial de espaços vetoriais, evita o abuso de notação usual nos desenvolvimentos clássicos.

As equações diferenciais, que descrevem o movimento de partículas em $\mathbb{R}^3$, são obtidas das leis de Newton nesse espaço. Entretanto, tais leis podem ser formuladas em qualquer espaço de configurações M, desde que em M possa-se falar em diferenciabilidade de aplicações, isto é, desde que M seja uma variedade diferenciável. O desenvolvimento da teoria em uma variedade torna-a intrínseca e independente de especiais sistemas de coordenadas, dando clareza, tanto física quanto matemática, aos conceitos envolvidos.

Nos primeiros capítulos são introduzidos, inicialmente, os conceitos de fibrado tangente e cotangente a $\mathbb{R}^n$ e, posteriormente, constroi-se formalmente os fibrados tangente e cotangente a uma variedade diferenciável M.

Nos dois últimos capítulos, deduz-se as equações de Lagrange para um sistema finito de partículas em uma forma que independe das coordenadas. Definindo o lagrangeano L como uma função real definida no fibrado tangente descreve-se, finalmente, a transformação de Legendre relativa a uma aplicação do fibrado tangente no cotangente sob forma intrínseca.

S U M M A R Y

Our aim is to present, in a pedagogical way, some of the connections between Classical Mechanics and the comtemporary methods of Differential Geometry.

The use of such modern concepts, such as the universal definition of tensor product of vector spaces, refrains the usual abuses of notation in the classical developments.

The differential equations for the motion of particles $\mathbb{R}^3$ are derived from Newton's laws in such space. However, these laws can be formulated in any configuration space M provided the concept of differentiability of mappings makes sense, i.e., if M is a differential manifold.

The development of the theory in a manifold has the mathematical and physical advantages of letting the concepts become intrinsecal and not bounded to any particular coordinate system.

In the beginning chapters we introduce the fiber bundle concept in $\mathbb{R}^n$ and then we formally construct the tangent and cotangent bundles in an abstract differential manifold M.

In the last two chapters we derive Lagrange's equations for a finite system of particles without need for an explicitly defined coordinate system. We introduce the lagrangean L as a real mapping defined over the tangent bundle and then the Legendre transformation associated to a mapping from the tangent to the cotangent bundle is intrinsically defined.

ÍNDICE

PÁGINA

C A P Í T U L O   I

ESPAÇOS TANGENTES E COTANGENTES

1. *I N T R O D U Ç Ã O*

§ 1.1 *Preliminares algébricos*

Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensão finita, L(V,W) denotará o espaço vetorial das aplicações lineares de V em W, onde as operações de adição e multiplicação são definidas por

1.1.1 $(L + T)(v) = L(v) + T(v)$

1.1.2 $(\lambda L)(v) = \lambda L(v)$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$, L e $T \in L(V,W)$

Quando, em particular, $W = \mathbb{R}$, $L(V, \mathbb{R}) \equiv V^*$ é usualmente chamado dual algébrico de V. Se $\left(e_i\right)_{i \in \underline{n}}$, $\underline{n}=\{1,\ldots,n\}$, é base de V, então a seqüência $\left(e^j\right)_{j \in \underline{n}}$ de elementos de V^* definidos pelas equações

1.1.3 $$e^j(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j=i \quad , \quad i, j \in \underline{n} \end{cases}$$

é uma base de V^*, dita dual de $\left(e_i\right)_{i \in \underline{n}}$. É fácil verificar que qualquer que seja $v \in V$, $e^j(v) = v^j$, a j-ésima coordenada de v em relação à base $\left(e_i\right)_{i \in \underline{n}}$

§ 1.2 *Espaços vetoriais Euclidianos*

Se $\langle \, , \, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma forma bilinear simétrica, de finida positiva, então $<\ ,\ >$ define um produto interno em V , e o par (V , $<\ ,\ >$) é dito um espaço *vetorial Euclidiano.*

A *norma euclidiana* de $v \in V$, denotada por $||v||$, é definida por

$$1.2.1 \qquad ||v|| = \sqrt{<v,v>}$$

Se V é um espaço vetorial euclidiano a aplicação

$$1.2.2 \qquad \Phi : V \longrightarrow V^* \ , \ v \longmapsto \Phi(v),$$

definida por

$$\Phi(v)\ (w) = <v,w>, \ \forall\, w \in V ,$$

é um isomorfismo natural entre V e V^* .

Seja $(e_i)_{i \in \underline{n}}$ qualquer base de V , definindo-se

$$g_{ij} \equiv <e_i,e_j> \in \mathbb{R} \ ; \text{ então } \ G \equiv [\, g_{ij}],\ i,j \in \underline{n}$$

é uma matriz quadrada de ordem n, simétrica e definida positiva , que determina o produto interno em V , pois se

$$v = \sum_{i \in \underline{n}} v^i e_i \ , \ u = \sum_{j \in \underline{n}} u^j e_j \ ,$$

então

$$< \sum_{i \in \underline{n}} v^i e_i \ , \ \sum_{j \in \underline{n}} u^j e_j > = \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{n}} g_{ij}\ v^i u^j$$

Como $V \cong V^*$ a menos de um isomorfismo, a base dual $(e^j)_{j \in \underline{n}}$, também é base de V e as equações

$$\left[g^{ij}\right] = \left[\langle e^i \, , \, e^j \rangle\right] \, , \quad i,j \varepsilon \underline{n}$$

definem uma outra matriz, quadrada de ordem n, simétrica e definida positiva $\left[g^{ij}\right]$, inversa da primeira. É fácil verificar que:

$$1.2.3 \qquad e^i = \sum_{j \varepsilon \underline{n}} g^{ij} e_j \quad \text{e} \quad e_i = \sum_{j \varepsilon \underline{n}} g_{ij} e^j$$

para todo $i \varepsilon \underline{n}$

§ 1.3 Espaço pontual

Sejam $\mathcal{E}$ um espaço métrico com distância d e $Is(\mathcal{E})$ o conjunto das isometrias de $(\mathcal{E},d)$, isto é, o conjunto de todas as bijeções $f:\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ tais que $d(x,y) = d(f(x),f(y))$, quaisquer que sejam x,y elementos de $\mathcal{E}$. Podemos impor condições restritivas a d para assumir que $Is(\mathcal{E})$ contém um subgrupo V que satisfaz aos seguintes axiomas

($\mathcal{E}_1$) V é comutativo

($\mathcal{E}_2$) $(\mathcal{E}, V)$ é homogêneo, ou seja, se x e $y \, \varepsilon \mathcal{E}$, existe uma bijeção $\underset{\sim}{v} \varepsilon V$ tal que $\underset{\sim}{v}(x) = y$.

($\mathcal{E}_3$) dado $\underset{\sim}{v} \varepsilon V$, se existe algum $x_0 \varepsilon \mathcal{E}$ tal que $\underset{\sim}{v}(x_0) = x_0$, então $\underset{\sim}{v}(x) = x$, para todo $x \varepsilon \mathcal{E}$.

($\mathcal{E}_4$) V pode ser munido de uma estrutura de espaço produto interno, onde:

(i) a adição vetorial é dada pela composição, isto é, $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v} \equiv \underset{\sim}{u} \circ \underset{\sim}{v}$

(*ii*) se $\underset{\sim}{v}(x) = y$, então $\langle \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v} \rangle^{1/2} = d(x,y)$, onde $\langle \ , \ \rangle$ é um produto interno em V $x, y \in \mathcal{E}$.

Chamamos *espaço pontual* a um espaço métrico $(\mathcal{E}, d)$, cujo grupo de isometrias de d admite um sub grupo V , que satisfaz os axiomas $(\mathcal{E}_1) - (\mathcal{E}_4)$.

1.3.1 Teorema; (Teorema de Noll): Se o espaço V definido por $(\mathcal{E}_1) - (\mathcal{E}_4)$ existe, então é único.

Prova: se $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in$ V e $x \in \mathcal{E}$, então definimos: $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v} \equiv \underset{\sim}{u} \circ \underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{v} + x = x + \underset{\sim}{v} \equiv \underset{\sim}{v}(x)$. $\underset{\sim}{0}$ denotará a aplicação identidade em $\mathcal{E}$, portanto $\underset{\sim}{v}^{-1}$ será denotado por $-\underset{\sim}{v}$, se $\underset{\sim}{v} \in$ V .

De acordo com $(\mathcal{E}_1)$, se $x, y \in \mathcal{E}$, existe um único $\underset{\sim}{v} \in$ V tal que $\underset{\sim}{v} + x = y$: denotemos $\underset{\sim}{v}$ por $y - x$.

Suponhamos que existe um outro subgrupo $\bar{\text{V}}$ de $Is(\mathcal{E})$, que satisfaz $(\mathcal{E}_1) - (\mathcal{E}_4)$, denotemos por $y \mathbin{\hat{-}} x$ o único vetor em $\bar{\text{V}}$ que leva x em y.

Seja $x_0 \in \mathcal{E}$ um ponto fixo em $\mathcal{E}$ e a aplicação

$$\Phi : \text{V} \to \bar{\text{V}} \ ; \ \underset{\sim}{v} \mapsto \Phi(\underset{\sim}{v}),$$

definido por

1.3.2 $\quad \Phi(\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{v} + x_0) \mathbin{\hat{-}} x_0 = \hat{\underset{\sim}{v}}$

Afirmamos que:

a) Φ é injetora.

Sejam $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in$ V tais que $\Phi(\underset{\sim}{u}) = \Phi(\underset{\sim}{v})$, portanto

$\underset{\sim}{v} + x_0 = \hat{\underset{\sim}{v}} + x_0 = \underset{\sim}{u} + x_0 = \hat{\underset{\sim}{u}} + x_0$.

Sejam $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in V$ tais que $\Phi(\underset{\sim}{u}) = \Phi(\underset{\sim}{v})$, portanto:

$\underset{\sim}{v} + x_0 = \hat{\underset{\sim}{v}} + x_0 = \underset{\sim}{u} + x_0 = \hat{\underset{\sim}{u}} + x_0$.

De $x_0 + \underset{\sim}{v} = x_0 + \underset{\sim}{u}$ temos $x_0 = x_0 + (\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u})$. Por ($\mathcal{E}_4$) concluimos que $\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$, portanto $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}$.

b) Φ é sobrejetora

Se $\hat{\underset{\sim}{v}} \in \bar{V}$, vamos definir $\underset{\sim}{v}$ por

1.3.3 $\underset{\sim}{v} = (\hat{\underset{\sim}{v}} + x_0) - x_0$

É óbvio que $\Phi(\underset{\sim}{v}) = \hat{\underset{\sim}{v}}$ é além disso $\Phi(\underset{\sim}{0}) = \underset{\sim}{0}$

Se $x, y \in \mathcal{E}$, usando $\mathcal{E}_4$ (*ii*) podemos escrever

1.3.4 $(d(x,y))^2 = \langle (x-y), (x-y) \rangle = \langle (x \hat{-} y), (x \hat{-} y) \rangle$

Se $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in V$, chamemos $x \equiv x_0 + \underset{\sim}{u} = x_0 + \Phi(\underset{\sim}{u})$ e $y \equiv x_0 + \underset{\sim}{v} = x_0 + \Phi(\underset{\sim}{v})$, usando *1.3.4* temos

1.3.5 $\langle \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{u} \rangle = \langle \Phi(\underset{\sim}{v}) - \Phi(\underset{\sim}{u}), \Phi(\underset{\sim}{v}) - \Phi(\underset{\sim}{u}) \rangle$, quaisquer que sejam $\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u} \in V$. Em particular se

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} = \Phi(\underset{\sim}{0}) = \Phi(\underset{\sim}{u}), \text{ então } \langle \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v} \rangle = \langle \Phi(\underset{\sim}{v}), \Phi(\underset{\sim}{v}) \rangle$$

qualquer que seja $\underset{\sim}{v} \in V$.

Expandindo *1.3.5* usando o fato de que $\langle \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{v} \rangle = \langle \Phi(\underset{\sim}{v}), \Phi(\underset{\sim}{v}) \rangle$, qualquer que seja $\underset{\sim}{v} \in V$ obtemos

1.3.6 $\langle \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle = \langle \Phi(\underset{\sim}{u}), \Phi(\underset{\sim}{v}) \rangle$

Como Φ preserva o produto interno então Φ é um isomorfismo de V em $\bar{V}$. Mostremos que Φ é a identidade em V.

Se $\underset{\sim}{x} \in \mathcal{E}$ e $\underset{\sim}{v} \in V$ e $\underset{\sim}{u}$ denota o vetor $x - x_0$ então $x = x_0 + \underset{\sim}{u}$. Usando a definição de Φ

$$x + \underset{\sim}{v} = (x_0 + \underset{\sim}{u}) + \underset{\sim}{v} = x_0 + (\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}) = x_0 + \Phi(\underset{\sim}{u}) + \Phi(\underset{\sim}{v}) =$$

$$= x_0 + \underset{\sim}{u} + \Phi(\underset{\sim}{v}) = x + \Phi(\underset{\sim}{v}).$$

Portanto $x + \underset{\sim}{v} = x + \Phi(\underset{\sim}{v})$ qualquer que seja $\underset{\sim}{v} \in V$, logo $\underset{\sim}{v} = \Phi(\underset{\sim}{v})$, donde Φ é a identidade em V .

O espaço V definido por $(\mathcal{E}_1) - (\mathcal{E}_4)$ e denominado *espaço das translações do espaço pontual* $\mathcal{E}$ é denotado por $\mathcal{E}^T$ e, seus elementos chamados de *vetores espaciais*.

1.3.9 Teorema: Se V é um espaço euclidiano então V é o espaço das translações de algum espaço pontual $\mathcal{E}$.

Prova: Tomemos $\mathcal{E} = V$ e, a métrica $d: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$; $(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) \to \langle \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \rangle^{1/2}$, onde $\langle\, , \rangle$ denota o produto interno em V . É fácil verificar que o grupo aditivo de V é o subgrupo de $Is(\mathcal{E})$ cujos elementos v são as translações $\underset{\sim}{v}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$; $\underset{\sim}{u} \to \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}$, para para o qual os axiomas $(\mathcal{E}_1) \to (\mathcal{E}_4)$ se verificam.□

1.3.10 Proposição: Em qualquer espaço pontual $\mathcal{E}$, valem:

(*i*) $x + \underset{\sim}{0} = x$; $x \in \mathcal{E}$, $\underset{\sim}{0} \in \mathcal{E}^T$

(*ii*) $x + (y - x) = y$, $x, y \in \mathcal{E}$

(*iii*) dados $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v} \in \mathcal{E}^T$, se existir $x \in \mathcal{E}$ tal que

$x + \underset{\sim}{u} = x + \underset{\sim}{v}$ então $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{v}$

(*iv*) Se $x, y \in \mathcal{E}$ e $\underset{\sim}{v} \in \mathcal{E}^T$, então

$$(y + \underset{\sim}{v}) - (x + \underset{\sim}{v}) = y - x$$

(v) Se $x, y, z \in \mathcal{E}$, então

$$(y - z) + (z - y) = y - x$$

Um espaço pontual $\mathcal{E}$ cujo espaço das translações é de dimensão finita denomina-se *espaço pontual euclidiano.*

A dimensão de um espaço pontual euclidiano $\mathcal{E}$ é a dimensão de $\mathcal{E}^T$

Se $x \in \mathcal{E}$, então v $x - u$ $\in$ $\mathcal{E}^T$, logo

$$1.3.11 \quad x = x_0 + \sum_{i \in n} v^i e_i \quad ,$$

onde as componentes $(v_i)_{i \in \underline{n}}$ de v na base $(e_i)_{i \in \underline{n}}$ serão ditas, agora *coordenadas de* x n'a base$(x_o, (e_i)_{i \in \underline{n}})$.

Uma base $x_0, (e_i)_{i \in \underline{n}}$ de $\mathcal{E}$ é dita ortonormal se e apenas quando $(e_i)_{i \in \underline{n}}$ é base ortonormal de $\mathcal{E}^T$.

§ 1.4 Espaços tangentes e cotangentes.

Definição: Sejam $[a,b]$ um intervalo fechado da reta e

$$\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

contínua, então γ *é dito um caminho em* $\mathbb{R}^n$. Se γ é diferenciável em $[a,b]$, γ é dito *um caminho diferenciável.*

Sem perda de generalidade, podemos considerar apenas caminhos definidos em $[-1,1]$. Se $\gamma(0) = a \in \mathbb{R}^n$ então γ é dito *um caminho passando por a.*

Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a \in U$, consideremos o conjunto C_a de todos os caminhos diferenciáveis $\gamma : [-1,1] \rightarrow U$ passando por a. Chamemos $F(U)$ o conjunto de todas as funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Portanto $f o \gamma$ é diferenciável em $[-1,1]$ se $f \varepsilon F(U)$ e $\gamma \varepsilon C_a$ o número definido por *1.4.1* está bem determinado:

$$1.4.1 \qquad \langle \gamma, f \rangle_a \quad \frac{d}{dt} f \cdot \gamma \Big|_{t=0} ,$$

para cada par $(\gamma, f) \varepsilon C_a \times F(U)$

Usando *1.4.1* podemos obter relações de equivalência em $F(U)$ e C_a da seguinte forma:

(i) Se $\alpha \quad \gamma \varepsilon C_a$, α é tangente a γ em a (em símbolos $\alpha \sim_a \gamma$) se e só se $\langle \alpha, f \rangle = \langle \gamma, f \rangle$, qualquer que seja $f \varepsilon F(U)$.

(ii) Se f e $g \varepsilon F(U)$, então f e g são contangentes em a (em símbolos $f \sim_a g$) se e somente se

$$\langle \alpha, f \rangle_a = \langle \alpha, g \rangle_a ,$$

qualquer que seja $\alpha \varepsilon C_a$.

As classes de equivalência dos caminhos de C_a serão denotadas α_a e chamadas de *vetores tangentes a* $\mathbb{R}^n$ *em* a. Mostraremos que

$$T_a(\mathbb{R}^n) \equiv \{\alpha_a, \alpha \varepsilon C_a\}$$

possui uma estrutura de espaço vetorial e $T_a(\mathbb{R}^n)$ é chamado, então, de *espaço tangente a* $\mathbb{R}^n$ *em* a. Cada classe de equivalência α_a é dito *vetor tangente a* γ *em* a, *se* $\gamma \varepsilon C_a$. Intuitivamente o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em a, pode ser visualizado como se a origem de uma cópia de $\mathbb{R}^n$ fosse fixada em a.

As classes de equivalência determinadas por (ii) são chamadas *diferenciais em* a e denotadas por $d_a f$, e o conjunto

$$T^a(\mathbb{R}^n) \equiv \{d_a f,\ f \epsilon\ F(U)\}$$

é o *espaço cotangente a* $\mathbb{R}^n$ *em* a. $T^a(\mathbb{R}^n)$ também é um espaço vetorial e, além disso mostraremos que $T_a(\mathbb{R}^n)$ e $T^a(\mathbb{R}^n)$ são espaços vetoriais duais, isto é, existe uma forma bilinear não degenerada definida em $T_a(\mathbb{R}^n) \times T^a(\mathbb{R}^n)$.

A estrutura do espaço vetorial em $T^a(\mathbb{R}^n)$ surge naturalmente, de:

$$1.4.3 \qquad d_a(\lambda f + ug) = \lambda\ d_a f + u\ d_a g \quad ,$$

$f, g\ \epsilon\ F(U)$ e $\lambda,\ u\ \epsilon\ \mathbb{R}$, pois evidentemente, $F(U)$ tem uma estrutura de espaço vetorial em relação às operações usuais de adição e produto por escalar de funções definidas em U com valores em $\mathbb{R}$.

