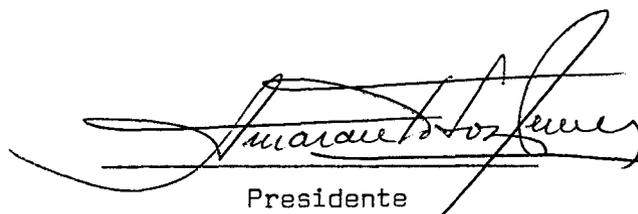
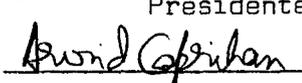
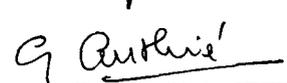


"CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA IDENTIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE SIS-  
TEMAS FÍSICOS DINÂMICOS NÃO-LINEARES"

LOURDES ZMETEK

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Presidente  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_  
  
\_\_\_\_\_

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
MAIO DE 1973

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Prof. Amaranto Lopes Pereira pela sua orientação e pela solidariedade prestada.
- Ao Prof. Jacques Villières pela ajuda na simulação digital.
- Aos Profs. Gerard Authié, Arvind Caprihan e Daniel Dejean pela participação na banca examinadora.

S U M Á R I O

Na presente Memória, os principais resultados de uma pesquisa teórico-experimental visando uma contribuição ao estudo da IDENTIFICAÇÃO TOPOLÓGICA de um grupo de classes de sistemas dinâmicos não-lineares são apresentados.

O trabalho focaliza o estudo analítico e experimental (com o auxílio da simulação digital) de vinte e quatro estruturas não-lineares constituídas pela associação em cascata de blocos lineares, estacionários e de primeira ordem e de blocos não-lineares do grupo dos relés polarizados. Testes hierarquizados especialmente concebidos para o estudo das propriedades estruturais internas e externas das cadeias escolhidas foram experimentados com sucesso.

A B S T R A C T

The present Memorandum presents the main results of a theoretical-experimental research effort, aiming at a contribution in the study of TOPOLOGICAL IDENTIFICATION of certain classes of dynamical systems.

The work combines experimental and analytical approaches (with the aid of a digital simulation) of 24 nonlinear structures defined by the cascade association of linear stationary and first order blocks with nonlinear blocks employing a group of polarized relays. Hierarchized tests especially conceived for the study of internal and external structural properties of selected combinations are determined and experimentally verified.

I N D I C E

AGRADECIMENTOS .....	i
SUMÁRIO .....	ii
ABSTRACT .....	iii
INDICE .....	iv
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I .....	2
I.1 - Considerações gerais .....	3
I.1.1 - Identificação - Conceituação segundo L.A. Zadeh .....	3
I.1.2 - Identificação como um dos problemas básicos da teoria moderna dos sistemas .....	4
I.1.3 - Princípio de um método de identificação de sistemas físicos dinâmicos não-lineares baseados na idéia de decomposição estrutural..	5
I.1.4 - Comparação entre alguns métodos usados para identificação de processos (sistemas) .....	7
I.2 - Sistemas não-lineares .....	11
I.2.1 - Considerações gerais sobre sistemas não-lineares .....	11
I.2.2 - Sistemas não-lineares .....	13
I.3 - Revisão de alguns conceitos básicos da teoria geral de sistemas .....	17
I.3.1 - Sistema dinâmico na concepção de R.E.Kalman	17
I.3.2 - Noções de sistema e de estado no sentido de L.A. Zadeh .....	18

I.3.3 - As definições de R.E.Kalman e L.A.Zadeh e o problema de identificação .....	20
I.3.4 - Conceitos de equivalência .....	22
I.3.5 - Observabilidade de sistemas não-lineares ..	23
I.4 - Características de algumas não-linearidades mais conhecidas .....	23
I.5 - Sistemas e Estruturas .....	25
I.5.1 - Diagrama de blocos .....	25
I.5.2 - Natureza e características dos blocos utilizados .....	26
I.5.3 - Sinais de teste .....	28
I.5.4 - Teste em escalão (teste nº 1) .....	31

## CAPÍTULO II

II.1 - Estudo das propriedades estruturais externas e topológicas de cadeias não-lineares .....	33
II.1.1 - Princípio do método de decomposição estrutural .....	33
II.2 - Teste nº 1 (resposta temporal) - Cadeia do tipo A	36
II.2.1 - Análise de uma estrutura típica contendo um relé ideal e um relé com zona morta .....	37
II.2.2 - Análise de uma estrutura típica contendo um relé ideal e um relé com histerese .....	39
II.2.3 - Análise de uma estrutura típica contendo um relé ideal e um relé com zona morta e histerese .....	40
II.2.4 - Análise de uma estrutura típica contendo dois relés ideais de características diferentes	41

II.3 - Teste nº 1 - Cadeia do tipo B .....	44
II.3.1 - Estrutura típica contendo um relé ideal e um relé com zona morta .....	44
II.3.2 - Estrutura típica contendo um relé ideal e um relé com histerese .....	45
II.3.3 - Estrutura típica contendo um relé ideal e um relé com zona morta e histerese .....	46
II.3.4 - Estrutura típica contendo um relé com zona morta e um relé ideal .....	48
II.3.5 - Tempo de comutação considerando o caso geral de um bloco linear entre dois blocos não-li- neares .....	50
II.3.6 - Equações de saída para a cadeia do tipo A considerando o caso da estrutura contendo relé ideal e relé com zona morta .....	52
II.3.7 - Equações de saída para a cadeia do tipo B - caso de uma estrutura contendo relé com zona morta e relé ideal .....	56
II.3.8 - Conclusões obtidas através da aplicação do teste nº 1 .....	60
II.4 - Teste nº 2 - Resposta temporal com teste de reconhe- cimento da presença de histerese na última não-line- aridade da cadeia .....	62
II.4.1 - Aplicação do teste à cadeia do tipo A ..	63
II.4.2 - Aplicação do teste à cadeia do tipo B ...	73
II.4.3 - Conclusões sobre o teste nº 2 .....	80
II.5 - Teste nº 3 - Equações e gráficos dos tempos de comu- tação .....	81

II.5.1 - Tempos de comutação com $\beta$ constante e $\alpha$ variável - Cadeia do tipo A .....	82
II.5.2 - Tempos de comutação com $\alpha$ constante e $\beta$ variável - Cadeia do tipo A .....	83
II.5.3 - Tempos de comutação para cadeia do tipo B .....	84
II.5.4 - Conclusões sobre o teste nº 3 .....	86
II.6 - Teste nº 4 - Característica Estática .....	86
II.7 - Conclusão .....	88
 CAPÍTULO III	
III.1 - Introdução .....	90
III.2- Teste nº 1 .....	90
III.3- Teste nº 2 .....	115
III.4- Teste nº 3 .....	136
III.5- Teste nº 4 .....	142
CONCLUSÕES .....	149
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	152
APÊNDICE .....	155

## I N T R O D U Ç Ã O

O presente trabalho contem-se no âmbito mais geral do problema IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS NÃO LINEARES , inserido no Projeto MODELAGEM E CONTROLE DE SISTEMAS FÍSICOS, uma das linhas de pesquisa vigentes no PROGRAMA DE ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO DA COPPE/UFRJ.

Não constituiu o objetivo imediato da pesquisa por nós empreendida e que serviu de base à presente memória de tese o desenvolvimento das diferentes etapas que compreendem um método de identificação nem muito menos sua aplicação a um problema concreto. Antes, a orientação preconizada foi a da preparação dos indispensáveis elementos de informação com os quais será possível, em uma etapa posterior o completo equacionamento e consequente solução do problema da identificação de uma bem definida classe de sistemas dinâmicos não lineares, através de um MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO ESTRUTURAL. Tal método, onde são introduzidas as noções de FAMÍLIA e de GRUPO e onde é redefinida a noção de CLASSE, preconiza como condição necessária à sua aplicabilidade o estudo preliminar em nível de análise das propriedades estruturais internas de um conjunto de cadeias integradas por um número finito de componentes lineares e não lineares, de natureza estática com e sem memória. O estudo de tais propriedades estendido a uma família de classes de estruturas não lineares com as características acima citadas, constitui assim a infra-estrutura sobre a qual se apoiará a IDENTIFICAÇÃO TOPOLÓGICA de sistemas físicos não lineares cujo comportamento

externo possa ser admitido qualitativamente equivalente ao das diferentes cadeias estruturais suscetíveis de serem analisadas.

No trabalho que ora apresentamos, nos ativemos ao grupo dos relés e às estruturas contendo no máximo quatro blocos em série (associação do tipo cascata), em que os lineares foram supostos invariantes com o tempo e de primeira ordem, enquanto os não lineares foram escolhidos dentre os relés do tipo polarizado. Um total de 24 estruturas teve suas propriedades intrínsecas e extrínsecas determinadas com o auxílio de 4 testes especiais. A verificação experimental foi procedida através de uma simulação em computador digital, cuja utilização nos pareceu mais cômoda que a de um computador analógico capaz, como sabemos, de fornecer uma solução contínua.

A parte essencial da pesquisa realizada compreendendo gráficos, desenvolvimentos analíticos, programa de computação e considerações teóricas básicas ao estudo do problema abordado, acha-se exposta nos três capítulos e dois apêndices que se seguem.

## C A P Í T U L O I

### I. 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

#### I.1.1 - IDENTIFICAÇÃO - CONCEITUAÇÃO SEGUNDO L.A. ZADEH:

Segundo L.A. Zadeh <sup>21</sup>, a identificação ou "problema da caixa preta" - que é, em última análise, a determinação das relações entrada-saída de um sistema dinâmico por meios experimentais, ocorre em vários ramos da ciência, de maneiras as mais diversas. Alguns autores denominam ainda este problema pelos nomes de: "caracterização", "mensuração" ou "avaliação". O nome mais utilizado entretanto é o de identificação.

A formulação do problema é essencialmente a seguinte:

Sendo dados:

1) Uma "caixa preta" B, cuja relação entrada - saída não é conhecida a priori.

2) O espaço de entrada de B (domínio), isto é, a classe de funções do tempo na qual a operação com B é definida.

3) A classe de caixas pretas C, na qual (como informação a priori) B está contida:

Pede-se determinar, pela observação da resposta de B, para várias entradas, um membro de C que seja equivalente a B, no sentido de que as respostas do referido membro a to -

das as funções do tempo no espaço de entrada de  $B$ , sejam idênticas às respostas de  $B$ .

### 1.1.2 - IDENTIFICAÇÃO COMO UM DOS PROBLEMAS BÁSICOS DA TEORIA MODERNA DOS SISTEMAS :

Considerando-se a sua importância e os resultados até aqui obtidos, forçoso é reconhecer que o estudo do "Problema de Identificação" <sup>17</sup> ainda está longe de ser esgotado, mormente se observarmos os diferentes aspectos que no mesmo devem ser considerados.

O "Problema da Caixa Preta", relaciona-se no que se refere aos dados necessários à sua determinação, a dois outros problemas não menos importantes: o da "caracterização" e o da "classificação" de sistemas.

O "Problema da caracterização" consiste na representação sob forma matemática das relações entrada-saída. De uma maneira geral, a relação entrada-saída é expressa em termos de um conjunto finito, ou pelo menos calculável, de operadores lineares (com ou sem memória) e de operadores não lineares (com ou sem memória).

O "Problema da classificação" pode ser apresentado da seguinte maneira: sendo dada uma "caixa preta"  $B$  e uma família de classes de sistemas  $C_1, C_2, \dots, C_\lambda, \dots, C_n$  tal que  $B$  pertença a uma destas classes, por exemplo  $C$ , o problema consiste em determinar  $C$  a partir da observação das respostas de  $B$ , para di-

ferentes entradas.

O "Problema da identificação" de um sistema B implica necessariamente na determinação de suas características através da observação de suas respostas a entradas experimentais. Mais precisamente, sendo dada uma classe de sistemas C (com cada membro de C completamente caracterizado), o problema consiste em determinar um sistema em C que seja equivalente a B.

A identificação de um sistema apresenta algumas dificuldades operacionais como por exemplo a presença de ruído na observação da entrada e/ou saída, a falta de conhecimento do estado inicial do sistema submetido aos testes, etc.

### 1.1.3 - PRINCÍPIO DE UM MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS DINÂMICOS NÃO LINEARES BASEADOS NA IDÉIA DE DECOMPOSIÇÃO ESTRUTURAL <sup>17</sup>

É grande o número de recursos matemáticos disponíveis para o tratamento de problemas envolvendo a hipótese de linearidade, o que tem contribuído de forma decisiva para o desenvolvimento de métodos e técnicas de identificação aplicáveis aos sistemas físicos considerados lineares. No caso da identificação de sistemas físicos comportando não-linearidades, entretanto, é bem menor o número de contribuições originais e de métodos susceptíveis de aplicação prática.

O método aqui referido é uma tentativa de formula

ção e de encaminhamento da solução em termos qualitativos e quantitativos do problema de identificação de um Família de Classes<sup>17</sup> de sistemas não-lineares, dos tipos com ou sem memória e cujo comportamento externo é similar ao de estruturas constituídas por uma dada combinação de componentes ou sub-sistemas em número finito. Esses sub-sistemas representam as partes lineares e não-lineares, supostas separáveis, do sistema.

A formulação do Problema de identificação de um sistema físico dinâmico com características não-lineares com ou sem memória, será então a seguinte:

"Tem-se um sistema físico dinâmico  $\theta$  cuja estrutura interna é inacessível e cujo modelo matemático não é conhecido "a priori" .

São dados:

- Um conjunto  $T$  dos reais (conjunto dos tempos)
- Um conjunto  $U$  de valores de entrada
- Um conjunto  $\Omega$  de funções aceitáveis de entrada , tal que:

$$\Omega = \{\omega: T \rightarrow U\}$$

Supondo-se que  $\theta$  pertence a uma família  $F$  de classes  $C_1, C_2, \dots, C_\lambda, \dots, C_n$  ( $n$  finito) de sistemas cujo comportamento qualitativo externo pode ser assimilado ao de um conjunto de estruturas constituídas por uma dada associação de um número finito de componentes (sub-sistemas) lineares ou não-lineares com

ou sem memória, pede-se:

a) pela observação da resposta de  $\theta$  a um conjunto ordenado de sinais de teste  $\omega \in \Omega$ , e com valores em  $U$ , determinar um elemento  $C_\lambda$  de  $F$  que tenha as mesmas características externas de  $\theta$ . O referido elemento definirá a classe de  $\theta$ . A sua composição estrutural interna será dita equivalente àquela de  $\theta$  (identificação topológica).

b) a partir da estrutura topológica equivalente do sistema e utilizando sinais de entrada  $\omega \in \Omega$  e com valores em  $U$  correspondentes às condições normais de operação do Sistema, determinar os parâmetros dos diferentes componentes ou "objetos" dessa estrutura (estimação paramétrica).

c) determinada parametricamente a estrutura topológica equivalente, estabelecer o modelo matemático do sistema, tendo em vista o seu objetivo e dentro da precisão que tenha sido previamente fixada (representação global)".

Estas são as três etapas essenciais em que pode ser dividido o problema da identificação.

#### 1.1.4 - COMPARAÇÃO ENTRE ALGUNS MÉTODOS USADOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE PROCESSOS (SISTEMAS)

Dentre os vários métodos de identificação que tem feito objeto da literatura técnica especializada, podemos citar os seguintes<sup>4</sup>:

- Método da deconvolução numérica
- Método da auto-correlação e da correlação mútua
- Método da densidade espectral
- Método da medida da resposta harmônica
- Método dos modelos experimentais
- Método baseado na Teoria de Wiener relativa aos sistemas não-lineares
- Método da aproximação diferencial
- Método utilizando as técnicas de Gradiente
- Método de quase linearização
- Método levando em conta as condições de invariância

O "Método da Deconvolução Numérica" dá bons resultados para sistemas lineares sem ruído. Aliás, como sabemos, as não-linearidades e o ruído introduzem oscilações no resultado. Para eliminar essas oscilações é necessário uma idealização na curva de entrada e saída.

Para o "Método de Auto-correlação e correlação mútua" é necessário que o sinal estocástico de entrada e de saída seja estacionário ou pelo menos aproximadamente estacionário. Esta condição e ainda o longo tempo de computação exigido na aplicação do método constituem os seus maiores inconvenientes.

O "Método da densidade espectral" é usado para sistemas lineares invariantes no tempo. Este método exige que os dados de entrada e saída sejam estacionários no intervalo de tempo

interessando a identificação do sistema.

A "Medida da Resposta Harmônica" é um método que se aplica a sistemas lineares variáveis com o tempo. Há uma certa dificuldade em sua aplicação quando a ordem do sistema é elevada.

O "Método dos modelos experimentais" está limitado aos casos em que os sinais de entrada sejam diferentes de zero, dentro de um intervalo de tempo apreciável.

A Teoria de Wiener de sistemas não-lineares conduz em última análise a uma equação de aparente simplicidade. Aparente porque na realidade um número infinito de operações envolve a equação acima referida. Torna-se necessário então uma limitação das operações, mas por outro lado, a análise do erro causado por essa limitação e seu efeito podem ser extremamente difíceis. Além disto, um sinal de teste especial precisa ser aplicado dentro de um long intervalo de tempo. Também não são considerados os casos de sistemas variáveis com o tempo nem de sistemas instáveis.

O da "Aproximação diferencial" é um método que consiste na escolha de um conjunto de parâmetros numa equação diferencial de maneira a comparar suas trajetórias com uma função de tempo dada. Computacionalmente é bastante simples mas, particularmente quando um ruído aleatório intervem, ou quando a escolha do modelo é pobre, este método torna-se inferior aos métodos baseados na Teoria de Controle Ótimo.

Os métodos que se seguem são baseados na Teoria do

Controle Ótimo: Método de Gradiente, o da Quase-Linearização e o Método das Condições de Invariância

O "Método de Gradiente" tem sido frequentemente utilizado para a solução computacional de problemas de sistemas de controle ótimo. A idéia básica no método é satisfazer os vínculos impostos a um sistema de equações diferenciais, enquanto são efetuadas repetições nos sinais de controle, de tal forma que cada nova repetição melhore a função a ser minimizada. A principal vantagem desse método é a independência de convergência no cálculo inicial da trajetória. Infelizmente, a convergência das repetições próximas do ótimo, geralmente vai se tornando cada vez mais vagarosa quanto mais nos aproximamos do mínimo.

A "quase-linearização" é uma técnica por meio da qual um problema não linear, é transformado num problema linear, de solução mais imediata. O emprego da técnica computacional de quase-linearização no controle ótimo e na identificação de sistemas é de particular interesse nos sistemas de controle encontrados na engenharia. Para a solução computacional existe uma dificuldade. Esta prende-se ao fato de que a região de convergência é algumas vezes muito pequena.

A maior vantagem do "Método de condições de invariância" é ser o mesmo de natureza sequencial. Sua região de convergência para a solução de problemas de controle ótimo, é consideravelmente maior que a obtida pelo método de quase-linearização. É necessário observar, no entanto, que a estimação do estado inicial

e dos parâmetros, está consideravelmente em erro, o que é explicado pelo tempo relativamente longo de estimação. Na maior parte dos casos torna-se difícil distinguir o "valor atual" do valor estimado.

### 1.2.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE SISTEMAS NÃO LINEARES

Talvez a melhor definição para sistemas não lineares é a de que são, simplesmente, todos os sistemas que não são lineares.

Para entendermos portanto melhor, os sistemas não lineares, façamos antes um rápido estudo dos lineares.

Classicamente, podemos definir <sup>16</sup> um sistema linear como o capaz de verificar as seguintes hipóteses:

1) Hipótese da Homogeneidade: Se todas as excitações que agem sobre um sistema linear forem multiplicadas por um certo fator constante, as respostas correspondentes resultam multiplicadas pelo mesmo fator. Em resumo, a amplitude das respostas é proporcional à das excitações.

2) Hipótese da Superposição: Se várias excitações atuam simultaneamente sobre um sistema linear, o efeito produzido é igual à soma das respostas obtidas se cada uma das entradas agisse isoladamente.

Topics in Mathematical System Theory) permitem definir um sistema linear por sua resposta a certos sinais ditos elementares, permitindo reconstituir uma excitação qualquer por superposição de uma infinidade desses sinais.

Podemos definir de maneira sucinta a resposta a três desses sinais elementares, correntemente utilizados na identificação de sistemas físicos dinâmicos, sobretudo nos admitidos como lineares.

- Resposta impulsiva ou resposta ao impulso unitário ou de Dirac.
- Resposta indicial ou resposta ao degrau unitário.
- Resposta harmônica ou resposta à excitação senoidal.

O regime permanente harmônico é particularmente importante, pois a resposta a uma excitação senoidal aplicada a um sistema linear é uma senóide de mesma frequência. E, ainda mais, a composição espectral da excitação se encontra integralmente na resposta.

Do ponto de vista matemático, os sistemas lineares são comumente descritos por equações diferenciais lineares ordinárias, paramétricas ou a derivadas parciais, estas últimas no caso de sistemas físicos a constantes distribuídas, por exemplo.

Em rigor, não existem sistemas materiais que sejam perfeitamente lineares. Entretanto pode-se representar um sistema dado, dependendo da precisão requerida, por um modelo linear, desde que se considere um domínio de funcionamento limitado.

Para um sistema linear, a estabilidade é uma propriedade intrínseca independente da natureza e da amplitude das excitações exteriores às quais esteja submetido o referido sistema.

### 1.2.2 - SISTEMAS NÃO-LINEARES

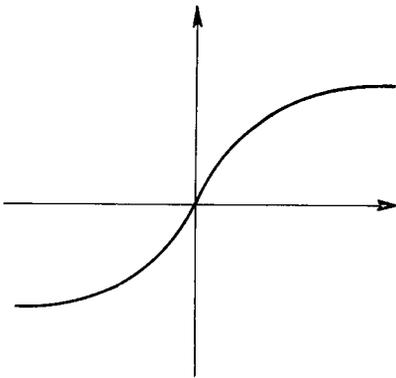
A definição de sistemas não-lineares<sup>15</sup> é, como já vimos, puramente negativa. O vocábulo se aplica portanto a sistemas muito diferentes entre si e dos quais se pode estudar apenas algumas classes.

Os sistemas não-lineares não satisfazem a nenhuma das hipóteses enunciadas para os sistemas lineares. Em particular, se uma excitação senoidal<sup>10</sup> é aplicada a um sistema não-linear, a resposta periódica resultante contém, em geral, uma outra componente fundamental da mesma frequência, uma componente contínua e harmônicos de frequência múltiplas da fundamental.

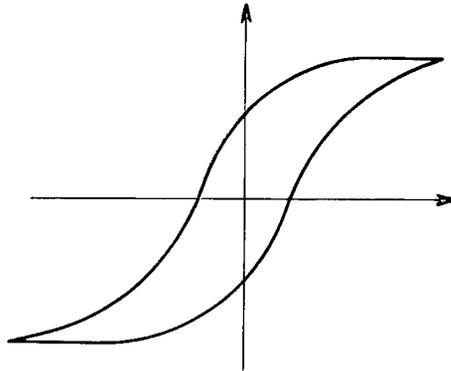
As não linearidades são susceptíveis de serem classificadas de várias maneiras.

Para a aplicação de métodos matemáticos é importante distinguir-se as não-linearidades contínuas das descontínuas<sup>4</sup>.

Exemplos de não-linearidades contínuas: Fig I.1 (a,b)

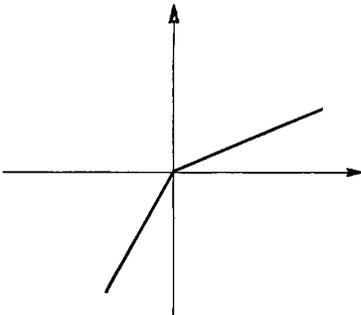


a) Saturação com Curvatura

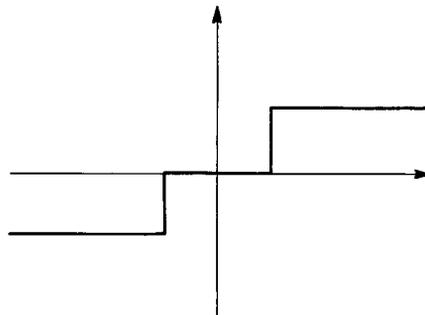


b) Histerese

Exemplos de não-linearidades descontínuas: Fig.I.1(c.d)



(c)



(d)

FIG. I.1

Por outro lado, pode-se distinguir elementos não-lineares apresentando-se uma relação bi-unívoca entre a entrada e a saída daqueles em que a saída é uma função não uniforme da entrada (presença de histerese, por exemplo).

Finalmente, pode-se considerar uma distinção ainda mais fundamental que é a que separa não-linearidades parasitas ou acidentais de não-linearidades voluntárias ou essenciais. As primeiras resultam da limitação de materiais, de imperfeições na realização, conseqüentes do fato de ter o projetista idealizado e-

lementos lineares. Seu efeito é dos mais desfavoráveis do ponto de vista do desempenho do sistema. As segundas - não-linearidades essenciais - resultam de uma intenção deliberada do projetista, seja para simplificar a realização, seja para obter certos desempenhos particulares, como ocorre por exemplo no emprego de relés em sistemas de controle.

### I.2.3 - LIMITAÇÃO DOS MÉTODOS LINEARES

O estabelecimento do modelo matemático de um sistema físico, ou seja, a descrição do comportamento desse sistema por equações, implica em certas aproximações que visam sobretudo evitar a complexidade do tratamento de equações de ordem elevada e as complicações de cálculo<sup>15</sup>. Procura-se, então, obter um modelo que pelo menos seja capaz de descrever qualitativamente o comportamento observado.

Supondo-se que as variáveis de um sistema tem uma amplitude suficientemente pequena, podemos descrevê-lo por uma equação diferencial ordinária linear a coeficientes constantes.

A hipótese da linearidade não é válida quando se exige um modelo mais preciso do sistema considerado, ou seja, quando se procura uma correspondência também quantitativa. Por outro lado, não devemos perder de vista que certos sistemas não podem ser linearizados, nem mesmo como uma aproximação grosseira. É o caso dos sistemas de características descontínuas, como os relés, por exemplo.

Certos fenômenos encontrados frequentemente na prática também não podem ser explicados a partir de um modelo linear como no caso da limitação de amplitude (auto-oscilação) encontrada nos osciladores.

Para melhorar assim a descrição matemática de um sistema de estrutura física conhecida, devemos fazer aproximações um pouco menos grosseiras e levar em conta as não-linearidades das características de certos dos seus componentes.

De uma maneira geral, dois métodos possíveis de naturezas diferentes podem ser considerados no estudo de sistemas não-lineares:

- O primeiro é o método matemático, e tem por objeto o estudo dos sistemas não-lineares a partir de uma caracterização matemática de diversas classes desses sistemas. O conhecimento das propriedades das soluções das equações correspondentes a cada uma dessas classes, servirá de base ao estabelecimento de um modelo do sistema, capaz de dar conta de seu comportamento global.

- O segundo, método físico, consiste em: a partir de não-linearidades simples como por exemplo o relés, a saturação, a histerese, a zona morta, etc., formar classes de sistemas não-lineares caracterizados pela presença de uma ou mais não-linearidades do tipo dado. Pesquisa-se então, experimentalmente, os "atributos pertinentes" às classes em questão, após o que, por um processo de análise procura-se obter as equações globais dos sistemas caracterizados pela presença das características não-lineares em

causa.

### I.3 - REVISÃO DE ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA GERAL DE SISTEMAS

#### I.3.1 - SISTEMA DINÂMICO NA CONCEPÇÃO DE R.E. KALMAN<sup>1 2</sup>

Um sistema dinâmico  $\Sigma$  é uma estrutura matemática abstrata definida por um séptuplo:

$$\Sigma = ( T, U, Y, X, \Omega, \Gamma, \phi )$$

com :

$$t \in T$$

$$x \in X$$

$$y \in Y$$

onde

T- é um dado conjunto dos tempos. Pode ser contínuo ou discreto.

U - é um conjunto de valores de entrada (contínuo ou discreto) , tal que:

$$U = \{u(t), t\} \quad , \quad t \in T$$

Y - é um conjunto de valores de saída que pode também ser contínuo ou discreto, tal que:

$$Y = \{y(t), t\} \quad , \quad t \in T$$

X - é um conjunto, não vazio (contínuo ou discreto), dos estados

do sistema.  $E$  é o espaço de estado.

$\Omega$  - é um conjunto de funções (aceitáveis ou admissíveis) de entrada.

$\Omega = \{\omega : T \rightarrow U\}$  , gozando das propriedades de não trivialidade e concatenação de entradas.

$\Gamma$  - é um conjunto de funções de saída

$$\Gamma = \{\gamma : T \rightarrow Y\}$$

$\phi$  - é uma função de transição de estado

$\phi = T \times T \times X \times \Omega \rightarrow X$  , tendo as propriedades de direcionalidade do tempo, consistência, composição e causalidade. A definição de sistema dinâmico de Kalman é ainda complementada por uma relação de saída:

$$n : T \times X \rightarrow Y$$

$$n(t,x) = y \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} t \in T \\ x \in X \\ y \in Y \end{array}$$

### I.3.2 - NOÇÕES DE SISTEMA E DE ESTADO NO SENTIDO DE L.A.ZADEH <sup>22</sup>

Um sistema pode ser definido como uma família de pares entrada-saída:

$$\Theta = \{ \underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] \} , t_0, t_1 \in (-\infty, \infty)$$

satisfazendo a condição de fechamento por segmentação, isto é, se

$(\underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] )$  pertence a  $\theta$  , cada segmento de  $(\underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] )$  também pertence a  $\theta$ .

Denominemos  $\theta(t_0) = \{(\underline{u} [t_0, t_1] , \underline{y} [t_0, t_1] )\}$  ,  $t_1 \geq t_0$  um sub-conjunto de  $\theta = \{(\underline{u}, \underline{y})\}$  ,  $(\underline{u} = \underline{u} [t_0, t_1] \text{ e } \underline{y} = \underline{y} [t_0, t_1] )$  compreendendo todos os pares entrada-saída considerados a partir do instante inicial  $t=t_0$  . Agrupemos os pares de  $\theta(t_0)$  que possuem uma característica particular ou uma mesma propriedade específica, em um sub-conjunto  $\theta_{\alpha_0}(t_0)$  em que  $\alpha_0$  represente uma espécie de etiqueta ou rótulo dos componentes desse conjunto.

Se  $\alpha_0$  variar num espaço  $\Sigma t_0$  , teremos uma família de sub-conjuntos de pares de funções que, para cada  $t_0$  , representaremos por  $\{\theta_{\alpha_0}(t_0)\}$  .

Se quatro condições ditas condições de consistência forem preenchidas, os  $\alpha_0$  serão chamados os estados do sistema. Estas condições são as seguintes (Zadeh<sup>22</sup>) :

1 - Condição de Recobrimento:

$\theta(t_0)$  deve ser a união de todos os membros da família  $\{\theta_{\alpha_0}(t_0)\}$  ,  $\alpha_0 \in \Sigma t_0$  , ou seja, simbolicamente:

$$\bigcup_{\alpha_0} \theta_{\alpha_0}(t_0) = \theta(t_0)$$

2 - Condição de Fechamento por Truncamento:

$$(\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \theta_{\alpha_0}(t_0) \rightarrow (\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \theta_{\alpha_0}(t_0)$$

$$(\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \theta_{\underline{\alpha}_0}(t_0), \quad t_0, \quad \underline{\alpha}_0, \quad \Sigma t_0$$

3 - Condição de Univocidade:

$$\{(\underline{u}, \underline{y}) \in \theta_{\underline{\alpha}_0}(t_0) \text{ e } (\underline{u}, \underline{y}') \in \theta_{\underline{\alpha}_0}(t_0)\} \rightarrow \underline{y} = \underline{y}'$$

4 - Condição de Continuação:

$$\{(\underline{u}', \underline{y}') / \{(\underline{u}^0, \underline{y}^0)\} \in \theta_{\underline{\alpha}_0}(t_0)\} = \theta_{\underline{\alpha}_1}(t_1)$$

$$t_0 \in \mathbb{R}', \quad \underline{\alpha}_0 \in \Sigma t_0, \quad (\underline{u}^0, \underline{y}^0) \in \theta_{\underline{\alpha}_0}(t_0), \quad t_1 \geq t_0 \quad \text{e}$$

$$t \geq t_1$$

$(\underline{u}', \underline{y}')$  é chamado continuação de  $(\underline{u}^0, \underline{y}^0)$ .

### I.3.3 - AS DEFINIÇÕES DE R.E.KALMAN E L.A.ZADEH E O PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO

Na definição de sistema dinâmico de R.E.Kalman, o estado é dado a partir da noção da função de transição por uma relação entre o estado no instante  $t$ , o estado em um instante anterior  $\tau$  e uma função de entrada admissível, sem referência nenhuma à saída.

Ao contrário, na definição de L.A.Zadeh, o estado num instante  $t_0$  está ligado a um conjunto de pares entrada-saída satisfazendo às quatro condições de consistência, sem nenhuma refe

rência ao estado anterior de sistema.

Em princípio, as definições de sistema e estado dadas por L.A.Zadeh parecem ser mais adaptadas para o problema da identificação de um sistema físico, pois, tal como acontece na identificação dos sistemas, o acesso aos sistemas é feito através das entradas e saídas do sistema. Entretanto, parece-nos importante para o que temos em vista, determinar com precisão os conjuntos  $T, U, Y, \Omega, \Gamma$ , tal como estes são considerados na definição de Kalman.

Mas Kalman no seu livro "Topics in Mathematical System Theory" interessa-se também pelas interações entre os sistemas e o meio. Com este objetivo, um sistema no sentido entrada/saída, foi definido por Kalman da seguinte maneira:

"Um sistema dinâmico ( $\Sigma$ ) é um quántuplo  $(T, U, \Omega, Y, \Gamma)$  ao qual se associa um conjunto  $A$ , indexando uma família de funções:

$$F = \{f_{\mu} : T \times \Omega \rightarrow Y, \mu \in A\}$$

onde cada membro de  $F$  é representado por uma função  $f_{\mu}(t, \omega) = y(t)$  que exprime a saída do sistema no instante  $t$ , resultante de uma entrada  $\omega$ , em uma experiência  $\mu$  ".

O conjunto  $A$  de Kalman e o conjunto dos  $\alpha_0$  de Zadeh representam, apesar de definidos a partir de elementos de natureza diferente a etiqueta que sintetiza de maneira global o conjunto de experiências indispensáveis ao estabelecimento de pares entrada/saída, necessários à caracterização do sistema.

### I.3.4 - CONCEITOS DE EQUIVALÊNCIA

Dois sistemas  $\theta$  e  $\theta'$  são ditos equivalentes<sup>22</sup> e escrevemos  $\theta = \theta'$  quando  $\theta$  e  $\theta'$  são iguais em termos de conjuntos, isto é: se  $\theta \subset \theta'$  e  $\theta' \subset \theta$ . Em outras palavras,  $\theta$  é equivalente a  $\theta'$  se todo par entrada-saída pertencente a  $\theta$ , pertence também a  $\theta'$  e vice-versa.

Pode ocorrer, entretanto, que dois sistemas pareçam equivalentes após uma única experiência (equivalência simples) e que, depois de experiências múltiplas, não apresentem a mesma propriedade.

Torna-se assim conveniente introduzir também a noção de equivalência rígida :

Definição: EQUIVALÊNCIA RÍGIDA

$\theta$  e  $\theta'$  são ditos rigidamente equivalentes ( $\theta \equiv \theta'$ ) se somente se, para cada  $t_0$  e para cada estado  $\underline{\alpha}$  no espaço de estado de  $\theta$ , existe um estado equivalente  $\underline{\beta}$ , no espaço de estado de  $\theta'$  e vice-versa.

Simbolicamente, a definição acima pode ser expressa de forma condensada da maneira seguinte:

$$\theta \equiv \theta' \Leftrightarrow \forall \underline{\alpha} \exists \underline{\beta} \forall \underline{u} \forall t_0 \left[ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) \right]$$

e

$$\theta \equiv \theta' \Leftrightarrow \forall \underline{\beta} \exists \underline{\alpha} \forall \underline{u} \forall t_0 \left[ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) \right]$$

### Definição: EQUIVALÊNCIA SIMPLES

De maneira análoga, se dois sistemas  $\theta$  e  $\theta'$  admitem uma equivalência simples, tem lugar as relações seguintes:

$$\theta = \theta' \rightarrow \forall \underline{\alpha} \forall \underline{u} \forall t_0 \exists \underline{\beta} \left[ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) \right]$$

$$\forall \underline{\beta} \forall \underline{u} \forall t_0 \exists \underline{\alpha} \left[ \bar{A}(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \bar{B}(\underline{\beta}, \underline{u}) \right]$$

Convém notar que  $\theta \equiv \theta' \rightarrow \theta = \theta'$ , a recíproca não sendo, em geral, verdadeira.

### I.3.5 - OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

A definição que nos pareceu mais geral quanto à observabilidade<sup>13</sup> de sistemas não-lineares é a dada por Uwe Schoenwandt:

Consideremos a "aplicação"  $y = Tx$  tal que  $T$  seja um operador definindo  $y$  como uma observação. Se  $x$  pertence a um conjunto não vazio  $S$ , então o sistema é completamente observável, se a inversa  $T^{-1}$  existe para todo  $y$  gerado por um  $x$  possível.

### I.4 - CARACTERÍSTICAS DE ALGUMAS NÃO-LINEARIDADES MAIS CONHECIDAS

A Fig.I.2 nos permite uma vista de conjunto de 14 características, das quais 3 assimétricas, 3 com simetria ímpar e 4 com histerese.

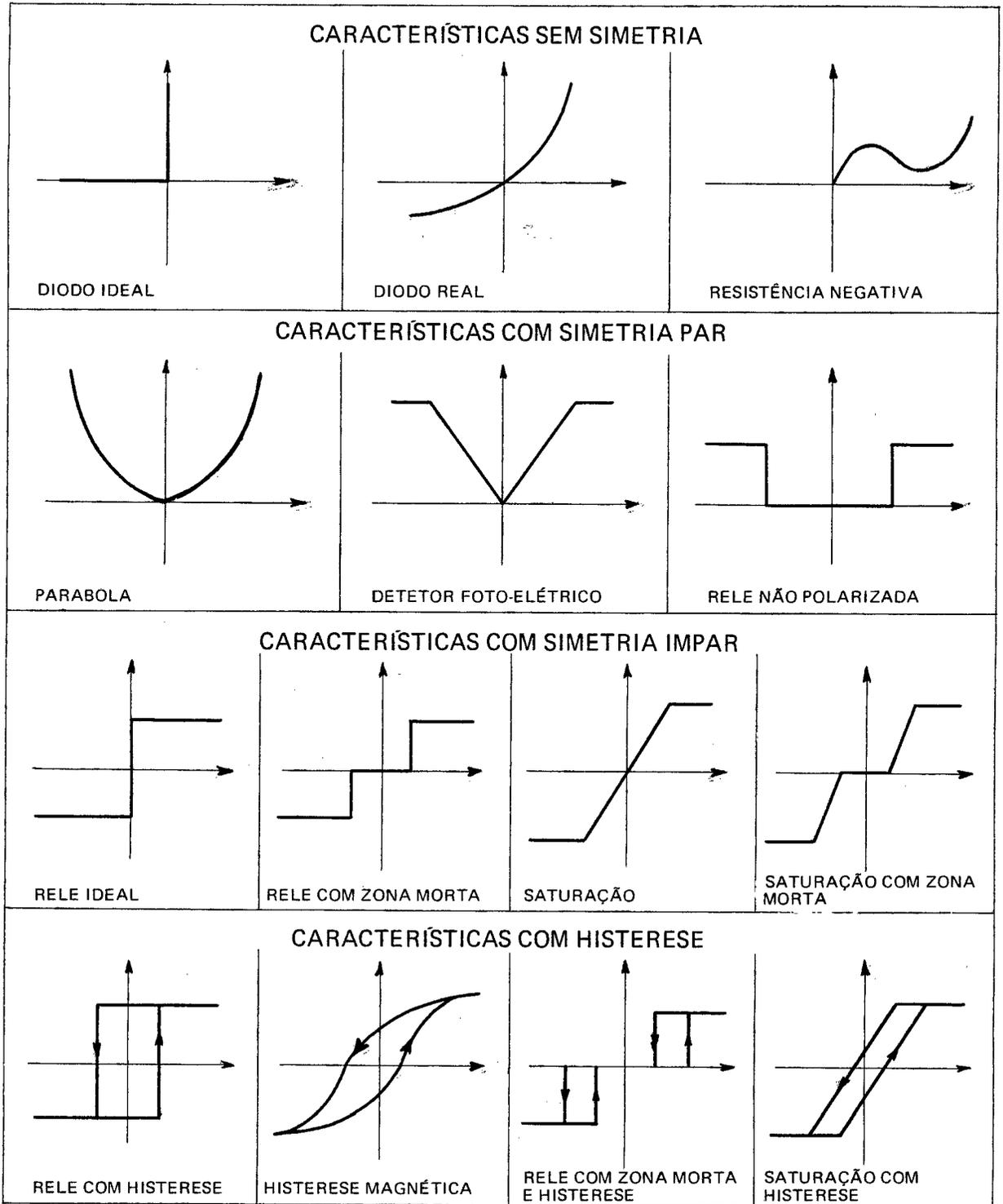


FIG. 1.2

## I.5 - SISTEMAS E ESTRUTURAS

### I.5.1 - DIAGRAMA DE BLOCOS

As estruturas aqui representadas, vistas do exterior, são monovariáveis ou escalares, isto é, possuem apenas uma entrada e uma saída embora sejam susceptíveis de admitir malhas de realimentação interna.

Os sub-sistemas que constituem essas estruturas são em número finito e conectados de tal maneira que uma parte não linear seja sempre seguida ou precedida de outra linear.

Utilizaremos as notações empregadas por Zadeh para a representação topológica das estruturas através de modelos simbólicos.

Teremos então um sistema  $\Theta$  formado de sub-sistemas  $R_1, R_2, \dots, R_n$  com cada  $R_i$  definido por suas entradas  $u_j^i$  e suas saídas  $y_j^i$  onde  $i$  é o índice do sub-sistema  $R_i$  e  $j$  o índice da entrada ou saída.

Seja, por exemplo, o sistema abaixo (Fig.I.3) caracterizado pela entrada  $u$  e a saída  $y$  e constituído de 3 sub-sistemas.

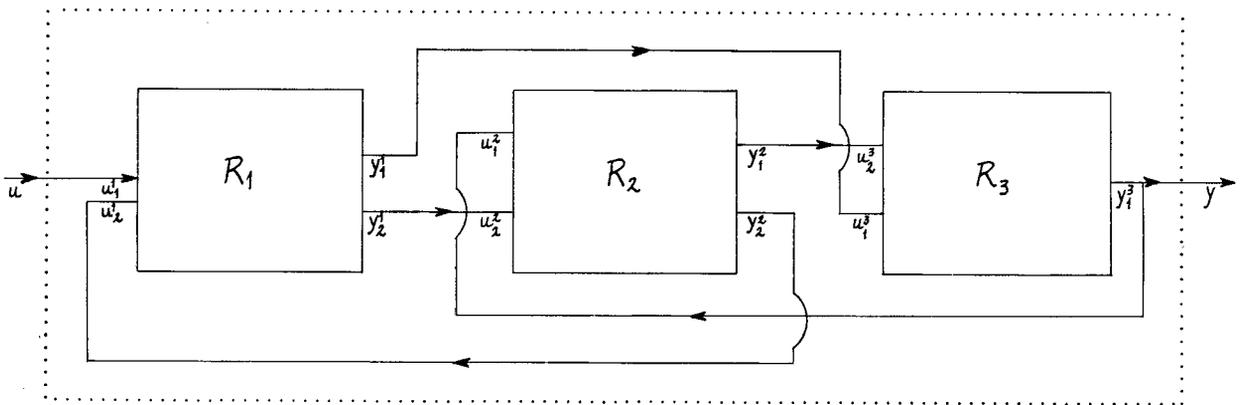


FIG. I.3

Neste trabalho serão estudadas estruturas constituídas por uma associação em cascata e em cadeia aberta de sub-sistemas, cujas naturezas serão definidas mais adiante.

Como utilizaremos apenas uma entrada e uma saída para cada sub-sistema, a notação será simplificada, adotando-se um índice único, característico do sub-sistema, na indicação das entradas e saídas.

### I.5.2 - NATUREZA E CARACTERÍSTICAS DOS BLOCOS UTILIZADOS

Os sistemas objeto do nosso estudo, comportarão na sua estrutura interna, blocos de natureza linear e de natureza não-linear.

Para blocos lineares, utilizaremos aqueles que caracterizam os sistemas lineares contínuos, de dimensão finita, invariantes com o tempo e de primeira ordem. Portanto  $T \in (-\infty, \infty)$ , o

espaço de estado  $X$  é um espaço linear à dimensão finita e  $\theta = \{(u, y)\}$  é fechado para toda translação no tempo.

O bloco linear tem um comportamento intrínseco obedecendo à equação diferencial ordinária do tipo :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku$$

onde

$\tau$  = constante de tempo

$y$  = saída

$u$  = entrada

Para blocos não-lineares utilizaremos não-linearidades apresentando uma característica de sistema ímpar do tipo relê:

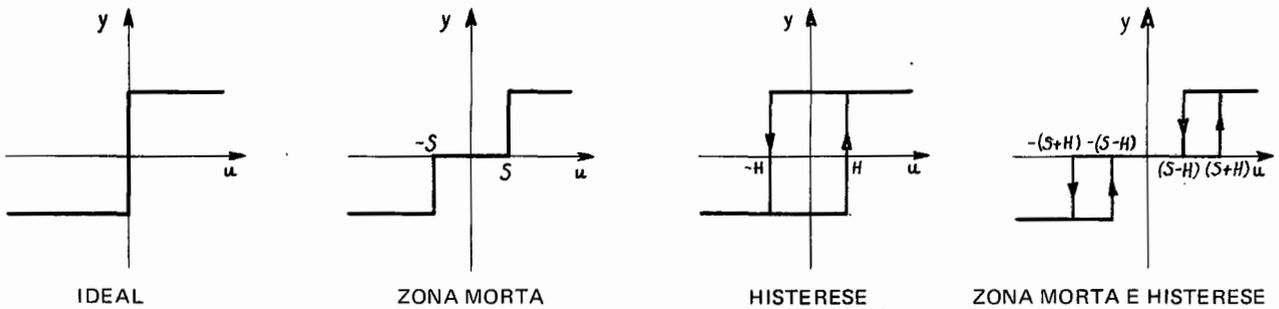


FIG. 1.4

A escolha da não-linearidade do tipo relê deu-se pelo fato de ser a referida característica essencialmente não linear, do tipo descontínua, não podendo a semelhança das contínuas, ser assimilável a uma característica linear em um intervalo limitado de variação.

É oportuno salientar aqui uma propriedade particu

lar dos sistemas a relé: a forma da saída de tais sistemas é independente da forma do sinal de entrada, o que permite estudá-los por meios relativamente simples.

Os sistemas a relé possuem uma rapidez de ação excepcionalmente elevada, havendo uma mudança de comando praticamente instantânea.

Graças à grandeza do ganho em potência, à sua simplicidade e à sua rapidez de resposta, os sistemas a relé encontram um vasto campo de aplicação nos diversos domínios da tecnologia.

### I.5.3 - SINAIS DE TESTE

Contrariamente ao que se passa nos sistemas lineares, dois sinais diferentes agindo sobre um mesmo sistema não-linear, podem dar a impressão de tratar-se dois sistemas cada um com uma não-linearidade diferente.

Em consequência, um estudo correto desses sistemas está intimamente ligado a uma escolha conveniente do sinal susceptível de sensibilizar ao máximo e da maneira mais precisa as propriedades dos sistemas em causa.

Vamos dar a seguir um resumo das vantagens e desvantagens de alguns sinais de teste <sup>7</sup>: (Fig. I.5)

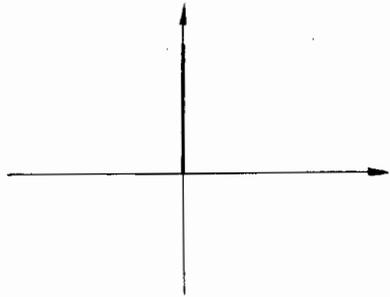


FIG. 1.5.a

- a) notável precisão para frequências altas
- b) interpretação fácil
- c) pequena duração do sinal de teste
- d) muita sensibilidade face às perturbações

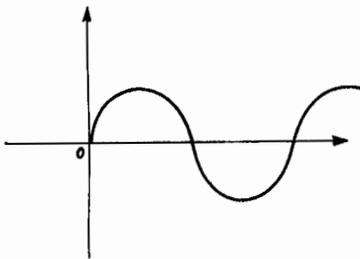


FIG. 1.5.b

- a) aplicação difícil
- b) longa duração
- c) precisão razoável
- d) insensibilidade às perturbações

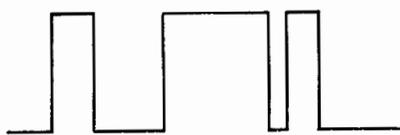


FIG. 1.5.c

- a) aplicação mais ou menos simples
- b) precisão não muito elevada
- c) insensibilidade às perturbações



FIG. 1.5.d

- a) aplicação muito simples
- b) imprecisão
- c) insensibilidade às perturbações correlacionadas

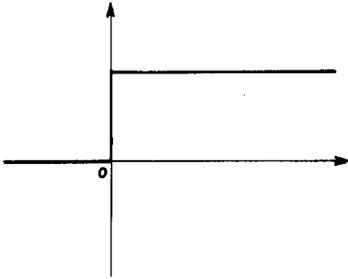


FIG. 1.5.e

- a) aplicação simples
- b) muita precisão para frequências baixas
- c) interpretação fácil
- d) longa duração do sinal de teste
- e) sensibilidade às perturbações

A análise das propriedades dos sistemas a partir de um sinal de excitação de natureza senoidal é mais apropriada no caso de sistemas lineares. O interesse desse método diminui deste que se trata de sistemas não-lineares.

Por outro lado, o sinal "impulso unitário" é mais útil para os sistemas lineares. Esta "função" nos permite chegar, respeitadas determinadas condições, à função de transferência que representa completamente o sistema linear, desde que completamente observável e controlável. Quando se tem, entretanto, de estudar sistemas com características não lineares do tipo, por exemplo, saturação ou relé, um sinal elementar do tipo que acabamos de ver, perde grande parte de seu interesse.

O sinal degrau (ou escalão) é suficiente para caracterizar um sistema linear. Para o caso de sistemas não lineares contendo não linearidades do tipo utilizado neste trabalho, o teste em escalão apresenta particular interesse.

Em uma pesquisa anterior <sup>13</sup>, o sinal degrau pareceu ser o mais adequado. Efetivamente, na pesquisa que nos conduziu ao presente trabalho, o teste em questão, e que será analisado a seguir, mostrou-se completamente satisfatório para as estruturas que não possuem a característica do tipo histerese, no último bloco. Para este caso, tornou-se necessário experimentar um novo teste.

#### I.5.4 - TESTE EM ESCALÃO (TESTE Nº 1)<sup>13</sup>

Um problema básico que se apresenta é o do conhecimento das condições iniciais de aplicação do teste. Como a maior parte das não-linearidades estudadas não possuem uma posição de equilíbrio em zero (por exemplo, o relé ideal), o estado zero não pode ser tomado como referência. Pareceu mais interessante ordenar um conjunto de valores de entrada  $U$ , o que tornou possível definir um extremo superior ( $U_{sup}$ ) e um extremo inferior ( $U_{inf}$ ). A condição inicial será dada pela posição de equilíbrio em um dos dois limites escolhidos previamente.

