

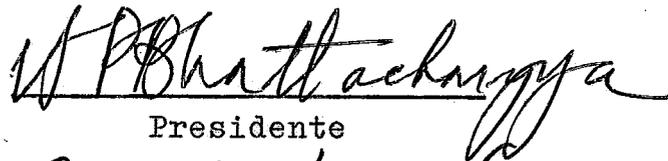
" SÔBRE A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ADAPTAÇÃO DE UMA PLANTA

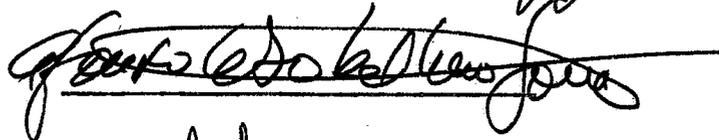
A UM MODELO, POR MEIO DE INVARIABILIDADE "

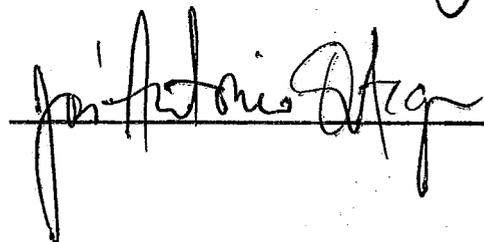
Gerhard Schwarz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente





RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

ABRIL DE 1974

AGRADECIMENTO

Quero agradecer ao Prof. Shankar P. Bhattacharyya a orientação dada a este trabalho.

Meu especial agradecimento à Coordenação do Programa de Sistemas, nas pessoas do Prof. Celso de Renna e Souza e Prof. Nelson Maculan Filho, que possibilitou o desenvolvimento de meus estudos paralelo ao meu trabalho no Laboratório para Automação e Simulação de Sistemas.

Também o agradecimento aos amigos que estiveram presentes com seu estímulo nos momentos menos fáceis.

E a Zoila Neves pela amizade sobretudo no meu "início de COPPE" quando os dias nem sempre eram "brilhantes" .

RESUMO

Nesta tese está explicado - brevemente - o que é e para que serve a adaptação de uma planta a um modelo (APM). Após a apresentação de alguns métodos existentes, foi desenvolvido um ponto de vista diferente. Este novo método mostra como encontrar condições - necessárias e suficientes - para a existência de uma solução que consiste de três pontos principais: 1) Fazer a matriz de transferência da planta igual à de um modelo dado usando um controlador para a planta que tem como entradas os estados da planta e do modelo, e a entrada para o modelo, 2) para entradas idênticas, "zerar" o erro entre as saídas da planta e do modelo, resultante das condições iniciais, seja do modelo, seja da planta, e, finalmente, 3) estabilizar internamente a planta.

Para eliminar o mais rápido possível, sobretudo sem muito cálculo, os pares planta-modelo, que não darão uma solução, a condição para 1) foi expressa em termos de singularidades (polos e zeros), que em alguns casos especiais pode também fornecer uma afirmação para a existência de uma solução.

Com um exemplo ilustrativo foi mostrado como os resultados teóricos se aplicam na solução de um problema prático.

ABSTRACT

In this thesis is explained - briefly - what is and what for serves the adaptation of a plant to a model (APM). After the representation of some existing methods a different viewpoint was developed. This new method shows how to find conditions - necessary and sufficient - for the existence of a solution, which consists of three main points: 1) Making the transfer matrix of the plant equal to the one of a given model, using a controller for the plant which has as inputs the states of the plant and the model, and the model-input, 2) for identical inputs, "zeroing" the error - which results from the initial conditions of the plant or model - between the outputs of the plant and the model, and, finally, 3) internally stabilizing of the plant.

To eliminate the pairs plant-model, which don't give a solution, as fast as possible - and without a lot of calculation -, the condition 1) was expressed in terms of singularities (poles and zeros), which in some special cases can also be an affirmation for the existence of a solution.

With an illustrative example was shown how the theoretical results can be applied in finding a solution to a practical problem.

Índice

<u>Capítulo 1)</u>	1
1.0) Introdução geral	1
1.1) Notação	6
<u>Capítulo 2): Tratamento clássico do "problema de adaptação</u> de uma planta a um modelo" (APM).	9
2.1) Introdução	9
2.2) Método de Wolovich	10
- O problema	10
- O caso escalar	11
- O caso multivariável	12
- Solução do APM	15
- Exemplo	19
2.3) Método de Moore & Silverman	23
- Definições e preliminares	23
- Algoritmo estrutural	26
- APM por realimentação dos estados	30
- APM por compensação dinâmica	32
- APM (só a matriz de transferência conhecida)	34
- Exemplos	37
<u>Capítulo 3): Tratamento geométrico deste problema.</u>	42
3.1) Introdução	42
3.2) Método de Morse	43
- Formulação	43

Capítulo 1): GERAL

1.0): INTRODUÇÃO

Esta tese investiga a solução - e condições para a existência de uma solução - do problema de adaptação de uma planta a um modelo (APM) .

Mas vamos antes explicar brevemente o que é APM.

Inicialmente existe só uma planta e a ela foi aplicado um sinal. A planta foi adaptada de uma maneira tal que o erro entre a saída e o sinal aplicado é nulo. Isto é o chamado servomecanismo.

Mas com a evolução tecnológica foi necessário aplicar mais e mais sinais, as vezes bem sofisticados -, e se, por exemplo, as plantas forem muito grandes, torna-se difícil fazer ensaios para conhecer o comportamento da planta.

Neste momento entra a seguinte idéia: esta variedade de sinais deve ser gerada por um sistema; então, por que não construir um sistema que produza os sinais que queremos e fazer a planta seguir o comportamento deste modelo?

Assim sendo, construímos um modelo, que pode ser testado como queremos, modificado, etc., e tentarmos simplesmente adaptar a planta e este modelo.

Um outro ponto deve ser mencionado aqui: Quais são as aplicações de um APM, como e onde o APM pode ser utilizado?

Vamos expor só alguns exemplos, mas isto não quer dizer que seja tudo; certamente existem muito mais aplicações, mas para

dar uma idéia geral, os nossos exemplos serão suficientes. Temos, por exemplo, um padrão - uma chapa pequena com uma forma muito irregular - e vamos construir um pequeno sistema, que tem um apontador que segue exatamente as formas desta chapa. Com a utilização de sistemas elétricos, pneumáticos, hidráulicos ou mecânicos vamos transmitir o movimento deste pequeno modelo à grande máquina que corta, p.e. com um maçarico uma chapa de ferro 20 vezes maior que a chapa-modelo. Um outro exemplo seria um veículo lunar. Como é certamente difícil mandar sinais para a lua e esperar a reação (retardo dos sinais devido à distância), será melhor construir um modelo, que neste caso pode ser até igual a planta, e operar o modelo como desejarmos. Este modelo manda todas as informações à planta - o veículo na lua -, e esta segue exatamente o comportamento do modelo - o veículo aqui na terra.

Com este exemplo chegamos ao ponto que justifica a utilização do APM nos casos onde a planta está fora do alcance, ou numa escala muito grande para fazer experiências. Neste caso pode-se, p.e., construir um modelo num computador, onde pode ser testado, e depois basta fazer a planta seguir este modelo.

Um último exemplo, bem desenvolvido, é o sistema de um servo-manipulador. Isto é um sistema que consiste de um par de "braços artificiais" que está situado numa sala de controle, e um outro par - semelhante - que está situado dentro, p.e., de um acelerador de protons. Isto significa que a planta está dentro de uma área altamente contaminada e muito perigosa para o homem. Neste caso queremos que a planta siga exatamente

os movimentos que fazemos na central (o que é necessário porque o equipamento dentro de um acelerador de protons é muito sofisticado e sensível).

Esperamos que estes exemplos possam dar uma idéia geral do APM e vamos agora tratar da teoria do APM.

Como já foi dito, queremos condições para a existência de uma solução para o APM. Mais precisamente, isto quer dizer que foram procuradas condições - necessárias e suficientes - para que o "erro" entre o modelo e a planta seja zero, com a utilização de todas as informações possíveis que pudermos obter do modelo (entradas, estados). E, quando possível, exprimir estas condições em termos de singularidades (polos e zeros).

Sabemos que o problema de adaptação de uma planta a um modelo (APM) tem sido estudado há 16 anos pelo menos [4]. Resultados preliminares, em termos de matriz de transferência, foram apresentados por Kavanagh [4]; outros resultados, utilizando métodos diferentes, foram encontrados por Parks [3] - utilizando o segundo método de Liapunov; por Tyler [1], que fez uma síntese do problema por controle ótimo; e Winsor & Roy [2], que utilizaram também controle ótimo para seu projeto de um "de-sensitized model-following control system" .

Mas a primeira formulação real, chamada "exact model matching", foi dada por Wolovich [6], que utilizou, para encontrar uma solução, um conjunto de "feedback invariants" e uma transformação de coordenadas (que é derivada da matriz de controlabilidade), dependendo ainda de existir ou não solução para um conjunto de equações de matrizes polinomiais.

Um método que utiliza essencialmente as mesmas idéias que Wolovich [6], foi apresentado por Wang & Desoer [7]; eles transformaram o problema para resolver um conjunto de equações lineares e algébricas.

Um método diferente foi apresentado por Moore & Silverman [8], que utilizaram um algoritmo estrutural para resolver o problema. Eles não necessitaram de uma transformação de coordenadas e a existência de uma solução foi testada sequencialmente.

Um método completamente diferente é o de Morse [5], que utilizou uma conceituação geométrica [9] para a formulação do problema e também para a condição de existir ou não uma solução.

Nesta tese também foi utilizada uma conceituação geométrica, mas a formulação é diferente, visando a aplicação de resultados de Bhattacharyya [13] [14] [15], Pearson [14] [15] [16] e Wonham [14] [16] [22]. E sobretudo, as condições encontradas no domínio geométrico - necessárias e suficientes - foram, quando possível, expressas em termos de singularidades (polos e zeros).

No capítulo 2) vamos apresentar - de uma maneira breve - as investigações de Wolovich [6] e Moore & Silverman [8], porque achamos que estes foram os primeiros passos significantes para o APM.

No capítulo 3) será explicado o método de Morse [5], que servirá como ligação à nossa formulação.

Finalmente, no capítulo 4), será explicado o nosso ponto de vista do problema. Este capítulo mostra a formulação do

problema, seguida das soluções para as três questões: "zerar" a matriz de transferência, "zerar" o erro resultante das condições iniciais e a estabilidade interna da planta. Também será apresentado um exemplo ilustrativo e encerramos o capítulo com algumas conclusões. No capítulo 5) vamos discutir as questões que ficam à ser resolvidas e a utilidade dos resultados obtidos.

1.1) NOTAÇÃO

\mathcal{X}, \mathcal{Y}	Espaços vetoriais reais
x, y	Elementos destes espaços
0	Espaço nulo, vetor nulo
$\dim(\mathcal{Y})$	Dimensão de um espaço vetorial real
A, B	Matrizes ou mapeamentos lineares (definido sobre os reais)
A', B'	Transpostas destas matrizes
$M: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$	Mapeamento do espaço \mathcal{R} para o espaço \mathcal{S}
$\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$	O espaço \mathcal{J} é um subespaço de \mathcal{R}
$M _{\mathcal{J}}$	Mapeamento restrito $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ (somente se $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ e $M: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$)
$\text{Im}(M)$	Imagem de M
$\text{Ker}M$	Kernel (ou espaço nulo) de M , as vezes também expresso por $\mathcal{N}(M)$

Se não mencionado diferentemente o sistema linear, fixo e dinâmico será expresso como segue:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

com os mapeamentos associados:

$$A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \quad \text{onde } \dim(\mathcal{X}) = n$$

$$B: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X} \quad \text{onde } \dim(\mathcal{U}) = m$$

$$C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \quad \text{onde } \dim(\mathcal{Y}) = p$$

O espaço controlável do par (A, B) , anotado por $\langle A/B \rangle$, é dado por:

$$\langle A/\beta \rangle = (\beta + A\beta + \dots + A^{n-1}\beta)$$

Λ

Λ ... conjunto de números.

Λ é simétrico se todos os elementos complexos de Λ aparecem em pares conjugados.

Λ é estável se todos os elementos tem parte real negativa.

$\sigma[A]$

Sigma ... espectro de A = conjunto simétrico de n raízes do polinômio característico da matriz A , as vezes expresso por $\sigma(A)$.

- Se U e V são invariantes em A e $U \subset V$, então $A|(V/U)$ indica o mapeamento induzido no espaço quociente V/U por A .

- Dois espaços são chamados independentes se a interseção (\cap) deles é zero.

- A soma de dois espaços $(+)$ é o espaço gerado pela união (U) das bases respectivas.

- A soma direita (\oplus) é a soma de dois espaços independentes.

$\text{Ker}C \subset \mathcal{X}$ O espaço nulo de C é um subespaço de \mathcal{X}

- Um subespaço $V \subset \mathcal{X}$ é chamado um subespaço invariante em (A,B) se V é $(A + BF)$ - invariante para algum $F : \{(A + BF)V \subset V \text{ para algum } F\}$;
p.e.: se a classe $\mathcal{F}(V) = \{F : (A + BF)V \subset V\}$ é não vazia.

$\mathcal{F}(V) \neq \emptyset$ se, e somente se, $AV \subset V + B[11]$.

$\mathcal{J}(A,B;\text{Ker}C)$ Subespaço invariante em (A,B) que é contido no espaço nulo de C

$\mathcal{L}(A,B;\text{Ker}C)$ Subespaço controlável de (A,B) que é contido

no $\text{Ker}C$

$\max. \mathcal{J}(A, B; \text{Ker}C) = \mathcal{U}^*$ e $\max. \mathcal{L}(A, B; \text{Ker}C) = \mathcal{R}^*$ são os elementos máximos nestas classes de subespaços, respectivamente.

\mathcal{R}^* pode também ser expresso por

$$\langle A + BF_0 \mid \mathcal{B} \cap \mathcal{U}^* \rangle.$$

- Se $\mathcal{V} \subset \mathcal{J}(A, B; \text{Ker}C)$, então $\mathcal{F}(A, B; \mathcal{V})$ exprime a classe dos mapeamentos $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

As demais notações serão introduzidas quando se fizer necessário.

Capítulo 2): TRATAMENTO CLÁSSICO DO PROBLEMA DE ADAPTAÇÃO DE
UMA PLANTA A UM MODELO.

2.1) INTRODUÇÃO

Como já foi dito no capítulo 1) sabemos que o APM tem sido estudado desde há muitos anos [1] - [8]. Seria demasiada a explicação e apresentação de todos os métodos já utilizados. Mas como muitas destas investigações - sobretudo as mais antigas - já foram mencionadas e utilizadas em outros trabalhos, achamos que seria bastante apresentar só dois métodos distintos para dar uma visão geral do APM.

2.2) MÉTODO DE WOLOVICH [6].

O problema

Seja um sistema linear, fixo e dinâmico descrito por:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (2.2.1a)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (2.2.1b)$$

onde $x(t)$ é o vetor dos estados, $y(t)$ o vetor da saída e $u(t)$ o vetor da entrada. A , B , C , D são matrizes reais com as dimensões $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(p \times n)$ e $(p \times m)$ respectivamente, onde B tem posto $m \leq n$.

Temos uma lei de controle

$$u(t) = F x(t) + G w(t) \quad (2.2.2)$$

onde $w(t)$ é a chamada "entrada externa" e F , G são matrizes constantes com as dimensões $(m \times n)$ e $(m \times m)$ respectivamente, com a restrição que G seja não-singular. Aplicando esta lei de controle em (2.2.1a/b) temos a descrição da malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A + BF) x(t) + BG w(t) \quad (2.2.3a)$$

$$y(t) = (C + DF) x(t) + DG w(t) \quad (2.2.3b)$$

Wolovich [6] formulou o APM como segue:

"Existe um par de realimentação (F, G) tal que a matriz de transferência da malha fechada

$$\underline{(C + DF)(sI - A - BF)^{-1}BG + DG}$$

é idêntica a matriz de transferência $T_m(s)$ de um modelo? "

(2.2.4)

0 caso escalar

Para o caso escalar foi utilizada uma transformação de coordenadas Q , derivada da matriz de controlabilidade do par (A,B) para transformar a matriz A em uma forma canônica companheira:

$$QAQ^{-1} = \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\hat{a}_0 & -\hat{a}_1 & -\hat{a}_2 & -\hat{a}_3 & \dots & -\hat{a}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

A forma canônica fica a mesma depois da aplicação da lei de controle e é um fator bem conhecido, que - sob a hipótese de que (A,B) é controlável - cada polo pode ser escolhido arbitrariamente. Sabendo que a função de transferência não muda depois uma transformação de coordenadas, podemos exprimir $T_{f,g}(s)$ por $(\hat{c} + d\hat{f})(sI - \hat{A} - \hat{b}\hat{f})^{-1}\hat{b}g + dg$, onde $\hat{b} = Qb$, $\hat{c} = cQ^{-1}$ e $\hat{f} = fQ^{-1}$.

Então vamos considerar a função de transferência, que é:

$$\begin{aligned} T_{f,g}(s) &= (c + df)(sI - A - bf)^{-1}bg + dg \\ &= (\hat{c} + d\hat{f})(sI - \hat{A} - \hat{b}\hat{f})^{-1}\hat{b}g + dg \\ &= (\hat{c}_1 + d\hat{a}_0) + \dots + (\hat{c}_n + d\hat{a}_{n-1}) s^{n-1} + d s^n \\ &= \frac{1/g \left[(\hat{a}_0 - \hat{f}_1) + \dots + (\hat{a}_{n-1} - \hat{f}_n) s^{n-1} + s^n \right]}{r(s)} \\ &= \frac{r(s)}{p_{f,g}(s)} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(onde \hat{c}_i são os termos no vetor \hat{c} e \hat{f}_i os no vetor \hat{f}),

e introduzindo

$$S'(s) = [1, s, \dots, s^{n-1}] \text{ e}$$

$$\hat{A}_n = [-\hat{a}_0, -\hat{a}_1, \dots, -\hat{a}_{n-1}]$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} T_{f,g}(s) &= r(s) [p_{f,g}(s)]^{-1} = \\ &= [ds^n + (\hat{c} - d\hat{A}_n)S(s)] [1/g(s^n) - 1/g(\hat{A}_n + fQ^{-1})S(s)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Vemos então que todos os polos podem ser escolhidos arbitrariamente - sob a hipótese que (A,B) é controlável. Mas, o numerador não pode ser influenciado e, em princípio, a ordem do sistema permanece a mesma. A exceção ocorre só se houver um cancelamento entre polos e zeros.

O caso multivariável

Vejamos agora o caso multivariável. Também aqui foi utilizada uma transformação de coordenadas Q , derivada da matriz de controlabilidade K (ver exemplo ou [6,p.389]) ou mais exatamente de uma matriz "lexicográfica" L :

$$L = [b_1, Ab_1, \dots, A^{\sigma_1-1}b_1; b_2, \dots; \dots; b_m, \dots, A^{\sigma_m-1}b_m] \quad (2.2.8)$$

que é formada das primeiras n colunas independentes de K , arranjadas convenientemente. Calculamos $d_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i$ para $k = 1, 2, \dots, m$ e aplicamos a transformação de coordenadas Q ao sistema. Então obtemos: $\hat{A} = [\hat{A}_{ij}]$ onde (2.2.9)

$$\hat{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ \hat{a}_{d_i, d_{i-1}+1}; \hat{a}_{d_i, d_{i-1}+2}; & \dots & \hat{a}_{d_i, d_{i-1}}; \hat{a}_{d_i, d_i} \end{bmatrix}$$

$$e \quad \hat{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & 0 \\ \hat{a}_{d_i, d_{j-1}+1}; & \dots & \hat{a}_{d_i, d_j} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

Ainda

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1; \hat{b}_{d_1, d_2}; & \dots & \hat{b}_{d_1, d_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 & ; \hat{b}_{d_2, d_3}; & \dots & \hat{b}_{d_2, d_m} \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

Aplicando a lei de controle, teremos:

$$T_{F,G}(s) = (\hat{C} + D\hat{F})(sI - \hat{A} - \hat{B}\hat{F})^{-1}\hat{B}G + DG \quad (2.2.12)$$

Introduzindo agora as definições:

$$s^{\hat{\sigma}} = \text{diag.} [s^{\hat{\sigma}_i}] \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2.13)$$

$$\hat{A}_m = \begin{bmatrix} d_1^a \text{ linha de } \hat{A} \\ \vdots \\ d_m^a \text{ linha de } \hat{A} \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

$$\hat{B}_m = \begin{bmatrix} d_1^a \text{ linha de } \hat{B} \\ \vdots \\ d_m^a \text{ linha de } \hat{B} \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

e ainda a definição de uma matriz $S(s)$:

pria. Daí: $P_{F,G}(s)$ é coluna própria.

Ainda notamos que os termos de menor grau em s podem ser fixados arbitrariamente por meio de F .

Como não podem ser definidos outros invariantes independentes, é claro que, os invariantes notados são suficientes para a caracterização da classe (F,G) e podemos concluir que esta classe é representada por:

i) $R(s)$, que é invariante;

ii) os inteiros $\tilde{\sigma}_i$, convenientemente postos em ordem; e,

iii) o fato que $P_{F,G}(s)$ é coluna própria. (2.2.19)

Obs.: $R(s)$ e $\tilde{\sigma}_i$ não são únicos, mas, uma vez fixada a transformação Q , eles serão específicos.

Solução do APM

Para resolver agora o APM, sabemos que qualquer matriz (polinomial) de transferência $T_m(s)$ pode ser fatorada:

$$T_m(s) = R_m(s) P_m^{-1}(s) \quad (2.2.20)$$

onde $R_m(s)$ e $P_m(s)$ são primos entre si, (o que é equivalente a dizer que o maior divisor comum à direita é I_m).

Podemos então escrever:

$$T_m(s) = N(s) [\Delta(s)I_m]^{-1}$$

onde $N(s)$ é uma matriz polinomial e $\Delta(s)$ o menor denominador comum a todos os termos de $T_m(s)$.

Sabemos que uma matriz unimodular é qualquer matriz polinomial cujo determinante é um escalar não-nulo (independente de s).

Então, fatorando qualquer matriz não-unimodular $G(s)$, que depois funcionará como maior divisor à direita de $N(s)$ e

$\Delta(s)I_m$, podemos dizer:

$$R_m(s) = N(s) G^{-1}(s) \quad (2.2.21a)$$

e

$$P_m(s) = \Delta_m(s)I_m G^{-1}(s) \quad (2.2.21b)$$

Depois destas definições segue o resultado de Wolovich

[6, p.390], que diz:

"Seja o sistema (2.2.1a/b), completamente controlável, e

B com posto completo, $m \leq n$,

e $T_m(s) = R_m(s) P_m^{-1}(s)$, uma matriz de transferência, onde

$R_m(s)$ e $P_m(s)$ são primos entre si.

Então existe um par (F,G) , com G não-singular, para

satisfazer:

$$\begin{aligned} \underline{T_{F,G}(s)} &= \underline{(C + DF)(sI - A - BF)^{-1}BG + DG} = \\ &= \underline{R(s) P_{F,G}^{-1}(s)} = \\ &= \underline{R_m(s) P_m^{-1}(s)} = \\ &= \underline{T_m(s)} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

se, e somente se,

para alguma matriz polinomial (não-singular), $H(s)$, as

condições seguintes serão satisfeitas:

i) $R_m(s)$ é um divisor à esquerda de $R(s)$ - p.e.

$$\underline{R(s) = R_m(s) H(s),}$$

ii) os δ_i (postos em ordem) de $P_m(s) H(s)$ são idênticos

aos de $P_{F,G}(s)$, e

iii) $P_m(s) H(s)$ é coluna própria.