Como não é possível somar diretamente elementos de C_a não podemos introduzir já uma estrutura de espaço vetorial em $T_a(\mathbb{R}^n)$, tentaremos solucionar o problema seguindo os seguintes passos:

(i) mostrando que $T_a(\mathbb{R}^n)$ pode ser visto como um subconjunto de $(T^a(\mathbb{R}^n))^*$

(ii) provando que, na realidade, $T_a(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de $(T^a(\mathbb{R}^n))^*$

(iii) finalmente, provando que $T_a(\mathbb{R}^n) = (T^a(\mathbb{R}^n))^*$

Vamos definir

$$1.4.5 \qquad \langle \alpha_a,\ d_a f \rangle \equiv \langle \alpha,\ f \rangle_a \quad ,$$

onde $\alpha \in \alpha_a$ e $f \in d_a f$.

É fácil verificar que $\langle \alpha_a, d_a f \rangle_a$ independe da escolha dos elemento em α_a e $d_a f$.

Consideremos, agora, a aplicação

1.4.6 $\quad \phi : T_a(\mathbb{R}^n) \to (T^a(\mathbb{R}^n))^* \; ; \; \alpha_a \to \langle \alpha_a, \; \rangle$

ϕ é injetora, pois:

Se α_a e γ_a $\in T_a(\mathbb{R}^n)$ então

$$\langle \alpha_a, \; \rangle = \langle \gamma_a, \; \rangle \iff (\forall\, d_a f \in T^a(\mathbb{R}^n)) \;;$$

$$(\langle \alpha_a, d_a f \rangle = \langle \gamma_a, d_a f \rangle) \iff (\forall\, f \in F(U)) \; (\forall\, \alpha \in \alpha_a) \; (\forall\, \gamma \in \gamma_a)$$

$$(\langle \alpha, f \rangle_a = \langle \gamma, f \rangle_a)$$

Portanto $T_a(\mathbb{R}^n)$ pode ser visto como um subconjunto de $(T^a(\mathbb{R}^n))^*$.

1.4.7 Proposição: $T_a(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de $(T^a(\mathbb{R}^n))^*$ sejam α_a e γ_a elementos de $T_a(\mathbb{R}^n)$; $k, l \in \mathbb{R}$. Chamemos:

$$\varphi_1 = \phi(\alpha_a) \;, \; \varphi_2 = \phi(\gamma_a) \;, \quad \text{portanto}$$

$\varphi_1(\lambda) = \langle \alpha_a, \lambda \rangle$ e $\varphi_2(\lambda) = \langle \gamma_a, \lambda \rangle$ qualquer que seja $\lambda \in T^a(\mathbb{R}^n)$.

Vamos definir $\varphi \equiv k\,\varphi_1 + l\,\varphi_2$ e mostrar que existe um vetor tangente β_a tal que $\varphi(\lambda) = \langle \beta_a, \lambda \rangle$ qualquer que seja λ elemento de $T^a(\mathbb{R}^n)$.

Seja o caminho $\theta : [-1,1] \to \mathbb{R}^n$, definido por:

$\theta(t) = k\ \alpha(t) + l\ \gamma(t) + (1-k-l)a$,

$\alpha \in C_a$ e $\gamma \in \gamma_a$.

Então $\theta \in C_a$

Se $f \in F(U)$,

$$\langle \theta, f \rangle_a = \frac{d}{dt} f \circ \theta \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \circ (k\ \alpha(t) + l\ \gamma(t) + (1-k-l)a) \Big|_{t=0}$$

$$= k \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \Big|_{t=0} + l \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = k \langle \alpha, f \rangle_a + l \langle \gamma, f \rangle_a.$$

Portanto, se β_a é o vetor tangente a θ em a então

$$\langle \beta_a, \lambda \rangle = k \langle \alpha_a, \lambda \rangle + l \langle \gamma_a, \lambda \rangle,$$

qualquer que seja $\gamma \in T^a(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\left(e_i\right)_{i \in \underline{n}}$ a base canônica em $\mathbb{R}^n$ e definamos as curvas:

1.4.7 $\quad \gamma_i(t) \equiv a + te_i, \quad t \in [-1,1]$.

$\gamma_i \in C_a$, se $i \in \underline{n}$ e seja $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(a)$ ou mais simplesmente $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ o ve- tangente a γ_i em a.

Sejam π_i as projeções em $\mathbb{R}^n$. A diferencial de π_i será denotada por $d_a x^i$, ou dx^i.

Se $\quad a = (a_1, \ldots, a_n)$ então

1.4.8 $$\pi_j \circ \gamma_i(t) = \begin{cases} a_j & \text{se } j \neq i \\ a_i + t & \text{se } j = i \end{cases}$$

Logo:

$$1.4.9 \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} , d_a x^j \right\rangle_a = \frac{d}{dt} \pi_j \circ \gamma_i \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Mostremos, qgora, que

$T_a(\mathbb{R}^n)$ é o dual de $T^a(\mathbb{R}^n)$.

1.4.10 Teorema:

$T_a(\mathbb{R}^n) = (T^a(\mathbb{R}^n))^*$. Além disso $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i \in \underline{n}}$ é base de $T_a(\mathbb{R}^n)$, dual de $\left(d_a x^i\right)_{i \in \underline{n}}$, base de $T^a(\mathbb{R}^n)$.

Prova: $\left(d_a x^i\right)_{i \in \underline{n}}$ é linearmente independente, pois se

$\sum_{i \in \underline{n}} \lambda_i \, dx^i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, então, por *1.4.9*

$$0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} , \sum_{i \in \underline{n}} \lambda_i \, dx^i \right\rangle = \sum_{i \in \underline{n}} \lambda_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j} , d_a x^i \right\rangle = a_j, \ \forall j \in \underline{n}.$$

Analogamente usando *1.4.9*, provamos que $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{j \in \underline{n}}$ é linearmente independente.

Afirmamos agora que $\left(d_a x^i\right)_{i \in \underline{n}}$ gera $T^a(\mathbb{R}^n)$. Sejam $\gamma \in C_a$, dada por

$$1.4.11 \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)), \ t \in [-1,1].$$

Se $f \in F(U)$ então :

$$1.4.12 \quad \langle \gamma_a, d_a f \rangle = \frac{d}{dt} f \circ \gamma \Big|_{t=0} = \sum_{i \in \underline{n}} \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big|_a \gamma_j'(0)$$

Por outro lado usando *1.4.8*

$$1.4.13 \quad < \gamma_a, d_a x^j > = < \gamma, \pi_j >_a = \frac{d}{dt} \pi_j \circ \gamma \Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{k \in \underline{n}} \frac{\partial \pi_j}{\partial x^k}\Big|_{x_0} \gamma_k'(0) = \gamma_j'(0) .$$

De *1.4.12* e *1.4.13* temos que

$$d_a f = \sum_{j \; \underline{n}} \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big|_a d_a x^j \quad , \qquad \text{portanto}$$

$$dim \; T^a(\mathbb{R}^n) = n = dim \; (T^a(\mathbb{R}^n))^*$$

Por outro lado temos que $T_a(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de $(T^a(\mathbb{R}^n))^*$ (*proposição 1.4.7*), portanto

$$dim \quad T_a(\mathbb{R}^n) \leq n \text{ e } \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{i \in \underline{n}}$$

é linearmente independente, portanto:

$$T_a(\mathbb{R}^n) = (T^a(\mathbb{R}^n))^* \quad \text{e}$$

1.4.9 expressa a dualidade das bases $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{i \in \underline{n}}$ e $(dx^j)_{i \in \underline{n}}$ em relação à forma bilinear não degenerada

$$< , >: T_a(\mathbb{R}^n) \; X \; T^a(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por } 1.4.5.$$

§ 1.5 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos tais que $a \in U$ e $6(U) \subseteq V$ onde 6 é uma aplicação deferenciável de U em $\mathbb{R}^m$. Consideremos $F(V) \equiv \{f: V \longrightarrow \mathbb{R}, f$ diferenciável$\}$, então $f \circ \quad \in F(U)$, $\forall f \in F(V)$

Se $\gamma \in C_a$, $6 \circ \gamma \in C_{6(a)} \equiv \{\alpha: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

α diferenciável em $[-1,1]$ tal que $\alpha(0) = \sigma(a)\}$

Portanto podemos construir $T^{\sigma(a)}(\mathbb{R}^m)$ e $T_{\sigma(a)}(\mathbb{R}^m)$. Seja $\sigma^* \in L(T^{\sigma(a)}(\mathbb{R}^m),\ T^a(\mathbb{R}^n))$ induzida por σ, definida da seguinte forma:

$$1.5.1 \quad \sigma^*(d_{\sigma(a)} f) = d_a \ f \circ \sigma .$$

Como a composição de funções é associativa, se $\gamma \in C_a$, então:

$$1.5.2 \quad \langle(\sigma\circ\gamma)_{\sigma(a)}, d_{\sigma(a)} f\rangle = \frac{d}{dt} f \circ (\sigma\circ\gamma)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}(f\circ\sigma) \circ \Big|_{t=0} = \langle\gamma_a,\ d_a(f\circ\sigma)\rangle$$

Por outro lado, se γ_1 e γ_2 tem o mesmo vetor tangente em a, por *1.5.2.* $\sigma\circ\gamma_1$ e $\sigma\circ\gamma_2$ tem o mesmo vetor tangente em $\sigma(a)$.

Seja a aplicação

$$\sigma_*:\ T_a(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T_{\sigma(a)}(\mathbb{R}^m) \ ; \quad \gamma_a \longrightarrow (\sigma\circ\gamma)_{\sigma(a)}$$

É fácil verificar que:

$$1.5.3 \quad \langle\sigma_*(\gamma_a)\ ,\ d_{\sigma(a)}f\rangle = \langle\gamma_a,\ \sigma^*(d_{\sigma(a)}f)\rangle\ ,$$

qualquer que sejam

$$\gamma_a \in T_a(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ d_{\sigma(a)}f \in T^{\sigma(a)}(\mathbb{R}^m).$$

Além disso *1.5.3* implica que σ_* é linear e que σ_* e σ^* são duais.

Se $U_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$; $i \in \underline{3}$, são abertos, $a \in U_1$, $\phi(U_1) \subset U_2$ e $\psi(U_2) \subset U_3$, onde ϕ e ψ são aplicações diferenciáveis tais que

$U_1 \xrightarrow{\phi} U_2 \xrightarrow{\psi} U_3$, sejam as aplicações

$$T_a(\mathbb{R}^{n_1}) \xrightarrow{\phi_*} T_{\phi(a)}(\mathbb{R}^{n_2}) \xrightarrow{\psi_*} T_{\psi(\phi(a))}(\mathbb{R}^{n_3})$$

induzidas por ϕ e respectivamente. É fácil verificar que

$$(\psi o \phi)_* = \psi_* o \phi_*$$

no caso dual

$$(\psi o \phi)^* = \phi^* o \psi^*$$

Se $I : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ é a identidade então $1_* = 1$ e $1^* = 1$, em particular se

$$\psi = \phi^{-1} \text{ vale } \psi_* = (\phi_*)^{-1}.$$

C A P Í T U L O II

FIBRADOS TANGENTES E COTANGENTES

C A P I T U L O   II

§ 2.1 - Fibrado Tangente

Neste capítulo, $U \subset \mathbb{R}^n$ significará um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $a \in U$ consideremos $T_a(\mathbb{R}^n)$ e $T^a(\mathbb{R}^n)$, os espaços tangente e cotangente em a.

Definição: O fibrado tangente sobre U denotado por $T(U)$ é definido por

$$T(U) \equiv \{(a,\alpha),\ a \in U \ \text{ e } \ \alpha \in T_a(\mathbb{R}^n)\}$$

Teorema *1.4.9* implica que se

$$\alpha \in T_a(\mathbb{R}^n), \quad \alpha = \sum_{i \in \underline{n}} \alpha_i \ \frac{\partial}{\partial x_i}(a),$$

portanto a aplicação $\alpha \to (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ é um isomorfismo de $T_a(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$.

Vamos agora caracterizar diferenciabilidade de aplicações do tipo $f: U \longrightarrow T(U)$ e $g: T(U) \to U$, para tal é necessário definir convenientemente uma topologia em $T(U)$. Observemos que a bijeção:

$$h: T(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

$$(a,\alpha) \longrightarrow ((a_1,\ldots,a_n),(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))$$

pode ser tornar um homeomorfismo desde que se considere em $T(U)$

a topologia cujos abertos são da forma $h^{-1}(W)$ onde w é aberto em $U \times \mathbb{R}^n$.

Por outro lado, a aplicação

$$\sigma : U \times \mathbb{R}^n \to V = \sigma(U \times \mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{2n}$$

$$((a_1,\ldots,a_n),(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) \longmapsto (a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

é um homeomorfismo.

Se $f: U \longrightarrow T(U)$ é dada, podemos completar o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & T(U) \arrow[dl, "\Phi = \sigma \circ h"] \\ V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (a,\alpha) \in (U) \arrow[dl, "\Phi = \sigma \circ h"] \\ (a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \end{tikzcd}$$

e definir:

f é diferenciável em $a \in U$ se e apenas quando $\Phi \circ f$ é diferenciável em $a \in U$.

f é suave em U se e somente se $\Phi \circ f$ é suave em U.

Dada g: $T(U) \longrightarrow U$, de forma análoga podemos completar o diagrama

$$\begin{tikzcd} T(U) \arrow[r, "g"] & U \\ V \arrow[u, "\Phi^{-1}"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

e definir:

g é diferenciável em $(a,\alpha) \in T(U)$ se e somente se $g \circ \Phi^{-1}$ é diferenciável em $\Phi((a,\alpha))$.

g é suave em $T(U)$ se e somente se $g \circ \Phi^{-1}$ é suave em V .

Obviamente a projeção:

$$\P_U: \ T(U) \longrightarrow U, \ (a,\alpha) \longmapsto a$$

é suave.

Definição: $\varkappa : U \longrightarrow T(U)$ é um ***campo vetorial*** se e somente se $\varkappa$ é suave e $\P_U \circ \varkappa = 1_U$.

§ 2.2 - Propriedade dos campos vetoriais

Seja $F(U) \equiv \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , } f \text{ é suave } \}$, $F(U)$ tem estrutura de anel comutativo com elemento unitário.

Se definirmos $\mathfrak{X} \equiv \{ \varkappa : U \longrightarrow T(U), \ \varkappa \text{ é campo vetorial } \}, \mathfrak{X}$ tem estrutura de módulo $F(U)$ em relações às operações

$2.2.1 \quad (\varkappa_1 + \varkappa_2)(u) = \varkappa_1(u) + \varkappa_2(u)$

$2.2.2 \quad (f \varkappa)(u) = f(u) \ \varkappa_1(u)$, onde

onde $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathfrak{X}$, $f \in F(U)$ e $u \in U$.

Os campos vetoriais $\dfrac{\partial}{\partial x^i} : U \longrightarrow T(U)$, $u \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial x^i}(u)$ geram $\mathfrak{X}$ sobre $F(U)$ e são linearmente independentes, no sentido em que se $\sum\limits_{i \in \underline{n}} f_i \dfrac{\partial}{\partial x^i} = 0$, então $f_i = 0$, $\forall \ i \in \underline{n}$. Portanto, se $\varkappa$ é um campo vetorial em U, então existem funções $\varkappa_i \in F(U)$ tais que

$$\varkappa = \sum_{i \in \underline{n}} \varkappa_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

§ 2.3 *Fibrado Cotangente:*

O conjunto $T^*(U)$ definido por:

$$T^*(U) = \{(a,\lambda) \; , \; a \in U \; , \; \lambda \in T^a(\mathbb{R}^n)\} \quad ,$$

é chamado *fibrado cotangente sobre* U . Pelo teorema *1.4.10*

$(d_a x^i)_{i \in \underline{n}}$ é base de $T^a(\mathbb{R}^n)$, portanto se $\lambda \in T^a(\mathbb{R}^n)$

$\lambda = \sum_{i \in \underline{n}} \lambda_i \, d_a x^i$ e a aplicação: $\lambda \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

é um isomorfismo de $T^a(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$.

Com a finalidade de caracterizar diferenciabilidade de aplicações definidas em $T^*(U)$ com valores em $T^*(U)$ podemos repetir o que fizemos no *§ 1*, induzindo em $T^*(U)$ a menor topologia que forma a bijeção

$$h^* : T(U) \to U \times \mathbb{R}^n \quad ,$$
$$(a, \lambda) \mapsto ((a_1, \ldots, a_n), (\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

um homeoformismo:

Usando σ e $V = \sigma(U \times \mathbb{R}^n)$ do *§ 1*, podemos definir:

$$f : U \longrightarrow T(U)$$

é diferenciável em $a \in U$ se e somente se $\phi^* \circ f$ é diferenciável em y, onde $\phi^* = \sigma \circ h^*$.

g é suave em $T^*(U)$ se e somente se $g \circ \phi^{*-1}$ é suave em V. Claramente a projeção, $\pi^U : T^*(U) \longrightarrow U$, $(a,y) \mapsto a$, é suave.

Definição: $\Theta : U \longrightarrow T^*(U)$ é o *campo de formas* se e somen te se Θ é suave e $\pi^U \circ \Theta = 1_U$. O valor de um campo de formas em um ponto também é chamado de forma dierencial.

§2.3 Propriedades dos campos de formas:

Se definirmos

$$\Omega = \{\Theta\colon\ U \longrightarrow T^*(U),\ \ \Theta \text{ é um campo de formas}$$

este conjunto tem estrutura de módulo sobre $F(U)$ em relação às operações

2.3.1 $(\Theta_1 + \Theta_2)(u) = \Theta_1(u) + \Theta_2(u)$

2.3.2 $(f\ \Theta_1)(u) = f(u)\,\Theta_1(u)$,onde $\Theta_1, \Theta_2 \in \Omega$, $f \in F(U)$ e $u \in U$.

Os campos de formas definidos por

$$dx^i\colon U \longrightarrow T^*(U) \quad , \quad a \mapsto d_a x^i \ , \quad i \in \underline{n} \quad ,$$

geram Ω sobre $F(U)$ e são linearmente independentes, no sentido em que se

$$\sum_{i \in \underline{n}} fi\ dx^i = 0$$

então, $\forall i,\ i \in \underline{n}$, $fi = 0$. Portanto, qualquer que seja $\Theta \in \Omega$ existem funções $a_i \in F(U)$ tais que $\Theta = \sum_{i \in \underline{n}} a_i\ dx^i$.

Os conceitos de fibrados tangentes e cotangentes foram motivados pela mecânica. Os elementos $(u,\ \alpha) \in T(U)$ podem ser interpretados como o par ordenado cujo primeiro elemento significa a posição da partícula num dado instante e o segundo, a sua velocidade em u.

Se $f \in F(U)$, então

$$d_a f = \sum_{i \in \underline{n}} \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_a d_a x^i$$

é ponto de $T^a(\mathbb{R}^n)$, portanto

2.3.4 $$d\, f = \sum_{i \in \underline{n}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

é um campo de formas e expressões como *2.3.4* surjam constantemente em mecânica, como por exemplo, o "trabalho infinitesimal".

2.3.5 $$d\omega = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$$

onde f_i, $i \in \underline{3}$, são as componentes de uma força f.

§2.4 *Fibrado Vetorial.*

Definição: Dados três conjuntos A, B, U e aplicações

$$f: A \longrightarrow U \text{ e } g: B \longrightarrow U,$$

definimos o *"pull back"* $A \times_U B$ como o objeto formal que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times_U B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

Ou seja, o *"pull back"* pode ser definido como o seguinte conjunto:

$$A \times_U B \equiv \{ (a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B,\ f(a) = g(b) \}.$$

Sejam V, U, espaços euclideanos, $V \subset \mathsf{V}$ e $U \subset \mathsf{U}$, abertos e $\pi: V \longrightarrow U$ sobrejetora e suave:

Definição: O terno ordenado (V,U,π) é dito um *pré-fibrado* se a cada *fibra* $\pi^{-1}(u) = \{v \in V : \pi(v) = u\}$ estão definidas uma adição e uma multiplicação escalar suaves que munem cada fibra de uma estrutura de espaço vetorial, Isto é:

2.4.1 Se $v_1, v_2 \in V$, $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ e $k \in$ existem pontos $v_1 + v_2$ e kv, em V tais que

$$\pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1) = \pi(kv_1) = \pi(v_1).$$

2.4.2 $\forall\, u \in U$, $(\pi^{-1}(u), \ , + \ , \cdot)$ é um espaço vetorial e as aplicações

$$+: V \times V \longrightarrow V \quad \text{e} \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow U$$

são suaves.