Considerando as observações acima, o sinal de teste que pareceu melhor adaptado aos tipos de não-linearidades e à própria natureza do problema, é o que tem a forma abaixo. (Fig.I.6)

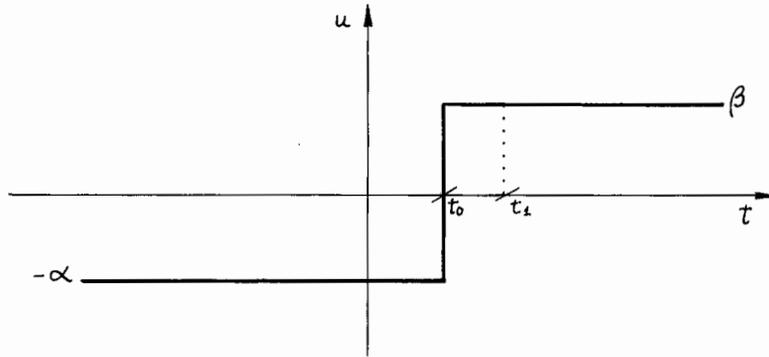


FIG. I.6

Onde para:

$0 < t < t_{0-}$  , o sistema se encontra em condições iniciais compatíveis com aplicação do teste.

$t, t_0 \in T=R'$  , o intervalo  $0, t_0$  é suposto superior ao intervalo de tempo máximo necessário ao sistema para atingir seu equilíbrio.

$t_{0+} < t < t_1$  , o sistema reage à entrada  $u=\beta$  .

$t_0, t \in T=R'$  , o intervalo  $t_{0+}, t_1$  é suposto superior ao intervalo de tempo máximo necessário ao sistema para atingir seu equilíbrio.

Para a aplicação eficaz do teste que acabamos de descrever, duas condições se impõem:

1) deve-se conhecer, ainda que com pouca precisão, o valor da duração máxima para que o sistema atinja seu equilíbrio.

2) deve-se conhecer, por outro lado, os pontos de funcionamento do sistema para definir  $U_{inf}$  e  $U_{sup}$  .

## C A P Í T U L O    I I

### II.1 - ESTUDO DAS PROPRIEDADES ESTRUTURAIS EXTERNAS E TOPOLÓGICAS DE CADEIAS NÃO LINEARES

Neste capítulo estudaremos as propriedades estruturais externas e internas ou topológicas de algumas cadeias não lineares.

As cadeias serão representadas por estruturas compostas de associação em cascata, sem realimentação, de blocos lineares e não lineares e que serão mono-dimensionais (cada bloco tendo apenas uma entrada e uma saída). Os blocos não lineares pertencerão ao grupo dos relés. Os blocos lineares serão do tipo estacionário de primeira ordem.

#### II.1.1 - PRINCÍPIO DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO ESTRUTURAL

O método de estudo utilizado como base para a identificação de sistemas físicos dinâmicos não lineares tem o nome de "Método de Decomposição Estrutural" e se relaciona com a suposição feita para o estudo das propriedades estruturais de certas cadeias não lineares (já citado anteriormente). Supõe-se possível substituir sistemas não lineares definindo uma certa família  $F$ , por estruturas constituídas por componentes lineares e não lineares de tipos determinados e agrupados de maneira conveniente de modo a ter

o mesmo comportamento externo dos sistemas em questão.

O método é desenvolvido a partir das noções de família, grupo e classe <sup>17</sup>, definidos como segue:

Família - Conjunto finito, caracterizado pela presença de não-linearidades estáticas do tipo com ou sem memória associadas em cascata com elementos lineares estacionários, contínuos e com dimensão finita. As estruturas assim definidas são supostas mono-variáveis, sem realimentação interna e tendo no máximo quatro componentes.

Grupo - Conjunto de membros da família definido a partir de um critério tendo por base a escolha de um dado tipo de não linearidade. (ex. grupo dos relés, das saturações, das parábolas, etc.)

Classe - Membro de um grupo caracterizado pela presença de pelo menos uma não linearidade de um dado tipo. (Ex. classe dos relés com histerese, classe conjugada de relés ideais com relés apresentando uma zona morta, etc.)

No presente trabalho, o grupo objeto de nosso estudo foi o dos relés polarizados compreendendo quatro classes, a saber:

- a) classe dos relés ideais
- b) classe dos relés com histerese
- c) classe dos relés com zona morta e histerese
- d) classe dos relés com zona morta

Quanto à topologia das cadeias estudadas, elas podem apresentar as seguintes estruturas:

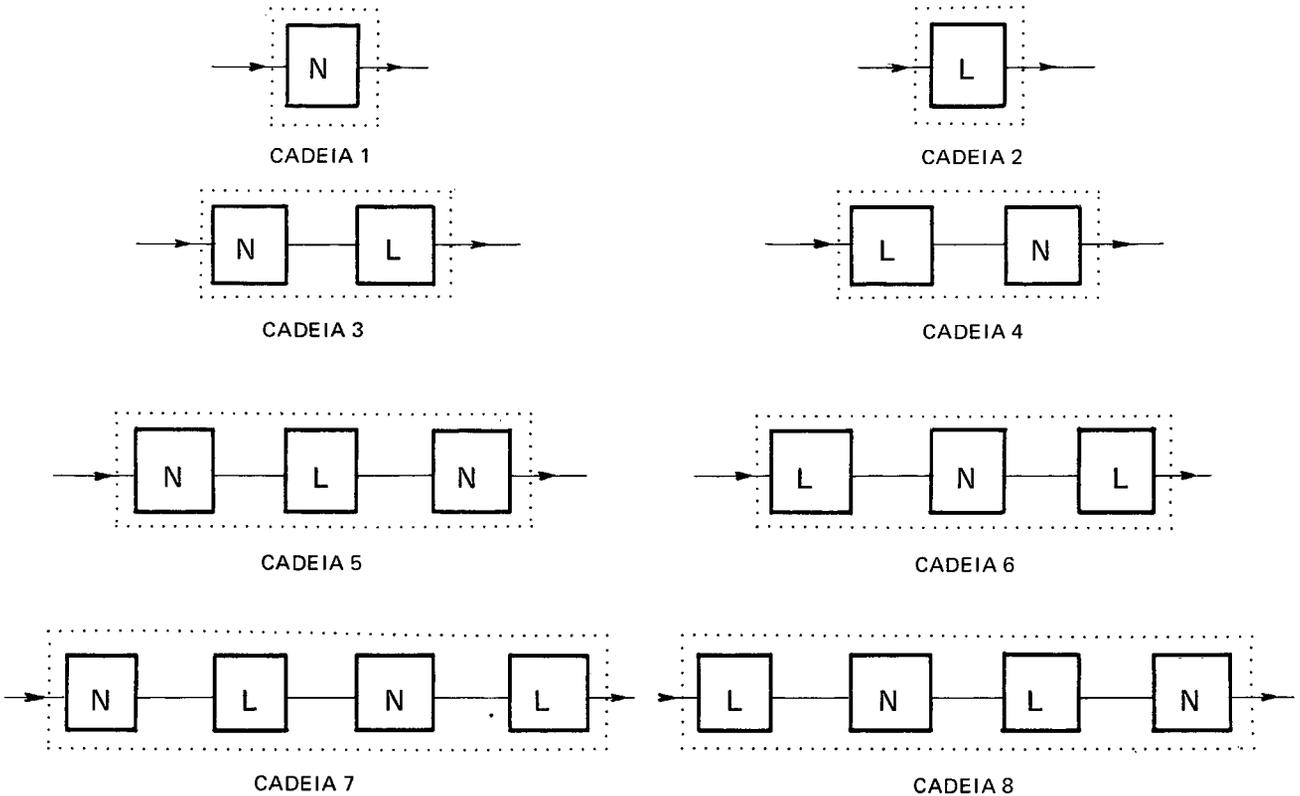


FIG. II.1

As cadeias 1,3,5,7 começam por um bloco não linear e podem ser resumidas, para efeito de estudo, à cadeia 7 que nós designaremos Cadeia A. As cadeias 2,4,6,8, por sua vez, começam por um bloco linear. O estudo das mesmas está contido no da cadeia 8 que será chamada Cadeia B. Em resumo, as duas cadeias acima referidas terão uma estrutura do tipo representado nas figuras II.2 e II.3.

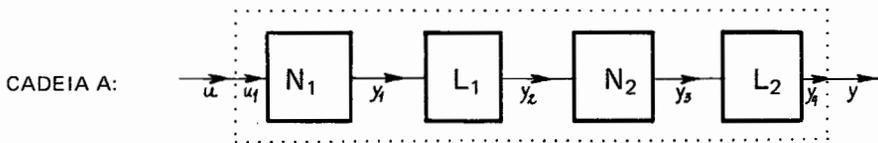


FIG. II.2

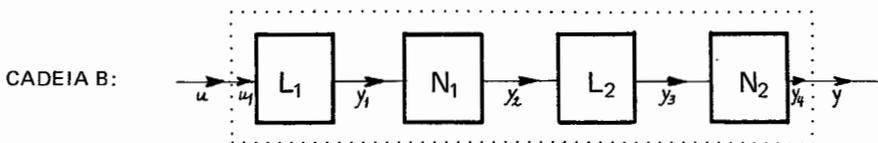


FIG. II.3

onde  $N_1$   $N_2$ , ou seja,  $N_1$  e  $N_2$  são não linearidades de características diferentes.

## II.2 - TESTE Nº1 (RESPOSTA TEMPORAL) - CADEIA DO TIPO A

O teste nº1, que consiste na observação da saída em função do tempo para uma entrada do tipo degrau, é importante porque nos permite determinar a natureza do último bloco e o tipo de não linearidade do segundo bloco não linear presente na cadeia em estudo.

Este consiste na aplicação da entrada tipo escalo numa estrutura classificada quanto à sua topologia, como Cadeia do tipo A:

Temos  $N_1 \neq N_2$  e os blocos lineares representados por equações diferenciais do tipo:

$$\text{Para } L_1 : \tau_1 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = K_1 y_1 \quad (\text{II.1})$$

(II,1)

$$\text{Para } L_2 : \tau_2 \frac{dy_4}{dt} + y_4 = K_2 y_3$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são os ganhos estáticos dos blocos lineares. Chamaremos  $M_1$  e  $M_2$  as amplitudes respectivamente dos relés  $N_1$  e  $N_2$ .

O sinal de entrada considerado no teste nº 1 tem a característica representada na Fig. II.4

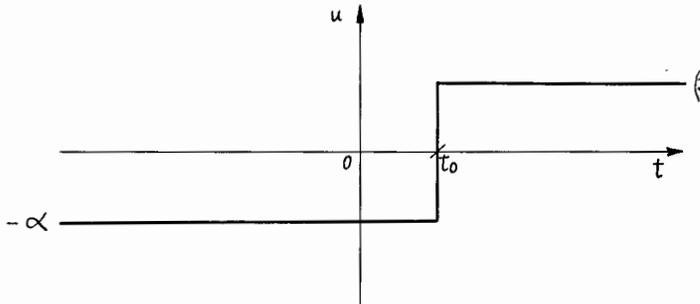
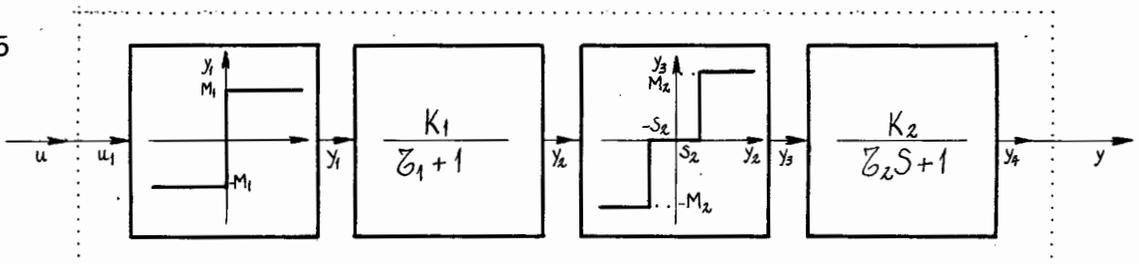


FIG. II.4

Examinaremos em seguida o comportamento de cada uma das estruturas estudadas, sob a ação do Teste nº 1.

### II.2.1 - ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÉ IDEAL E UM RELÉ COM ZONA MORTA

FIG. II.5



Consideremos a estrutura do tipo representado na Fig.II.5, onde  $u_1=u$  e  $y_4=y$ , sendo  $u$  o próprio sinal de teste e  $y$  a saída observada.

Para uma estrutura deste tipo, o comportamento de cada bloco é o seguinte:

Sendo aplicada a entrada  $u$ , obteremos a resposta  $y_1=M_1$  (sinal  $u$ ). A resposta parcial  $y_1$  será a entrada do segundo bloco que terá, então, o seu comportamento descrito pela equação:

$$\tau_1 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = K_1 y_1 \quad (\text{II.2})$$

O terceiro bloco, por sua vez, possuindo uma zona morta e sendo excitado por  $y_2$  responderá nas condições abaixo descritas:

$$\begin{aligned} y_3 &= -M_2 \quad \text{para } y_2 < -S_2 \\ y_3 &= 0 \quad \text{para } -S_2 \leq y_2 \leq S_2 \\ y_3 &= M_2 \quad \text{para } y_2 > S_2 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Com efeito, o relé com zona morta obedece à relação:

$$y_3 = \frac{M_2}{2} \left[ \text{sinal}(y_2 - S_2) + \text{sinal}(y_2 + S_2) \right] \quad (\text{II.4})$$

Com a excitação  $y_3$  no quarto bloco, obteremos a resposta  $y_4$  que é a própria saída da cadeia. Tal resposta é da-

da pela equação:

$$\tau_2 \frac{dy_4}{dt} + y_4 = K_2 y_3 \quad (\text{II.5})$$

### II.2.2 - ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÉ IDEAL E UM RELÉ COM HISTERESE

A estrutura em estudo é do tipo representado na

Fig. II.6

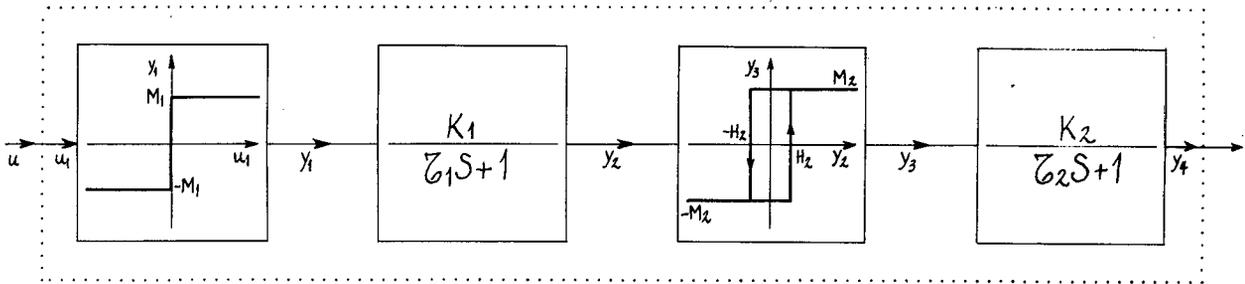


FIG. II.6

A aplicação do sinal de entrada  $u$ , nos dá para o primeiro bloco (relé ideal):

$$y_1 = M_1 \text{ (sinal } u) \quad (\text{II.6})$$

Para o segundo bloco de natureza linear de primeira ordem, a saída  $y_2$  é solução da equação diferencial:

$$\tau_1 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = K_1 y_1$$

O terceiro bloco (relé com histerese), fornecerá uma resposta  $y_3$  tal que:

$$y_3 = M_2 \left[ \text{sinal} (y_2 - H_2) \right] \quad \text{se} \quad \frac{dy_2}{dt} > 0 \quad (\text{II.7})$$

$$y_3 = M_2 \left[ \text{sinal} (y_2 + H_2) \right] \quad \text{se} \quad \frac{dy_2}{dt} < 0$$

Finalmente, para o quarto bloco, cuja saída coincide com a saída  $y$  da cadeia, a resposta será dada por:

$$\tau_2 \frac{dy_4}{dt} + y_4 = K_2 y_3$$

### II.2.3 - ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÉ IDEAL E UM RELÉ COM ZONA MORTA E HISTERESE

A figura II.7 representa a estrutura do tipo a estudar.

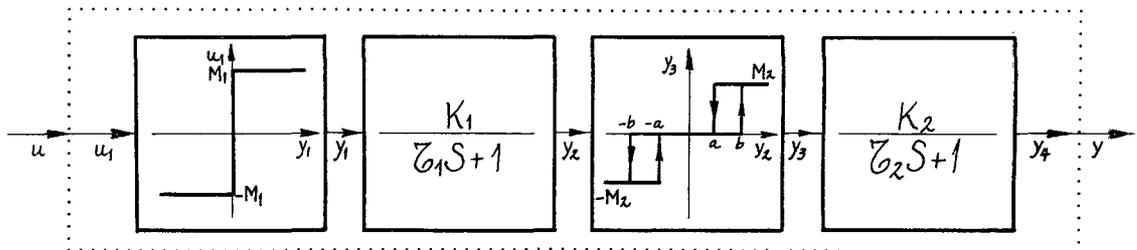


FIG. II.7

Analogamente à marcha seguida para as estruturas anteriores, temos:

$$1^\circ \text{ Bloco (relé ideal)} : y_1 = M_1 (\text{sinal } u)$$

2º Bloco (relê com zona morta e histerese): a resposta na saída desse bloco será dada por:

$$y_3 = \frac{M_2}{2} \left\{ \text{sinal} \left[ y_2 - (S_2 + H_2) \right] + \text{sinal} \left[ y_2 + (S_2 - H_2) \right] \right\}$$

se  $\frac{dy_2}{dt} > 0$  (II.8)

ou

$$y_3 = \frac{M_2}{2} \left\{ \text{sinal} \left[ y_2 - (S_2 + H_2) \right] + \text{sinal} \left[ y_2 + (S_2 - H_2) \right] \right\}$$

se  $\frac{dy_2}{dt} < 0$  (II.9)

4º Bloco: a saída desse bloco, ou seja, a saída da estrutura será dada por:

$$\tau_2 \frac{dy_4}{dt} + y_4 = K_2 y_3$$

#### II.2.4 - ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO DOIS RELÊS IDEAIS DE CARACTERÍSTICAS DIFERENTES

Esta estrutura já foi objeto de estudo em outro trabalho<sup>13</sup>. Achamos entretanto conveniente relembrar aqui, para memória, os resultados obtidos:

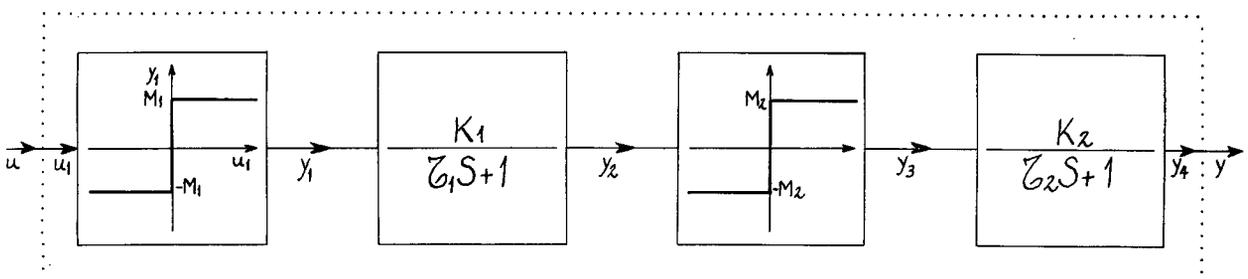


FIG. II.8

Mais uma vez,  $y_1$  e  $y_2$  tem respectivamente a mesma forma que nos casos anteriores, ou seja:

$$y_1 = M_1(\text{sinal } u) \quad (1^\circ \text{ Bloco})$$

e

$$\tau_1 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = K_1 y_1 \quad (2^\circ \text{ Bloco})$$

O 3º bloco sendo também representado por um relé ideal, teremos analogamente:

$$y_3 = M_2(\text{sinal } y_2)$$

O último bloco terá uma resposta  $y_4=y$  dada como já sabemos, por:

$$\tau_2 \frac{dy_4}{dt} + y_4 = K_2 y_3 \quad (\text{II.10})$$

Observação : Com o estudo destas quatro estruturas esgotamos os resultados que podem ser fornecidos pela aplicação do teste nº1, no caso de uma cadeia do tipo A.

Qualquer que seja o tipo de relé que tenhamos no primeiro bloco, com o teste utilizando um sinal do tipo escolhido, a resposta  $y_1$  terá sempre a mesma característica.

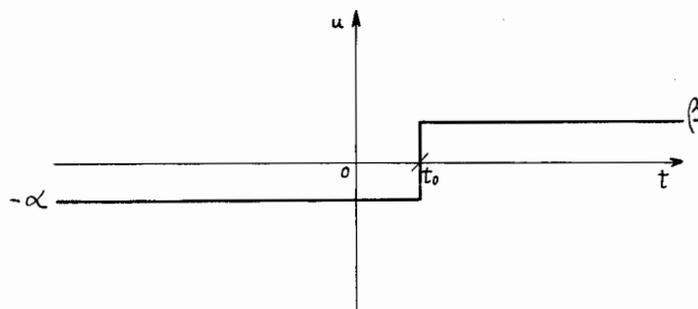
$$y_1 = M_1(\text{sinal } u)$$

O mesmo podemos dizer em relação às demais estruturas que terão características de saída do 1º bloco idênticas às que acabamos de analisar.

Podemos verificar facilmente o que dissemos acima considerando, por exemplo, uma estrutura com um relê com zona morta no 1º bloco. A expressão da saída deste bloco será dada por:

$$y_1 = \frac{M_1}{2} \left[ \text{sinal}(u_1 - S_1) + \text{sinal}(u_1 + S_1) \right] \quad (\text{II.11})$$

onde  $u_1 = u$  é como já vimos, um sinal de entrada em degrau do tipo representado na figura abaixo:



A representação deste sinal nos mostra que:

- Para  $t < t_0 \rightarrow u = -\alpha = \text{cte} = U_{\text{inf}}$

onde  $t_0 \geq 0$

Seja  $-\alpha \leq -S_1 < 0$

Teremos então:

$$y_1 = \frac{M_1}{2} \left[ \text{sinal}(-\alpha - S_1) + \text{sinal}(-\alpha + S_1) \right] = -M_1$$

- Para  $t > t_0 \rightarrow u = \beta = \text{cte} = U_{\text{sup}}$

Suponhamos  $\beta \geq S_1 > 0$  (II.12)

No instante  $t = t_0$ , processando-se a comutação do relê, para todo  $t > t_0$ , a expressão de  $y_1$  será:

$$y_1 = \frac{M_1}{2} \left[ \text{sinal}(\beta - S_1) + \text{sinal}(\beta + S_1) \right] = +M_1 \quad (\text{II.12})$$

### II.3 - TESTE Nº 1 - CADEIA DO TIPO B

Na cadeia do tipo B, o primeiro bloco é linear. Em consequência, a entrada no segundo bloco, que é uma não linearidade do tipo relê, não será mais do tipo escalão. Não são aplicáveis portanto, os resultados da análise acima, em que a estrutura considerada pertencia a uma cadeia do tipo A.

#### II.3.1 - ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÊ IDEAL E UM RELÊ COM ZONA MORTA

A estrutura do tipo acima acha-se representada na Fig. II.9.

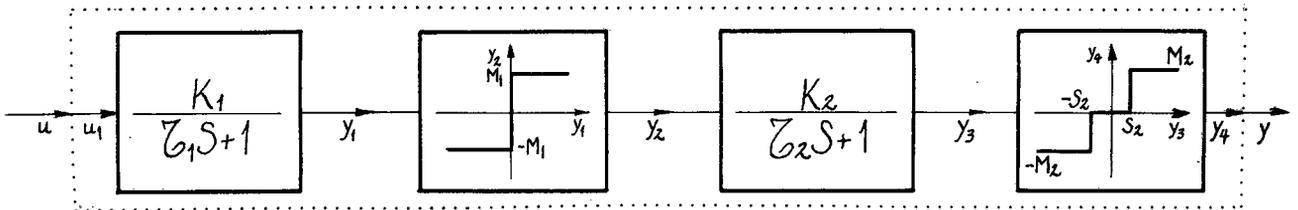


FIG. II.9

Aplicando o teste escalão, temos para  $t > t_0$  :

1º Bloco (linear de 1ª ordem)

$$\tau_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = K_1 \beta \quad (\text{II.13})$$

2º Bloco (relê ideal) :

$$y_2 = M_1 (\text{sinal } y_1) \quad (\text{II.14})$$

3º Bloco (linear de 1ª ordem):

$$\tau_2 \frac{dy_3}{dt} + y_3 = K_2 y_2 = K_2 M_1 (\text{sinal } y_1) \quad (\text{II.15})$$

4º Bloco (relé com zona morta) - a característica deste bloco acha-se representada pela Fig.II.10

$$y_4 = \begin{cases} -M_2 & \text{para } y_3 < S_2 \\ \text{zero} & \text{para } -S_2 \leq y_3 \leq S_2 \\ M_2 & \text{para } y_3 > S_2 \end{cases}$$

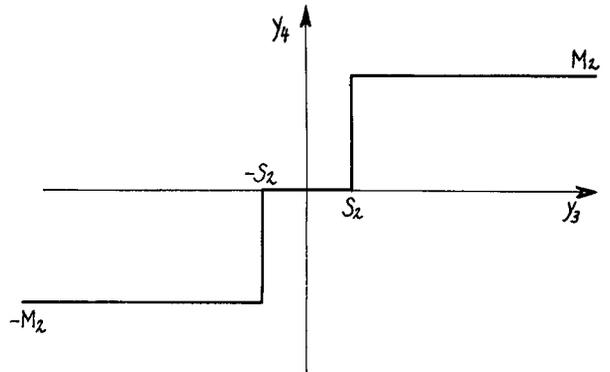


FIG. II.10

II.3.2 - ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÉ IDEAL E UM RELÉ COM HISTERESE

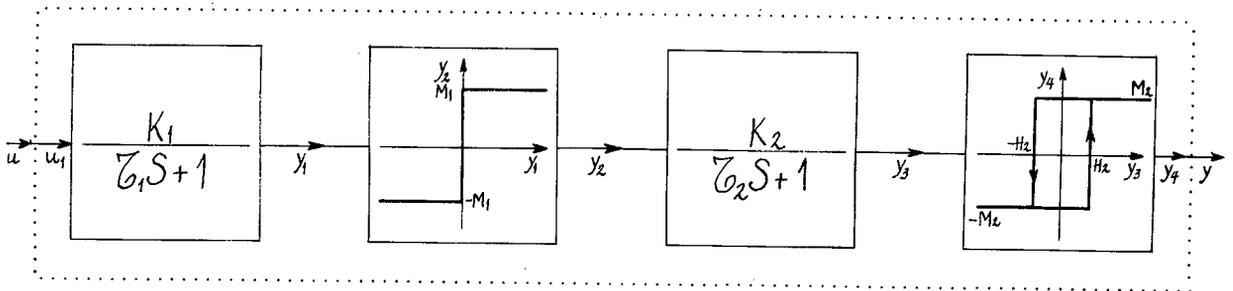


FIG. II.11

A Fig.II.11 representa a estrutura objeto do nosso estudo. O quarto bloco da cadeia em estudo contém um relé com histerese cuja característica é dada pela Fig.II.12

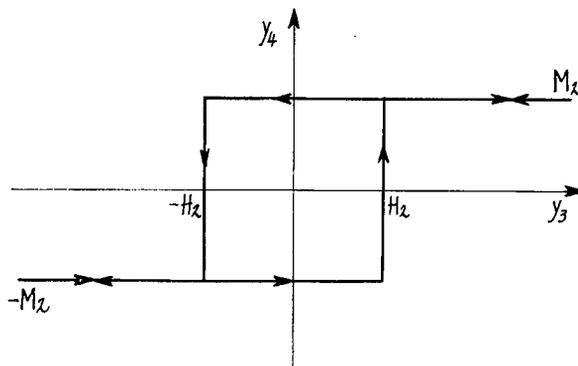


FIG. II.12

As saídas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  são dadas por expressões idênticas às do caso II.3.1 .

4º Bloco (relê com histerese)

$$\begin{aligned} y_4 &= M_2 \left[ \text{sinal} (y_3 - H_2) \right] & \text{se } \frac{dy_3}{dt} > 0 \\ y_4 &= M_2 \left[ \text{sinal} (y_3 + H_2) \right] & \text{se } \frac{dy_3}{dt} < 0 \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Portanto

$$y_4 = \begin{cases} -M_2 & \text{para } y_3 < H_2 \\ M_2 & \text{para } y_3 > H_2 \end{cases}$$

### II.3.3 - ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÊ IDEAL E UM RELÊ COM ZONA MORTA E HISTERESE

Esta estrutura acha-se representada pela Fig.II.13

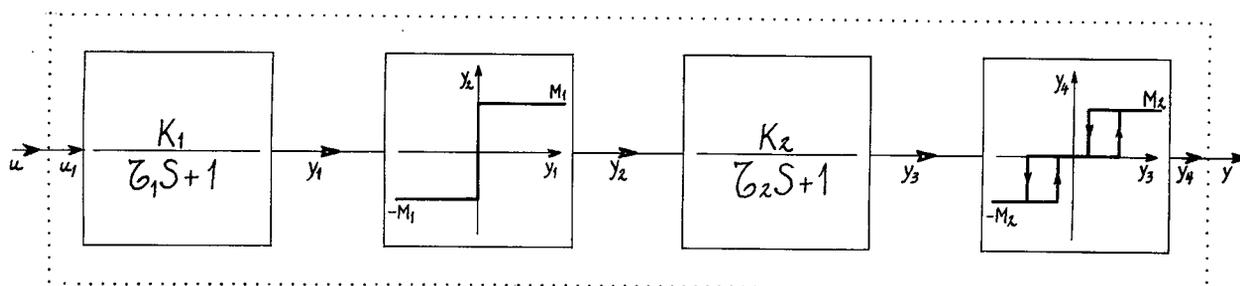


FIG. II.13

Para este caso também, as saídas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  são as mesmas do item II.3.2 .

4º Bloco (relê com zona morta e histerese) - característica representada pela Fig.II.14 .

Estudemos a saída deste bloco. Temos:

$$y_4 = \frac{M_2}{2} \{ \text{sinal} [ y_3 - (S_2 + H_2) ] + \text{sinal} [ y_3 + (S_2 - H_2) ] \}$$

se  $\frac{dy_3}{dt} > 0$  (II.18)

$$y_4 = \frac{M_2}{2} \{ \text{sinal} [ y_3 + (S_2 + H_2) ] + \text{sinal} [ y_3 - (S_2 - H_2) ] \}$$

se  $\frac{dy_3}{dt} < 0$

Portanto,

$$y_4 = -M_2 \quad \text{para } y_3 < (S_2 - H_2)$$

$$y_4 = \text{zero} \quad \text{para } -(S_2 - H_2) \leq (S_2 + H_2)$$

$$y_4 = M_2 \quad \text{para } y_3 > (S_2 + H_2)$$

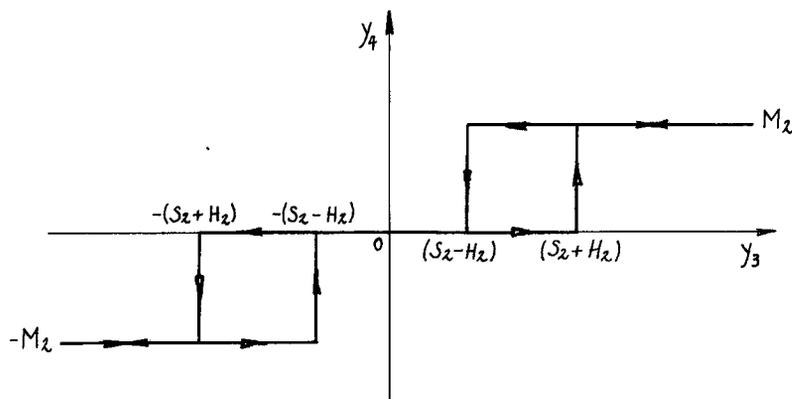


FIG. II.14

### II.3.4 - ESTRUTURA TÍPICA CONTENDO UM RELÉ COM ZONA MORTA E UM RELÉ IDEAL

A Fig. II.15 nos dá a representação desta estrutura:

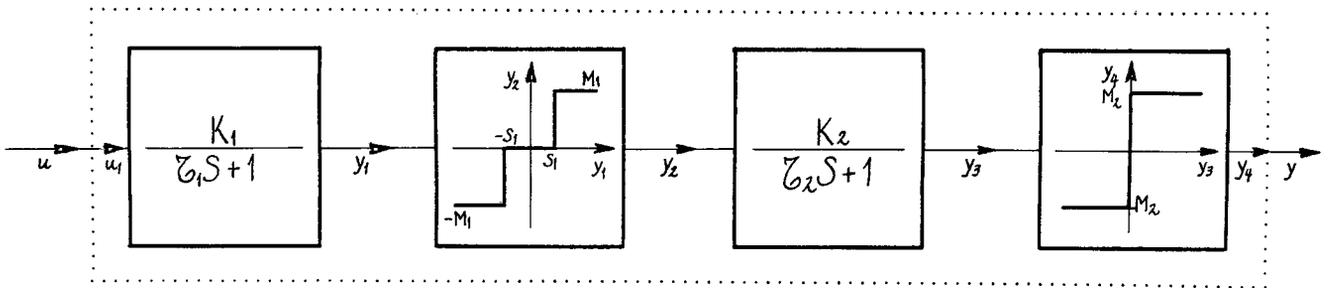


FIG. II.15

Para o primeiro bloco, que é linear, temos:

$$\tau_1 \frac{dy}{dt} + y_1 = K_1 \beta$$

O segundo bloco é constituído por um relé com zona morta. A saída  $y_2$  será então:

$$y_2 = \frac{M_1}{2} \left[ \text{sinal}(y_1 - S_1) + \text{sinal}(y_1 + S_1) \right] \quad (\text{II.19})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_2 &= -M_1 & \text{para } y_1 < -S_1 \\ y_2 &= \text{zero} & \text{para } -S_1 \leq y_1 \leq S_1 \\ y_2 &= M_1 & \text{para } y_1 > S_1 \end{aligned}$$

O terceiro bloco sendo também linear, a saída  $y_3$  será dada pela equação:

$$\tau_2 \frac{dy_3}{dt} + y_3 = K_2 M_1$$

Para o relê ideal do quarto bloco, a resposta será dada por:

$$y_4 = M_2 (\text{sinal } y_3) \quad (\text{II.20})$$

ou seja

$$y_4 = -M_2 \quad \text{para } y_3 < 0$$

$$y_4 = M_2 \quad \text{para } y_3 > 0$$

Observação:

Para as demais estruturas poderíamos prosseguir a análise de maneira similar. Verificaríamos então que a saída  $y$  tem sua característica determinada pela última não-linearidade, não se notando qualquer influência da primeira, ao operarmos com o teste nº1.

II.3.5 - TEMPO DE COMUTAÇÃO CONSIDERANDO O CASO GERAL DE UM BLOCO LINEAR ENTRE DOIS BLOCOS NÃO LINEARES

A Fig. II.16 representa uma estrutura típica em que dois blocos não lineares, dos tipos considerados neste trabalho, acham-se separados por um bloco linear.

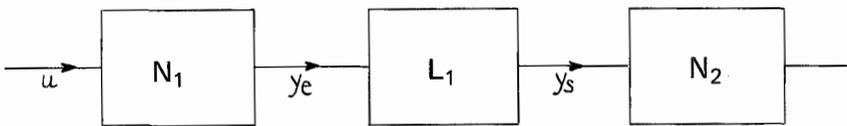


FIG.II.16

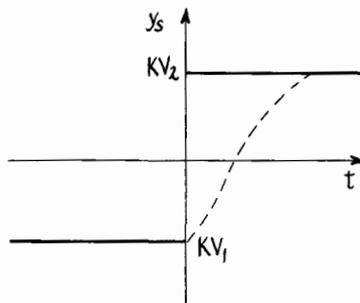
A equação diferencial correspondente ao bloco linear é:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y_s = K y_e \quad (\text{II.21})$$

A solução homogênea dessa equação é dada por:

$$\tau \frac{dy_s}{dt} + y_s = 0 \rightarrow y_s^h = C e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Tomemos a solução particular tal que seja a resposta a um escalão cujo valor inicial é  $KV_1$  e o valor final  $KV_2$  :



A saída  $y_s$  do bloco linear será dada então por uma expressão do tipo:

$$y_s = \left[ (V_1 - V_2) e^{-\frac{t}{\tau}} + V_2 \right] K \quad (\text{II.22})$$

Para o nosso caso,  $t_0 \neq 0$ . Logo,

$$y_s = \left[ (V_1 - V_2) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + V_2 \right] K \quad (\text{II.23})$$

com  $t > t_0$

Se tivermos no bloco seguinte uma não linearidade do tipo relé com zona morta:  $y_s = S_0$ , supondo  $S_0$  o estado inicial na zona morta, virá então:

$$\frac{S_0}{K} = (V_1 - V_2) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + V_2$$

Portanto, o tempo da comutação será dado por:

$$t_c = t_0 + \tau \ln \frac{V_1 - V_2}{\frac{S_0}{K} - V_2} \quad (\text{II.24})$$

Substituindo  $V_1$  e  $V_2$  pelos valores relativos às ordenadas dos patamares inferior e superior, no caso de um relé ideal em  $N_1$ , teremos:

$$V_1 = -M$$

$$V_2 = M$$

Então,

$$y_s = (-2M e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + M) K \quad (\text{II.25})$$

e

$$t_c = t_0 + \tau \ln \frac{2M}{M - \frac{S_0}{K}} \quad (\text{II.26})$$

II.3.6 - EQUAÇÕES DE SAÍDA PARA A CADEIA DO TIPO A CONSIDERANDO O CASO DA ESTRUTURA CONTENDO RELÉ IDEAL E RELÉ COM ZONA MORTA

Consideremos uma cadeia do tipo abaixo, em que o bloco  $N_1$  representa um relé ideal e o bloco  $N_2$  um relé com zona morta (Fig.II.17)

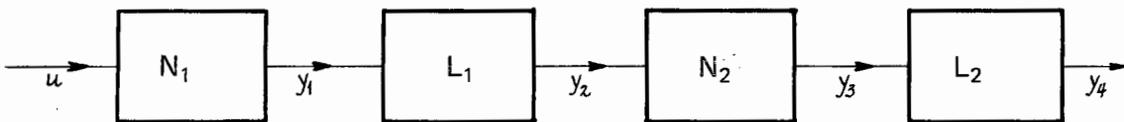


FIG. II.17

Para a cadeia A, a resposta independe dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Tomemos a equação (II.23) :

Seja  $y_s = y_2$ . Como  $N_1$  é um relé ideal, temos  $V_1 = -M_1$  e  $V_2 =$

=  $M_1$  . O ganho para  $L_1$  é  $K_1$ .

Portanto,

$$y_2 = (-2M_1 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}} + M_1) K_1 \quad (\text{II.27})$$

No instante  $t=t_{c1}$ , (instante de comutação de  $N_2$  de  $-M_2$  para zero)  $y_2 = -S_2$

$$-S_2 = K_1 M_1 - 2K_1 M_1 e^{-\frac{t_{c1}-t_0}{\tau_1}}$$

Da relação acima, tiramos:

$$t_{c1} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1}{S_2 + K_1 M_1} \quad (\text{II.28})$$

ou seja

$$t_{c1} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{2M_1}{\frac{S_2}{K_1} + M_1}$$

$$t_{c1} \text{ existirá para } K_1 M_1 > -S_2$$

Em  $t=t_{c2}$  (instante de comutação de  $N_2$  de zero para  $M_2$ ) temos :  $y_2=S_2$  . Então,

$$V_1 = -M_1 \quad \text{e} \quad V_2 = M_1 \quad \text{usando (II.24)}$$

Neste caso:

$$t_{c2} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{-2M_1}{\frac{S_2}{K_1} - M_1} \quad (\text{II.29})$$

ou

$$t_{c2} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{2M_1}{M_1 - \frac{S_2}{K_1}}$$

$$t_{c2} \text{ existirá para } K_1 M_1 > S_2$$

Na saída do 3º bloco, teremos:

$$\begin{aligned} y_3 &= -M_2 & \text{para } t < t_{c1} \\ y_3 &= \text{zero} & \text{para } t_{c1} \leq t \leq t_{c2} \\ y_3 &= M_2 & \text{para } t > t_{c2} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Portanto, para  $y_4$  que corresponde à saída do sistema, teremos:

Para  $t < t_{c1}$

$$y_4 = -K_2 M_2 \quad (\text{II.31})$$

Para  $t_{c1} \leq t \leq t_{c2}$

$$y_4 = -K_2 M_2 e^{-\frac{t-t_{c1}}{\tau_2}} \quad (\text{II.32})$$

Finalmente para  $t > t_{c2}$

$$y_4 = C e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} + K_2 M_2 \quad (\text{II.33})$$

Para determinarmos  $y_4$ , calculemos a constante C.

Para isto vamos inicialmente calcular o valor de  $t_{c2} - t_{c1}$ :

$$t_{c2} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1}{K_1 M_1 - S_2}$$

$$t_{c1} = t_o + \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1}{K_1 M_1 + S_2}$$

$$t_{c2} - t_{c1} = \tau_1 \ln \frac{K_1 M_1 + S_2}{K_1 M_1 - S_2} \quad (\text{II.34})$$

Portanto,

$$e^{-\frac{t_{c2} - t_{c1}}{\tau_2}} = e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2} \ln \frac{K_1 M_1 + S_2}{K_1 M_1 - S_2}}$$

$$e^{-\frac{t_{c2} - t_{c1}}{\tau_2}} = \left( \frac{K_1 M_1 - S_2}{K_1 M_1 + S_2} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \quad (\text{II.35})$$

Portanto,

Para  $t=t_{c2}$  temos, usando (II.32) e (II.35) :

$$y_4(t_{c2}) = -K_2 M_2 \left( \frac{K_1 M_1 - S_2}{K_1 M_1 + S_2} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}} = \text{cte} = -C_1 \quad (\text{II.36})$$

Mas  $t_{c2}$  é o instante inicial para a equação (II.33)

$$y_4 = C e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} + K_2 M_2$$

Portanto para  $t=t_{c2}$  virã:

$$y_4 = C + K_2 M_2 = -C_1$$

Donde,

$$C = -(C_1 + K_2 M_2) \quad (\text{II.37})$$

Finalmente, para  $t > t_2$  :

$$y_4 = -(C_1 + K_2 M_2) e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} + K_2 M_2 \quad (\text{II.38})$$

Fazendo um raciocínio análogo, chegaremos às equações relativas às estruturas que contêm não-linearidades dos tipos: Relé ideal e relé com histerese, relé com zona morta e relé ideal, relé com histerese e zona morta e relé ideal, etc.

Os resultados obtidos estão graficamente representados no capítulo seguinte.

### II.3.7 - EQUAÇÕES DE SAÍDA PARA A CADEIA DO TIPO B - CASO DE UMA ESTRUTURA CONTENDO RELÉ COM ZONA MORTA E RELÉ IDEAL

A Fig. II.18 representa a estrutura em estudo:

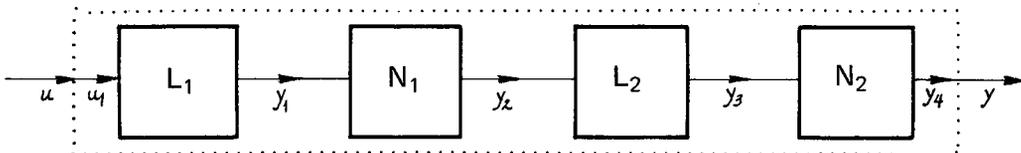


FIG. II.18

Na cadeia B, o sinal aplicado é o mesmo, levando em conta porém que  $K_1 \alpha > S_1$  e  $K_1 \beta > S_1$  no caso em que  $N_1$  for do tipo relé com zona morta.

Usando os resultados do §II.3.5 :

Considerando a equação:

$$y_s = \left[ (V_1 - V_2) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + V_2 \right] K$$

temos:

$$y_s = y_1 ; V_1 = -\alpha ; V_2 = \beta ; \tau = \tau_1 \text{ e } K = K_1$$

Em consequência,

$$y_1 = \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}} \right] K_1 \quad (\text{II.39})$$

No instante  $t_{c1}$  correspondente à comutação de  $N_1$  de  $-M_1$  a zero, temos  $y_1 = -S_1$  :

$$t_{c1} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{\beta + \alpha}{\beta + \frac{S_1}{K_1}} \quad (\text{II.40})$$

Temos que considerar que:  $t_{c1} - t_0$  existirá sempre que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam superiores a  $\frac{S_1}{K_1}$  e ainda que teremos :

$t_{c1} - t_0 = 0$  se  $\alpha = \frac{S_1}{K_1}$ . Este último dado é importante para as conclusões obtidas pelo teste nº1 no caso de se conhecer o número de tandens (L-N) existentes na cadeia:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}} (t_{ci} - t_0) = \text{zero} \rightarrow \text{um só tandem}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}} (t_{ci} - t_0) = \text{cte} \rightarrow \text{dois tandens}$$

No instante  $t_{c2}$ , que corresponde à comutação de  $N_2$  de zero para  $M_2$ , temos  $y_1 = S_1$ .

Portanto:

$$t_{c2} = t_o + \tau_1 \ln \frac{\beta + \alpha}{\beta - \frac{S_1}{K_1}} \quad (\text{II.41})$$

Na saída do bloco  $N_1$ , teremos:

$$\begin{aligned} y_2 &= -M_1 && \text{para } t < t_{c1} \\ y_2 &= \text{zero} && \text{para } t_{c1} \leq t \leq t_{c2} \\ y_2 &= M_1 && \text{para } t > t_{c2} \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Raciocinando de maneira análoga àquela da cadeia

A, encontramos:

Para  $t < t_{c1}$ ,

$$y_3 = -K_2 M_1 \quad (\text{II.43})$$

Para  $t_{c1} \leq t \leq t_{c2}$ ,

$$y_3 = -K_2 M_1 e^{-\frac{t-t_{c1}}{\tau_2}} \quad (\text{II.44})$$

Vamos calcular  $t_{c2} - t_{c1}$ :

$$\begin{aligned} t_{c2} - t_{c1} &= \tau_1 \left( \ln \frac{\beta - \alpha}{\beta - \frac{S_1}{K_1}} - \ln \frac{\beta - \alpha}{\beta + \frac{S_1}{K_1}} \right) = \\ &= \tau_1 \ln \frac{\beta K_1 + S_1}{\beta K_1 - S_1} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Portanto  $y_3$  para  $t = t_{c2}$  será:

$$y_3 = -K_2 M_1 e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2} \ln \frac{\beta K_1 + S_1}{\beta K_1 - S_1}}$$

sendo neste teste  $\beta = \underline{cte}$

$$y_3 = -K_2 M_1 \left( \frac{\beta K_1 - S_1}{\beta K_1 + S_1} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}} = \underline{cte} = -C_2 \quad (\text{II.46})$$

Para  $t > t_{c2}$ , temos:

$$y_3 = C e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} + K_2 M_1$$

Para  $t=t_{c2} \rightarrow y_3 = C + K_2 M_1 = -C_2$  de onde

$$C = -(C_2 + K_2 M_1) \quad (\text{II.47})$$

Finalmente,

$$y_3 = -(C_2 + K_2 M_1) e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} + K_2 M_1 \quad (\text{II.48})$$

No instante  $t_{c3}$  correspondente à comutação de  $N_2$  de  $-M_2$  para  $M_2$ , temos:  $y_3 = 0$

$$0 = -(C_2 + K_2 M_1) e^{-\frac{t_{c3} - t_{c2}}{\tau_2}} + K_2 M_1$$

$$\frac{t_{c3} - t_{c2}}{\tau_2} = \ln \frac{K_2 M_1}{C_2 + K_2 M_1}$$

Da expressão acima, tiramos:

$$t_{c3} = t_{c2} + \tau_2 \ln \frac{C_2 + K_2 M_1}{K_2 M_1} \quad (\text{II.49})$$

Portanto:

$$y_4 = -M_2 \text{ para } t < t_{c3}$$

$$y_4 = M_2 \quad \text{para } t > t_{c3}$$

Para a cadeia do tipo B podemos concluir da mesma maneira que o fizemos para o caso anterior, no que se refere a obtenção das equações relativas às estruturas que podem ser consideradas com as deferentes combinações dos tipos de relés utilizados no presente estudo. No Capítulo III, contudo, aparecerão os resultados gráficos correspondentes.

#### II.3.8 - CONCLUSÕES OBTIDAS ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DO TESTE Nº 1

Do estudo até aqui feito, podemos deduzir algumas particularidades importantes sobre as cadeias analisadas e sobre as não-linearidades que as integram.

Pela característica de saída podemos reconhecer a natureza do último bloco. Se a característica for linear (ou pseudo-linear), sabemos que o último bloco é linear. Obviamente, no caso contrário, o último bloco é não-linear. As Figs. II.19 a e II.19 b representam as características de saída em função do tempo, nos casos respectivamente em que o último bloco é linear e não-linear.

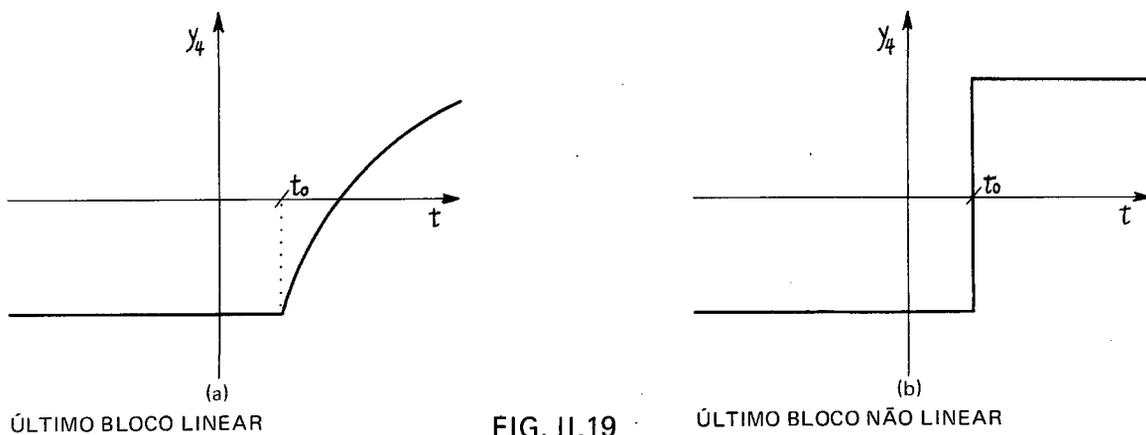


FIG. II.19

A aplicação do 1º teste, nos permite verificar ainda, quanto ao tipo de não-linearidade, se temos uma das seguintes não-linearidades no último bloco não-linear:

- a) do tipo relê ideal ou com histerese
- b) do tipo relê com zona morta ou relê com zona morta e histerese

Na cadeia A, este reconhecimento é feito através da existência de um ou dois pontos angulosos respectivamente e na cadeia B pela existência de um patamar de ordenada nula.

As figs. II.20(a) e (a'), assim como as Figs. II.21(b) e (b'), ilustram o que acima foi dito.