Como a prova da suficiencia deste teorema é construtiva ,
vamos repeti-la por conveniencia:

Fatorizando um $H(s)$ apropriado (utilizando (2.2.22) e i)):

$$R(s)P_{F,G}^{-1}(s) = R_m(s)H(s)\left[P_m(s)H(s)\right]^{-1} \quad (2.2.23)$$

Donde, utilizando só o denominador, segue que:

$$P_m(s)H(s) = P_{F,G}(s) = G^{-1}\hat{B}_m^{-1}\left\{(s^{\zeta}) - (\hat{A}_m + \hat{B}_m F Q^{-1})S(s)\right\} \quad (2.2.24)$$

onde só G e F não são conhecidos.

De iii) segue que a matriz $G^{-1}\hat{B}_m^{-1} = E$ é não-singular.

Com a hipótese de que G é não-singular, encontramos

$$G = (E\hat{B}_m)^{-1}.$$

O F correspondente pode ser encontrado se primeiro

pré-multiplicarmos (2.2.24) com $E^{-1} = \hat{B}_m G$ e depois subtraírmos de ambos lados $\left\{\left[s^{\zeta}\right] - \hat{A}_m S(s)\right\}$.

Então,

$$\hat{B}_m G P_m(s)H(s) - \left\{\left[s^{\zeta}\right] - \hat{A}_m S(s)\right\} = -\hat{B}_m F Q^{-1}S(s) \quad (2.2.25)$$

donde $\hat{B}_m F$ (e ainda \hat{F} , e $F = \hat{F}Q$) pode ser facilmente determinado (este passo depende de ii) para obter a subtração completa dos termos s^{ζ} !).

A prova da necessidade tem uma passagem que é importante para se saber como encontrar a matriz $H(s)$ e por isto vamos apresentar esta prova.

Se (2.2.22) é satisfeita, então

$$\begin{aligned} R(s) &= R_m(s)P_m^{-1}(s)P_{F,G}(s) = \\ &= R_m(s)P_m^+(s)P_{F,G}(s)\left|P_m(s)\right|^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

onde $P_m^+(s)$ e $\left|P_m(s)\right|$ são a matriz adjunta e o determinante de $P_m(s)$ respectivamente.

Como $R_m(s)$ e $P_m(s)$ são primos entre si, segue que:

$$M_1(s)R_m(s) + M_2(s)P_m(s) = I_m \quad (2.2.27)$$

onde $M_1(s)$ e $M_2(s)$ são um par particular de matrizes polinomiais.

Agora multiplicando ambos os lados de (2.2.27) por

$P_m^+(s)P_{F,G}(s)$, chegamos a:

$$\begin{aligned} M_1(s)R_m(s)P_m^+(s)P_{F,G}(s) + M_2(s)P_m(s)P_m^+(s)P_{F,G}(s) &= \\ &= P_m^+(s)P_{F,G}(s) \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

De (2.2.26) vemos que $|P_m(s)|$ deve dividir $R(s)P_m^+(s)P_{F,G}(s)$ porque $R(s)$ é uma matriz polinomial.

Também, como $P_m(s)P_m^+(s) = |P_m(s)|I_m$ segue de (2.2.28) que $|P_m(s)|$ deve dividir $P_m^+(s)P_{F,G}(s)$.

Então, $P_m^{-1}(s)P_{F,G}(s)$ é uma matriz polinomial não-singular ($= H(s)$), donde:

$$P_{F,G}(s) = P_m(s)H(s) \quad (2.2.29)$$

e de (2.2.26) temos

$$R(s) = R_m(s)H(s) \quad (2.2.30)$$

Então (2.2.29) e (2.2.30) satisfazem as três condições do teorema, completando a prova.

Uma última observação: O teorema só pode ser utilizado se

- a) o sistema é transformado numa forma "canônica";
- b) $T_m(s)$ é fatorada em $R_m(s)P_m^{-1}(s)$ e estes são primos entre si; e
- c) um $H(s)$ apropriado é encontrado (que deve ser escolhido "estável", porque os polos da malha fechada do sistema são iguais aos zeros de $P_m(s)$ e $H(s)$ (ver(2.2.29)).

Para ilustrar a aplicação do método de Wolovich [6] vamos desenvolver um exemplo.

Exemplo

Sejam as matrizes A , B , C e D dadas:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e temos ainda

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{-s}{s+3} & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando a matriz de controlabilidade, com as colunas postas em ordem conveniente, encontramos $L = (b_1 \quad Ab_1; b_2)$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = 1$.

Calculando $d_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i$; $k = 1, 2, \dots, m$ obtemos $d_1 = 2$ e $d_2 = 3$.

Formando agora L^{-1} , e depois Q' , tal que

$Q' = (l_1' \quad Al_2' \quad l_2')$ onde $l_i = d_i^{\text{a}}$ linha de L^{-1} encontramos a matriz de transformação:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta transformação de coordenadas, podemos escrever:

$$\hat{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = QB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CQ^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e encontrar

$$s^{\sigma} = \text{diag.} [s^{\sigma_i}] = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{que é não-singular;}$$

e

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De (2.2.18): $T_{F,G}(s) = R(s)P_{F,G}(s)^{-1}$, onde

$$R(s) = \{ D\hat{B}_m^{-1} [s^{\sigma}] + (\hat{C} - D\hat{B}_m^{-1}\hat{A}_m)S(s) \} \text{ e}$$

$$P_{F,G}(s) = \{ G^{-1}\hat{B}_m^{-1} [(s^{\sigma}) - (\hat{A}_m + \hat{B}_m FQ^{-1})S(s)] \}$$

$R(s)$ pode ser facilmente calculado.

$$R(s) = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

Agora vamos fatorar $T_m(s) = R_m(s)P_m^{-1}(s)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da formula $R(s) = R_m(s)H(s) \dots$ condição i) do teorema,

encontramos a matriz não-singular $H(s)$:

$$H(s) = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ s^2+3s+2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para não modificar $T_m(s)$ é necessário também multiplicar $P_m(s)$ por $H(s)$.

$$P_m(s)H(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ s^2+3s+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+6s+9 & -s-3 \\ s^2+3s+2 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos ainda igualar $P_m(s)H(s)$ a $P_{F,G}(s)$:

Para satisfazer a condição iii) do teorema precisamos que $P_m(s)H(s)$ seja coluna própria. Tirando E desta matriz,

$$\text{encontramos } E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que é não-singular; então $P_m(s)H(s)$ é coluna própria; e sabendo que os coeficientes de $P_{F,G}(s)$ - como mostra a seguinte equação

$$P_m(s)H(s) = G^{-1} \hat{B}_m^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s^6 \end{bmatrix} - (\hat{A}_m + \hat{B}_m F Q^{-1}) S(s) \right\}$$

dependem só do produto $G^{-1} \hat{B}_m^{-1}$, podemos dizer:

$$E = G^{-1} \hat{B}_m^{-1}$$

$$\text{donde } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aqui se ve porque G tem a restrição de ser não-singular.

Falta então encontrar a matriz F :

Tomando (2.2.24) e seguindo os passos da prova do teorema, chegamos ao (2.2.25):

$$\hat{B}_m G P_m(s)H(s) - \left\{ \begin{bmatrix} s^6 \end{bmatrix} - \hat{A}_m S(s) \right\} = -\hat{B}_m F Q^{-1} S(s)$$

$$\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & 0 \\ -3s-7 & s+3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s^2+4 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix} = -\hat{B}_m F Q^{-1} S(s)$$

Observando $S(s) \dots$ (2.2.16), que tem os termos com graus mais altos ($\tilde{\delta}_i - 1$) em s , pode-se ver a importancia do fato que $P_{F,G}(s)$ é coluna própria (isto servirá para a eliminação dos termos com graus mais altos ($\tilde{\delta}_i$) em s em cada coluna!).

Continuando o cálculo chegamos a:

$$\begin{bmatrix} -3s+2 & 1 \\ 3s+9 & -3 \end{bmatrix} = \hat{B}_m F Q^{-1} S(s)$$

donde

$$\begin{bmatrix} -6s-7 & 4 \\ 3s+9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F} \\ \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\hat{F} pode ser encontrado por observação:

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -7 & -6 & 4 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

e daí

$$F = \begin{bmatrix} -13 & 4 & -11 \\ 12 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

Assim encontramos a lei de controle

$$u(t) = \begin{bmatrix} -13 & 4 & -11 \\ 12 & -3 & 12 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} w(t)$$

que adapta $T(s)$ a $T_m(s)$.

2.3) MÉTODO DE MOORE & SILVERMAN [8].

Definições e preliminares.

(Este capítulo é todo baseado nas referências [8],[25].)

Consideramos dois sistemas - lineares e fixos - descritos por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \mathcal{A} z(t) + \mathcal{B} v(t) \\ w(t) &= \mathcal{C} z(t) + \mathcal{D} v(t) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^s$, $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $v(t) \in \mathbb{R}^{\bar{r}}$ e $y(t)$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$.

O sistema (2.3.1) vai ser chamado (ABCD) e a matriz de transferência $H(ABCD)$. A notação para o sistema (2.3.2) será análoga.

A lei de controle para uma realimentação vai ser

$$u(t) = F x(t) + G v(t).$$

Então, a malha fechada será representada por

$$(A + BF, BG, C + DF, DG).$$

Se P é um operador associado com (ABCD) e Q é o operador correspondente de $(A + BF, BG, C + DF, DG)$, dizemos

$$P \xrightarrow{F, G} Q$$

O problema geral do APM com realimentação dos estados será determinar quando existe um par $\{F, G\}$ tal que

$$H(ABCD) \xrightarrow{F, G} H(\mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \mathcal{D}) \quad (2.3.3)$$

Sob algumas condições, que são necessárias para a existência de uma solução, podem ser calculados:

a) um inteiro q_a ($\leq \min(m,r)$), e (2.3.4a)

b) matrizes \bar{C}_a , \bar{D}_a , \bar{E}_a , \bar{D}_a com as dimensões (2.3.4b)

$q_a \times s$, $q_a \times r$, $q_a \times n$, $q_a \times \bar{r}$, respectivamente.

E o problema (2.3.3) terá como solução o par (F,G)

se, e somente se,

$$H(ABC_a\bar{D}_a) \xrightarrow{F,G} H(A\bar{E}_a\bar{D}_a) \quad (2.3.4)$$

onde o posto $\bar{D}_a = q_a$.

Deixemos de lado como a) e b) podem ser encontrados e falemos sobre uma solução para (2.3.4):

Seja $q_a = r$, então a classe de pares de matrizes que satisfaçam (2.3.4) pode ser completamente caracterizada por um conjunto de equações lineares.

Se consideramos

$$(ABC_a\bar{D}_a) \quad (2.3.5)$$

e

$$(A\bar{E}_a\bar{D}_a) \quad (2.3.6)$$

sabemos que \bar{D}_a é não-singular e podemos aplicar a seguinte lei de controle:

$$u(t) = \bar{D}_a^{-1} \left[-\bar{C}_a x(t) + \bar{u}(t) \right] \quad (2.3.7)$$

Aplicando (2.3.7) em (2.3.5) teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - B\bar{D}_a^{-1}\bar{C}_a)x(t) + B\bar{D}_a^{-1}\bar{u}(t) \\ \bar{y}_a(t) &= \bar{u}(t) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Seja $A_0 = (A - B\bar{D}_a^{-1}\bar{C}_a)$ e $B_0 = B\bar{D}_a^{-1}$.

Então, $\{F,G\}$ é uma solução de (2.3.4) se, e somente se, o par $\{F,G\}$ é tal que

$$H(A_0 + B_0\bar{F}, B_0\bar{G}, \bar{F}, \bar{D}_a G) = H(A\bar{E}_a\bar{D}_a) \quad (2.3.9)$$

onde $\bar{F} = \bar{C}_a + \bar{D}_a F$.

O problema de encontrar uma solução para (2.3.9) pode ser convertido num problema de encontrar uma solução para um conjunto de equações lineares algébricas.

Lema 2.3.1: "Definimos como δ_c , δ_o , e $\bar{\delta}_c$, $\bar{\delta}_o$ os índices de controlabilidade e observabilidade de $(ABC \bar{D}_a)$ e $(A \bar{B} \bar{C} \bar{D}_a)$, respectivamente; e seja

$$\gamma = \max.(\delta_c + \delta_o - 1, \bar{\delta}_c + \bar{\delta}_o - 1).$$

Então,

$$H(A_o + B_o \bar{F}, BG, \bar{F}, \bar{D}_a G) = H(A \bar{B} \bar{C} \bar{D}_a)$$

se, e somente se,

$$\bar{D}_a G = \bar{D}_a \quad (2.3.10)$$

e

$$\bar{F}(A_o + B_o \bar{F})^i B G = \bar{C}_a A^i B; \quad i = 0, 1, \dots, \gamma \quad (2.3.11)$$

Daí o teorema 2.3.1 [8]:

"Seja $q_a = r$ e sejam γ , A_o , B_o como explicado.

Então $H(ABC \bar{D}_a) \xrightarrow{F, G} H(A \bar{B} \bar{C} \bar{D}_a)$ se, e somente se,

$$G = \bar{D}_a^{-1} \bar{D}_a e$$

$$F = \bar{D}_a^{-1} (-\bar{C}_a + \bar{F}) \quad \text{onde}$$

\bar{F} é uma solução das seguintes equações lineares algébricas:

$$\bar{F} [Q_0, Q_1, \dots, Q_\gamma] = [\bar{C}_a B, \bar{C}_a A B, \dots, \bar{C}_a A^\gamma B] \quad (2.3.12)$$

onde

$$Q_0 = B_o \bar{D}_a$$

$$Q_i = A_o Q_{i-1} + B_o \bar{C}_a A^{i-1} B; \quad 0 \leq i \leq \gamma. \quad (2.3.13)$$

Notemos que Q_i é calculado em sequência e com isto a não-existência de F poderá ser controlada depois de cada sequência.

Para o caso $r = \bar{r}$; $q_a < r$; posto $\bar{D}_a = q_a$, Moore & Silver-

man [8] não apresentam uma solução.

Algoritmo estrutural

Este algoritmo é definido em [25] e todo o método neste capítulo é baseado nele.

Seja $q_0 = \text{rank } D$ e seja \bar{D}_0 a sub-matriz, formada das primeiras q_0 linhas independentes de D . Então existe uma matriz não-singular ($m \times m$) S_0 , tal que

$$S_0 D = \begin{bmatrix} D_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando S_0 como uma transformação da saída, obtemos uma nova apresentação do sistema inicial:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y_0(t) = C_0 x(t) + D_0 u(t)$$

$$\text{onde } y_0(t) = S_0 y(t), \quad C_0 = S_0 C \quad \text{e} \quad D_0 = S_0 D.$$

Observando D_0 , será conveniente partirmos também y_0 e C_0 na mesma maneira.

Temos então

$$y_0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} \bar{C}_0 \\ \tilde{C}_0 \end{bmatrix} \quad D_0 = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que dará $\bar{y}_0 = \bar{C}_0 x + \bar{D}_0 u$

$$\tilde{y}_0 = \tilde{C}_0 x.$$

A sequência restante na apresentação do sistema pode ser definida por indução.

Admitimos que o sistema tem a forma

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y_k(t) = C_k x(t) + D_k u(t)$$

onde existem as partições seguintes:

$$y_k(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_k(t) \\ \tilde{y}_k(t) \end{bmatrix} \quad C_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k \end{bmatrix} \quad D_k = \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

e onde \bar{D}_k tem q_k linhas e posto q_k

\bar{y}_k e \bar{C}_k tem q_k linhas

\tilde{y}_k e \tilde{C}_k tem $m-q_k$ linhas

Se $q_k < m$, podemos definir um operador diferencial

$$M_k = \begin{bmatrix} I_{q_k} & 0 \\ 0 & I_{m-q_k}(d/dt) \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

Então, aplicando M_k a $\{y_k(t) = C_k x(t) + D_k u(t)\}$ obtemos

$$M_k y_k(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_k(t) \\ (d/dt) \tilde{y}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k x(t) \\ \tilde{C}_k (d/dt)x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_k u(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{x}(t) \quad (2.3.16)$$

ou, finalmente

$$M_k y_k(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_k(t) \\ (d/dt) \tilde{y}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \tilde{C}_k A \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \tilde{C}_k B \end{bmatrix} u(t) \quad (2.3.17)$$

Seja agora q_{k+1} o rank da matriz que multiplica $u(t)$.

Se $q_{k+1} < m$, então - lembrando o primeiro passo S_0 - existe uma matriz não-singular ($m \times m$) S_{k+1} , tal que

$$D_{k+1} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \tilde{C}_k B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

Esta nova sequência será então definida como:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y_{k+1}(t) = C_{k+1} x(t) + D_{k+1} u(t)$$

$$\text{onde } y_{k+1}(t) = S_{k+1} M_k y_k(t) \quad (2.3.19)$$

$$e \quad C_{k+1} = S_{k+1} \begin{bmatrix} C_k \\ C_k^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{k+1} \\ C_{k+1} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots q_{k+1} \text{ linhas} \\ \dots m - q_{k+1} \text{ linhas} \end{array}$$

Vimos então que a saída $y(t)$ foi transformada com uma sequência $S_0 ; M_0 ; S_1 ; M_1 ; \dots ; S_k ; M_k ; S_{k+1} ;$ ou, expresso diferentemente

$$y_k(t) = N_k y(t)$$

$$\text{onde } N_k = \prod_{i=0}^k S_{k-i} M_{k-i-1} ; K = 0, 1, \dots (M_{-1} = I)$$

Se agora substituímos d/dt por s obtemos

$$\hat{N}_k(s) = \prod_{i=0}^k S_{k-i} \hat{M}_{k-i-1}(s) \quad (2.3.20)$$

E finalmente podemos dizer que

$$H(A + BF, BG, C_k + D_k F, D_k G) = \hat{N}_k(s) H(A + BF, BG, C + DF, DG) \quad (2.3.21)$$

que é uma equação importante para o APM.

Pode-se ver que $\{F, G\}$ é uma solução para (2.3.3)

se, e somente se,

$$H(ABC_k D_k) \xrightarrow{F, G} \hat{N}_k(s) H(\mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \mathcal{D}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

Seja agora a o primeiro inteiro tal que $q_a = \text{rank } D_a = m$

$$(2.3.22)$$

Então o par

$$F = -\bar{D}_a^+ \bar{C}_a \quad G = \begin{bmatrix} \bar{D}_a^+ \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}$$

onde \bar{D}_a^+ é o inverso à direita de \bar{D}_a e K é o

espaço nulo de \bar{D}_a , (2.3.22a)

tem um interesse especial.

Teorema 2.3.2: "Seja $A_0 = A - B\bar{D}_a^+ \bar{C}_a$ e $B_0 = B\bar{D}_a^+$.

Então temos para $x(t_0) = x_0$ em (2.3.1) e para todo $u(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}_o \underline{x}(t) + \underline{B}_o \bar{y}_a(t) & \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_o \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}_i \underline{x}(t) & i &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.3.22b)$$

e daí, se $P(s) = H(\underline{A}_o, \underline{B}_o, \tilde{C}_a, 0)$, segue que

$$\underline{H(ABC_a 0)} = P(s) \underline{H(ABC_a \bar{D}_a)} \quad (2.3.23)$$

Exemplo para o algoritmo estrutural:

Seja

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{dado.}$$

Aplicando S_o para obter $D_o = \begin{bmatrix} D_o \\ 0 \end{bmatrix}$ - neste caso $S_o = I$ - obtemos

$$y_o(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Como $q_k = 1 < m$, podemos definir um operador diferencial associado

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d/dt \end{bmatrix}$$

Aplicando, obtemos

$$\begin{aligned} M_o y_o(t) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_o \\ \tilde{C}_o A \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} \bar{D}_o \\ \tilde{C}_o B \end{bmatrix} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Como agora $q_{k+1} = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{D}_o \\ \tilde{C}_o B \end{bmatrix} = 2 = m$ é claro que o

algoritmo estrutural termina aqui.

Deste modo encontramos o inteiro $a = 1$ tal que

$$q_a = \text{rank } D_a = 2 = m.$$

APM por realimentação dos estados.

Aplicando este algoritmo estrutural em (2.3.1) e (2.3.2) admitimos que depois de $k+1$ passos chegamos aos sistemas:

$$(ABC_k D_k) \quad (2.3.24)$$

e

$$(A\beta \mathcal{L}_k \mathcal{D}_k) \quad (2.3.25)$$

partindo como em (2.3.14).

Já podemos dizer, observando (2.3.14) e lema 2.3.1, que se $\tilde{\mathcal{D}}_k \neq 0$, não haverá uma solução.

Admitimos agora que $\tilde{\mathcal{D}}_k = 0$.

O passo $k+2$ consiste na aplicação do algoritmo a (2.3.24) para chegar a $(ABC_{k+1} D_{k+1})$ e depois aplicar o operador diferencial associado $w_{k+1}(t) = S_{k+1} M_k w_k(t)$ ao (2.3.25). Com isto definimos um novo conjunto de equações:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A} z(t) + \beta v(t)$$

$$w_{k+1}(t) = \mathcal{L}_{k+1} z(t) + \mathcal{D}_{k+1} v(t),$$

onde

$$\mathcal{L}_{k+1} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{L}}_k \\ \tilde{\mathcal{L}}_k \mathcal{A} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{k+1} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{D}}_k \\ \tilde{\mathcal{L}}_k \beta \end{bmatrix}$$

Então

$$H(A\beta \mathcal{L}_{k+1} \mathcal{D}_{k+1}) = \hat{N}_{k+1}(s) H(A\beta \mathcal{L} \mathcal{D}).$$

Seja a e q_a definido como em (2.3.22).

Se agora $q_a = m$, segue que $\bar{D}_a = D_a$; e é claro, observando (2.3.21), que $\{F, G\}$ é uma solução para (2.3.3)

se, e somente se, $\tilde{\mathcal{D}}_i = 0$ para $i = 0, 1, \dots, a-1$ e que

$$H(ABC_a \bar{D}_a) \xrightarrow{F, G} H(A\beta \bar{\mathcal{L}}_a \bar{D}_a).$$

Donde o teorema 2.3.3:

"Seja $\delta = a-1$ se $q_a = m$ e
 $\delta = n+s$ se $q_a < m$."

Então $H(ABCD) \xrightarrow{F,G} H(A\beta\psi\mathcal{D})$ se, e somente se,

$$\underline{\tilde{D}_i = 0, 0 \leq i \leq \delta} \quad (2.3.26)$$

e

$$\underline{H(ABC\bar{a}\bar{D}) \xrightarrow{F,G} H(A\beta\bar{\psi}\bar{D})} \text{ ."} \quad (2.3.27)$$

(Nota: $q_a = r$ se, e somente se, $(ABCD)$ é inversível à esquerda [25]. Então, inversibilidade à esquerda implica que (2.3.27) pode ser resolvido como mencionado no início - ver teorema 2.3.1).

Para provar o teorema, os autores de [8] precisam ainda de dois lemas, que vamos repetir aqui por conveniência e porque estes lemas vão também ser necessários para o desenvolvimento no sub-capítulo "APM por compensação dinâmica".

Lema 2.3.2: "Seja um sistema $(A^*B^*C^*D^*)$:

$$\dot{z}^*(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} z^*(t) + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} u^*(t)$$

$$y^*(t) = \begin{bmatrix} C & \psi \end{bmatrix} z^*(t) + \begin{bmatrix} D & \mathcal{D} \end{bmatrix} u^*(t) \quad (2.3.28)$$

e seja γ o primeiro inteiro tal que $q_{\gamma^*} = D_{\gamma^*} =$

= posto D_{s+n}^* , onde D_i^* vem da i -ésima iteração do algoritmo estrutural aplicado a (2.3.28).

Então, dizemos que

$$\underline{q_a = q_{\gamma^*}, \text{ se, e somente se,}} \quad (2.3.29)$$

$$\underline{\text{posto } H(ABCD) = \text{posto } [H(ABCD) \vdots H(A\beta\psi\mathcal{D})]} \text{ ."} \quad (2.3.30)$$

Lema 2.3.3: "Seja δ definido como no teorema 2.3.3.

Se $\tilde{D}_i = 0$ para $i = 0, 1, \dots, \delta$ então $q_a = q_{\gamma^*}$."