Observemos que, tanto U quanto V não possuem necessariamente estrutura de espaço vetorial.

Definição: U é dito *espaço base*, V *espaço total* e π *projeção de* V *sobre* U.

Consideremos $(U \times \mathbb{R}^n, U, \pi)$, onde $U \subset \mathbb{R}^m$ é aberto,

$$\pi: U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U, \ (u,v) \longmapsto u.$$

$(U \times \mathbb{R}^n, U, \pi)$ é um *pré-fibrado* chamado *fibrado vetorial local* onde cada *fibra* é uma cópia de $\mathbb{R}^n$.

Outros fibrados vetoriais locais são

$$(T(U),\ U,\ \pi_U) \quad \text{e} \quad (T^*(U),\ U,\ \pi^U),$$

que tem U como espaço base.

Sejam os pré-fibrados

$$(V,\ U,\ \pi) \quad \text{e} \quad (\widetilde{U},\ \widetilde{V},\ \widetilde{\pi}),$$

chamaremos *aplicação fibrada* ao par (F,f) de funções suaves no diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & \widetilde{V} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{f} & \widetilde{U} \end{array}$$

Se o mesmo for comutativo e se

$$F \in \mathrm{L}(\pi^{-1}(u), \widetilde{\pi}^{-1}(f(u)))$$

2.4.3. Observação:

Dado um pré-fibrado (V, U, π) e a aplicação suave

$$\chi : U \longrightarrow V$$

tal que $\pi \circ \chi = 1_U$, então χ é dita *secção transversal* de (V, U, π).

O $\mathfrak{X} \equiv \{\chi: U \longrightarrow V$, onde χ é uma secção transversal de $(V, U, \pi)\}$ tem estrutura de módulo sobre $\mathrm{F}(U)$ em relação às operações definidas por

2.4.4. $(\chi_1 + \chi_2)(u) = \chi_1(u) + \chi_2(u)$

2.4.5. $(f\, \chi_1)(u) = f(u)\, \chi_1(u)$, onde $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{X}$, $u \in U$ e $f \in \mathrm{F}(U)$.

De acordo com *1.4.3.* um campo vetorial e o seu conceito dual, ou seja campo de formas, podem ser redefinidos como secções transversais de $\mathrm{T}(U)$ e $\mathrm{T}^*(U)$. Observemos, ainda, que um campo vetorial pode atuar sobre elementos de $\mathrm{F}(U)$ da seguinte forma:

Se $g \in F(U)$ e $\varkappa \in \mathfrak{X}$, definimos

2.4.6. $\varkappa[g]: U \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, a \longrightarrow \varkappa_a[g]$,

onde

$$\varkappa_a[g] \equiv \langle d_a g \,,\, \varkappa_{(a)} \rangle \,.$$

Definição: $\varkappa_a$ é dita *derivada de Lie.*

§2.5 Propriedades da derivada de Lie.

2.5.1. *Proposição* $i)$ $\varkappa[f] = 0$ $f \in F(U)$, é constante

$ii)$ $\varkappa[\mu f + \lambda g] = \mu \varkappa[f] + \lambda \varkappa[g]$

$iii)$ $\varkappa[f.g] = f \varkappa[g] + g \varkappa[f]$

se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f,g \in F(U)$ e $\varkappa \in \mathfrak{X}$

Prova: Basta aplicar a 1.4.6.

Definição: Uma *derivação em* $F(U)$ é uma função θ: $F(U) \to F(U)$ tal que:

(i) $\theta(f) = 0$ se $f \in F(U)$ é constante

(ii) $\theta(f + \lambda g) = \mu\theta(f) + \lambda\, \theta(g)$

(iii) $\theta(f.g) = \theta(f).g + g.\, \theta(f)$

2.5.2. *Teorema:* Se θ é uma derivação em $F(U)$, existe um único $\varkappa \in \mathfrak{X}$ tal que

$$\theta(f) = \varkappa[f] \quad , \quad \forall f \in F(U).$$

Lema : Se $f \in F(U)$, $\exists\, g_i \in F(U), i \in \underline{n}$, tais que numa vizinhança V de a.

$$f = f(a) + \sum_{i \in \underline{n}} (\pi_i - a_i) g_i \quad \text{e} \quad g_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a \,.$$

Prova: Sejam B uma bola de centro a, tal que $B \subset U$ (B é conexa) e $u \in B$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Consideremos a aplicação:

$$\alpha \; [0,1] \longrightarrow \alpha(t), t \mapsto \alpha(t) = f(a + t(u - a)).$$

É óbvio que $\alpha(0) = f(a)$ e $\alpha(1) = f(u)$

Usando o teorema fundamental do cálculo podemos escrever:

$$\alpha(1) - \alpha(0) = \int_0^1 \alpha'(t)\, dt$$

$$f(u) - f(a) = \int_0^1 \sum_{i \in \underline{n}} (u_i - a_i) \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{a+t(u-a)} dt$$

$$= \sum_{i \in \underline{n}} (u_i - a_i)\, g_i(u), \quad \text{onde}$$

$$g_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(a_i + t(u_1 - a_1), \ldots, x_n + t(u_n - a_n))dt.$$

Passemos, então, à prova do teorema:

Se θ é uma derivação, então:

$$\theta(f)(a) = \theta(f(a)) + \sum_{i \in \underline{n}} (\pi_i - a_i)(a)\; g_i(a) + (\pi_i(a) - a_i)\,\theta(g)(a) = \sum_{i \in \underline{n}} \theta(\pi_i)(a)\, g_i(a)$$

$$g_i(a) = \int_0^1 \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_a dt = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_a$$

Definamos $\varkappa$ tal que

$$\varkappa = \sum_{i \in \underline{n}} \theta(\pi_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

então é claro que

$$\varkappa[f](a) = \langle d_a f, \varkappa \rangle_a = \theta(f)(a) .$$

C A P Í T U L O   III

FORMAS EXTERIORES

C A P Í T U L O   III

§ 3.1 *Produto tensorial*

Sejam V , W , Z espaços vetoriais reais e ψ uma aplicação $\psi : V \times W \to Z$

Definição: ψ é dita *bilinear* se satisfaz às seguintes condições

3.1.1 $\psi(\lambda v_1 + v_2, w_1) = \lambda\,\psi(v_1, w_1) + \psi(v_2, w_1)$

3.1.2 $\psi(v_1, \lambda w_1 + w_2) = \lambda\,\psi(v_1, w_1) + \psi(v_1, w_2)$.

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in V$ e $w_1, w_2 \in W$ são arbitrários.

Se em particular $Z = \mathbb{R}$, ψ é dita uma *forma bilinear*. O conjunto de todas as aplicações bilineares de $V \times W$ em Z , denotado $\beta(V \times W, Z)$, possue estrutura de espaço vetorial em relação as operações usuais de adição e produto por escalar.

Devemos observar que, em geral a imagem de $\psi \in \beta(V \times W, Z)$, denotada por $Im\,\psi$, não é um subespaço de Z . Denotaremos por $\langle Im\,\psi \rangle$, o subespaço de Z gerado por $Im\,\psi$.

§ 3.2 Sejam V , W , Z como no parágrafo anterior e $\otimes \in \beta(V \times W, Z)$

Definição: O par $(Z, \otimes)$ é dito um *produto tensorial de* V *e* W se as seguintes condições são cumpridas.

3.2.1 $\langle Im \otimes \rangle = Z$

3.2.2 Se $\phi \in \beta(V \times W, U)$, onde U é um espaço vetorial real qualquer, então existe $L\varepsilon$ L(Z,U) tal que $L\circ\otimes = \phi$.

3.2.3 Teorema:

Se V e W são espaços vetoriais reais então existe um único espaço vetorial denotado V⊗W e uma aplicação ⊗ ε β(VxW,V⊗W) que cumprem as condições *3.2.1* e *3.2.2*.

Demonstração ver referência [*1*].

Denotamos por $v\otimes w$, o valor $\otimes(v,w)$, (v,w) ε VxW

§ *3.3* Propriedades do produto tensorial.

3.3.1 Proposição: Se $z\varepsilon$ V⊗W , $z \neq 0$, então z pode ser escrito na forma:

$$z = \sum_{i\varepsilon \underline{n}} v_i \otimes w_i \quad ,$$

onde $(v_i)_{i\varepsilon\underline{n}}$ e $(w_i)_{i\varepsilon\underline{n}}$ são linearmente independentes em V e W respectivamente.

Demonstração:

Seja $z = \sum_{i\varepsilon\underline{n}} v_i\otimes w_i$, onde n ε IN , e n é mínimo

Se $n = 1$, $z = v_1\otimes w_1 = \otimes(v_1,w_1)$ e como $z\neq 0$, e ⊗ é bilinear concluimos que $v_1\neq 0$ e $w_1\neq 0$.

Suponhamos agora que $n>1$ e que os vetores $(w_i)_{i\varepsilon\underline{n}}$ são linearmente dependentes, sem perda de generalidade podemos supor que

$$w_n = \sum_{i\varepsilon(\underline{n-1})} \lambda^i w_i \quad , \quad \lambda^i \ \varepsilon\ \mathrm{IR}.$$

Então:

$$z = \sum_{i \in \underline{n}} v_i \otimes w_i = \sum_{i \in (\underline{n-1})} v_i \otimes w_i + \sum_{i \in (\underline{n-1})} \lambda^i v_n \otimes w_i =$$

$$\sum_{i \in (\underline{n-1})} (v_i + \lambda^i v_n) \otimes w_i = \sum_{i \in (\underline{n-1})} v_i' \otimes w_i \ ,$$

onde $v_i' = v_i + \lambda^i v_n$, o que contradiz o fato de n ser mínimo

3.3.2 Proposição: $\beta(V \times W, U)$ e $L(V \otimes W, U)$ são isomorfos. Tal isomorfismo é dado pela aplicação:

g: $\beta(V \times W, U) \longrightarrow L(V \otimes W, U)$; $\varphi \mapsto L$, tal que $\varphi = L o \otimes$.

3.3.3 Proposição: Existe um isomorfismo canônico entre $W \otimes V$ e $V \otimes W$. Ver referência [2]

3.3.4 Proposição: Se V e W são de dimensão finita então $V^* \otimes W^*$, $(V \otimes W)^*$ e $L(V \otimes W, \mathbb{R})$ são isomorfos. Ver referência [3].

3.3.5 Proposição: Se V e W são de dimensão finita e $(e_i)_{i \in \underline{n}}$ e $(f_j)_{j \in \underline{m}}$ são bases de V e W respectivamente e se $(\bar{e}_i)_{i \in \underline{n}}$ e $(\bar{f}_j)_{j \in \underline{m}}$, são bases de V e W relacionadas com as anteriores por:

$$e_i = \sum_{k \in \underline{n}} A_{ik} \bar{e}_k \ , \quad i \in \underline{n}$$

e

$$f_j = \sum_{q \in \underline{m}} B_{jq} \bar{f}_q \ , \quad j \in \underline{m}$$

Se $v \in V$ e $w \in W$ então

$$v = \sum_{i \in \underline{n}} v^i e_i = \sum_{k \in \underline{n}} \bar{v}^k \bar{e}_k \qquad \text{e}$$

$$w = \sum_{j \in \underline{m}} w^j f_j = \sum_{q \in \underline{m}} \bar{w}^q \bar{f}_q \qquad \text{e}$$

$$v \otimes w = \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{m}} v^i w^j e_i \otimes f_j = \sum_{k \in \underline{n}} \sum_{q \in \underline{m}} \bar{v}^k \bar{w}^q \bar{e}_k \otimes \bar{f}_q$$

onde

$$\bar{v}^k \bar{w}^q = \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{m}} A_{ik} \, B_{jq} \, v^i w^j \, .$$

§ 3.4 *Produto tensorial de varios espaços*

Seja $(V_i)_{i \in \underline{p}}$ uma seqüência de espaços vetoriais reais.

A aplicação $\psi : V_1 \times V_2 \times .. V_p \longrightarrow Z$, onde Z é um espaço vetorial real é dita *p-linear* se satisfaz às seguintes condições

3.4.1 Para todo $i \in \underline{p}$,

$$\psi(v_1, \dots, v_i + \lambda u_i, \dots, v_p) = \psi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) + \lambda \, \psi(v_1, \dots, u_i, \dots, v_p)$$

onde $v_k \in V_k$, $k \in \underline{p}$ e $u_i \in V_i$.

O conjunto $L_p(V_1 \times \dots \times V_p \, ; Z)$ de todas as aplicações *p*-lineares tem estrutura de espaço vetorial em relação às operações de adição e produto por escalar de aplicações *p*-lineares definidas de forma usual.

Definição: Se $\psi \in L_p(V_1 \times \dots \times V_p , Z)$, $\langle Im\psi \rangle$ é por definição o subespaço de Z gerado pela imagem de ψ ,denotada por $Im\psi$.

Seja $\overset{p}{\otimes} \in L_p(V_1 \times \ldots \times V_p, Z)$.

Definição: O par $(Z, \otimes)$ é dito um *produto tensorial* de $(V_i)_{i \in \underline{p}}$ se satisfaz às seguintes condições:

3.4.2 $\langle Im \overset{p}{\otimes} \rangle = Z$

3.4.3 Se $\Phi \in L(V_1 \times \ldots \times V_p, U)$, onde U é um espaço vetorial qualquer, existe $L \in L(Z, U)$ tal que $\Phi = L \circ \overset{p}{\otimes}$.

Usando a indução finita, podemos demonstrar a existência e unicidade, a menos de isomorfismos, do produto tensorial de p-espaços vetoriais e o par $(Z, \overset{p}{\otimes})$ pode ser denotado por $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_p, \overset{p}{\otimes})$. Além disso as propriedades de $V \otimes W$ podem ser estendidas facilmente para $V_1 \otimes \ldots \otimes V_p$.

3.4.4 Proposição: Se $p=3$, então $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ e $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ são isomorfos. Mais geralmente $V_1 \otimes \ldots \otimes V_p \approx (V_1 \otimes \ldots \otimes V_i) \otimes (V_{i+1} \otimes \ldots \otimes V_p)$. *Demonstração* ver referência [4].

3.4.5 Proposição: Se dimensão de $V_i, i \in \underline{p}$, é finita, então $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_p^*$, $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_p)^*$ e $L(V_1 \times \ldots \times V_p, \mathbb{R})$ são isomorfos.

Demonstração ver referência [5].

Sejam $(V_i)_{i \in \underline{p}}$ uma seqüência de espaços vetoriais reais de dimensão finita e $(\Psi^i)_{i \in \underline{p}}$ uma seqüência de formas lineares $\Psi^i \in V_i^*$.

A p-upla $(\Psi^1, \ldots, \Psi^p)$ de formas lineares induz uma forma p-linear

$$\Phi : V_1 \times \ldots \times V_p \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \ldots, v_p) \mapsto \prod_{i \in \underline{p}} \Psi^i(v_i) \quad ,$$

Pela propriedade *3.4.3* do produto tensorial de $V_1, \ldots, V_p$, existe $L \in L_p(V_1 \ldots V_p, \mathbb{R})$ tal que $\Phi = L \circ \overset{p}{\otimes}$. Portanto:

$$\Phi(v_1, \ldots, v_p) = L \circ \overset{p}{\otimes}(v_1 \ldots v_p) \quad \text{ou seja}$$

$$\Psi^1(v_1) \ldots \Psi^p(v_p) = L(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).$$

Definição: A aplicação linear L é definida como o *produto tensorial* de $(\Psi^1, \ldots, \Psi^p)$ e denotada por $\Psi^1 \otimes \ldots \otimes \Psi^p$.

3.4.6 Observação:

Se $V_1 = \ldots = V_p = V$, $V_1 \otimes \ldots \otimes V_p$ é denotado por $\overset{p}{\otimes} V$ é dito p-ésima potência tensorial de V ou espaço vetorial dos tensores contra-variantes, de ordem p. Enquanto que a p-ésima potência tensorial de V^* é chamada de espaço vetorial dos tensores covariantes de ordem p em V . Além disso se dimensão de V é finita, os elementos de $\overset{p}{\otimes} V^*$ são chamados de formas p-lineares em V .

3.4.7 Proposição: Se $(e_i)_{i \in \underline{n}}$ é base de V então $(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p})_{i_1, \ldots, i_p \in \underline{n}}$ é base de $\overset{p}{\otimes} V$ e portanto sua dimensão é n^p.

§ 3.5 Sejam S um conjunto finito com p-elementos e $\mathcal{S}$ o grupo das permutações de S .

3.5.1 Proposição: Existe uma única aplicação $\epsilon : \mathcal{S} \to \{+1, -1\}$, $\sigma \mapsto \epsilon_\sigma$, com as seguintes propriedades:

(*i*) $\epsilon_{\tau o \sigma} = \epsilon_\tau \, \epsilon_\sigma$

(*ii*) $\epsilon_\iota = +1$ se ι é a permutação identidade.

(*iii*) $\epsilon_\tau = -1$ se τ é uma transposição

O valor ϵ_σ é definido como *sinal da permutação* σ .

Demonstração ver referência [*6*].

Observemos que basta conhecer o valor ϵ_τ , onde τ é transposição para determinar ϵ_σ , $\sigma \in \mathcal{S}$, qualquer, visto que $\sigma \in \mathcal{S}$ se decompõe em um número finito de transposições , decomposição que não é única, embora a paridade seja mantida. Além disso concluímos que $\epsilon_\sigma = +1$ se σ é par e $\epsilon_\sigma = -1$ se σ é impar.

§ *3.6 Potência exterior*

Seja $\mathcal{S}$ como no § *5* e consideremos $\overset{p}{\otimes} V^*$, onde dimensão de $\underset{\sim}{V}$ é finita. Se $\sigma \in \mathcal{S}$, σ induz um automorfismo L_σ em $\overset{p}{\otimes} V^*$ dado por

$$L_\sigma : \overset{p}{\otimes} V^* \to \overset{p}{\otimes} V^* \quad ; \quad \Phi \mapsto L_\sigma(\Phi) \quad , \text{ onde}$$

$$L_\sigma (\Phi)(v_1, \ldots, v_p) = \Phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \quad ,$$

$$(v_1, \ldots, v_p) \in \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p\text{-vezes}} .$$

3.6.1 Observação: Se ρ , $\tau \in \mathcal{S}$, então $L_\rho o L_\tau = L_{\rho o \tau}$

Definição: Se $\phi \in \overset{p}{\otimes} V^*$ e $\phi(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(p)}) = \epsilon_\rho \, \phi(v_1, \ldots, v_p)$ $\forall \, \sigma \in \mathcal{S}$, então ϕ é dita forma *p-linear alternada*. O conjunto de todas as formas *p*-lineares alternadas é evidentimente um subespaço vetorial de $\overset{p}{\otimes} V^*$.

3.6.2 Proposição: $\phi \in \overset{p}{\otimes} V^*$ é p-linear alternada se e somente se $\phi(v_1, \ldots, v_p) = 0$ quando $v_i = v_j$, para pelo menos um par

$(i,j) \in \underline{p}\times\underline{p}$, $i \neq j$.

3.6.3 Proposição: Seja $(e^i)_{i\in\underline{n}}$ uma base de V^*, se para cada subconjunto $I = \{i_1 <\ldots< i_p\} \subset \underline{n}$, $p \leq n$, definirmos

$$e^I = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon_\sigma \, e^{\sigma(i_1)} \otimes \ldots \otimes e^{\sigma(i_p)} ,$$

vamos obter $\binom{n}{p}$ elementos da forma e^I, tais elementos são formas p-lineares alternadas e constituem uma base para o subespaço das formas p-lineares alternadas.