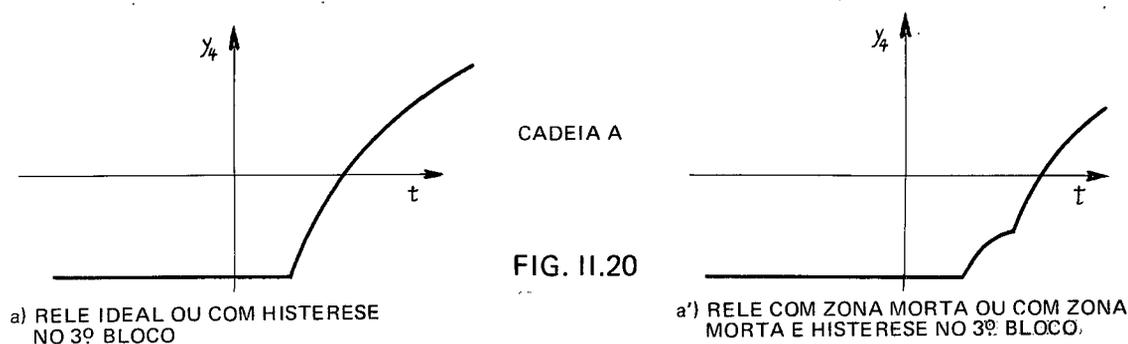


FIG. II.20

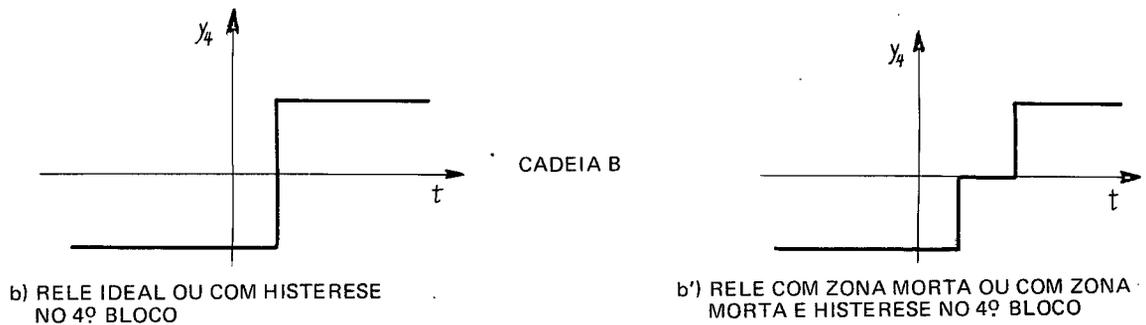


FIG. II.21

Podemos ainda verificar a existência de tandem na cadeia, pela presença de ponto anguloso na saída pseudo-linear ou pela região zero no intervalo  $t_{c21}$  ou  $t_{c43}$ .

Como as cadeias consideradas possuem no máximo 4 blocos, o número máximo de tandens existentes é na cadeia B (2 tandens). Vamos supor o caso de uma estrutura contendo um relê com zona morta na primeira não-linearidade:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}} t_{coi} = \text{zero (um tandem)} \quad (\text{II.50})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{S_1}{K_1}} t_{coi} = C \text{ (dois tandens)}$$

Sendo  $t_{coi} = t_{ci} - t_{co}$ , onde  $t_i$  é um instante de comutação.

#### II.4 - TESTE Nº 2 - RESPOSTA TEMPORAL COM TESTE DE RECONHECIMENTO DA PRESENÇA DE HISTERESE NA ÚLTIMA NÃO-LINEARIDADE DA CADEIA

## Introdução

Uma caracterização completa da última não-linearidade da cadeia exigiu o reconhecimento da presença de histerese nessa não-linearidade. Para tanto, foi necessário recorrer a um novo sinal de teste.

O sinal que nos permitiu obter o reconhecimento desejado tem a característica representada na Fig.II.22 .

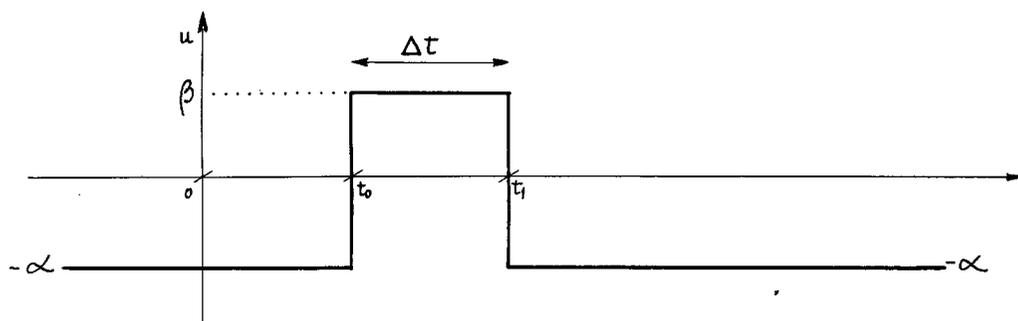


FIG. II.22

### II.4.1 - APLICAÇÃO DO TESTE À CADEIA DO TIPO A

Fazendo uma breve análise do comportamento de cada bloco, para os casos de uma cadeia do tipo A com a última não linearidade apresentando a característica de um relé ideal ou de um relé com histerese, podemos notar claramente a diferença de comportamento em cada um deles.

Como podemos verificar, para uma entrada qualquer, o comportamento de cada tipo de relé estudado em nosso trabalho, é característico desse tipo. Faremos na página seguinte uma rápida

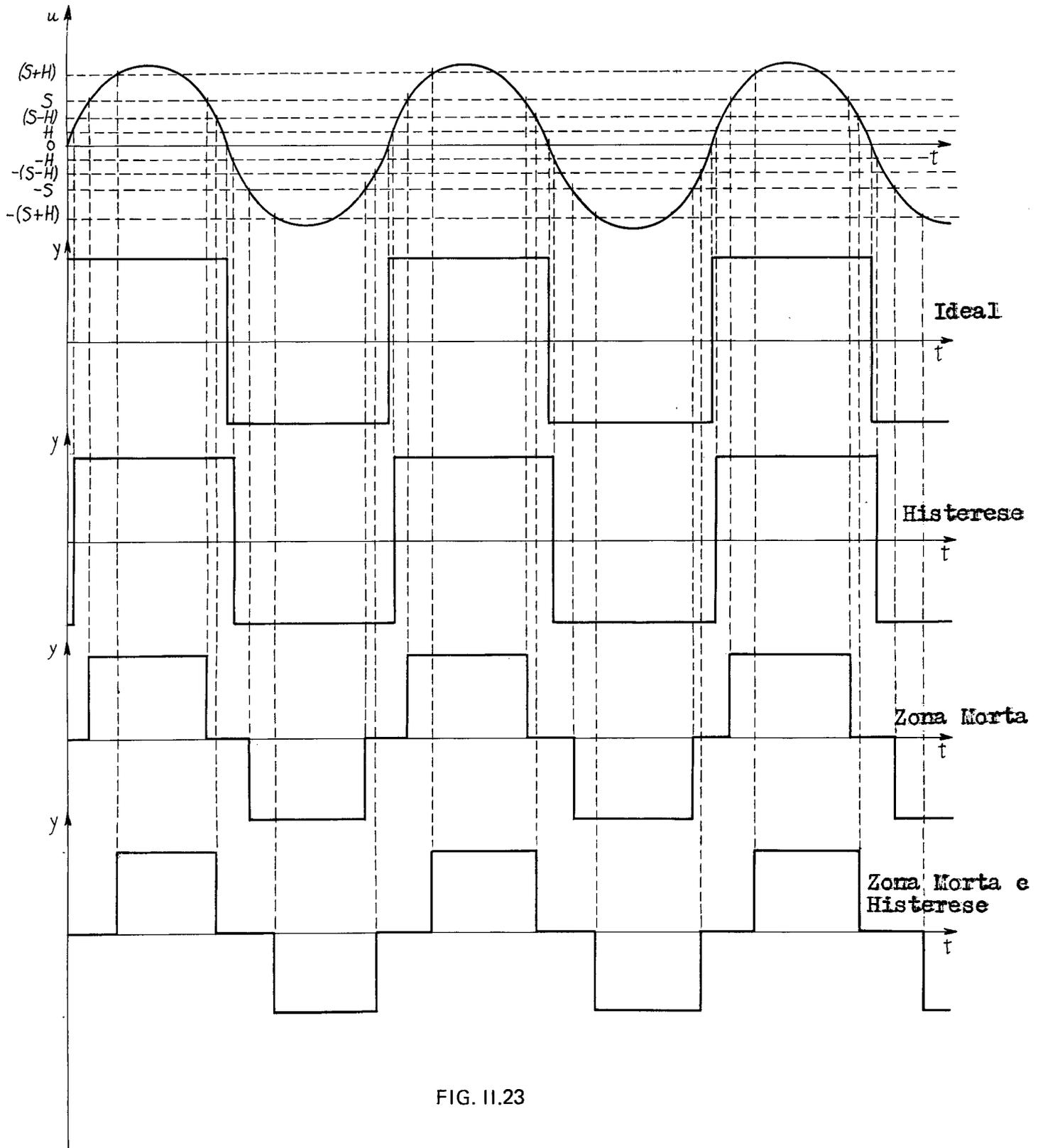


FIG. II.23

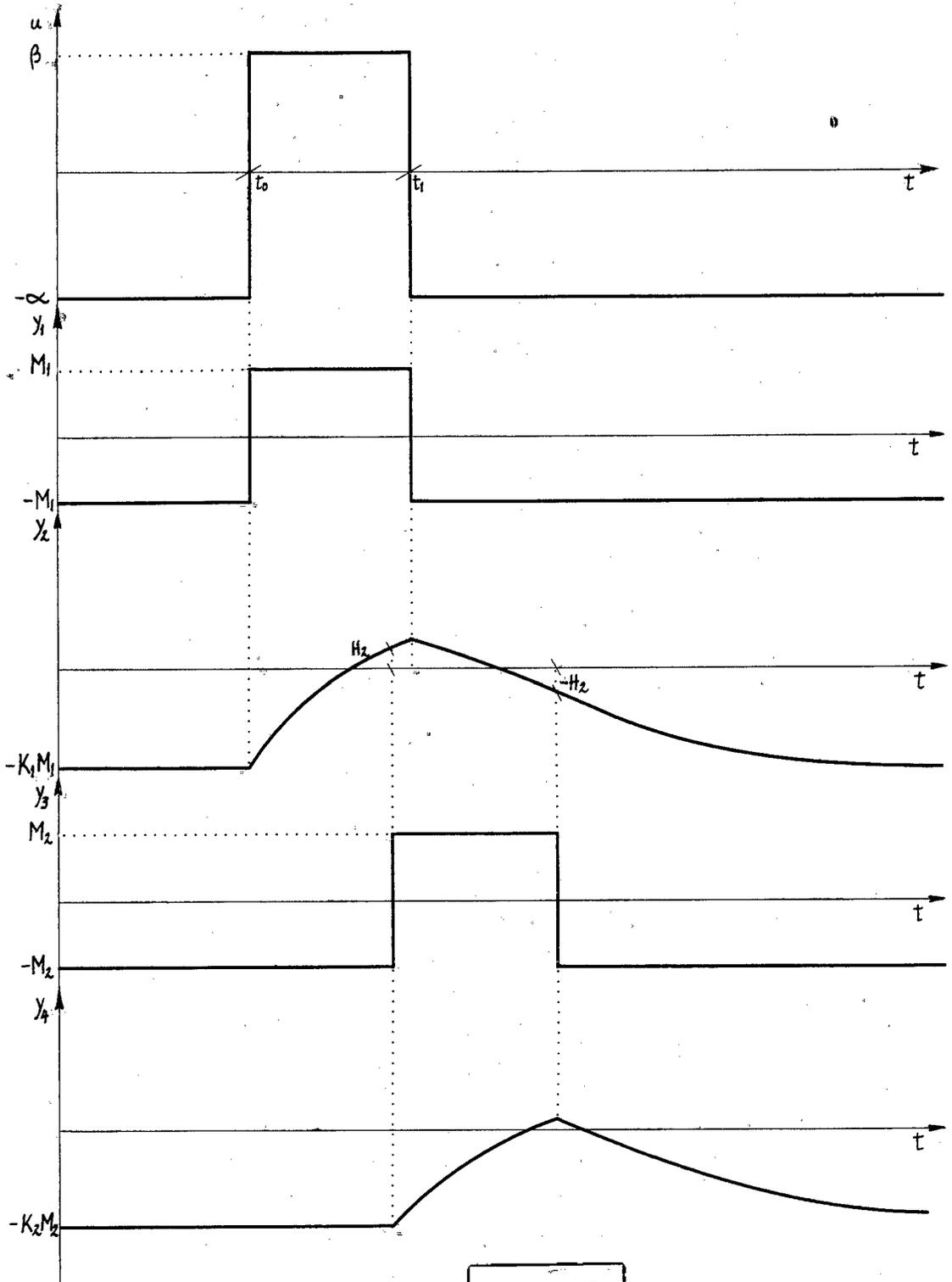


FIG. II.24

análise, utilizando uma entrada senoidal (alimentação direta no relé) e verificando o comportamento de cada relé, no que se refere às suas comutações.

Analisemos depois o caso de uma estrutura contendo relé ideal e relé com histerese, ao ser aplicada à entrada correspondente ao teste representado na Fig. II.24.

Teremos então, graficamente representados, os resultados na Fig. II.24.

Verificamos que se  $\Delta t = t_1 - t_0$  diminui até que no 2º bloco tenhamos o pico observado na curva de resposta com um valor abaixo do valor  $H_2$  da histerese, o terceiro bloco terá uma saída constante. Consequentemente, como a saída do 3º bloco é a entrada do quarto, a saída do sistema será também constante. Ver Fig. II.25 .

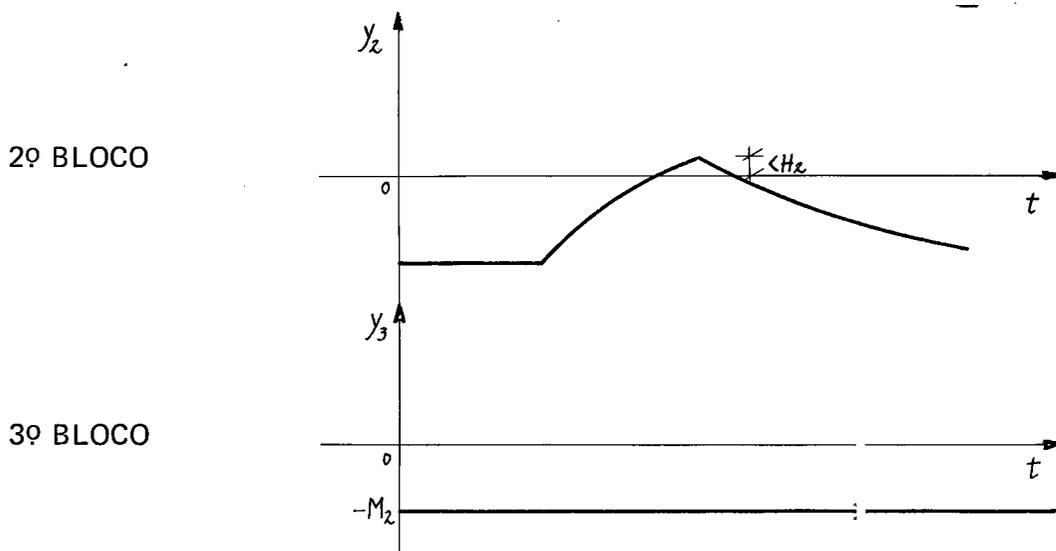


FIG. II.25

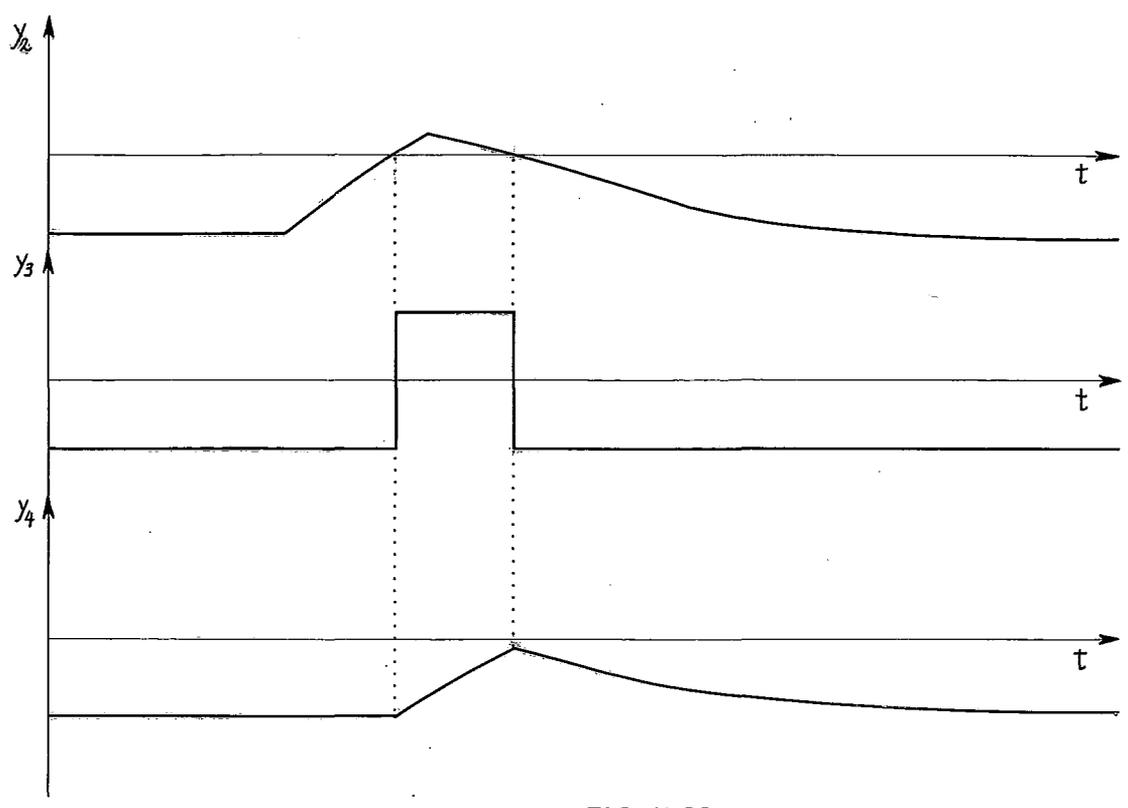


FIG. II.26

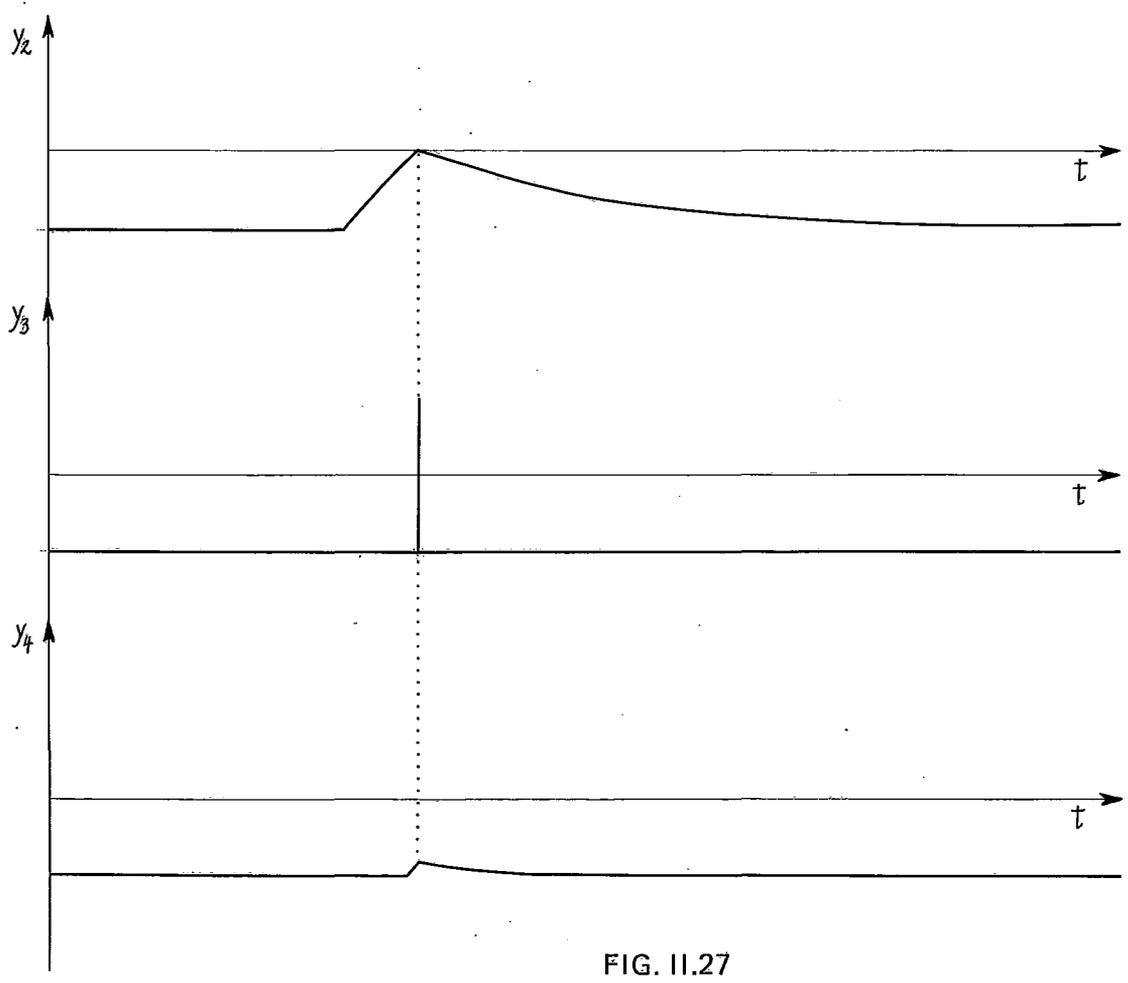


FIG. II.27

Se a estrutura em estudo contiver no terceiro bloco um relé do tipo ideal, a saída do sistema apresentará um pico cujo valor irá diminuindo até que no 2º bloco o pico correspondente atinja o eixo dos tempos, isto é, até que se tenha  $y_2 = 0$ .

Podemos notar a diferença em relação ao caso representado pela Fig.II.25 examinando a Fig.II.27 que representa o comportamento de uma estrutura contendo um relé ideal no terceiro bloco.

Quando temos um relé com histerese no 3º bloco, diminuindo o intervalo de tempo  $\Delta t$ , verificamos que a saída tem o seguinte comportamento:

- enquanto o pico da curva de saída do 2º bloco é maior ou igual a  $H_2$ , a saída do sistema é uma curva da forma: (Fig.II.28)



FIG. II.28

- quando o pico da característica de saída do 2º bloco torna-se menor que  $H_2$ , a saída do sistema passa a ser constante.

É oportuno notar que no caso da presença no 3º bloco de um relé ideal, o comportamento de saída é parecido com o do caso anterior, diferindo apenas no modo como se processa a diminuição gradativa do pico da curva da saída. Antes desta apresentar uma característica constante uma pequena perturbação pode ser observada.

No que se refer ao aspecto analítico do estudo que ora fazemos, podemos dizer que as equações representativas do comportamento dos diferentes blocos são em princípio as mesmas já apresentadas anteriormente quando da aplicação do teste nº 1.

Apenas precisamos verificar o que ocorre com cada uma delas em consequência da descontinuidade de primeira espécie experimentada pelo sinal de entrada no instante  $t=t_1$ .

Considerando os valores de  $t$  tais que:  $t < t_0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $t > t_1$ , temos para uma estrutura do tipo A contendo um relé ideal e um relé com histerese:

1º Bloco (relé ideal):  $y_1 = M_1$  (sinal  $u$ )

Então, para  $u = -\alpha \rightarrow y_1 = -M_1$

e para  $u = \beta \rightarrow y_1 = M_1$

Portanto para:  $t < t_0 : y_1 = -M_1$

$$t_0 \leq t \leq t_1 : y_1 = M_1 \quad (\text{II.51})$$

$$t > t_1 : y_1 = -M_1$$

2º Bloco: (linear)

Para :

$$\text{a) } t < t_0 : y_2 = -K_1 M_1 \quad (\text{II.52})$$

$$\text{b) } t_0 \leq t \leq t_1 : y_2 = K_1 M_1 \left( i - 2 e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}} \right) \quad (\text{II.53})$$

$$\text{c) } t > t_1 : \tau_1 \frac{dy_2}{dt} + y_2 = -K_1 M_1$$

solução homogênea:

$$y_2^h = C e^{-\frac{t-t_1}{\tau_1}}$$

solução particular:

$$t \rightarrow \infty, y_2^p = -K_1 M_1$$

solução geral:

$$y_2 = C e^{-\frac{t-t_1}{\tau_1}} - K_1 M_1 \quad (\text{II.54})$$

$$\text{Para } t=t_1 \rightarrow y_2 = K_1 M_1 (1 - 2 e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1}}) = C - K_1 M_1$$

$$2K_1 M_1 (1 - e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1}}) = C \quad (\text{II.55})$$

Portanto

$$y_2 = 2K_1 M_1 (e^{-\frac{t-t_1}{\tau_1}} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}}) - K_1 M_1 \quad (\text{II.56})$$

Seja  $t=t_{c1}$  o instante de comutação do 2º relé de  $-M_1$  a  $M_1$ .

Em  $t_{c1}$  :  $y_2 = H_2 - (t_0 < t_{c1} < t_1)$ .

$$H_2 = K_1 M_1 - 2K_1 M_1 e^{-\frac{t_{c1}-t_0}{\tau_1}}$$

$$e^{-\frac{t_{c1}-t_0}{\tau_1}} = \frac{-H_2 + K_1 M_1}{2K_1 M_1}$$

Portanto:

$$t_{c1} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1}{-H_2 + K_1 M_1} \quad (\text{II.57})$$

Analogamente encontramos  $t_{c2}$ , instante de comuta

ção do segundo relé de  $M_2$  a  $-M_2$ , sendo que em  $t_{c2}$ ,  $y_2 = -H_2$  e  $t_{c2} > t_1$ ,

$$\begin{aligned}
 -H_2 &= 2K_1 M_1 \left( e^{-\frac{t_{c2}-t_1}{\tau_1}} - e^{-\frac{t_{c2}-t_0}{\tau_1}} \right) - K_1 M_1 \\
 e^{-\frac{t_{c2}}{\tau_1}} \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right) &= \frac{-H_2 + K_1 M_1}{2K_1 M_1} \\
 \ln e^{-\frac{t_{c2}}{\tau_1}} + \ln \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right) &= \ln \frac{K_1 M_1 - H_2}{2K_1 M_1} \\
 -\frac{t_{c2}}{\tau_1} &= \ln \frac{K_1 M_1 - H_2}{2K_1 M_1} - \ln \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right) \\
 t_{c2} &= \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1 \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right)}{K_1 M_1 - H_2} \quad (II.58)
 \end{aligned}$$

Terceiro Bloco (não-linear)

$$\begin{aligned}
 y_3 &= -M_2 \quad \text{para } t < t_{c1} \\
 y_3 &= M_2 \quad \text{para } t_{c1} \leq t \leq t_{c2} \quad (II.59) \\
 y_3 &= -M_2 \quad \text{para } t > t_{c1}
 \end{aligned}$$

Quarto Bloco (linear)

$$\text{Para } t < t_{c1} : y_4 = -K_2 M_2 \quad (II.60)$$

$$\text{Para } t_{c1} \leq t \leq t_{c2} : y_4 = -2K_2 M_2 e^{-\frac{t-t_{c1}}{\tau_2}} + K_2 M_2 \quad (II.61)$$

$$\text{Para } t > t_{c2} : y_4 = C e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} - K_2 M_2 \quad (\text{II.62})$$

### Cálculo de C:

Para calcular C vamos determinar antes o valor de  $t_{c21} = t_{c2} - t_{c1}$

$$t_{c21} = \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1 (e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}})}{K_1 M_1 - H_2} - t_0 - \tau_1 \ln \frac{2K_1 M_1}{K_1 M_1 - H_2}$$

$$t_{c21} = -t_0 + \tau_1 \ln \frac{\frac{2K_1 M_1 (e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}})}{K_1 M_1 - H_2}}{\frac{2K_1 M_1}{K_1 M_1 - H_2}}$$

$$t_{c21} = -t_0 + \tau_1 \ln (e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}}) \quad (\text{II.63})$$

Portanto

$$e^{-\frac{t_{c21}}{\tau_2}} = e^{\frac{t_0}{\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_2} \ln (e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}})} = e^{\frac{t_0}{\tau_1} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}}} - \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

Fazendo  $t=t_{c2}$  em (II.61)

$$y_4(t_{c2}) = -2K_2 M_2 (e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}}) - \frac{\tau_1}{\tau_2} e^{\frac{t_0}{\tau_2}} + K_2 M_2 = C_1 \quad (\text{II.64})$$

Na equação (II.62) :  $y_4 = C e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} - K_2 M_2$  ;  
considerando-se que  $t_{c2}$  é o instante inicial, temos:

$$y_4 = C - K_2 M_2 = C_1$$

Portanto,

$$C = C_1 + K_2 M_2 \quad (\text{II.65})$$

Então, a equação da saída do sistema é:

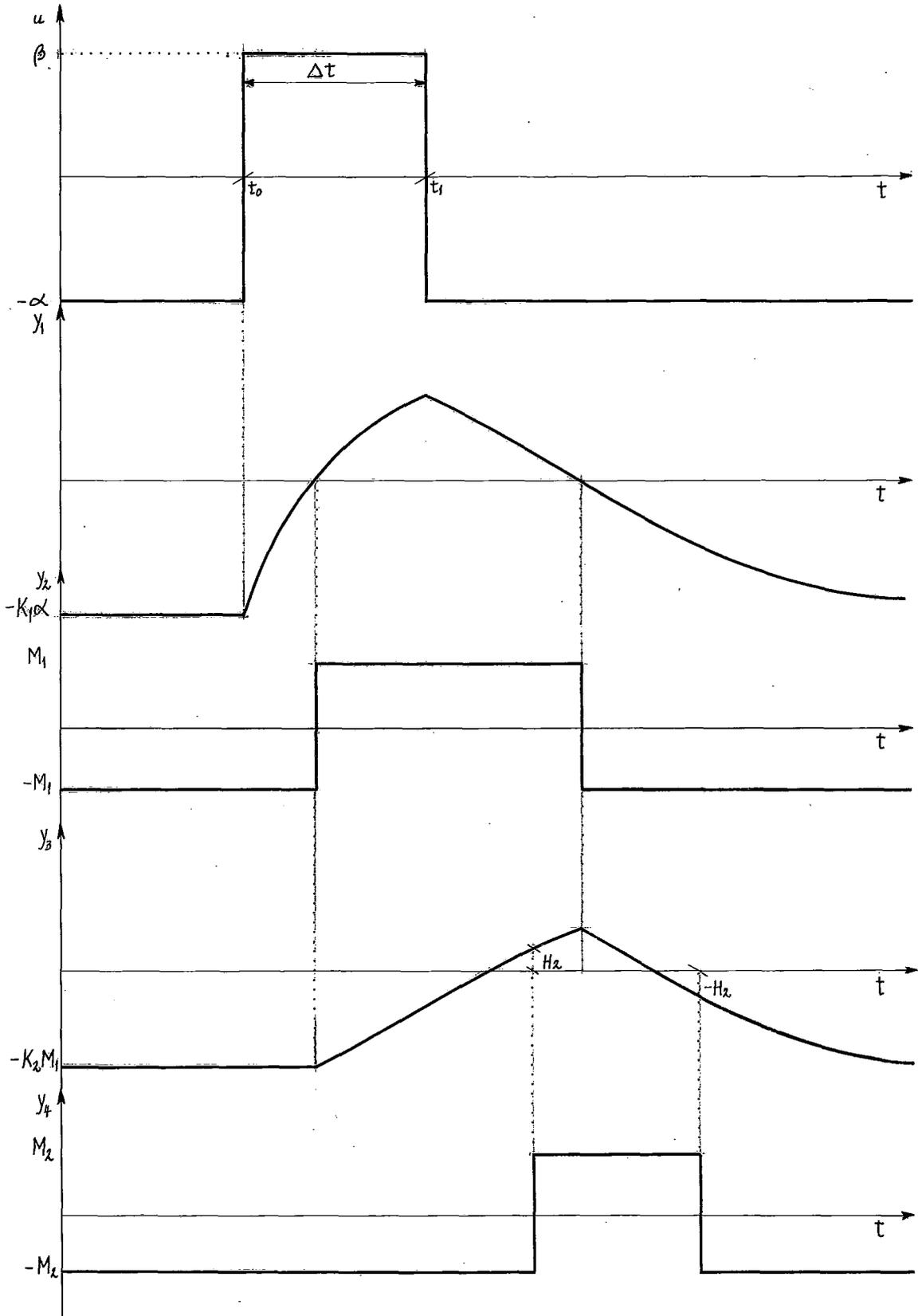
$$y_4 = (C_1 + K_2 M_2) e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} - K_2 M_2 \quad (\text{II.66})$$

#### II.4.2 - APLICAÇÃO DO TESTE À CADEIA DO TIPO B

Como para a cadeia do tipo A, analisaremos inicialmente o comportamento da característica de cada bloco em consequência da aplicação à cadeia em estudo da entrada utilizada neste teste. Vamos mais uma vez considerar o caso de uma estrutura contendo relé ideal e relé com histerese (Fig.II.29) .

Para este caso, como o último bloco é não-linear, a verificação da presença neste bloco da histerese, é feita pela observação da característica não-linear.

FIG. II.29



Vejamos novamente qual a diferença entre as características de saída de uma estrutura do tipo B com um relé ideal e com um relé apresentando histerese no último bloco.

Fazendo diminuir gradativamente  $\Delta t$ , observemos o que ocorre na saída.

a) Estrutura com um relé ideal no último bloco:

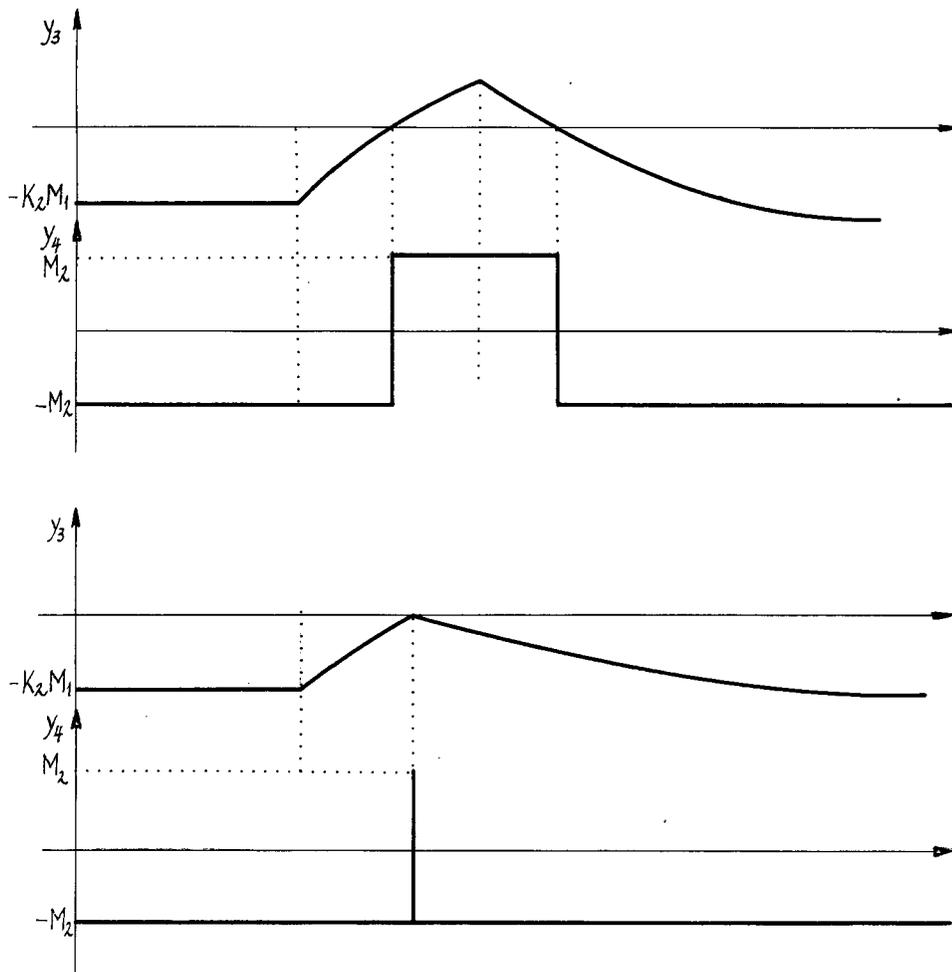


FIG. II.30

b) Estrutura com um relé apresentando histerese no último bloco:

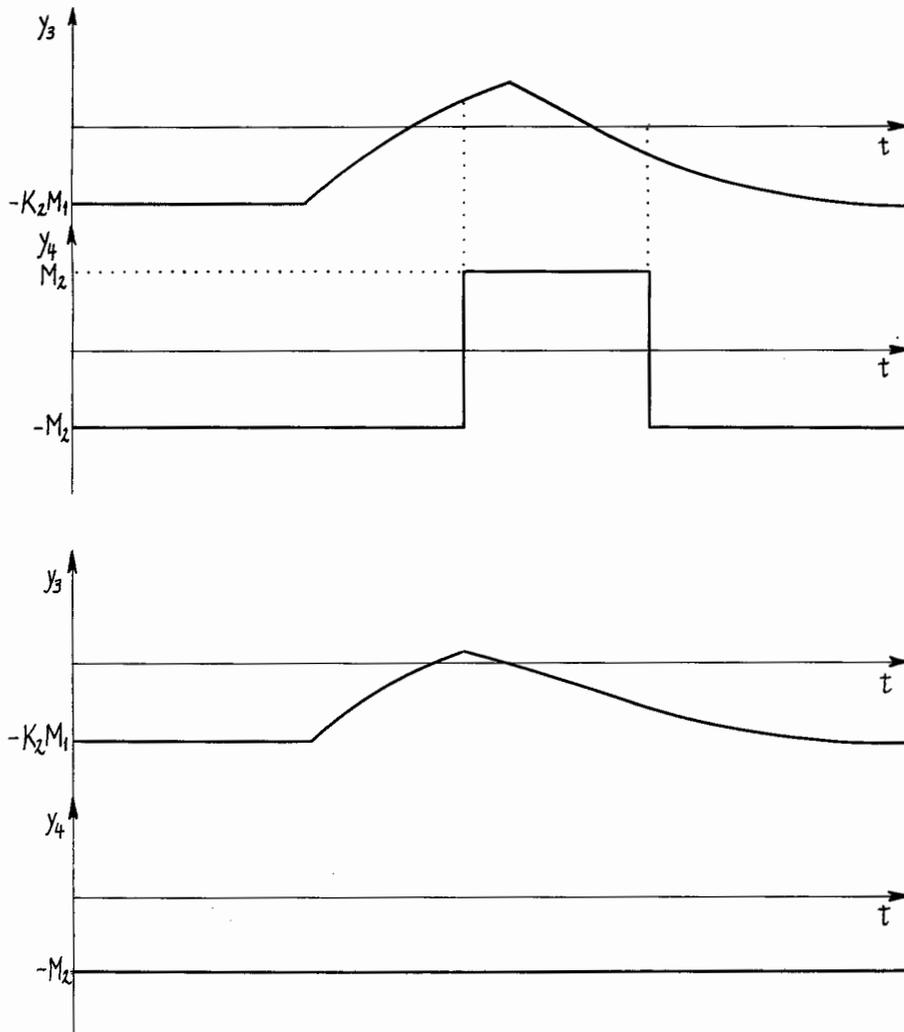


FIG. II.31

Verificamos assim que no caso de um relé ideal no último bloco, teremos com a diminuição gradativa de  $\Delta t$  um pico na saída, no instante correspondente a  $y_3=0$ . Para a estrutura contendo um relé com histerese no último bloco, teremos a forma



diminuindo enquanto  $y_2 > H_2$ . A partir do instante  $y_2 = H_2$ , a saída passa a ser constante.

### Equações características no caso da cadeia B:

Passaremos em revista as equações que caracterizam o comportamento dos diversos blocos de uma estrutura contendo um relé com histerese e um relé ideal:

1º Bloco (linear) :

$$\text{Para } t < t_0 : y_1 = -K_1 \alpha \quad (\text{II.65})$$

$$\text{Para } t_0 \leq t \leq t_1 : y_1 = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}} \right] \quad (\text{II.66})$$

$$\text{Para } t > t_1 : y_1 = C e^{-\frac{t-t_1}{\tau_1}} - K_1 \alpha \quad (\text{II.67})$$

Fazendo  $t=t_1$  em (II.66) e (II.67):

$$y_1 = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\frac{t_1-t_0}{\tau_1}} \right] = C - K_1 \alpha$$

Substituindo  $C$  em (II.67):

$$y_1 = K_1 (\alpha + \beta) \left[ e^{-\frac{t-t_1}{\tau_1}} - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_1}} \right] - K_1 \alpha \quad (\text{II.68})$$

Seja  $t=t_{c1}$  o instante de comutação do 1º relé de  $-M_1$  a  $M_1$  ( $y_1=H_2$ )

$$H_2 = K_1 \left[ \beta - (\alpha + \beta) e^{-\frac{t_{c1} - t_0}{\tau_1}} \right]$$

Da expressão acima tiramos:

$$t_{c1} = t_0 + \tau_1 \ln \frac{K_1(\alpha + \beta)}{K_1\beta - H_2} \quad (\text{II.69})$$

No instante  $t = t_{c2}$  o relé comuta de  $M_1$  para  $-M_1$  e  $y_1 = -H_2$ , portanto:

$$-H_2 = K_1(\alpha + \beta) \left[ e^{-\frac{t_{c2} - t_1}{\tau_1}} - e^{-\frac{t_{c2} - t_0}{\tau_1}} \right] - K_1\alpha$$

Donde:

$$t_{c2} = \tau_1 \ln \frac{K_1(\alpha + \beta) \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right)}{K_1\alpha - H_2} \quad (\text{II.70})$$

2º Bloco (relé com histerese):

$$\text{Para } t < t_{c1} : y_2 = -M_1$$

$$\text{Para } t_{c1} \leq t \leq t_{c2} : y_2 = M_1$$

$$\text{Para } t > t_{c2} : y_2 = -M_1$$

3º Bloco (linear) :

$$\text{Para } t < t_{c1} : y_3 = -K_2 M_1 \quad (\text{II.71})$$

$$\text{Para } t_{c1} \leq t \leq t_{c2} : y_3 = -2K_2 M_1 e^{-\frac{t - t_{c1}}{\tau_2}} + K_2 M_1 \quad (\text{II.72})$$

$$\text{Para } t > t_{c2} : y_3 = C e^{-\frac{t - t_{c2}}{\tau_2}} - K_2 M_1 \quad (\text{II.73})$$

Para calcularmos  $C$  vamos inicialmente determinar  $t_{c21}$ :

$$t_{c21} = t_{c2} - t_{c1} = -t_0 + \tau_1 \ln \frac{(K_1\beta - H_2) \left( e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{-\frac{t_0}{\tau_1}} \right)}{K_1\alpha - H_2}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t_{c21}}{\tau_2}} &= e^{\frac{t_0}{\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_2} \ln \frac{(K_1\beta - H_2) \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right)}{K_1\alpha - H_2}} = \\ &= e^{\frac{t_0}{\tau_2}} \left[ \frac{(K_1\beta - H_2) \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right)}{K_1\alpha - H_2} \right]^{-\frac{\tau_1}{\tau_2}} \end{aligned}$$

Usando a relação (II.70) para  $t=t_{c2}$ :

$$\begin{aligned} y_3(t_{c2}) &= -2K_2M_1 e^{\frac{t_0}{\tau_2}} \left[ \frac{(K_1\beta - H_2) \left( e^{\frac{t_1}{\tau_1}} - e^{\frac{t_0}{\tau_1}} \right)}{K_1\alpha - H_2} \right]^{-\frac{\tau_1}{\tau_2}} + \\ &+ K_2M_1 = C_2 \quad \text{(II.74)} \end{aligned}$$

Mas  $t_{c2}$  é o instante inicial de (II.73).

Portanto, temos para  $t=t_{c2}$ :

$$y_3 = C - K_2M_1 = C_2$$

Ou seja:

$$C = C_2 + K_2M_1 \quad \text{(II.75)}$$

Então:

$$y_3 = (C_2 + K_2M_1) e^{-\frac{t-t_{c2}}{\tau_2}} - K_2M_1 \quad \text{(II.76)}$$

Para  $t=t_{c3}$ ,  $y_3=0$  (instante de comutação do 2º relé de  $-M_2$  para  $M_2$ . Como  $t_{c1} < t_{c3} < t_{c2}$  usamos a relação (II.72).

Teremos assim:

$$0 = -2K_2M_1 e^{-\frac{t_{c3}-t_{c1}}{\tau_2}} + K_2M_1$$

Da expressão acima tiramos:

$$t_{c3} = t_{c1} + \tau_1 \ln 2 \quad (\text{II.77})$$

Sendo  $t_{c4}$  o instante de comutação do segundo relé, de  $M_2$  para  $-M_2$ , e com  $t_{c4} > t_{c2}$  usamos (II.76) :

$$0 = (C_2 + K_2M_1) e^{-\frac{t_{c4}-t_{c2}}{\tau_2}} - K_2M_1$$

O valor de  $t_{c4}$  será dado então por:

$$t_{c4} = t_{c2} + \tau_2 \ln \frac{C_2 + K_2M_1}{K_2M_1} \quad (\text{II.78})$$

4º Bloco (relé ideal) :

Para  $t < t_{c3}$  :  $y_4 = -M_2$

Para  $t_{c3} \leq t \leq t_{c4}$  :  $y_4 = M_2$  (II.79)

Para  $t > t_{c4}$  :  $y_4 = -M_2$

#### II.4.3 - CONCLUSÕES SOBRE O TESTE Nº 2

De maneira análoga, poderíamos também aplicar o teste nº2 às demais estruturas tal como fizemos no caso do teste

nº 1. Como o procedimento seria essencialmente o mesmo e não oferece maiores dificuldades, deixamos de fazê-lo na presente memória.

A aplicação do teste nº 2 às estruturas consideradas no presente trabalho requer um maior cuidado nas transformações matemáticas e um maior número de simulações tendo em vista particularmente a necessidade de observarmos o comportamento da característica de saída para diferentes valores de  $\Delta t$ .

Este teste então tem o seu emprego justificado pela relativa facilidade com que permite identificar a presença de um relé com histerese no último bloco da cadeia.

## II.5 - TESTE Nº 3 - EQUAÇÕES E GRÁFICOS DOS TEMPOS DE COMUTAÇÃO

Este teste consiste na realização dos gráficos dos tempos de comutação das não-linearidades (relês) considerando-se duas situações: na primeira,  $\beta$  é mantida constante, fazendo-se variar  $\alpha$ ; na segunda,  $\alpha$  permanece constante, enquanto  $\beta$  varia.

Como já foi visto anteriormente,  $\alpha$  e  $\beta$  representam as amplitudes do sinal de entrada e para cada situação, consideraremos dois casos:  $\alpha > 0, \beta < 0$  e  $\alpha < 0, \beta > 0$ .

Pelo fato de acharmos suficiente para os objetivos do nosso estudo, consideramos apenas um estado de comutação para cada estrutura.

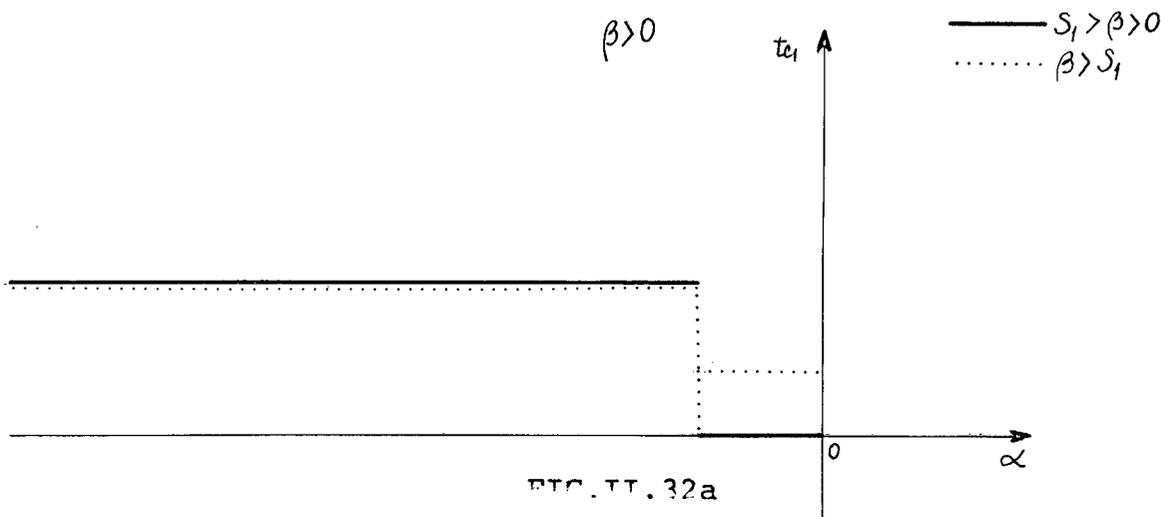
II.5.1 - TEMPOS DE COMUTAÇÃO COM  $\beta$  CONSTANTE E  $\alpha$  VARIÁVEL - CADEIA DO TIPO A

Para a cadeia do tipo A, os tempos de comutação se mantêm constantes, quando se faz variar a amplitude da parte negativa do sinal de entrada.

Como estamos considerando apenas a primeira comutação operada no instante  $t_{c1}$ , temos na resposta os tempos de comutação da primeira não-linearidade (1º bloco).

Sendo a não-linearidade do tipo relé, a comutação deste acha-se ligada à mudança de polaridade do sinal de excitação e levará em conta as características do relé. Por exemplo, se a primeira não-linearidade fôr do tipo relé com zona morta, teremos que considerar  $\alpha > S_1$  (sendo  $S_1$  o valor da zona morta).

Vejamos então os gráficos, considerando-se a variação de 2, para uma estrutura que contém um relé de zona morta no 1º bloco: (Fig.II.32)



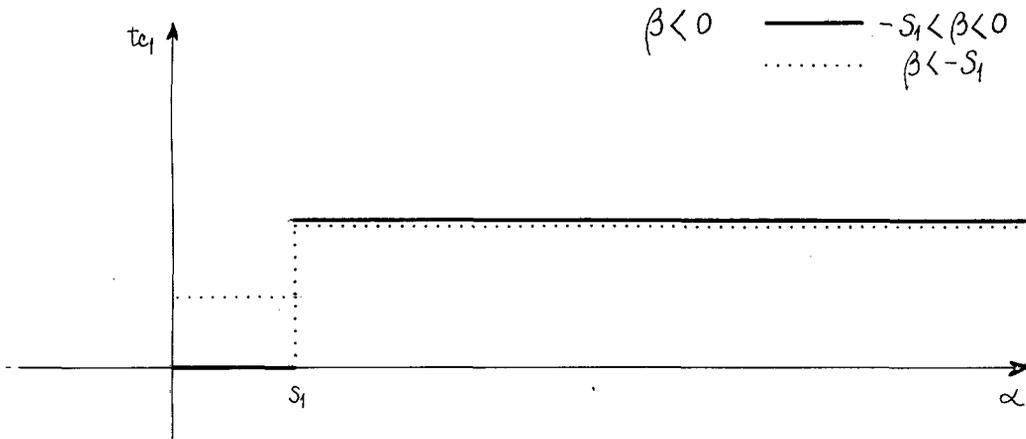


FIG. II.32b

II.5.2 - TEMPO DE COMUTAÇÃO COM  $\alpha$  CONSTANTE E  $\beta$  VARIÁVEL - CADEIA DO TIPO A

Analogamente ao caso II.4.1, as comutações não serão alteradas pelas variações de  $\beta$ , assumindo-se apenas que  $\beta$  terá valores compatíveis com as características dos relés.