A prova do teorema, que pode-se encontrar em [8,p.494], não vamos repetir, porque a necessidade está clara por causa de desenvolvimento para chegar ao teorema, e a prova da suficiência não atribui nada de indispensável para encontrar uma solução.

APM por compensação dinâmica.

Podemos introduzir um compensador dinâmico (n integradores) no sistema (2.3.1) e escrever:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= (C \ 0) \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + (D \ 0) \begin{bmatrix} u(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Se este sistema é representado por $(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D})$, podemos dizer que $(ABCD)$ pode ser adaptado dinamicamente a $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$ (2.3.32) se, e somente se,

existe um inteiro \tilde{n} e (F,G) tal que

$$H(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}) \xrightarrow{F,G} H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) \quad (2.3.33)$$

Então, consideremos primeiro o critério da existência de um precompensador para resolver (2.3.32).

Daí o teorema 2.3.4: "Existe uma matriz (racional) $K(s)$ tal que

$$\underline{H(ABCD) K(s) = H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) \text{ se, e somente se,}} \quad (2.3.34)$$

$$\underline{q_q = q\gamma^* ."} \quad (2.3.35)$$

Isto é equivalente à condição (2.3.30).

Precisamos de mais um teorema.

Teorema 2.3.5: "Seja w uma função no espaço de $(ABCD)$

em $[t_0, \infty)$ para $x(t_0) = 0$, e seja u a saída do sistema:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A - B\bar{D}_a^+ \bar{C}_a) z(t) + B\bar{D}_a^+ \bar{N}_a y(t) \\ u(t) &= -\bar{D}_a^+ \bar{C}_a z(t) + \bar{D}_a^+ \bar{N}_a y(t) \\ \text{com } z(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

então y é a resposta de $(ABCD)$ a u em $[t_0, \infty)$. (2.3.37)

Seja ainda $H_1(s) = H(ABCD)$, e seja $H_1^+(s) = Q(s)\bar{N}_a(s)$ a matriz de transferência do sistema (2.3.36). Esta notação (= pseudo-inverso) pode ser justificada com o corolário:

"Seja $H_2(s)$ contido no espaço das colunas de $H_1(s)$. Então $H_1(s)H_1^+(s)H_2(s) = H_2(s)$."

Segue agora o resultado principal de [8], é o teorema 2.3.6:

"Seja δ definido como no teorema 2.3.3. Então $(ABCD)$ pode ser adaptada dinamicamente a $(A\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$

se, e somente se,

$$\tilde{\mathcal{D}}_i = 0 ; 0 \leq i \leq l. \quad (2.3.38)$$

(Lembrar que isto é igual a (2.3.26), que é uma condição para resolver APM por realimentação).

Prova: A necessidade de (2.3.38) deve estar clara, porque o algoritmo estrutural é invariante sob um acréscimo como em (2.3.31) e

$$N_k y(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_k & 0 \\ \tilde{C}_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \quad (2.3.39)$$

A prova da suficiência, que é importante para calcular o pre-compensador, será: $\tilde{\mathcal{D}}_i = 0$ (2.3.38) implica que $q_a = q_\gamma^*$ (lema 2.3.3) e, como consequência, que existe $K(s)$ (teorema 2.3.4). Então $H(A\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$ está no espaço coluna de $H(ABCD)$.

E, segue do corolário que

$$H(ABCD)H_1^+(s)H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) = H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) . \quad (2.3.40a)$$

Agora, como $H_1^+(s) = Q(s)\overline{N}_a(s)$, onde $Q(s)$ é dinâmica, é claro que

$$H_1^+(s)H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) = Q(s)\overline{N}_a(s)H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) = Q(s)H(\mathcal{A}\mathcal{B}\overline{\mathcal{C}}_a\overline{\mathcal{D}}_a) \quad (2.3.40b)$$

é um precompensador racional que adapta $(ABCD)$ a $(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$.

Seja (A_1, B_1, C_1, D_1) uma realização para o precompensador $H_1^+(s)H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D})$ e digamos que k é a ordem de A_1 .

Então $\tilde{n} = k$ e com

$$F = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.41)$$

obtemos

$$H(\hat{A} + \hat{B}F, \hat{B}G, \hat{C} + \hat{D}F, \hat{D}G) = H(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}) \quad (2.3.42)$$

APM (só a matriz de transferência é conhecida).

Os autores de [8] mostram ainda que todos estes resultados podem ser aplicados, se só $\mathcal{K}(s)$ - a matriz de transferência - é conhecida:

Seja $\phi(s) = s^p + a_1s^{p-1} + \dots + a_p$ o último denominador comum de todos os termos de $\mathcal{K}(s)$.

Então para $k = 0, 1, \dots$ podemos calcular $\hat{N}_k(s)\mathcal{K}(s)$ e expandir:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k(s) &= \hat{N}_k(s)\mathcal{K}(s) = \\ &= [1/\phi(s)] \{ (\mathcal{K}_k^0 s^p + \mathcal{K}_k^1 s^{p-1} + \dots + \mathcal{K}_k^p) \} \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, obtemos - se

$(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}_k\mathcal{D}_k)$ é alguma representação de $\mathcal{K}_k(s)$, -

$$\mathcal{K}_k^0 = \mathcal{D}_k$$

$$\mathcal{K}_k^i = \mathcal{L}_k \mathcal{A}^{i-1} \beta + a_1 \mathcal{L}_k \mathcal{A}^{i-2} \beta + \dots + a_i \mathcal{D}_k ; i > 0 \quad (2.3.44)$$

Então, partindo $\mathcal{K}_k(s)$ e \mathcal{K}_k^i como \mathcal{D}_k em (2.3.14), obtemos

$$\mathcal{K}_k(s) = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{K}}_k(s) \\ \tilde{\mathcal{K}}_k(s) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_k^i = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{K}}_k^i \\ \tilde{\mathcal{K}}_k^i \end{bmatrix} ; k = 0, 1, \dots$$

ou, escrito diferentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k^0 &= \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{K}}_k^0 \\ \tilde{\mathcal{K}}_k^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{D}}_k \\ \tilde{\mathcal{D}}_k \end{bmatrix} \\ \mathcal{K}_k^i &= \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{K}}_k^i \\ \tilde{\mathcal{K}}_k^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{L}}_k \\ \tilde{\mathcal{L}}_k \end{bmatrix} \mathcal{A}^{i-1} \beta + a_1 \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{L}}_k \\ \tilde{\mathcal{L}}_k \end{bmatrix} \mathcal{A}^{i-2} \beta + \dots + a_i \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{D}}_k \\ \tilde{\mathcal{D}}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.45b)$$

Donde segue que

$$\tilde{\mathcal{K}}_k^0 = \tilde{\mathcal{D}}_k$$

e o passo correspondente do algoritmo pode ser aplicado diretamente a $\mathcal{K}(s)$.

Observação: Das formulas 2.3.45a/b podem ser obtidos os chamados "markov moments" para resolver as equações (2.3.12) e (2.3.13).

Se $q_a = m$, segue que $\delta = a-1$ e podemos utilizar os teoremas 2.3.3 e 2.3.6. (lembrar a definição de a ...2.3.22a).

Se $q_a < m$, δ não é conhecido (em geral) porque é uma função de n , que é a ordem de uma realização mínima.

Vamos então substituir a condição (2.3.26): " $\mathcal{D}_i = 0$ (para $0 \leq i \leq n+s$)" pelo lema 2.3.4:

"Seja $q_a < m$; seja n a ordem de uma realização mínima de $\mathcal{K}(s)$; e seja $P(s)$ a matriz de transferência de $(A_o B_o \tilde{C}_o 0)$, que foi descrita em (2.3.22c).

Então:

$$\tilde{\mathcal{K}}_i^o = 0 \quad \text{para } 0 \leq i \leq n+s$$

se, e somente se,

$$\tilde{\mathcal{K}}_i^o = 0 \quad \text{para } 0 \leq i \leq a \quad (2.3.46)$$

e

$$\tilde{\mathcal{K}}_a(s) = P(s) \bar{\mathcal{K}}_a(s) \quad (2.3.47)$$

Na prova deste lema, que pode-se encontrar em [8], os autores apresentam uma decomposição de $\mathcal{K}(s)$:

$$\mathcal{K}(s) = \hat{N}_a^{-1}(s) \begin{bmatrix} I_{q_a} \\ P(s) \end{bmatrix} \bar{\mathcal{K}}(s)$$

onde $\bar{\mathcal{K}}(s)$ é uma matriz racional arbitrária com q_a linhas, que caracteriza a classe de todas matrizes de transferência que podem ser obtidas de $(ABCD)$ por compensação dinâmica.

Para o caso escalar $\hat{N}_a(s) = 1/s^a$, esta classe é determinada por

$$\mathcal{K}(s) = \{1/s^a\} \bar{\mathcal{K}}(s) \quad \text{onde } \bar{\mathcal{K}}(s) \text{ é um vetor (linha, racional).}$$

Então, a limitação de $\mathcal{K}(s)$ é que o denominador de cada termo (não-nulo) deve ter um grau $\geq (a + \text{grau do numerador})$.

Também é claro que o compensador será estável se, e somente se, todos os zeros do numerador de $(ABCD)$, que não estão contidos no semiplano à esquerda, forem exatamente os mesmos que em $\mathcal{K}(s)$.

Sobre a estabilidade nada de realmente significativo foi apresentado.

Exemplos.

Sejam dadas as matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A pergunta é:

Existe um par (F, G) tal que

$$H(ABCD) \xrightarrow{F, G} \mathcal{K}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+4} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} ?$$

Como aqui só $\mathcal{K}(s)$ é conhecido, é necessária a expansão

$$\text{de } \mathcal{K}(s) = \{1/\phi(s)\} \{ \mathcal{K}_k^0 s^p + \mathcal{K}_k^1 s^{p-1} + \dots + \mathcal{K}_k^p \}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

Utilizando o algoritmo estrutural e aplicando o primeiro passo obtemos com $S_0 = I$ as matrizes

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e para o outro sistema vemos que a condição (2.3.46) : $\tilde{\mathcal{K}}_0^0 = 0$ já é satisfeita.

Tomando agora a sequência número 0 e multiplicando com o operador diferencial associado

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d/dt \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} M_o y_o(t) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_o \\ \tilde{C}_o A \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \bar{D}_o \\ \tilde{C}_o B \end{bmatrix} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Então o algoritmo estrutural termina aqui, porque $D_a = \bar{D}_a$ com $q_a = m = 2$ ($a = 1$).

Como agora aplicar M_o a $\mathcal{K}_o(s)$?

Sabemos que

$$\begin{aligned} N(t) &= \prod_{i=0}^k S_{k-i} M_{k-i-1} \dots \quad (2.3.19) \\ &= S_{2-1} M_{2-1-1} S_o M_{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & d/dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & d/dt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e se substituirmos d/dt por s obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(s) &= \hat{N}_1(s) \mathcal{K}(s) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{pmatrix} s^2+3s+2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+6s+8} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

donde tiramos

$$\mathcal{K}_1^o(s) = \mathcal{D}_1 = \bar{\mathcal{D}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $q_a = 2 = m = r$.

Então podemos resolver o problema utilizando o teorema 2.3.1:

$$G = \bar{D}_a^{-1} \mathcal{D}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$F = \bar{D}_a^{-1} (-\bar{C}_a + \bar{F}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{Bmatrix} \right] = \\
&= \begin{bmatrix} 1+f_{21} & f_{22} \\ -2+f_{11}-f_{21} & -1+f_{12}-f_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde $\bar{F} [Q_0] = [\bar{\mathcal{L}}_a \beta]$

ou, substituindo Q_0 por $B_0 \bar{\mathcal{D}}_a = B \bar{D}_a^{-1} \bar{\mathcal{D}}_a$ obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{F} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} &= [\bar{\mathcal{L}}_a \beta] \\
\begin{bmatrix} 0 & f_{12} \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix} &= [\bar{\mathcal{L}}_a \beta]
\end{aligned}$$

O cálculo de \bar{F} só será possível se conhecermos uma realização mínima de $\mathcal{K}(AB\bar{\mathcal{L}}_a\bar{\mathcal{D}}_a)$. Mas lembrando (2.3.44) e a partição de \mathcal{K}_k^i em (2.3.45) sabemos que $\bar{\mathcal{L}}_a \beta$ é equivalente ao:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}}_a \beta &= \mathcal{K}_k^i - a_1 \bar{\mathcal{D}}_k \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Então temos \bar{f}_{12} e \bar{f}_{22} fixos, e liber ade para escolher \bar{f}_{11} e \bar{f}_{12} .

Dizemos então

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Introduzindo na formula para F , encontramos

$$F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

que adapta $H(s)$ a $\mathcal{K}(s)$.

Para mostrar a compensação dinâmica, vamos utilizar o mesmo sistema, mas escolhamos um $\mathcal{K}(s)$ diferente:

$$\mathcal{K}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix}$$

Seguindo os mesmos passos que noutro exemplo chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(s) &= \hat{N}_1(s) \mathcal{K}(s) = \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

donde tiramos $\mathcal{K}_1^0(s) = \mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Agora sabemos que existe uma solução (F, G) se, e somente se,

$$\bar{D}_a G = \mathcal{D}_a \dots (2.3.10) \text{ e}$$

$$\bar{F}(A_0 + B_0 \bar{F})^i B G = \bar{\varphi}_a \mathcal{A}^i \beta \dots (2.3.11) .$$

Lembrando, do primeiro exemplo, que $a = 1$ e que $\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

segue, para satisfazer (2.3.10) que $G = 0$; mas isto implica que o lado esquerdo de (2.3.11) que será nulo será diferente do lado direito, que - observando $\mathcal{K}_1(s)$ - é certamente não nulo. Então não existe uma solução por realimentação.

Mas temos a possibilidade de resolver o caso com um précompensador dinâmico, porque a condição necessária e suficiente para a existência de um précompensador dinâmico é $\mathcal{D}_i = 0 \dots$ (2.3.38).

E isto é satisfeito sabendo que $\mathcal{K}_1^0(s) = \mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

donde $\tilde{\mathcal{D}}_1 = 0$.

Então calculamos a matriz de transferência deste précompensador:

$$\begin{aligned}
 P(s) &= H_1^+(s) H(ABCD) \dots \quad (2.3.4ob) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & s+1 \\ \frac{s+2}{s+3} & \vdots & \frac{-(s+1)^2}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{-2(s+1)}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{3s+6}{(s+3)(s+4)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Então, lembrando (2.3.4oa), sabemos que este $P(s)$ é o pré-compensador dinâmico que leva $H(s)$ a $\mathcal{K}(s)$.

Capítulo 3): TRATAMENTO GEOMÉTRICO DESTES PROBLEMAS.

3.1) INTRODUÇÃO.

Como já dissemos no capítulo 1), Morse [5] foi o primeiro que utilizou o conceito geométrico [9] para a formulação do APM e também para a condição de existência ou não de uma solução.

Morse [5] investiga o problema de encontrar um controle para um sistema linear e multivariável, tal que a matriz da resposta ao impulso do sistema da malha fechada coincida com a de um modelo pré-especificado.

A notação utilizada é a apresentada no capítulo 1.1), e supõe-se que já exista familiaridade com os conceitos e propriedades dos subespaços invariáveis em (A,B) e os subespaços de controlabilidade de (A,B) [9] até [12].

3.2) MÉTODO DE MORSE [5] .

Formulação.

Temos uma planta - linear e fixa - descrita por:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (3.2.1)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (3.2.2)$$

e queremos encontrar um controle tal que a matriz da resposta ao impulso seja a mesma de um modelo pré-especificado, que é descrito por:

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t) \quad (3.2.3)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \quad (3.2.4)$$

Os espaços para a planta são como indicados no capítulo 1.2) e para o modelo simplesmente com o índice m . A única diferença é que $y_m \in \mathcal{Y}$, o espaço de saída da planta. Ambos, a planta e o modelo, são completamente controláveis e observáveis e

$$B_m \neq 0 . \quad (3.2.5)$$

Para o controle será utilizado um conjunto de n_d elementos dinâmicos (integradores):

$$\dot{x}_d(t) = D u_d(t) \quad (3.2.6)$$

onde $D: \mathcal{U}_d \rightarrow \mathcal{X}_d$ e $\dim(\mathcal{X}_d) = n_d$.

Agora podemos apresentar (3.2.1) até (3.2.4) e (3.2.6) com um único sistema; escrevemos então:

$$\mathcal{X}_e \equiv \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_d \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_e \equiv \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}_d$$

para os espaços do estado e entrada do sistema expandido (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.6), respectivamente, e

$$\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_e \oplus \mathcal{X}_m = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_d \oplus \mathcal{X}_m$$

para o espaço do sistema composto (3.2.1) até (3.2.4) e (3.2.6).

Os mapeamentos serão os seguintes:

$$\begin{array}{lll}
 \bar{A}_e: \bar{x} \rightarrow \dot{\bar{x}} & \bar{A}_e | \mathcal{X} = A & \bar{A}_e | (\mathcal{X}_m \oplus \mathcal{X}_d) = 0 \\
 \bar{B}_e: u_e \rightarrow \dot{\bar{x}} & \bar{B}_e | u = B & \bar{B}_e | u_d = D \\
 \bar{C}_e: \bar{x} \rightarrow y & \bar{C}_e | \mathcal{X} = C & \bar{C}_e | (\mathcal{X}_m \oplus \mathcal{X}_d) = 0 \\
 \\
 \bar{A}_m: \bar{x} \rightarrow \dot{\bar{x}} & \bar{A}_m | \mathcal{X}_m = A_m & \bar{A}_m | \mathcal{X}_e = 0 \\
 \bar{B}_m: u_m \rightarrow \dot{\bar{x}} & \bar{B}_m | u_m = B_m & \\
 \bar{C}_m: \bar{x} \rightarrow y & \bar{C}_m | \mathcal{X}_m = C_m & \bar{C}_m | \mathcal{X}_e = 0
 \end{array}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}
 \bar{x}' &= \begin{bmatrix} x' \\ x_d' \\ x_m' \end{bmatrix} \\
 u_e' &= \begin{bmatrix} u' \\ u_d' \end{bmatrix} \\
 \bar{A} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_e & 0 \\ 0 & \bar{A}_m \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

podemos apresentar o conjunto da planta, do modelo e do compensador dinâmico como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B}_e u_e(t) + \bar{B}_m u_m(t) \\
 y(t) &= \bar{C}_e \bar{x}(t) \\
 y_m(t) &= \bar{C}_m \bar{x}(t)
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

A lei de controle será:

$$u_e(t) = F x_e(t) + G v(t) \quad \text{onde} \quad x_e = \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

Os mapeamentos correspondentes são $F: \mathcal{X}_e \rightarrow u_e$ e $G: u_m \rightarrow u_e$. $v(t)$ é uma nova entrada.

Se definirmos os mapeamentos expandidos, obteremos

$$\bar{F}: \bar{x} \rightarrow u_e \quad \bar{F} | \mathcal{X}_e = F \quad \bar{F} | \mathcal{X}_m = 0 \tag{3.2.9}$$

(Nota: Observe que os estados do modelo não são utilizados!)

Utilizando (3.2.8) na forma

$$u_e(t) = \bar{F} \bar{x}(t) + G v(t)$$

obtemos a representação do sistema da malha fechada, que será:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= (\bar{A} + \bar{B}_e \bar{F}) \bar{x}(t) + \bar{B}_e G v(t) + \bar{B}_m u_m(t) \\ y(t) &= \bar{C}_e \bar{x}(t) \\ y_m(t) &= \bar{C}_m \bar{x}(t)\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

Agora, aplicando a fórmula para a matriz da resposta ao impulso: $G(t) = C e^{At} B$ podemos escrever:

$$\bar{G}_m(t) = \bar{C}_m \exp.(\bar{A} + \bar{B}_e \bar{F})t (\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \quad \text{para o modelo} \quad (3.2.11)$$

$$\bar{G}_e(t) = \bar{C}_e \exp.(\bar{A} + \bar{B}_e \bar{F})t (\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \quad \text{para a planta} \\ \text{compensada.} \quad (3.2.12)$$

Então, devemos escolher \bar{F} e G tais que

$$(\bar{C}_e - \bar{C}_m) \exp.(\bar{A} + \bar{B}_e \bar{F})t (\bar{B}_e G + \bar{B}_m) = 0 ; t \geq 0 \quad (3.2.13)$$

Para exprimir isto em termos algébricos, utilizamos o fato que

$$\begin{aligned}C e^{At} B = 0 \quad (\text{para qualquer } t) \text{ e equivalente a} \\ C(sI - A)^{-1} B = 0 \quad (\text{para qualquer } s) . \quad [17, 2-86]; \text{ e que} \\ H(s) = \left[1/\Delta(s) \right] C \left[a_0 I s^{n-1} + (A + a_1 I) s^{n-2} + \dots \right. \\ \left. \dots + (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I) \right] B \quad [17].\end{aligned}$$

Se definimos

$$\mathcal{Y} = \langle \bar{A} + \bar{B}_e \bar{F} | \text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \rangle \quad (3.2.14)$$

notamos que (3.2.13) se verifica se, e somente se

$$\mathcal{Y} \subset \text{Ker} \bar{C} \quad , \text{ com } \bar{C} = \bar{C}_e - \bar{C}_m . \quad (3.2.15)$$

O problema então é encontrarmos pares (F, G) que satisfaçam (3.2.14) e (3.2.15) onde a única restrição para $\bar{F}: \bar{x} \rightarrow u_e$ será

$$\text{Ker} \bar{F} \supset \mathcal{X}_m \quad , \quad (3.2.16)$$

o que significa que não realimentaremos os estados do modelo.

Observando o mapeamento

$$\bar{B}: (u_e \oplus u_m) \rightarrow \bar{x} \quad \bar{B}|u_e = \bar{B}_e \quad \bar{B}|u_m = \bar{B}_m$$

é claro que \mathcal{Y} é um subespaço de controlabilidade de (\bar{A}, \bar{B}) .

Para satisfazer (3.2.14) e (3.2.16) temos um lema:

Lema 3.2.1: "Seja $\mathcal{Y} \in \mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B}; \ker \bar{C})$ dado. Então existem mapeamentos $\bar{F}: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{U}_e$ e $G: \mathcal{U}_m \rightarrow \mathcal{U}_e$ tais que (3.2.14) e (3.2.16) sejam satisfeitas, se, e somente se,

$$\underline{\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B} + \mathcal{D} + \mathcal{Y}} \quad (3.2.17)$$

e

$$\underline{\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m = 0.}" \quad (3.2.18)$$

A prova do lema, que se pode encontrar em [5, p.348] é dividida em três partes: A primeira parte mostra que

$$\mathcal{Y} = \langle \bar{A} + \bar{B}_e \bar{F} \mid \text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \rangle \text{ implica em } \mathcal{B}_m \subset \mathcal{B} + \mathcal{D} + \mathcal{Y}.$$

A segunda parte, partindo de (3.2.14) e $\bar{\mathcal{X}}_m \subset \ker \bar{F}$, mostra primeiro que $(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m)$ é invariante em A_m e depois que $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m \subset \text{Ker } C_m$. Utilizando estes dois pontos juntamente com a hipótese que o modelo é completamente observável, pode-se concluir que $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m = 0$.

A terceira parte, que prova que se $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B} + \mathcal{D} + \mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m = 0$ são verdadeiras então existe um

$\mathcal{Y} \in \mathcal{C}(\bar{A}, \bar{B}; \text{Ker } \bar{C})$, é um pouco mais complexa, mas consiste,

em princípio, do seguinte: Mostrar que $\text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \subset \mathcal{Y}$,

depois mostrar que $\mathcal{Y} = \langle \bar{A} + \bar{B} F_0 \mid \text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \rangle$ onde

$F_0 \in \mathcal{F}(\bar{A}, \bar{B}; \mathcal{Y})$, e finalmente com uma decomposição do mapeamento

\bar{F} mostrar que $\mathcal{Y} = \langle \bar{A} + \bar{B}_e \bar{F} \mid \text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \rangle$ que -

obviamente - satisfaz o lema 3.2.1.