Demonstração ver referência [7].

Consideremos agora a aplicação

$A : \overset{p}{\otimes} V^* \to \overset{p}{\otimes} V^*$; $\phi \mapsto A\phi$, definida por

$A\phi = \sum_{\rho\in\mathcal{S}} \epsilon_\rho L(\phi)$. Obviamente A é linear.

Definição: A é dito *alternador* de $\overset{p}{\otimes} V^*$.

3.6.4. Proposição: Se $\Phi \in \overset{p}{\otimes} V^*$, então $A\Phi$ é alternada.

Prova:

Seja $\rho \in \mathcal{S}$, arbitrário, então

$$L_\rho(A\phi) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon_\sigma \, L_\rho(L_\sigma(\phi)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon_\sigma L_{\rho\circ\sigma}(\phi)$$

$$= \epsilon_\rho \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon_\rho \epsilon_\sigma \, L_{\rho\circ\sigma}(\phi) = A\,\phi$$

3.6.5 Proposição: Se $\Phi \in \otimes V^*$ é alternada então $A\Phi = p!\Phi$

Prova:

$$A\Phi = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (\epsilon_\sigma)^2 \Phi = p!\,\Phi .$$

3.6.6 Proposição: A imagem $A(\overset{p}{\otimes} V^*)$ coincide com o subespaço dos tensores antissimétricos ou alternados.

Prova: conseqüência imediata das proposições *3.6.4* e *3.6.5*.

Definição: A p-ésima potência exterior de V^*, denotada por $\Lambda^p(V^*)$ é definida por:

$$3.6.7 \qquad \Lambda^p(V^*) \equiv A(\overset{p}{\otimes} V^*) \qquad , \; p \geq 2 \; ,$$

também chamada espaço vetorial das *formas exteriores*.

Por extensão definimos:

$$\Lambda^0 V^* \equiv \mathbb{R}$$

$$\Lambda^1 V^* \equiv V^*$$

3.6.8 Observação: Se $(\xi^i)_{i \in \underline{p}}$ é uma seqüência de formas lineares em V então

$$A(\xi^1 \otimes \ldots \otimes \xi^p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \epsilon_\sigma \, \xi^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \xi^{\sigma(p)}$$

é denotado por $\xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^p$. É fácil verificar que:

$$\xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^p(v_1, \ldots, v_p) = det\,[\xi^i(v_j)]$$

onde $(v_1, \ldots, v_p) \in \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p\text{-vezes}}$

3.6.9 Proposição: Se $(e^{i})_{i\in \underline{n}}$ é base de V^*, então:

$$\left(e^{i_1}\wedge \ldots \wedge e^{i_p}\right)_{1 \le i_1 \; \ldots \; i_p \le n}$$

é base de $\Lambda^p V^*$, e, além disso:

$$dim\ \Lambda^p V^* = \begin{cases} (i) & \binom{n}{p} \quad \text{se} \quad n \ge p \\ (ii) & 0 \quad \text{se} \quad p > n . \end{cases}$$

Prova:

(i) decorre imediatamente da definição de $\Lambda^p V^*$ e da proposição *3.6.3*.

(ii) é conseqüência imediata da proposição *3.6.2*.

Definição: Denotemos por ΛV^* o espaço vetorial definido por

$$\Lambda V^* = \bigoplus_{p\in \underline{n}_0} \Lambda^p V^* \qquad \text{onde} \qquad \underline{n}_0 = \{0\} \cup \underline{n} \quad .$$

É fácil verificar que $dim\ \Lambda V^* = 2^n$.

Seja a aplicação bilinear:

$$\Lambda : \quad \Lambda^p V^* \times \Lambda^q V^* \quad \to \Lambda^{p+q} V^* \quad ,$$

definida nas bases de $\Lambda^p V^*$ e $\Lambda^q V^*$ por

$$\left(e^{i_1}\wedge \ldots \wedge e^{i_p},\ e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}\right) \mapsto e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \ldots \wedge e^{j_q}$$

com a propriedade:

$$e^{j_1}\wedge \ldots e^{j_q} \wedge e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q} = (-1)^{pq} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}$$

Tal aplicação é chamada *produto exterior em* ΛV^*

Propriedades do produto Exterior.

3.6.10 Proposição: Se $\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \Phi_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \in \Lambda^p V^*$

$$e \quad \Psi = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \Psi_{j_1 \ldots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} \in \Lambda^q V^*$$

então

$$\Phi \wedge \Psi = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots i_p \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \Phi_{i_1 \ldots i_p} \Psi_{j_1 \ldots j_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}$$

3.6.11 Proposição: Se $\eta \in \Lambda^s V^*$, $\theta \in \Lambda^q V^*$, $\omega \in \Lambda^r V^*$

então :

(*i*) $\eta \wedge (\theta \wedge \omega) = (\eta \wedge \theta) \wedge \omega$

(*ii*) $\eta \wedge \theta = (-1)^{sq} \theta \wedge \eta$

(*iii*) $\eta \wedge (\theta + \omega) = \eta \wedge \theta + \eta \wedge \omega$, *se* $q=r$.

(*iv*) $\eta \wedge \eta = 0$ *se* $s=1$.

ΛV^* com o produto exterior adquire uma estrutura de álgebra exterior ou álgebra de Grassmann.

§ 3.7 *Fibrado exterior sobre U .*

Seja $U \subset \mathbb{R}$, aberto, definiremos o *p-ésimo fibrado exterior sobre U*, denotado $\Lambda^p(U)$ como o conjunto dos pares ordenados (a, ω), onde $a \in U$ e $\omega \in \Lambda^p(T^a(\mathbb{R}^n))$, ou seja, o *p-ésimo* fibrado exterior é aquêle cujas fibras são as *p-ésimas* potências exteriores dos espaços contangentes de U .

Nosso objetivo é definir formas diferenciais e introduzir a derivada exterior, antes precisamos caracterizar diferenciabilidade de aplicações definida em $\Lambda^p(U)$ ou com valores em $\Lambda^p(U)$.

Se $\left(e^i\right)_{i\varepsilon\underline{n}}$ é base de $T^a(\mathbb{R}^n)$ sabemos que

$$\left(e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}\right)_{1\leq i_1\ \ldots\ i_p\leq n}$$

é base de $\Lambda^p\,(T^a(\mathbb{R}^n))$ com $\binom{n}{p}$ elementos.

Portanto, se $\Psi\ \varepsilon\ \Lambda^p\,(T^a(\mathbb{R}^n))$, então Ψ se escreve da forma

$$\Psi = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} \Psi_{i_1\ldots i_p}\, e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p},$$

onde $\Psi_{i_1\ldots i_p}\ \varepsilon\ \mathbb{R}$. Seja a bijeção $h\colon \Lambda^p(U) \to U\times\mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$,

$(a,\Psi)\ \mapsto\ ((a_1,\ldots,a_n),(\Psi_{1,2,\ldots p},\ldots,\Psi_{(n-p),\ldots,n}))$. h induz em $\Lambda^p(U)$ uma topologia, a topologia cujos abertos são da forma $h^{-1}(V)$, onde V é aberto em $U\times\mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$. Consideremos ainda

$$\sigma\colon U\times\mathbb{R}^{\binom{n}{p}} \to V = \sigma\,(U\times\mathbb{R}^{\binom{n}{p}})\subset\mathbb{R}^{n+\binom{n}{p}}\ ;$$

$$((a_1,\ldots,a_n)(\Psi_{1,2,\ldots,p},\ldots,\Psi_{n-p,\ldots,n}))\to(a_1,\ldots,a_n,\Psi_{1,2,\ldots,p},\Psi_{n-p,\ldots,n})$$

Obviamente σ é um homeomorfismo.

Seja $f\colon U \to \Lambda^p(U)$ e $g\colon \Lambda^p(U) \to U$.

Definição: Diremos que:

(*i*) f é diferenciável em $a\ \varepsilon\ U$ se $\sigma o(hof)$ é diferenciável em a.

C A P Í T U L O   V

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

(*ii*) g é diferenciável em $(a,\Psi) \in \Lambda^p(U)$ se $go\,(\delta oh)^{-1}$ é diferenciável em $\delta oh(a,\Psi)$.

(*iii*) f é suave em U se $\delta o(hof)$ é suave em U.

(*iv*) g é suave em $\Lambda^p(U)$ se $go(\delta oh)^{-1}$ é suave em U.

É imediato que a projeção $\pi^p: \Lambda^p(U) \to U$; $(a,\Psi) \mapsto a$, é suave.

Definição: Um *campo de k-formas diferenciais* ou uma *k-forma diferencial* é uma aplicação suave $\omega: U \longrightarrow \Lambda^k(U)$, $a \longmapsto (a,\omega_a)$, tal que $\pi^k o\, \omega = 1_U$. O valor de um campo de k-formas em um ponto também chamado *forma diferencial*, e em lugar de usar o par ordenado (a,ω_a), usaremos para simplificar ω_a.

Definição: Produto exterior de k-formas diferenciais. Se k e p são inteiros não negativos podemos definir o produto exterior de $\Lambda^k U \times \Lambda^p U$ em Λ^{k+p} utilizando o produto exterior em $\Lambda^k(T^a\mathbb{R}^n)$ para cada $a \in U$.

Assim, o produto exterior de $\Lambda^k(U) \times \Lambda^p(U)$ é a aplicação

$$\wedge : \Lambda^k U \times \Lambda^p U^p \to \Lambda^{k+p} U \;;$$

$$((a,\omega)\,,\,(a,\omega')) \mapsto (a,\omega\wedge\omega').$$

§ 3.8 Propriedades das k-formas diferenciais

Se denotarmos por $\Omega^k(U)$ o conjunto de todas as k-formas diferenciais em U verificamos que $\Omega^k(U)$ é um espaço vetorial real em relação as equações de adição e produto por escalar definidas por:

(i) $(\omega_1 + \omega_2)(a) = \omega_1(a) + \omega_2(a) = (a, \omega_1(a) + \omega_2(a))$

(ii) $(\alpha\,\omega_1)(a) = \alpha\omega_1(a) = (a_1 \alpha\,\omega_1(a))$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in U$.

$\Omega^k(U)$ é um módulo sobre $F(U)$, cuja ação de módulo é dada por:

$f\omega : a \in U \mapsto (a, f(a)\omega_a)$.

Os campos de k-formas definidos por

$$dx^{i_1} \ldots dx^{i_k} : U \longrightarrow \Lambda^k(U) \; ; \; a \longrightarrow d_a x^{i_1} \ldots d_a x^{i_k} \quad ,$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, geram $\Omega^k(U)$ sobre $F(U)$ e são linearmente independentes, no sentido em que $f_{i_1,\ldots,i_k} = 0$ se

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0, \; f_{i_1 \ldots i_k} \in (U)$$

Portanto qualquer que seja $\gamma \in \Omega^k(U)$ existem funções $\gamma_{i_1 \ldots i_k} \in F(U)$ tais que

$$\gamma = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \gamma_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} .$$

Por convenção chamamos de *0-formas diferenciais* as funções reais suaveis definidas em U, ou seja, os elementos de $F(U)$.

§ 3.9 *Derivação exterior de formas.*

Definição: *Se* $\omega \in \Omega^k(U), k>0$ definimos a *derivada exterior de* ω, denotada $d\omega$, pela equação:

$$d\omega = \sum_{1\le i_1<\dots\le i_k<n} d\omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \sum_{j\in \underline{n}} \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

e, para $k=0$, $f \in \Omega^0(U)$, df é a derivada usual de f.

3.9.1 *Teorema:* Sejam $\zeta \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^m(U)$ então

(*i*) $d(\zeta+\eta) = d\zeta + d\eta$ *se* $m=k$

(*ii*) $d(\zeta\wedge\eta) = d\zeta\wedge\eta + (-1)^k \zeta\wedge d\eta$

(*iii*) $d(d\zeta) = 0$, *ou brevemente,* $d^2\zeta = 0$.

Demonstração: ver referência [8].

Seja $f: U\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U'\subset \mathbb{R}^m$, suave, U e U' abertos. Denotemos por $Df(a)$, a derivada de f em $a \in U$. f induz uma aplicação linear $f_* \in L(T_a(\mathbb{R}^n), T_{f(a)}(\mathbb{R}^m))$ definida por

$$f_*(v) = D_{f(a)}(v),\ v \in T_a(\mathbb{R}^n)$$

Por sua vez, f_* induz uma aplicação linear $f^* \in L(\Omega^k(U'), \Omega^k(U))$, definida por $f^*(\omega)(a) = f^*(\omega(f(a)))$, onde $\omega \in \Omega^k(U), v_1, \ldots, v_k \in T_a\mathbb{R}^n$, então

$$f^*(\omega(f(a))\ (v_1,\ldots,v_k) = \omega(f(a))\ (f_*\ (v_1),\ldots,f_*\ (v_k)).$$

3.9.2 *Teorema:* Se $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ é suave e $(f^1,\ldots,f^m)$ são as funções coordenadas de f então:

(1) $f^*(dx_i) = \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\, dx^j \quad , \quad i \in \underline{m}$

(2) $f^*(\theta_1 + \theta_2) = f^*(\theta_1) + f^*(\theta_2) \ , \ \theta_1, \theta_2 \in \Omega^k(U')$

(3) $f^*(g\theta) = (gof)\ f^*(\theta), g \in F(U') \ , \ \theta \in \Omega^k(U')$

(4) $f^*(\theta \wedge \zeta) = f^*\theta \wedge f^*\zeta \ , \ \theta \in \Omega^k(U') \ , \ \zeta \in \Omega^m(U')$

(5) $\varphi \in \Omega^k(U')$, então $f^*(d\varphi) = d(f^*\varphi)$.

Para demonstrar basta usar a definição de f^*.

A aplicação f^* é equivalente a uma substituição de variáveis.

Seja a aplicação suave

$$f:\ U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^m \ , \ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto (f^1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f^m(x_1,\ldots,x_n)),$$

chamemos.

3.9.3 $\quad y_i = f^i(x_1,\ldots,x_n) \ , \ i \in \underline{m}$

Se $\theta \in \Omega^k(U')$, $\theta = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots \leq i_k < m} \theta^{i_1 \ldots i_k}\ dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}$, usando teorema *3.9.2*

$$f^*\Theta = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} \Theta_{i_1\dots i_k}) \circ f \; f^*(dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy^{i_k}) \quad ,$$

como $f^*(dy^i)\,(v) = d\,f^i(v)$, então

$$f^*\Theta = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} (\Theta_{i_1\dots i_k}) \circ f \; df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}$$

Portanto aplicar f^* a Θ, equivale a substituir em Θ as variáveis y^i e suas diferenciais dy^i pelas funções de x^k e dx^k obtidas de *3.9.3*.

3.9.4 Proposição: Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$f(x^1,\dots,x^n) = (y^1,\dots,y^n)$$

$$\text{onde} \quad \begin{cases} y^1 = f^1(x^1,\dots,x^n) \\ \cdot \\ \cdot \\ y^n = f^n(x^1,\dots,x^n) \end{cases}$$

e $\Theta = dy^1\wedge,\dots,\wedge dy^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, então

$$f^*(\Theta) = det\,(Df)dx^1\wedge \dots \wedge dx^n .$$

C A P Í T U L O IV

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

C A P I T U L O   IV

§ 4.1 *Sistemas de partículas*

Definição: Um *sistema de partículas* é um par (P,m) onde P é um conjunto finito cujos elementos são chamados *partículas* e $m: P \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real positiva cujo valor em $p \in P$ é denotado por m_p e chamado *massa de p*.

O número $m(P) = \sum_{p \in P} m_p$ é a *massa total* do sistema

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, que por convenção chamaremos de *intervalo de tempo* e cujos elementos são chamados de *instantes*. Um *movimento* de (P,m) é uma aplicação $x: P \times I \longrightarrow \mathcal{E}$; $(p,t) \longrightarrow x_p(t)$, onde $\mathcal{E}$ é um espaço pontual euclidiano tridimensional $x_p(t)$ é o *lugar* ocupado por p no instante t durante o movimento x, podendo ser visualizado como a extremidade do vetor $x_p(t)$ traçado a partir de uma origem o, fixa para todo $(p,t) \in P \times I$.

A aplicação $t \longrightarrow x_p(t)$ é a *trajetória* ou *órbita* de p. No que se segue vamos supor que as trajetórias das partículas de P são pelo menos de classe C^2 em I.

A *energia cinética* K do sistema (P,m), no instante t é definida por

$$4.1.1 \quad K(t) = \frac{1}{2} \sum_{p \in P} m_p ||\dot{x}_p(t)||^2,$$

onde $\dot{x}_p(t)$ é o vetor velocidade da partícula no instante t e $||\dot{x}_p(t)||$ é a correspondente velocidade escalar. Sabe-se que $\dot{x}_p(t)$

é paralelo a tangente geométrica a trajetória de p no ponto $x_p(t)$

Se $I = [a,b]$ o *comprimento da trajetória* de p entre os instantes, a e t é dado por:

$$4.1.2 \quad s_p(t) = \int_a^t ||\dot{x}_p(\tau)||d\tau \text{ e portanto } \dot{s}_p(t) = ||\dot{x}_p(t)||$$

Escolhendo uma base ortonormal $\left\{ o, \left(e_i\right)_{i\varepsilon\underline{3}} \right\}$ de $\mathcal{E}$, onde $o \varepsilon \mathcal{E}$ e $\left(e_i\right)_{i\varepsilon\underline{3}}$ é base ortonormal de V, o espaço das translações de $\mathcal{E}$, estabelecemos neste espaço um sistema de coordenadas, onde as coordenadas de $x_p(t)$ são simplesmente as componentes deste vetor em relação a base dada

Portanto $x_p(t) = o + \sum_{i\varepsilon\underline{3}} x_p{}^i(t)e_i$, onde $x_p{}^i(t)$, $i\varepsilon\underline{3}$ são as coordenadas de $x_p(t)$ em relação a base $\left\{ o, \left(e_i\right)_{i\varepsilon\underline{3}} \right\}$

Se $\left(\{p\},m\right)$ é um sistema constituído de uma única partícula de massa m, então a energia cinética K é dada por

$$4.1.3 \quad K(t) = \frac{1}{2}m\ \dot{s}(t)^2 = \frac{1}{2}m\sum_{i\varepsilon\underline{3}} \left(\dot{x}_p{}^i(t)\right)^2.$$

Seja agora um sistema de n partículas (P,m). Usando-se um sistema de coordenadas apropriadas ao longo das trajetórias dessas partículas o lugar de cada partícula pode ser especificado por um número real $q^i \equiv q^i(t)$ e a n-upla $(q^1,\ldots,q^n)$ descreve em um espaço de configurações E o lugar ocupado por (P,m). O problema aqui é saber se podemos formular a energia cinética do sistema como o de uma única partícula de massa $m = m(P)$, movendo-se no espaço $\mathcal{E}$.

Temos para energia cinética do sistema (P,m);

$$4.1.4 \quad K(t) = \frac{1}{2}\sum_{i\varepsilon\underline{n}} m_i \left(\frac{dq^i}{dt}\right)^2,$$

onde m_i é a massa da i-ésima partícula p_i portanto basta definir:

$$4.1.5 \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i \in \underline{n}} \frac{m_i}{m} \left(\frac{dq^i}{dt}\right)^2,$$

para obter

$$4.1.6 \quad K(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Isto corresponde a introduzir no espaço das configurações E uma métrica de Riemann. Em geral uma métrica de Riemann é da forma:

$$4.1.7 \quad (ds)^2 = \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{n}} g_{ij}\, dq^i\, dq^j ,$$

onde $[g_{ij}]$ é uma matriz simétrica definida positiva cujos elementos $g_{ij} = g_{ij}(q^1,\ldots,q^n)$, $i,j \in \underline{n}$, são funções diferenciáveis.