Vamos considerar, para exemplo, uma estrutura contendo um relé com zona morta no 1º bloco (Figs. II.33)

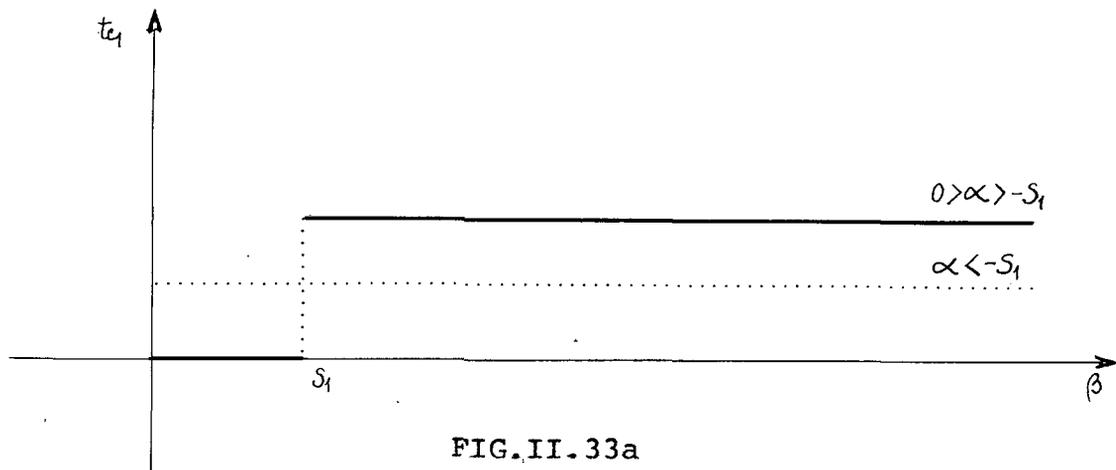


FIG. II.33a

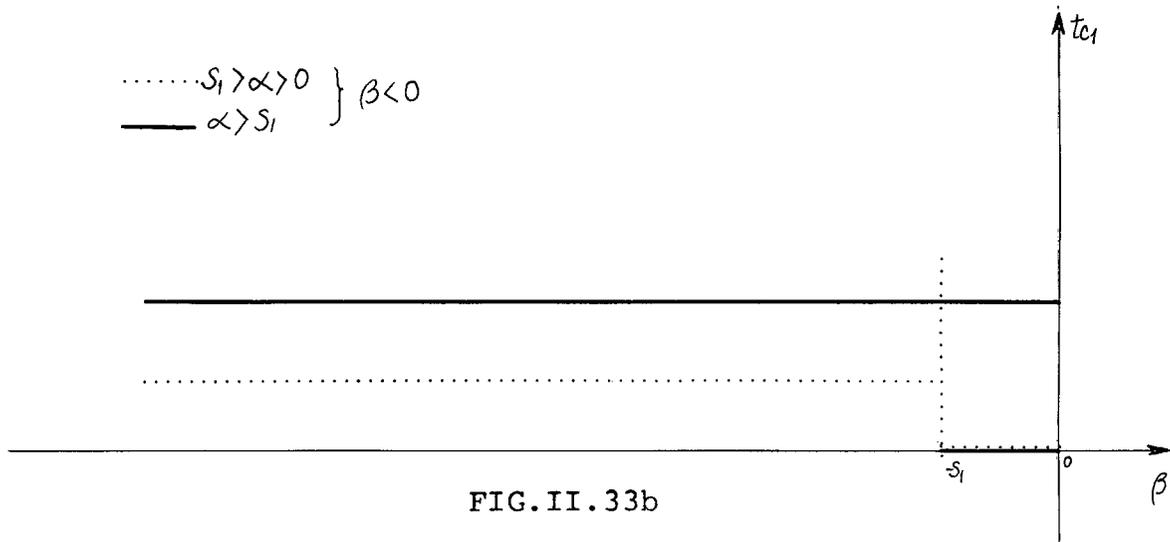


FIG. II. 33b

### II.5.3 - TEMPOS DE COMUTAÇÃO PARA CADEIA DO TIPO B

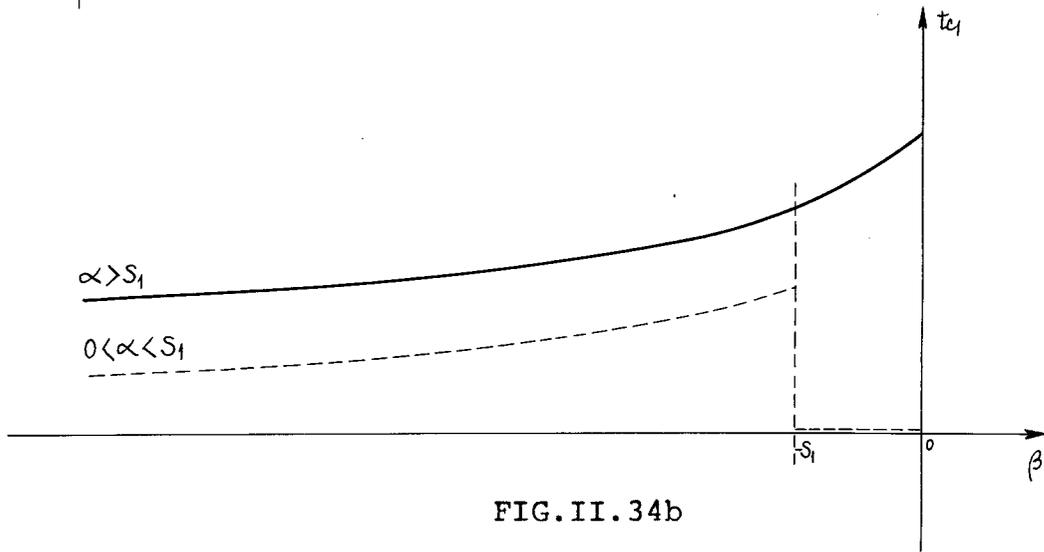
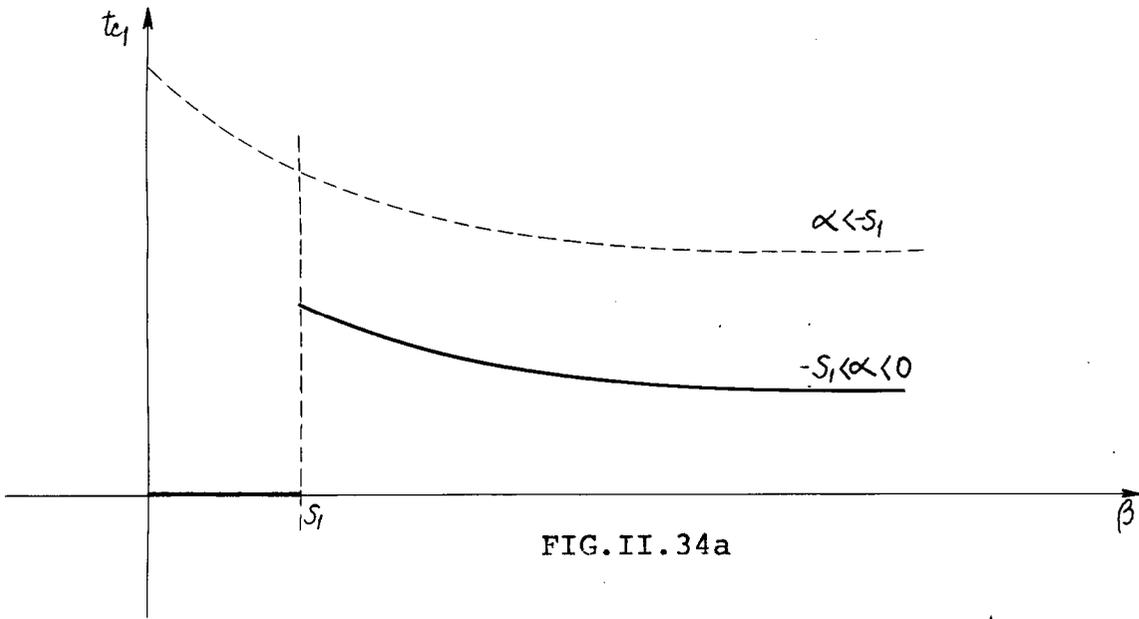
Uma estrutura do tipo B tem como sabemos o primeiro bloco representado por uma característica linear. Este fato fará com que o tempo de comutação seja uma função de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Já foram verificadas nos testes anteriores, as equações para os tempos de comutação no caso de cada cadeia.

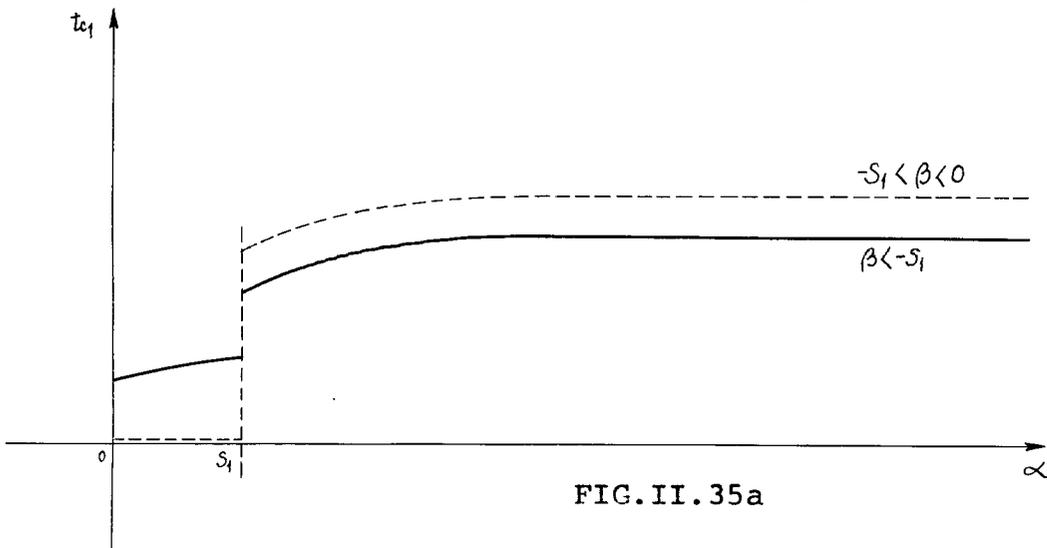
Vejamos assim, diretamente, os gráficos para uma estrutura contendo um relé com zona morta no primeiro bloco. (Fig. II.34)

a)  $\alpha$  constante e  $\beta$  variável

(Veja página seguinte)



b)  $\beta$  constante e  $\alpha$  variável



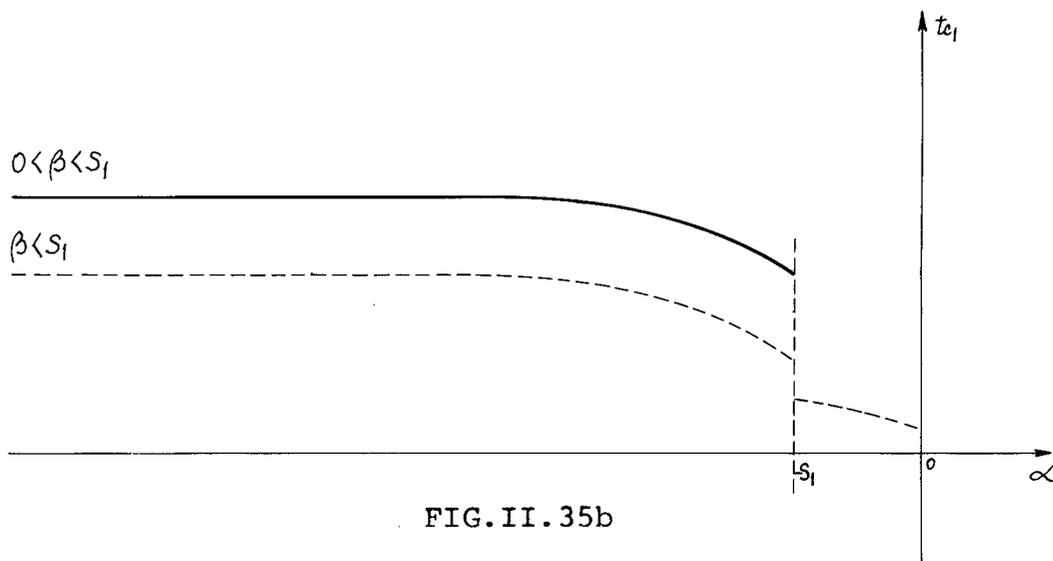


FIG. II. 35b

#### II.5.4 - CONCLUSÕES SOBRE O TESTE Nº 3

Neste capítulo abordamos apenas as estruturas que contêm um relê do tipo com zona morta na primeira não-linearidade. No terceiro capítulo, onde apresentaremos os resultados obtidos, será fácil verificar que este teste nos permite identificar a primeira não-linearidade, nas cadeias dos tipos A e B.

Notemos porém uma certa dificuldade ao procurarmos estabelecer a distinção numa cadeia com um relê ideal e outra contendo um relê com histerese na primeira não-linearidade, em consequência do problema da origem (para o caso do relê ideal). Achamos conveniente então apelar para um 4º teste.

#### II.6 - TESTE Nº 4 - CARACTERÍSTICA ESTÁTICA

Este teste nos permitiu determinar com exatidão a presença de um relê ideal na primeira não-linearidade. Nos demais casos, ou seja, naqueles em que seriam considerados os outros tipos

de relés, uma análise mais precisa se faria necessária. Como tal análise extrapola o interesse do nosso trabalho, resolvemos apenas apresentar os resultados obtidos no terceiro capítulo.

A característica estática nos dá a saída do sistema em função da entrada. Consideramos dois casos:

- a)  $\alpha$  constante e  $\beta$  decrescente
- b)  $\alpha$  constante e  $\beta$  crescente

Para as estruturas que contêm relê ideal na primeira não-linearidade, obtivemos a característica representada na Fig. II.36.

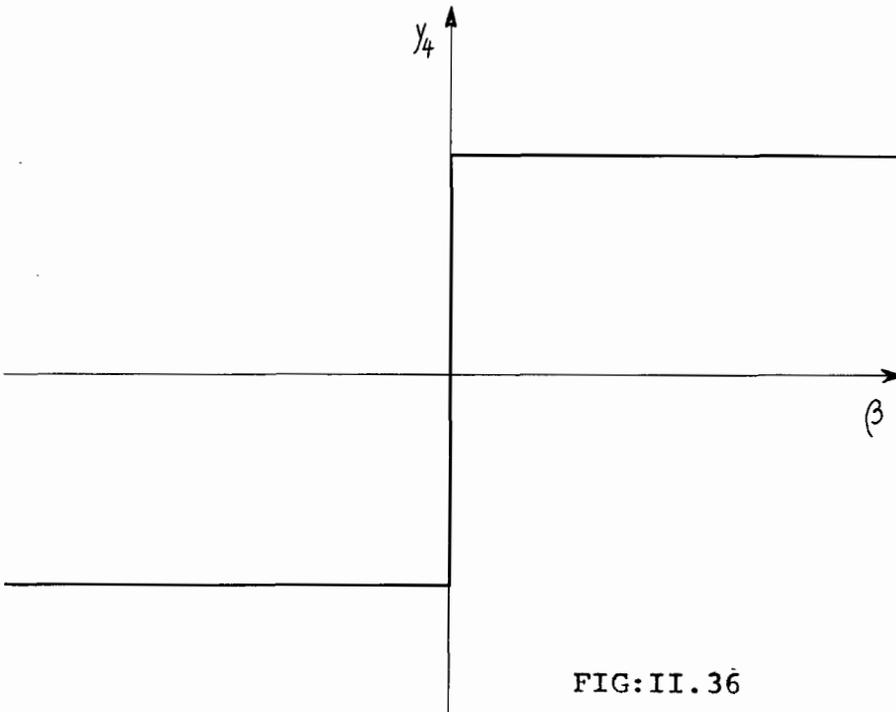


FIG:II.36

Para as estruturas contendo relê com histerese, o gráfico obtido é do tipo dado pela Fig. II.37.

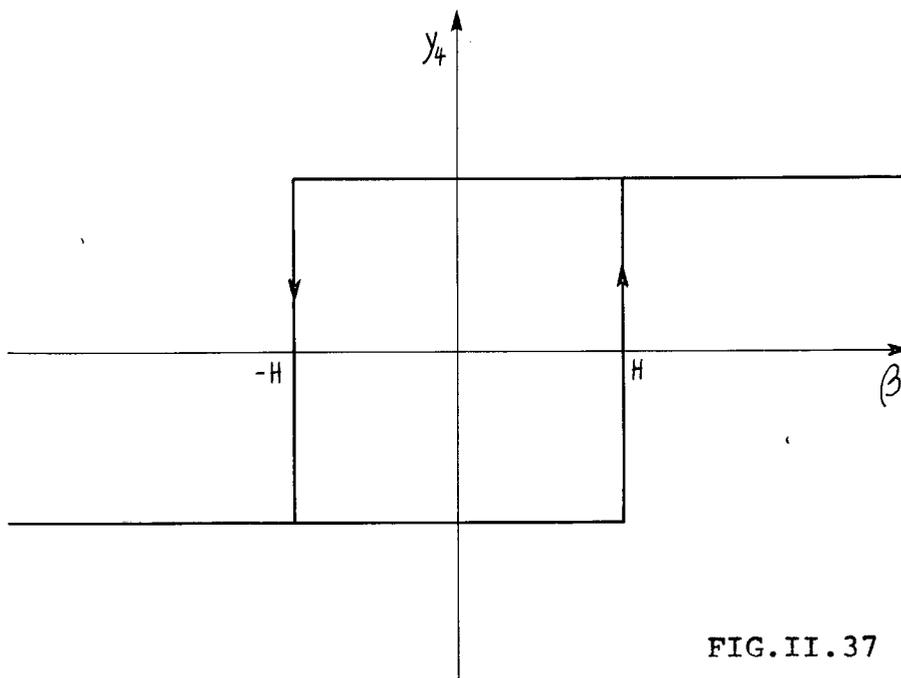


FIG.II.37

A presença de histerese na cadeia vai dificultar o reconhecimento das estruturas contendo relês com "zona morta" ou com "zona morta e histerese". Achamos que para os fins a que nos propomos em nosso trabalho já tínhamos elementos suficientes para permitir a identificação topológica de todas as estruturas. Deixamos, por isto, o teste em questão para ser desenvolvido de maneira mais aprofundada em um trabalho posterior.

## II.7 - CONCLUSÃO

Com os quatro testes efetuados, consideramos ser possível o levantamento das características essenciais em nível de

análise susceptíveis de permitir a identificação topológica de algumas cadeias não-lineares com não-linearidades do grupo dos relês.

Os testes nº 1 e nº 2 nos permitiram identificar o tipo de cadeia, a natureza do último bloco, a existência e o número de tandens (L-N) e o tipo de relé existente na última não-linearidade.

Os testes nº 3 e 4 permitiram a identificação da natureza do 1º bloco e do tipo de relé existente na primeira não-linearidade.

## C A P Í T U L O     I I I

### III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos os resultados experimentais que serviram de base para nosso estudo.

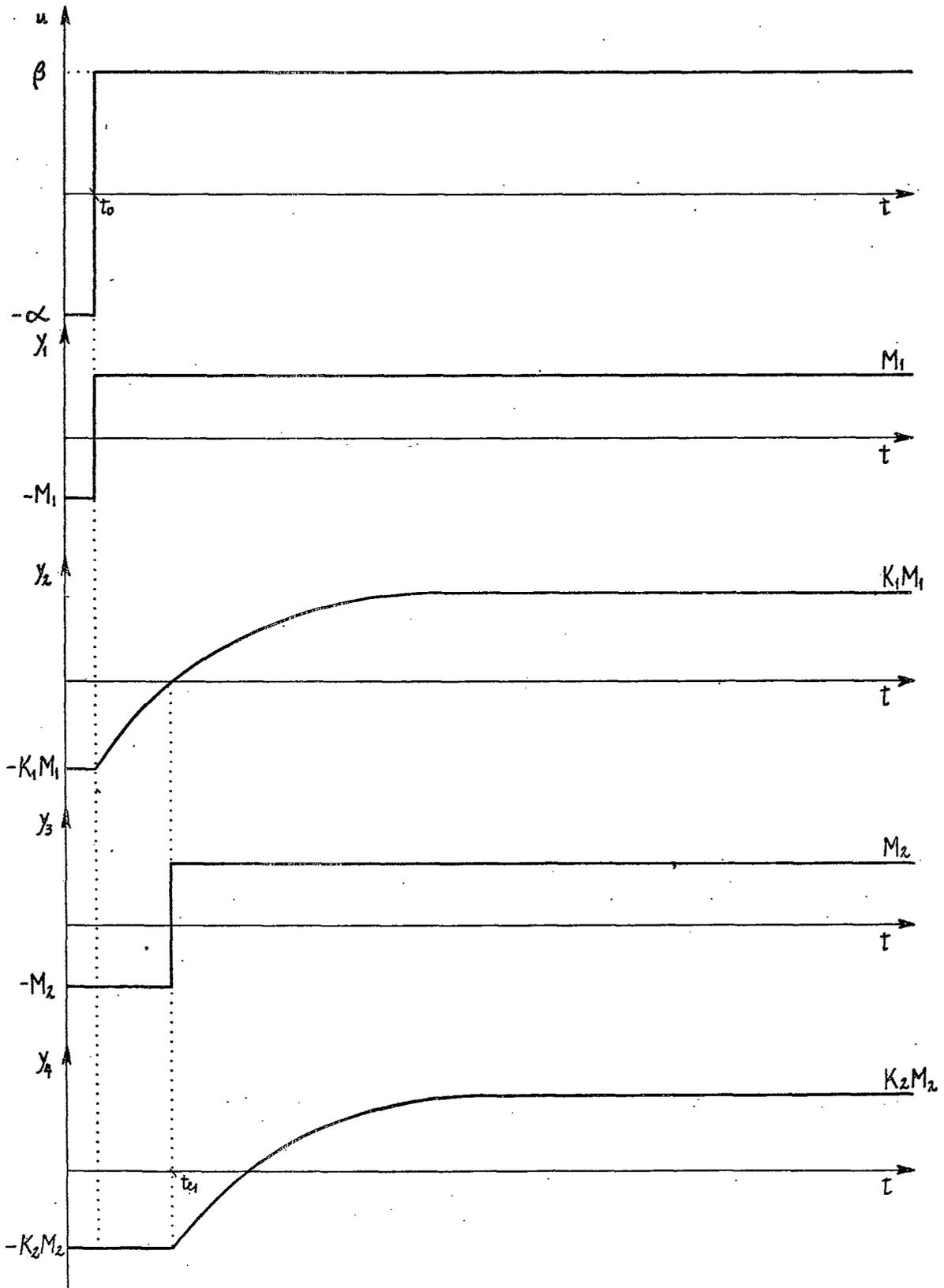
Para que este capítulo não seja muito extenso, apresentaremos apenas os gráficos que nos pareceram suficientes para a verificação de cada teste.

Para a simulação das nossas estruturas utilizamos os computadores IBM modelo 2D e IBM modelo 40, do Núcleo de Computação Eletrônica da U.F.R.J.

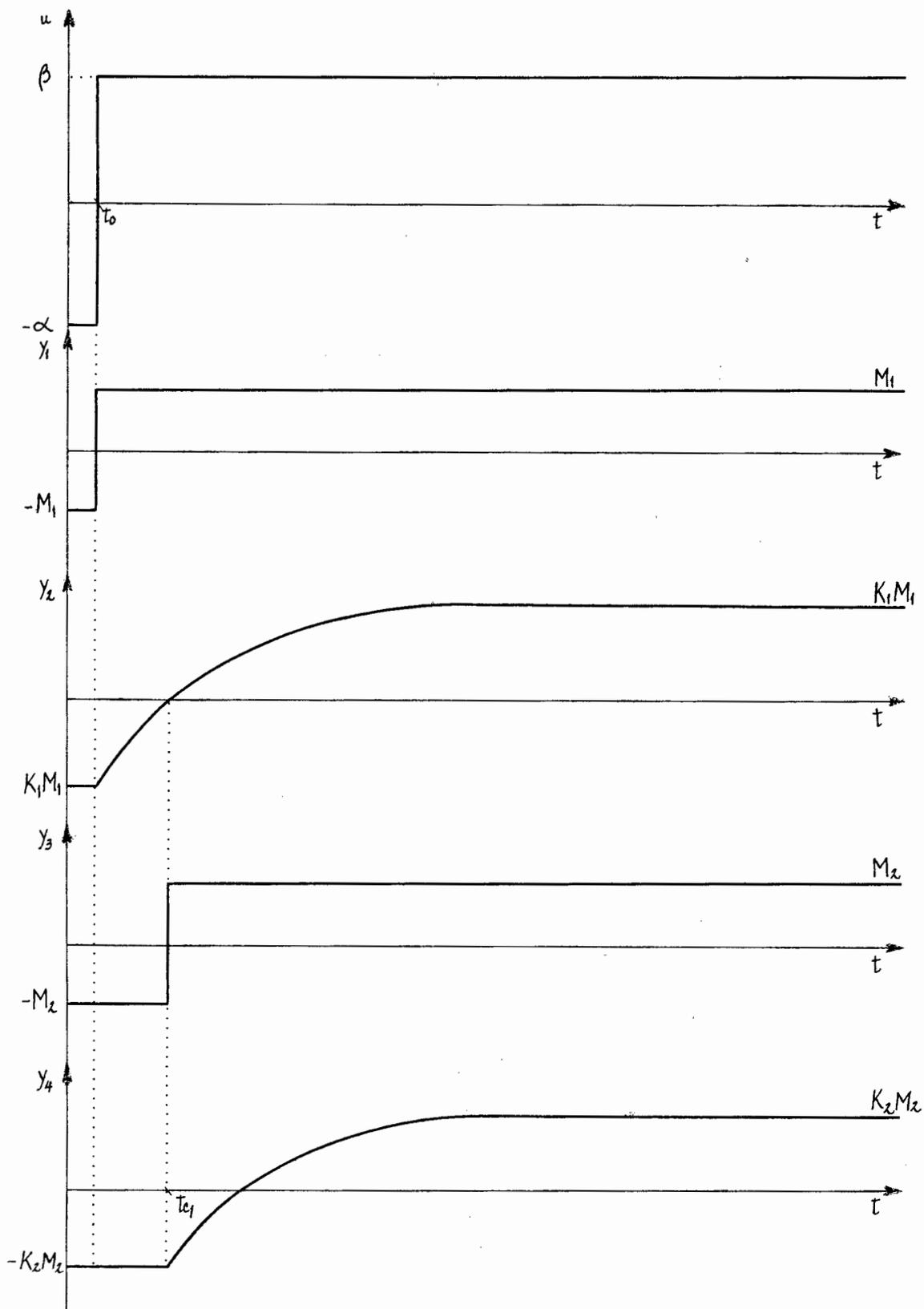
### III.2 - TESTE Nº 1

Apresentamos aqui os gráficos das saídas de cada bloco em função do tempo, considerando todas as estruturas estudadas do tipo A e do tipo B.

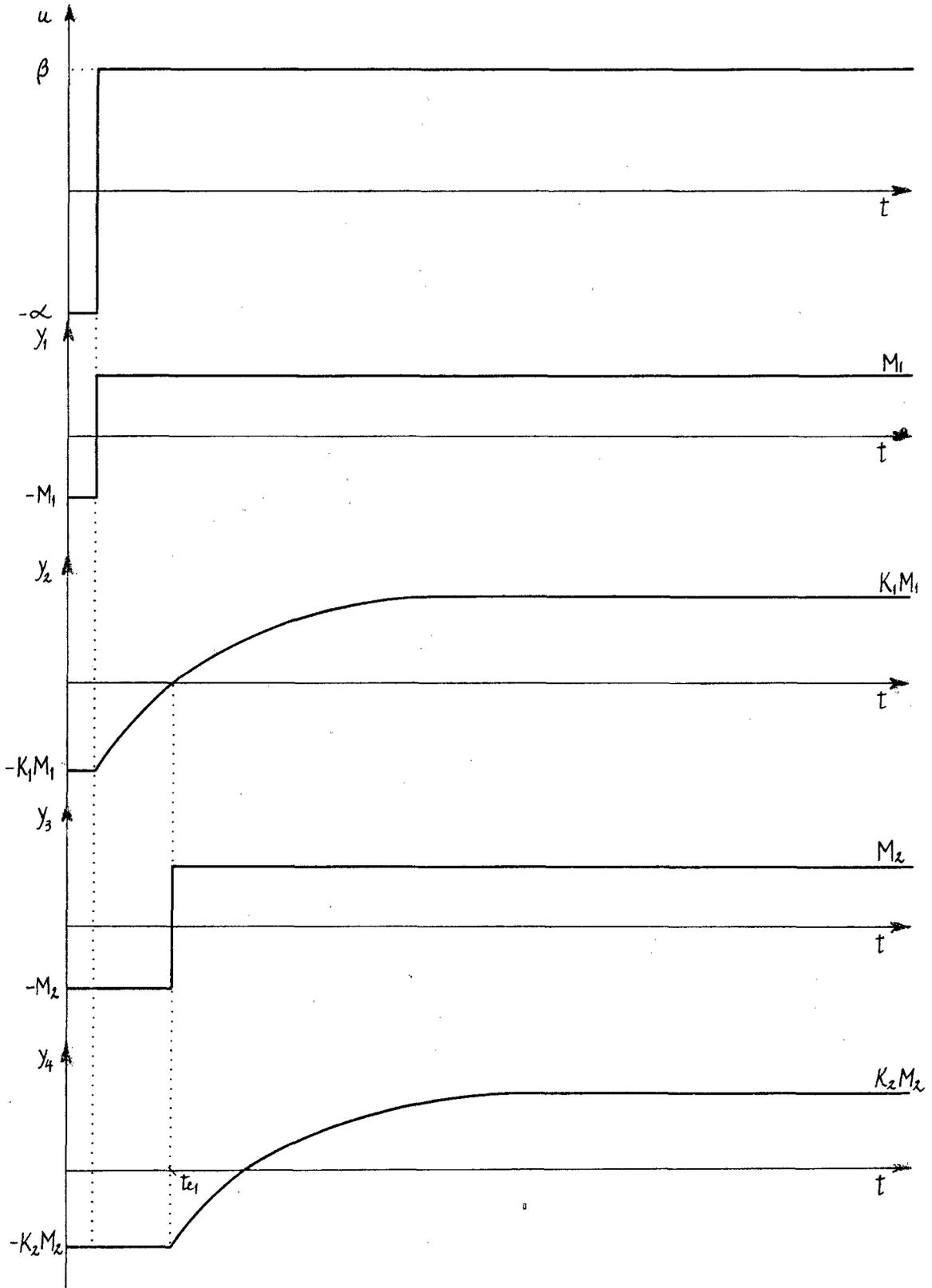
RELE COM HISTERESE E RELE IDEAL  
CADEIA A



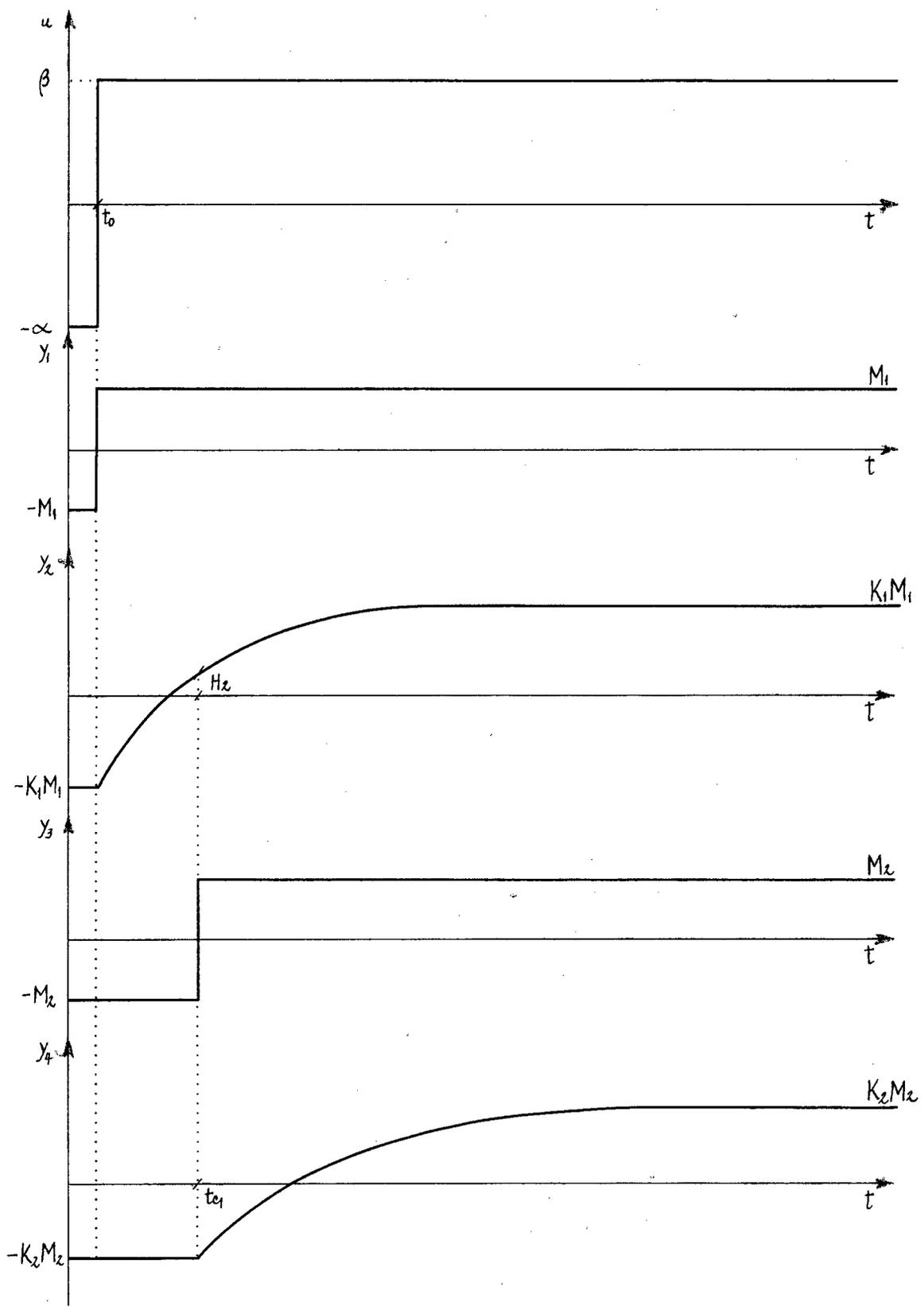
RELE COM ZONA MORTA E RELE IDEAL  
CADEIA A



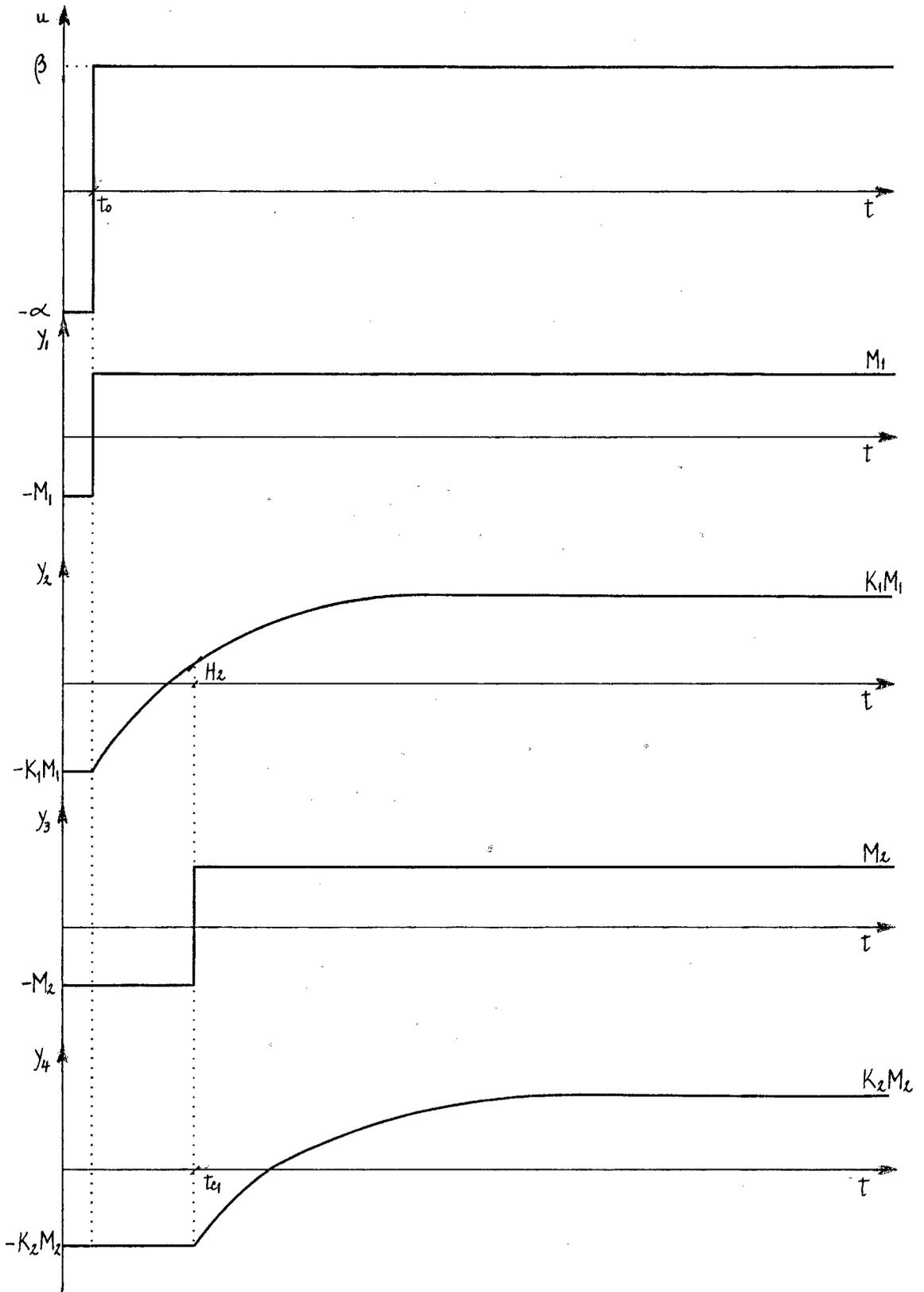
RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE E RELE IDEAL  
CADEIA A



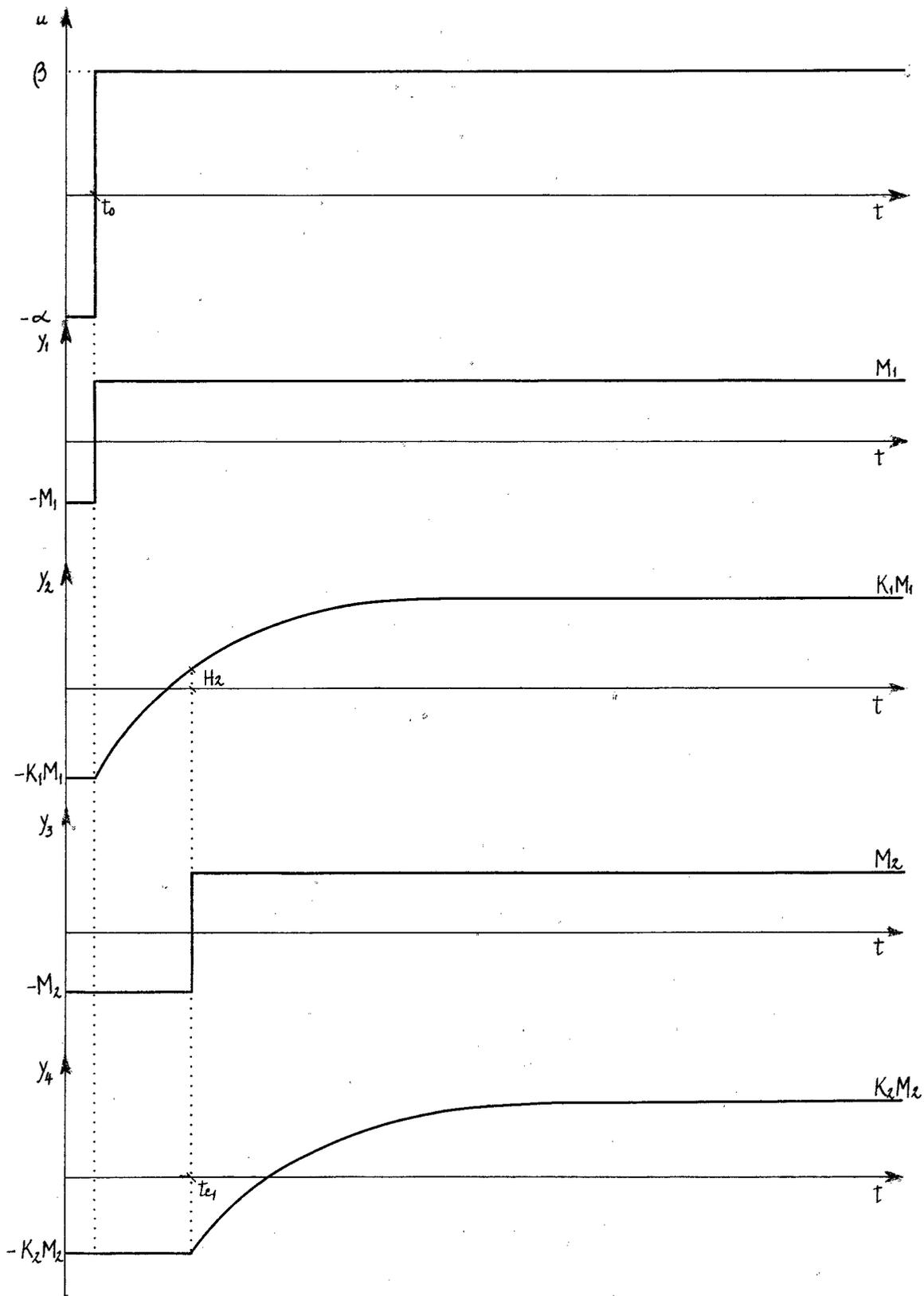
# RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE CADEIA A



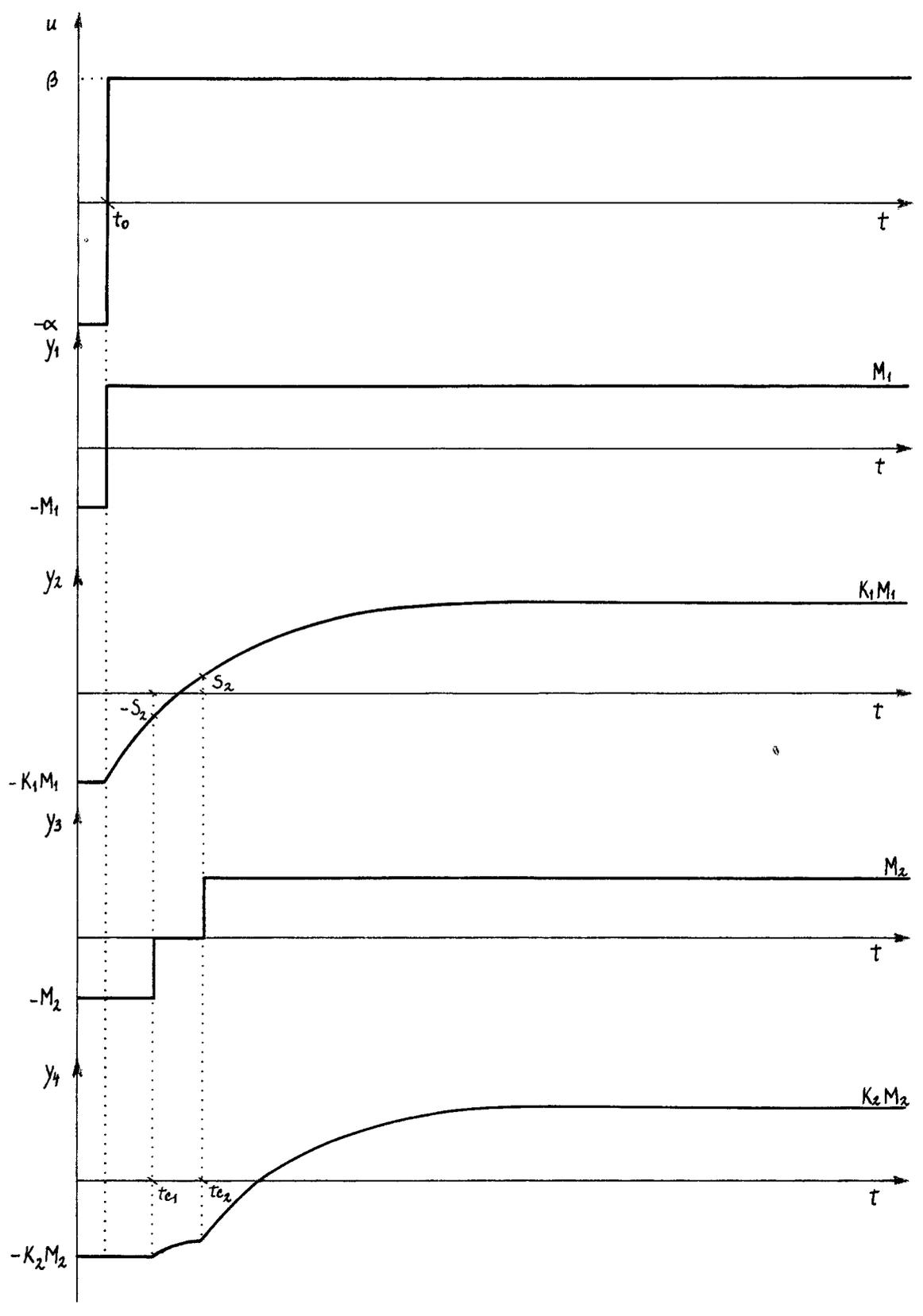
# RELE COM ZONA MORTA E RELE COM HISTERESE CADEIA A



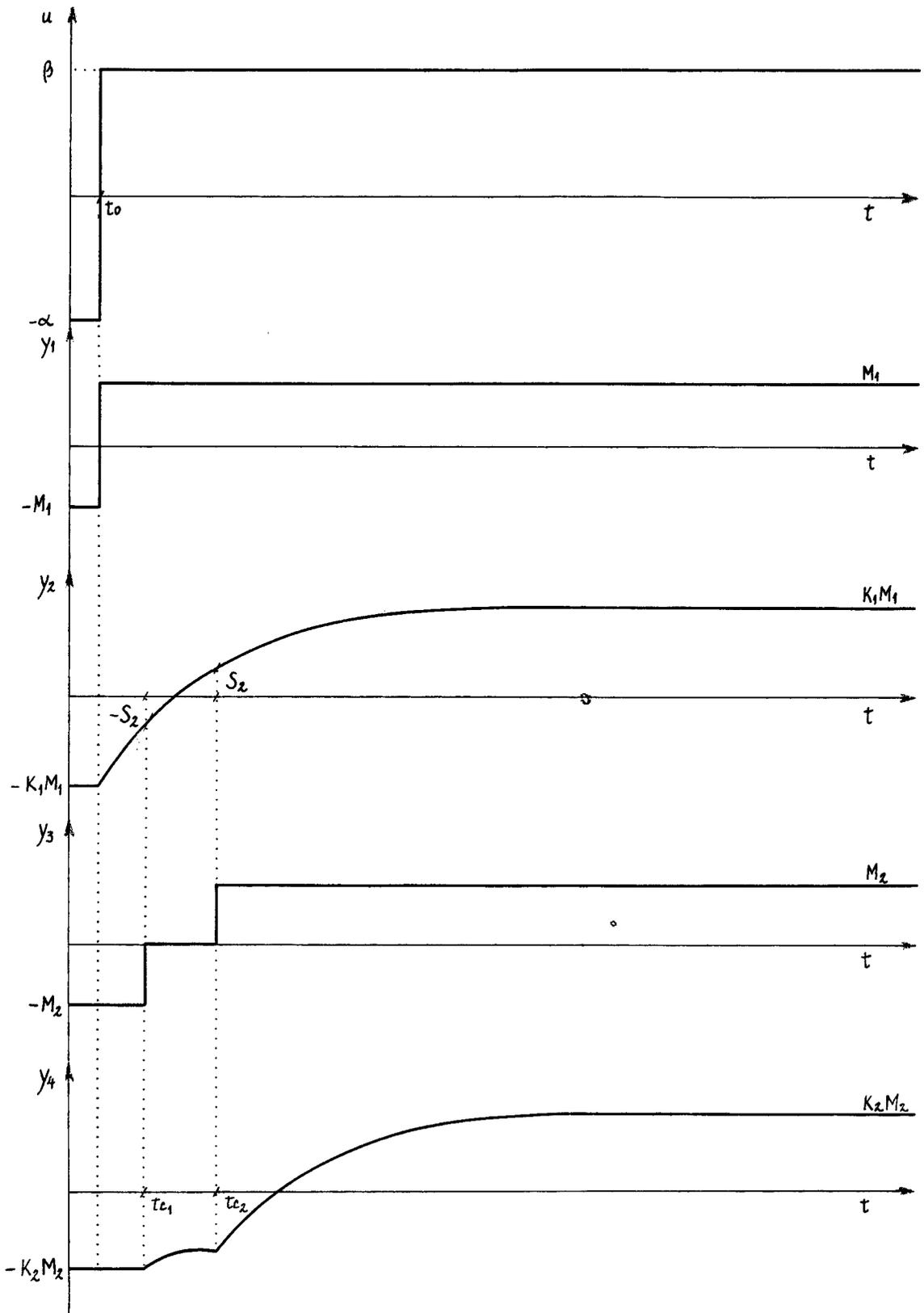
RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE E RELE COM HISTERESE CADEIA A