Este lema mostra que o problema de encontrar um par (\bar{F}, G)

é equivalente ao de encontrar um subespaço \mathcal{Y} que satisfaça

o lema 3.2.1 .

Então, o APM será o seguinte:

"Sejam $\Sigma = (C, A, B)$ e $\Sigma_m = (C_m, A_m, B_m)$ dados. Encontre condições para a existência de um inteiro n_d e um sub-espaço $\mathcal{Y} \in \mathcal{L}(\bar{A}, \bar{B}; \text{Ker}\bar{C})$ tais que

$$\underline{\beta}_m \subset \beta + \mathcal{D} + \mathcal{Y} \quad (3.2.19)$$

e

$$\underline{\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m = 0} \text{ ."} \quad (3.2.20)$$

Um par (\mathcal{Y}, n_d) que satisfaça isto, é a chamada solução do APM. A solução (\mathcal{Y}^*, n_d^*) é mínima, se cada solução (\mathcal{Y}, n_d) tem a propriedade $n_d \geq n_d^*$.

Solução do APM.

Sejam dados $\Sigma = (C, A, B)$ e $\Sigma_m = (C_m, A_m, B_m)$ com os mapeamentos, como segue:

$$\begin{array}{lll} \hat{A} = (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) \rightarrow (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) & \hat{A}|_{\mathcal{X}} = A & \hat{A}|_{\mathcal{X}_m} = A_m \\ \hat{B} = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}_m) \rightarrow (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) & \hat{B}|_{\mathcal{U}} = B & \hat{B}|_{\mathcal{U}_m} = B_m \\ \hat{C} = (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) \rightarrow \mathcal{Y} & \hat{C}|_{\mathcal{X}} = C & \hat{C}|_{\mathcal{X}_m} = -C_m \end{array}$$

Façamos $\mathcal{R} = \max \mathcal{L}(\hat{A}, \hat{B}; \text{Ker}\hat{C})$.

Teorema 3.2.1: "Existe uma solução do APM se, e somente se,

$$\underline{\beta}_m \subset \beta + \mathcal{R} \quad (3.2.21)$$

Se (3.2.21) é verdadeiro, então existe uma solução (\mathcal{Y}, n_d) que satisfaz

$$\underline{n_d = \dim(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m)} \text{ ,} \quad (3.2.22)$$

onde n_d indica o máximo número dos integradores para a construção de uma solução."

Teorema 3.2.2: "Se a matriz de transferência $C(sI - A)^{-1}B$ do sistema (C,A,B) é inversível à esquerda (o que é equivalente a dizer que (C,A,B) é mônico) e (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução do APM que satisfaz (3.2.22), então esta é a solução mínima." (3.2.23)

Para o que segue, seja $Q: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ a projeção sobre $(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m)$ segundo \mathcal{X}_d . (3.2.24)

Por sua importância vamos repetir aqui a prova [5,p.349] do teorema 3.2.1: Se (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução do APM, então sabemos da formulação do problema que $\mathcal{Y} \in \mathcal{L}(\bar{A}, \bar{B}; \text{Ker}\bar{C})$.

Como $Q(\text{Ker}\bar{C}) = \text{Ker}\hat{C}$ segue, com a utilização do lema [5,A3], que

$$Q\mathcal{Y} \in \mathcal{L}(\hat{A}, \hat{B}; \text{Ker}\hat{C}) \quad (3.2.25)$$

donde

$$Q\mathcal{Y} \subset \mathcal{R} = \max.\mathcal{L}(\hat{A}, \hat{B}; \text{Ker}\hat{C}) \quad (3.2.26)$$

Isto, e (3.2.19) indicam que

$$\mathcal{B}_m = Q\mathcal{B}_m \subset Q\mathcal{B} + Q\mathcal{D} + Q\mathcal{Y} \subset \mathcal{B} + \mathcal{R}, \text{ que satisfaz (3.2.21).}$$

Admitamos agora que (3.2.21) é verdadeiro. Queremos uma solução que satisfaça (3.2.22):

$$\text{Seja } \tilde{\mathcal{R}} \text{ qualquer subespaço tal que } \mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m. \quad (3.2.27)$$

Definamos $n_d = \dim(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m)$ e seja \mathcal{X}_d qualquer espaço vetorial com $\dim(\mathcal{X}_d) = n_d$.

$$\text{Seja } H: (\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) \rightarrow \mathcal{X}_d \text{ um isomorfismo} \quad (3.2.28)$$

e definamos

$$\mathcal{Y} = (\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + \tilde{\mathcal{R}}; \text{ onde } \tilde{I} = I_{\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m} \quad (3.2.29)$$

Destas definições segue que

$$Q\mathcal{Y} = Q(\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + Q\tilde{\mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned}
&= Q\tilde{I}(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + QH(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + Q\tilde{\mathcal{R}} \\
&= \mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m + \tilde{\mathcal{R}} \\
&= \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Então, novamente utilizando [5,A3] , obtemos

$$\mathcal{Y} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}; \ker \overline{\mathcal{C}}) .$$

De (3.2.21), utilizando (3.2.30), segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B} + \mathcal{R} &= \mathcal{B} + Q\mathcal{Y} \\
&= \mathcal{B} + \{I - (I - Q)\}\mathcal{Y} , \text{ onde } I = I_{\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_d \oplus \mathcal{X}_m} \\
&\subset \mathcal{B} + \mathcal{Y} + \mathcal{D}
\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Para completar a prova basta mostrar que \mathcal{Y} satisfaz (3.2.20): Então, como $H: (\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) \rightarrow \mathcal{X}_d$ é um isomorfismo, podemos dizer que

$$(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) \cap [(\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m)] = 0 \tag{3.2.32}$$

Utilizando (3.2.29), (3.2.32), (3.2.27) e o fato que

$\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_m = 0$, segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m &= [(\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + \tilde{\mathcal{R}}] \cap \mathcal{X}_m \\
&= [(\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + \tilde{\mathcal{R}}] \cap (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) \cap \mathcal{X}_m \\
&= \{(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m) \cap [(\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + \tilde{\mathcal{R}}]\} \cap \mathcal{X}_m \\
&= \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m \cap \tilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{X}_m \\
&= \tilde{\mathcal{R}} \cap \mathcal{X}_m \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Nota: Vimos que - se o APM pode ser resolvido - sempre existe uma solução (\mathcal{Y}, n_d) que satisfaz $Q\mathcal{Y} = \mathcal{R}$ e $n_d = \dim(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m)$. Uma tal solução vamos então chamar: regular.

Sem repetir a prova, vamos mencionar aqui o que foi utilizado pelo autor [5] para provar o teorema 3.2.2:

Lema 3.2.2: "Se a condição do teorema 3.2.1 é verdadeira,

então,

$$\underline{\mathcal{X} \cap \mathcal{R} \in \mathcal{J}(A, B; \text{Ker}C).} \quad [5, \text{lema 2.1}] \quad (3.2.34)$$

Prova: Só observando a definição de \mathcal{R} e do mapeamento restrito $\hat{C}|_{\mathcal{X} = C}$ foi mostrado que $\mathcal{X} \cap \mathcal{R} \subset \text{Ker}C$.

E depois foi mostrado que $(\mathcal{X} \cap \mathcal{R})$ é invariante em (A, B) e com isto o lema está satisfeito.

Lema 3.2.3: "Se (\mathcal{Y}, n_d) é a solução de APM, então

$$\underline{\mathcal{R} = \mathcal{J} + Q\mathcal{Y} \text{ , onde } \mathcal{J} = \max.\mathcal{L}(A, B; \text{Ker}C) \text{ .}"} \quad [5, \text{lema 2.2}] \quad (3.2.3)$$

Prova: Para provar que $Q\mathcal{Y} + \mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ basta sabermos que \mathcal{J} e $Q\mathcal{Y}$ pertencem a mesma classe, que tem como elemento máximo o \mathcal{R} . Para provar $\mathcal{R} \subset Q\mathcal{Y} + \mathcal{J}$ o autor provou que $\mathcal{B} \cap \mathcal{R} = \mathcal{B} \cap \mathcal{J}$ e que $(\mathcal{B} + \mathcal{B}_m) \cap \mathcal{R} = (\mathcal{B} + \mathcal{B}_m) \cap (Q\mathcal{Y} + \mathcal{J})$. Estes resultados intermediários são depois utilizados para escrever $\mathcal{J} + Q\mathcal{Y} = \langle \hat{A} + \hat{B}F \mid (\mathcal{B} + \mathcal{B}_m) \cap (Q\mathcal{Y} + \mathcal{J}) \rangle$, donde se conclui que $\mathcal{J} + Q\mathcal{Y} = \mathcal{R}$.

O autor depois, para desenvolver a prova do teorema 3.2.2 [5, p.350], utilizou os dois lemas mencionados e o fato que se (C, A, B) é inversível à esquerda, então $\mathcal{J} = 0$ [11, teor.5].

Estrutura do sistema.

Esta parte tem dois objetivos: descrever a estrutura interna, e saber até que ponto os autovalores podem ser ajustados.

Começamos com uma solução (\mathcal{Y}, n_d) dada. Do lema 3.2.1, sabemos que existem mapeamentos $\bar{F}_0: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{U}_e$ e $G: \mathcal{U}_m \rightarrow \mathcal{U}_e$ tais que $\mathcal{X}_m \subset \text{Ker}\bar{F}_0$ e

$$\mathcal{Y} = \langle \bar{A} + \bar{B}_e \bar{F}_0 \mid \text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \rangle \quad (3.2.36)$$

Seja agora $\bar{F} \in \mathcal{F}(\bar{A}, \bar{B}_e; \mathcal{S})$, onde \mathcal{F} indica a classe de \bar{F} que satisfaz

$$\mathcal{X}_m \subset \text{Ker} \bar{F}. \quad (3.2.37)$$

É claro que $\bar{F}_0 \in \mathcal{F}$, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Portanto, se $\bar{F} \in \mathcal{F}$ é arbitrário e

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \langle \bar{A} + \bar{B}_e \bar{F} \mid \text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m) \rangle \quad (3.2.38)$$

então pode-se verificar que $(\tilde{\mathcal{Y}}, n_d)$ é uma solução do APM.

Assim o sistema $\Sigma_e(\bar{F}) \equiv (\bar{C}_e, \bar{A}_e + \bar{B}_e \bar{F}, \bar{B}_e G)$ segue o modelo Σ_m para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$.

Para estudar as propriedades estruturais de $\Sigma_e(\bar{F})$ escrevamos $P: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ para a projeção sobre \mathcal{X}_e segundo \mathcal{X}_m e definamos

$$\mathcal{E} = P\tilde{\mathcal{Y}} \quad (3.2.39)$$

Utilizando a propriedade

$$P(\bar{A} + \bar{B}_e \bar{F}) = (\bar{A}_e + \bar{B}_e \bar{F}) = (\bar{A} + \bar{B}_e \bar{F})P, \quad \bar{F} \in \mathcal{F} \quad (3.2.40)$$

podemos mostrar que

$$(\bar{A}_e + \bar{B}_e \bar{F})\mathcal{E} \subset \mathcal{E}; \quad \bar{F} \in \mathcal{F} \quad (3.2.41)$$

$$\mathcal{E} \supset \langle \bar{A}_e + \bar{B}_e \bar{F} \mid \text{Im}(\bar{B}_e G) \rangle; \quad \bar{F} \in \mathcal{F} \quad (3.2.42)$$

$$\mathcal{E} = \langle \bar{A}_e + \bar{B}_e \bar{F}_0 \mid \text{Im}(\bar{B}_e G) \rangle. \quad (3.2.43)$$

Então, \mathcal{E} é o espaço controlável de $\Sigma_e(\bar{F}_0)$ e inclui o espaço controlável de $\Sigma_e(\bar{F})$ para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$.

Consideremos agora o subespaço

$$\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e. \quad (3.2.44)$$

Com o lema seguinte podemos mostrar que \mathcal{E}_0 é um subespaço dos estados não observáveis de $\Sigma_e(\bar{F})$.

Lema 3.2.4: "Dizemos que

$$\underline{\mathcal{E}_0} \subset \underline{\mathcal{E}} \cap \text{Ker } \bar{C}_e \quad (3.2.45)$$

e que

$$\underline{(\overline{A}_e + \overline{B}_e \overline{F}) \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_0 ; \overline{F} \in \mathcal{F} .} \tag{3.2.46}$$

Prova: É claro que $\mathcal{E}_0 = P\mathcal{E}_0 \subset P\mathcal{Y} = \mathcal{E}$.

Ainda, $\overline{C}_e \mathcal{E}_0 = \overline{C}_e (\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e) = \overline{C} (\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e) = 0$. Então segue que (3.2.45) é verdadeiro.

Agora, seja $\overline{F} \in \mathcal{F}$ dado, e utilizamos (3.2.40) para escrever $(\overline{A}_e + \overline{B}_e \overline{F}) (\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e) = P(\overline{A} + \overline{B}_e \overline{F}) (\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e) \subset P(\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e) = \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e$.

Então, (3.2.46) é verdadeiro.

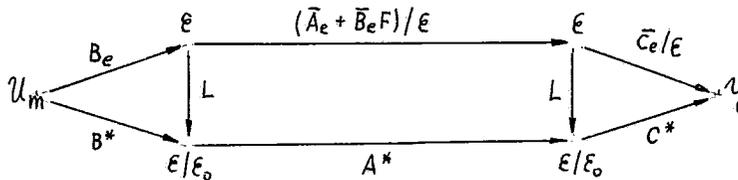
Isto nos permite agora reduzir $\Sigma_e(\overline{F})$ e obter um sistema menor: $\Sigma^*(\overline{F})$ que tem as mesmas propriedades de entrada e saída que $\Sigma_e(\overline{F})$.

O espaço reduzido será $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$. Seja $\overline{F} \in \mathcal{F}$ dado e escrevamos A^* para o mapeamento induzido em $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ por $(\overline{A}_e + \overline{B}_e \overline{F})/\mathcal{E}$.

Seja $L: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ a projeção canônica; escrevamos o mapeamento $C^*: \mathcal{E}/\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{Y}$ para a solução única $C^*L = \overline{C}_e/\mathcal{E}$.

Escrevamos $B_e: \mathcal{U}_m \rightarrow \mathcal{E}$; $B_e|_{\mathcal{U}_m} = \overline{B}_e G$ e definamos $B^* = LB_e$.

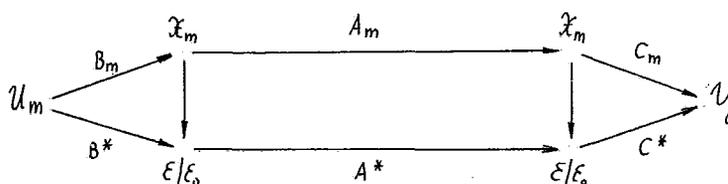
Visualizando tudo isto, obtemos o seguinte diagrama:



É claro que $\Sigma^*(\overline{F}) \equiv (C^*, A^*, B^*)$ tem as mesmas propriedades de entrada e saída que $\Sigma_e(\overline{F})$.

Precisamos agora da relação entre $\Sigma^*(\overline{F})$ e o modelo Σ_m .

Lema 3.2.5: "Existe um isomorfismo $T: \mathcal{X}_m \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ tal que o seguinte diagrama comuta:



Prova: Utilizamos o fato que

$$(I - P)\mathcal{Y} = \langle A_m / \beta_m \rangle = \mathcal{X}_m \quad (3.2.47)$$

para escrever

$$\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}_m = \mathcal{Y} + (I - P)\mathcal{Y} = \mathcal{Y} + P\mathcal{Y} = \mathcal{Y} + \mathcal{E} \quad (3.2.48)$$

Para construir T , seja $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_m}\}$ uma base para \mathcal{X}_m .

Observando (3.2.48), sabemos que existem vetores

$$e_i \in \mathcal{E} \quad \text{e} \quad s_i \in \mathcal{Y} \quad \text{tais que} \quad x_i = s_i - e_i ; i \in \{1, 2, \dots, n_m\}.$$

Definamos T tal que

$$T x_i = L e_i ; i \in \{1, 2, \dots, n_m\} \quad (3.2.49)$$

Para provar que T tem as propriedades desejadas o autor [5]

mostra primeiro que

$$T(I - P)s = LPs ; s \in \mathcal{Y} \quad (3.2.50)$$

Seja $s \in \mathcal{Y}$ dado. Como $(I - P)s \in \mathcal{X}_m$, então existem vetores $\hat{s} \in \mathcal{Y}$ e $e \in \mathcal{E}$ tais que $(I - P)s = \hat{s} - e$ e $T(I - P)s = Le$; donde $Ps - e = s - \hat{s}$; então, $(Ps - e) \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_e = \mathcal{E}_0$.

É claro que $LPs = Le$ e (3.2.50) é verdadeiro.

Pode-se agora, com todas estas definições, provar que T é um isomorfismo e que o diagrama comuta [5, p.351].

O lema 3.2.5 mostra que $\Sigma^*(\bar{F})$ é uma cópia isomórfica de Σ_m , e, em particular, que o espectro de A^* é igual ao espectro de A_m . E isto é verdadeiro para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$.

Chegamos agora ao ponto principal: a distribuição dos autovalores do sistema.

Para isto, escrevemos $\mathcal{E}_c \equiv \max.\mathcal{L}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \hat{\mathcal{E}}_0)$ e $A_{\bar{F}} \equiv \bar{A}_e + \bar{B}_e \bar{F}$.

Lembremos que, se APM tem solução,

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{R} \in \mathcal{T}(A, B; \text{Ker}C) ; \text{ (ver lema 3.2.2).}$$

Como $\mathcal{R} = \max.\mathcal{L}(\hat{A}, \hat{B}; \text{Ker}\hat{C})$ é único segue que o espectro fixo de $\mathcal{X} \cap \mathcal{R}$ - chamado $\Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R})$ - também é único.

Segue então o resultado principal de [5]:

Teorema 3.2.3 [5, teor.3.1] : "Seja (\mathcal{Y}, n_d) uma solução (fixa) do APM e sejam \mathcal{E} , \mathcal{E}_0 , \mathcal{E}_c , \mathcal{F} e $A_{\bar{F}}$ definidos como antes.

Então, para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \sigma [A_{\bar{F}} | \mathcal{X}_e] &= \sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{X}_e / \mathcal{E})] \cup \sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{E} / \mathcal{E}_0)] \\ &\quad \cup \sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{E}_0 / \mathcal{E}_c)] \cup \sigma [A_{\bar{F}} | \mathcal{E}_c] . \end{aligned} \tag{3.2.51}$$

Se Λ_1 e Λ_2 são conjuntos arbitrários de números complexos com $\dim(\mathcal{X}_e / \mathcal{E})$ e $\dim(\mathcal{E}_c)$, respectivamente, então existe

$\bar{F} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{X}_e / \mathcal{E})] = \Lambda_1 \tag{3.2.52}$$

e

$$\sigma [A_{\bar{F}} | \mathcal{E}_c] = \Lambda_2 . \tag{3.2.53}$$

Os conjuntos $\sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{E} / \mathcal{E}_0)]$ e $\sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{E}_0 / \mathcal{E}_c)]$ são fixos para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$ e satisfazem

$$\sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{E} / \mathcal{E}_0)] = \sigma [A_m] ; \bar{F} \in \mathcal{F} \tag{3.2.54}$$

e

$$\sigma [A_{\bar{F}} | (\mathcal{E}_0 / \mathcal{E}_c)] \supset \Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R}) ; \bar{F} \in \mathcal{F} \tag{3.2.55}$$

Se (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução regular, então (3.2.55) é verdadeira com igualdade."

O teorema quer dizer que - para uma solução fixa (\mathcal{Y}, n_d) - o espectro da planta compensada $(A_{\bar{F}} | \mathcal{X}_e)$ pode ser escrito como a união disjunta de quatro conjuntos simétricos de números

complexos.

Dois destes conjuntos podem ser fixados livremente com um $\bar{F} \in \mathcal{F}$; e dois são fixos para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$.

Um dos últimos dois é o mesmo que o espectro do modelo; e o outro - $\sigma[A_{\bar{F}} | (\mathcal{E}_o / \mathcal{E}_c)]$ - tem sempre $\Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R})$ como subconjunto ou, se (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução regular - que sempre existe se APM tem solução - , se torna igual a este espectro fixo.

Há ainda um corolário: "Se o APM tem solução então será possível construir um sistema estável ("stable model following system") - $\sigma[A_{\bar{F}} | \mathcal{X}_e] \subset \mathbb{C}^-$ (o semiplano à esquerda do plano complexo) - se, e somente se,

$$\underline{\sigma[A_m]} \cap \Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R}) \quad (3.2.56)$$

é um conjunto estável."

Observação: Como no final do capítulo mostramos um contra-exemplo para este corolário deve haver um erro de impressão em [5] e (3.2.56) deveria ser

$$\underline{\sigma[A_m]} \cup \Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R})$$

como se prova facilmente.

Nota: É possível caracterizar ainda mais o conjunto

$\Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R})$:

Escrevamos $\mathcal{V} = \max.\mathcal{J}(A, B; \text{Ker}C)$. Se APM tem solução, então segue do lema 3.2.2 que $\mathcal{R} \cap \mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ e do lema 3.2.3, que $\mathcal{J} \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{X}$. Mas como $[(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}) / \mathcal{J}] \subset [\mathcal{V} / \mathcal{J}]$, segue que

$$\Gamma(A, B; \mathcal{R} \cap \mathcal{X}) \subset \Gamma(A, B; \mathcal{V}) .$$

Os elementos de $\Gamma(A, B; \mathcal{V})$ - chamados os zeros da transmissão - são únicos em relação a (C, A, B) [12].

Lema 3.2.6: "Se (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução do APM, então $\mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y} \in \mathcal{J}(A, B; \text{Ker}C)$

e

$$\sigma[A_{\bar{F}} | (\mathcal{E}_o / \mathcal{E}_c)] = \Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}) ; \bar{F} \in \mathcal{F}. \quad (3.2.57)$$

Nota: Se (C, A, B) é mônico, então já sabemos que $\mathcal{J} = 0$ [11].

Neste caso, utilizando o lema 3.2.3, temos $Q\mathcal{Y} \cap \mathcal{X} = \mathcal{R} \cap \mathcal{X}$.

Isto e (3.2.57) implicam que (3.2.55) é verdadeiro com igualdade.

Prova do lema 3.2.6: Escrevamos $P_x: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ para a projeção sobre \mathcal{X} segundo $(\mathcal{X}_m \oplus \mathcal{X}_d)$. Se (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução, então $P_x[(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_d) \cap \mathcal{Y}] = \mathcal{X} \cap P_x\mathcal{Y} = \mathcal{X} \cap P_xQ\mathcal{Y} = P_x(\mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}) = \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}$.

Como $\mathcal{X}_e = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_d$ e $\mathcal{E}_o = \mathcal{X}_e \cap \mathcal{Y}$ segue que $P_x\mathcal{E}_o = \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}$.

Se $\tilde{P}_x: \mathcal{X}_e \rightarrow \mathcal{X}_e$ é a projeção sobre \mathcal{X} segundo \mathcal{X}_d , então

$$\tilde{P}_x\mathcal{E}_o = P_x\mathcal{E}_o = \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}. \quad (3.2.58)$$

Definamos os mapeamentos $A_e: \mathcal{X}_e \rightarrow \mathcal{X}_e$ $A_e = \bar{A}_e|_{\mathcal{X}_e}$
 $B_e: \mathcal{U}_e \rightarrow \mathcal{X}_e$ $B_e = \bar{B}_e|_{\mathcal{U}_e}$.