Definição: Uma ***métrica de Riemann*** em $\mathbb{R}^n$, com coordenadas $(q^1,\ldots,q^n)$ é uma aplicação $G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow M_n^*(\mathbb{R})$; $(q^1,\ldots,q^n) \longmapsto [g_{ij} = g_{ij}\ (q^1,\ldots q^n)]$; $i,j \in \underline{n}$, onde $M_n^*(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes reais definidas positivas e para cada par (i,j) as funções g_{ij}. são suaves.

Definimos:

$$4.1.8 \quad (ds)^2 \equiv \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{n}} g_{ij}(q^1,\ldots,q^n) dq^i dq^j$$

de modo que o comprimento de arco em $\mathbb{R}^n$ é dado pela integral

$$s(t) = \int_0^t \left(\sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{n}} g_{ij}\ q^1(t),\ldots q^n(t)\ \frac{dq^i}{dt}\ \frac{dq^j}{dt} \right)^{1/2} dt.$$

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço das configurações; onde as coordenadas $q^1,\ldots,q^n$ correspondem aos lugares ocupados pelas n partículas. A energia cinética da i-ésima partícula também é dada por

$$4.1.9 \qquad K_i(t) = \frac{1}{2}\ m_i \left(\frac{dq^i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\, m_i\left(v^i\right)^2$$

§ 4.2 *Sistemas de forças*

Definição: Um ***sistema de forças*** para (P,m) no intervalo de de tempo I é uma aplicação $f; P\times P\times I \longrightarrow V;\ (p,q,t) \longmapsto f_{pq}(t)$, onde V é o espaço das translações de $\mathcal{E}$.

Se $p\neq q$ então $f_{pq}(t)$ é a força em p devida a q; se $p=q$ então $f_p(t) \equiv f_{pp}(t)$ é a força em p devida ao mundo exterior, isto é, a objetos não pertencentes ao sistema de partículas P.

Se x é um movimento e f um sistema de forças para (P,m), as leis fundamentais da dinâmica das partículas implicam que:

$$4.2.1 \qquad f_{pq} = -\,f_{qp} \qquad \text{se } p\neq q$$

$$4.2.2 \qquad \sum_{q\varepsilon P} f_{pq} = f_r(\{p\},t) = m_p\ \ddot{x}_p(t)\ ,$$

qualquer que seja $p\varepsilon P$, onde $f_r(\{p\},t)$ é a força resultante atuando sobre p no instante t.

$$4.2.3 \qquad (x_p - x_q)\times f_{pq} = 0 \quad ,\ \text{se } p\neq q.$$

Se $F_i \equiv f_r(\{p_i\},\ t)$ e $m_i = m_{p_i}$, então, pela lei de Newton temos em $\mathbb{R}^n$.

$$4.2.4 \quad m_i\ \frac{d^2q^i}{dt^2} = F_i, \qquad i\varepsilon \underline{n}$$

Se o sistema é conservativo, isto é, se existe uma função $V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, denominada energia potencial tal que:

$$4.2.5 \qquad F_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i} ,$$

as equações em *4.2.4* podem ser escritas na forma

$$4.2.6 \qquad m_i = \frac{d^2q^i}{dt^2} = \frac{-\partial V}{\partial q^i} \quad , \ i \varepsilon \underline{n}$$

O sistema *4.2.6*, de segunda ordem, é de difícil manuseio, podemos porém duplicar o número de variáveis, obtendo um sistema de primeira ordem da forma

$$4.2.7 \qquad \begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = v^i \\[2ex] m_i \dfrac{dv^i}{dt} = F_i \quad , \quad i \varepsilon \underline{n} \end{cases}$$

com $2n$ equações

A prática e a tradição sugerem uma outra mudança de coordenadas, se definirmos o *momentum* p_i por

$$p_i \equiv m_i v^i = \frac{dK}{dv^i} \quad , \quad i \varepsilon \underline{n}$$

Nessas novas coordenadas definimos o Hamiltoniano $H=K+V$ e obtemos

$$4.2.9 \qquad \begin{cases} K(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i \varepsilon \underline{n}} \dfrac{p_i(t)^2}{m_i} \\[2ex] v^i = \dfrac{dK}{dp_i} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \end{cases}$$

pois V independe dos p_i .

Assim de *4.2.9* temos

$$4.2.10 \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial V}{\partial q^i} = \frac{-\partial H}{\partial q^i}$$

ou

$$4.2.11 \qquad \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Sistemas mecânicos conservativos típicos podem ser descritos por equações nessa forma dita *forma Hamiltoniana*.

O sistema de equações se refere às coordenadas $q^1,\ldots,q^n$ $p_1,\ldots,p_n$ de um ponto no espaço das fases; no caso mais geral, as n primeiras coordenadas não descrevem um elemento de um espaço vetorial, porém um ponto em um conjunto munido de uma estrutura matemática mais complexa, enquanto que as n últimas coordenadas descrevem um vetor.

Nosso objetivo é descrever o problema matemáticamente como o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável; o que é apenas um método de exprimir as propriedades do espaço das fases usado em Mecânica de um modo sistemático, intrísico, presumívelmente, mais compreensivo.

§ 4.3 *Variedades Diferenciáveis*

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Uma carta local em M, ou um sistema de coordenadas locais em M é um par ordenado (U,q) onde $U \subset M$ é um aberto e $q\colon U \longrightarrow q(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. O número n é dito dimensão de (U,q) e U uma vizinhança coordenada. Para todo $p \in U$ temos $q(p) = (q^1(p),\ldots,q^n(p))$, os números $q^i(p)$ são as coordenadas de $p \in M$ no sistema (U,q) e as funções $q^i = \pi^i \circ q : U \longrightarrow \mathbb{R}$; $p \longrightarrow q^i(p)$ são as funções coordenadas, $i \in \underline{n}$. Como $q = (q^1,\ldots,q^n)$ então a carta (U,q) também é denotada $(U,q^1,\ldots,q^n)$.

Exemplo 1: Coordenadas esféricas

Seja $M = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, V_α o *semi-plano* definido por

$$V_\alpha = \{(r \cos v \cos \alpha,\ r \cos v \operatorname{sen} \alpha,\ r \operatorname{sen} v),\ r \geq 0\}$$

Seja $U_\alpha = (0,+\infty) \times (\alpha, \alpha+2\pi) \times (-\pi/2\ ,\ \pi/2)$ um aberto de $\mathbb{R}^3$, e $\beta : U_\alpha \to \mathbb{R}^3 - V_\alpha ; (r,u,v) \mapsto (r \cos v \cos u, r \cos v \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} v)$

β é uma bijeção de classe C^∞, portanto pelo teorema da função inversa, β é um difeomorfismo. Seja $q = \beta^{-1} : \mathbb{R}^3 - V_\alpha \to U_\alpha$. As coordenadas introduzidas em $\mathbb{R}^3 - V_\alpha$ são as coordenadas esféricas.

Exemplo 2: Coordenadas Cilíndricas

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, V_α o semi-plano definido por

$V_\alpha = \{(r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha,\ z)\ ,\ r \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$, $U_\alpha \subset \mathbb{R}^3$, o aberto definido por $U_\alpha = (0,+\infty) \times (\alpha, \alpha+2\pi) \times \mathbb{R}$ e a aplicação

$$\beta : U_\alpha \to \mathbb{R}^3 - V_\alpha\ ;\ (r,v,z) \mapsto (r \cos v, r \operatorname{sen} v,\ z).$$

β é uma bijeção de classe C^∞, portanto pelo teorema da função inversa, β é um difeomorfismo. Seja $q = \beta^{-1}$, então o par $(\mathbb{R}^3 - V_\alpha, q)$ é uma carta coordenada em $\mathbb{R}^3$ e as coordenadas introduzidas em $\mathbb{R}^3 - V_\alpha$ são as coordenadas cilindricas.

Exemplo 3:

Sejam $M = \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x : U \to \mathbb{R}^n$, a inclusão. O par (U,x) é uma carta local e as coordenadas introduzidas em U por

x são as coordenadas cartesianas.

Chamaremos de *atlas de dimensão* n sobre um espaço topológico M, a qualquer família Γ de cartas locais tais que as vizinhanças coordenadas formam uma cobertura de M. Ao par ordenado (M,Γ) denominamos *variedade topológica de dimensão* n.

Sejam (M,Γ) uma variedade topológica de dimensão n e (U,q), (V,r) cartas de U, tais que $U \cap V \neq \phi$. A aplicação

$$\Phi_{qr} = r o q^{-1} : q(U \cap V) \to r(U \cap V) \quad ;$$

$$(q^1(p),\ldots,q^n(p)) \mapsto (r^1(p),\ldots,r^n(p))$$

é um homeomorfismo chamado *mudança de coordenadas*.

Um atlas Γ de dimensão n sobre M é diferenciável de classe C^k, se e somente todas as mudanças de coordenadas Φ_{qr}, onde (U,q), (V,r) ε Γ e $V \cap U \neq \phi$, são difeomorfismos de classe C^k. Uma carta (W,s), de dimensão n sobre M, é admissível em relação ao atlas Γ se e somente se Φ_{qs} é um difeomorfismo de classe C^k, qualquer que seja a carta (U,q) ε Γ tal que $U \cap W \neq \phi$.

Um atlas Γ, de dimensão n e classe C^k sobre M é dito um *atlas máximo* se e apenas quando Γ contém todas as cartas locais admissíveis. Dado um atlas Γ é possível ampliá-lo de modo único para se obter um atlas máximo, bastando acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição: Uma *variedade diferenciável* de dimensão n e classe C^k *é* um par ordenado (M,Γ), onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e Γ é um atlas máximo de dimensão n e classe C^k sobre M .

Exemplo 1: Seja $\Gamma = \{\mathbb{R}^n, id)\}$ obviamente Γ é um atlas máximo de dimensão n e classe C^∞, portanto o par $(\mathbb{R}^n, \Gamma)$ é uma variedade diferenciável de dimensão n.

§ 4.4 *Aplicações diferenciáveis entre variedades*

Sejam (M, Γ) e (N, Δ), variedades diferenciáveis e classe C^k, $k \geq 1$, de dimensão m e n respectivamente e $f\colon M \longrightarrow N$. f é dita uma aplicação diferenciável em $p \in M$ se e somente se existem cartas locais $(U,x) \in \Gamma$ e $(V,y) \in \Delta$ tais que $f(U) \subset V$ e a aplicação $y \circ f \circ x^{-1}\colon x(U) \longrightarrow y(V)$ é diferenciável em $x(p)$.

A aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ é denominada *expressão de f nas coordenadas locais x e y*. Na realidade, $f_{x'y'}$ é diferenciável em $x'(p)$, qualquer que sejam (U',x') e (V',y') cartas locais em M,N respectivamente. f será de classe C^r, $r \leq k$ se e só se a aplicação $f_{xy}\colon x(U) \to y(V)$ for de classe C^k.

Entre os exemplos mais importantes de aplicações diferenciáveis entre duas variedades diferenciais, citamos os caminhos diferenciáveis em M e as funções reais ou sejam:

Exemplo 1: Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, $\alpha\colon I \longrightarrow M$ é um caminho diferenciável se para toda carta $(U,q) \in \Gamma$, para todo sub-intervalo $J \subset I$, tal que $\alpha(J) \subset U$ a composta $q \circ \alpha\colon J \longrightarrow q(U)$ é um caminho diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2: $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se e somente se para toda carta $(U,q) \in \Gamma$ $f \circ x^{-1}\colon x(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

A definição de aplicações diferenciáveis entre variedades é a generalização natural de diferenciabilidade em espaços euclidianos, pois na realidade uma variedade diferenciável se comporta localmente como se fosse um aberto de $\mathbb{R}^n$, para algun $n \geq 1$.

Para caracterizarmos a derivada $f'(p)$ precisamos construir os espaços tangentes. É o que faremos no próximo parágrafo.

§4.5. *Espaços tangentes e cotangentes a variedade. Aplicações lineares tangentes*

Sejam M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^k e $a \in M$, um ponto. Seja $F(U)$ o espaço vetorial de todas as funções $f\colon U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis, onde U é aberto em M e $a \in U$.

Consideremos ainda o conjunto C_a de todas as curvas diferenciáveis $\alpha\colon [-1,1] \longrightarrow U$, tais que $\alpha(0) = a$, isto é α é *um caminho passando por a*. Consideremos ainda o número

$$4.5.1 \quad \langle \alpha, f \rangle = \frac{d}{dt} f \circ \alpha \Big|_{t=0},$$

que obviamente está bem definido.

Definição: Se ϕ e $\alpha \in C_a$, diremos que estes dois caminhos são tangentes em a e denotamos por $\phi \sim_a \alpha$ se e somente se vale $\langle \alpha, f \rangle = \langle \phi, f \rangle$, qualquer que seja $f \in F(U)$.

É fácil verificar que *4.5.1* introduz uma relação de equivalência em $F(U)$. Uma classe de equivalência de caminhos passando por a será denotada α_a e chamada *vetor tangente em a*.

Definição: Se $f \in F(U)$ e α_a é um vetor tangente em $a \in M$, então o número

$$\alpha_a[f] = \langle \alpha, f \rangle = \frac{d}{dt} f \circ \alpha \Big|_{t=0}, \quad \alpha \in \alpha_a.$$

é chamada *derivada direcional* de f na direção α_a.

Obviamente a aplicação $\alpha_a[\ \ ]: F(U) \longrightarrow \mathbb{R};\ f \to \alpha_a[f]$ é linear.

4.5.2 Proposição: Seja (U,q) uma carta em a, $\psi,\Phi \in C_a$, $\psi \sim_a \phi$ se e somente se $(q o \alpha)'(0) = (q o \Phi)'(0)$.

Demonstração:

Se $\Phi \sim_a \alpha$ então $\forall\ f \in F(U)$, $\langle \Phi, f\rangle = \langle \alpha, f\rangle$.

$$\langle \Phi, f\rangle = \frac{d}{dt}\ f o \Phi\,\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\ (f o q^{-1}) o (q o \Phi)\,\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\ (f o q^{-1}) o (q o \psi)\,\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\ f o \psi\,\Big|_{t=0} = \langle \psi, f\rangle.$$

Se $\Phi = q\ o\ \phi$ e $\Psi = q\ o\ \psi$ e $F = f o q^{-1}$ então Ψ e Φ são caminhos diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e $F \in F(q(U))$, ou seja, F é diferenciável em $q(U)$ portanto:

de

$$\Phi_{q(a)}[\ F\ ] = DF\ (\Phi(0))\ (\Phi'(0)) = DF\ (q(a))(\Phi'(0))$$

e de

$$\Psi_{q(a)}[\ F\ ] = DF\ (\Psi(0))\ (\Psi'(0)) = DF\ (q(a))(\Psi'(0))\ ,$$

concluimos que $\psi \sim_a \phi$ se e somente se $\Psi'(0) = \Phi'(0)$.

4.5.3 Proposição: Dada uma carta (V,q), a todo vetor tangente α_a em a corresponde um único vetor $v_q \in \mathbb{R}^n$ e reciprocamente.

Prova: Basta definir $v_q = (q \circ \alpha)\ (0)$, $\alpha \in \alpha_a$.

Recíprocamente se, $v \in \mathbb{R}^n$, defina o caminho diferenciável $\alpha \in C_a$ por

$$\alpha : [-1, 1] \longrightarrow M; \alpha(t) = q^{-1}(q(a) + tv).$$

4.5.4 Proposição: O conjunto dos vetores tangentes em $a \in M^n$, uma variedade diferenciável de dimensão n pode ser identificada a $\mathbb{R}^n$, a menos de um automorfismo de $\mathbb{R}^n$.

Observemos que, de acordo com a proposição *4.5.3*, fixada uma carta em $a \in M$, existe uma bijeção entre $\mathbb{R}^n$ e o conjunto $T_a(M)$, dos vetores tangentes a M^n em a, mostraremos então que tal identificação independe da carta usada.

Prova: Seja (V, r) uma segunda carta em M então

$$v_q = (q \circ \phi)'(0) = [(q \circ r^{-1}) \circ (r \circ \phi)]'(0) \quad ;$$

usando a regra da cadeia

$$4.5.5 \quad v_q = \Phi'_{rq}(r(a))\ (v_r)$$

onde $\Phi_{rq} = q \circ r^{-1}$ é a mudança de coordenadas $\Phi_{rq}: q(U \cap V) \to r(U \cap V)$. Como Φ_{rq} é bijetora então $\Phi'_{rq}(q(a))$ é um automorfismo de $\mathbb{R}^n$ e *4.5.5* mostra que a identificação é a menos de um automorfismo.

Podemos introduzir em $T_a(M)$ uma estrutura de espaço vetorial se definirmos as operações por

$$4.5.6 \quad l\, \alpha_a + k\, \lambda_a = \xi_a \quad , \quad \alpha_a, \lambda_a \in T_a(M)$$

onde ξ_a é determinado por

$$w_q = v_q + u_q \quad ,$$

v_q, $u_q \in \mathbb{R}^n$ e correspondem a α_a e λ_a em relação a uma carta (U,q) em $a \in M^n$, l e $k \in \mathbb{R}$. Em virtude da proposição *4.5.4* as operações definidas em *4.5.6* independem da escolha da carta.

Observemos que fixada uma carta (U,q) em $a \in M^n$, em virtude da definição *4.5.6* e da proposição *4.5.3* a aplicação

$$T_a(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n \; ; \; \alpha_a \longmapsto v_q$$

é um isomorfismo linear.

4.5.7 Proposição: Sejam M^n, N^m variedades diferenciáveis e $F: M^n \to N^m$ diferenciável e $\phi \in C_a$, $a \in M^n$. Então $F o \phi$ é uma curva passando por $F(a) \in N^n$ e $\phi \sim_a \alpha$ implica

$$F \circ \phi \sim_{F(a)} F \circ \alpha$$

Prova: Seja (V,r) uma carta em $F(a) \in N^m$. Mostremos que $(roFo\phi)'(0) = (roFo\alpha)'(0)$. Se (U,q) é uma carta em $a \in M$, tal que $F(U) \subset V$ temos

$$roFo\phi = (roFoq^{-1})o(qo\phi) = F_{qr}o(qo\phi)$$

e

$$roFo\alpha = F_{qr}o(qo\alpha)$$

Portanto:

$$(roFo\phi)'(0) = F'_{qr}(q(a))((qo\phi)'(0)) = F_{qr}(q(a))((qo\alpha)'(0)) =$$

$$= (roFo\alpha)'(0).$$

Toda aplicação diferenciável $F\colon M^n \longrightarrow N^m$ induz uma aplicação $F_{*a}\colon T_a(M) \longrightarrow T_{F(a)}(N)$ definida por

$$F_{*a}(\alpha_a) = \beta_{F(a)},$$

onde $\beta_{F(a)}$ é tal que se

$$\alpha \in \alpha_a \quad \text{então} \; , \; F\circ\alpha \in \beta_{f(a)}$$

4.5.8 Proposição: Sejam $T_a(M)$ e $T_{F(a)}(N)$, identificados a $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente por meio de cartas (U,q) e (V,r) tais que $F(U)\subset V$. Então F_{*a} se identifica com a aplicação linear $F'_{qr}(q(a))$. Em particular F_{*a} é uma aplicação contínua de $T_a(M)$ em $T_{F(a)}(N)$.

Prova: O diagrama abaixo mostra a representação de F_{*a} em termos das cartas (U,q) e (V,q).

$$\begin{tikzcd}
T_a(M) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "F_{*a}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F'_{qr}"] \\
T_{F(a)}(N) \arrow[r, "r_*"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$$q_*(\alpha_a) = v_q \quad \text{e} \quad r_*(\beta_{F(a)}) = v_r$$

A identificação segue de que

$$v_q = (qo\phi)'(0)\text{ , onde } \phi \in C_a \text{ e}$$

$$v_r = (roFo\phi)'(0) = (F_{qr}o(qo\phi))'(0)\text{ ,}$$

donde,

$$v_r = F_{qr}'(q(a))(v_q)$$

e como

$$\beta_{F(a)} = F_{*a}(\alpha_a)$$

então

$$v_r = r_{*F(a)}(\quad_{F(a)}) = r_{*F(a)}(F_{*a}(\quad_a)).$$

A linearidade e continuidade de F_{*a} decorrem da linearidade e continuidade de $F_{rq}'(q(a))$.