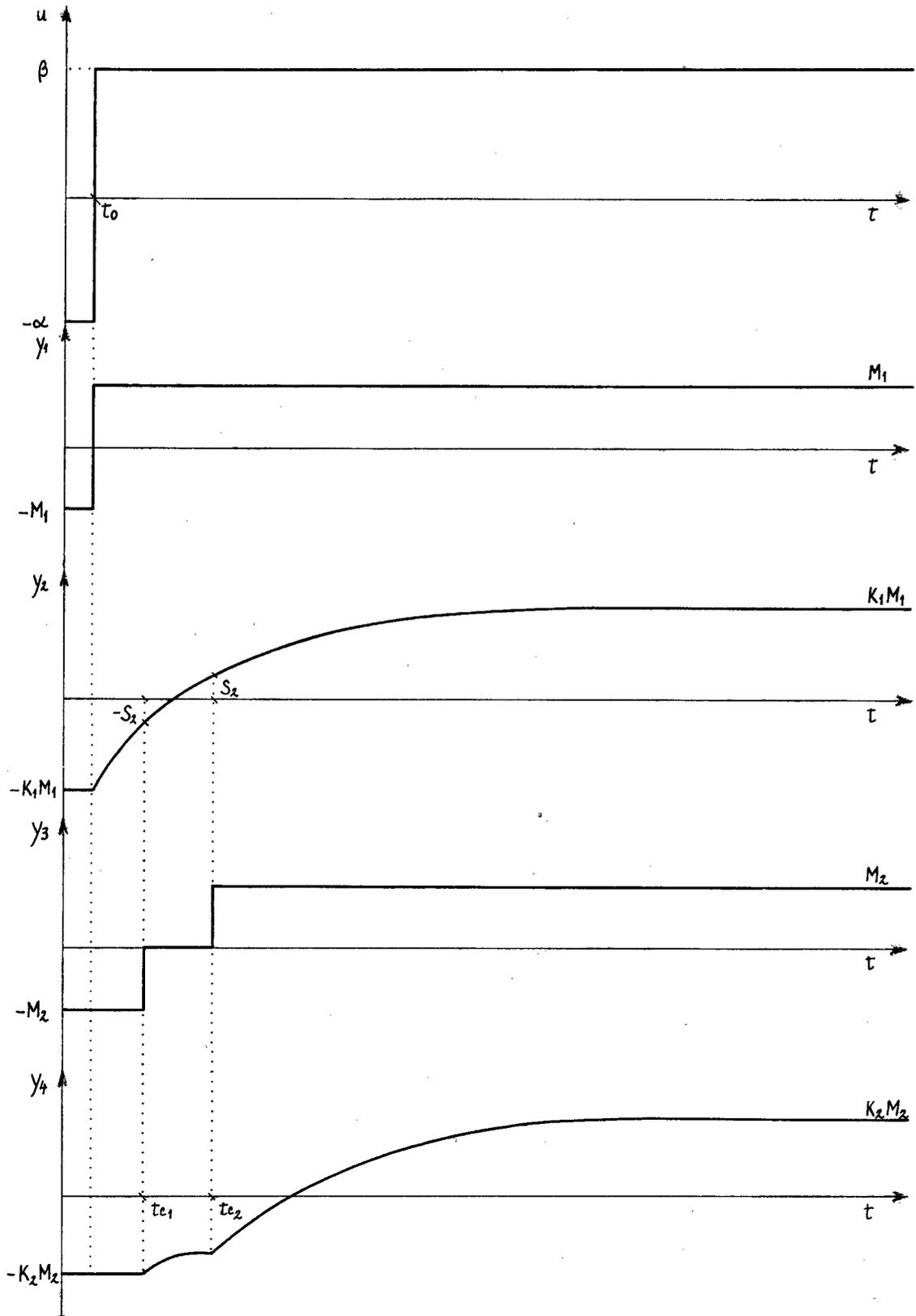
# RELE COM HISTERESE E RELE COM ZONA MORTA CADEIA A



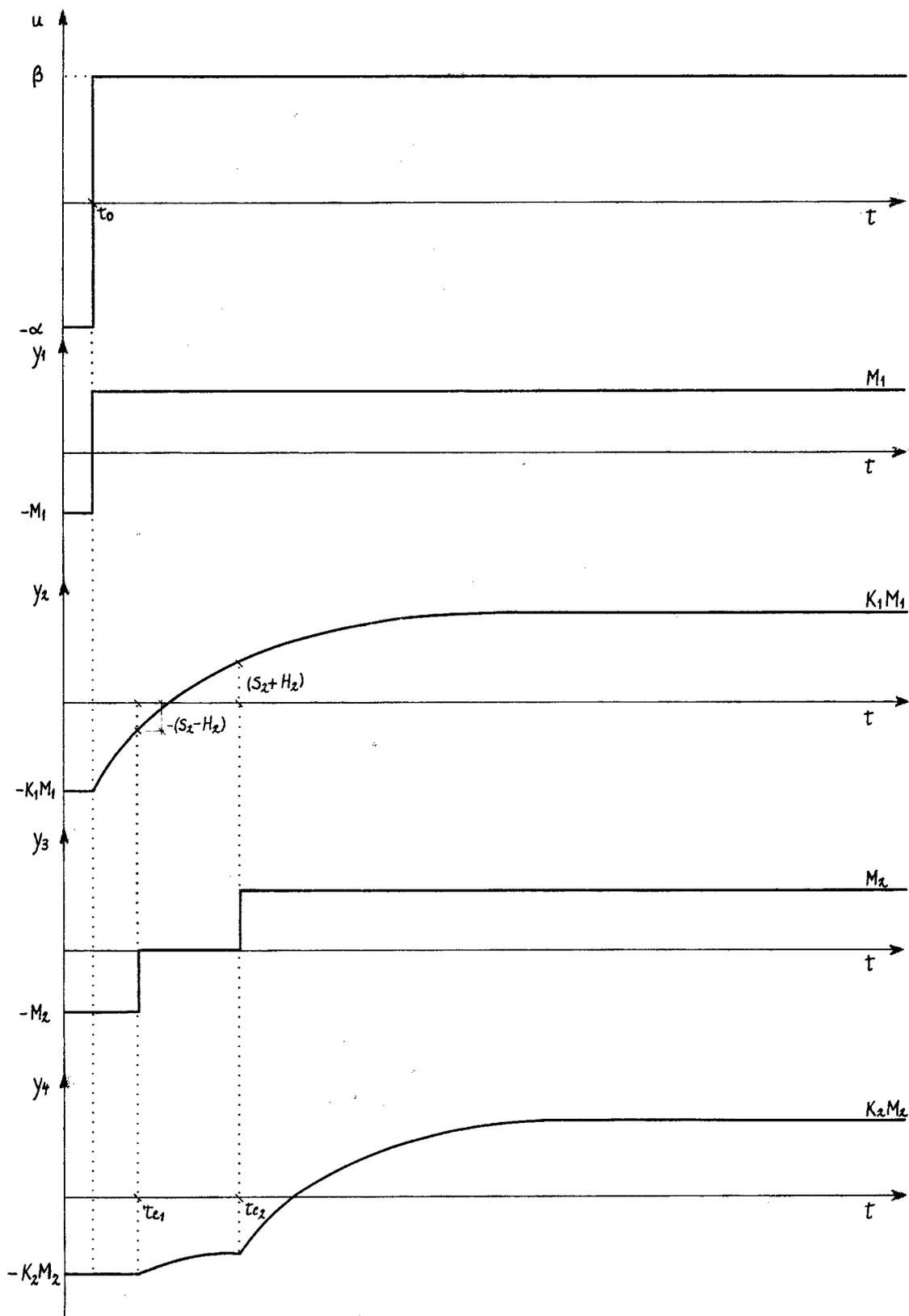
RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE E RELE COM ZONA MORTA CADEIA A



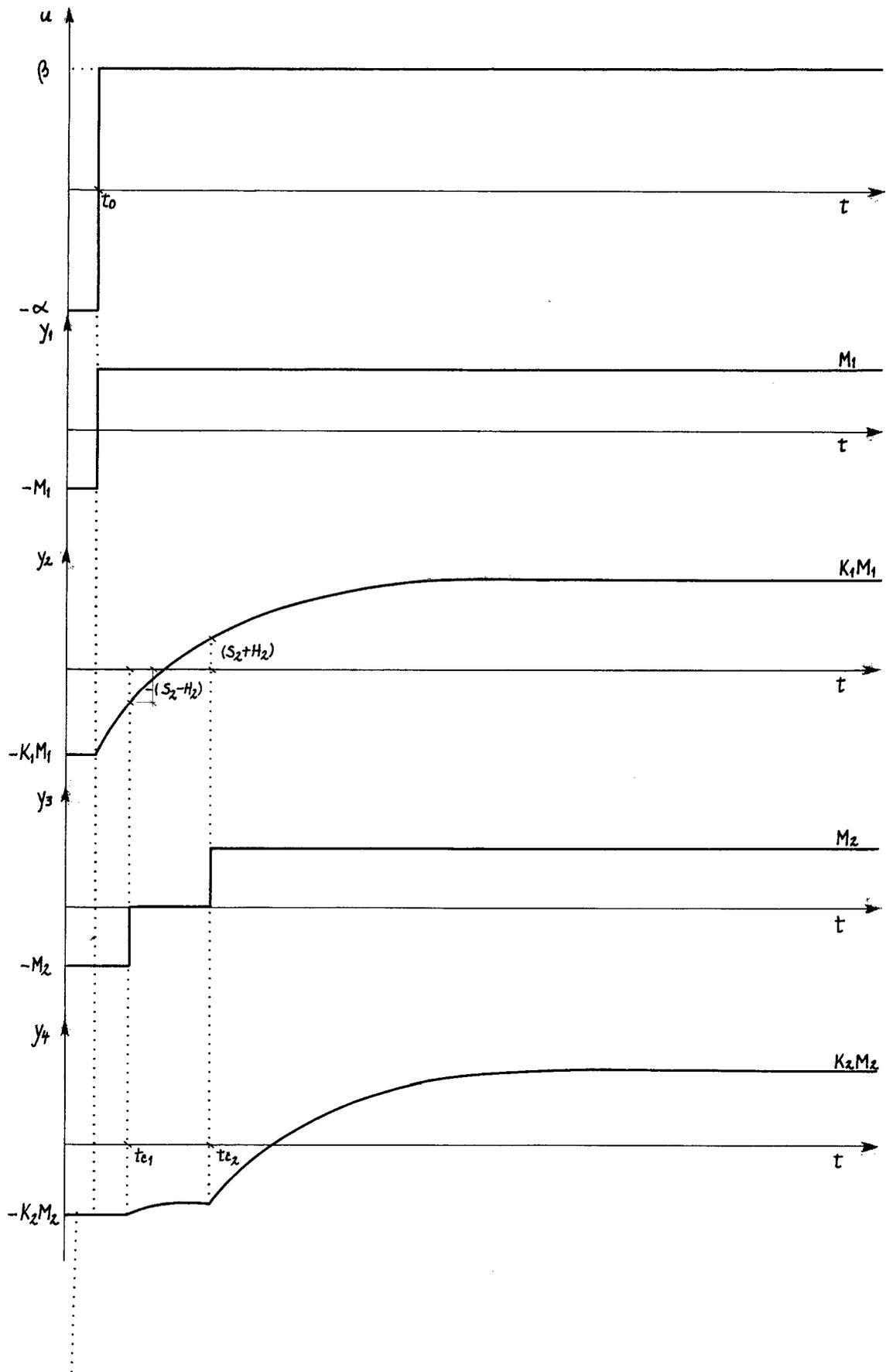
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA A



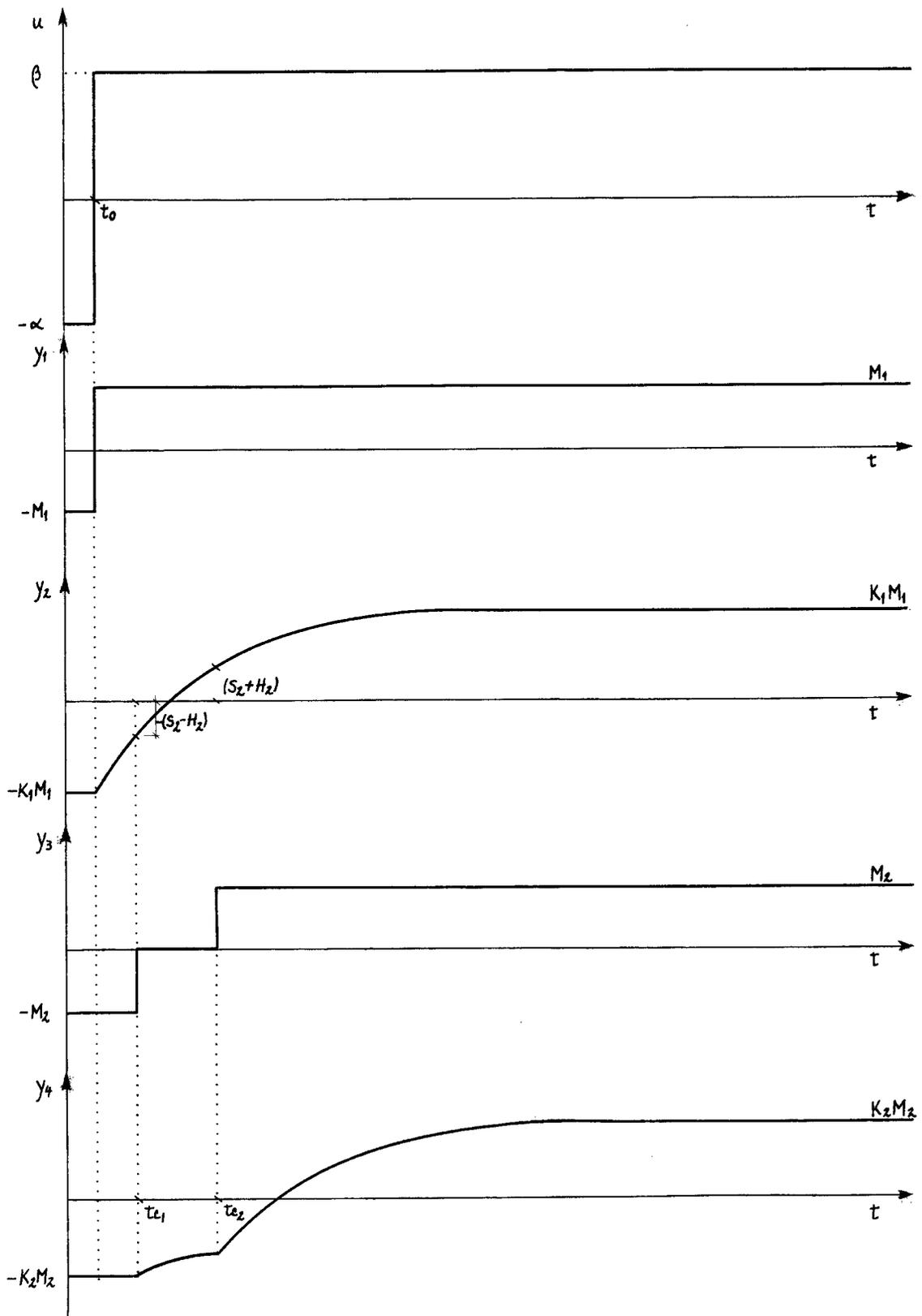
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA A



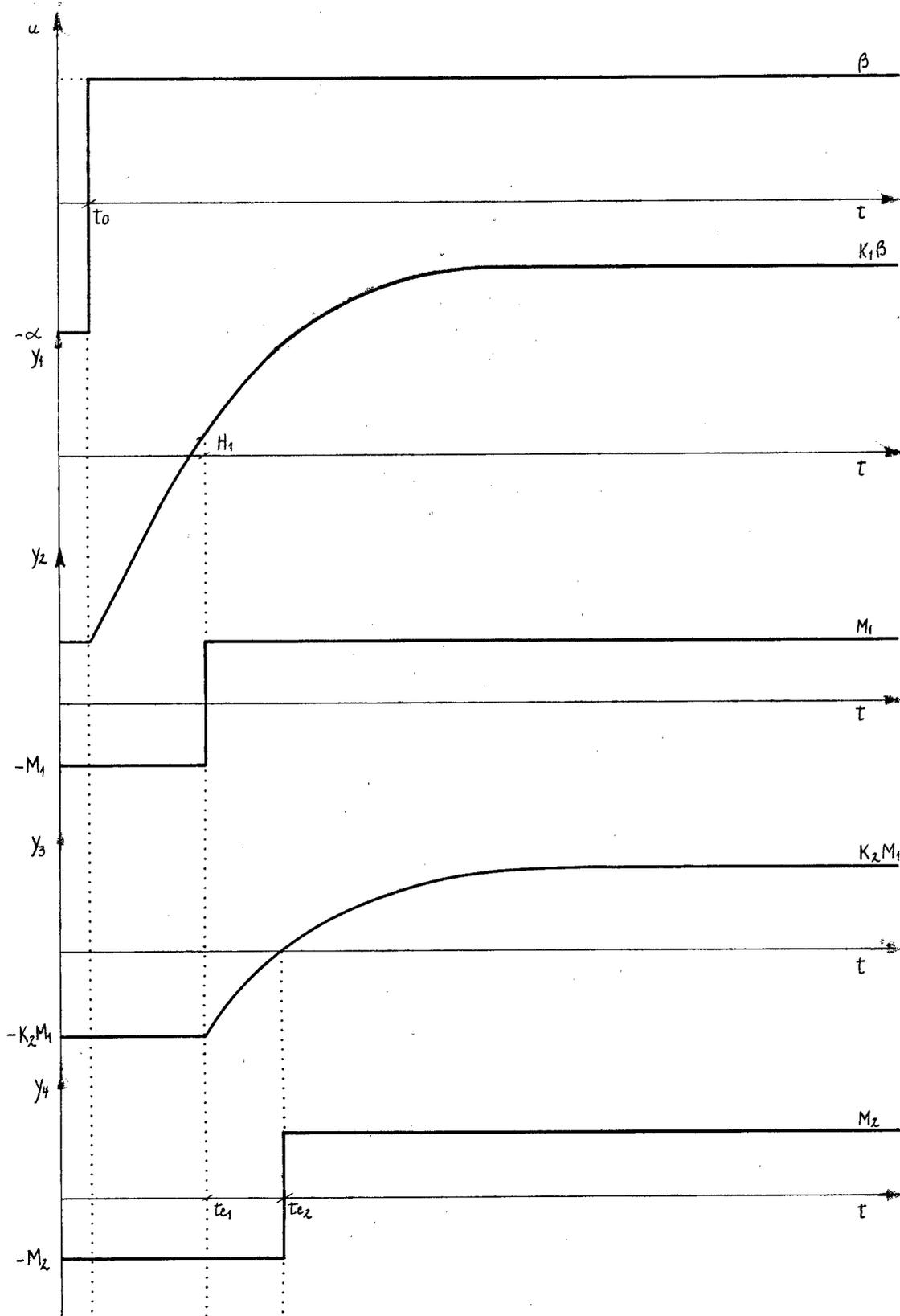
RELE COM HISTERESE E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA A



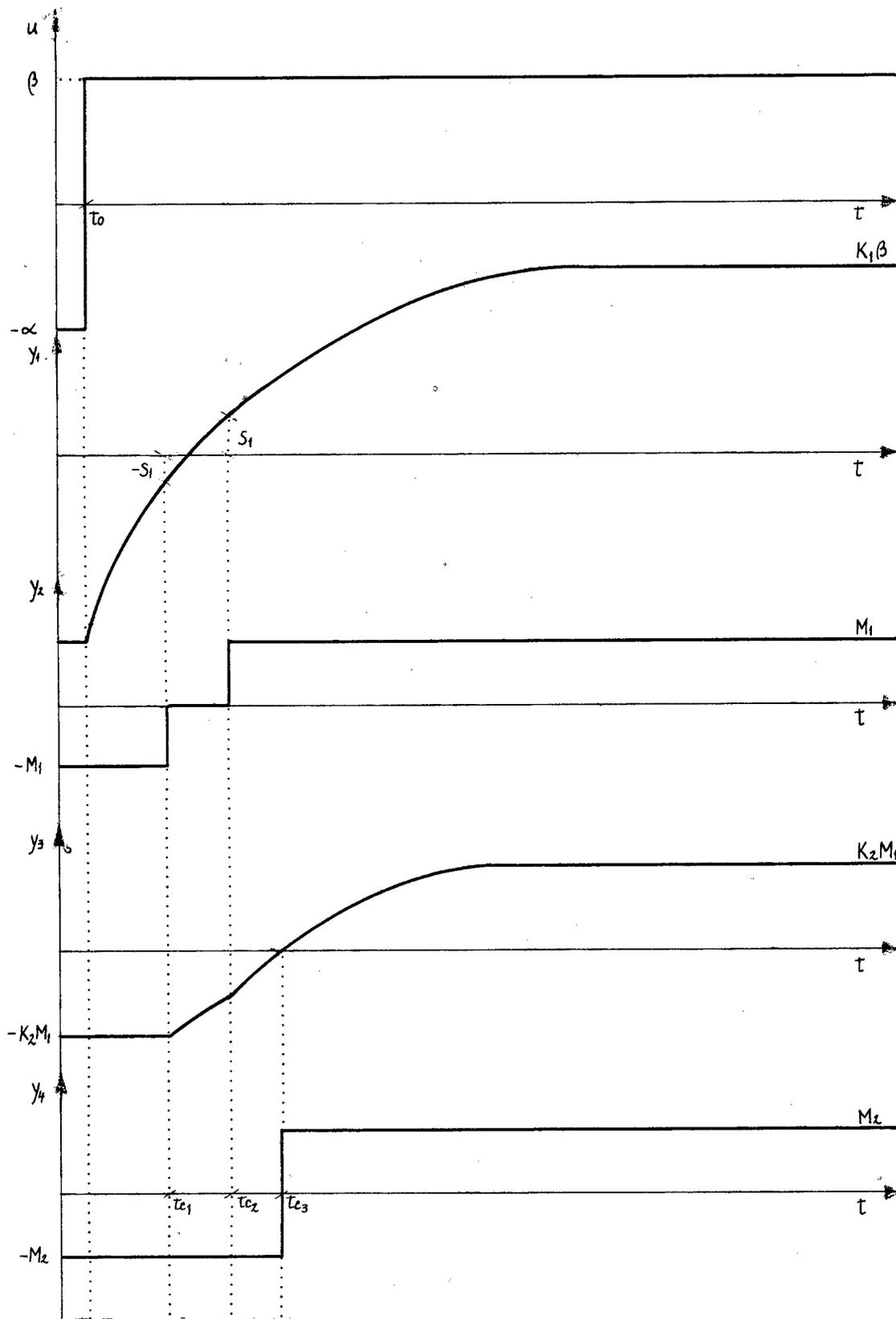
RELE COM ZONA MORTA E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA A



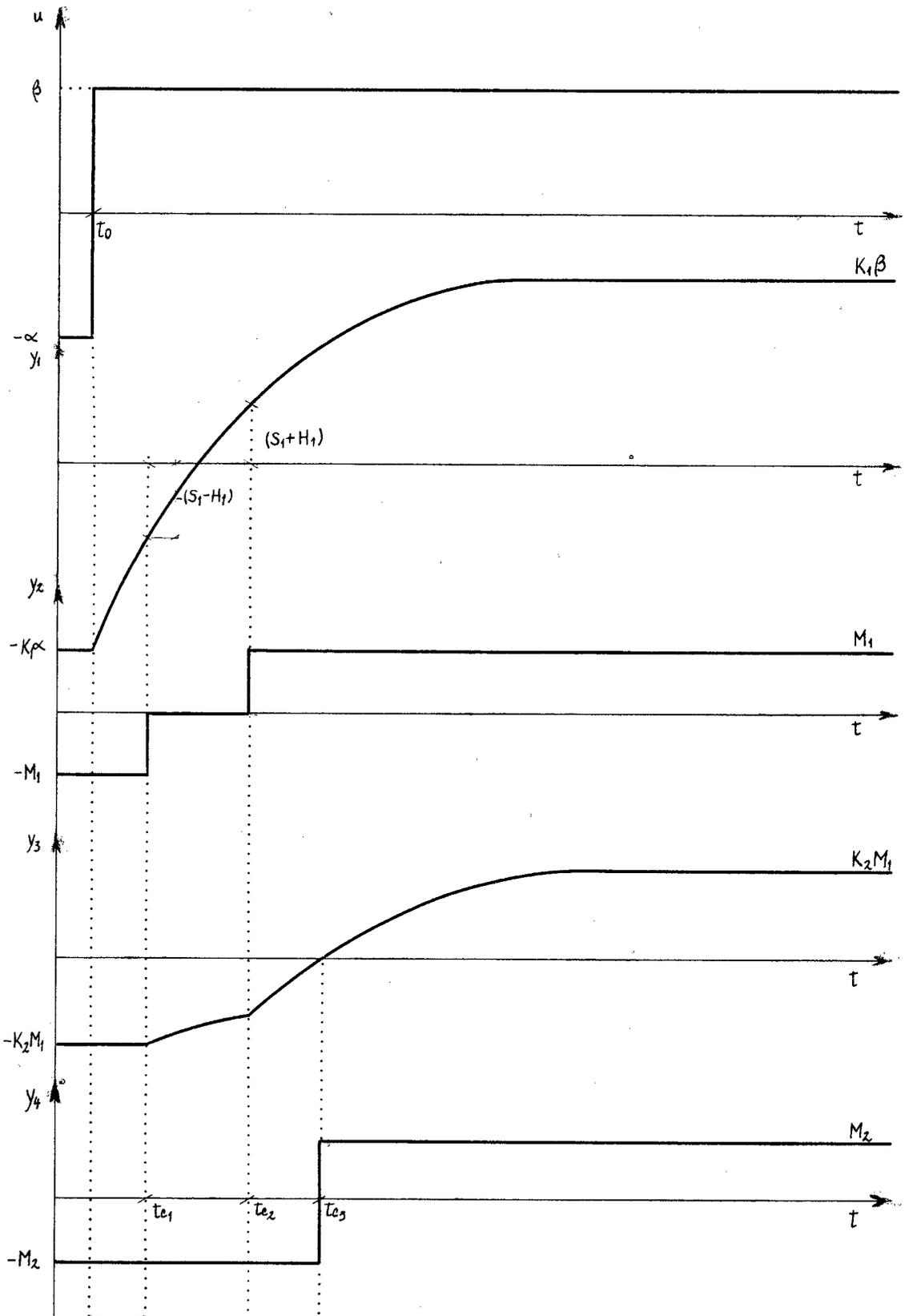
RELE COM HISTERESE E RELE IDEAL  
CADEIA B



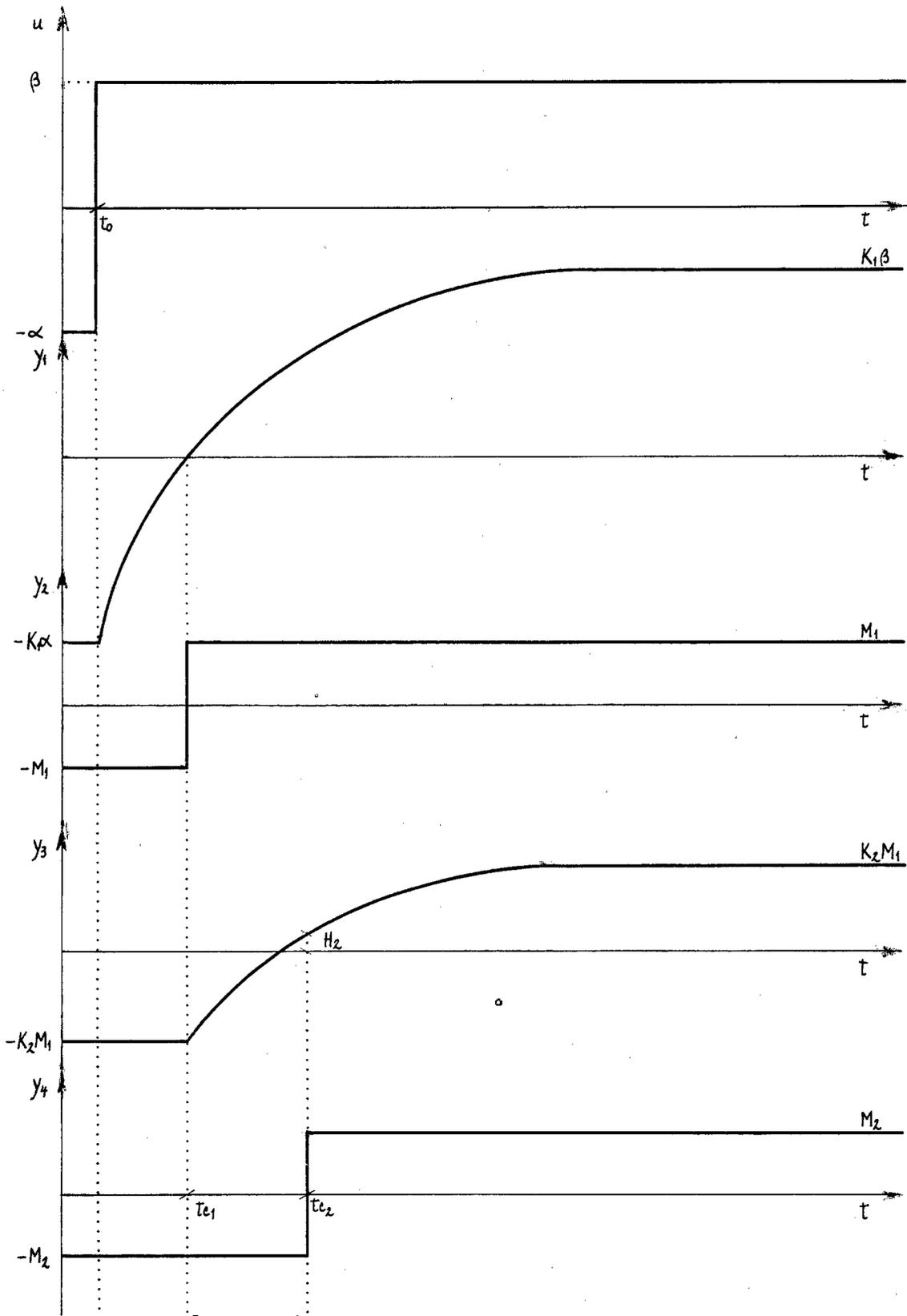
### RELE COM ZONA MORTA E RELE IDEAL CADEIA B



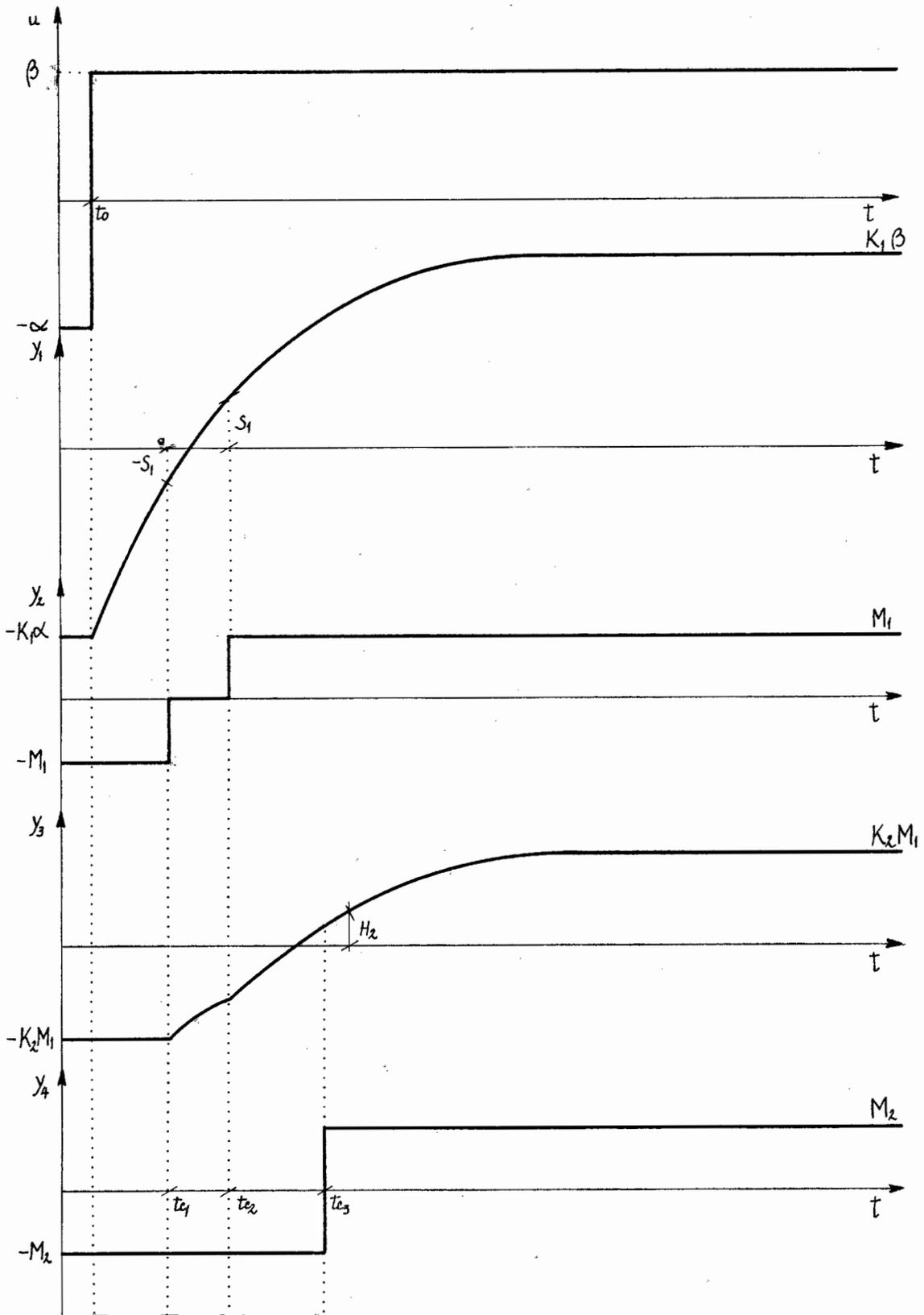
RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE E RELE IDEAL CADEIA B



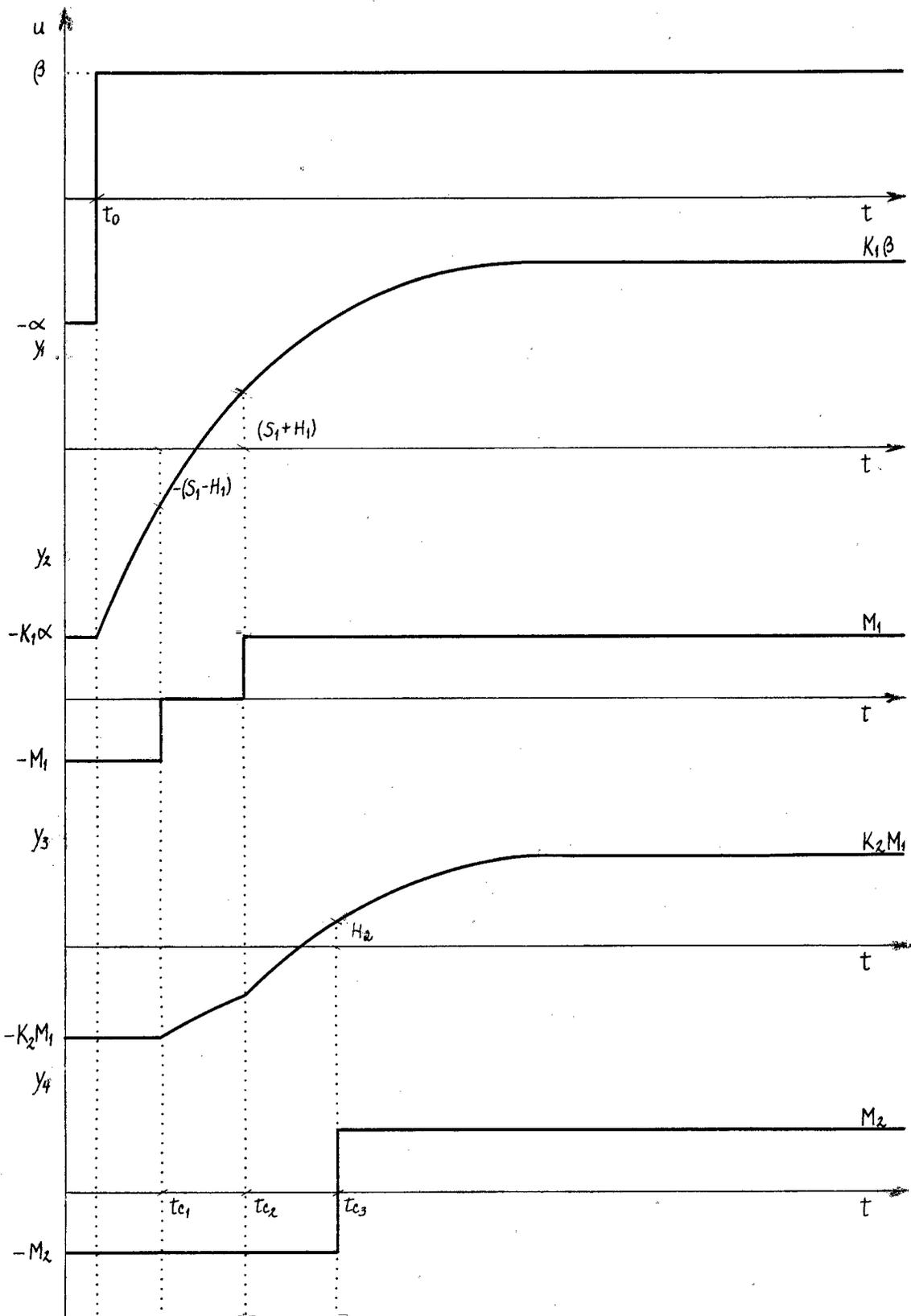
RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE  
CADEIA B



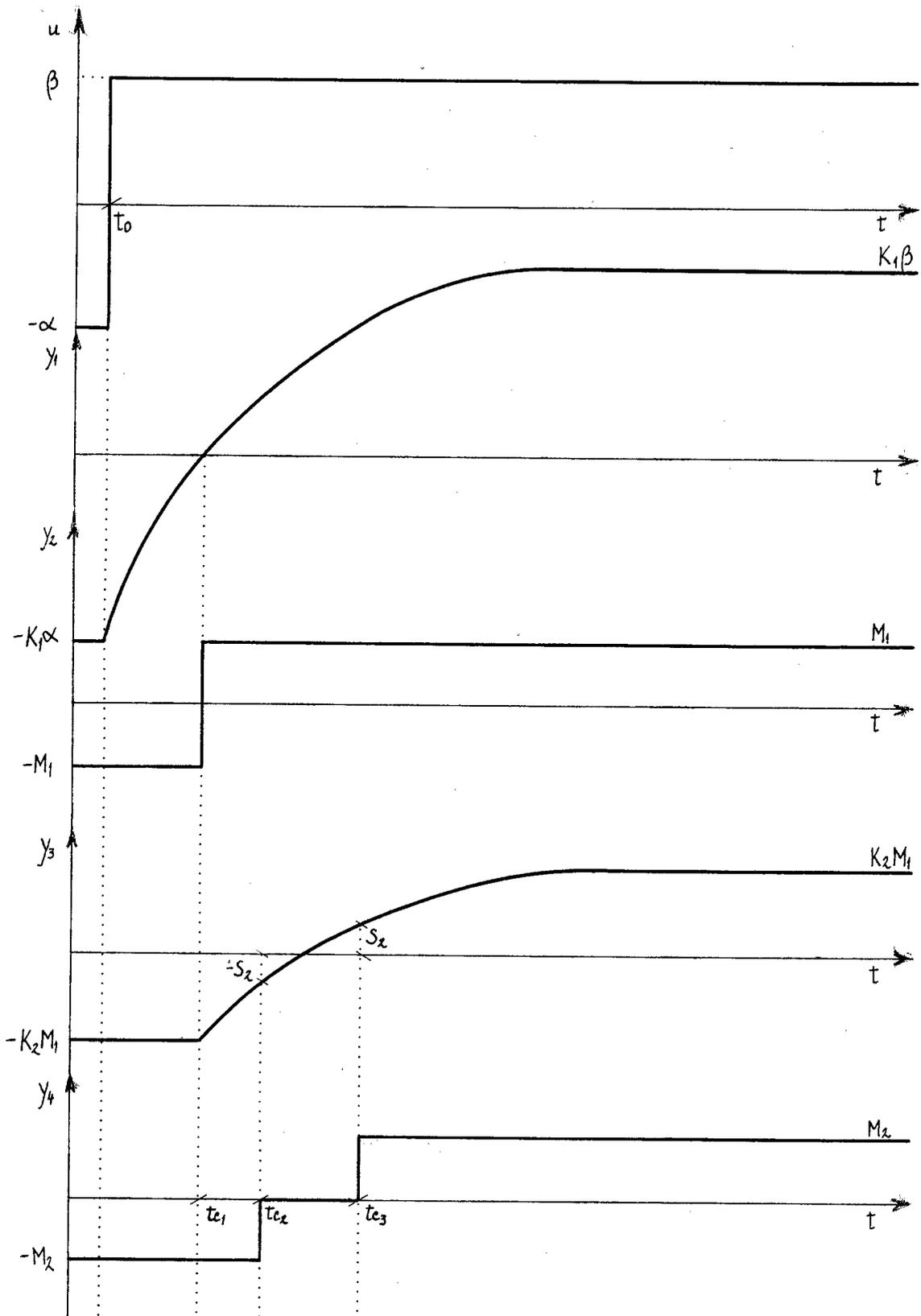
RELE COM ZONA MORTA E RELE COM HISTERESE  
CADEIA B



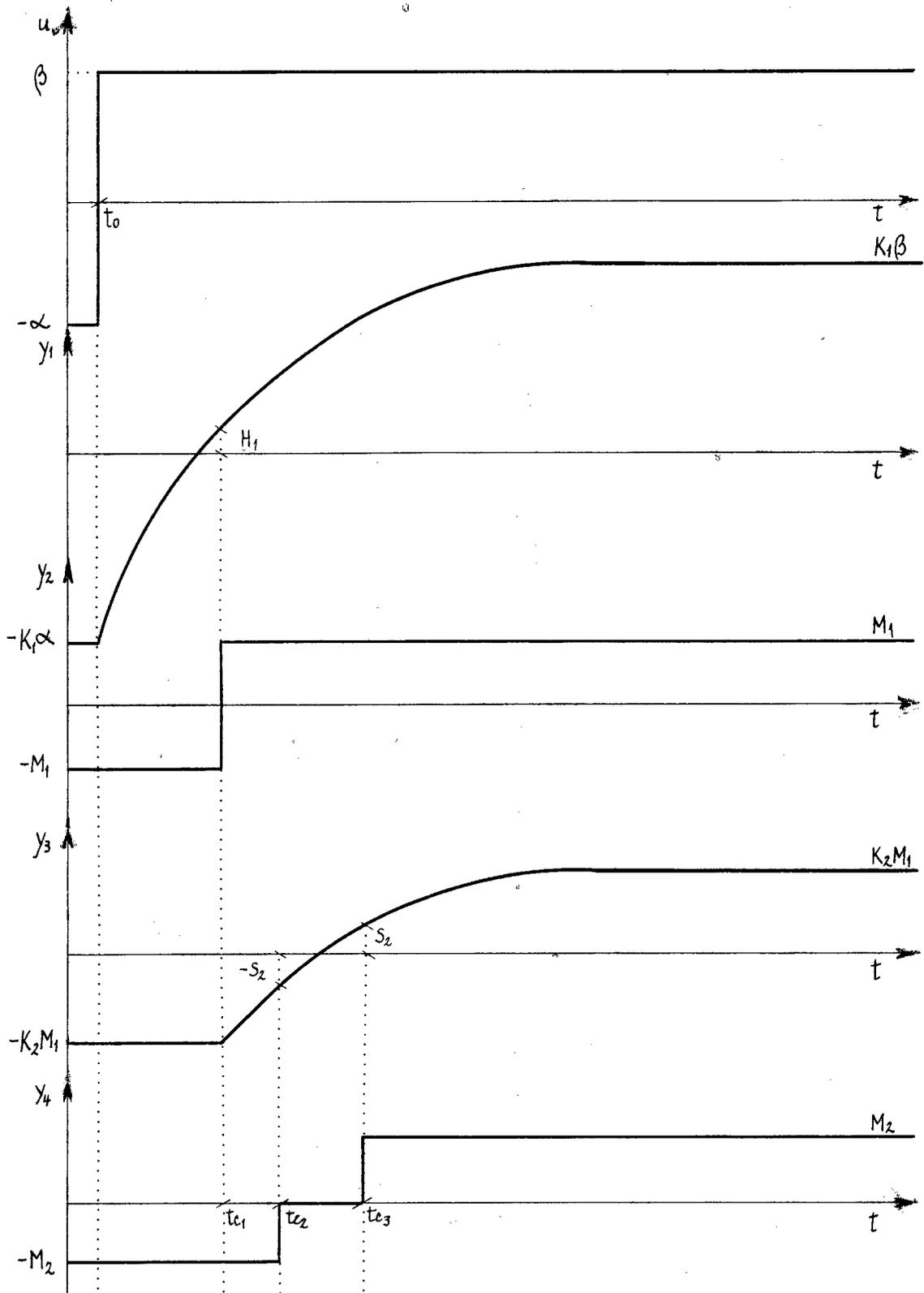
RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE E RELE COM HISTERESE  
CADEIA B



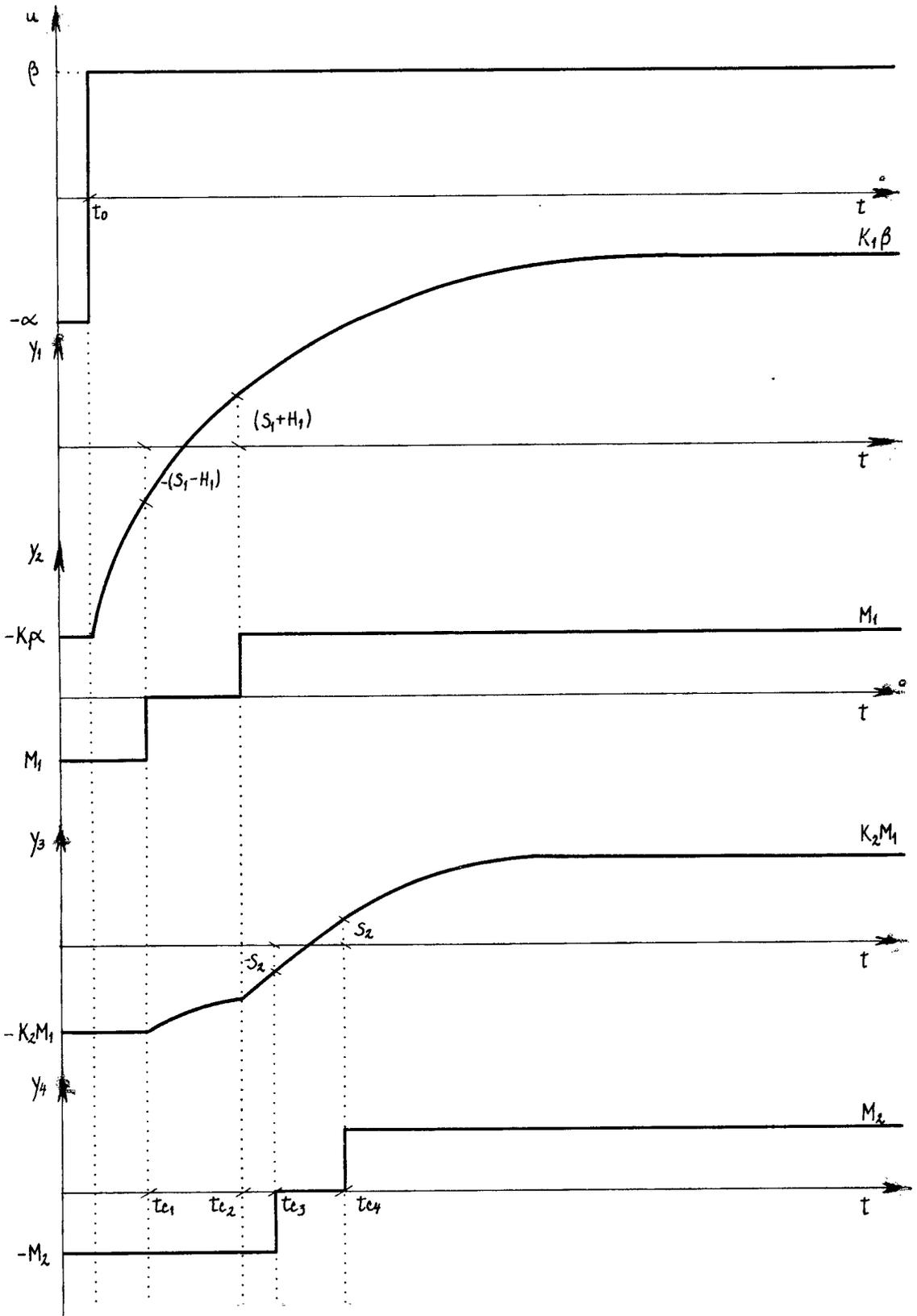
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA B



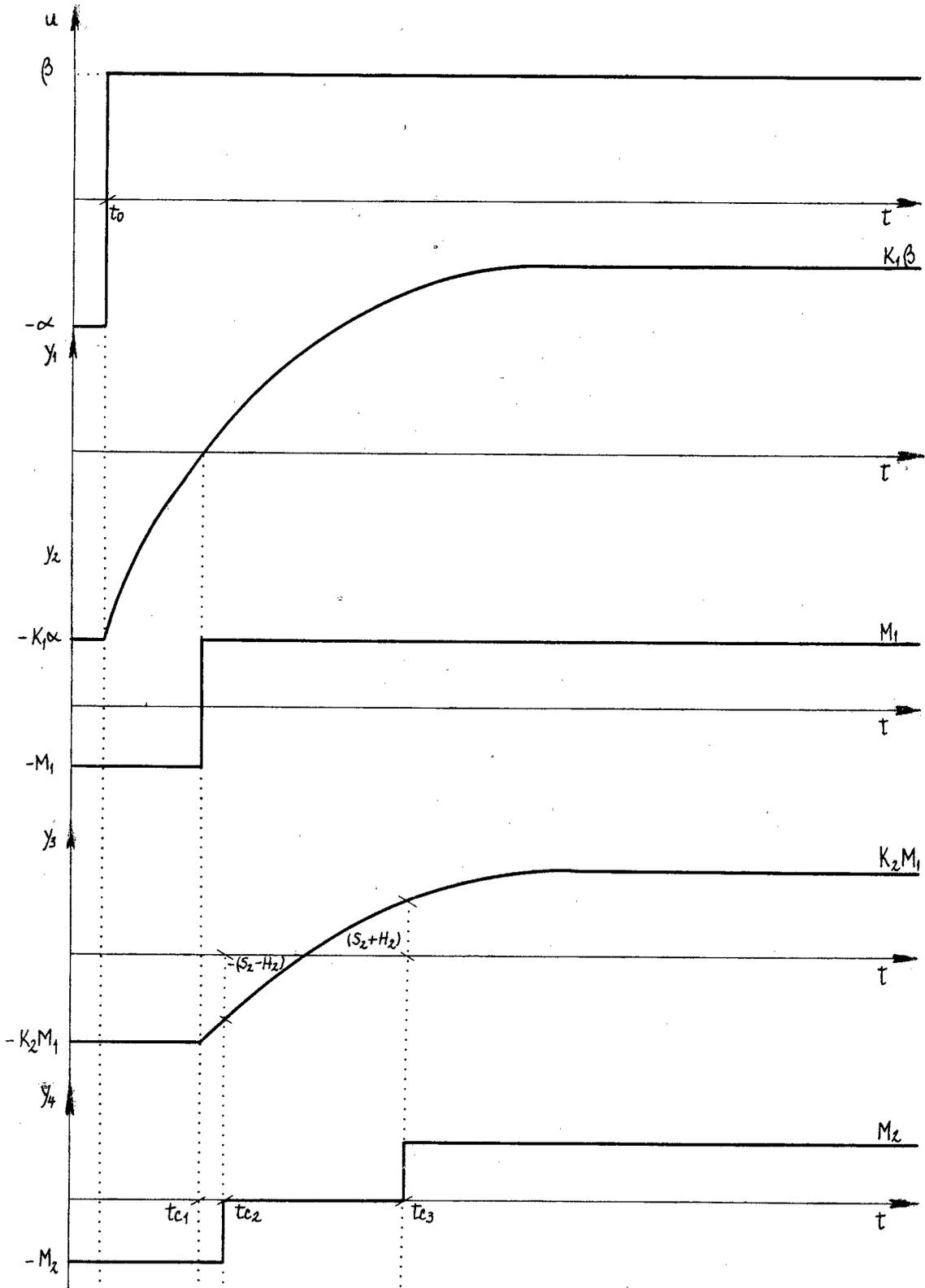
RELE COM HISTERESE E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA B