Observando que $\mathcal{X}_e \cap \text{Ker}\bar{C}_e = \text{Ker}C + \mathcal{X}_d$, utilizamos (3.2.44) e o lema 3.2.4 para escrever

$$\mathcal{E}_o \in \mathcal{J}(A_e, B_e; \text{Ker}C + \mathcal{X}_d). \quad (3.2.59)$$

Segue, de (3.2.58) e de um lema que diz: "Seja o subespaço

$\mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_o)$ dado. Então $Q\mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{X})$ e o espectro

$\Gamma(\tilde{A}, \tilde{B}; \mathcal{V}) = \Gamma(A, B; Q\mathcal{V})$. [5, A4] ", que, aplicando \tilde{P}_x ao

(3.2.59),

$$\mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y} \in \mathcal{J}(A, B; \text{Ker}C)$$

e que

$$\Gamma(A_e, B_e; \mathcal{E}_o) = \Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}). \quad (3.2.60)$$

É claro que

$$\Gamma(A_e, B_e; \xi_0) = \Gamma(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \xi_0) = \sigma[A_{\bar{F}} | (\xi_0 / \xi_c) \quad \text{para } \bar{F} \in \mathcal{F}.$$

Então (3.2.57) é verdadeiro.

A prova do teorema 3.2.3 se divide em quatro partes. Primeiro vamos provar a decomposição (3.2.51): Seja (\mathcal{Y}, n_d) uma solução fixa e seja $\bar{F} \in \mathcal{F}$ arbitrário. Sabemos de (3.2.40), (3.2.41) e (3.2.46) que \mathcal{X}_e , ξ e ξ_0 são invariantes sob $(A_{\bar{F}})$, respectivamente. Como $\xi_c \subset \xi_0 \subset \xi \subset \mathcal{X}_e$, segue que (3.2.51) é verdadeiro.

Segundo, vamos provar as condições (3.2.52) e (3.2.53):

Sejam Λ_1 e Λ_2 conjuntos que satisfaçam as hipóteses do teorema 3.2.3. Para construir $\bar{F} \in \mathcal{F}$ tal que (3.2.52) e (3.2.53) sejam verdadeiros, procedamos como segue:

Utilizando outra vez o lema A1 do apêndice de [5], podemos escolher um $F_1 \in \mathcal{F}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \xi_0)$ tal que

$$\sigma(A_{F_1} | \xi_c) = \Lambda_2. \quad (3.2.61)$$

Como $\xi_0 \subset \mathcal{Y}$, podemos utilizar o lema A2 do apêndice de [5] e dizer que existe um $F_2 \in \mathcal{F}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \mathcal{Y})$ tal que

$$F_2 | \xi_0 = F_1 | \xi_0. \quad (3.2.62)$$

Mas como $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_m = 0$, podemos escolher F_2 tal que

$$F_2 | \mathcal{X}_m = 0 \quad (3.2.63)$$

$F_2 \in \mathcal{F}$ e com (3.2.41) podemos concluir que $F_2 \in \mathcal{F}(A_e, B_e; \xi)$.

Como \mathcal{X}_e é o espaço controlável de (\bar{A}_e, \bar{B}_e) , é claro que

$$\mathcal{X}_e = \xi + \max.\mathcal{L}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \mathcal{X}_e).$$

Então, novamente utilizando o lema A2 do apêndice de [5],

sabemos que existe um $F_3 \in \mathcal{F}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \mathcal{X}_e)$ tal que

$$F_3 | \xi = F_2 | \xi \quad (3.2.64)$$

e

$$\sigma[A_{\mathbb{F}_3} | (\mathcal{X}_e/\mathcal{E})] = \Lambda_1 . \quad (3.2.65)$$

Seja agora $\tilde{\mathcal{Y}}$ qualquer subespaço, tal que

$$\mathcal{Y} = \tilde{\mathcal{Y}} \oplus \mathcal{E}_0 \quad (3.2.66)$$

Então $\tilde{\mathcal{Y}} \cap \mathcal{X}_e = 0$, donde segue que existe um mapeamento

$\bar{F}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_e$ tal que

$$\bar{F}|_{\tilde{\mathcal{Y}}} = \mathbb{F}_2|_{\tilde{\mathcal{Y}}} \quad (3.2.67)$$

e

$$\bar{F}|_{\mathcal{X}_e} = \mathbb{F}_3|_{\mathcal{X}_e} \quad (3.2.68)$$

Precisamos agora mostrar que \bar{F} tem as propriedades necessárias: Como $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{X}_e$, segue de (3.2.64) e (3.2.68) que

$$\bar{F}|_{\mathcal{E}_0} = \mathbb{F}_2|_{\mathcal{E}_0} \quad (3.2.69)$$

De (3.2.66), (3.2.67) e (3.2.69) sabemos que

$$\bar{F}|_{\mathcal{Y}} = \bar{F}|_{(\tilde{\mathcal{Y}} + \mathcal{E}_0)} = \mathbb{F}_2|_{(\tilde{\mathcal{Y}} + \mathcal{E}_0)} = \mathbb{F}_2|_{\mathcal{Y}} . \quad (3.2.70)$$

É claro que

$$\bar{F} \in \mathcal{F}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \mathcal{Y}) \quad (3.2.71)$$

Agora, como $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}_e$, segue de (3.2.64) e (3.2.68) que

$$\bar{F}|_{\mathcal{E}} = \mathbb{F}_2|_{\mathcal{E}} \quad (3.2.72)$$

De (3.2.48) sabemos que $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{Y} + \mathcal{E}$; então de (3.2.63), (3.2.70) e (3.2.72) segue que

$$\bar{F}|_{\mathcal{X}_m} = \mathbb{F}_2|_{\mathcal{X}_m} = 0 \quad (3.2.73)$$

Isto e (3.2.71) implicam que $\bar{F} \in \mathcal{F}$ como desejado.

Como $\mathcal{E}_c \subset \mathcal{E}_0$, (3.2.62) e (3.2.69) implicam que

$$\bar{F}|_{\mathcal{E}_c} = \mathbb{F}_2|_{\mathcal{E}_c} = \mathbb{F}_1|_{\mathcal{E}_c} .$$

Isto e (3.2.61) implicam que (3.2.53) é verdadeiro.

Paralelamente, de (3.2.68) e (3.2.65) segue que (3.2.52) é

verdadeiro.

A terceira parte é provada com o lema 3.2.5 que mostra que $\sigma[A_F | (\varepsilon/\varepsilon_0)]$ é fixo para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$ e também, que (3.2.54) é verdadeiro.

Do lema 3.2.4 podemos concluir que $\bar{F} \in \mathcal{F}(\bar{A}_e, \bar{B}_e; \varepsilon_0)$.

Isto, e lema A1 de [5] implicam que $\sigma[A_F | (\varepsilon_0/\varepsilon_c)]$ é fixo para todo $\bar{F} \in \mathcal{F}$.

Resta ainda provar que (3.2.55) é verdadeiro: Utilizemos o lema 3.2.3 para escrever $\mathcal{X} \cap \mathcal{R} = \mathcal{Y} + \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}$.

Do lema 3.2.2 e do lema 3.2.6 sabemos que $\mathcal{X} \cap \mathcal{R}$ e $\mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}$ estão ambos no $\mathcal{Y}(A, B; \text{Ker}C)$. Mas como $\mathcal{Y} = \max.\mathcal{L}(A, B; \text{Ker}C)$, podemos escrever $\mathcal{Y} = \max.\mathcal{L}(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R})$. Então, com o lema A2 de [5], segue que

$$\Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap \mathcal{R}) \subset \Gamma(A, B; \mathcal{X} \cap Q\mathcal{Y}). \quad (3.2.74)$$

Isto com o lema 3.2.6 implica que (3.2.55) é verdadeiro.

E, finalmente, se (\mathcal{Y}, n_d) é uma solução regular, então $Q\mathcal{Y} = \mathcal{R}$. Segue que (3.2.74) é verdadeiro com igualdade; donde (3.2.55) é verdadeiro também com igualdade.

Fica assim provado o teorema principal de [5].

Exemplo.

Para ilustrar agora o método de Morse [5] vamos considerar uma planta descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

e um modelo, descrito por:

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_m(t)$$

$$y_m(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x_m(t)$$

Formamos o sistema composto, que será:

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & -3 & & & \\ \hline & & & -2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right] x(t) + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & \end{array} \right] \begin{array}{l} u(t) \\ u_m(t) \end{array}$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] x(t)$$

Para saber, se o APM terá uma solução (\mathcal{Y}, n_d) precisamos testar se $\hat{\mathcal{B}}_m \subset \hat{\mathcal{B}} + \mathcal{R}$; onde $\mathcal{R} = \max.\mathcal{C}(\hat{A}, \hat{B}; \text{Ker}\hat{C})$.

Sabemos que \hat{V}^* é o subespaço máximo no $\text{Ker}\hat{C}$ que é invariante em (\hat{A}, \hat{B}) para algum $\hat{F} \in \mathcal{F}(\hat{V}^*)$.

Então, calculando \hat{V}^* , obtemos

$$\hat{V}^* = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\}$$

Como $\hat{A}\hat{V}^* \subset \hat{\mathcal{B}} + \hat{V}^*$ podemos afirmar que existe um $\mathcal{F}(\hat{V}^*) \neq \emptyset$.

Calculando agora um \hat{F} tal que $(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})\hat{V}^* \subset \hat{V}^*$ obtemos,

resolvendo

$$\left(\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & -3 & & & \\ \hline & & & -2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} f_{11} \cdots f_{16} \\ \vdots \\ f_{41} \cdots f_{46} \end{array} \right] \right) \hat{V}^* \subset \hat{V}^*$$

a classe $\mathcal{F}(\hat{V}^*)$:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{11}^{-3-b} & f_{11}-f_{16}^{-d+f+j-5} & -f_{11}^{+d+1} & -f_{16}^{+f+2} & f_{16} \\ f_{21} & f_{21} & f_{21}-f_{26}^{+4} & -f_{21} & -f_{26}^{-2} & f_{26} \\ f_{31} & f_{31}^{-b} & f_{31}-f_{36}^{-d+f+j+1} & -f_{31}^{+d+2} & -f_{36}^{+f-2} & f_{36} \\ f_{41} & f_{41}^{-c} & f_{41}-f_{46}^{-e+g+k-1} & -f_{41}^{+e} & -f_{46}^{+g-1} & f_{46} \end{bmatrix}$$

Escolhemos um $\hat{F} \in \mathcal{F}(\hat{V}^*)$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para calcular

$$(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\mathcal{R} = \langle \hat{A} + \hat{B}\hat{F} | (\hat{\beta} \cap \hat{V}^*) \rangle$ precisamos ainda

$$\hat{\beta} \cap \hat{V}^* = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \end{array} \right\}$$

E, aplicando $(\hat{A} + \hat{B}\hat{F})$, obtemos

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 16 \\ 0 \ 0 \ -2 \ -16 \\ 0 \ 0 \ -2 \ -6 \\ \hline 0 \ 1 \ -2 \ -6 \\ 1 \ 0 \ 2 \ 6 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \right\}$$

Verificando agora (3.2.21)

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \\ \hline 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \ 1 \ 2 \ 16 \\ 0 \ 0 \ -2 \ -16 \\ 0 \ 0 \ -2 \ -6 \\ \hline 0 \ 1 \ -2 \ -6 \\ 1 \ 0 \ 2 \ 6 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array} \right\}$$

vemos que $\beta_m \subset \beta + \mathcal{R}$, que quer dizer que existe uma solução

(\mathcal{Y}, n_d) . Para encontrar esta solução calculamos

$$\mathcal{X}_m = \langle A_m | \phi_m \rangle = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

e formamos

$$(\mathcal{X}_m \cap \mathcal{R}) = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

donde segue que $(3.2.22) = \dim(\mathcal{X}_m \cap \mathcal{R}) = 1$.

Seja agora $\tilde{\mathcal{R}}$ tal que $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \oplus (\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) \dots (3.2.27)$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 16 \\ 0 & -2 & -16 \\ 0 & -2 & -6 \\ \hline 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

e \mathcal{X}_d qualquer espaço vetorial com dimensão n_d (mas

lembrar que $\mathcal{X}_d \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_m$): $\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$

Formando o isomorfismo $(3.2.28) H: (\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) \rightarrow \mathcal{X}_d$ obtemos

$(3.2.29): \mathcal{Y} = (\tilde{I} + H)(\mathcal{R} \cap \mathcal{X}_m) + \tilde{\mathcal{R}}$.

Então

$$\mathcal{Y} = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 16 \\ 0 & -2 & -16 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} =$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

Verificando, se $\bar{A}\mathcal{Y} \subset \bar{B}_e + \mathcal{Y}$, podemos afirmar que existe uma classe $\mathcal{F}(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$.

Procuramos então esta classe $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ tal que $(\bar{A} + \bar{B}_e\bar{F})\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$.

Esta classe $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ será:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1-f_{05}/3-f_{06}/3 & -f_{04} & -f_{04} & -f_{04}+f_{05} & f_{04} & f_{05} & f_{06} \\ 4/3-f_{15}/3-f_{16}/3 & -f_{14}-1 & -f_{14}-4 & -f_{14}+f_{15}-11 & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ -2/3-f_{25}/3-f_{26}/3 & -f_{24} & -f_{24} & -f_{24}+f_{25}+6 & f_{24} & f_{25} & f_{26} \end{array} \right]$$

Escolhemos agora um $\bar{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ que também satisfaça

$\mathcal{X}_m \subset \text{Ker}\bar{F}$ (3.2.37):

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & -1 & -4 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizamos este \bar{F} para construir $(\bar{A} + \bar{B}_e\bar{F})$, que vai ser:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & -2 & -4 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & -2 & -4 & -11 \\ -2/3 & 0 & 2 & 6 \\ -2/3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dai tiramos a restrição de $A_{\bar{F}}|_{\mathcal{X}_e} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & -2 & -4 & -11 \\ -2/3 & 0 & 2 & 6 \\ -2/3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e podemos agora verificar se $H_p(s, \bar{F}, G)$ é igual a $H_m(s)$.

Mas antes precisamos ainda calcular G , que encontramos da formula $\text{Im}(\bar{B}_e G + \bar{B}_m)$.

Fazendo isto, obtemos $G = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculando $H_p(s, F, G)$ obtemos a matriz da transferência da planta compensada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & s+2 & +4 & +11 \\ +2/3 & 0 & s-2 & -6 \\ +2/3 & 0 & 0 & s-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{2}{(s-1)(s-3)} \\ 0 & \frac{-2}{(s-1)(s-3)} \end{bmatrix}$$

que é - como se pode facilmente verificar - idêntica a matriz de transferência do modelo.

Para testar a estabilidade de $A_{\bar{F}}/X_e$ vamos calcular

$\Gamma(A, B; X \cap R)$:

$$\text{Então } X = \langle A/B \rangle = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right\}$$

$$\text{e } X \cap R = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} = 0$$

donde $\Gamma(A, B; X \cap R) = 0$.

Segundo corolário 3.1 de [5] $A_{\bar{F}}/X_e$ será estável se, e somente se $\sigma(A_m) \cap \Gamma(A, B; X \cap R)$ é estável.

Nesse exemplo esta interseção é nula, mas $A_{\bar{F}}/X_e$ não é estável! Isto pode-se facilmente verificar se calcularmos

$$\sigma(A_{\bar{F}}/X_e) = (s-1)(s+2)(s-2)(s-3).$$

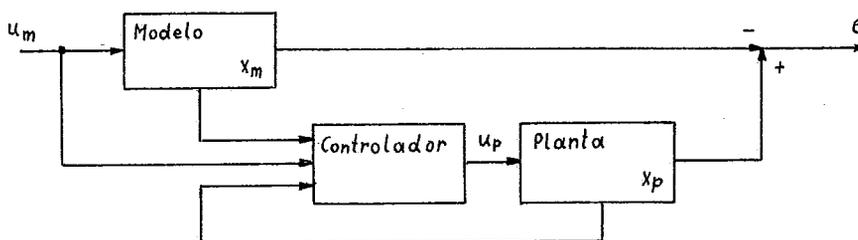
Capítulo 4): O PROBLEMA DA ADAPTAÇÃO DE UMA PLANTA A UM
MODELO, POR MEIO DE INVARIABILIDADE (APM).

4.1) IDEIA

Depois destes três capítulos explicativos podemos agora apresentar o nosso ponto de vista do APM.

Como já foi visto, nada nos impede de juntar a planta e o modelo de uma maneira tal que possamos trabalhar com um só grande sistema. Deste modo podemos utilizar todas as informações disponíveis e estas vem principalmente dos estados do modelo. Este é um ponto divergente do tratamento de Morse [5]. Mas achamos que a utilização dos estados do modelo - que foi por nós construído - só poderá ajudar a solucionar o problema.

Tomamos então o modelo e a planta, utilizando a entrada do modelo, os estados do modelo e os da planta para formar um controlador e utilizamos a saída do controlador como entrada para a planta.



O que agora desejamos é que, para um dado comportamento do modelo, a planta siga este comportamento. Isto quer dizer que o "erro" entre as saídas do modelo e da planta deve ser zero, qualquer que seja a entrada para o modelo e quaisquer

que sejam as condições iniciais para o modelo e a planta.

Do ponto de vista da formulação podemos então dizer:

- a) a matriz de transferência entre este erro e a entrada para o modelo deve ser igual a zero;
- b) este erro deve tender a zero (com $t \rightarrow \infty$) para cada estado inicial (seja da planta ou seja do modelo); e,
- c) a planta deve permanecer, ou se tornar, internamente estável (para as realimentações escolhidas).

Com a verificação destas condições teríamos a solução do APM.

4.2) FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja a planta - um sistema linear, fixo e dinâmico - descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + \tilde{B}_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t)\end{aligned}\quad (4.2.1a)$$

onde $x_p(t)$ representa o estado, $u_p(t)$ a entrada e $y_p(t)$ a saída. Os mapeamentos - lineares e fixos - são os seguintes:

$$A_p: \mathcal{X}_p \rightarrow \mathcal{X}_p, \quad \tilde{B}_p: \mathcal{U}_p \rightarrow \mathcal{X}_p, \quad C_p: \mathcal{X}_p \rightarrow \mathcal{Y}; \quad (\dim(\mathcal{X}_p) = n_p, \\ \dim(\mathcal{U}_p) = m_p \text{ e } \dim(\mathcal{Y}) = p).$$

A planta deverá seguir o modelo por nós construído e descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + \tilde{B}_m u_m(t) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\quad (4.2.1b)$$

onde $x_m(t)$, $u_m(t)$ e $y_m(t)$ representam estado, entrada e saída respectivamente e os mapeamentos são: $A_m: \mathcal{X}_m \rightarrow \mathcal{X}_m$, $\tilde{B}_m: \mathcal{U}_m \rightarrow \mathcal{X}_m$, $C_m: \mathcal{X}_m \rightarrow \mathcal{Y}$ com as $\dim(\mathcal{X}_m) = n_m$, $\dim(\mathcal{U}_m) = m_m$ e $y_m \in \mathcal{Y}$, o espaço da saída da planta.

Para simplificar o tratamento do problema pode-se juntar os dois sistemas e representar de uma maneira mais simples:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B_p u_p(t) + B_m u_m(t) \\ e(t) &= C x(t)\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

onde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_m(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_m \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}$$

$$C = (C_p \quad -C_m)$$

Considerando agora a seguinte lei de controle para a planta:

$$u_p(t) = F_0 x(t) + F_1 u_m(t) \quad (4.2.3)$$

podemos formar um sistema de malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_p F_0) x(t) + (B_m + B_p F_1) u_m(t) \\ e(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Formando a matriz de transferência deste sistema vamos encontrar:

$$H(s, F_0, F_1) = C (sI - A - B_p F_0)^{-1} (B_m + B_p F_1) \quad (4.2.5)$$

Como já foi dito no capítulo 4.1) o erro entre a planta e o modelo deve ser zero, qualquer que seja a entrada para o modelo e quaisquer que sejam as condições iniciais.

Temos então:

$$H(s, F_0, F_1) = 0 \quad \text{para todo } s \quad (4.2.6)$$

e

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow \infty ; \quad t \geq 0, \quad \text{para cada } x(0) \quad (4.2.7)$$

4.3) "ZERAR" A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Realimentação dos estados

O primeiro problema a resolver será:

"Sob que condições existem F_0, F_1 tais que

$$H(s, F_0, F_1) = 0 \text{ para todo } s ? \quad (4.3.1)$$

Utilizando os resultados de [13] podemos dizer:

"Existem F_0, F_1 tais que $H(s, F_0, F_1) = 0$ para todo s se, e somente se,

$$\underline{B_m \subset B_p + U^* ; } \quad (4.3.2)$$

onde B_m e B_p são, respectivamente, as imagens em X dos mapeamentos B_m e B_p , e U^* é o subespaço máximo que é invariante em (A, B_p) e está contido no núcleo de C .

(A existência e unicidade de U^* foram provadas em [11].

Também se deve lembrar que se $U \subset X$, U é invariante em

(A, B_p) se, e somente se, existe um F_0 tal que

$$(A + B_p F_0)U \subset U).$$

Primeiro vamos provar a necessidade de (4.3.2):

Suponhamos que existem F_0 e F_1 tal que $H(s, F_0, F_1) = 0$.

Escrevendo $A_0 \equiv A + B_p F_0$ e $B_0 \equiv B_m + B_p F_1$ podemos exprimir (4.2.4) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + B_0 u_m(t) \\ e(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Formando a matriz de transferência obtemos

$$H(s, F_0, F_1) = C (sI - A_0)^{-1} B_0 \quad (4.3.4)$$

Sabendo que a equação característica de A_0 é

$$\Delta_0(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (4.3.5)$$

podemos exprimir de outro modo a matriz de transferência

[17 (p.301)] e [18 (cap.4 §3)] :

$$\begin{aligned} H(s, F_0, F_1) &= N(s) / D(s) = \\ &= [1/\Delta_0(s)] C [R_0 s^{n-1} + R_1 s^{n-2} + \dots + R_{n-1}] B_0 \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

onde

$$\begin{aligned} R_0 &= a_0 I \\ R_1 &= A_0 + a_1 I \\ R_2 &= A_0^2 + a_1 A_0 + a_2 I = A_0 R_1 + a_2 I \\ &\vdots \\ R_{n-1} &= A_0^{n-1} + a_1 A_0^{n-2} + \dots + a_{n-1} I = A_0 R_{n-2} + a_{n-1} I \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

A condição $H(s, F_0, F_1) = N(s) / D(s) = 0$ é equivalente

a $N(s) = 0$, que, nesse caso, quer dizer que

$$C R_i B_0 = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.8)$$

Substituindo R_i de (4.3.8) por (4.3.7) podemos dizer:

$$\begin{aligned} C(a_0 I) B_0 &= 0 \quad \text{onde } a_0 = 1 \\ C(A_0 + a_1 I) B_0 &= 0 \\ &\vdots \\ C(A_0^{n-1} + a_1 A_0^{n-2} + \dots + a_{n-1} I) B_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

que é equivalente a

$$C A_0^i B_0 = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.10)$$

Vamos agora definir o subespaço

$$\theta_0 = \bigcap_i \text{Ker } C A_0^i \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.11)$$

Dizendo que β_0 é o espaço gerado pelas colunas de B_0 , e observando (4.3.10) é claro que

$$\beta_0 \subset \theta_0 \quad (4.3.12)$$

Sabemos que $A_0 \equiv (A + B_p F_0)$ e utilizando o teorema de Cayley-Hamilton [21] podemos dizer que

$$(A + B_p F_0)\theta_0 \subset \theta_0 \quad (4.3.13)$$

e que

$$\theta_0 \subset \text{Ker}C \quad (4.3.14)$$

Donde encontramos: θ_0 é um espaço invariante em (A, B_p) e que está contido no núcleo de C .

Lembrando a definição de \mathcal{U}^* dizemos que

$$\theta_0 \subset \mathcal{U}^* \quad (4.3.15)$$

e considerando (4.3.12) segue que

$$\beta_0 \subset \mathcal{U}^* \quad (4.3.16)$$

Com este resultado, lembrando que $B_0 \equiv B_m + B_p F_1$, e a utilização de um lema, que diz:

"Sejam dados B_m , B_p e um subespaço $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$; existe um F_1 tal que $\text{Im}(B_m + B_p F_1) \subset \mathcal{U}$ se, e somente se, $\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{U}$." podemos dizer que

$$\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{U}^* \quad (4.3.18)$$

Fica assim provada a necessidade.