Definição: A aplicação

$$F_{*a}\ T_a(M) \to T_{F(a)}(N)$$

é chamada *aplicação linear tangente em a*, ou *diferencial de F em a*, ou *aplicação jacobiana de F* em a.

Observemos que segue da definição que se as aplicações

$$F\text{: } M^n \to N^n \text{ e } G\text{: } N^n \to P^p\text{ , }\quad\text{, N ,}$$

variedades diferenciáveis, são diferenciáveis então

$$(GoF)_{*a} = G_{*F(a)}oF_{*a}\ .$$

Definição: Seja M^n uma variedade diferenciável, o conjunto dos pares ordenados (a,λ) onde $a \in M$ e $\lambda \in T_a(M)$ é chamado *fibrado tangente* a M e denotado por $T(M)$.

Se M é uma variedade diferenciável de classe C^k, $k \geq 2$, então T(M) é uma variedade de classe C^{k-1}. Para provar tal fato, consideremos sobre M um atlas máximo.

$$¶: T(M) \to M \; ; \; (a,\lambda) \to a.$$

Tomemos sobre T(M) a menor topologia que torna ¶ contínua. Se $(U,q) \in \Delta$, seja o par ordenado $(¶^{-1}(U), \zeta_q)$, onde ζ_q, é a bijeção $\zeta_q : ¶^{-1}(U) \to q(U) \times \mathbb{R}^n; \; (a, \alpha_a) \to (q(a), v_q)$, v_q definido por $v_q = (q o \alpha)'(0)$, $\alpha \in \alpha_a$.

Observemos que se (W,r) é outra carta de Δ tal que $V \cap W \neq \phi$, então $¶^{-1}(U) \cap ¶^{-1}(W) = ¶^{-1}(U \cap W)$, portanto

$$\zeta_r o \zeta_q^{-1} : q(W \cap U) \times \mathbb{R}^n \to r(W \cap U) \times \mathbb{R}^n \; ;$$

$$(q(x), v_q) \to (r(x), [(roq^{-1})'(q(x))](v_q) = (r(x), v_r),$$

onde

$$v_q = (q o \alpha)'(0), \; \alpha \in \alpha_a ,$$

$$v_r = [(roq^{-1})'(q(x))](v_q).$$

A derivada $(roq^{-1})' \in C^{k-1}$ e é um automorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $q(x)$, portanto a família Θ dos pares ordenados $(¶^{-1}(U), \zeta_q)$, onde $(U,q) \in \Delta$, é um atlas sobre T(M). Seja $\boldsymbol{\Theta}$ o atlas maximo obtido a partir de Θ acrescentando-lhe todas as cartas admissíveis. Então $(T(M), \boldsymbol{\Theta})$ é uma variedade diferenciável de classe C^{k-1} e dimensão $2n$, e, em particular se M for de classe C^∞ então T(M) também é de classe C^∞.

Observemos que se $f \in F(U)$, f pode ser interpretada como uma aplicação da variedade M na variedade IR, portanto f_{*a} é a função linear

$$f_{*a}\colon T_a(M) \longrightarrow T_{f(a)}(IR) \; ; \; \alpha_a \longrightarrow \alpha_a [f].$$

e $T_{f(a)}(IR) \approx IR$. Evidentemente se (U,q) é uma carta em a, $\varepsilon\ \alpha_a$ e r: $\longrightarrow$ é a identidade temos:

$$\alpha_a [f] = \frac{d}{dt} f\circ\phi\Big|_{t=0} = ((f\circ q^{-1})'(q(a)))((q\circ\phi)'(0)) =$$

$$= ((f\, q^{-1})'(q(a)))(v_q) = (r^{-1} \circ r \circ f\circ q^{-1})'(q(a))\ v_q =$$

$$= (r^{-1})'(r(f(a)))\ (r \circ f\circ q^{-1})'(q(a))\ (v_q) =$$

$$= f'_{qr}\ (q(a))\ (v_q) = v_r\ ,$$

usando a proposição *4.5.8*

$$v_r \longleftrightarrow f_{*a}(\alpha_a).$$

Portanto a diferencial de f em a pode ser definida como o funcional linear $d_a f\colon T_a(M) \longrightarrow \; ; \; \beta_a \longrightarrow \beta_a[f] = f_{*a}(\beta_a)$.

Segue trivialmente que

$$(l\ \beta_a + k\ \psi_a)\ [f] = l\ \beta_a\ [f] + k\ \psi_a\ [f]\ , \quad l,\ k \in IR \text{ e } \beta_a, \psi_a \in T_a(M).$$

Definição: Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n, o dual de $T_a(M)$, em cada $a \in M$, denotado por $T^a(M)$ é chamado de espaço cotangente em a. Como, qualquer que seja $f \in F(M)$, $d_a f \in T^a(M)$,

$T^a(M)$ também é chamado espaço das diferenciais em a.

Obviamente $dim\ T^a(M) = dim\ T_a(M)$ portanto $T_a(M)$ e $T^a(M)$ são isomorfos.

O conjunto $T^*(M)$ dos pares ordenados (a,λ), onde $a \in M$ e $\lambda \in T^a(M)$ é chamado *fibrado cotangente* e se M^n é uma variedade diferenciável de classe C^k, $T^*(M)$ é de classe C^{k-1}, $k > 2$ e dimensão $2n$.

§4.6 *Campos vetoriais de coordenadas.*

Sejam M uma variedade diferenciável C^∞ e $(U,q) = (U,q^1,\ldots,q^n)$ um sistema de coordenadas em $a \in M$, onde $q^i = \P^i o q; \P^i : IR^n \longrightarrow IR$, a i-ésima projeção, em IR^n.

Se $f \in F(U)$, então a função $F = foq^{-1}: q(U) \longrightarrow IR$ é a expressão coordenada de f e relação a carta (U,q).

A função F é de classe C^1 em $q(U)$ e portanto possui derivadas parciais em relação às coordenadas cartesianas x^i.

Definiremos as derivadas parciais de $f \in F(U)$ em relação as coordenadas q^i, denotada por $\partial_i f$ ou $\frac{\partial f}{\partial q^i} f$ pela relação

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \stackrel{def}{\equiv} \frac{\partial F}{\partial x^i} oq = \frac{\partial\ foq^{-1}}{\partial x^i} oq, \quad i \in \underline{n}$$

Além disso definiremos os *campos vetoriais de coordenadas da carta* (U,q), como as aplicações

$$\partial_i : M \longrightarrow T(M) \quad ; \quad x \longmapsto (a, \partial_i(x))$$

tais que

$$\partial_i(x)\ [f] = \partial_i f(x)$$

Observemos que $\partial_i(a)$ também é denotado por $\left.\frac{\partial}{\partial q^i}\right|_a$ ou $\frac{\partial}{\partial q^i}(a)$, quando se deseja explicitar a carta utilizada.

Tudo o que fizemos foi generalizar os conceitos de espaços tangentes e cotangentes introduzidos no Capítulo I, porém não explicitamos uma base para $T_a(M)$. É o que faremos a seguir.

Fixada uma carta local (U,q) em $a \in M$ para cada $i \in \underline{n}$, seja $\gamma_i \in C_a$, a iésima curva coordenada definida por

$$\gamma_i : [-1,1] \longrightarrow M \quad ;$$

$$t \longmapsto q^{-1}(q^1(a),\dots,\ q^i(a) + t,\dots,\ q^n(a)\ )$$

Se $f \in F(U)$

$$\langle \gamma_i, f \rangle = \partial_i(a)[f] \quad ,$$

$$\langle \gamma_i, f \rangle = \left.\frac{d f o \gamma_i}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$\left.\frac{d}{dt} f o q^{-1}(q^1(a),\dots,q^i(a)+t,\dots,q^n(a)\ )\right|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial f o q^{-1}}{\partial x^i}(q(a)) = \frac{\partial f}{\partial q^i}(a) = \partial_i(a)[f]$$

Seja $q^i = \pi^i o q$, onde π^i é a iésima projeção em $\mathbb{R}^n$, então:

$$\partial_j q^i(a) = \partial_i(a)[q^i] = \langle \gamma_j, q^i \rangle =$$

$$\left.\frac{d}{dt} q^i o \gamma_j\right|_{t=0} = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

É facil verificar que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_a\right\}=\left\{\partial_i(a)\right\}$, $i \in \underline{n}$ é base de $T^a(M)$, onde (U,q) é uma carta em $a \in M$. Pois se

$$\sum_{i\in\underline{n}} \gamma^i \partial_i(a) = 0 \quad ,$$

então

$$0 = (\sum_{i\in\underline{n}} \lambda^i \partial_i(a))[q^j] = \sum_{i\in\underline{n}} \lambda^i \partial_i(a)[q^j] = \lambda^j, \; j\in\underline{n}$$

E, além disso, as formas lineares

$$d_a q^i \; : \; T_a(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \; i\in\underline{n}$$

constituem uma base de $T^a(M)$, dual de $(\partial_i(a))i \in \underline{n}$.

4.6.1. Proposição: Se $\mu\alpha_a \in T_a(M)$ e $f \in F(U)$, então

$$\mu\alpha_a = \sum_{i\in\underline{n}} \mu\alpha_a[q^i]\partial_i(a)$$

e

$$d_a f = \sum_{i\in\underline{n}} \frac{\partial f(a)}{\partial q^i} d_a q^i \quad ,$$

onde (U,q) é uma carta em $a \in M$.

Demonstração: Se $\mu\alpha_a \in T_a(M)$, então existem $\lambda^i(a) \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mu\alpha_a = \sum_{i\in\underline{n}} \lambda^i(a)\partial_i(a) \quad ,$$

portanto

$$\mu\alpha_a[q^j] = \sum_{i\in\underline{n}} \lambda^i(a)\partial_i(a)[q^j] = \lambda^j(a), \; j\in\underline{n}$$

Se $d_a f = \sum_{i\in\underline{n}} \lambda_i(a) dq^i \; , \; \lambda_i(a) \in \mathbb{R}$, então:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial q^j} = \partial_i(a)[f] = d_a f(\partial_j(a)) = \sum_{i\in \underline{n}} \lambda_i(a) d_a q^i(\partial_j(a)\ )=$$

$$= \sum_{i\in \underline{n}} \lambda_i(a)\partial_i(a)[q^j] = \lambda_j(a)\ , \quad j\in \underline{n}$$

Corolarios

(i) Se (U,q) e (V,r) são duas cartas em $a \in M$ então

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(a) = \sum_{j\in \underline{n}} \frac{\partial r^j(a)}{\partial q^j}\ \frac{\partial}{\partial r_j}(a)$$

(ii) Se $\mu_a \in T_a(M)$ e

$$\mu_a = \sum_{i\in \underline{n}} \mu^i\ \frac{\partial}{\partial q^i}(a) = \sum_{j\in \underline{n}} \beta^i\ \frac{\partial}{\partial r^j}(a)$$

então

$$\mu^i = \beta^j\ \frac{\partial q^i(a)}{\partial r^j}$$

§ 4.7. O k-ésimo fibrado exterior sobre uma variedade

O *k-ésimo fibrado exterior* sobre uma variedade M, de classe C^∞, denotado por $\Lambda^k(M)$ é definido como aquele cujas fibras são as k-ésimas potencias exteriores dos espaços cotangentes $T^a(M)$ em M.

Fixada uma carta (U,q) em $a \in M$, obviamente $(d_a q^{i_1} \wedge \ldots \wedge d_a q^{ik})_{1\leq i_1 \ldots i_k \leq n}$ com $\binom{n}{p}$ elementos é base de $\Lambda^k(M)$.

Se $\Theta \in \Lambda^k(T^a(M))$ e

$$\Theta = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \Theta^q_{i_1\ldots i_k}(a)\ d_a q^{i_1}\wedge\ldots\wedge d_a q^{i_k}$$

onde as aplicações

$$\theta^q_{i_1\ldots i_k} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R} \, ; \; x \longmapsto \theta^q_{i_1\ldots i_k}(x) \; ;$$

$$\theta^q_{i_1\ldots i_k}(x) = \theta\left(\frac{\partial}{\partial q^{i_1}}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial q^{i_k}}(x)\right)$$

são de classe C^∞ em U então θ é dita um *k-forma diferencial em* $\Lambda^k(T^a(M))$, $a \in U$.

Observemos que em cada ponto $a \in U$, $\Lambda^k(T^a(M))$ pode ser identificado a $\mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$, a menos de um isomorfismo de $\mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$, visto que se (V,r) é outra carta em a,

$$\theta = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \theta^r_{i_1\ldots i_k}(a) \, d_a r^{i_1} \wedge \ldots \wedge d_a r^{i_k}$$

e se definirmos

$$v_q = (\theta^q_{1\ldots k}, \ldots, \theta^q_{(n-k)\ldots n})$$

$$v_r = (\theta^r_{1\ldots k}, \ldots, {}^{q}_{(n-k)\ldots n})$$

cujas coordenadas estão relacionadas pelas $\binom{n}{p}$ equações:

$$4.7.1. \quad \theta^q_{i_1\ldots i_k}(a) = \sum_{1 \le j_1 \ldots j_k \le n} \theta^r_{j_1\ldots j_k}(a) \det \begin{bmatrix} \frac{\partial r^{j_1}(a)}{\partial q^{i_1}} & \cdots & \frac{\partial r^{j_k}(a)}{\partial q^{i_1}} \\ \frac{\partial r^{j_1}(a)}{\partial q^{i_k}} & \cdots & \frac{\partial r^{j_k}(a)}{\partial q^{i_k}} \end{bmatrix}$$

a identificação ocorre a menos do isomorfismo $v_r \leftrightarrow v_q$ definido por *4.7.1* .

Se Δ é um atlas maximo em M , observemos que Δ induz um atlas máximo em $\Lambda^k(M)$tornando-o uma variedade diferenciável de di mensão $n+\binom{n}{p}$ e classe C^{∞}.

§4.8. Campos de k-formas diferenciais

Um *campo de k-formas diferenciais sobre* M é uma aplicação

$$W : M \longrightarrow \Lambda^k M$$

de classe C^{∞} tal que

$$\pi \circ \omega = 1_M \quad ,$$

onde π é a projeção em $\Lambda^k(M)$.

Se denotarmos por $\Omega^k(M)$ o conjunto de todos os campos de k-formas diferenciais então $\Omega^k(M)$ é um espaço vetorial real.

Além disso, se (U,q) é uma carta em M e $\Omega^k(U)$ é o conjunto de todos os campos de k-formas diferenciais $W: U \to \Lambda^k(U)$, então $\Omega^k(U)$ é um módulo sobre $F(U)$ e os campos de k-formas

$$dq^{i_1}\wedge\ldots\wedge dq^{i_k}: a \longmapsto d_a q^{i_1}\wedge\ldots\wedge d_a q^{i_k} \in \Lambda^k(T^a(M))$$

geram $\Omega^k(U)$ e são linearmente independentes.

A derivação exterior de um campo $\omega \in \Omega^k(U)$ é definida da mesma forma que fizemos no *§3.9* e seguem todos os resultados lá enunciados.

Sejam M^n, N^m variedades diferenciáveis de dimensão finita e classe C^{∞} e $\phi: M \to N$ uma aplicação C^{∞}. Para cada $a \in M$, ϕ induz uma aplicação $\phi_a \in L(\Lambda^k T^{\phi(a)}(N), \Lambda^k T^a(M))$ definida por:

$$\phi_a^*(\omega)(v_1,\ldots,v_k) = \omega(\phi_{*a}(v_1),\ldots,\phi_{*a}(v_k)) \; ,$$

onde ϕ_{*a} é a aplicação tangente de ϕ em a e $v_1,\ldots,v_k \in T_a(M)$.

Definição: ϕ_a^* é chamada *"pull-back" de* ϕ *em* a.

Podemos generalizar o *"pull-back"* de ϕ para o caso de um campo de k-formas diferenciais.

Sejam $(U, q^1, \ldots, q^n)$ e $(V, r^1, \ldots, r^m)$ cartas em M e N respectivamente tais que $\phi(U) \subset V$ e $\omega \in \Omega^k(V)$.

O *"pull-back" generalizado de* ϕ será definida como a aplicação

$$\phi^*: \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U) \; ; \; \widetilde{\omega} \longmapsto \phi^*\widetilde{\omega}$$

tal que se

$$\widetilde{\omega}(\phi(a)) = (\phi(a), \omega) \in \Lambda^k(T^a(M))$$

então $\phi^*\widetilde{\omega}$ atua em cada ponto de U da seguinte forma:

$$a \in U \longmapsto (a, \phi_a^*(\omega))$$

Se $k=1$, uma aplicação do *"pull-back"* generalizado é quando $\widetilde{\omega}$ representa o campo de formas diferenciais do trabalho em coordenadas cartesianas e $\phi^*\widetilde{\omega}$ o mesmo campo expresso em termos das coordenadas de um sistema de coordenadas generalizadas, dado pela mudança de coordenadas ϕ.

Observemos ainda que se $\omega = df$, onde $f: V \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ então

$$\phi^*(df) = d(fo\phi) = \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial fo\phi}{\partial q^j}\, dq^i$$

Em particular

$$\phi(dr^k) = \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial r^k o\phi}{\partial q^j}\, dq^j$$

§ 4.9. *Métrica de Riemann*

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^{∞} e dimensão n. Uma *métrica Riemanniana em* M é uma correspondencia que associa a cada $a \in$ M um produto interno no espaço $T_a(M)$. Se m é uma métrica Riemanniana em M denotamos por $m_a(\alpha,\beta)$ o produto interno dos vetores $\alpha,\beta \in T_a(M)$. Obviamente a norma do vetor $\alpha \in T_a(M)$ é definida por

$$||\alpha||_a = \sqrt{(m_a(\alpha,\alpha)\ )}$$

Ao par (M,m), onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^{∞}, e m uma métrica Riemanniana chamamos de ***variedade Riemanniana.***

Observemos que uma variedade Riemanniana em que os produtos internos nos diversos espaços tangentes não estão relacionados entre si não tem o menor interesse para aplicações. É desejável que o produto interno varie ao menos continuamente, num sentido que vamos precidar a seguir.

Se m é uma métrica Riemanniana em M, $x \in M$, $\alpha,\beta \in T_x(M)$, podemos denotar o produto de α e β por (α,β) em lugar de $m_x(\alpha,\beta)$ para simplificar a notação.

Seja $(U,q) = (U,q^1\ldots q^n)$ uma carta em M. Definamos n^2 funções g_{ij}, $i,j \in \underline{n}$, em U da seguinte forma:

4.9.1. $g_{ij}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ x \longmapsto g_{ij}(x)=(\frac{\partial}{\partial q^i}(x),\ \frac{\partial}{\partial q^j}(x))$

É óbvio que $g_{ij} = g_{ji}$, $i,j \in \underline{n}$.