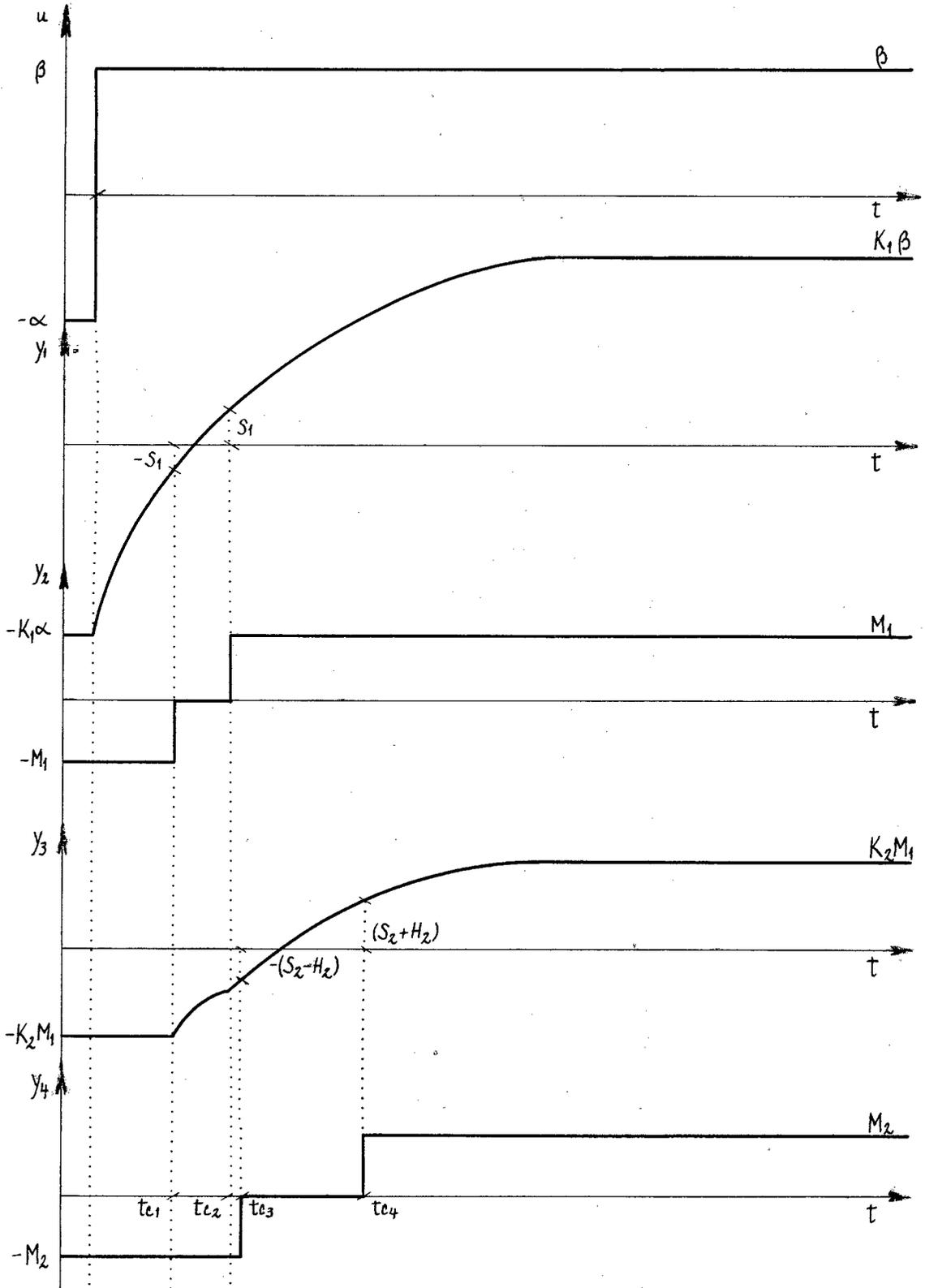
RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE E RELE COM ZONA MORTA CADEIA B



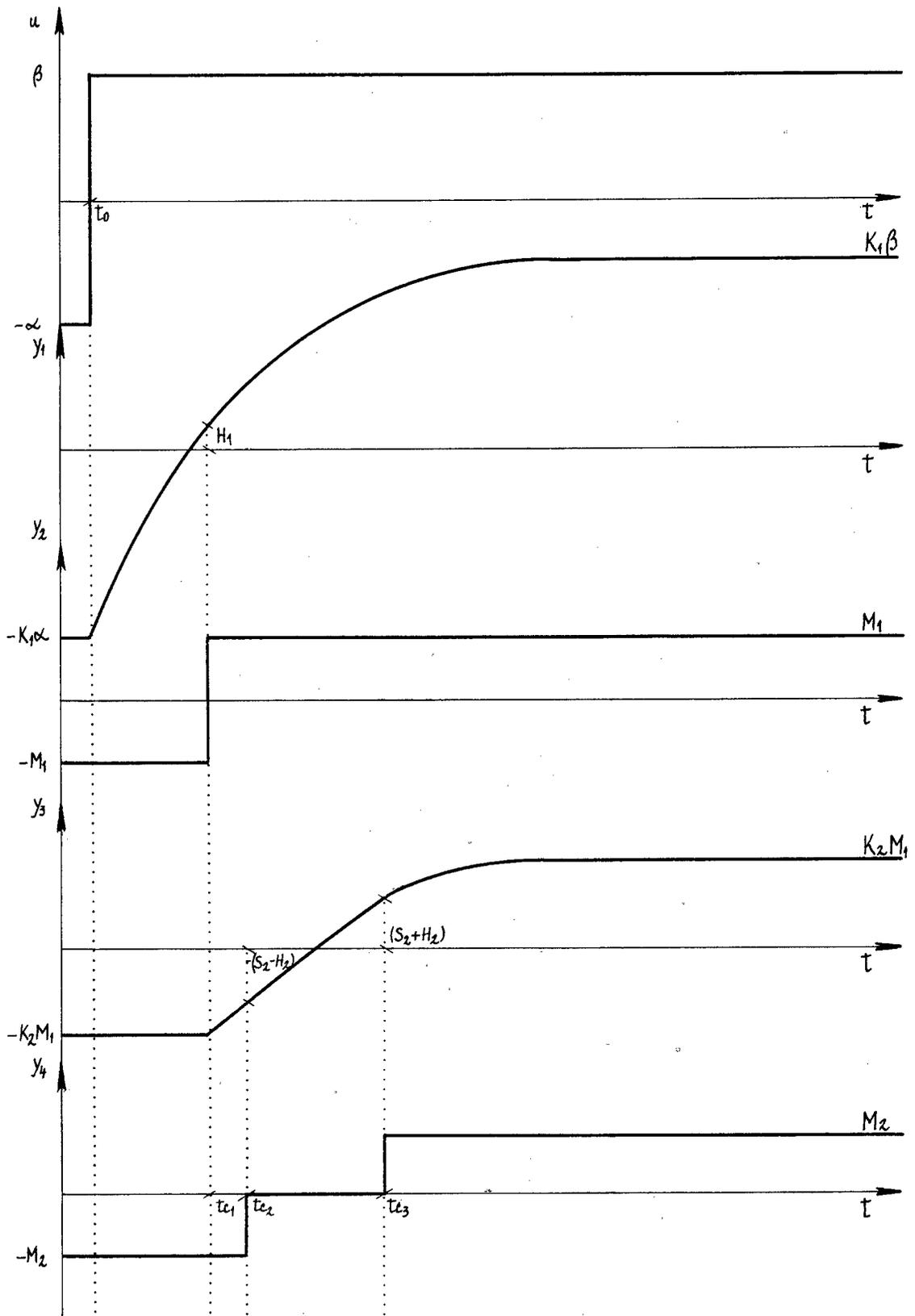
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA B



RELE COM ZONA MORTA E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA B



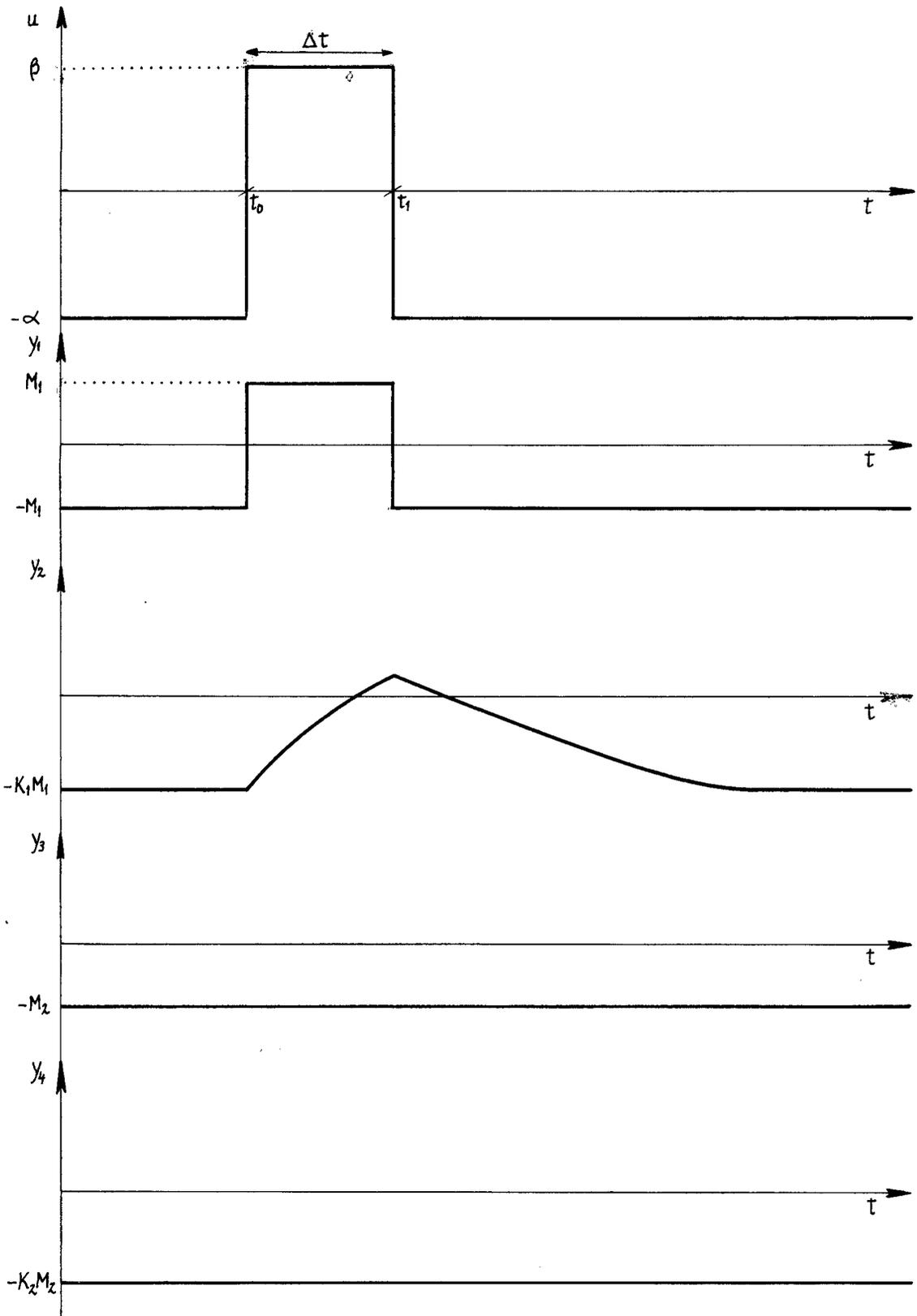
RELE COM HISTERESE E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA B



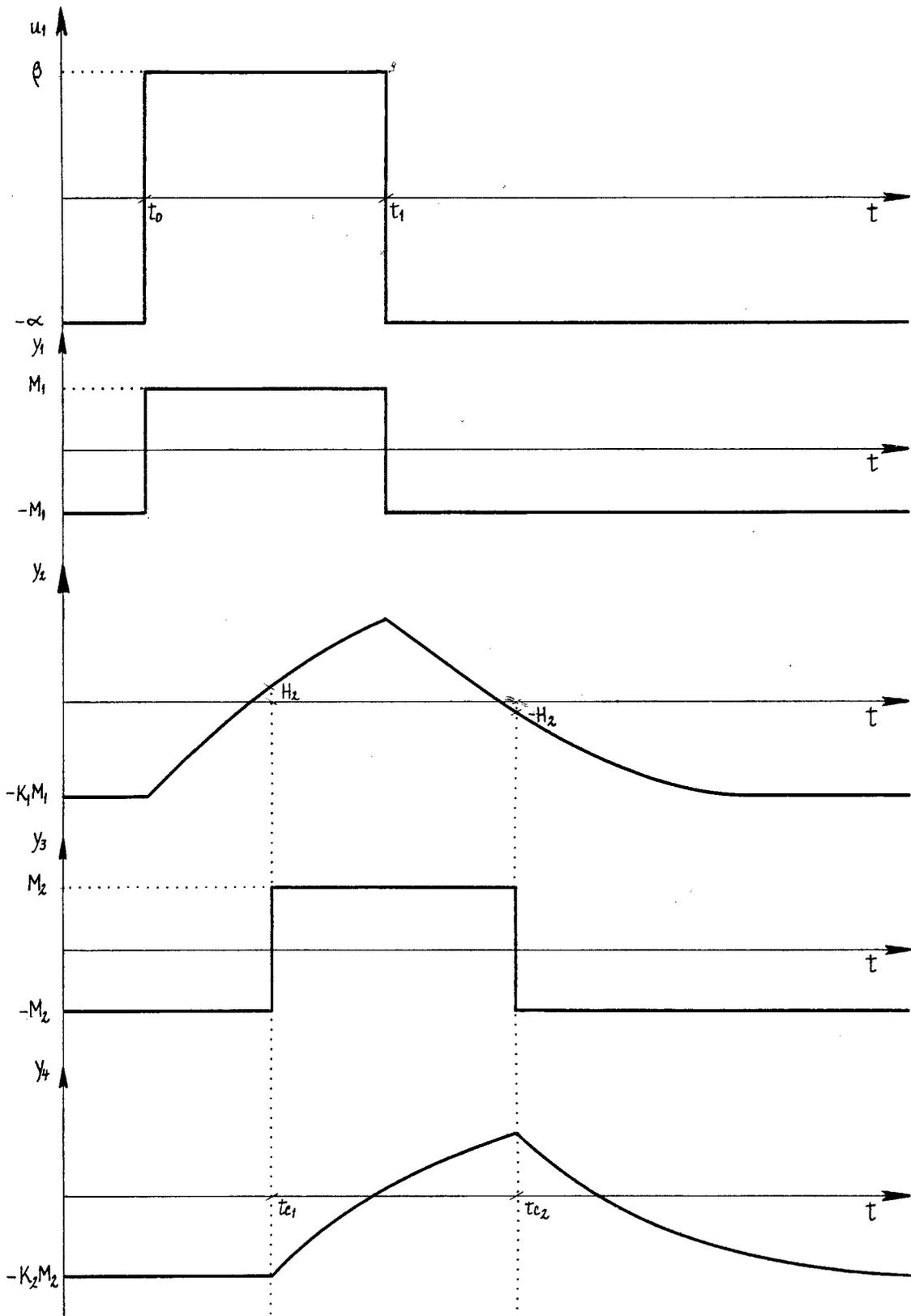
### III.3 - TESTE Nº 2

Neste ítem são apresentados os gráficos de saída de cada bloco em função do tempo, para as estruturas estudadas em cadeias dos tipos A e B.

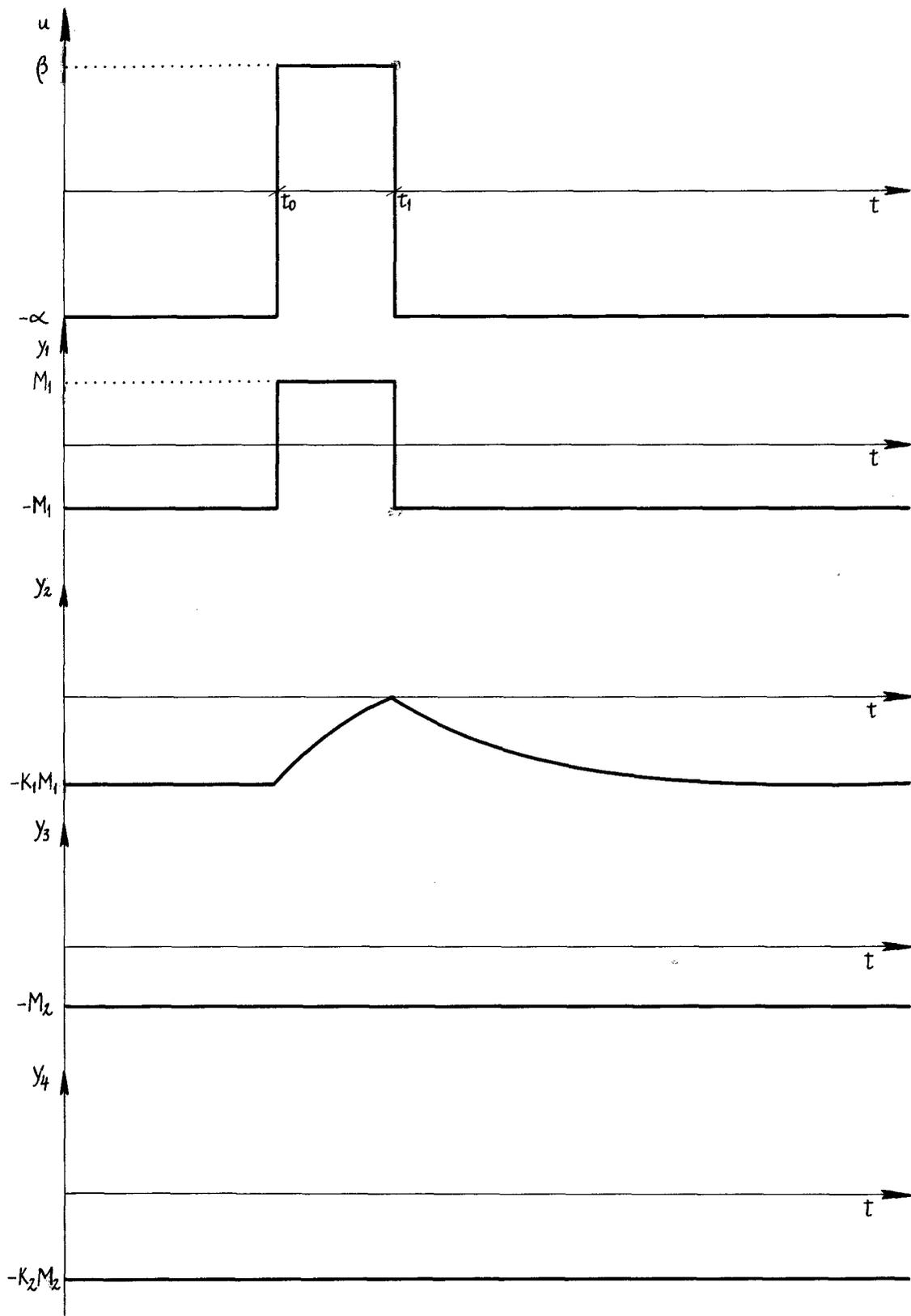
### RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE CADEIA A



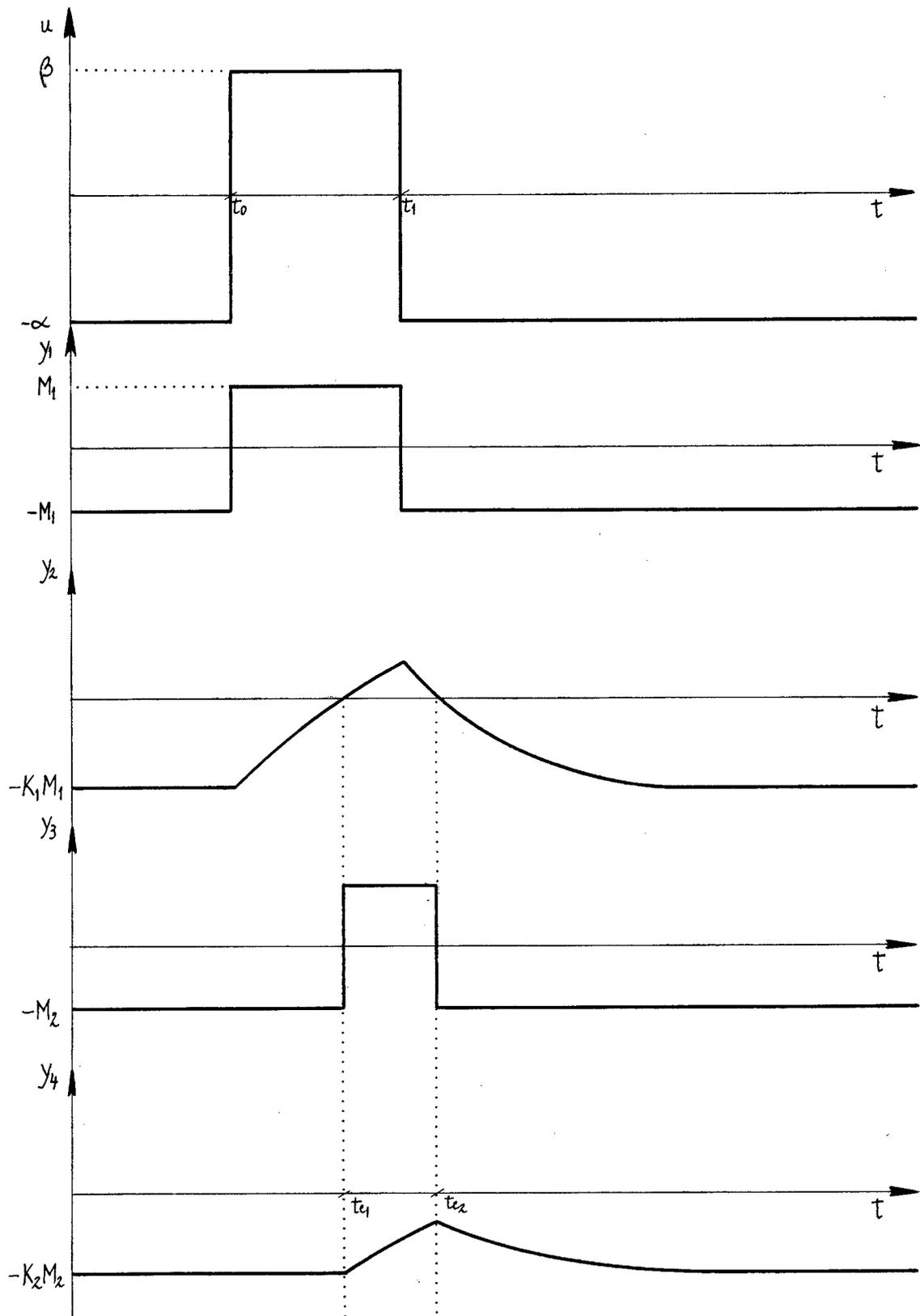
RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE  
CADEIA A



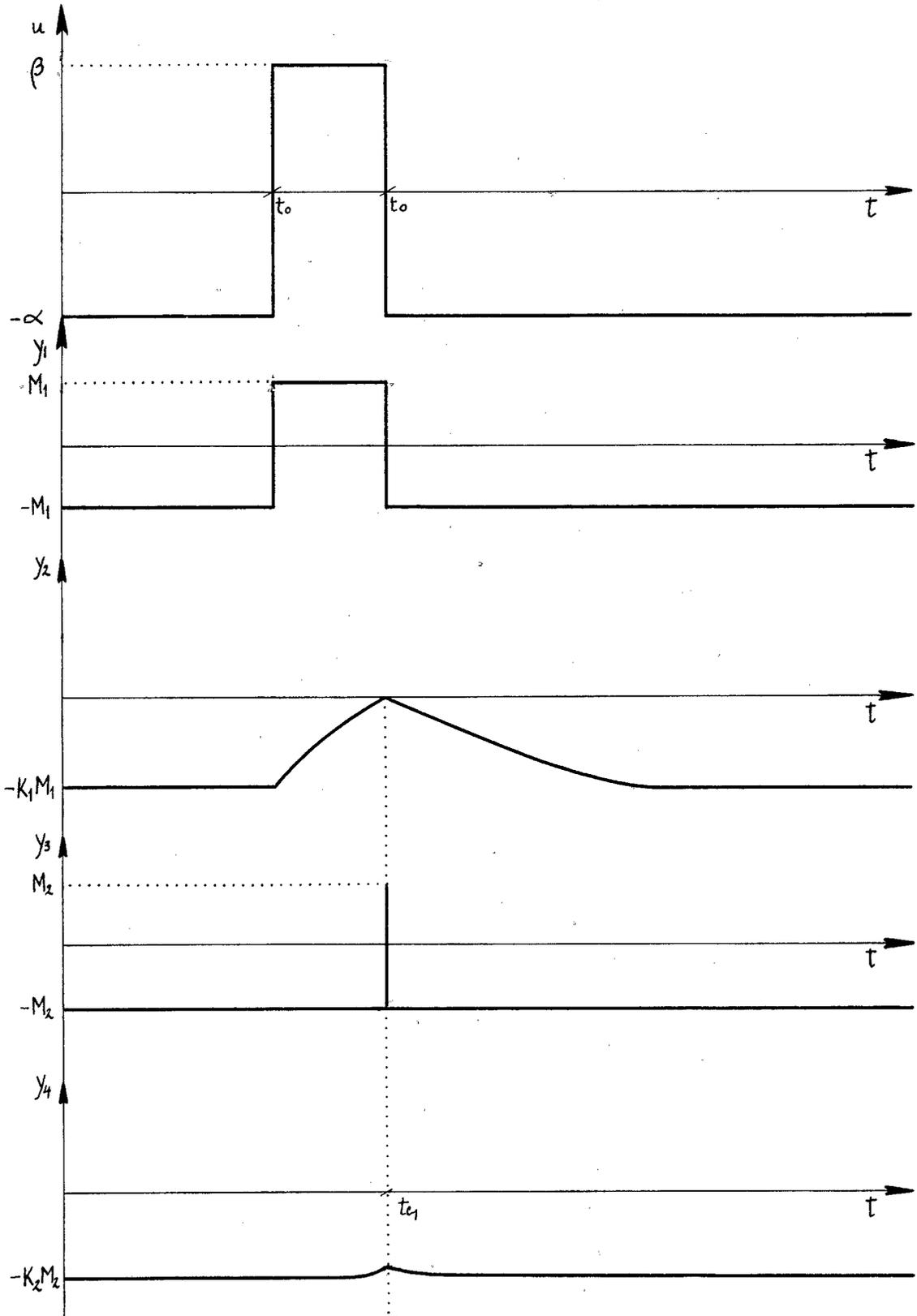
RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE  
CADEIA A



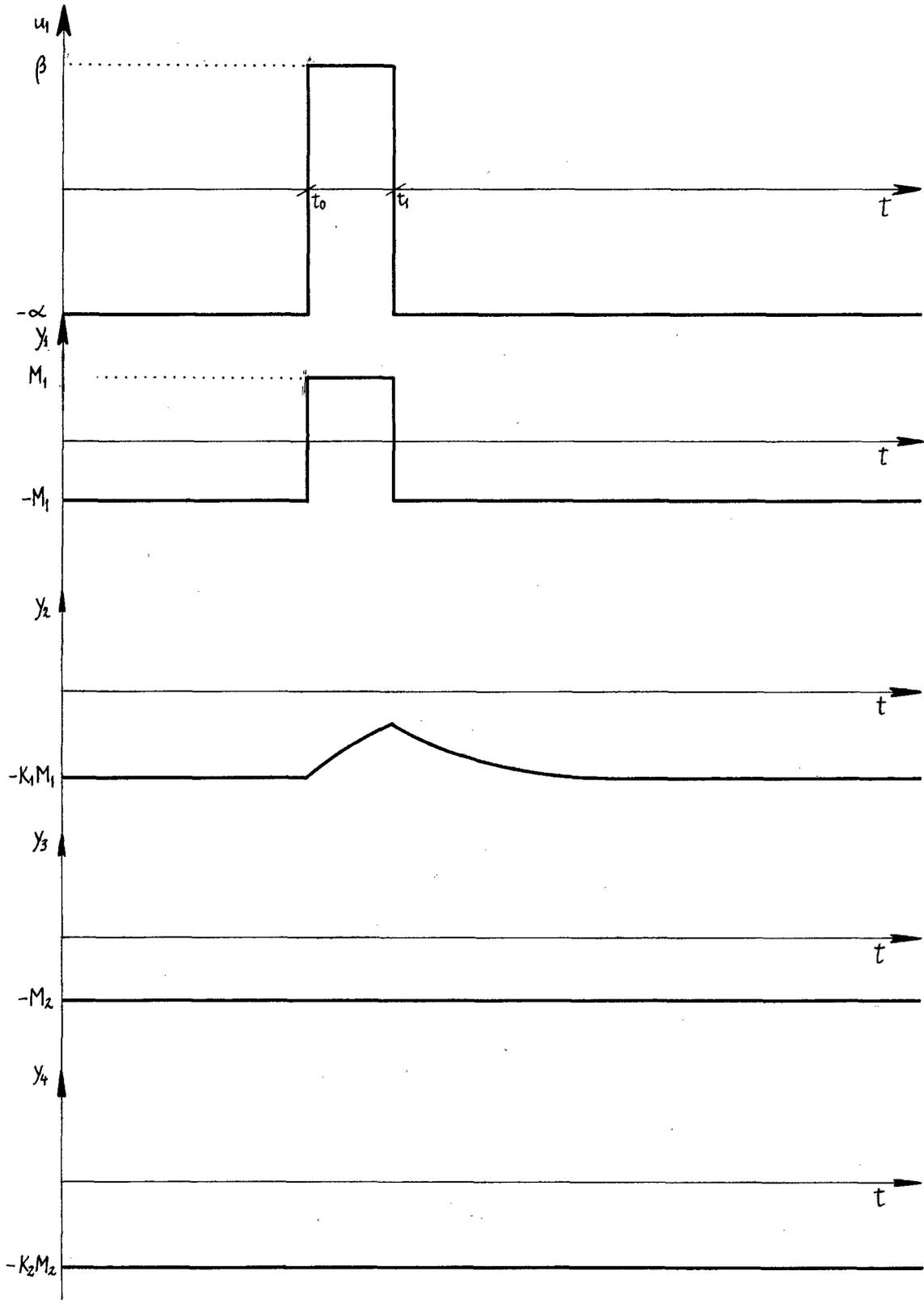
RELE COM ZONA MORTA E RELE IDEAL  
CADEIA A



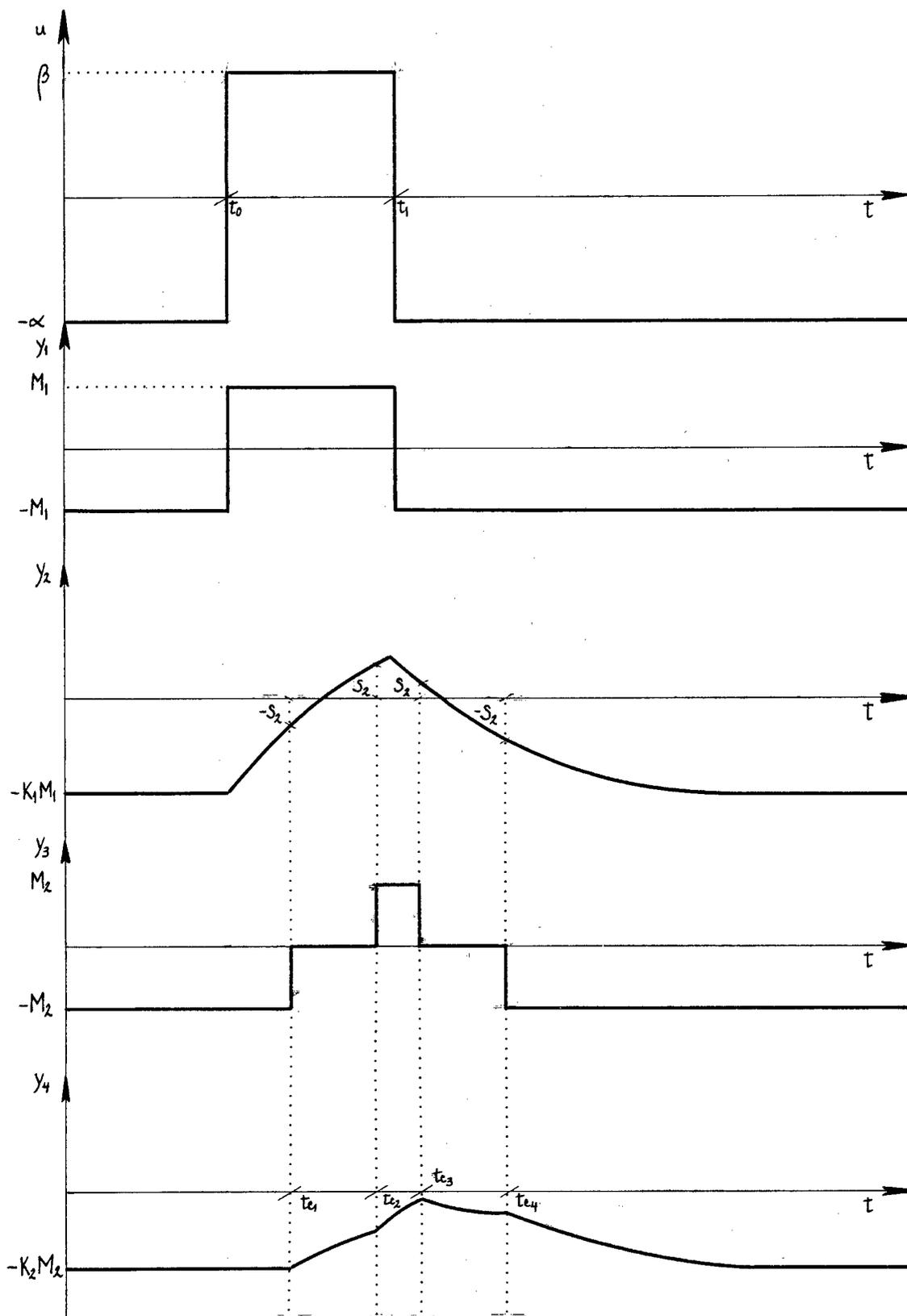
RELE COM ZONA MORTA E RELE IDEAL  
CADEIA A



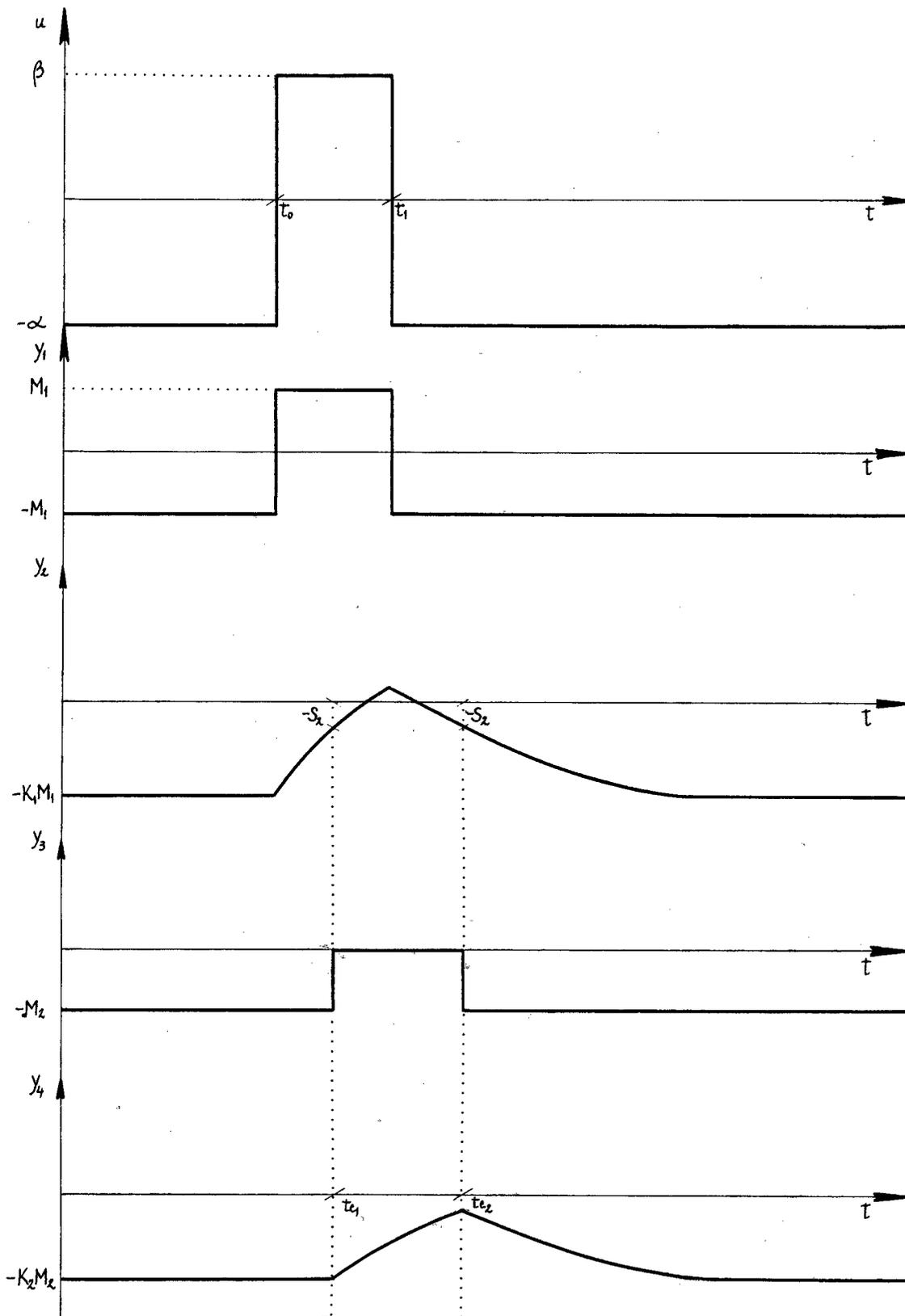
## RELE COM ZONA MORTA E RELE IDEAL



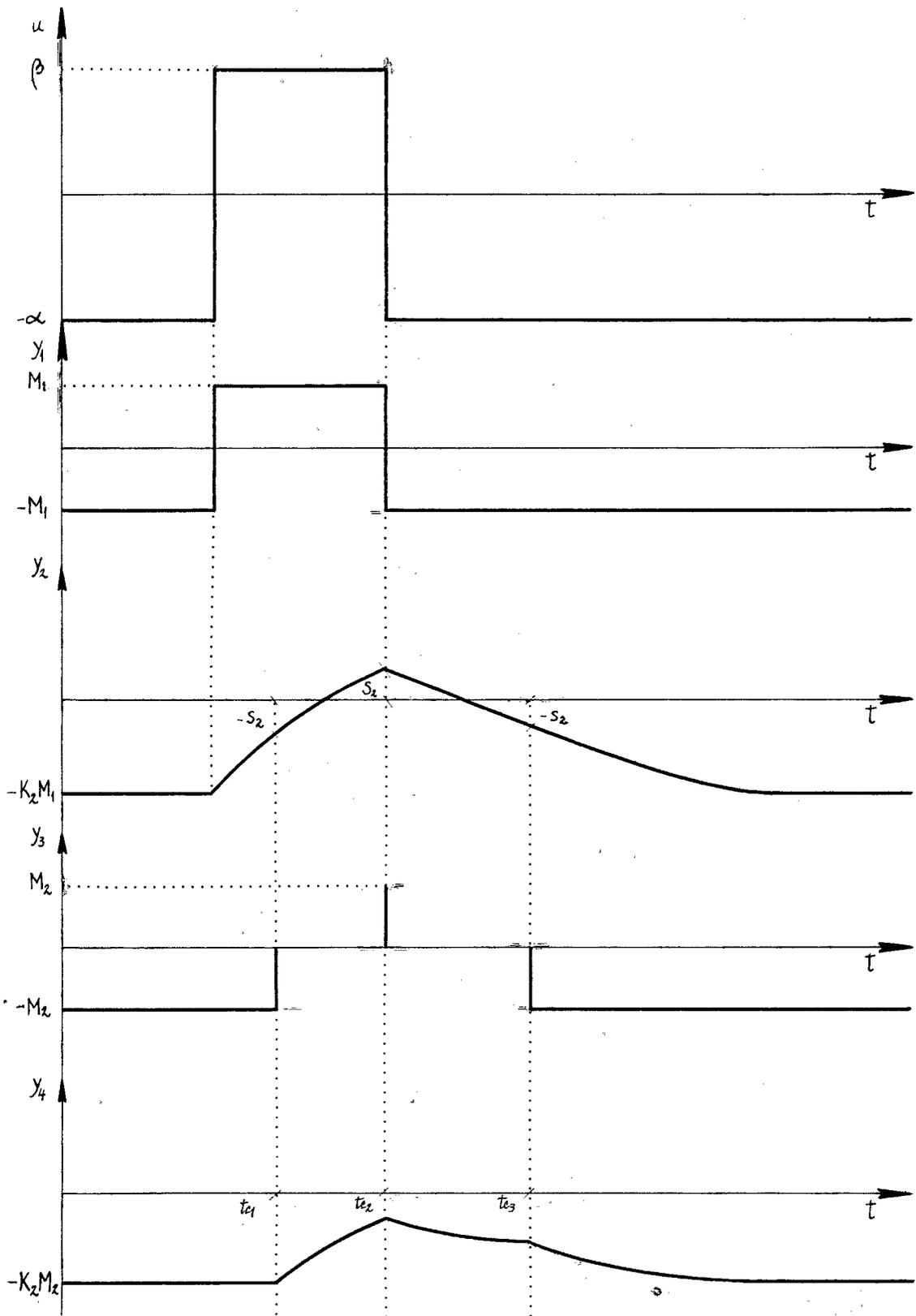
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA A



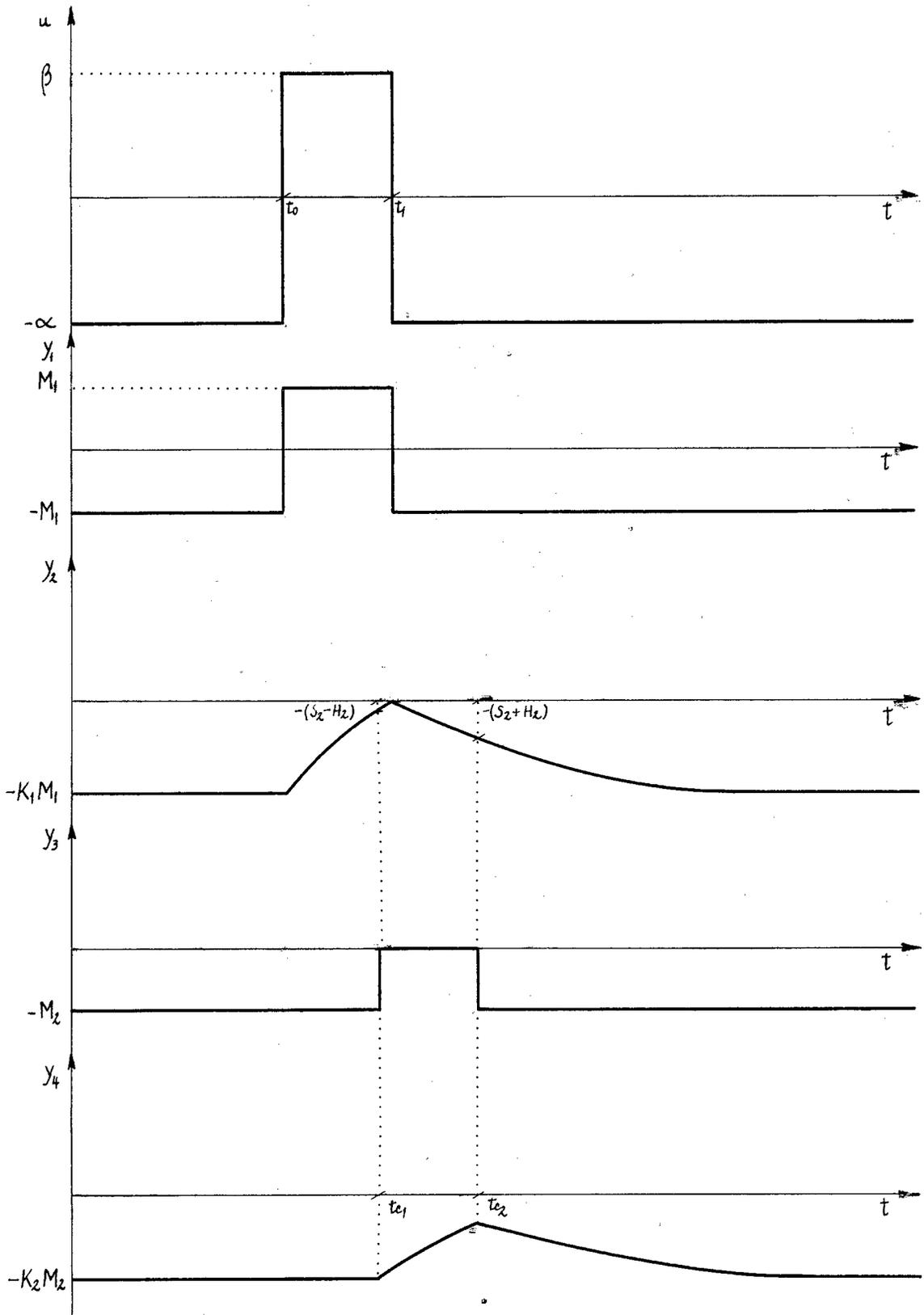
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA A



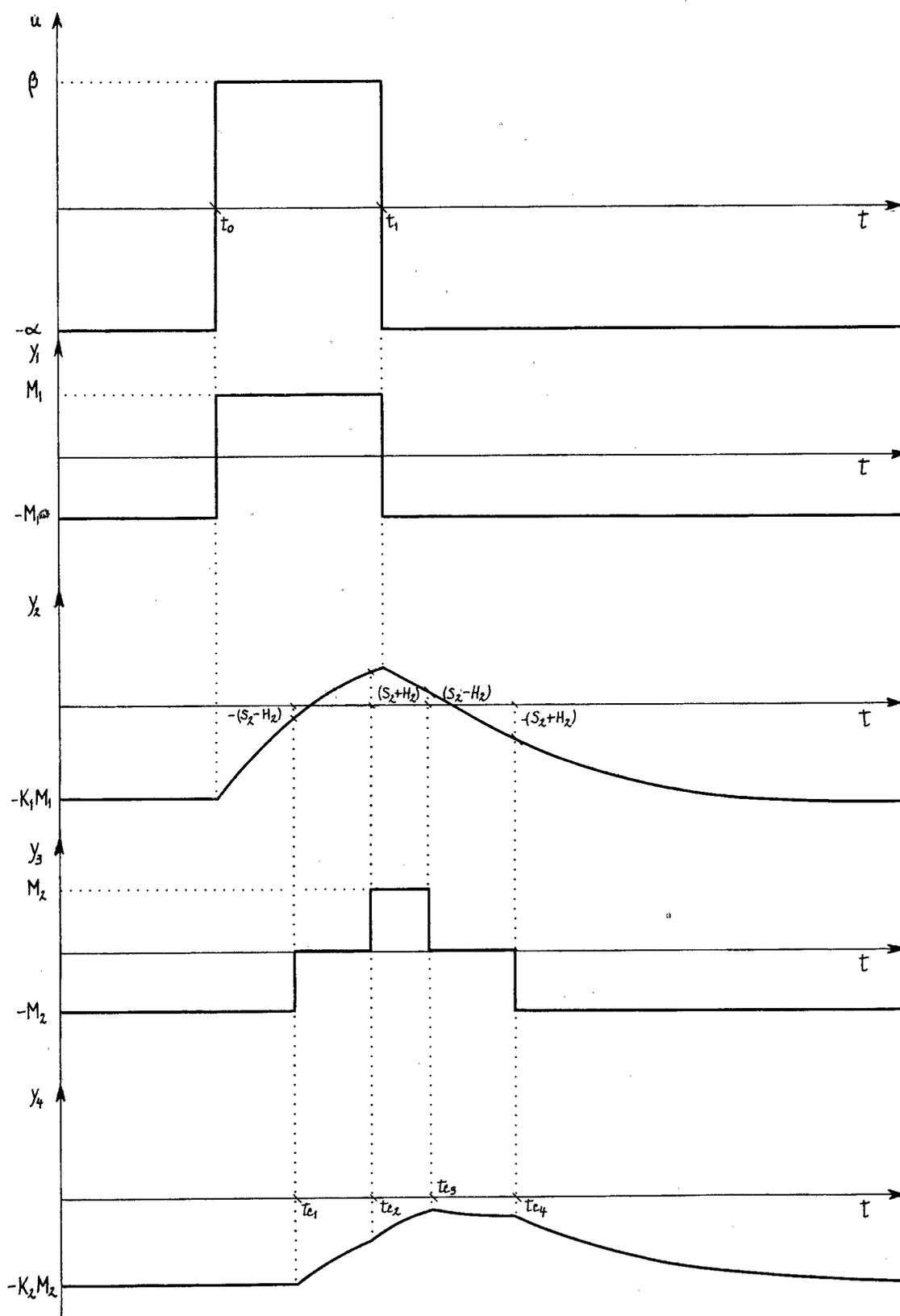
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA A



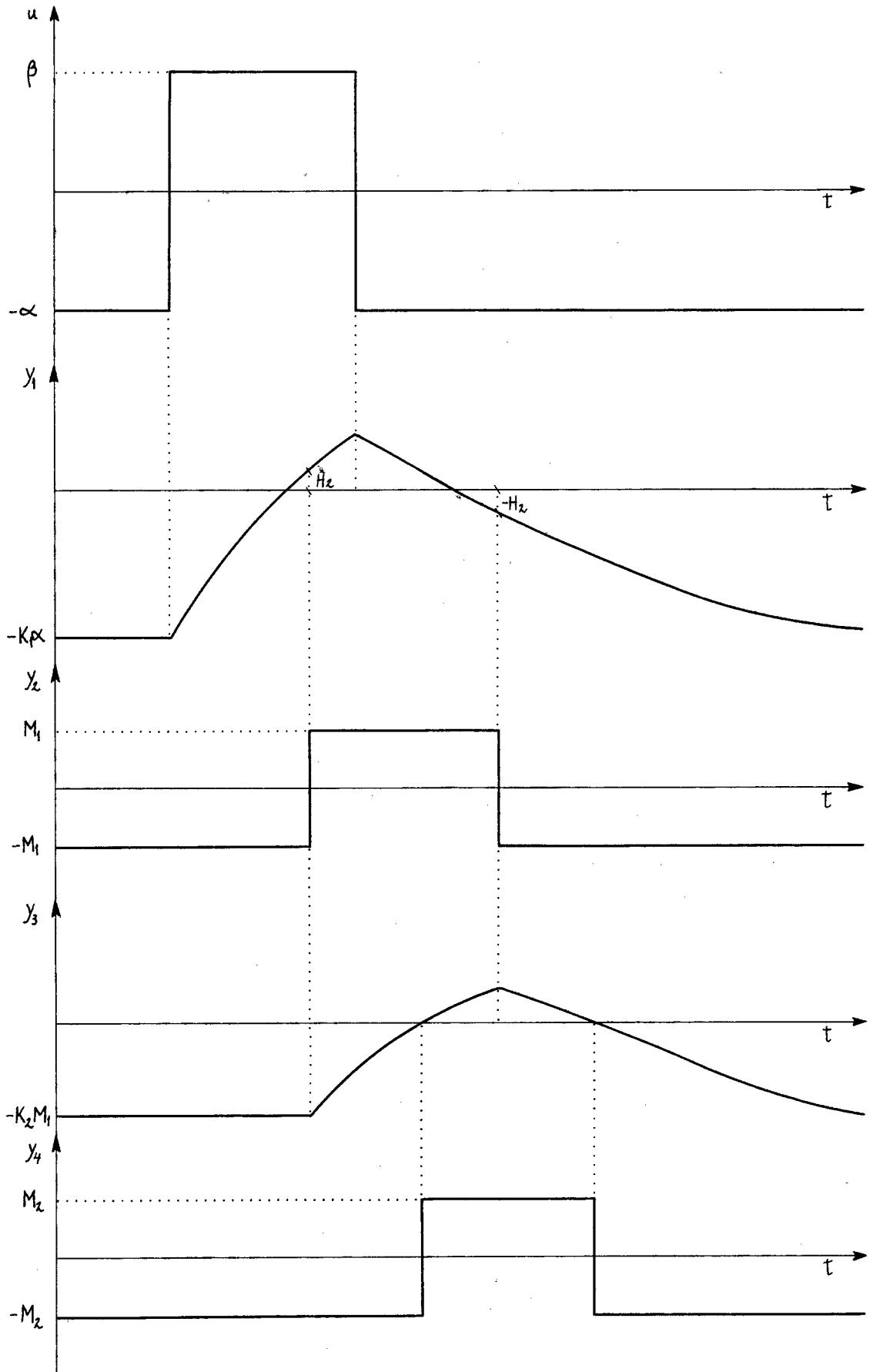
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA A