Antes de provar a suficiência do teorema vamos apresentar a prova do lema: a) Necessidade: Seja f um vetor qualquer do domínio de $(B_m + B_p F_1)$, então temos $(B_m + B_p F_1)f = B_m f + B_p F_1 f = v$ onde $v \in \mathcal{U}$.

Ou, $B_m f = v - B_p F_1 f$ donde

$$\beta_m \subset \mathcal{U} + \text{Im}(B_p F_1) \subset \mathcal{U} + \text{Im}B_p \subset \mathcal{U} + \beta_p.$$

b) Suficiência: Seja (u_1, \dots, u_{m_m}) uma base para U_m . Como $\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{V}$ existem vetores $\hat{u}_i \in U_p$ e $v_i \in \mathcal{V}$ tais que $B_m u_i = B_p \hat{u}_i + v_i$; $i = 0, 1, 2, \dots, m_m$.

Como os elementos da base escolhida são linearmente independentes existe, [9], um $F_1: U_m \rightarrow U_p$ tal que

$$F_1 u_i = -\hat{u}_i, \quad i = 0, 1, \dots, m_m$$

Então teríamos

$$B_m u_i = -B_p F_1 u_i + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, m_m$$

ou

$$(B_m + B_p F_1) u_i = v_i, \quad i = 0, 1, \dots, m_m$$

Donde concluímos que

$$\text{Im}(B_m + B_p F_1) \subset \mathcal{V}.$$

Voltando ao teorema provamos agora a suficiência:

Utilizando o lema (4.3.17) podemos escolher um F_1 tal que

$$\text{Im}(B_m + B_p F_1) \subset \mathcal{V}^*. \quad (4.3.19)$$

Escolhamos um F_0 tal que

$$(A + B_p F_0) \mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$$

Utilizando (4.3.19) na forma $\beta_0 \subset \mathcal{V}^*$, onde $\beta_0 = \text{Im}(B_m + B_p F_1)$ e a definição de $\mathcal{V}^* = \max. \mathcal{J}(A, B_p; \text{Ker} C)$, podemos escrever:

$$(A + B_p F_0) \beta_0 \subset (A + B_p F_0) \mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \subset \text{Ker} C \quad (4.3.20)$$

Donde, desenvolvendo, segue que:

$$C \mathcal{V}^* = 0$$

$$C(A + B_p F_0)^i \mathcal{V}^* = 0$$

$$C(A + B_p F_0)^i \beta_0 = 0$$

e finalmente:

$$C(A + B_p F_0)^i (B_m + B_p F_1) = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3.21)$$

ou ainda

$$C A_0^i B_0 = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1$$

e a partir de (4.3.10) via (4.3.9) etc. chegamos ao (4.3.7),
 donde podemos concluir que:

$$H(s, F_0, F_1) = 0 \quad \text{para todo } s.$$

Com esta prova da suficiência completamos a prova de (4.3.2).

Compensador dinâmico.

A idéia que surge agora é:

Que acontecerá se utilizarmos um compensador dinâmico para a
 planta? A condição para resolver o problema será facilitada?
 Vejamos.

Temos novamente a planta (4.2.1a) $\Sigma_p = (C_p, A_p, \tilde{B}_p)$ e o
 modelo (4.2.1b) $\Sigma_m = (C_m, A_m, \tilde{B}_m)$.
 Adicionamos à planta o compensador

$$\dot{x}_d(t) = D u_d(t) \quad (4.3.22)$$

e, considerando o conjunto dos três, temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= A_e x_e(t) + B_{pe} u_{pe}(t) + B_{me} u_{me}(t) \\ e_e(t) &= C_e x_e(t) \end{aligned} \quad (4.3.23a)$$

com os estados e entradas como segue:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_p \\ x_d \\ x_m \end{bmatrix} \quad u_{pe} = \begin{bmatrix} u_p \\ u_d \end{bmatrix} \quad u_{me} = u_m \quad (4.3.23b)$$

e os mapeamentos estendidos:

$$\begin{aligned} A_e: \mathcal{X}_e &\rightarrow \mathcal{X}_e & B_{pe}: \mathcal{U}_{pe} &\rightarrow \mathcal{X}_e & B_{me}: \mathcal{U}_{me} &\rightarrow \mathcal{X}_e \\ C_e: \mathcal{X}_e &\rightarrow \mathcal{Y} \end{aligned}$$

com

$$x_e = x_p \oplus x_d \oplus x_m \quad \text{e} \quad u_{pe} = u_p \oplus u_d$$

representados por

$$A_e = \begin{bmatrix} A_p & & \\ & 0 & \\ & & A_m \end{bmatrix} \quad B_{pe} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_p & 0 \\ 0 & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{me} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{B}_m \end{bmatrix}$$

$$C_e = (C_p \quad 0 \quad -C_m) \quad (4.3.23c)$$

Uma realimentação no sistema aumentado é equivalente a uma realimentação mais uma compensação dinâmica no sistema original.

A condição para

$$H(s, F_{oe}, F_{1e}) = 0, \text{ para todo } s \quad (4.3.24)$$

ou

$$C_e (sI - A_{oe})^{-1} B_{oe} = 0, \text{ para todo } s \quad (4.3.25)$$

onde

$$A_{oe} \equiv A_e + B_{pe} F_{oe} \quad \text{e} \quad B_{oe} \equiv B_{me} + B_{pe} F_{1e},$$

será então:

$$\beta_{me} \subset \beta_{pe} + \mathcal{V}_e^* \quad \text{onde} \quad \mathcal{V}_e^* = \max. \mathcal{J}(A_e, B_{pe}; \text{Ker} C_e) \quad (4.3.26)$$

Se $P: \mathcal{X}_e \rightarrow \mathcal{X}$ é a projecção de \mathcal{X}_e sobre \mathcal{X} segundo \mathcal{X}_d

(lembrando que $\mathcal{X}_e = \mathcal{X}_p \oplus \mathcal{X}_d \oplus \mathcal{X}_m$ e $\mathcal{X} = \mathcal{X}_p \oplus \mathcal{X}_m$) podemos

dizer que:

$$P^{-1} x_e(t) = A_e P^{-1} x_e(t) + B_{pe} u_{pe}(t) + B_{me} u_{me}(t) \quad (4.3.27a)$$

$$e_e(t) = C_e P^{-1} x_e(t) \quad (4.3.27b)$$

e tirar daí:

$$PA_e = AP \quad PB_{pe} = B_p \quad PB_{me} = B_m$$

$$C_e P^{-1} = C \quad (4.3.27c)$$

Se aplicarmos P também a (4.3.26):

$$P\beta_{me} \subset P\beta_{pe} + P\mathcal{V}_e^*$$

segue

$$\beta_m \subset \beta_p + P\mathcal{V}_e^* \quad (4.3.28)$$

Mas como \mathcal{V}_e^* é invariante em (A_e, B_{pe}) , podemos escrever:

$$A_e \mathcal{V}_e^* \subset B_{pe} + \mathcal{V}_e^* \quad \text{onde } \mathcal{V}_e^* \subset \text{Ker}C_e \quad (4.3.29)$$

Aplicando P , obtemos:

$$PA_e \mathcal{V}_e^* \subset PB_{pe} + P\mathcal{V}_e^* \quad \text{onde } P\mathcal{V}_e^* \subset \text{PKer}C_e \quad (4.3.30a)$$

ou

$$AP\mathcal{V}_e^* \subset B_p + P\mathcal{V}_e^* \quad \text{e } \text{PKer}C_e = \text{Ker}C \quad (4.3.30b)$$

Vemos então que $P\mathcal{V}_e^*$ é invariante em (A, B_p) e está contido no $\text{Ker}C$.

Usando este resultado e a definição de \mathcal{V}^* podemos dizer que

$$P\mathcal{V}_e^* \subset \mathcal{V}^*$$

Introduzindo este termo em (4.3.28) obtemos

$$B_m \subset B_p + \mathcal{V}^*$$

Vimos então que a condição (4.3.2) não muda com a introdução de um compensador dinâmico.

Falta então resolver se com este resultado o comportamento dinâmico do sistema é satisfatório. Pode, p.e., acontecer que com a escolha de um F_0 tal que $(A + B_p F_0)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$ alguns autovalores fiquem numa posição indesejável (p.e. no semiplano direito). Isto pode eventualmente nos forçar a calcular um \mathcal{V} não máximo.

Trataremos disto no capítulo 4.5).

Relações das singularidades.

Embora a condição $B_m \subset B_p + \mathcal{V}^*$ seja bastante simples de verificar, ela tem o inconveniente do cálculo de \mathcal{V}^* e de não ser óbvia à quem não está familiarizado com este espaço.

Tentemos exprimir esta condição em termos das singularidades

(polos e zeros) das matrizes de transferência presentes.

Caso escalar

Temos o nosso grande sistema (4.2.2):

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_p u_p(t) + B_m u_m(t)$$

$$e(t) = C x(t)$$

e a condição para uma solução:

$$\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_p + \mathcal{V}^*$$

onde $\mathcal{V}^* = (\mathcal{C} + A'\mathcal{C} + \dots + (A')^d \mathcal{C})^\perp$ (ver [11,p.570]) (4.3.31)

A definição de d em (4.3.31) é a seguinte, para o caso que (CAB) é conhecido:

d_i é o primeiro inteiro não negativo tal que $C_i A^{d_i} B \neq 0$.

Se $C_i A^k B = 0$ para todo $k \leq n$, então $d_i = n-1$ [17,p.301],

onde C_i é a i -ésima linha de C .

Para o caso em que só a matriz de transferência $G(s)$ é conhecida: $d_i = \min[\text{diferença entre o grau em } s \text{ do denominador e do numerador de cada termo na linha de } G(s)] \text{ menos } 1$

[17,p.300].

Tomando o espaço ortogonal e lembrando as propriedades

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^\perp = \mathcal{A}^\perp \cap \mathcal{B}^\perp \text{ e } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}^\perp \supset \mathcal{B}^\perp$$

podemos escrever:

$$\mathcal{B}_m^\perp \supset (\mathcal{B}_p + \mathcal{V}^*)^\perp$$

ou

$$\mathcal{B}_m^\perp \supset \mathcal{B}_p^\perp \cap \mathcal{V}^{*\perp}$$

Utilizando (4.3.31) segue que:

$$\mathcal{B}_m^\perp \supset \mathcal{B}_p^\perp \cap \left[(\mathcal{C} + A'\mathcal{C} + \dots + (A')^d \mathcal{C})^\perp \right]^\perp \quad (4.3.32)$$

Se um vetor $x \in \mathcal{V}^{*\perp} \cap \mathcal{B}_p^\perp$, segue que x vai ser uma combinação linear da seguinte forma:

$$x = \alpha_0 c' + \alpha_1 A' c' + \dots + \alpha_d (A')^d c' \quad (4.3.33)$$

E além disso:

$$x' B_p = 0 \quad (4.3.34)$$

ou

$$\left[\alpha_0 c' + \alpha_1 A' c' + \dots + \alpha_d (A')^d c' \right]' \cdot B_p = 0 \quad (4.3.35)$$

que podemos escrever como

$$\alpha_0 c A^0 B_p + \alpha_1 c A B_p + \dots + \alpha_{d-1} c A^{d-1} B_p + \alpha_d c A^d B_p = 0 \quad (4.3.36)$$

Lembrando a definição de d ,

$$c A^i B_p = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, d-1 \quad \text{e}$$

$$c A^i B_p \neq 0 \quad \text{para } i = d$$

concluimos que

$$\alpha_d c A^d B_p = 0 \quad \text{e} \quad c A^d B_p \neq 0$$

donde

$$\alpha_d = 0 \quad (4.3.37)$$

Então o vetor $x \in \beta_p^\perp \cap \mathcal{V}^{*\perp}$ tem a forma:

$$x = \alpha_0 c' + \alpha_1 A' c' + \dots + \alpha_{d-1} (A')^{d-1} c' \quad (4.3.38)$$

Agora observando (4.3.32) segue que:

$$x' B_m = 0 \quad (4.3.39)$$

ou

$$\alpha_0 c B_m + \alpha_1 c A B_m + \dots + \alpha_{d-1} c A^{d-1} B_m = 0$$

para qualquer α_i , $i = 0, 1, \dots, d-1$ (4.3.40)

Mas observando a forma matricial de (4.2.2):

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_m \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} \tilde{B}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_m \end{bmatrix}$$

$$C = (C_p \quad -C_m)$$

segue que podemos exprimir (4.3.40) como

$$\alpha_0 c_m \tilde{B}_m + \alpha_1 c_m A_m \tilde{B}_m + \dots + \alpha_{d-1} c_m A_m^{d-1} \tilde{B}_m = 0 \quad (4.3.41)$$

Lembrando a definição de d , vemos que se d_m for maior que $d-1$ então (4.3.41) será sempre satisfeita.

Observando mais uma vez as matrizes (C, A, B_p) vemos que o d , calculado para o grande sistema (C, A, B_p) é identico a d_p , calculado só para a planta. Dizemos então

$$d_p \leq d_m \quad (4.3.42)$$

é uma condição suficiente para garantir uma solução.

Por outro lado, admitamos que $d_p > d_m$; então fazendo os passos inversos vemos que acontece o seguinte: Se, p.e., $d_m = d_p - 1$ (lembrar que $d_p = d$), segue que, para satisfazer (4.3.41), α_{d-1} deveria ser zero; se, p.e., $d_m = d_p - 2$, segue que $\alpha_{d-1} = \alpha_{d-2} = 0$; etc.

Então para satisfazer (4.3.41) vemos que isto só acontece sob a hipótese que alguns α são zeros. Mas esta restrição dos vetores x contradiz a definição (4.3.33) que é válida para qualquer vetor $x \in \mathcal{V}^{\perp} \cap \beta_p^{\perp}$. Então concluímos que a condição $d_p \leq d_m$ é equivalente a $\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{V}^*$.

Mas queremos exprimir este resultado em termos das singularidades:

Sabendo que uma matriz de transferência pode ser exprimida

$$H(s) = \left[\frac{1}{\Delta(s)} \right] c \left[a_0 I s^{n-1} + (A + a_1 I) s^{n-2} + \dots \right. \\ \left. \dots + (A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I) \right] b$$

e que d é uma indicação para o número dos zeros (# zeros), - p.e., se $d = 0$ não desaparece nada, se $d = 1$ desaparece o termo s^{n-1} , etc. -, podemos então escrever, para o caso escalar:

$$H_p(s) \dots \frac{(\# \text{ zeros})}{(\text{ordem da planta})} = \frac{(n_p - 1 - d_p)}{\text{grau do } \Delta_p(s)} \quad (4.3.43a)$$

$$H_m(s) \dots \frac{(\# \text{ zeros})}{(\text{ordem do modelo})} = \frac{(n_m - 1 - d_m)}{\text{grau do } \Delta_m(s)} \quad (4.3.43b)$$

Para que $d_p \leq d_m$ seja satisfeito escrevemos

$$\frac{\text{ordem} - \# \text{ zeros}}{(\text{da planta})} \leq \frac{\text{ordem} - \# \text{ zeros}}{(\text{do modelo})} \quad (4.3.44)$$

donde:

$$n_p - (n_p - 1 - d_p) \leq n_m - (n_m - 1 - d_m)$$

e

$$d_p \leq d_m$$

que satisfaz (4.3.42).

Caso mono-saída.

Para o caso mono-saída podemos escrever:

$$H(s) = [c/\Delta(s)] \left\{ \left[\dots \right] b_1 ; \left[\dots \right] b_2 ; \dots ; \left[\dots \right] b_r \right\}$$

Então se, p.e., $d_{11} = 0$ e $d_{12} = 1$ (onde d_{1j} indica o termo de d_1 que depende da coluna j de B) nada desaparece no termo que depende de b_1 , mas s^{n-1} desaparece no termo que depende de b_2 . Donde se vê que permanece ao menos um termo s de ordem $n-1$. Sabemos que (4.3.41) é válido para multi-entrada e que d_p (ou d_m) sempre será idêntico ao menor dos d_i 's (isto se vê também da definição de d a partir da matriz de transferência [17]);

Para satisfazer $d_p \leq d_m$ dizemos então

$$\min d_{pi} \leq \min d_{mi} \quad (4.3.45a)$$

Interpretando agora em termos de polos e zeros podemos dizer que o menor d_i é equivalente ao maior # zeros.

A condição então vai ser:

$$\frac{\text{ordem} - \text{max. \# zeros}}{\text{(da planta)}} \leq \frac{\text{ordem} - \text{max. \# zeros}}{\text{(do modelo)}} \quad (4.3.45b)$$

Este é um resultado que é de aplicação simplíssima porque só da observação das matrizes de transferência (na forma $1 \times r$) podemos dizer se existirá ou não uma solução.

Caso multi-saída.

Será de grande utilidade se pudermos aplicar este resultado também para o caso multi-saída.

Vamos ver:

A condição $\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{V}^*$ é uma condição necessária e suficiente para todos os casos. Para encontrar uma expressão desta condição em termos de singularidades, foi utilizado, para o caso mono-saída, o fato que

$$\mathcal{V}^* = (\mathcal{C} + A'\mathcal{C} + \dots + (A')^d \mathcal{C})^\perp$$

A idéia que surge é que, eventualmente, este processo pode ser utilizado para cada linha.

O primeiro passo será provar que

$$\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}_1^* \cap \mathcal{V}_2^* \cap \dots \cap \mathcal{V}_q^* \quad \text{onde } q \text{ indica as linhas de } C. \quad (4.3.46)$$

Lembrando a definição de \mathcal{V}^* temos, para o sistema (CAB_p) ,

$$\mathcal{V}^{j+1} = \text{Ker}C \cap A^{-1}(\beta_p + \mathcal{V}^j) \quad (4.3.47)$$

e para o sistema $(C_i A B_p)$

$$\mathcal{V}_i^{j+1} = \text{Ker}C_i \cap A^{-1}(\beta_p + \mathcal{V}_i^j) \quad \text{onde } i \text{ indica as linhas de } C. \quad (4.3.48)$$

Sabemos que

$$\mathcal{V}^0 = \text{Ker}C \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_i^0 = \text{Ker}C_i$$

e é conhecido que

$$\text{Ker}C \subset \text{Ker}C_i;$$

então concluímos que

$$\mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}_i^0$$

Suponhamos que

$$\mathcal{V}^j \subset \mathcal{V}_i^j \quad \text{onde } j = \mu$$

Vamos provar que

$$\mathcal{V}^{\mu+1} \subset \mathcal{V}_i^{\mu+1}$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\mu+1} &= \text{Ker}C \cap A^{-1}(\beta_p + \mathcal{V}^\mu) \\ &\subset \text{Ker}C_i \cap A^{-1}(\beta_p + \mathcal{V}^\mu) \\ &\subset \text{Ker}C_i \cap A^{-1}(\beta_p + \mathcal{V}_i^\mu) = \mathcal{V}_i^{\mu+1}. \end{aligned}$$

Provamos, por indução, que $\mathcal{V}^j \subset \mathcal{V}_i^j$ para qualquer j .

Então podemos dizer que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^* &\subset \mathcal{V}_1^* \\ &\subset \mathcal{V}_2^* \\ &\vdots \\ &\subset \mathcal{V}_q^* \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

que é equivalente a (4.3.46).

Por outro lado queremos provar que

$$V_1^* \cap V_2^* \cap \dots \cap V_q^* \subset V^*$$

Lembrando a definição de $V^* = \max. J(A, B_p; \text{Ker}C)$ vamos mostrar

que: a) $\bigcap_i V_i^* \subset \text{Ker}C$ e

$$b) A(\bigcap_i V_i^*) \subset \mathcal{B}_p + (\bigcap_i V_i^*).$$

Com isto teríamos que $\bigcap_i V_i^*$ é um subespaço invariante em (A, B_p) e contido no $\text{Ker}C$, e que - obviamente - é um subespaço de V^* .

Vejam os:

a) Sabemos que cada $V_i^* \subset \text{Ker}C_i$, então

$$\bigcap_i V_i^* \subset \bigcap_i \text{Ker}C_i = \text{Ker}C.$$

b) Notando que a condição b) é equivalente a

$$\bigcap_i V_i^* \subset A^{-1}(\mathcal{B}_p + \bigcap_i V_i^*) \text{ e tomando complementos}$$

ortogonais, teríamos

$$(\bigcap_i V_i^*)^\perp \supset A' [\mathcal{B}_p^\perp \cap (\bigcap_i V_i^*)^\perp] \quad (4.3.51)$$

Vamos achar condições para que (4.3.51) se verifique.

Se um vetor $x \in (\bigcap_i V_i^*)^\perp = \sum V_i^{*\perp}$

onde $V_i^* = (\varphi_i + A'\varphi_i + \dots + (A')^{d_i-1}\varphi_i + (A')^{d_i}\varphi_i)^\perp$

segue que este vetor tem a forma

$$x = \sum \left[\alpha_0^i c_i' + \alpha_1^i A' c_i' + \dots + \alpha_{d_i}^i (A')^{d_i} c_i' \right] \quad (4.3.52)$$

Se, além disso

$$x \in \mathcal{B}_p^\perp \cap (\sum V_i^{*\perp})$$

teríamos

$$x' B_p = \left(\sum \left[\alpha_0^i c_i' + \dots + \alpha_{d_i}^i (A')^{d_i} c_i' \right] \right)' B_p = 0 \quad (4.3.53)$$

Mas sabemos que todos os termos $c_i (A')^{d_i-1} B_p = 0$.

Então resta:

$$(\sum [\alpha_{d_i}^i (A')^{d_i} c_i'])' B_p = 0$$

que implica, sob hipótese, que posto $\hat{C} B_p = q$ (4.3.54)

onde

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ \vdots \\ c_q A^{d_q} \end{bmatrix}$$

que todos os $\alpha_{d_i} = 0$.