Se $\alpha, \beta \in T_x(M)$, α e β são escritos como:

$$\alpha = \sum_{i \in \underline{n}} \alpha^i \frac{\partial}{\partial q^i}(x) \qquad \text{e} \qquad \beta = \sum_{j \in \underline{n}} \beta^j \frac{\partial}{\partial q^j}(x)$$

portanto:

$$4.9.2. \quad (\alpha, \beta) = \sum_{i,j \in \underline{n}} g_{ij}(x) \alpha^i \beta^i .$$

Lembremos que $(d_x q^i)_{i \in \underline{n}}$ é base de $(T_x(M))^* = T^x(M)$ dual de $(\frac{\partial}{\partial q^i}(x))_{i \in \underline{n}}$, logo podemos escrever

$$\alpha^i = \langle \alpha, d_x q^i \rangle \qquad \text{e} \qquad \beta^j = \langle \beta, d_x q^j \rangle , \quad i,j \in \underline{n}$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ é a forma bilinear que define a dualidade entre $T^x(M)$ e $T_x(M)$, portanto *4.9.2* será reescrita na forma:

$$4.9.3. \quad m_a(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) = \sum_{i,j \in \underline{n}} g_{ij}(x) \langle \alpha, d_x q^i \rangle \langle \beta, d_x q^j \rangle$$

Frequentemente a equação *4.9.3.* é escrita na forma simplificada

$$m|_U = \sum_{i,j \in \underline{n}} g_{ij} \, dq^i dq^j$$

Sejam (V, r) outra carta em M tal que $V \cap U \neq \phi$, e as funções reais $h_{k\ell}$, $k, \ell \in \underline{n}$ definidas em V por

$$4.9.4. \quad h_{k\ell}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial r^k}(x) \ , \ \frac{\partial}{\partial r^\ell}(x)\right) ,$$

isto é,

$$m|_V = \sum_{k,\ell \in \underline{n}} h_{k\ell} \, dr^k dr^\ell$$

Se $x \in U \cap V$ temos

$$\frac{\partial}{\partial q^i}(x) = \sum_{k \in \underline{n}} \frac{\partial r^k(x)}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial r^k}(x)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial q^j}(x) = \sum_{\ell \in \underline{n}} \frac{\partial r^\ell(x)}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial r^\ell}(x) \quad ,$$

portanto:

$$g_{ij}(x) = \sum_{k,\ell \in \underline{n}} h_{k\ell}(x) \frac{\partial r^\ell(x)}{\partial q^j} \frac{\partial r^k(x)}{\partial q^i} \quad ,$$

isto é,

$$4.9.6. \quad g_{ij}\Big|_{U \cap V} = \sum_{k,\ell \in \underline{n}} h_{k\ell} \frac{\partial r^k}{\partial q^i} \frac{\partial r^\ell}{\partial q^j} \quad i,j \in \underline{n}$$

Observemos em 4.9.6. que as g_{i}, são de classe C^k em $U \cap V$, se e somente se as $h_{\ell k}$ são de classe C^k em $U \cap V$.

Uma métrica Riemanniana é de classe C^k se e somente se as funções g_{ij} são de classe C^k em U.

Reciprocamente, se são dadas n^2 funções $g_{ij} = g_{ji}$, de classe C^k, definidas em cada carta (U,q) de M tais que

(i) $\sum_{i,j \in \underline{n}} g_{ij}(x)\, \alpha^i \alpha^j > 0$, onde α^i são as coordenadas de $\alpha \in$ $T_x(M)$, em relação a base $(\frac{\partial}{\partial q^i}(x))$, para todo $x \in U$, a menos que $\alpha = 0$.

(ii) valem as leis de transição definidas por 4.9.6., então as funções g_{ij} definem uma métrica Riemanniana de classe C^k em M.

Exemplos:

1) Localmente a energia cinética em $T(M)$ é uma métrica Riemanniana.

2) A métrica enclidiana em $\mathbb{R}^n$.

C A P Í T U L O V

§ *5.1* O problema básico da mecânica é descrever a variação com o tempo da configuração de um sistema físico sob o efeito de forças. Para isto assumiremos primeiro que o conjunto de todas as configurações possíveis de um sistema físico é uma variedade diferenciável M, isto é, localmente pode ser descrito por parâmetros diferenciáveis. Em segundo lugar vamos admitir que cada uma das curvas que caracterizam seu movimento pode ser determinada a partir do estado do sistema em qualquer instante. O conjunto dos estados de um sistema físico será representado por outra variedade diferenciável que indentificaremos ao fibrado cotangente sobre M.

§ 5.2 *Classificação dos vínculos*

Em geral, o número de coordenadas necessárias para especificar a configuração de um sistema é igual ao número de graus de liberdade do sistema, porém, às vezes, é conveniente usar um número maior de coordenadas e restringir os graus de liberdade impondo que as coordenadas satisfaçam um certo número de condições.Em geraltal situação é representada por *n coordenadas generalizadas* $q^1,\dots,q^n$ que satisfazem m $(<n)$ relações

$$F_j(q^1,\dots,q^n) = 0 \quad , \quad j\varepsilon\underline{m}.$$

Se isto ocorre, dizemos que o sistema se move sujeito a *vínculos holonomos*. Por outro lado os vínculos também são descritos por relações

$$G_j(q^1,\ldots,q^n\;,\;\dot q^1,\ldots,\dot q^n) = 0\;,\; j\epsilon\underline{m}\;,\; m<n\;,$$

se tais relações podem ser integradas os vínculos são *holonomos*, caso contrário, os vínculos são ditos *não holonomos*.

Em síntese, a diferença entre os dois casos, é, em última análise, que os vínculos holonomos dependem apenas das coordenadas, enquanto que os outros envolvem velocidades em relações não integráveis

§ 5.3 *Equações de Lagrange*

Consideremos um sistema de k partículas,sujeito a vínculos holonomos. Tal sistema pode ser descrito pela variedade diferenciável $\left(\mathbb{R}^{3k},\beta\right)$, onde β é a única carta $\left(\mathbb{R}^{3k},id\right)$,associada ao sistema de coordenadas cartesianas. Por outro lado, tal sistema pode ser descrito por n coordenadas generalizadas $q^1,\ldots,q^n$, o que equivale a fazer uso de uma variedade diferenciável M de dimensão n e classe C^∞. Vamos admitir que existe uma aplicação $\varphi: M \to \mathbb{R}^{3k}$, diferenciável, que muda a descrição das coordenadas generalizadas para a descrição cartesiana.

Usando a lei de Newton, o movimento do sistema pode ser caracterizado em $\mathbb{R}^{3k}$. Nosso objetivo é descrevê-lo em M ,obtendo primeiramente as equações de Lagrange em $\mathbb{R}^{3k}$ a partir da segunda lei de Newton e posteriormente, através do "pullback" de φ ,transportá-las para M , verificando finalmente que a sua forma independe das coordenadas locais.

Sejam $F_i^{(a)}$ e $F_i^{(v)}$, $i \in \underline{3k}$, forças aplicadas e de vínculos em cada uma das direções cartesianas x^i , $i \in \underline{3k}$, suponhamos ainda que as forças de vínculo não realizam trabalho.

Seja

$$5.3.1 \qquad \omega = \sum_{i \in \underline{3k}} \left(F_i^{(a)} + F_i^{(v)} \right) dx^i$$

a forma diferencial do trabalho em $\Omega(\mathbb{R}^{3k})$ e (U,q), uma carta em M então $\varphi^*\omega \in \Omega(U)$ exprime o trabalho em termos de q^i.

A segunda lei de Newton fornece

$$5.3.2 \qquad m_i \frac{d^2x^i}{dt^2} = F_i^{(a)} + F_i^{(v)} \quad , \quad i \in \underline{3k}$$

$$5.3.3 \quad m_i \varphi^*\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right) = \varphi^*\left(F_i^{(a)} + F_i^{(v)}\right) = F_i^{(a)} \circ \varphi + F_i^{(v)} \circ \varphi$$

Por simplicidade de notação escreveremos

$$\varphi^*\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} \quad \text{e} \quad F_i \circ \varphi = f_i \quad ,$$

e portanto, *5.3.3* se transforma em:

$$5.3.4 \qquad \frac{d^2x^i}{dt^2} = f_i^{(a)} + f_i^{(v)}.$$

Aplicando φ^* a *5.3.1*, e, além disso, usando o fato de que as forças de vínculo não realizam trabalho

$$\varphi^*\omega = \sum_{i \in \underline{3k}} \left(f_i^{(a)} + f_i^{(v)} \right) \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \, dq^j \qquad =$$

$$= \sum_{j\varepsilon\underline{n}}\left(\sum_{i\varepsilon\underline{3k}} f_i^{(a)}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right)dq^j \quad +$$

$$\sum_{j\varepsilon\underline{n}}\left(\sum_{i\varepsilon\underline{3k}} f_i^{(v)}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right)dq^j \quad =$$

$$\sum_{j\varepsilon\underline{n}}\left(\sum_{i\varepsilon\underline{3k}} f_i^{(a)}\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right)dq^i ,$$

podemos, então, escrever

5.3.5 $$\varphi^*\tilde{\omega} = \sum_{j\varepsilon\underline{n}} Q_j dq^j ,$$

onde

$$Q_j = \sum_{i\varepsilon\underline{3k}} f_i^{(a)}\frac{\partial x^i}{\partial q^j} ,$$

é a força generalizada na direção q^j, observemos em tempo que os Q_j não possuem necessariamente a dimensão física de uma força, embora os produtos, $Q_j dq^j$ possuam dimensões físicas de trabalho.

De

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = \sum_{j\varepsilon\underline{n}} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\dot{q}^j$$

obtemos:

5.3.6 $$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} , \quad i\varepsilon\underline{3k} \quad \text{e} \quad j\varepsilon\underline{n} ,$$

e usando *5.3.6:*

5.3.7 $$\frac{d^2x^i}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q^j} = \frac{d}{dt}(\dot{x}^i)\frac{\partial x^i}{\partial q^j} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^i\frac{\partial x}{\partial q^j}\right) - \dot{x}^i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^{i}\frac{\partial \dot{x}^{i}}{\partial \dot{q}^{j}}\right) - \dot{x}^{i}\frac{\partial}{\partial q^{j}}\,\dot{x}^{i} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{j}}\,\frac{(\dot{x}^{i})^{2}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q^{j}}\,\frac{(\dot{x}^{i})^{2}}{2}\ ;\ i \in \underline{3k} \quad \text{e} \quad j \in \underline{n}\ .$$

De *5.3.4*, *5.3.5* e *5.3.7* temos

$$5.3.8 \qquad \sum_{j\in\underline{n}} Q_j\,dq^{j} = \sum_{j\in\underline{n}}\left(\sum_{i\in\underline{3k}} m_i\,\frac{d^{2}x^{i}}{dt^{2}}\,\frac{\partial x^{i}}{\partial q^{j}}\right)dq^{j} =$$

$$\sum_{j\in\underline{n}}\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{j}}\left(\sum_{i\in\underline{3k}} m_i\,\frac{(\dot{x}^{i})^{2}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q^{j}}\left(\sum_{i\in\underline{3k}} m_i\,\frac{(\dot{x}^{i})^{2}}{2}\right)\right)dq^{j} =$$

$$\sum_{j\in\underline{n}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^{j}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^{j}}\right)dq^{i}\ ,$$

onde K é a aplicação $K\colon T(\mathbb{R}^{3k}) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$(x^{i},\dots,x^{3k},\dot{x}^{i},\dots,\dot{x}^{3k}) \longmapsto \frac{1}{2}\sum_{i\in\underline{3k}} m_i(\dot{x}^{i})^{2}$$

Da independencia linear dos dq^{i} e de *5.3.8* obtemos

$$5.3.9 \qquad Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^{j}} - \frac{\partial K}{\partial q^{i}}\right),\ j \in \underline{n}\ ,$$

que são as equações de Lagrange para o sistema em M .

Lembremos que as equações de Lagrange para o sistema em $\mathbb{R}^{3k}$, são obtidas de

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i\in\underline{3k}} m_i(\dot{x}^{i})^{2}$$

e *5.3.2* como:

$$5.3.10 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial x^i} = F_i \;, \qquad i\in \underline{3k}\,; F_i = F_i^{(a)} + F_i^{(v)}$$

Observando *5.3.2* e *5.3.10* verificamos que as equações no espaço euclidiano são transformados pela aplicação $\varphi^{*}\in L(\Omega(\mathbb{R}^{3k}),\Omega(U))$ em um sistema da mesma forma em relação aos q^i.

§5.4 Caminhos suspensos

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ e um caminho $\alpha\colon I \to M$; onde I é um intervalo em $\mathbb{R}$. α induz naturalmente em T(M) uma aplicação $\tilde{\alpha}\colon I \to T(M)$, $t \mapsto \left(\alpha(t),\ \alpha_{\alpha(t)}\right)$ denominada *caminho suspenso.*

Sejam M, N variedades diferenciáveis de classe C^∞ e $F\colon M \to N$, diferenciável. Se α é um caminho em M, então $F o\alpha$ é um caminho em N, e a aplicação

$$\widetilde{Fo\alpha}\colon I \to T(N);\ t \mapsto \left(F(\alpha(t))\ ,\ Fo\alpha_{F(\alpha(t))}\right)$$

é o caminho suspenso induzido por $Fo\alpha$ em T(N), é fácil verificar que $F_* o\tilde{\alpha} = \widetilde{Fo\alpha}$, desde que

$$F_* o\tilde{\alpha}(t) = \left(Fo\alpha(t)\ ,\ F_{*\,\alpha(t)}\left(\alpha_{\alpha(t)}\right)\right)$$

onde

$$F_{*\,\alpha(t)}\left(\alpha_{\alpha(t)}\right) = Fo\alpha_{F(\alpha(t))}\ ,$$

de acordo com a definição de $F_{*\,\alpha(t)}$ do capítulo *4*.

O diagrama abaixo mostra melhor as relações entre as aplicações mencionadas anteriormente.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, "\tilde{\alpha}"] \arrow[drr, "F \circ \tilde{\alpha}"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\
& T(M) \arrow[r, "F_*"'] \arrow[d, "\P_M"] & T(N) \arrow[d, "\P_N"] \\
& M \arrow[r, "F"'] & N
\end{tikzcd}$$

Sejam $(U,q) = (U,q^1,\ldots,q^n)$ e $(V,r) = (V,r^1,\ldots,r^m)$ coordenadas locais em M e N respectivamente.

Então $(\P_M^{-1}(U),q^1,\ldots,q^m\ ,\ \dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^m)$ e $(\P_N^{-1}(V),r^1,\ldots,r^m\ ,\ \dot{r}^1,\ldots,\dot{r}^m)$ são as coordenadas locais em T(M) e T(N) respectivamente, desde que $\P_M$: T(M) $\to$ M e $\P_N$: T(N) $\to$ N, de acordo com o capítulo *4*, são as projeções dos fibrados tangentes sobre as variedades.

A matriz jacobiana de F é definida por

$$J(F) = \left[\frac{\partial r^i \circ F}{\partial q^j}\right] \qquad (i,j) \in \underline{m} \times \underline{n} \quad ;$$

enquanto a matriz $2m\times 2n$ definida por *5.4.1* é a matriz jacobiana de F_*.

$$5.4.1 \qquad \begin{bmatrix} J(F) & 0 \\ \dfrac{\partial \dot{r}^i}{\partial q^k} & J(F) \end{bmatrix} = J(F_*)\ ,\ i \in \underline{m}\ ,\ k \in \underline{n}$$

sendo

$$\frac{\partial \dot{r}^i}{\partial q^k} = \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial^2 \dot{r}^i}{\partial q^j \partial q^r} \dot{q}^i$$

Assim as equações para a transformação F_* em termos de coordenadas são:

$$5.4.2 \quad \dot{r}^i = \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial r^i}{\partial q^j} \dot{q}^j \ , \quad r^i = F(q^i, \ldots, q^n)$$

enquanto que a descrição invariante é dada por:

$$5.4.3 \qquad F_*(a, \alpha_a) = \left(F(a) \ , \ F \circ \alpha_{F(a)} \right) .$$

§ 5 No que se segue M, N indicarão variedades diferenciáveis de classe C^∞ e dimensões m e n respectivamente; K: T(M) $\longrightarrow$ IR, uma função de classe C^∞, $(U,q) = (U,q^1,\ldots,q^m)$ uma carta em M, $\alpha : I \longrightarrow U$ um caminho em U e $\omega \in \Omega(U)$ definida por:

$$5.5.1 \quad \omega = \sum_{i \in j} Q_j dq^j \ , \ K = K(q^1, \ldots, q^n \ , \ \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$$

Definição: Dizemos que α satisfaz as equações *de Lagrange* em relação as coordenadas $q^1, \ldots, q^n$ se

$$5.5.2 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i} \right)(\tilde{\alpha}) - \frac{\partial K}{\partial q^i} (\tilde{\alpha}) = Q_i(\alpha)$$

As relações entre as diferentes funções que aparecem em *5.5.2* se tormam mais claras com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & T(M) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\P"] & \mathbb{R} \\
I \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[r, "Q_i"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Uma forma $\omega \in \Omega(U)$ é dita conservativa se existe uma função $V\colon U \to \mathbb{R}$, chamada potencial tal que $\omega = -dV$. Em coordenadas, isto se exprime por:

$$\sum_{j \in \underline{n}} Q_i dq^i = - \sum_{i \in \underline{n}} \frac{\partial V}{\partial q^i}\, dq^i \,.$$

Portanto

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

Se assumirmos que as forças, ou de modo equivalente, que é conservativa então *5.5.1* se transforma em

$$5.5.2 \quad \frac{d}{dt} \; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} (\tilde{\alpha}) \; - \frac{\partial L}{\partial q^i} (\tilde{\alpha}) = 0$$

onde L é a aplicação definida por

$$L = (K - V \circ \P) : T(M) \to \mathbb{R} \,,$$

usualmente denominada *Lagrangeano* do sistema.

5.5.3 Teorema.

Sejam:

i) M^n, N^n, variedades diferenciáveis C^∞;

ii) F: N → M, uma aplicação suave.

iii) (U,q) e (V,r) cartas coordenadas em M e N respectivamente tais que $F(V) \subset U$;

iv) α: $I \to V$ um caminho tal que o caminho $F o \alpha$ satisfaz a equação de *Lagrange* em relação a K e ω definidas em *5.5.1*.

Então o caminho α em V satisfaz a equação de *Lagrange* em relação a $K o F_*$ e $F^* \omega$.