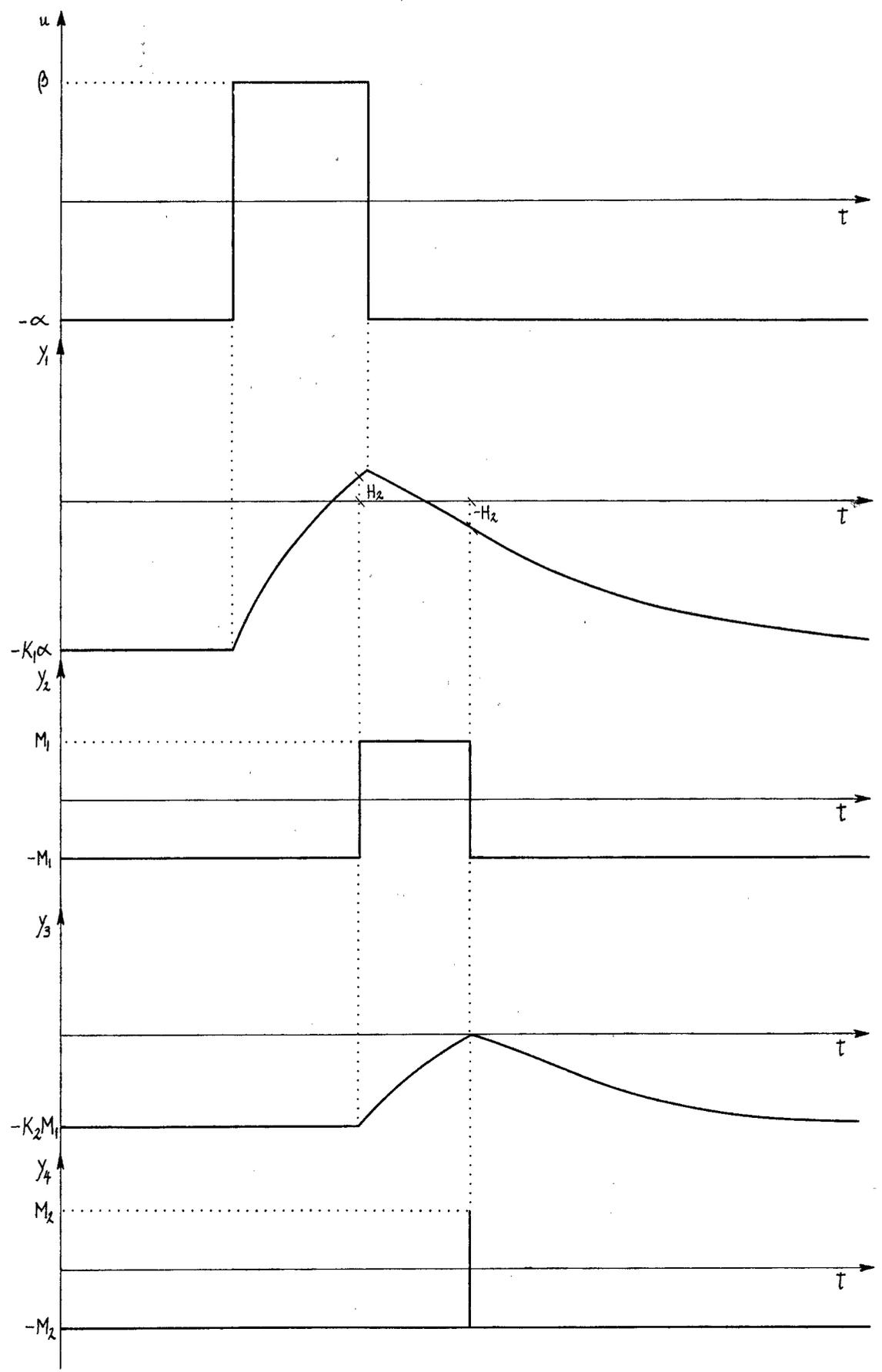
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA A



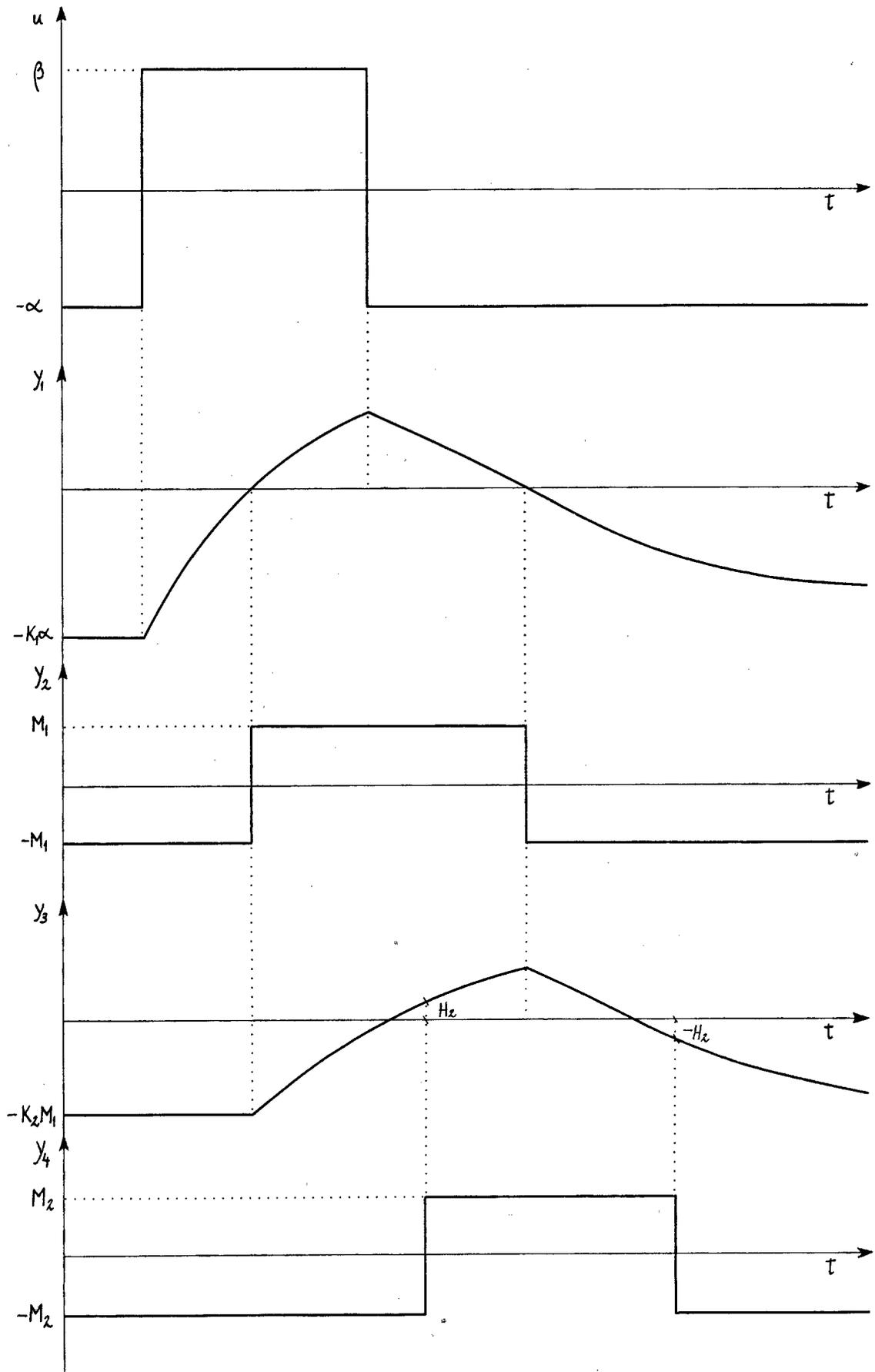
RELE COM HISTERESE E RELE IDEAL  
CADEIA B



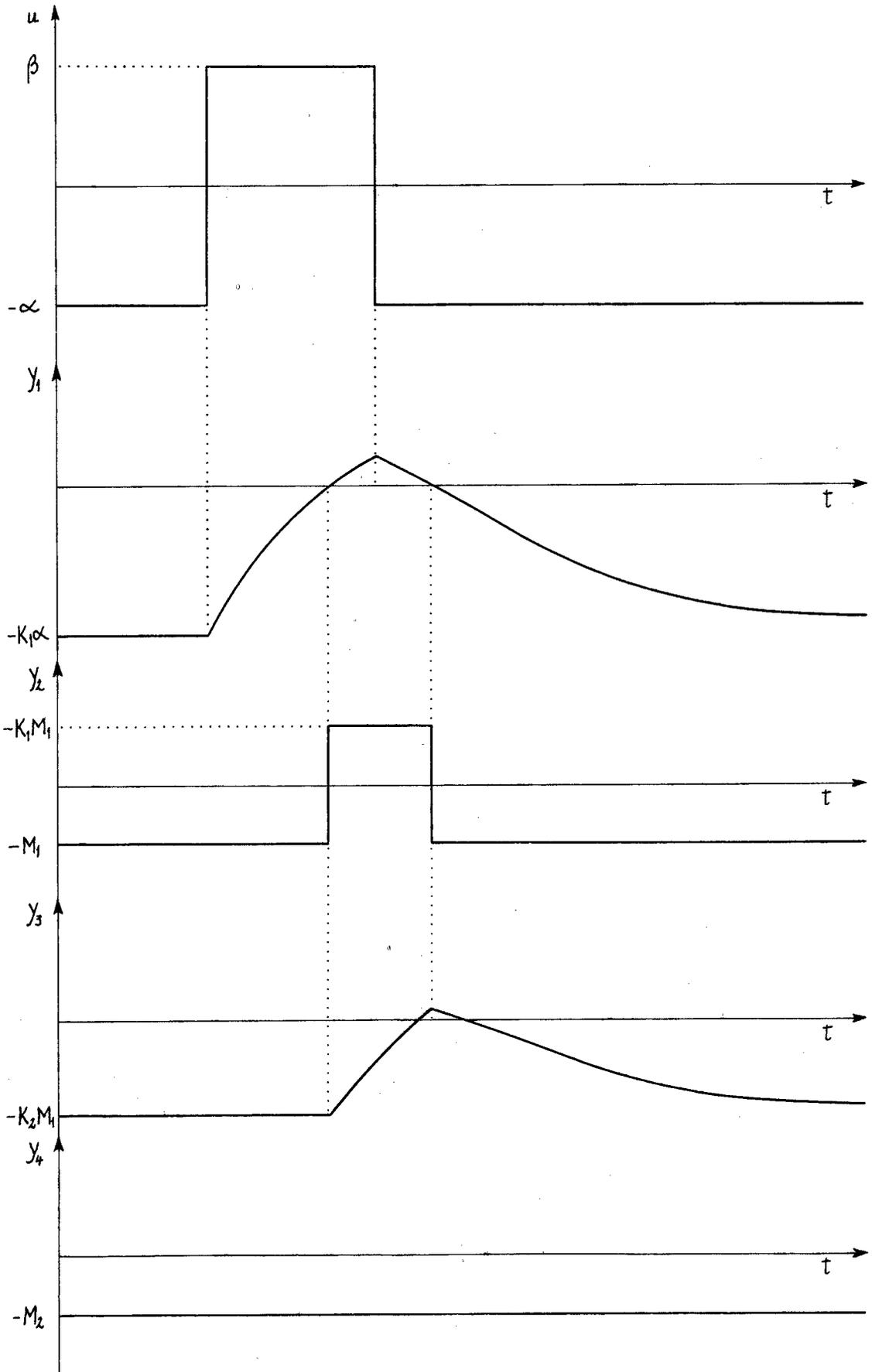
### RELE COM HISTERESE E RELE IDEAL : CADEIA B



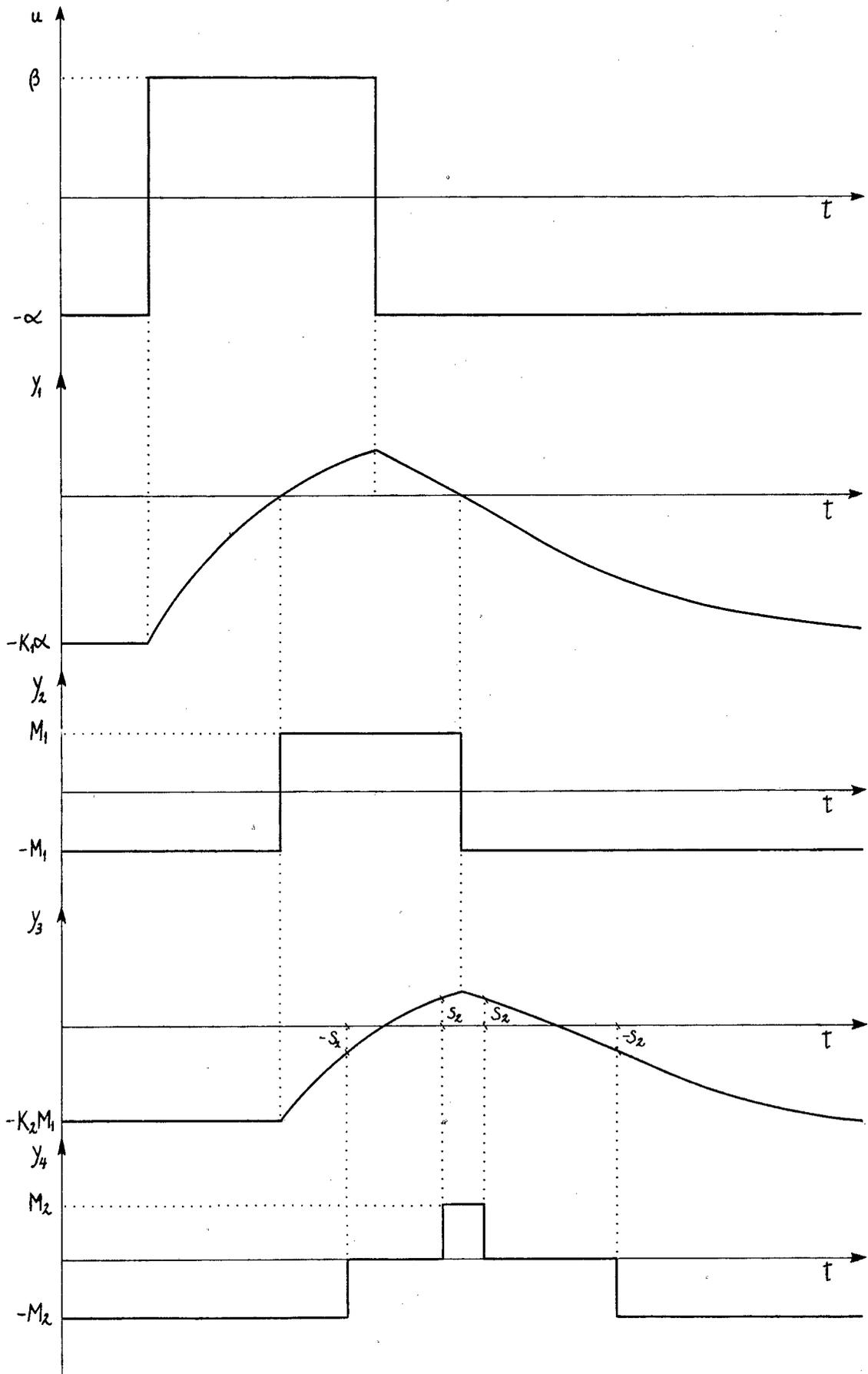
## RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE – CADEIA B



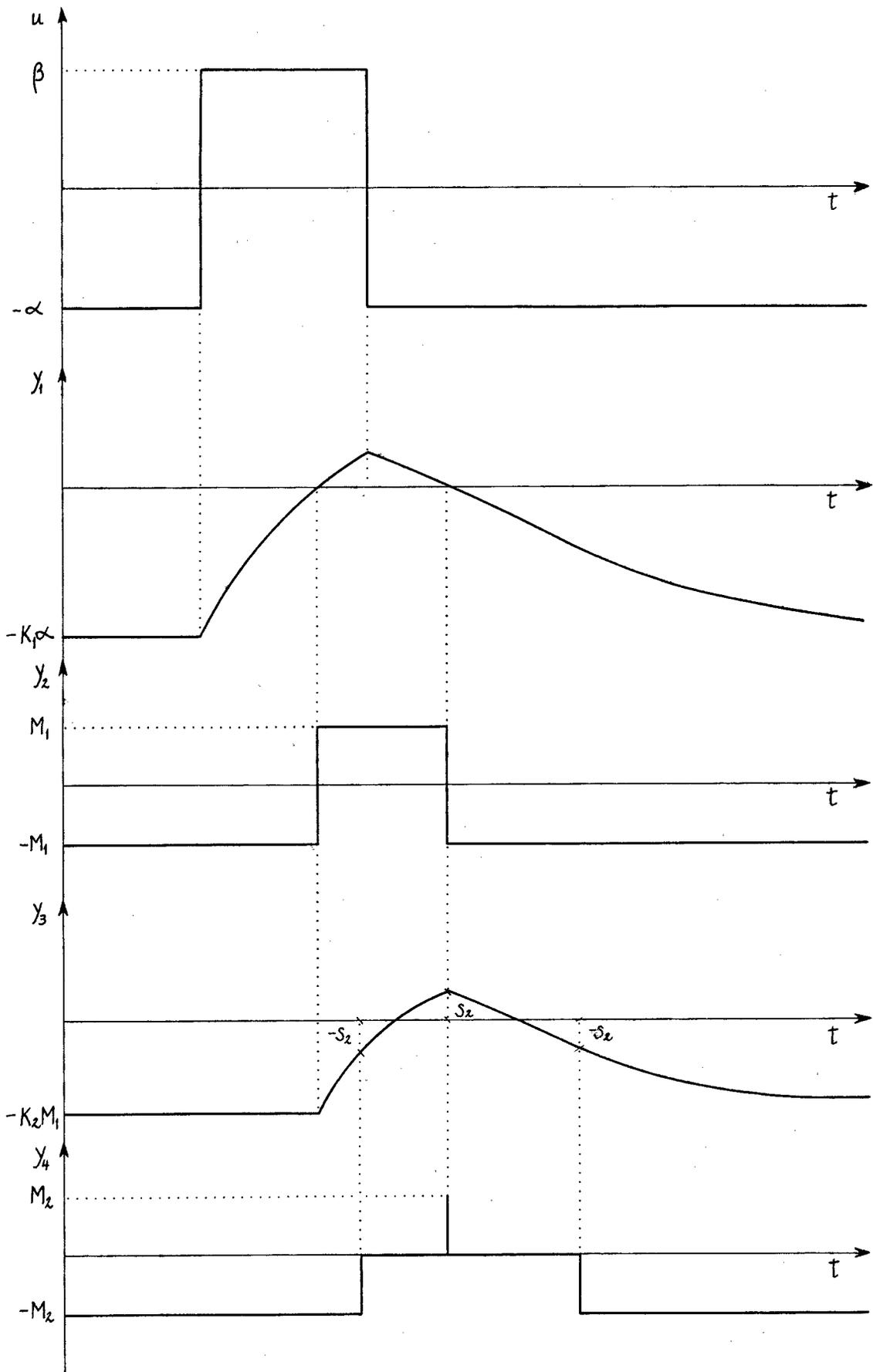
RELE IDEAL E RELE COM HISTERESE  
CADEIA B



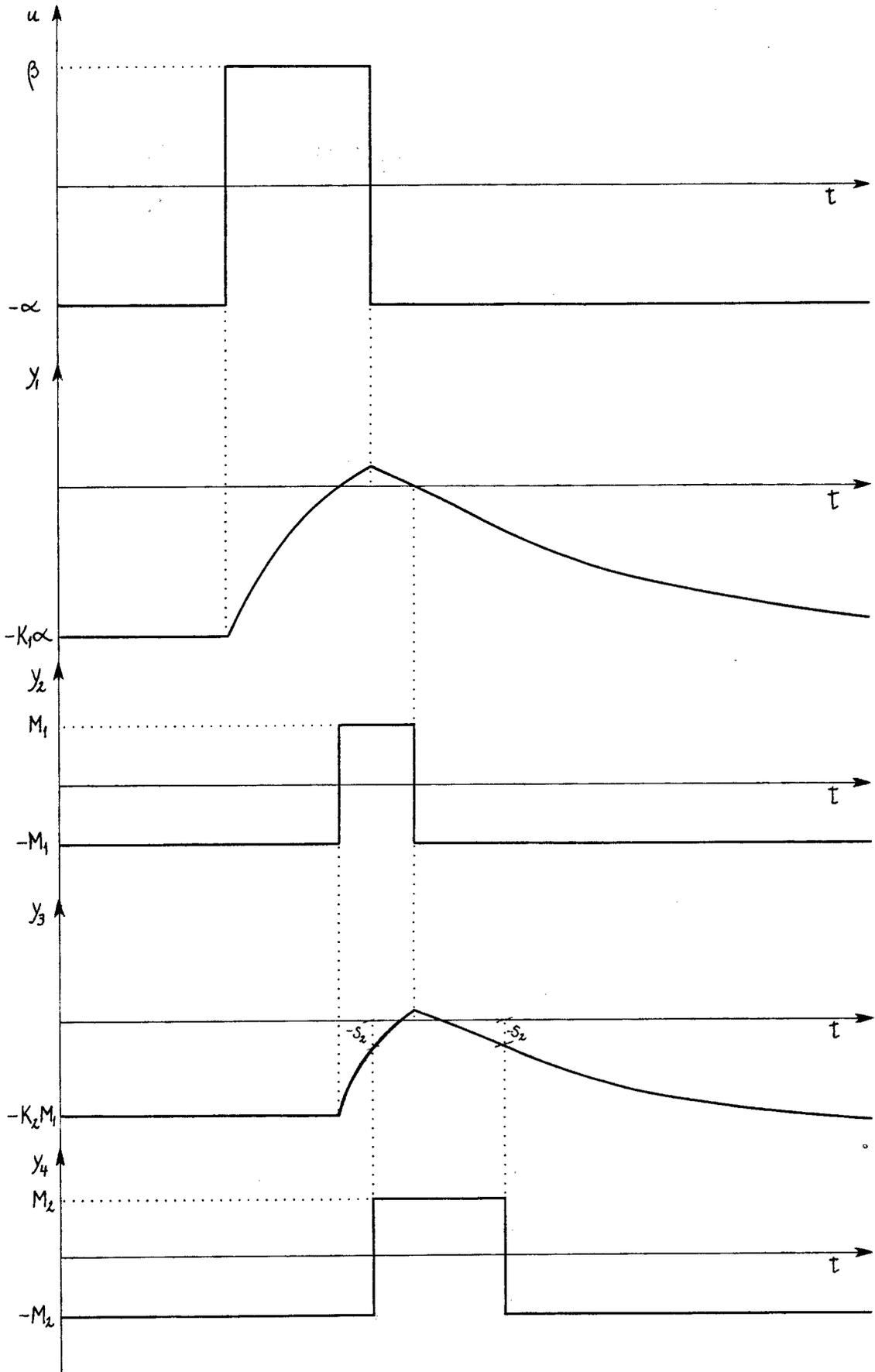
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA B



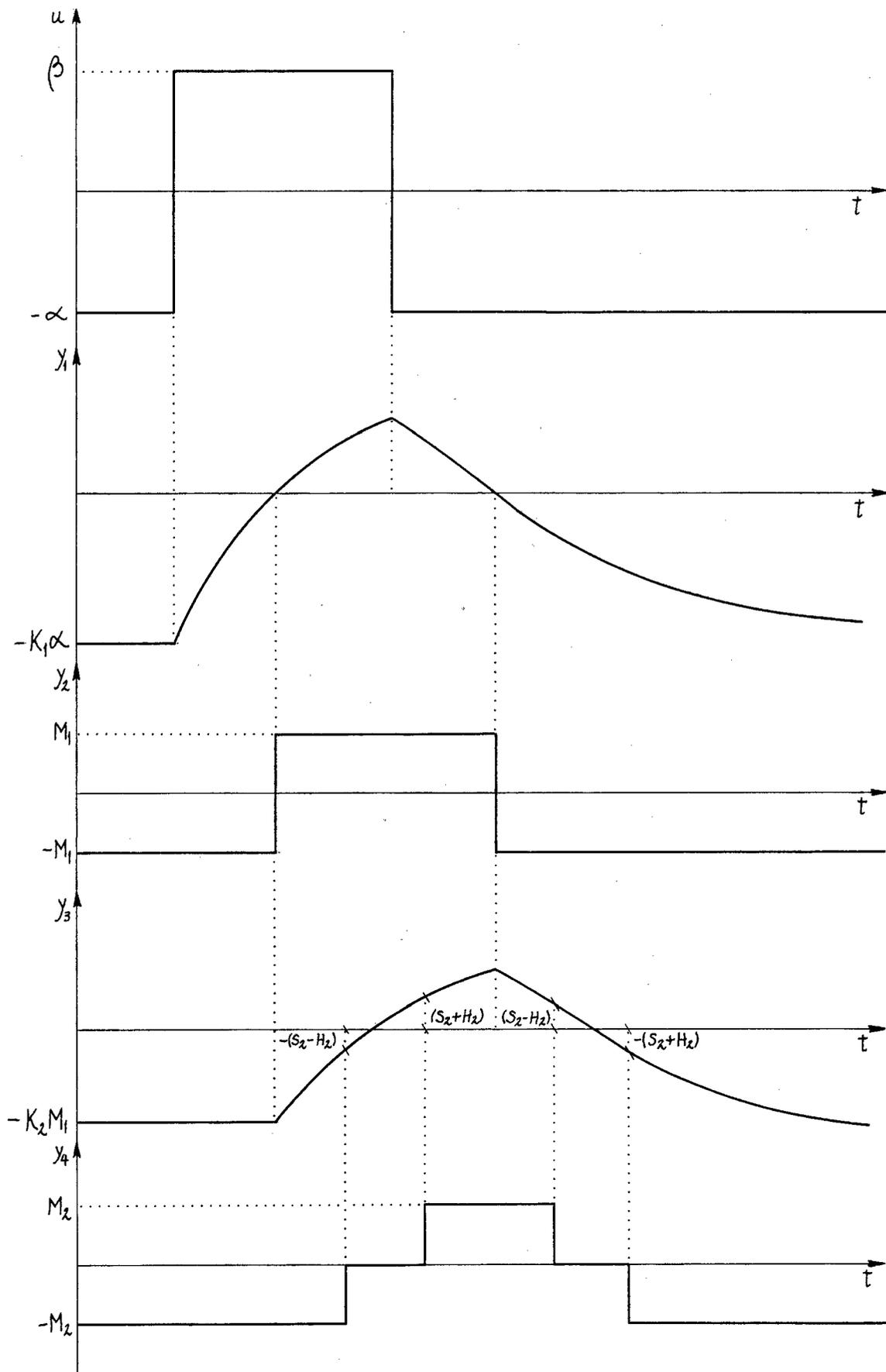
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA B



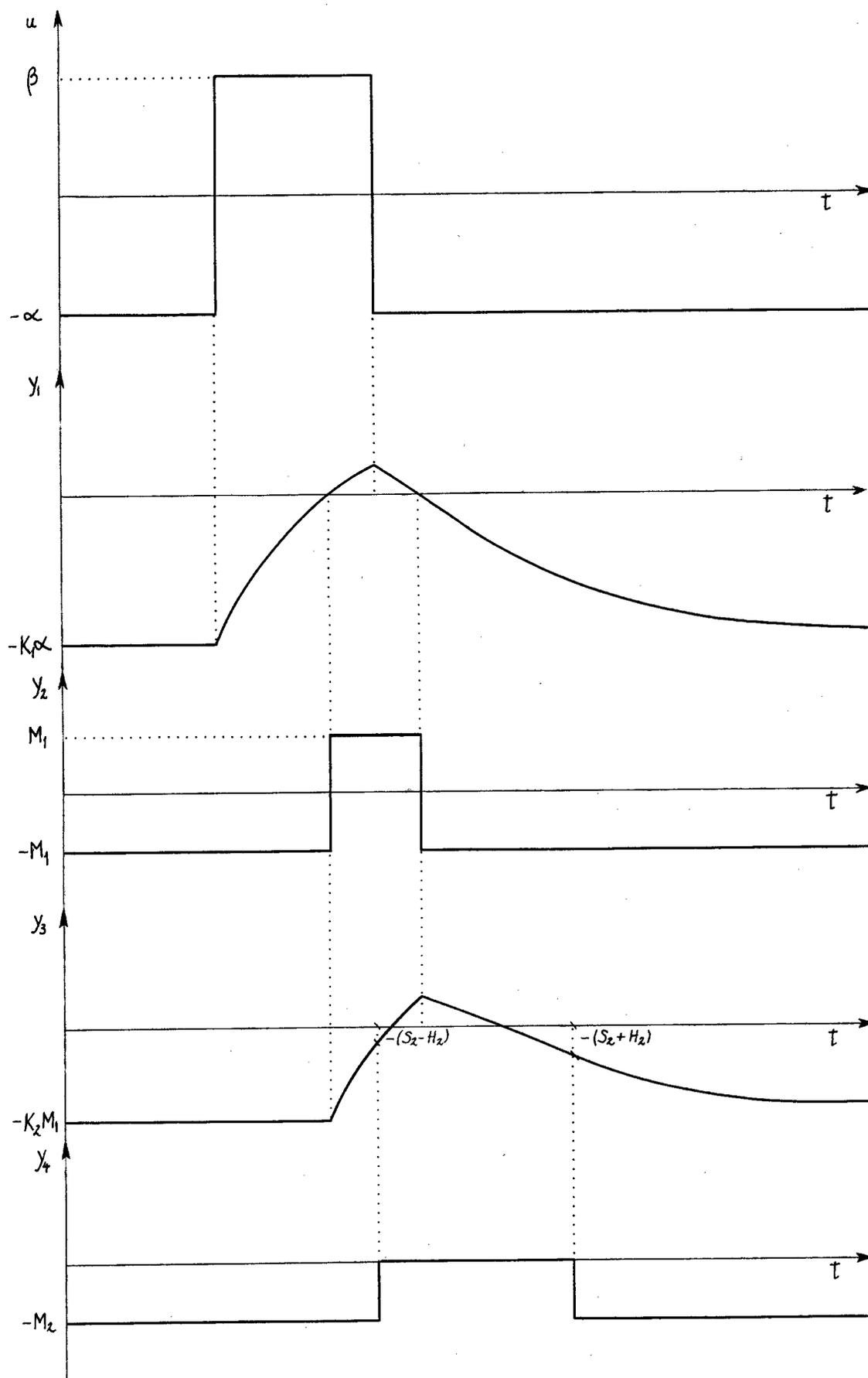
RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA  
CADEIA B



## RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE - CADEIA B



RELE IDEAL E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE  
CADEIA B

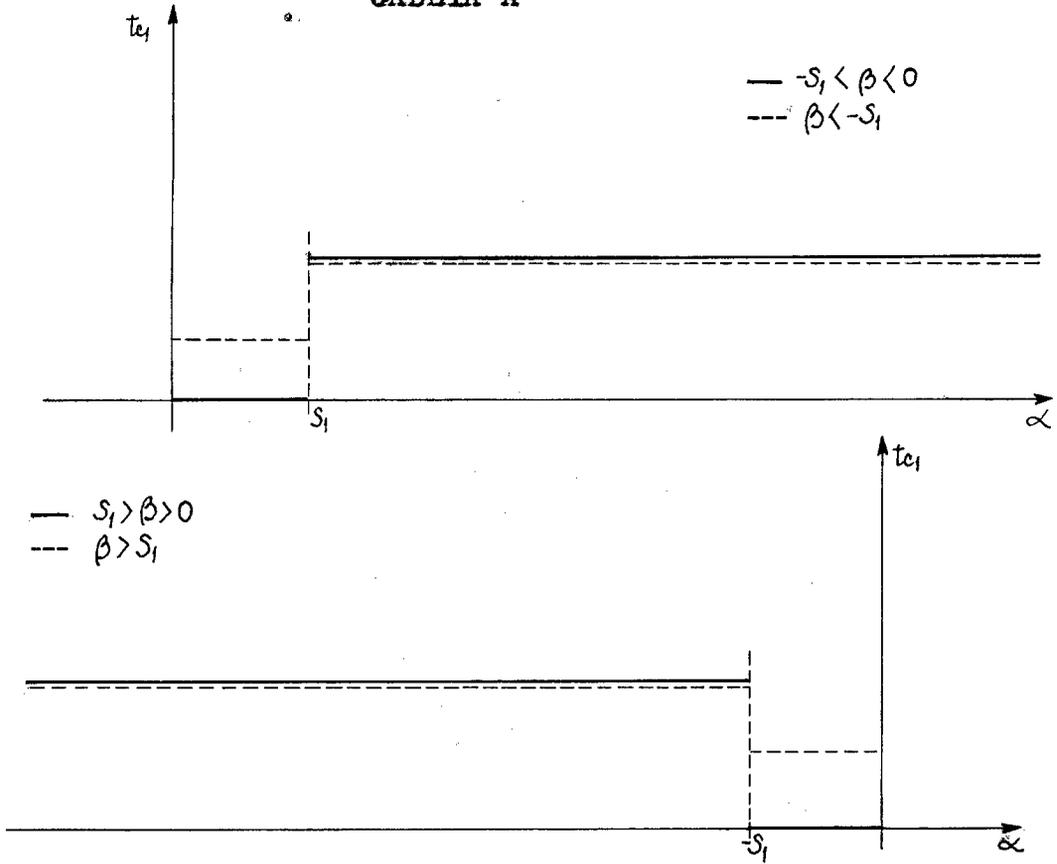


### III.4 - TESTE Nº 3

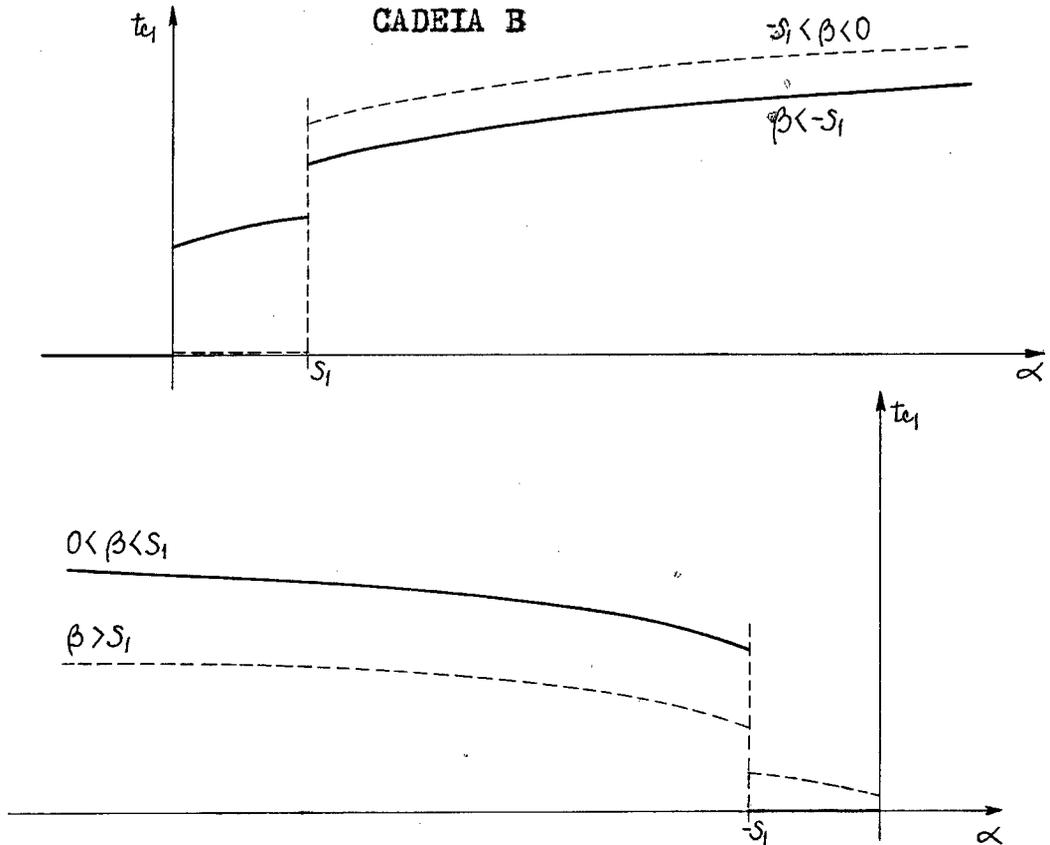
Constam deste ítem os gráficos do tempo de comutação em função da entrada para cada estrutura das cadeias A e B.