Então um vetor $x \in (\bigcap_i \mathcal{V}_i^*)^\perp \cap (\mathcal{B}_p^\perp + \bigcap_i \mathcal{V}_i^*)$ terá a forma

$$x = \sum [\alpha_0^i c_i' + \dots + \alpha_{d_i-1}^i (A')^{d_i-1} c_i']$$

ou, multiplicando por A' obtemos

$$\begin{aligned} A'x &= \sum [\alpha_0^i A' c_i' + \dots + \alpha_{d_i-1}^i (A')^{d_i} c_i'] \\ &\in \left\{ \left[c_1' + A' c_1' + \dots + (A')^{d_1} c_1' \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left[c_q' + A' c_q' + \dots + (A')^{d_q} c_q' \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

donde

$$A'x \in (\mathcal{V}_1^* \cap \dots \cap \mathcal{V}_q^*)$$

e donde podemos concluir que

$$A'[\mathcal{B}_p^\perp \cap (\bigcap_i \mathcal{V}_i^*)^\perp] \subset (\bigcap_i \mathcal{V}_i^*)^\perp$$

ou ainda que

$$A(\bigcap_i \mathcal{V}_i^*) \subset \mathcal{B}_p + (\bigcap_i \mathcal{V}_i^*)$$

donde

$\bigcap_i \mathcal{V}_i^*$ é invariante em (A, B_p) sob hipótese que posto $\hat{C} B_p = q$ e então

$$(\bigcap_i \mathcal{V}_i^*) \subset \mathcal{V}^* .$$

Retornando à condição $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_p + \mathcal{V}^*$ e utilizando (4.3.49)

podemos escrever

$$\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_p + (\mathcal{V}_1^* \wedge \mathcal{V}_2^* \wedge \dots \wedge \mathcal{V}_q^*) \quad (4.3.56)$$

Tomando o espaço ortogonal

$$\mathcal{B}_m^\perp \supset \mathcal{B}_p^\perp \wedge (\mathcal{V}_1^{*\perp} + \dots + \mathcal{V}_q^{*\perp}) \quad (4.3.57)$$

e continuando como no caso escalar temos

$$\mathcal{B}_m^\perp \supset \sum (\mathcal{B}_p^\perp \wedge \mathcal{V}_i^{*\perp}) ; i = 1, \dots, q \quad (4.3.58)$$

Utilizando (4.3.31) segue que

$$\mathcal{B}_m^\perp \supset \sum \left\{ \mathcal{B}_p^\perp \wedge \left[(\varphi_i + A' \varphi_i + \dots + (A')^{d_i} \varphi_i)^\perp \right]^\perp \right. \\ \left. i = 1, \dots, q \right. \quad (4.3.59)$$

Se continuarmos a aplicar (4.3.33) até (4.3.39) encontramos

vetores x da seguinte forma

$$x_i = \alpha_0^i c_i' + \alpha_1^i A' c_i' + \dots + \alpha_{d_i-1}^i (A')^{d_i-1} c_i' ; \\ i = 1, \dots, q \quad (4.3.60)$$

Observando (4.3.59) vemos que

$$x_i' B_m = 0 \quad (4.3.61)$$

ou

$$\alpha_0^i c_i' B_m + \alpha_1^i c_i' A B_m + \dots + \alpha_{d_i-1}^i c_i' A^{d_i-1} B_m = 0 \quad (4.3.62a)$$

$$\text{para cada } j^i ; i = 1, \dots, q ; j = 0, \dots, d_i-1$$

É devido a forma (4.2.2) podemos escrever (4.3.62a) na forma (exatamente como no caso escalar, só que aqui temos i equações):

$$\alpha_0^i c_{mi} \tilde{B}_m + \alpha_1^i c_{mi} A_m \tilde{B}_m + \dots + \alpha_{d_i-1}^i c_{mi} A_m^{d_i-1} \tilde{B}_m = 0 \quad (4.3.62b)$$

Para satisfazer (4.3.62b) vemos que d_{mi} deve ser maior do que d_i-1 (que é equivalente a $d_{pi}-1$); donde

$$d_{pi} \leq d_{mi} \quad (4.3.63)$$

Ainda sabendo que cada d_{pi} é idêntico ao menor dos d_{pij} (onde j indica as colunas de B_p), podemos dizer que

$$\min d_{pij} \leq d_{mi} \quad (4.3.64)$$

Se expressarmos d_{mi} em termos d_{mik} (onde k indica as colunas de B_m) podemos dizer que

$$d_{mi} = \min d_{mik} \quad (4.3.65)$$

donde segue que

$$\min d_{pij} \leq \min d_{mik} \quad (4.3.66)$$

Exprimindo em # zeros podemos formular esta condição necessária - no caso geral, ou necessária e suficiente - no caso em que posto $\hat{CB}_p = q$, como segue:

"(Ordem da planta) menos (max. # zeros) em cada linha

deve ser menor ou igual

(Ordem do modelo) menos (max. # zeros) na mesma linha."

(4.3.67)

Este é um resultado que também é muito simples de aplicar, porque só por observação das diferentes linhas das matrizes de transferência podemos dizer qual o sistema sem solução ou, se considerarmos o caso especial - posto $\hat{CB}_p = q$ -, qual sistema dará uma solução.

4.4) "ZERAR" O ERRO RESULTANTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Formulação do problema

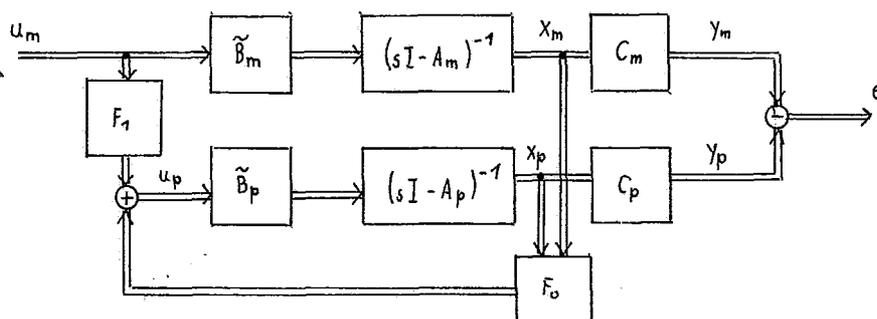
Temos novamente o sistema (4.2.2):

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_p u_p(t) + B_m u_m(t)$$

$$e(t) = C x(t)$$

$$\text{mas agora com } x(0) = x_0 \quad (4.4.1)$$

Lembrando a construção deste sistema



podemos utilizar [14] e formular o problema como segue:

"Achar condições para a existência de um mapeamento

$F_o : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_p$ tal que com uma lei de controle $u_p(t) = F_o x(t)$

serão as seguintes condições satisfeitas? :

a) Se $e(0) = Cx_0 = 0$; então $e(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ (4.4.2)

b) Se $e(0) \neq 0$; então para todo $x_0 \in \mathcal{X}$, $e(t) \rightarrow 0$
se $t \rightarrow \infty$." (4.4.3)

Mas como já foi mencionado em [14], a condição a) só seria satisfeita se, e somente se, $x_0 \in \text{Ker}C$, e ainda

$$(A + B_p F_o) \text{Ker} C \subset \text{Ker} C .$$

Como esta é uma condição muito forte - encontrar um F_o que a satisfaça é, em muitos casos, impossível, sobretudo se pensarmos no caso multi-saída - , vamos modificar as condições tal que possamos utilizar só um subespaço de $\text{Ker} C$.

Dizemos então que o problema será o seguinte:

"Dado o sistema (4.4.1) e um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, com a propriedade $(A + B_p F_o) \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ para algum F_o ; encontre condições para um mapeamento $F_o: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_p$ tal que, com uma lei de controle $u_p(t) = F_o x(t)$, as condições que seguem serão satisfeitas:

$$\text{a1) Se } x_o \in \mathcal{V} \text{ ; então } x(t) \in \mathcal{V} \text{ para todo } t \geq 0 \quad (4.4.4)$$

$$\text{b1) Se } x_o \notin \mathcal{V} \text{ ; então para todo } x_o \in \mathcal{X} \text{ , o} \\ \min \{ |x(t) - z| : z \in \mathcal{V} \} \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty .'' \quad (4.4.5)$$

Definições necessárias.

Antes de formular um teorema para solucionar o problema desejamos expôr algumas condições e definições:

$$\text{Seja } \mathcal{F}_o(\mathcal{V}) \text{ a classe dos mapeamentos } F_o: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_p \text{ tal} \\ \text{que } A_o \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \text{ , onde } A_o \equiv A + B_p F_o . \quad (4.4.6)$$

$$\text{Seja } P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{V} \text{ a projeção canônica e denotaremos} \\ \bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/\mathcal{V} . \quad (4.4.7)$$

\bar{A}_o é o mapeamento induzido por A_o em \mathcal{X}/\mathcal{V} , donde

segue que $PA_0 = \overline{A}_0P$ e podemos também escrever

$$\overline{B}_p = PB_p . \quad (4.4.8)$$

Seja $\alpha(\lambda)$ o polinômio mínimo de A (= polinômio mônico $\alpha(\lambda)$ de menor grau em λ , tal que $\alpha(A) = 0$), que é fatorado tal que $\alpha(\lambda) = \alpha^+(\lambda) \alpha^-(\lambda)$ e onde as singularidades de $\alpha^+(\lambda)$ estão situadas no semiplano fechado à direita ($= C^+$) e as de $\alpha^-(\lambda)$ no semiplano aberto à esquerda ($= C^-$).

(4.4.9)

Ainda definimos $\mathcal{X}^\pm(A) = \text{Ker} \alpha^\pm(A) =$

$$= \{x: x \in \mathcal{X}, \alpha^\pm(A)x = 0\} , \quad (4.4.10)$$

Sabemos também que $A\mathcal{X}^\pm(A) \subset \mathcal{X}^\pm(A)$ e que

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^+(A) \oplus \mathcal{X}^-(A) . \quad (4.4.11)$$

$$\text{Notamos ainda } \hat{\mathcal{X}}^\pm = (\mathcal{X}^\pm + \mathcal{V})/\mathcal{V} = P\mathcal{X}^\pm . \quad (4.4.12)$$

O teorema:

Sabemos de [20] que o par (A, B_p) é estabilizável se, e somente se,

$$\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\mathcal{B}_p \rangle \quad (4.4.13)$$

ou, exprimido de outro modo, que existe um mapeamento

$$\underline{F}_0: \underline{\mathcal{X}} \rightarrow \underline{\mathcal{U}}_p \text{ tal que } \underline{\sigma} \left[\underline{A} + \underline{B}_p \underline{F}_0 \right] \subset \underline{C}^-$$

se, e somente se,

$$\underline{\mathcal{X}}^+(A) \subset \underline{\langle A/\mathcal{B}_p \rangle} \quad (4.4.14)$$

Isto encontra-se provado em [20] .

O nosso problema está bastante relacionado a este resultado, com uma exceção: só precisamos estabilizar uma parte dos modos instáveis (ver 4.4.5), donde vem a proposição que "O par (\bar{A}_o, \bar{B}_p) é estabilizável se, e somente se,

$$\underline{\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\mathcal{B}_p \rangle + \mathcal{U} ."} \quad (4.4.15)$$

Vamos agora formular o teorema, que será:

"Dado (4.4.6) até (4.4.12) dizemos que existe um mapeamento $F_o \in \tilde{\mathcal{F}}_o(\mathcal{U})$ tal que $\mathcal{G}[\underline{A + B_p F_o}] \subset C^-$
se, e somente se,

$$\underline{\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\mathcal{B}_p \rangle + \mathcal{U} ."} \quad (4.4.16)$$

Prova do teorema.

Para provar este teorema vamos primeiro precisar de alguns lemas tirados de [14] e repetidos aqui por conveniência:

Lema 4.4.1: "Dado (4.4.6) até (4.4.12). Então dizemos que existe um mapeamento $\bar{F}_o: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{U}_p$ tal que

$$\underline{\mathcal{G}[\bar{A} + \bar{B}_p \bar{F}_o] \subset C^-} \quad (4.4.17)$$

se, e somente se,

$$\underline{\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\mathcal{B}_p \rangle + \mathcal{U} ."} \quad (4.4.18)$$

Prova: De (4.4.14), (4.4.8) e observando o seguinte gráfico

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{A_o} & A_o x \\ p \downarrow & & \downarrow P \\ \bar{x} & \xrightarrow{\bar{A}_o} & \bar{A}_o x \end{array}$$

sabemos que existe um mapeamento \overline{F}_0 que satisfaz (4.4.17) se, e somente se,

$$\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) \subset \langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle + \overline{\{0\}} \quad (4.4.19)$$

Agora, aplicando a projeção canônica $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{V}$ ao (4.4.18) segue que

$$P\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) \subset P\langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle + P\mathcal{V} \quad (4.4.20)$$

Mas como $P\mathcal{V} = \overline{0}$ podemos escrever

$$\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) = P\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) \subset P\langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle = \langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle \quad (4.4.21)$$

Por outro lado, partindo de (4.4.19) podemos escrever

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) &= P\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) \\ &\subset \{ \langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle + \overline{\{0\}} \} \\ &= P\langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle + P\mathcal{V} \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Donde

$$\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) \subset \langle \overline{A} / \overline{\beta}_p \rangle + \mathcal{V} .$$

Lema 4.4.2: "Seja $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ com a propriedade

$$\underline{\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A}) + A\mathcal{Y} + \beta_p \subset \mathcal{Y}} \quad (4.4.23)$$

Então para cada mapeamento $\overline{F}_0: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_p$, podemos dizer que

$$\underline{\overline{\mathcal{X}}^+(\overline{A + B_{\overline{F}_0}}) \subset \mathcal{Y} ."} \quad (4.4.24)$$

Prova: Utilizando (4.4.23) dizemos que

$$(A + B_{\overline{F}_0})\mathcal{Y} \subset A\mathcal{Y} + \beta_p \subset \mathcal{Y} \quad (4.4.25)$$

Seja $Q: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{Y}$ a projeção canônica e \overline{A} o mapeamento

induzido em \mathcal{X}/\mathcal{Y} por A .

$$\bar{A} \text{ é unicamente determinado por } \bar{A}Q = QA \quad (4.4.26)$$

Então $(\overline{A + B_p F_o})Q = Q(A + B_p F_o) = QA + QB_p F_o$. Mas como $\beta_p \subset \mathcal{Y}$ segue que $QB_p F_o = \bar{0}$; então

$$(\overline{A + B_p F_o})Q = QA \quad (4.4.27)$$

$$\text{Donde, com (4.4.26) segue que } \overline{A + B_p F_o} = \bar{A} \quad (4.4.28)$$

Utilizando (4.4.28) e a definição de que $\mathcal{X}^\pm = Q\mathcal{X}^\pm [14]$,

podemos dizer que

$$\overline{\mathcal{X}^+(A + B_p F_o)} = \overline{\mathcal{X}^+(A)} = Q\mathcal{X}^+(A) \quad (4.4.29)$$

Mas observando (4.4.23) vemos que $\mathcal{X}^+(A) \subset \mathcal{Y}$, então

$$\text{segue que } Q\mathcal{X}^+(A) = \bar{0} \quad (4.4.30)$$

Isto quer dizer que na projeção canônica nenhum dos modos instáveis aparece; segue-se que

$$\sigma[\overline{A + B_p F_o}] \subset C^- \quad (4.4.31)$$

Agora, lembrando a forma matricial depois da aplicação

$$\text{da projeção canônica } Q : \left[\begin{array}{c|c} (A + B_p F_o)/\mathcal{Y} & A_3 \\ \hline 0 & \overline{A + B_p F_o} \end{array} \right]$$

podemos dizer que:

$$\sigma[A + B_p F_o] = \sigma[(A + B_p F_o)/\mathcal{Y}] \cup \sigma[\overline{A + B_p F_o}] \quad (4.4.32)$$

Ainda, observando (4.4.31), podemos dizer que

$$\sigma[A + B_p F_o] \cap C^+ \subset \sigma[(A + B_p F_o)/\mathcal{Y}] \quad (4.4.33)$$

donde segue que

$$\mathcal{X}^+(A + B_p F_o) \subset \mathcal{Y}.$$

Com a ajuda destes lemas podemos finalmente provar o teorema.

$$\text{Seja } \mathcal{Y} = \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V} \text{ e assumimos que } \mathcal{X}^+(A) \subset \mathcal{Y} \quad (4.4.34)$$

Utilizando, do lema 4.4.2, as expressões (4.4.24) e (4.4.27) dizemos que

$$\mathcal{X}^+(A + B_p F_o) \subset \mathcal{S} = \langle A | \beta_p \rangle + \mathcal{V} = \langle (A + B_p F_o) | \beta_p \rangle + \mathcal{V}$$

para todo $F_o: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}_p$

Se escolhermos $F_{o1} \in \mathcal{F}_o(\mathcal{V})$ sabemos do lema 4.4.1 que para algum $\bar{F}_{o2}: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}_p$ a seguinte expressão é verdadeira:

$$\mathcal{G}[\overline{A + B_p F_{o1}} + \overline{B_p F_{o2}}] \subset C^- \quad (4.4.35)$$

Se $F_{o2} = \bar{F}_{o2} P$, então $F_o = F_{o1} + F_{o2} \in \mathcal{F}_o(\mathcal{V})$.

Isto, e (4.4.35) implica que

$$\mathcal{G}[A + B_p F_o] \subset C^- \quad (4.4.36)$$

Por outro lado, se existe um $F_o \in \mathcal{F}_o(\mathcal{V})$ para o qual (4.4.36) é verdadeiro, então com a utilização do lema 4.4.1 podemos dizer:

$$\mathcal{X}^+(A + B_p F_o) \subset \langle A + B_p F_o | \beta_p \rangle + \mathcal{V} = \langle A | \beta_p \rangle + \mathcal{V} \quad (4.4.37)$$

Aplicando agora o lema 4.4.2 ao $(A + B_p F_o)$ e utilizando a definição do \mathcal{S} como foi dado, podemos escrever que

$$\mathcal{X}^+(A) = \mathcal{X}^+[(A + B_p F_o) - B_p F_o] \subset \mathcal{S} = \langle A | \beta_p \rangle + \mathcal{V} \quad (4.4.38)$$

e com isto completamos a prova do teorema.

Nota.

Lembrando a condição do capítulo 4.3) para "zerar" a matriz de transferência que foi $\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{V}^*$ podemos pensar em exprimir o teorema (4.4.16) também em termos de \mathcal{V}^* .

E como $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$ isto será possível.

Mas, por outro lado foi mencionado no fim do capítulo 4.3), que existe a possibilidade de que devemos utilizar um \mathcal{V} que não

é máximo.

Vamos então primeiro resolver a terceira parte, estabilidade interna da planta, e só depois unir os resultados.

4.5) ESTABILIDADE INTERNA DA PLANTA

Formulação do problema

Lembrando os resultados do capítulo 4.4) sabemos que é possível que o erro resultante das condições iniciais seja zero.

Mas pode acontecer que o sistema não seja estável, e estamos particularmente interessados na estabilidade da planta. Então devemos tratar este ponto sob os seguintes aspectos:

Lembrando a estrutura do sistema (ver capítulo 4.2), queremos que o par

$$((A_p + \tilde{B}_p F_{op}), \tilde{B}_p) \text{ , que representa a malha fechada da planta, seja estável.} \quad (4.5.1)$$

Como queremos estabilidade interna só para a planta e como o controle u_p só influencia a planta podemos dizer que (4.5.1) pode ser satisfeita, se

$$\mathcal{X}_p^+(A_p + \tilde{B}_p F_{op}) \cap \langle A_p | \tilde{\beta}_p \rangle = 0 \quad (4.5.2)$$

ou, devido a forma especial do sistema (ver 4.2.2), que

$$\mathcal{X}^+(A + B_p F_o) \cap \langle A | \beta_p \rangle = 0 \quad (4.5.3)$$

Se satisfizermos isto, poderemos ter certeza que toda a parte que é controlável será estável.

Nota: um estado instável, que não é controlável, não pode - sob hipótese nenhuma - ser influenciado, daí a formulação (4.5.3).

Condições e definições preliminares.

Para desenvolver as condições para solucionar o problema

precisamos ainda o conceito de \mathcal{R}^* e alguns lemas, tirados de [10], [15].

O conceito de um subespaço de controlabilidade foi introduzido em [9]: Um subespaço $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ é um subespaço de controlabilidade de (A, B_p) se $\mathcal{F}_0(\mathcal{R}) \neq \emptyset$ e se para algum $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{R})$ temos

$$\mathcal{R} = \langle (A + B_p F_0) | \mathcal{B}_p \cap \mathcal{R} \rangle . \quad (4.5.4)$$

\mathcal{R} é unicamente determinado para qualquer $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{R})$.

Se $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{X}$, onde $\mathcal{V}^* = \max. \mathcal{J}(A, B_p; \text{Ker } C)$, segue que o único subespaço máximo de controlabilidade $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{V}^*$, seguindo

[9, teor. 4.3], é:

$$\mathcal{R}^* = \langle A + B_p F_0 | \mathcal{B}_p \cap \mathcal{V}^* \rangle ; F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{F}_0(\mathcal{R}^*) . \quad (4.5.5)$$

Lema 4.5.1: [10, lema 4.1] : "Seja A, B_p, C, \mathcal{V}^* e \mathcal{R}^* dados.

Escrevendo $A_f = A + B_p F_0$; $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$ e definindo o mapeamento $\bar{A}_f: \mathcal{V}^*/\mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$ como segue: se \bar{x} é a classe lateral de x em $\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^*$, então $\bar{A}_f \bar{x} = \overline{A_f x}$, e \mathcal{R}^* e \bar{A}_f são únicos para cada $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$.

Particularmente, o polinômio característico de $A_f | \mathcal{V}^*$ tem a forma $\bar{\pi}(\lambda) \pi_f(\lambda)$, onde $\bar{\pi}(\lambda)$ é o polinômio característico de \bar{A}_f e é fixo para todo $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$; e $\pi_f(\lambda)$ é o polinômio característico de $A_f | \mathcal{R}^*$, cujas raízes podem ser fixadas arbitrariamente com a escolha de um $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$." (4.5.6)

Lema 4.5.2: [10, lema 4.2] : "Sob as condições do lema 4.5.1, seja $\bar{\alpha}(\lambda)$ o polinômio mínimo de \bar{A}_f e fatorando $\bar{\alpha}(\lambda) = \bar{\alpha}_g(\lambda) \bar{\alpha}_b(\lambda)$ onde $\bar{\alpha}_g(\lambda)$ e $\bar{\alpha}_b(\lambda)$ são primos entre si. Então $\mathcal{V}^* = \mathcal{R}^* \oplus \mathcal{R}_g \oplus \mathcal{R}_b$ onde

$$\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}_g = \mathcal{V}_g = \{x | x \in \mathcal{V}^*; \bar{\alpha}_g(\bar{A}_f)\bar{x} = \bar{o}\} \tag{4.5.7a}$$

e semelhantemente

$$\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}_b = \mathcal{V}_b \tag{4.5.7b}$$

Os subespaços $\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}_g$ e $\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}_b$ são fixos em relação a $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$."

Lema 4.5.3 [15, lema 3.3] :

$$\text{"Se } \mathcal{X}^+(A) \subset \langle A | \beta_p \rangle + \mathcal{V}^* \tag{4.5.8}$$

então

$$\sigma(A_m) \cap \mathcal{C}^+ \subset \sigma(\bar{A}_f) \text{ . . . } \tag{4.5.9}$$

Prova: Seja $\mathcal{Y} = \langle A | \beta_p \rangle + \mathcal{V}^*$

Então $A_f \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ para todo F_0

Seja $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$ e \bar{A}_f o mapeamento induzido em \mathcal{X}/\mathcal{Y} por A_f . (4.5.10)

$\bar{\bar{A}}_f$ é definido como segue : se \bar{x} é a classe lateral de x em $\mathcal{Y}/\mathcal{V}^*$, então $\bar{\bar{A}}_f \bar{x} = \bar{\bar{A}}_f \bar{x}$. (4.5.11)

\bar{A}_f é definido como no lema 4.5.1 .

Agora temos os seguintes mapeamentos induzidos:

$$\begin{aligned} \sigma(A_f) &= \sigma(A_f | \mathcal{Y}) \cup \sigma(\bar{A}_f) \\ &= \sigma(A_f | \mathcal{V}^*) \cup \sigma(\bar{\bar{A}}_f) \cup \sigma(\bar{A}_f) \\ &= \sigma(A_f | \mathbb{R}^*) \cup \sigma(\bar{A}_f) \cup \sigma(\bar{\bar{A}}_f) \cup \sigma(\bar{A}_f) \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

A visualização matricial é a seguinte:

$$A_f = A_f | \mathcal{Y} \left\{ \begin{array}{l} A_f | \mathcal{V}^* \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_f | \mathbb{R}^* & A_{103} & & \\ \hline & \bar{A}_f & A_{13} & \\ \hline & & \bar{\bar{A}}_f & A_3 \\ \hline & & & \bar{A}_f \end{array} \right] \end{array} \right.$$

Consideremos que (4.5.8) seja verdadeiro. Lembrando o lema 4.4.3 segue que $\mathcal{X}^+(A_f) \subset \mathcal{Y}$ para todo F_0 .

$$\text{Então } \sigma(\overline{A_f}) \cap C^+ = \emptyset$$

$$\text{e } \sigma(A_f) \cap C^+ \subset \sigma(A_f | \mathcal{Y}); \text{ donde}$$

$$\sigma(A_m) \cap C^+ \subset \sigma(A_f | \mathcal{Y}).$$

Do lema 4.5.1 sabemos que existe um $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$ tal que $\sigma(A_f | \mathcal{R}^*)$ é arbitrário. E utilizando a proposição que o par $(\overline{A_f}, \overline{B_p})$ é controlável se, e somente se, $\mathcal{X} = \langle A | B_p \rangle + \mathcal{V}$ - substituindo \mathcal{X} por \mathcal{Y} , podemos dizer a mesma coisa para $\sigma(\overline{A_f})$.

$$\text{Então } \sigma(A_m) \cap C^+ \subset \sigma(\overline{A_f}).$$

Mais algumas definições antes de formular o teorema:

Sejam $\pi_{A_m}(\lambda)$ e $\tilde{\pi}(\lambda)$ os polinômios característicos

de A_m e $\overline{A_f}$, respectivamente. (4.5.13)

Então, utilizando o lema 4.5.3, se (4.5.8) for verdadeiro, chegamos a

$$\tilde{\pi}(\lambda) = \pi_{A_m}^+(\lambda) \gamma(\lambda) \quad (4.5.14)$$

para algum polinômio $\gamma(\lambda)$ que, observando lema 4.5.1, é fixo para todo $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$.