O diagrama abaixo mostra como se relacionam as funções definidas em *5.5.3*.

$$\begin{tikzcd}
 & V \subset \mathrm{N} \arrow[r, "F"] & U \subset \mathrm{M} \arrow[r, "Q_i"] & \mathrm{IR} \\
I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}"'] & & & \\
 & \mathrm{T(N)} \arrow[uu, "\Pi_N"'] \arrow[r, "F_*"'] & \mathrm{T(M)} \arrow[uu, "\Pi_M"'] \arrow[r, "K"'] & \mathrm{IR}
\end{tikzcd}$$

Demonstração

Seja $\omega \in \Omega(U)$, então

$$\omega = \sum_{i \in \underline{m}} Q_i dq^i \text{ ,onde } Q_i : \mathrm{M} \to \mathrm{IR} \text{ são aplicações suaves.}$$

Portanto:

$$F^*\omega = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} F^*(Q_i dq^i) = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} Q_i oF \quad F^*(dq^i) =$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} \sum_{j\varepsilon \underline{n}} Q_i oF \frac{\partial q^i}{\partial r^j} dr^j = \sum_{j\varepsilon \underline{n}} R_j dr^j ,$$

onde

$$R_j = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} Q_i oF \frac{\partial q^i}{\partial r^j} \quad , j\varepsilon \underline{m}$$

Por hipótese, vale,

$$5.5.4 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q^i}(F\tilde{o}\alpha)\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}(F\tilde{o}\alpha) = Q_i(Fo\alpha) \ , \ i\varepsilon \underline{m}$$

Multiplicando-se a i-ésima equação por $\frac{\partial q^i}{\partial r^j}$ e somando-se obtemos:

$$5.5.5 \sum_{i\varepsilon \underline{m}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha) - \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha)\right)\frac{\partial q^i}{\partial r^j} =$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha) \frac{\partial q^i}{\partial r^j} - \sum_{i\varepsilon \underline{m}}\left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha) \frac{\partial q^i}{\partial r^j} =$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} Q_i oF(\alpha) \frac{\partial q^i}{\partial r^j} = R_j o\alpha.$$

5.5.5 pode ser reescrita na forma:

$$5.5.6 \sum_{i\varepsilon \underline{m}} \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right) (F\tilde{o}\alpha)\right) \frac{\partial q^i}{\partial r^j} - \sum_{i\varepsilon \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right) (F\tilde{o}\alpha) \frac{d}{dt} \frac{\partial q^i}{\partial r^j} -$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right) (F\tilde{o}\alpha) \frac{\partial q^i}{\partial r^j} = R_j o\alpha \quad , \quad j\varepsilon \underline{n}$$

De acordo com

$$5.5.7 \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial q^i}{\partial r^j} = \sum_{k\varepsilon \underline{n}} \frac{\partial q^i}{\partial r^j \partial r^k}\,\dot{r}^k = \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial r^j}$$

$$5.5.8 \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{r}^j} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}$$

$$5.5.9 \quad \left(\frac{\partial K}{\partial r^j}\right)(F\tilde{o}\alpha) = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} \left(\left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha)\right)\frac{\partial q^i}{\partial r^j} +$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} \left(\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right)(F\tilde{o}\alpha)\right)\frac{\dot{q}^i}{r^j} \quad \text{e}$$

$$5.5.10 \quad \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{r}^j}\right)(F\tilde{o}\alpha)\right) = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{r}^j}\right)(F\tilde{o}\alpha)\right)\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{r}^j},$$

onde $i\varepsilon \underline{m}$ e $j\varepsilon \underline{n}$; portanto 5.5.6 se transforma finalmente em

$$5.5.11 \quad \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{r}^j}\right)(F\tilde{o}\alpha)\right) - \left(\frac{\partial K}{\partial r^j}\right)(F\tilde{o}\alpha) = R_j o\tilde{\alpha}.$$

Por outro lado

$$5.5.12 \quad \left(\frac{\partial}{\partial r^j} K o F_*\right)(\tilde{\alpha}) = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} \frac{\partial K}{\partial q^i}(F_*(\tilde{\alpha}))\frac{\partial q^i}{\partial r^j} +$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} \frac{\partial K}{\partial q^i}(F_*(\tilde{\alpha}))\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial r^j} = \sum_{i\varepsilon \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha)\frac{\partial q^i}{\partial r^j} +$$

$$\sum_{i\varepsilon \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F\tilde{o}\alpha)\frac{\dot{q}^i}{r^j}$$

$$5.5.13 \quad \left(\frac{\partial K_o F_*}{\partial \dot{r}^j}\right)(\tilde{\alpha}) = \sum_{i \in \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F_*(\tilde{\alpha}))\ \frac{\partial q^i}{\partial \dot{r}^j} \quad +$$

$$\sum_{i \in \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F_*(\alpha))\ \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{r}^j} = \sum_{i \in \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F_*(\alpha))\ \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{r}^j} =$$

$$\sum_{i \in \underline{m}} \left(\frac{\partial K}{\partial q^i}\right)(F o \alpha)\ \frac{\partial q^i}{\partial r^j}$$

De *5.5.11*, *5.5.12* e *5.5.13*, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{\partial K_o F_*}{\partial \dot{r}^j}\right)(\tilde{\alpha})\right) - \left(\frac{\partial K_o F_*}{r^j}\right)(\tilde{\alpha}) = R_j o \tilde{\alpha}\ , \qquad j \in \underline{n}$$

c.q.d.

Corolário: Se M e N tem a mesma dimensão e $F\colon V \subset N \to U \subset M$ é uma aplicação bijetora, onde (V,r) e (U,q) são cartas em N e M respectivamente, $\alpha\colon I \to V$, um caminho, K e ω definidas como em *5.5.1*, então o caminho $F o \alpha$ satisfaz as equações de *Lagrange* em relação a função K e a forma $\omega \in \Omega(U)$ se e somente se α satisfaz a equação de *Lagrange* com relação a função $K o F_*$ e a forma $F^* \omega$.

Deve ser observado que no caso em que ω é uma forma conservativa, a função *Lagrangeana* é por definição

$$L \equiv K - V o \P \ : T(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e a equação de *Lagrange* toma a forma

$$5.5.14 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(\tilde{\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial q^i}(\tilde{\alpha}) = 0, \quad i \in \underline{n}$$

ou, explicitamente

$$\sum_{j\varepsilon\underline{m}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial\dot{q}^i}\right)(\tilde{\alpha})\dot{q}^j + \sum_{j\varepsilon\underline{m}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^j\partial\dot{q}^i}\right)(\tilde{\alpha})\dot{q}^j - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)(\tilde{\alpha}) = 0.$$

C A P Í T U L O   VI

TRANSFORMADA DE LEGENDRE

C A P I T U L O   VI

§6.1 - Formas quadráticas

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita. Uma função $Q: U \to \mathbb{R}$, é dita uma *forma quadrática* quando:

6.1.1 $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$

quaisquer que sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in U$.

6.1.2 A função $\beta: U\times U \to \mathbb{R}$ definida por

$$\beta(u,v) = {}^1/_2\,(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)), \quad u,v \in U$$

é a forma bilinear definida em UxU associada a Q.

Observemos que dada uma forma bilinear simétrica definida positiva em U esta induz uma forma quadrática definida positiva dada pela relação

$$Q_\beta(v) = \beta(v,v), \quad v \in U .$$

E, reciprocamente, se Q é uma forma quadrática definida positiva β definida em 6.1.2 é bilinear, simétrica definida positiva.

Fixada uma carta (U,q) no espaço das configurações M, a energia cinética $K: T(U) \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática definida positiva em termos das velocidades, isto é, restrita a cada fibra é uma forma quadrática definida positiva em $T_a(M)$, assim, localmente a energia cinética é uma métrica riemanniana em M.

§6.2 - No final do capítulo *IV* mencionamos o procedimento de transformar um sistema de equações diferenciais de segunda ordem em um

de primeira ordem duplicando o número de variáveis. Isto corresponde a se deslocar do fibrado tangente para o fibrado cotangente, mais precisamente, esta mudança é realizada por uma aplicação

$$\ell_L : T(M) \to T^*(M),$$

induzida por uma função L de classe C^∞ em T(M). A aplicação ℓ_L é conhecida como transformação de Legendre para L e leva espaços tangentes (fibras) em espaços cotangentes. Em geral ℓ_L é descrita usando-se coordenadas, podemos porém, descrevê-la de uma forma intrísica e este será nosso próximo objetivo. Iniciaremos com o caso de um espaço tangente em um ponto, descrevendo os fatos através do seguinte teorema.

6.2.1 Teorema e definição:

Se W é um espaço vetorial real de dimensão finita visto como uma variedade diferenciável, então:

i) Em cada ponto $a \in W$ os espaços tangentes e cotangentes são canônicamente isomorfos a W e W^* respectivamente.

ii) Qualquer função $L: W \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ determina uma aplicação $\ell_L : W \to W^*$ definida por $\ell_L(a) = d_a L$, chamada ***transformação de Legendre para*** L.

iii) Em particular, se L é uma forma quadrática definida positiva em W, tornando W um espaço produto interno, então ℓ_L é o isomorfismo natural que identifica o espaço produto interno W com o seu dual.

iv) Se ℓ_L é inversível, então a inversa $(\ell_L)^{-1}$ também é uma transformação de Legendre para uma função H em W^* que é definida em termos das coordenadas $v^1,\ldots v^n$ em W e as coordenadas duais $p_1,\ldots,p_n$ em W* como:

$$H = v^1p_1 + \ldots v^np_n - L.$$

Prova:

i) Fixado $a \in W$, mostraremos que $T_a(W) \approx W$ e $T^a(W) \approx W^*$. Se $w \in W$, w determina um caminho α_w passando por a e definido como:

$$\alpha_w : [-1,1] \to W;\ t \mapsto a + tw.$$

A correspondência $w \in W \to (\alpha_w)_a \in T_a(W)$ fornece o isomorfismo $T_a(W) \approx W$; enquanto que o seu dual é o isomorfismo $T^a(W) \approx W^*$.

ii) A aplicação $\ell_L : W \to W^*,\ a \mapsto d_aL$ pode ser descrita em coordenadas, e a i-ésima coordenada de $\ell_L(a)$ é justamente o valor $\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)_a = \frac{\partial L(a)}{\partial v^i}$. Portanto podemos escrever que $p_i(\ell_L(a)) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(a)$ ou se fizermos $v^i = \dot{q}^i$

$$6.2.2 \quad p_i \circ \ell_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i},\ i \in \underline{n}$$

Frequentemente estas equações são escritas como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$$

iii) Suponhamos agora que L é uma forma quadrática definida positiva que torna W um espaço euclideano então L é dada em termos do produto interno com $L(v) = (v,v)$.

Então,

$$6.2.3 \quad L\circ\alpha_w(t) = (a+tw, a+tw) = (a,a) + t(a,w) + t^2(w,w).$$

Derivando $6.2.3$ em $t = 0$ obtemos

$$\frac{d}{dt} L\circ\alpha_w(t)\Big|_{t=0} = \langle d_aL, \alpha_w\rangle_a = 2(a,w)$$

ou seja, a menos do fator 2, d_aL é a forma linear em W dada pela função $(a,\ )$: W → W*; $w \mapsto (a,w)$. Esta correspondência $a \mapsto d_aL$ é justamente o isomorfismo canônico $a \mapsto (a,\ )$, que identifica o espaço produto interno com o seu dual.

iv) ℓ_L é (localmente) inversível se e somente se o determinante da matriz jacobiana $\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right]$, $i,j\in\underline{n}$ é diferente de zero.

Quando ℓ_L é inversível a equação

$$6.2.4 \quad H = \sum_{i\in\underline{n}} \left(v^i \circ \ell_L^{-1}\right) p_i - L\circ \ell_L^{-1}$$

define uma função suave H em W*. A partir desta formula podemos calcular a transformação de Legendre ℓ_H: W* → W, $w^* \mapsto d_{w^*}H$, cuja descrição em coordenadas é dada pelas equações

$$6.2.5 \quad v^j \circ \ell_H = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Usando as regras de derivação em $6.2.4$ e os seguintes fatos:

i) $v^i \circ \ell_L^{-1} = v^i$ donde $\dfrac{\partial}{\partial p_j}(v^i \circ \ell_L^{-1}) = \dfrac{\partial v^i}{\partial p_j}$

ii) $\dfrac{\partial}{\partial p_j}(L\circ \ell^{-1}) = \displaystyle\sum_{i\in\underline{n}} \frac{\partial L}{\partial v^i}(\ell_L^{-1}) \frac{\partial v^i}{\partial p_j} = \sum_{i\in\underline{n}} p_i \frac{\partial v^i}{\partial p_j}$, obtemos

$$6.2.6 \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = v^i \circ \ell_L^{-1} + \sum_{i \varepsilon \underline{n}} \frac{\partial v^i \circ \ell_L^{-1}}{\partial p_j} p_i - \frac{\partial}{\partial p_j} L \circ \ell^{-1} = v j \circ \ell_L^{-1}$$

De *6.2.5* e *6.2.6* conclue-se que $v^i \circ \ell_H \circ \ell_L = v^i$, logo $\ell_H = \ell_L^{-1}$. A formula de H pode ser estabelecida de forma invariante, se $y \;\varepsilon W^*$ então

$$6.2.7 \quad H(y) = \langle y, \ell_L^{-1}(y) \rangle - L \circ \ell_L^{-1}(y),$$

onde $\langle\, ,\, \rangle$ representa a forma bilinear que define a dualidade entre W e W*.

A notação deste teorema foi escolhida de tal forma a tornar natural a extensão de um espaço tangente para o fibrado tangente de qualquer variedade M .

Seja uma função L: T(M) $\rightarrow$ IR de classe C^∞ e identifiquemos $T_u(T_a(M))$ e $T^u(T_a(M))$ com $T_a(M)$ e $T^a(M)$ respectivamente. A função L determina, por restrição a cada espaço tangente, uma função $L/_{T_a(M)}$ em $T_a(M)$. Definimos então a função de classe C^∞.

$$\ell_L : T(M) \rightarrow T^*(M) ; \; (a,u) \mapsto (a, d_u(L/_{T_a(M)})).$$

Esta aplicação frequentemente é chamada derivada ao longo de uma fibra porque é obtida tomando-se a diferencial da restrição de L em cada fibra. É fácil verificar que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[rr, "\ell_L"] \arrow[dr, "\P"'] & & T^*(M) \arrow[dl, "\P"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

A descrição em coordenadas da transformação de Legendre é dada pelas equações

$$6.2.7 \quad q^i \circ \ell_L = q^i \text{ e } p_i \circ \ell_L = \frac{\partial(L/T_a(M))}{\partial v^i}, \quad i \varepsilon \underline{n}$$

onde $(q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n)$ são as funções coordenadas em $T^*(M)$.

Em dinâmica das partículas, a transformação de Legendre em que estaremos interessados é a induzida pelo Lagrangeano. A menos de uma constante o Lagrangeano restrito a cada fibra é uma forma quadrática nas velocidades. Neste caso ℓ_L é inversível e a sua inversa ℓ_H provem de uma função H: $T^*(M) \to \mathbb{R}$ denominada *Hamiltoniano*. Quando L é o Lagrangeano podemos interpretar as coordenadas p_i que foram introduzidas como as coordenadas duais de $v^i = \dot{q}^i$, como a i-ésima componente do momentum; por esta razão $p_1,\ldots,p_n$ são chamadas *coordenadas do momentum*.

Vejamos com mais detalhe como podemos reescrever as equações *6.2.7* no caso em que L é o Lagrangeano de um sistema dinâmico.

$$L = K - V \circ \P$$

onde K e $V\circ\P$ são respectivamente a energia cinética e energia potencial expressas como função em $T(M)$. Sejam $(q^1,\ldots,q^n,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n)$ coordenadas locais em $T(M)$. Suponhamos que a métrica riemaniana (local) é dada por

$$||(\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n)||^2 = \sum_{i \varepsilon \underline{n}} \sum_{j \varepsilon \underline{n}} g_{ij}(q^1,\ldots,q^n) \;.\; \dot{q}^i \dot{q}^j$$

onde o Lagrangeano L é definido por

$$L(q^1,\ldots,q^n,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n) = \frac{1}{2} \sum_{i \varepsilon \underline{n}} \sum_{j \varepsilon \underline{n}} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V\circ\P(q^1,\ldots,q^n,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^n)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{n}} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - \bar{V}(q^1, \ldots, q^n), \quad V = V \circ \P$$

e podemos reescrever *6.2.7* da seguinte forma

6.2.8 $\quad q^i \circ \ell_L = q^i \quad$ e $\quad p_i \circ \ell_L = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \sum_{j \in \underline{n}} g_{ij}(q^1, \ldots, q^n)\dot{q}^j = p_i$

o Hamiltoniano, em termos de coordenadas locais é escrito como:

6.2.9 $\quad H(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i \in \underline{n}} \sum_{j \in \underline{n}} p_i \dot{q}^j$

$$- L(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$$

onde os $\dot{q}^i$ são funções dos q's e p's via ℓ_L^{-1}.

A equação *6.2.9* pode ser escrita como:

$$q^i \circ \ell_L^{-1} = q^i \ , \ \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ ,$$

Além disto, por *6.2.9*

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sum_{j \in \underline{n}} \dot{q}^j p_j - L(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) \right)$$

$$= \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial(\dot{q}^j \circ \ell_L^{-1})}{\partial q^i} p_j - \frac{\partial L \circ \ell^{-1}}{\partial q^i} - \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial L}{\partial q^j} \frac{\partial(\dot{q}^j \circ \ell_L^{-1})}{\partial q^i}$$

$$= - \frac{\partial L \circ \ell^{-1}}{\partial q^i} = - \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial L}{\partial q^j} \frac{\partial q^j \circ \ell_L^{-1}}{\partial q^i} = - \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j \in \underline{n}} p_j \dot{q}^j - L(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n) \right)$$

$$= \dot{q}^i + \sum_{j \in \underline{n}} p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \sum_{j \in \underline{n}} \frac{\partial L}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$$

Em resumo:

$$6.2.10 \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq^i}{dt} \quad \text{e} \quad 6.2.11 \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}\ .$$

O Hamiltoniano, extendido ao fibrado cotangente pode ser reescrito numa forma invariante como se segue:

$$H((a,y)) = \left\langle \left(\ell_L^{-1}\Big|_{T_a(M)}\right)(y),y\right\rangle_a - L(\ell_L^{-1}(a,y))$$

onde $(a,y) \in T^a(M)$ e $\langle\ ,\ \rangle_a$ é a forma bilinear não degenerada que define a dualidade entre $T^a(M)$ e $T_a(M)$.

§6.3 - Equações de Hamilton

Neste parágrafo vamos mostrar o uso da transformação de Legendre nas trajetórias de um sistema dinâmico. Tais trajetórias são os caminhos $\alpha: \mathbb{R} \to M$, no espaço das configurações que satisfazem as equações de Lagrange. Lembramos que tais trajetórias podem ser "levantadas" para o fibrado tangente através do caminho suspenso $\tilde{\alpha}$ induzido por α. As composições $\ell_L \circ \tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$ serão as trajetórias em $T^*(M)$ do sistema físico, solução do sistema

$$6.3.1 \quad \begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

obtido a partir de *6.2.10*, *6.2.11* e da equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Estas $2n$ equações são as equações de Hamilton. Elas descrevem as trajetórias do sistema dinâmico no espaço das fases através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Lembramos que o espaço das fases da mecânica é o conjunto dos pares ordenados (a,α), onde a dá a posição no instante t de uma particula e α a respectiva velocidade.

BIBLIOGRAFIA

[1963] AUSLANDER, L e MACKENZIE, R.E.: "Introduction to Differentiable Manifolds". New York: McGraw-Hill.

[1964] NOLL, W.: "Euclidean Geometry and Minkowskian Chronometry". Am. Math. Monthly 71.

[1965] LIMA, E.L.: "Cálculo Tensorial", Rio de Janeiro: IMPA.

[1965] SPIVAK, M.: "Calculus on Manifolds", New York: Benjamin.

[1966] CHIRGUIN, B.H. e PLUMPTON, C.: "A Course of Mathematics for Engineers and Scientists" vol 6, Oxford: Pergamon Press.

[1967] ABRAHAM, R.: "Foundations of Mechanics", New York: Benjamin.

[1967] GREUB, W.H.: "Multilinear Algebra", Heidelberg: Springer--Verlag.

[1967] SHWARTZ, L.: "Cours d'Analyse", Paris: Hermann.

[1968] LOMIS, L.H. e STERNBERG: "Advanced Calculus", Massachusetts: Addison Wesley.

[1970] MAC LANE, S.: "Hamiltonian Mechanics and Geometry". Am. Math. Monthly 77.

[*1972*] LIMA, E.L.: "Variedades diferenciáveis", Rio de Janeiro , IMPA.

[*1972*] POLLARD, H.: "Applied Mathematics: An Introduction" , Massachusetts, Addison Wesley.

[*1973*] La PENHA, G.M.M.: "Elementos de Mecânica Racional Clássica" Rio de Janeiro, IMPA.

REFERÊNCIAS

[1] [1967] GREUB, W.H.: "Multilinear Algebra", 1ª edição, pag. 9, Heidelberg, Springer Verlag.

[2] [1965] LIMA, E.L.: "Cálculo Tensorial", pag. 63, Rio de Janeiro, IMPA.

[3] [1965] LIMA, E.L.: "Cálculo Tensorial", pag. 62, Rio de Janeiro, IMPA.

[4] [1967] GREUB, W.H.: "Multilinear Algebra", 1ª edição, pag.28, Heidelberg, Springer Verlag.

[5] [1965] LIMA, E.L.: "Cálculo Tensorial", pag. 73, Rio de Janeiro, IMPA.

[6] [1967] SCHWARTZ, L: "Cours d'Analyse", 1ª edição, vol. 2, pag. 3, Paris, Hermann.

[7] [1967] LIMA, E.L.: "Cálculo Tensorial", pag. 73, Rio de Janeiro, IMPA.

[8] [1965] SPIVAK, M.: "Calculus on Manifolds", 1ª edição,pag.91, New York, Benjamin.