1ª NÃO LINEARIDADE : RELE COM ZONA MORTA

CADEIA A

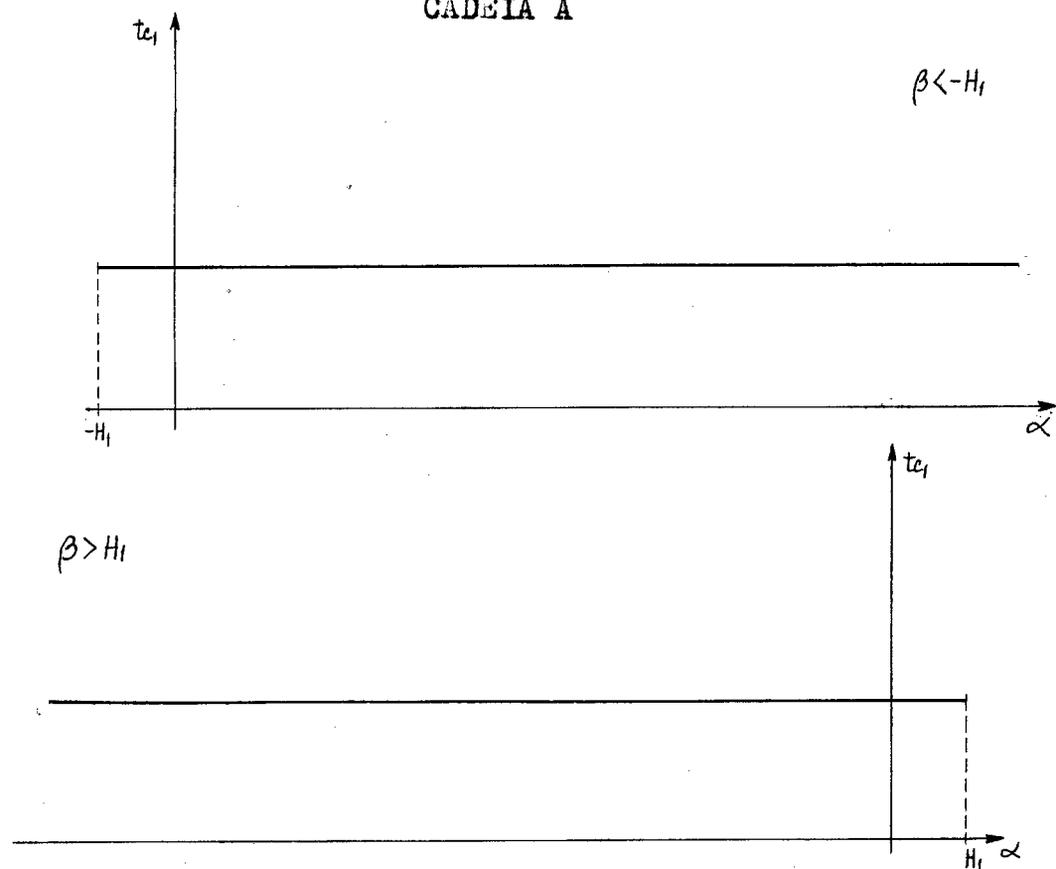


CADEIA B

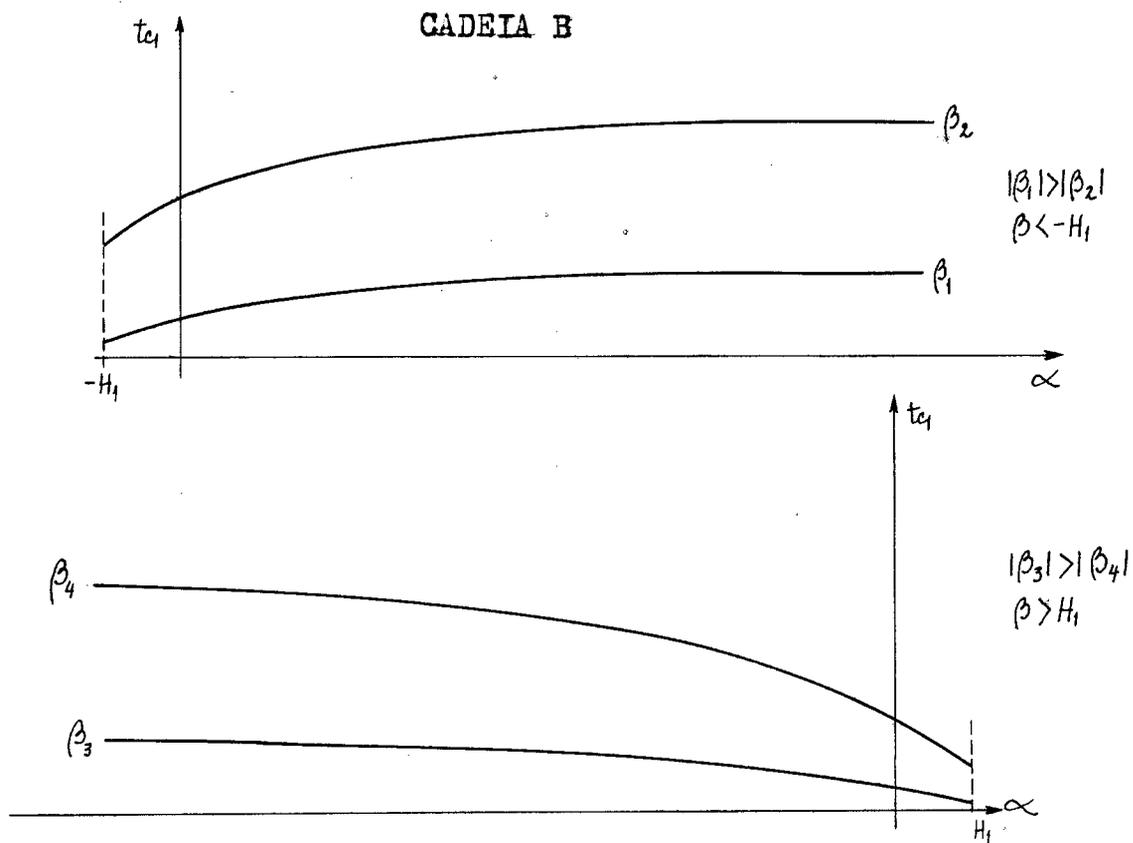


## 1ª NÃO LINEARIDADE : RELE COM HISTERESE

CADEIA A

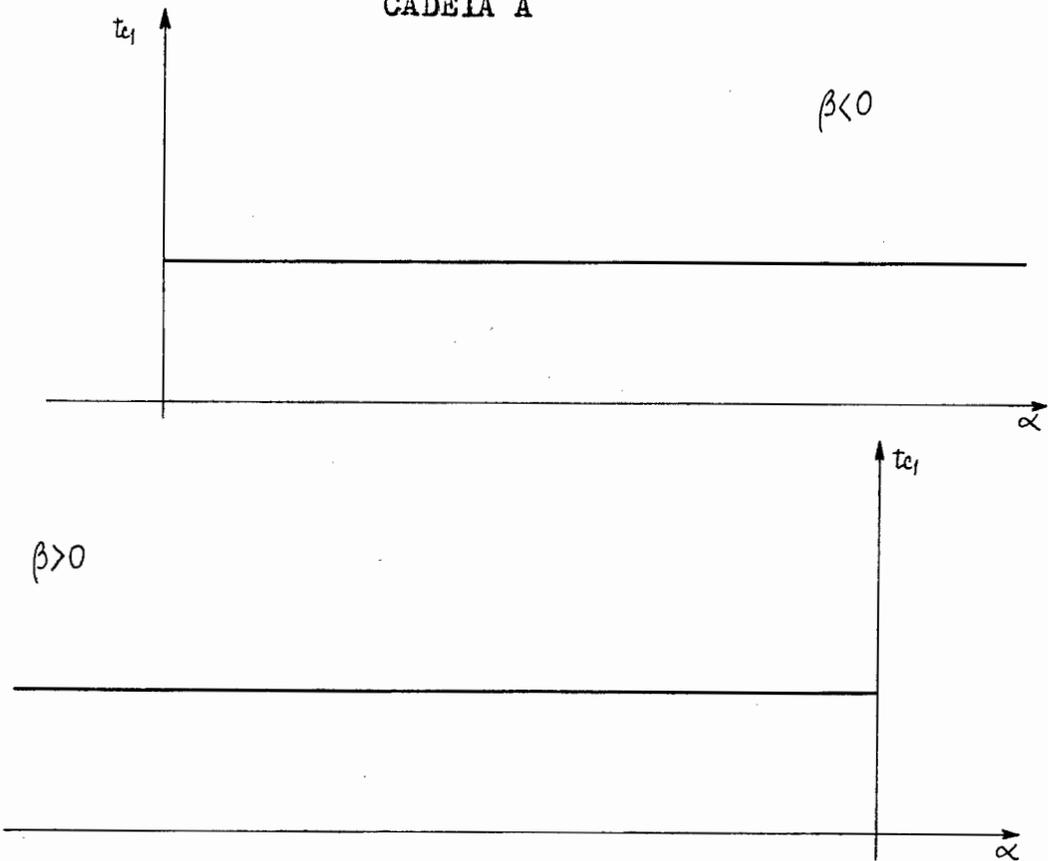


CADEIA B

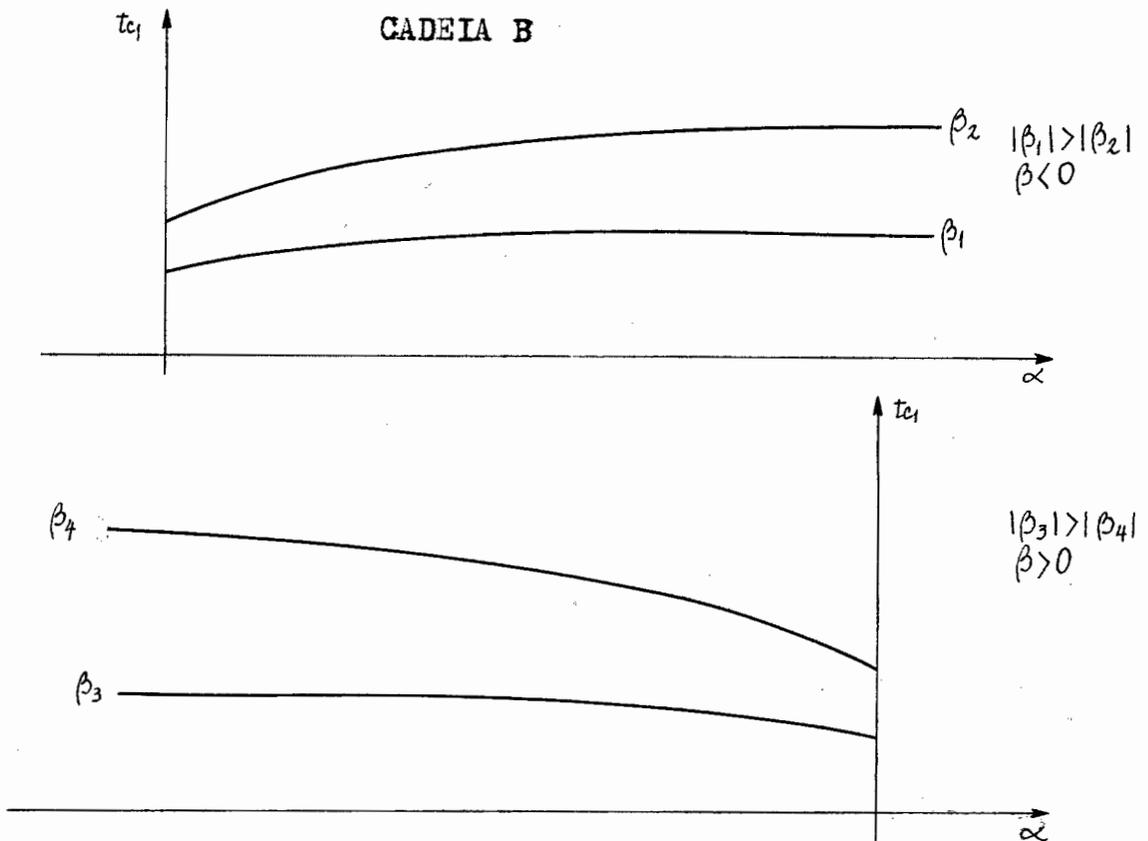


I<sup>a</sup> NÃO LINEARIDADE : RELE IDEAL

CADEIA A

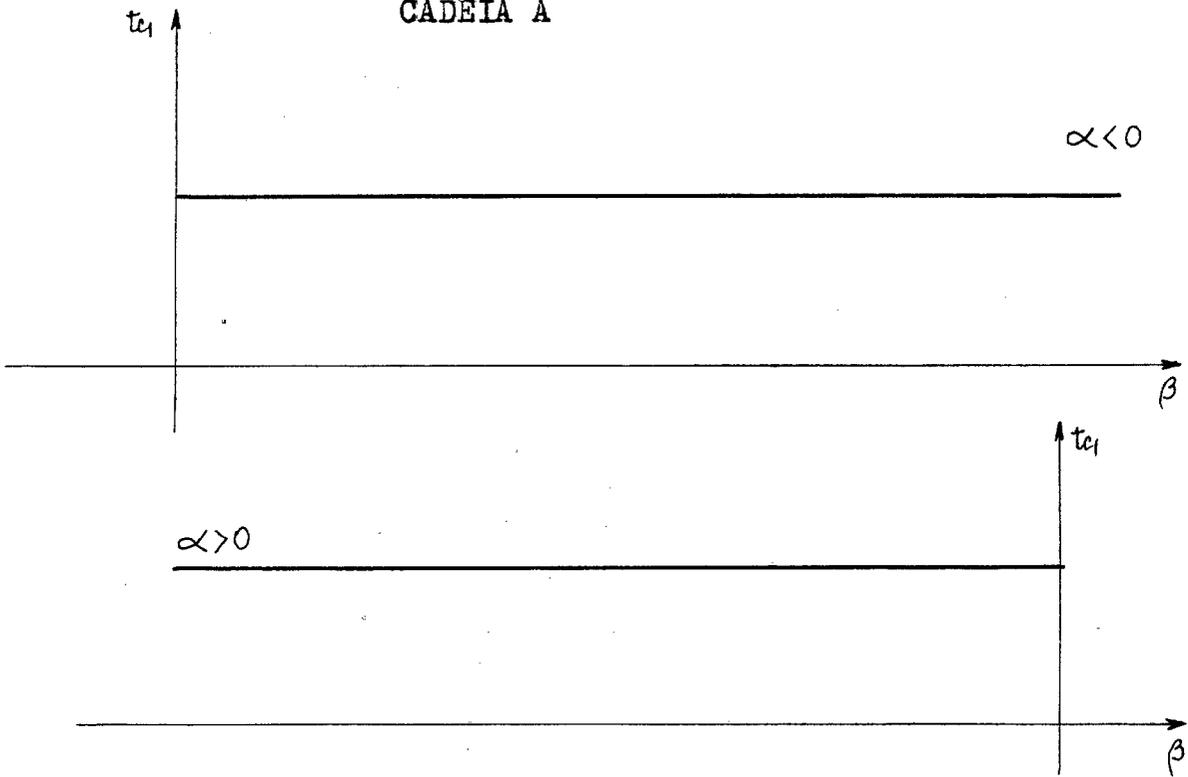


CADEIA B

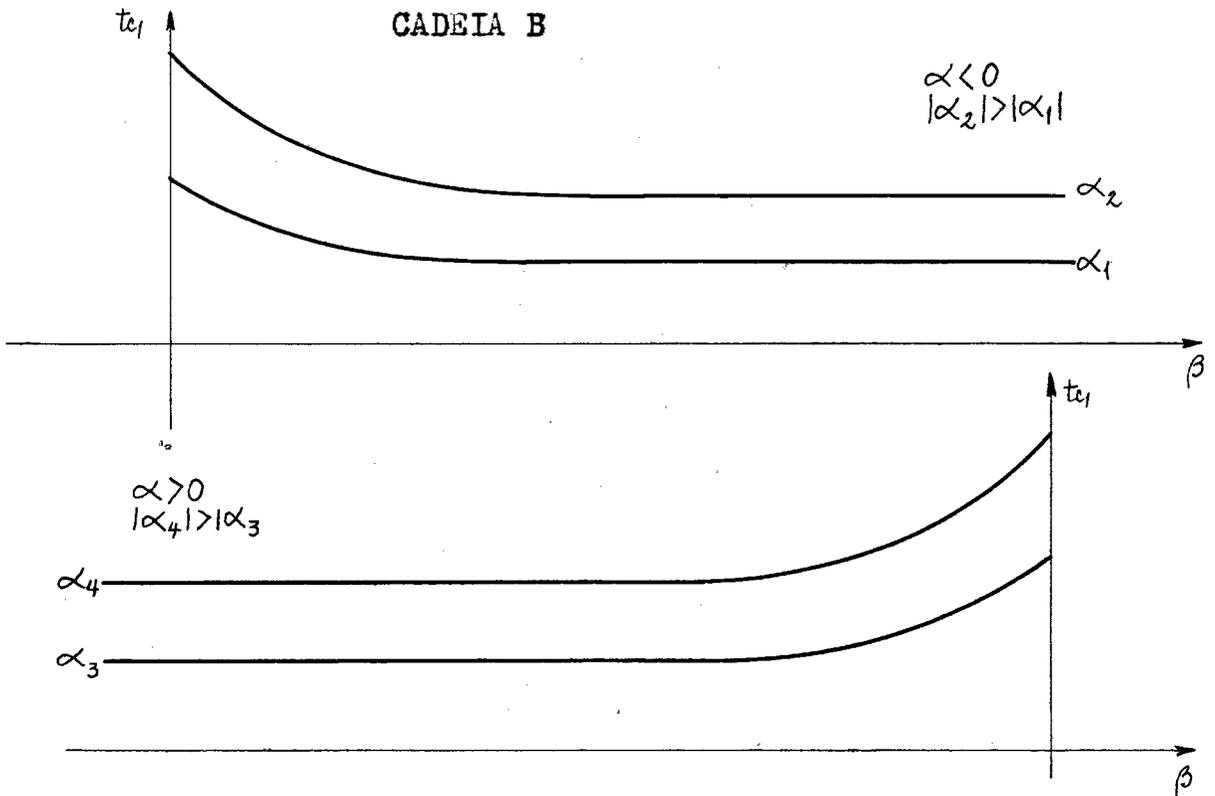


TEMPO DE COMUTAÇÃO -  $\alpha$  Constante e  $\beta$  Variável  
RELE IDEAL

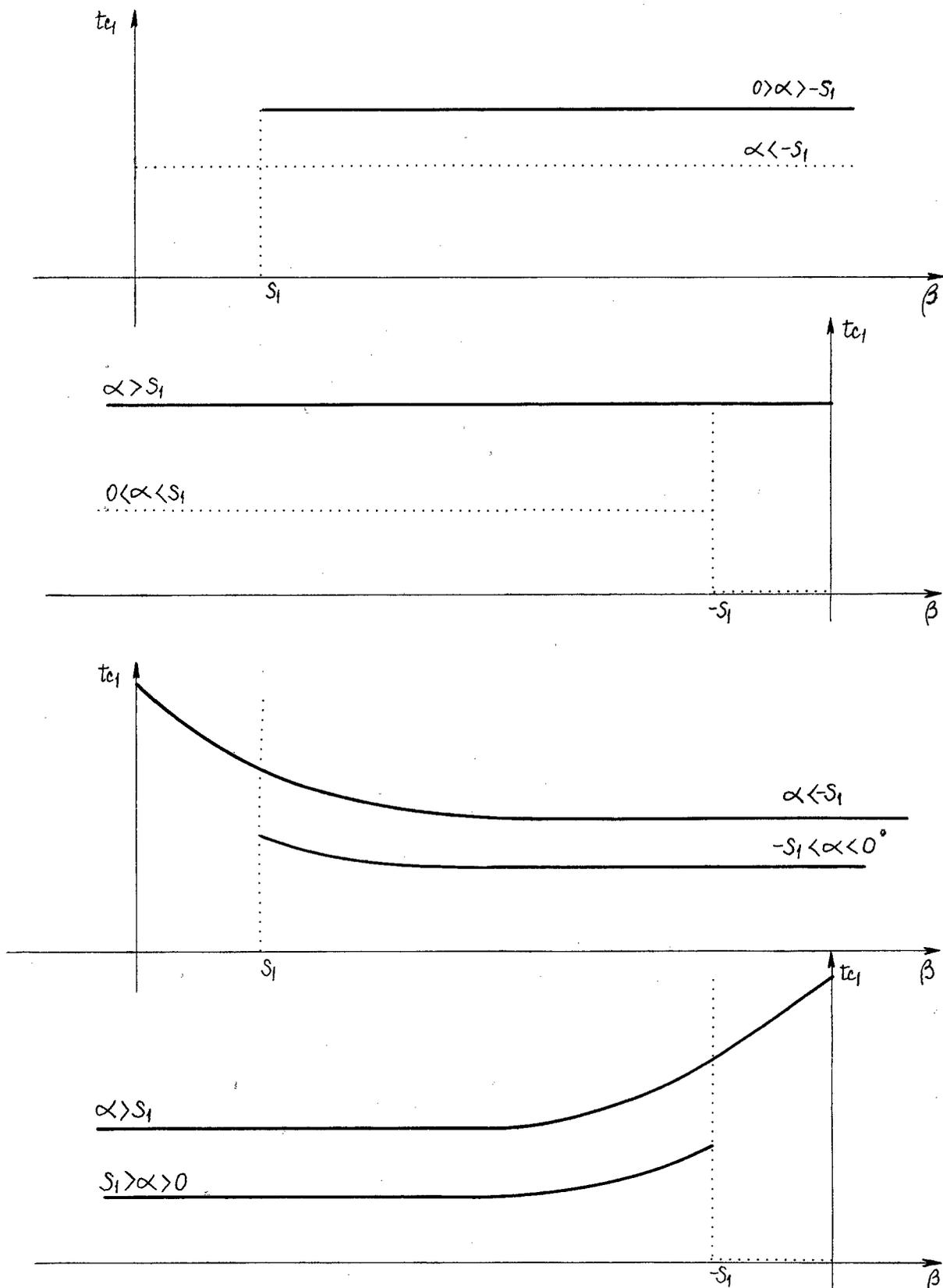
CADEIA A



CADEIA B



## RELE COM ZONA MORTA

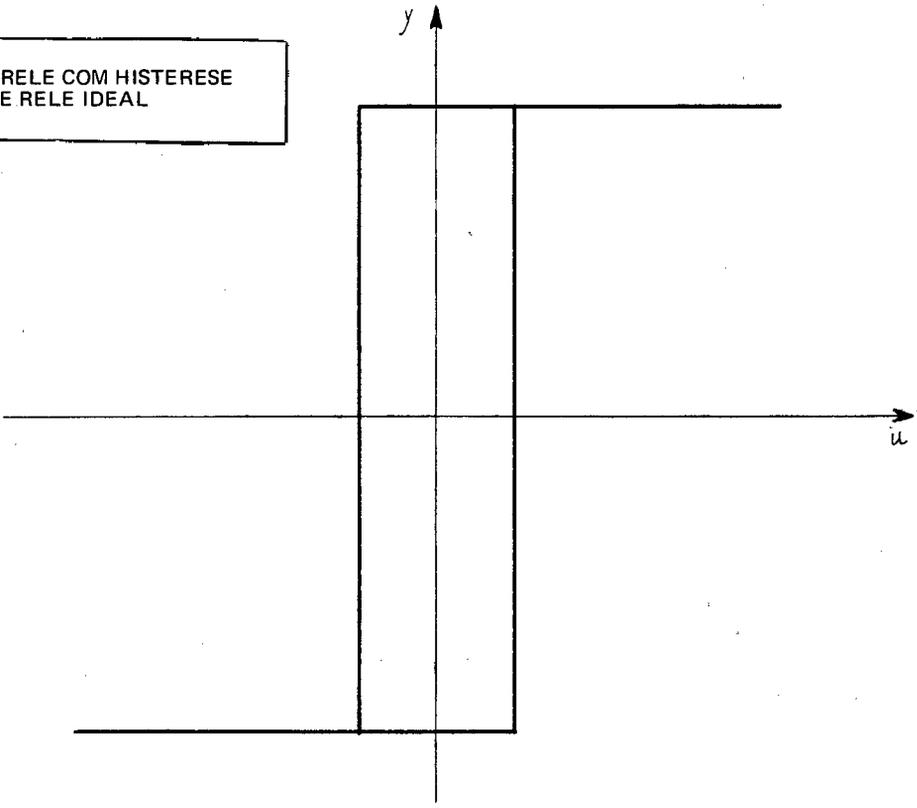


III.5 - TESTE Nº 4

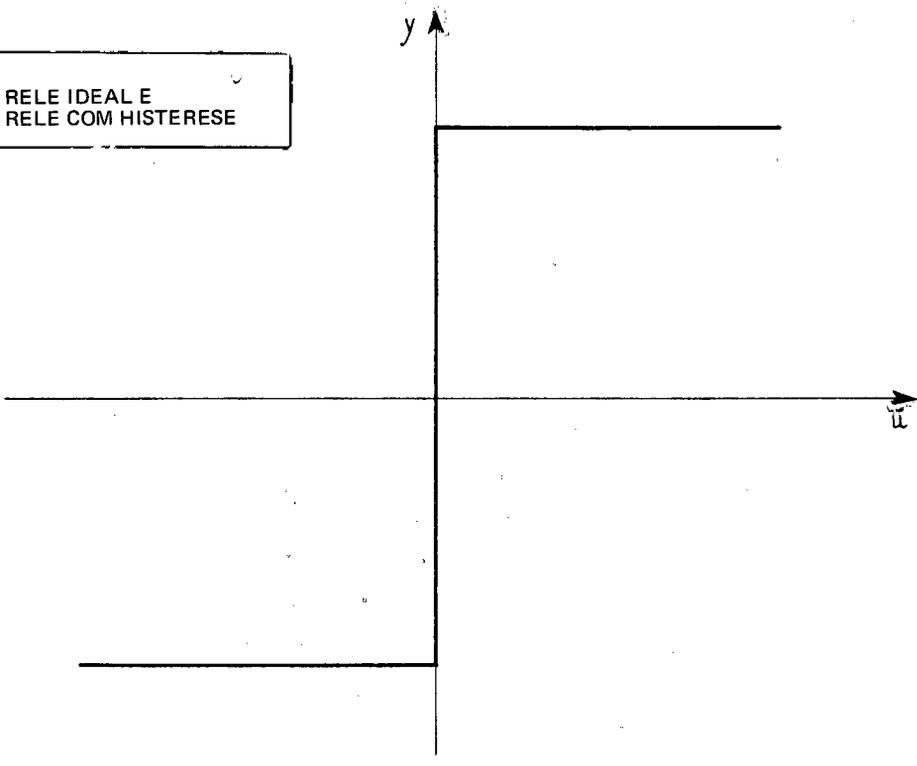
Alguns gráficos das saídas em função da entrada, de estruturas submetidas ao teste -característica estática - estão aqui representados.

Como não houve diferença significativa na forma da característica de saída entre estruturas do tipo cadeia A e cadeia B, apresentamos os resultados obtidos apenas para a cadeia A.

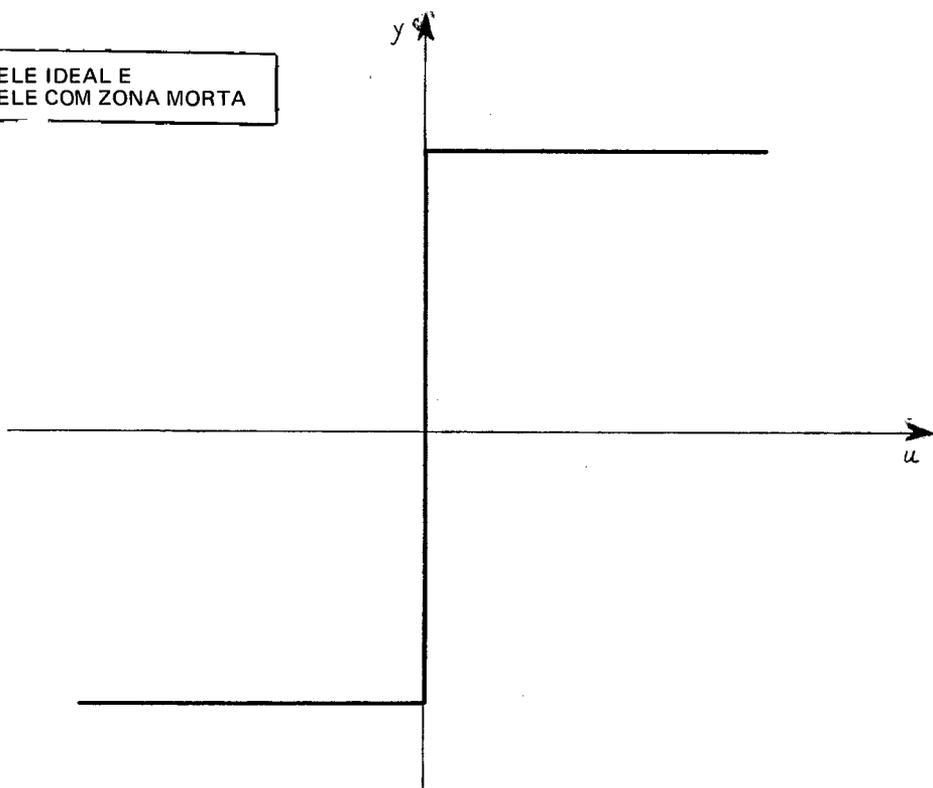
RELE COM HISTERESE  
E RELE IDEAL



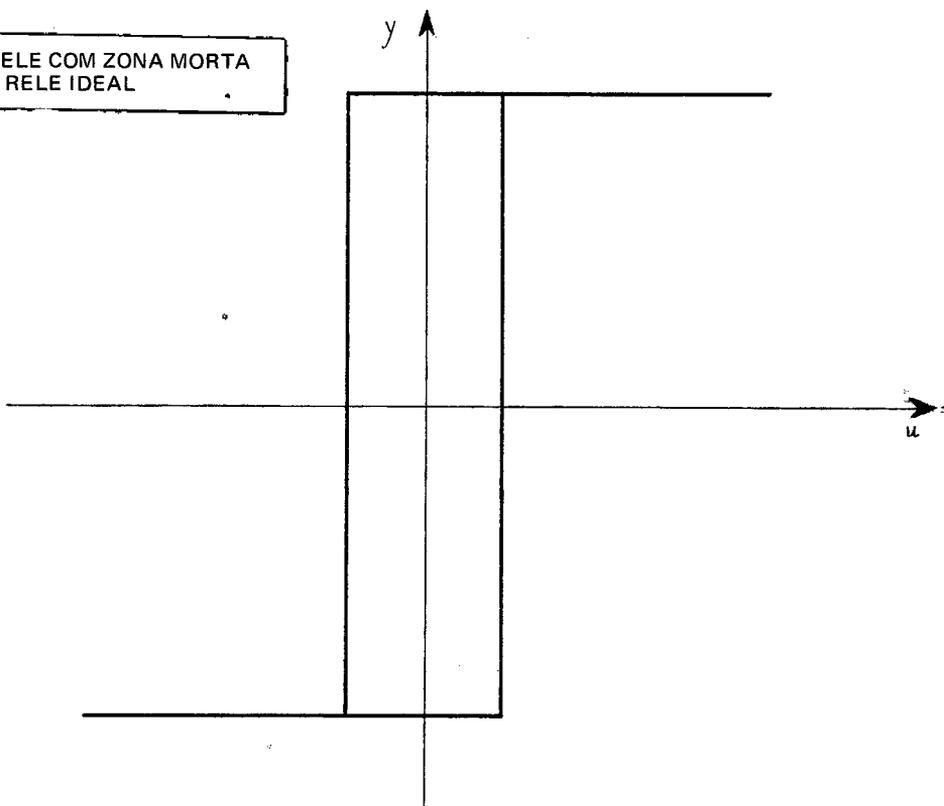
RELE IDEAL E  
RELE COM HISTERESE



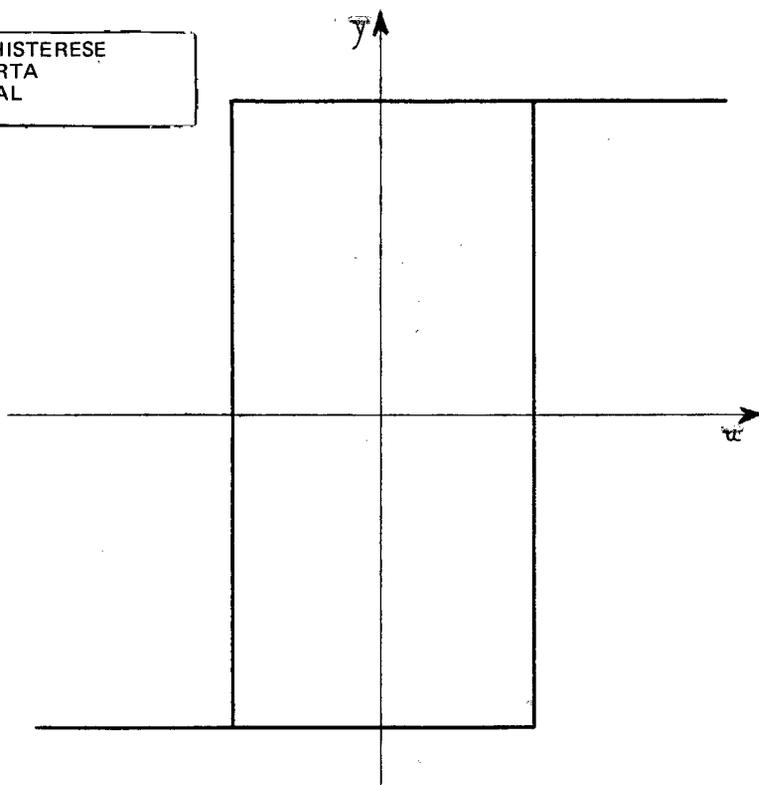
RELE IDEAL E  
RELE COM ZONA MORTA



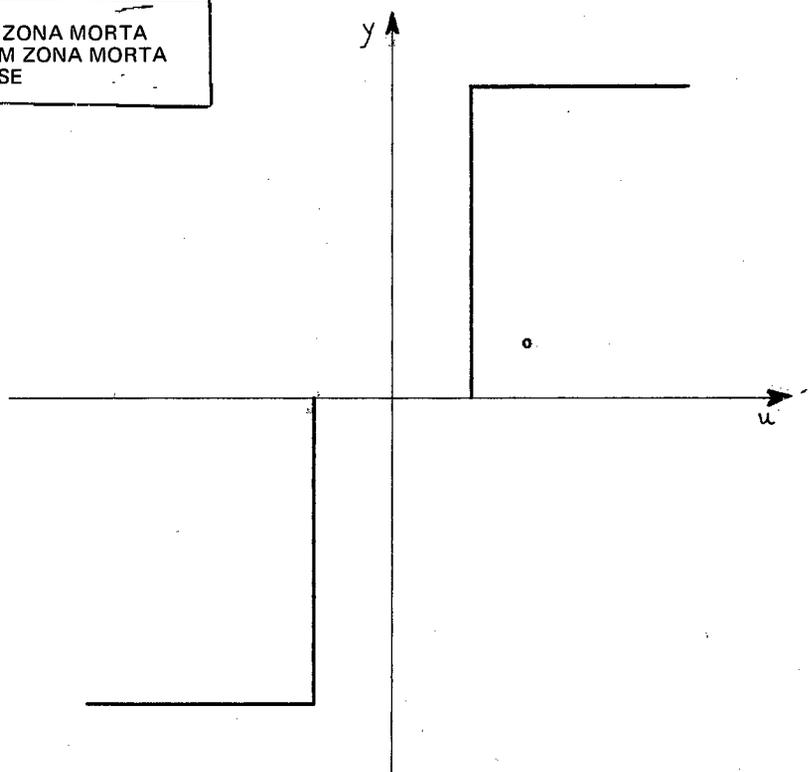
RELE COM ZONA MORTA  
E RELE IDEAL



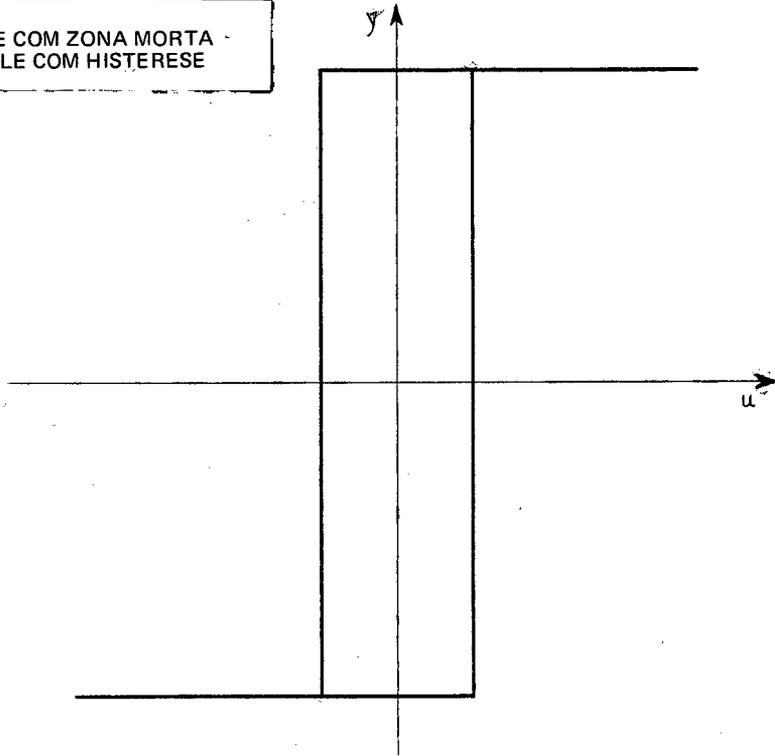
RELE COM HISTERESE  
E ZONA MORTA  
E RELE IDEAL



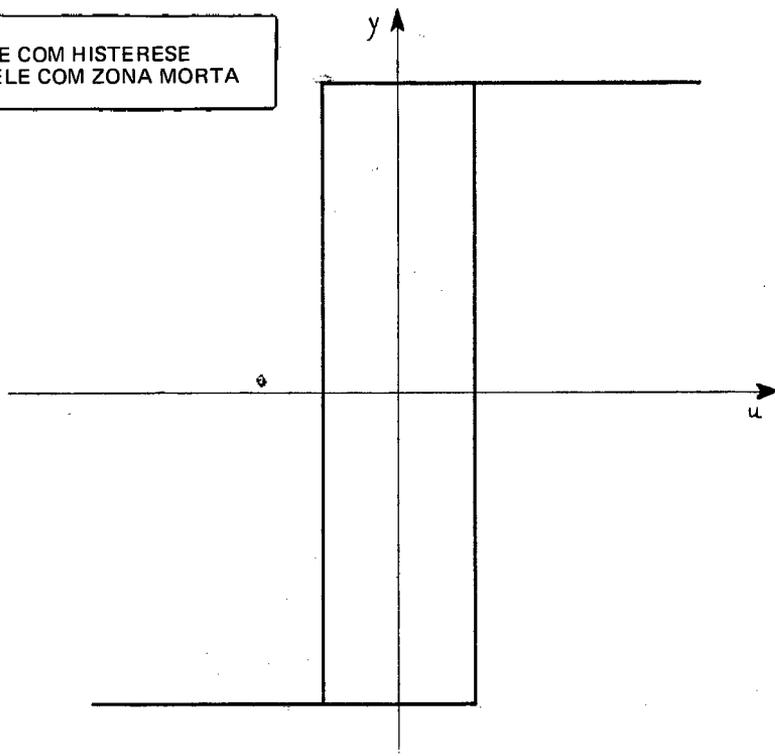
RELE COM ZONA MORTA  
E RELE COM ZONA MORTA  
E HISTERESE



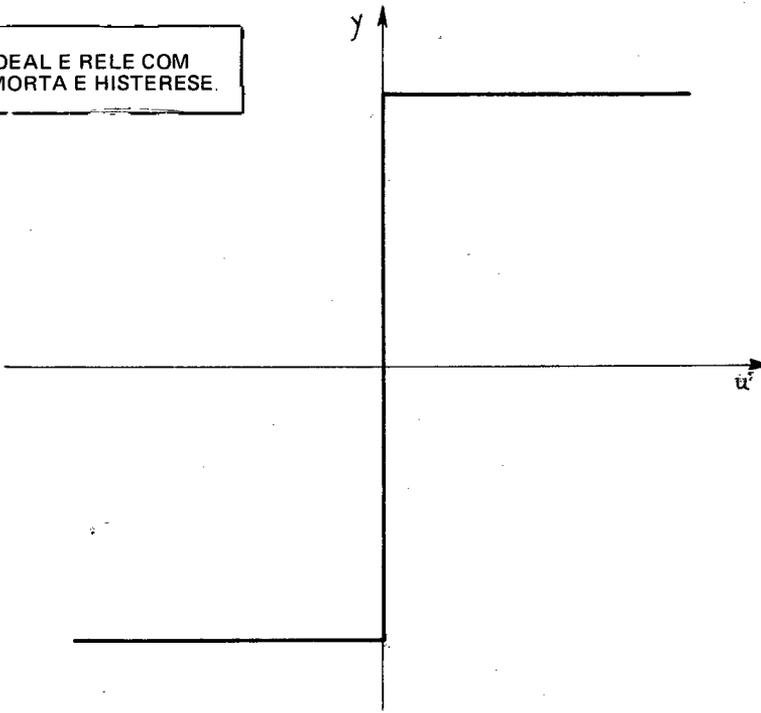
RELE COM ZONA MORTA  
E RELE COM HISTERESE



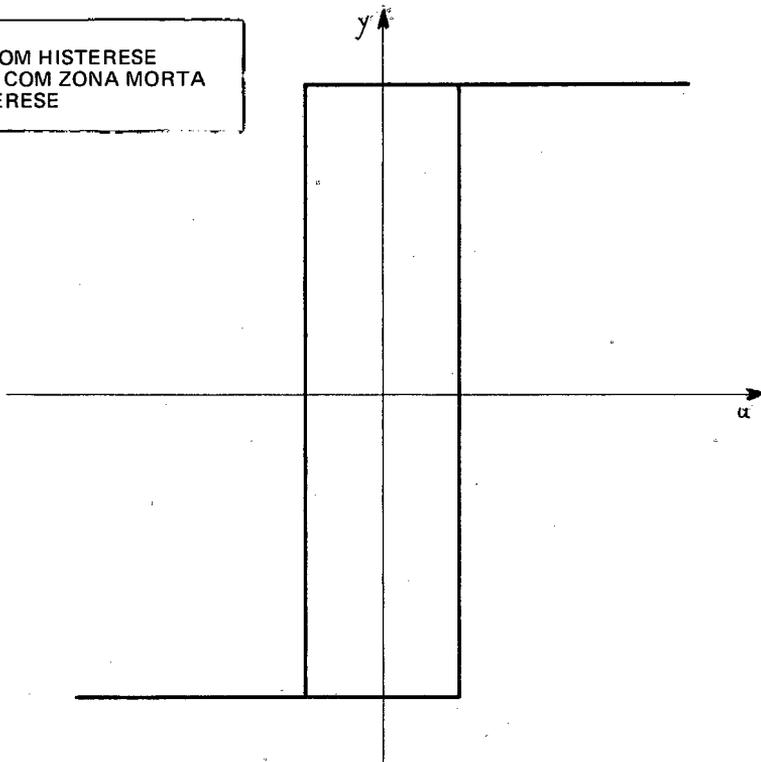
RELE COM HISTERESE  
E RELE COM ZONA MORTA



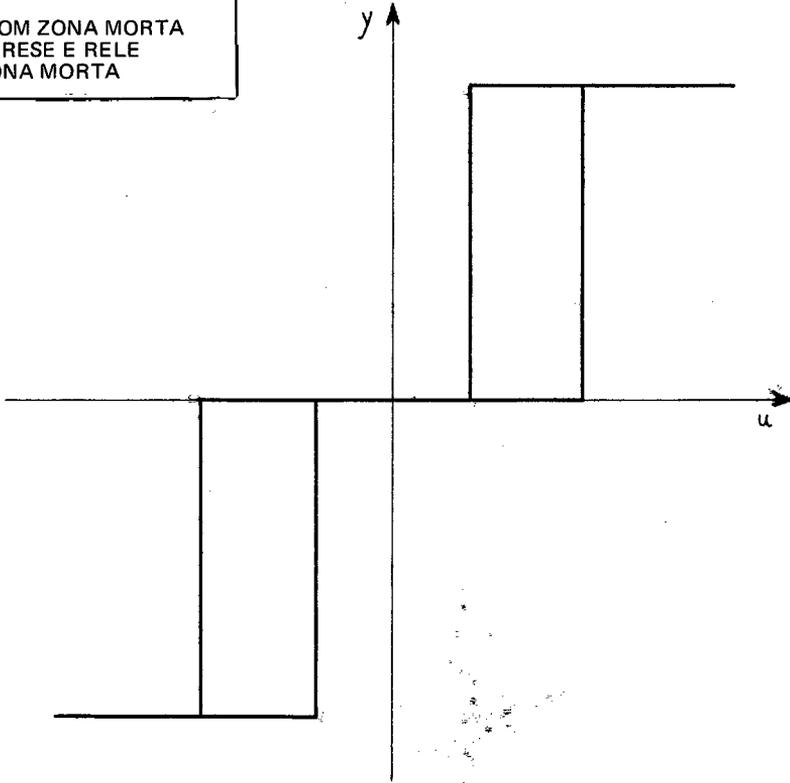
RELE IDEAL E RELE COM  
ZONA MORTA E HISTERESE.



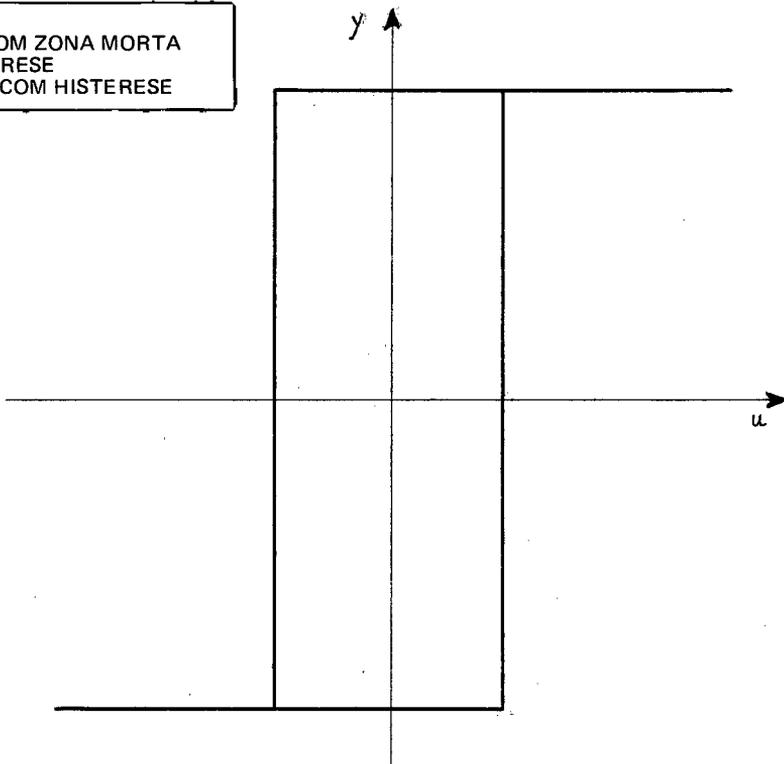
RELE COM HISTERESE  
E RELE COM ZONA MORTA  
E HISTERESE



RELE COM ZONA MORTA  
E HISTERESE E RELE  
COM ZONA MORTA



RELE COM ZONA MORTA  
E HISTERESE  
E RELE COM HISTERESE



C O N C L U S Õ E S

- 1) A maior ou menor eficiência do método de Decomposição Estrutural na identificação de sistemas físicos dinâmicos não-lineares, depende do maior ou menor grau de conhecimento das informações iniciais e de trabalho, a respeito da Família à qual se supõe per - tencer o sistema a identificar.
- 2) O método dá ênfase à precedência do aspecto qualitativo do modelo sobre o quantitativo, transformando o problema da identificação num problema de representação que demanda não apenas a determinação de um modelo do sistema a identificar, mas do modelo que melhor convenha aos objetivos imediatos da identificação.
- 3) Transformando o problema de simples pesquisa de um modelo com propriedades extrínsecas equivalentes às do comportamento externo do sistema, num problema fundamentalmente ligado à determinação de uma estrutura topológica equivalente, o método da Decomposição Estrutural permite por em evidência características físicas intrínsecas ao sistema, possibilitando a sua utilização também em problemas de síntese.
- 4) No caso de sistemas não-lineares com características pertinentes às das cadeias aqui estudadas, as informações de trabalho suficientes para o conhecimento da estrutura de tais cadeias, resultam da aplicação de apenas 4 testes complementares dois a dois.

- 5) Para sistemas físicos não-lineares susceptíveis de apresentar simultaneamente características de não-linearidade com e sem memória, a sua identificação topológica na forma das cadeias estudadas, pode ser obtida com no máximo dois sinais estimulantes distintos.
- 6) A análise dos dois tipos de cadeia objeto de estudo no presente trabalho - cadeia do tipo A e cadeia do tipo B - revela uma simplicidade maior do primeiro caso sobre o segundo em que a saída do primeiro bloco é uma função dos 2 parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  definidores do sinal de entrada.

Ao concluirmos a presente Memória, gostaríamos de chamar a atenção para as possibilidades de prosseguimento do trabalho e sobre o interesse do método de Decomposição Estrutural na Identificação de Sistemas Dinâmicos não-Lineares.

Não são o grupo dos relés oferece campo de análise para o estudo de propriedades estruturais internas e externas capazes de interessar a identificação de sistemas não-lineares. Grupos como o das saturações e das parábolas, por exemplo, possuem importantes propriedades a serem exploradas quando considerados no contexto estrutural da Identificação Topológica.

Por outro lado, outros tipos de conexão entre blo -

cos nas cadeias ou estruturas possíveis, realimentações internas, presença de ruído de medida na entrada e na saída do sistema, eis alguns elementos novos, capazes de proporcionar, se devidamente considerados, uma mais completa aplicação do Método de Decomposição Estrutural.

Enfim, o estabelecimento de algoritmos adaptados à estimação paramétrica em nível de sub-sistema e a adaptação do processo à modelagem de sistemas de diferentes naturezas físicas, completam a gama de linhas de pesquisa que ao nosso ver representam um novo enfoque do importante problema da identificação de sistemas físicos não-lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASTROM,K.J. and EYKHOFF,P. - "Identification in Automatic Control" Automatica, Vol 7, March 1971, pp.123-162.
2. BALAKRISHNAN,A.V. and PETERKA,V. - "Identification in Automatic Control" - Automatica, Vol.5, November 1969, pp.817-829.
3. CANNON,R.H.Jr. - "Dynamics of Phisical Systems", McGraw-Hill , 1967.
4. CUENOD,M. and SAGE,A.P. - "Comparisonn of some Methods used for Process Identification" - Automatica, May 1968, Vol.4, pp.235-269.
5. CYPKIN;j.Z. - "Theorie des Asservissements par Plus ou Moins" - Dunod, 1962.
6. ELGERD, O.I. - "Control Systems Theory" - McGraw-Hill, 1967.
7. EYKHOFF,P., GRINTEN,P.M. van der, KWAKERNAAK,H. and VELTMAN,B. P.Th. - "Systems Modelling and Identification", Third Congress of IFAC - London, June 1966.
8. EYKHOFF,P. - "Process Parameter and State Estimation", Automatica, Vol.4, May 1968, pp.205-233.
9. GIBSON,J.E. - "Nonlinear Automatic Control" - McGraw-Hill, 1967.
- 10.GILLE,J.Ch., DECAULINE,P. et PÉLEGRIN,M. - "Méthodes d'etude

des Systèmes Asservis Non lineaires" - Dunod, 1967.

11. GOLD,E.M. - "System Identification via State Characterization" Automatica, Vol.8, September 1972, pp.621-636.
12. KALMAN,R.E.; FALP,P.L. and ARBIB,A. - "Topics in Mathematical Systems Theory" - McGraw-Hill, 1969.
13. LEVY,A. - "Contribution a l'etude du Classement et de l'Identification Topologique de Systèmes Non-Lineaires a l'aide d'une Méthode de Décomposition Structurelle" - Thèse présentée a L'Université Paul Sabatier de Toulouse, 1971.
14. MINORSKY,N. - "Theory of Nonlinear Control Systems"- McGraw - Hill, 1969.
15. MIRA,C. - "Cours des Systèmes Asservis non lineaires" - Dunod, 1969.
16. NASLIN,P. - "Les Régimes Variables dans les Systèmes Lineaires et Non-lineaires" - Dunod, 1962.
17. PEREIRA,A.L. - "Reflexões sobre a Noção de Coerência Conceitual e sua Importância no Estudo de Alguns Problemas Básicos de uma Teoria Unificada de Sistemas" - COPPE, Jan.1971.
18. SILJAK,D.D. - "Nonlinear Systems - The Parameter Analysis and Design" - John Wiley & Sons, Inc., 1969.
19. WEISS,H.K. - "Analysis of Relay Servomechanism"
20. WEST,J.C. - "Analytical Techniques for Nonlinear Control Systems"

D.van Nostrand Company, 1960.

21. ZADEH,L.A. - "On the Identification Problem" - IRE Transactions on Circuit Theory", Vol, CT-3, N94, Dezembro 1956, pp.277-281.
22. ZADEH, L.A. and POLAK,E. - "System Theory" - McGraw-Hill,196-.

A P Ê N D I C E

Programa para computador IBM-1130 de resposta em função do tempo e correspondentes à aplicação dos testes números 1 e 2 às estruturas estudadas em cadeias dos tipos A e B.

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C   SYST
C   CADEIA SEM REALIMENTACAO, 2 BLOCOS L E 2 BLOCOS NL
SUBROUTINE SYST
DIMENSION UA(800),U1A(800),Y1A(800),Y2A(800),Y3A(800),
5Y4A(800)
COMMON GK1,HT,T11,GK2,T12,OM1,H1,S1,OM2,H2,S2,HG1,SG1,OK1,
2Y1,Y2, AM1,YA1,YSA1,DSA1,K1,HG2,SG2,OK2,AM2,YA2,YSA2,DSA2,
3Y3,Y4, K2,U1A,Y1A,Y2A,Y3A,Y4A,YA,Y1AB,YB,YB1,U,AO,BO,J,UA,
4I,TO,K,JOSC,L,IO,T1
PA1=Y1
PA2=Y2
PA3=Y3
PA4=Y4
Y1AB=1.
CAL1=Y1
CAL2=Y3
P1=U
U1=0.
CALL LUCI1(PA1,P1)
Y1=PA1
CALL MINI1(PA2,PA1)
Y2=PA2
IF (CAL1-Y1)1,2,1
2 IF (CAL2-Y3)1,3,1
1 YA=0.
GO TO 4
3 YA=1.
4 CONTINUE
UA(J)=U
U1A(J)=U1
Y1A(J)=Y1
Y2A(J)=Y2
Y3A(J)=Y3
Y4A(J)=Y4
RETURN
END

```

```

// DUP
*STORE      WS  UA  SYST
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE LUCI1(YZ,YE)
DIMENSION UA(800),U1A(800),Y1A(800),Y2A(800),Y3A(800),
5Y4A(800)
COMMON GK1,HT,T11,GK2,T12,OM1,H1,S1,OM2,H2,S2,HG1,SG1,OK1,
2Y1,Y2, AM1,YA1,YSA1,DSA1,K1,HG2,SG2,OK2,AM2,YA2,YSA2,DSA2,
3Y3,Y4, K2,U1A,Y1A,Y2A,Y3A,Y4A,YA,Y1AB,YB,YB1,U,AO,BO,J,UA,

```

```

    4I,TO,K,JO SC,L,IO,T1
    IF(YZ)1,2,3
    1 IF(YE+S1-H1)4,9,9
    3 IF(YE-S1+H1)2,2,4
    2 IF(YE+S1+H1)8,8,9
    9 IF(YE-S1-H1)5,7,7
    8 YZ=-OM1
    GO TO 4
    7 YZ=OM1
    GO TO 4
    5 YZ=0.
    4 RETURN
    END

// DUP
*STORE      WS  UA  LUCI1
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
    SUBROUTINE LUCI2(YZ,YE)
    DIMENSION UA(800),U1A(800),Y1A(800),Y2A(800),Y3A(800),
    5Y4A(800)
    COMMON GK1,HT,T11,GK2,T12,OM1,H1,S1,OM2,H2,S2,HG1,SG1,OK1,
    2Y1,Y2, AM1,YA1,YSA1,DSA1,K1,HG2,SG2,OK2,AM2,YA2,YSA2,DSA2,
    3Y3,Y4, K2,U1A,Y1A,Y2A,Y3A,Y4A,YA,Y1AB,YB,YB1,U,AO,BO,J,UA,
    4I,TO,K,JO SC,L,IO,T1
    IF(YZ)1,2,3
    1 IF(YE+S2-H2)4,9,9
    3 IF(YE-S2+H2)2,2,4
    2 IF(YE+S2+H2)8,8,9
    9 IF(YE-S2-H2)5,7,7
    8 YZ=-OM2
    GO TO 4
    7 YZ=OM2
    GO TO 4
    5 YZ=0.
    4 RETURN
    END

// DUP
*STORE      WS  UA  LUCI2
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
    SUBROUTINE MINI1(YZ,YE)
    DIMENSION UA(800),U1A(800),Y1A(800),Y2A(800),Y3A(800),
    5Y4A(800)
    COMMON GK1,HT,T11,GK2,T12,OM1,H1,S1,OM2,H2,S2,HG1,SG1,OK1,
    2Y1,Y2, AM1,YA1,YSA1,DSA1,K1,HG2,SG2,OK2,AM2,YA2,YSA2,DSA2,
    3Y3,Y4, K2,U1A,Y1A,Y2A,Y3A,Y4A,YA,Y1AB,YB,YB1,U,AO,BO,J,UA,
    4I,TO,K,JO SC,L,IO,T1
    YZ=(YE*GK1*HT)/(HT+T11)+YZ/(HT+T12)

```

```

        RETURN
        END
// DUP
*STORE      WS  UA  MINI1
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
        SUBROUTINE MINI2(YZ, YE)
        DIMENSION UA(800), U1A(800), Y1A(800), Y2A(800), Y3A(800),
        5Y4A(800)
        COMMON GK1, HT, T11, GK2, T12, OM1, H1, S1, OM2, H2, S2, HG1, SG1, OK1,
        2Y1, Y2, AM1, YA1, YSA1, DSA1, K1, HG2, SG2, OK2, AM2, YA2, YSA2, DSA2,
        3Y3, Y4, K2, U1A, Y1A, Y2A, Y3A, Y4A, YA, Y1AB, YB, YB1, U, AO, BO, J, UA,
        4I, TO, K, JOISC, L, IO, T1
        YZ=(YE*GK2*HT)/(HT+T11)+YZ/(HT+T12)
        RETURN
        END
// DUP
*STORE      WS  UA  MINI2
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C          SOUS PROGRAMME TRACE
C          TRAC2
        SUBROUTINE TRAC2
        DIMENSION UA(800), U1A(800), Y1A(800), Y2A(800), Y3A(800),
        5Y4A(800)
        COMMON GK1, HT, T11, GK2, T12, OM1, H1, S1, OM2, H2, S2, HG1, SG1, OK1,
        2Y1, Y2, AM1, YA1, YSA1, DSA1, K1, HG2, SG2, OK2, AM2, YA2, YSA2, DSA2,
        3Y3, Y4, K2, U1A, Y1A, Y2A, Y3A, Y4A, YA, Y1AB, YB, YB1, U, AO, BO, J, UA,
        4I, TO, K, JOISC, L, IO, T1
        CALL FCHAR(15., -1., .2, .15, -1.571)
        WRITE(7, 84)
84  FORMAT('RELE DE ZONA MORTA E RELE COM ZONA MORTA E HISTERE
8SE')
        CALL FCHAR(13., -1.9, .2, .15, -1.571)
        WRITE(7, 85)
85  FORMAT('CADEIA TIPO A')
        CALL FCHAR(11., -1.9, .2, .15, -1.571)
        WRITE(7, 86) AO, BO
86  FORMAT(3HAD=, F4.0, 3HBD=, F4.0)
        RETURN
        END
// DUP
*STORE      WS  UA  TRAC2
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C          ECR12
        SUBROUTINE ECR12

```

```

WRITE(5,80)
80 FORMAT(18X,'RELE DE ZONA MORTA E RELE COM ZONA MORTA E HISTERESE')
WRITE(5,81)
81 FORMAT(35X,'CADEIA TIPO A')
RETURN
END

// DUP
*STORE      WS  UA  ECR12
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
SUBROUTINE PARA
DIMENSION UA(800),U1A(800),Y1A(800),Y2A(800),Y3A(800),
5Y4A(800)
DIMENSION TB(80),UB(80),U1B(80),Y1B(80),Y2B(80),Y3B(80),
6Y4B(80)
COMMON GK1,HT,T11,GK2,T12,OM1,H1,S1,OM2,H2,S2,HG1,SG1,OK1,
2Y1,Y2, AM1,YA1,YSA1,DSA1,K1,HG2,SG2,OK2,AM2,YA2,YSA2,DSA2,
3Y3,Y4, K2,U1A,Y1A,Y2A,Y3A,Y4A,YA,Y1AB,YB,YB1,U,AO,BO,J,UA,
4I,TO,K,JOSC,L,IO,TI
L=0
J=0
U=0.
U1=0.
Y1=0.
Y2=0.
Y3=0.
Y4=0.
JOSC=0
Y1AB=0.
C RESPOSTA TEMPORAL*CALCULO DAS CONDICAOES INICIAIS
K=10
HT=1.
U=AO
DO 70 J=1,4
DO 71 I=1,K
CALL SYST
71 CONTINUE
HT=HT/10.
70 K=K+10
C RESOLUCAO RESPOSTA TEMPORAL
HT=.01
T=-HT
DO 62 J=1,500
T=T+HT
C GERACAO DA ENTRADA
IF(X-T)2,1,1
1 U=AO
GOTO 3
2 U=BO

```

```

3 CALL SYST
  IF(YA-Y1AB)60,62,60
60 JOSC=JOSC+1
  TB(JOSC)=T
  UB(JOSC)=U
  U1B(JOSC)=U1A(J)
  Y1B(JOSC)=Y1A(J)
  Y2B(JOSC)=Y2A(J)
  Y3B(JOSC)=Y3A(J)
  Y4B(JOSC)=Y4A(J)
  IF(JOSC-10)62,64,64
62 CONTINUE
C  IMPRESSAO DOS RESULTADOS
64 WRITE(5,65)
65 FORMAT(1H1,'          RESPOSTA TEMPORAL DO SISTEMA  TO=',
7F5.2)
  CALL ECR12
  WRITE(5,90)
  I=0
  T=T/HT
  K=IFIX(T)
  T=0.
  DO 67 J=1,K
  WRITE(5,91)T,UA(J),U1A(J),Y1A(J),Y2A(J),Y3A(J),Y4A(J)
67 T=T+HT
  IF(JOSC)92,93,92
92 WRITE(5,69)
69 FORMAT(1H1,'VALOR DAS VARIAVEIS DO SISTEMA NOS INSTANTES
8DE COMUTACAO')
  CALL ECR12
  WRITE(5,90)
90 FORMAT('*      T      *      U      *      U1      *      Y1      *      Y2      *
5      Y3      *      Y4      *')
  WRITE(5,91)(TB(J),UB(J),U1B(J),Y1B(J),Y2B(J),Y3B(J),
9Y4B(J),J=1,JOSC)
91 FORMAT('* ',F9.2,'*',F9.5,'*',F9.5,'*',F9.5,'*',F9.5,'*',F9.5,, '*',
1F9.5)
C  TRACADO DOS EIXOS
93 CALL SCALF(.2,2.,-110.,+.5)
  CALL FGRID(0,-110.,.0,5.,24)
  XN=0.
  DO 51 L=1,6
  CALL FGRID(3,XN,.0,1.,5)
  XN=XN-.5
  CALL FCHAR(XN-2.5,-1.0,.2,.15,-1.571)
  WRITE(7,50)
50 FORMAT('+1          +2          +3          +4          +5 SEC')
51 XN=XN-19.5
  CALL FCHAR(-91.,.4,.2,.15,-1.571)
  WRITE(7,52)

```

```

52 FORMAT('+10 Y4')
   CALL FCHAR(-71.,.4,.2,.15,-1.571)
   WRITE(7,53)
53 FORMAT('+10 Y3')
   CALL FCHAR(-51.,.4,.2,.15,-1.571)
   WRITE(7,54)
54 FORMAT('+10 Y2')
   CALL FCHAR(-31.,.4,.2,.15,-1.571)
   WRITE(7,55)
55 FORMAT('+10 Y1')
   CALL FCHAR(-11.,.4,.2,.15,-1.571)
   WRITE(7,56)
56 FORMAT('+10 U1')
   CALL FCHAR(9.,.4,.2,.15,-1.571)
   WRITE(7,57)
57 FORMAT('+10 U')
   CALL FCHAR(17.,-1.5,.2,.15,-1.571)
   WRITE(7,83)
83 FORMAT(2X,'RESPOSTA TEMPORAL')
   CALL TRAC2
C   TRACADO DAS CURVAS DE RESPOSTA TEMPORAL
   CALL FPLOT(-1,0.,0.)
   T=0.
   DO 72 J=1,K
   CALL FPLOT(-2,UA(J),-T)
72 T=T+HT
   T=0.
   CALL FPLOT(1,-20.,09)
   DO 73 J=1,K
   CALL FPLOT(-2,U1A(J)-20.,-T)
73 T=T+HT
   T=0.
   CALL FPLOT(1,-40.,0.)
   DO 74 J=1,K
   CALL FPLOT(-2,Y1A(J)-40.,-T)
74 T=T+HT
   T=0.
   CALL FPLOT(1,-60.,0.)
   DO 75 J=1,K
   CALL FPLOT(-2,Y2A(J)-60.,-T)
75 T=T+HT
   T=0.
   CALL FPLOT(1,-80.,0.)
   DO 76 J=1,K
   CALL FPLOT(-2,Y3A(J)-80.,-T)
76 T=T+HT
   T=0.
   CALL FPLOT(1,-100.,0.)
   DO 77 J=1,K
   CALL FPLOT(-2,Y4A(J)-100.,-T)

```

```
77 T=T+HT
   RETURN
   END
// DUP
  STORE      WS  UA  PARA
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(1403 PRINTER,PLOTTER)
  DIMENSION UA(800),U1A(800),Y1A(800),Y2A(800),Y3A(800),
  5Y4A(800)
  COMMON GK1,HT,T11,GK2,T12,OM1,H1,S1,OM2,H2,S2,HG1,SG1,OK1,
  2Y1,Y2, AM1,YA1,YSA1,DSA1,K1,HG2,SG2,OK2,AM2,YA2,YSA2,DSA2,
  3Y3,Y4, K2,U1A,Y1A,Y2A,Y3A,Y4A,YA,Y1AB,YB,YB1,U,AO,BO,J,UA,
  4I,TO,K,JDSC,L,IO,T1
  OM1=5.
  OM2=5.
  S1=2.
  H1=0.
  S2=2.
  '2=1.
  GK1=1.5
  T11=1.
  GK2=1.5
  T12=1.
  AO=-10.
  BO=10.
  TO=1.9
  CALL PARA
  CONTINUE
  CALL EXIT
  END
```