Fatorando $\gamma(\lambda) = \gamma^+(\lambda) \gamma^-(\lambda)$, podemos escrever

$$\tilde{\pi}(\lambda) = \pi_{A_m}^+(\lambda) \gamma^+(\lambda) \gamma^-(\lambda). \quad (4.5.14a)$$

Chamemos α_{A_m} o polinômio mínimo de A_m e lembremos que

$$\bar{\alpha}(\lambda) = \bar{\alpha}_g(\lambda) \bar{\alpha}_b(\lambda), \text{ que é o polinômio mínimo de } \overline{A_f};$$

Dizemos ainda que

$$\bar{\alpha}_g(\lambda) | \pi_{A_m}^+(\lambda) \gamma^-(\lambda) \quad \text{e} \quad \bar{\alpha}_b(\lambda) | \gamma^+(\lambda).$$

O teorema.

Com todas estas definições podemos finalmente formular o seguinte teorema:

$$\text{" } \underline{\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}^* \text{ se, e somente se,}} \quad (4.5.16)$$

$$\underline{\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}_g} \quad (4.5.17)$$

sob a hipótese que

$$\underline{\pi_{A_m}^+(\lambda) \text{ e } \gamma^+(\lambda) \text{ são primos entre si e que}}$$

$$\underline{\langle A/\beta_p \rangle = \mathcal{X}^P \text{ (que é equivalente a planta seja controlável).}"$$

Prova: Assumimos que (4.5.16) é verdadeiro.

$x \in \mathcal{X}^+(A)$ implica $x = x_1 + x_2$ onde $x_1 \in \langle A/\beta_p \rangle$ e $x_2 \in \mathcal{V}^*$.

Da hipótese que $\pi_{A_m}^+(\lambda)$ e $\gamma^+(\lambda)$ são primos entre si, segue

que $\bar{\alpha}_g(\lambda)$ e $\bar{\alpha}_b(\lambda)$ também o são; e do lema 4.5.2 segue que

$x_2 = y^* + y_g + y_b$ onde $y^* \in \mathcal{R}^*$, $y_g \in \mathcal{R}_g$ e $y_b \in \mathcal{R}_b$.

Agora $y_b \in \mathcal{R}_b$ implica que $\bar{\alpha}_b(A_f)y_b \in \mathcal{R}^* \subset \mathcal{X}^P$.

Partimos $y_b = \begin{bmatrix} y_{b1} \\ y_{b2} \end{bmatrix}$ onde $\begin{bmatrix} y_{b1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{X}^P$.

Utilizando a estrutura do sistema (capítulo 4.2) segue que

$$\bar{\alpha}_b(A_m)y_{b2} = 0 \quad (4.5.18)$$

Mas como $\alpha_{A_m}(A_m) = 0$, e $\bar{\alpha}_b(\lambda)$ e $\alpha_{A_m}(\lambda)$ são primos entre

si, segue, para satisfazer (4.5.18), que

$$y_{b2} = 0.$$

Então $y_b \in \mathcal{X}^P = \langle A/\beta_p \rangle$ e podemos dizer que

$y_b + (y^* + y_g) = x_2 \in \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}_g$, donde

$$x \in \mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\mathbb{B}_p \rangle + \mathcal{V}_g .$$

Por outro lado, se $x \in \mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\mathbb{B}_p \rangle + \mathcal{V}_g$ onde $\mathcal{V}_g \subset \mathcal{V}^*$, é óbvio que (4.5.16) é verdadeiro.

"Agora dizemos - sob as condições do teorema, que satisfaz automaticamente as condições do capítulo 4.4) - que a parte controlável da planta - com $F_o \in \mathcal{F}_o(\mathcal{V}_g)$ - será estável."

Prova: Temos - para estabilizar - o espaço quociente $\mathcal{X}/\mathcal{V}_g$.

Escolhemos um $F_o \in \mathcal{F}_o(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{F}_o(\mathcal{V}_g)$.

Como $\bar{\alpha}_g(\lambda)$ e $\bar{\alpha}_b(\lambda)$ são primos entre si, segue do lema 4.5.2 que

$$\mathcal{V}^*/\mathcal{R}^* = \mathcal{V}_g/\mathcal{R}^* \oplus \mathcal{V}_b/\mathcal{R}^* = \bar{\mathcal{R}}_g \oplus \bar{\mathcal{R}}_b \quad (4.5.19)$$

que tem os polinômios mínimos $\bar{\alpha}_g(\lambda)$ e $\bar{\alpha}_b(\lambda)$, respectivamente.

$$\text{Se anotarmos com } \Lambda_1 = \bar{A}_f | (\mathcal{V}_g/\mathcal{R}^*) = \bar{A}_f | \bar{\mathcal{R}}_g \quad (4.5.20)$$

$$\text{e com } \Lambda_2 \text{ o mapeamento induzido em } \mathcal{X}/\mathcal{V}_g \text{ por } A_f \quad (4.5.21)$$

então

$$\begin{aligned} \sigma(A_f) &= \sigma(A_f | \mathcal{V}_g) \cup \sigma(\Lambda_2) \\ &= \sigma(A_f | \mathcal{R}^*) \cup \sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2) \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

Visualizado isto, temos:

$$A_f = A_f | \mathcal{V}_g \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c} \hline A_f | \mathcal{R}^* & A_{13} & \\ \hline \hline & \Lambda_1 & A_3 \\ \hline \hline & & \Lambda_2 \\ \hline \end{array} \right] \right.$$

Também, do sistema original (capítulo 4.2), temos para todo F_{op}

$$(A_f) = \sigma(A_p + B_p F_{op}) \cup \sigma(A_m) . \quad (4.5.23)$$

Lembrando o lema 4.5.1, sabemos que existe um $F_{01} \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$ tal que $\sigma(A_{F_{01}} | \mathcal{R}^*) \subset \mathcal{C}^-$.

Escolhemos agora $F_0 = F_{01} + \overline{F}_{02}Q \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}_g)$, onde $Q: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{V}_g$ é a projeção canônica e definimos o mapeamento $\overline{F}_{02}: \mathcal{X}/\mathcal{V}_g \rightarrow \mathcal{U}_p$. (4.5.24)

Então devido a este mapeamento podemos dizer que F_{02} não tem influência sob $\sigma(A_{F_0} | \mathcal{R}^*) = \sigma(A_{F_{01}} | \mathcal{R}^*)$

$$\text{e } \sigma(\overline{A}_{F_0} | \overline{\mathcal{R}}_g) = (\overline{A}_{F_{01}} | \overline{\mathcal{R}}_g) \quad (4.5.25)$$

Utilizando (4.5.17), escolhemos um \overline{F}_{03} tal que $\sigma(\Lambda_2) \subset \mathcal{C}^-$.

$\sigma(\Lambda_1)$ consiste de raízes de $\pi_{a_m}^+(\lambda) \gamma^-(\lambda)$ e dizemos que σ^- indica as raízes de $\gamma^-(\lambda)$.

Então, para $F_0 = F_{01} + \overline{F}_{03}Q$, segue que

$$\sigma(A_p + B_p F_{0p}) \subset \sigma(A_f | \mathcal{R}^*) \cup \sigma(\Lambda_2) \cup \sigma^- \quad (4.5.26)$$

O que é estável.

Finalizando este capítulo, vejamos como seria o método de ataque a um problema utilizando as ferramentas fornecidas por estes teoremas.

1. Verificar se $\beta_m \subset \beta_p + \mathcal{V}^*$ e $\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A | \beta_p \rangle + \mathcal{V}^*$.

2. Encontrar uma lei de controle utilizando \mathcal{V}^* .

3a. Admitir que esta lei de controle resolve as três condições:

i) $H(s, F_0, F_1) = 0$

ii) "Erro" (das condições iniciais) tende a zero, e

iii) a planta é estável,

então o problema já pode ser resolvido com $F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}^*)$

e F_1 tal que $\text{Im}(B_m + B_p F_1) \subset \mathcal{V}^*$.

3b. Admitimos agora que esta lei de controle torna a planta instável.

4. Então devemos decompor \mathcal{V}^* para encontrar um \mathcal{V}_g .

5. Verificamos se $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_p + \mathcal{V}_g$.

6. Admitimos que 5. é satisfeita, então podemos com

$F_0 \in \mathcal{F}_0(\mathcal{V}_g)$ e F_1 tal que $\text{Im}(B_m + B_p F_1) \subset \mathcal{V}_g$

resolver as três condições i), ii) e iii).

Vimos que podemos ter uma solução completa seja com \mathcal{V}^* ou com \mathcal{V}_g .

Capítulo 5): EXEMPLO

Neste capítulo vamos mostrar um exemplo e explicar como as diferentes condições podem ser aplicadas.

Seja a planta descrita por:

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_p(t)$$

$$y_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_p(t)$$

A matriz de transferência será: $H_p(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2}{(s-1)(s^2-2s-1)} & \frac{1}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2-2s-1)} \\ \frac{1}{s^2-2s-1} & 0 & \frac{(s-1)}{s^2-2s-1} \end{bmatrix}$$

onde $s^2-2s-1 = (s-1+\sqrt{2})(s-1-\sqrt{2})$.

O modelo, por nós construído, será:

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_m(t)$$

$$y_m(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x_m(t)$$

e a matriz de transferência:

$$H_m(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m$$

$$V^{(0)} = \mathcal{N}$$

$$V^{(i)} = \mathcal{N} A^{-1} (B_p + V^{(i-1)})$$

ou seja

$$V_o^\perp = \mathcal{N}^\perp$$

$$V_i^\perp = \mathcal{N}^\perp + A^t (B_p + V_{i-1})^\perp.$$

Utilizamos o segundo método:

$$V_o^\perp = \mathcal{N}^\perp = \mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right\}$$

Para o segundo passo precisamos $\mathcal{N}(B_p^t) = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$

$$V_1^\perp = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline & & & 1 \\ & & & -2 \\ & & & 3 \\ & & & 4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

Vimos que $V_1^\perp = V_o^\perp = V^{*\perp} = \mathcal{L}$, donde

$$V^* = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & \\ & & & & -2 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 4 & \end{array} \right) + \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \begin{array}{ccc} f_{11} & \cdots & f_{17} \\ f_{21} & \cdots & f_{27} \\ f_{31} & \cdots & f_{37} \end{array} \right) \quad \mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$$

se, e somente se

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f_{16} \\ f_{21} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f_{26} \\ f_{31} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f_{36} \end{bmatrix} \quad \text{para } f\text{'s arbitrários;}$$

e onde as outros f 's tem as seguintes relações:

$$f_{12} = f_{11} - 1 + a$$

$$f_{13} = -f_{16} - d - 4$$

$$f_{14} = -f_{11} + 2f_{16} - a - b + 2d + 5$$

$$f_{15} = f_{16} - c + d + 5$$

$$f_{17} = f_{11} - 2f_{16} + a + b - 2d - e + 4$$

$$f_{22} = f_{21} - a$$

$$f_{23} = -f_{26} + d$$

$$f_{24} = -f_{21} + 2f_{26} + a + b - 2d - 1$$

$$f_{25} = f_{26} + c - d$$

$$f_{27} = f_{21} - 2f_{26} - a - b + 2d + e + 1$$

$$f_{32} = f_{31} - 1$$

$$f_{33} = -f_{36} + 3$$

$$f_{34} = -f_{31} + 2f_{36} - 4$$

$$f_{35} = f_{36} - 5$$

$$f_{37} = f_{31} - 2f_{36} - 2$$

onde a, b, c, d, e são arbitrários.

Escolhemos um F_0 : seja $f_{11}, f_{21}, f_{31}, f_{26} = 0$; $f_{16} = -4$;

$$f_{36} = 3 ; a, b, c, d, e = 1 .$$

Segue que $F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$

Formando agora a matriz de transferência do sistema composto:

$$H(s, F_0, F_1) = C(sI - A - B_p F_0)^{-1} (B_m + B_p F_1),$$

onde $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & s-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & s & -2 & 2 & -3 & 8 \\ \hline & & & s-1 & & & \\ & & & & s+2 & & \\ & & & & & s-3 & \\ & & & & & & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde a inversa de $(sI - A_0)$ é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{s(s-1)} & \frac{s-2}{s(s-1)^2} & \frac{2}{s(s-1)(s+2)} & \frac{-3}{s(s-1)(s-3)} & \frac{-2s+8}{s(s-1)(s-4)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)(s+2)} & \frac{1}{(s-1)(s-3)} & \frac{-3}{(s-1)(s-4)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{-2}{s(s-1)} & \frac{2}{s(s+2)} & \frac{-3}{s(s-3)} & \frac{8}{s(s-4)} \\ \hline & & \frac{1}{s-1} & & & & \\ & & & \frac{1}{s+2} & & & \\ & & & & \frac{1}{s-3} & & \\ & & & & & \frac{1}{s-4} & \end{bmatrix}$$

pode-se verificar que $H(s, F_0, F_1) = 0$ que é o resultado desejado.

Para demonstrar a aplicação do capítulo 4.4) (desaparecimento de erros devidos a condições iniciais), sabemos que será necessário testar se

$$\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A|B_p \rangle + \mathcal{V}^*$$

onde $\mathcal{X}^+(A) = \{x: x \in \mathcal{X}; \alpha^+(A)x = 0\}$.

Tomando o mesmo exemplo, temos o polinômio característico

de A : $\det(sI - A) = \det(sI - A_p) \det(sI - A_m) =$

$$\det \begin{vmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} \det \begin{vmatrix} s-1 & & & \\ & s+2 & & \\ & & s-3 & \\ & & & s-4 \end{vmatrix}$$

Então $\gamma = (s-1)(s-1+2)(s-1-2)(s-1)(s+2)(s-3)(s-4)$

O polinômio mínimo de A será o polinômio mônico com menor grau tal que $\alpha(A) = 0$.

Fatorando $\alpha(\lambda) = \alpha^+(\lambda) \alpha^-(\lambda)$ encontramos $\alpha^+(A)$, donde podemos calcular o $\text{Ker} \alpha^+(A)$.

Utilizando o lema 4.1 de [15] sabemos que

$$\text{Ker} \alpha^\pm(A) = \text{Ker} \gamma^\pm(A).$$

Então poderíamos encontrar o $\mathcal{X}^+(A)$ a partir do polinômio característico que é sempre mais fácil de calcular que α .

Aqui neste exemplo, para verificar se $\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}^*$, precisamos $\langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

donde vemos que $\langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}^* = \mathcal{X}$.

Então a condição $\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}^*$ é satisfeita.

Outra parte, ainda importante, é a aplicação das condições do capítulo 4.5):

$\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}^*$ se, e somente se,

$\mathcal{X}^+(A) \subset \langle A/\beta_p \rangle + \mathcal{V}_g$, que só precisaríamos se a parte da planta não fosse estável com $F_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{V}^*)$ e podemos resolver o problema da estabilidade, eventualmente, com um $F_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{V}_g)$.

Lembrando, que queremos testar a parte $(A + B_p F_0)/V^*$,

vamos construir um operador S , que consiste de

$(v_1^*, \dots, v_5^*; r_1, r_2)$, uma base em \mathcal{X} .

(onde v_1^*, \dots, v_5^* formam uma base de V^*).

Mas como também precisamos a restrição $(A + B_p F_0)/(V^*/R^*)$

vamos primeiro calcular $R^* = \langle A + B_p F_0 | \mathcal{B}_p \cap V^* \rangle$

$$\mathcal{B}_p \cap V^* = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Calculando } (A + B_p F_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtemos R^* .

Formando S , obtemos

$$\left[\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow S^{-1} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{R^*} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{V^*} \quad \text{indep.}$

Fazendo o calculo: $S^{-1} (A + B_p F_0) S$ obtemos:

$$\begin{array}{c}
 (A + B_p F_0) / (\mathcal{V}^* / \mathcal{R}^*) \quad (A + B_p F_0) / \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 (A + B_p F_0)
 \end{array}$$

Calculando $\bar{\pi}(\lambda) = (s-1)(s+2)(s-3)(s-4)$

que, como se pode esperar, se $\dim(\mathcal{V}^*) - \dim(\mathcal{R}^*) = 4$,
 é igual ao π_{A_m} .

Só para mostrar como aplicar a condição "primos entre si":

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi}(\lambda) &= \pi_{A_m}^+ \gamma = \pi_{A_m}^+ \gamma^+ \gamma^- \\
 &= (s-1)(s-3)(s-4) \cdot 1 \cdot (s+2)
 \end{aligned}$$

Resultando disto, vimos que para este par planta-modelo

$\mathcal{V}_g = \mathcal{V}^*$ e que podemos sempre encontrar um F_0, F_1 tal que

$$H(s, F_0, F_1) = 0$$

$$e(t) \rightarrow 0$$

e

a planta será estável (com um $F_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{V}^*)!$):

Então, o F_1 será como foi escolhido e o F_0 vamos modificar um pouco:

Se tomarmos a parte $(A_p + B_p F_{op})$ na forma mais geral:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 1 + f_{21} & \vdots & 1 + f_{22} & \vdots & f_{23} \\
 f_{11} + f_{31} & \vdots & 2 + f_{12} + f_{32} & \vdots & 1 + f_{13} + f_{33} \\
 f_{31} & \vdots & 1 + f_{32} & \vdots & f_{33}
 \end{array} \right]$$

ou levarmos em conta as restrições da classe (tal que $H(s) = 0$), obtemos

$$\begin{bmatrix} 1+f_{21} & \vdots & 1+f_{21}-a & \vdots & -f_{26}+d \\ f_{11}+f_{31} & \vdots & 2+f_{11}-1+a+f_{31}-1 & \vdots & 1-f_{16}-d-4+3-f_{36} \\ f_{31} & \vdots & 1+f_{31}-1 & \vdots & -f_{36}+3 \end{bmatrix}$$

Então simplesmente se escolhemos $f_{11}, f_{31} = 0$ temos uma matriz triangular onde os autovalores podem ser ajustados com a escolha de f_{21} , a , f_{36} .

Capítulo 5): CONCLUSÕES

Vimos no capítulo 4.1) que a eliminação dos pares planta-modelo que não darão solução pode ser feita só por observação das matrizes de transferência. E, em alguns casos especiais, podemos mesmo afirmar se o par terá uma solução ou não.

Vimos também que este trabalho parece ser o primeiro que trata da influência das condições iniciais para o APM.

Um outro ponto importante a mencionar:

A solução deste trabalho permite adaptar uma planta a um modelo, que é instável, e a planta fica internamente estável. Este é um ponto interessante porque estudar o comportamento de uma planta instável é praticamente impossível, mas podemos estudar o comportamento de um modelo, que é instável e depois simplesmente adaptar a planta a este modelo, já sabendo quais serão os resultados.

Para trabalhos futuros podemos sugerir o estudo, baseado nessas formulações gerais, de alguns casos especiais, como p. e. a influência de zeros da matriz de transferência da planta, quando eles estão no semiplano à direita. Eles terão o mesmo efeito que no caso escalar, quando causavam instabilidade pela necessidade de serem cancelados por polos no semiplano à direita?

Também será necessário estudar o problema da sensibili-

dade, que, observando as classes de $\mathcal{F}(U^*)$ no exemplo, é bastante grande.

Dizemos então, que este trabalho fornece uma base realística e geral para resolver o APM, mas que tem ainda pontos interessantes a tratar, que podem ser objeto de estudos futuros.

Capítulo 6): BIBLIOGRAFIA

- 1 J. S. Tyler, Jr., "The characteristics of model-following systems as synthesized by optimal control," IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-9, pp. 485-498, Oct. 1964.
- 2 Chester A. Winsor and Rob J. Roy, "The application of specific optimal control to the design of desensitized model following control systems", IEEE Trans. on Automat. Contr. Vol. AC-15, pp. 326-333, June 1970.
- 3 Patrick C. Parks, "Liapunov redesign of model reference adaptive control systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-11, pp. 362-367, July 1966.
- 4 R. J. Kavanagh, "Multivariable Control system synthesis", AIEE Trans. (Appl. Ind.), vol. 77, pp. 425-429, Nov. 1958.
- 5 A. Stephen Morse, "Structure and design of linear model following systems", IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-18, no. 4, August 1973.
- 6 W. A. Wolovich, "The application of state feedback-invar. to exact model matching", 5th Annual Princeton Conf. Information Science and Systems, Princeton, N.J., Mar. 1971.
- 7 S. H. Wang and C. A. Desoer, "The exact model matching of linear multivariable systems", IEEE Trans. Automat. Contr., (Short Papers), vol. AC-17, pp. 347-349, June 1972.
- 8 Bruce C. Moore and Leonard M. Silverman, "Model matching by state feedback and dynamic compensation", IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-17, pp. 491-497, Aug. 1972.

- 9 W. M. Wonham and A. S. Morse, "Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach" SIAM J. Contr., vol. 8, no.1, February 1970.
- 10 A. S. Morse and W. M. Wonham, "Decoupling and pole assignment by dynamic compensation", SIAM J. Contr., vol. 8, no. 3, Aug. 1970.
- 11 A. Stephen Morse and W. M. Wonham, "Status of noninteracting control", IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-16, no. 6, December 1971.
- 12 A. S. Morse, "Structural invariants of linear multivariable systems", SIAM J. Contr., vol. 11, no. 3, August 1973.
- 13 S. P. Bhattacharyya, "Disturbance isolation in linear syst. by combined feedback and feedforward control", Proc. of the 1973 IEEE Conf. on Decision and Contr., paper TA3-6, Dec.73. pp. 331-333, San Diego, California.
- 14 S. P. Bhattacharyya , J. B. Pearson and W. M. Wonham, "On Zeroing the output of a linear system", Information and Control, vol. 20, no. 2, March 1972.
- 15 S. P. Bhattacharyya and J. B. Pearson, "On erro systems and the servomechanism problem", Int. J. Contr. 1972, vol. 15, no. 6, pp. 1041-1062.
- 16 W. M. Wonham and J. B. Pearson, "Regulation and internal stabilization in linear multivariable systems", Control system report no. 7212, Aug. 1972, Dept. of Electr. Eng., Univ. of Toronto, Canada.
- 17 Chi-Tsong Chen, "Introduction to linear system theory", Copyright 1970 by Holt, Rinehart and Winston, Inc.

- 18 F. R. Gantmacher, " Théorie des matrices, tome I," traduit de la langue russe par Ch. Sarthou. DUNOD, Paris, 1966.
- 19 W.A. Wolovich, " on determining the Zeros of statespace systems", IEEE Trans.Automat. Contr., pp. 542 - 544, Oct. 1973.
- 20 W. M. Wonham, "On pole assignment in multi-input control. linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC - 12, pp. 660 - 665, December 1967.
- 21 K. Hoffmann e R. Kunze, "Algebra Linear", Tradução de A. P. Bergamasco, Editora da Univ. d. São Paulo, Poligono, 1971.
- 22 W.M. Wonham, "Tracking and Regulation in linear multi-variable Systems." SIAM J. Control, Vol. 11, No. 3, Aug. 1973, pp. 424 - 437 .
- 23 W. A. Wolovich, " On the Numerators and Zeros of Rational Transfer Matrices," Brown University Engineering Report GK - 27868 - B1, Brown Univ., Providence, R.I., Jan.1973.
- 24 W.A. Wolovich & P.L. Falb," On the structure of Multi-variable Systems." SIAM J. Contr. Vol. 7, No. 3, Aug. 1969.
- 25 L. M. Silverman & H.J. Payne, "Input-output structure of Linear Systems with Application to the Decoupling problem," SIAM J. Control, vol. 9., No. 2, May 1971.