D O M Í N I O S D E E S T A B I L I D A D E

A S S I N T Ó T I C A

SUA DETERMINAÇÃO UTILIZANDO O SEGUNDO MÉTODO DE LIAPUNOV

LUIZ GONZAGA DE SOUZA FONSECA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Demetrio Alonso Ribeiro
Presidente

Hans Helmut Zürn

Carlos Augusto Bettinger

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JANEIRO DE 1971

À Ana Maria e Guilherme

À meus pais e irmãos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Demétrio Alonso Ribeiro pelo estímulo e ajuda durante o tempo em que trabalhamos - juntos. Êste agradecimento é extensivo aos professôres e colegas da COPPE que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho, em particular ao professor José Lucas Mourão Rangel Netto e ao colega José Paulo Iankovski da Silveira.

Sou grato de um modo muito especial à minha espôsa Ana Maria pela paciência, dedicação e incentivo.

Êste trabalho foi realizado graças ao apôio financeiro recebido do BNDE, CAPES e CNPq.

SINOPSE

Neste trabalho apresentamos métodos de determinação de domínios de estabilidade assintótica da solução trivial de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, em geral não lineares, utilizando o segundo método - ou método direto de Liapunov.

Nos primeiros capítulos são dados um pequeno histórico, um sentido físico para o tratamento matemático e a utilização das formas quadráticas como função de Liapunov.

No capítulo 4 é feita uma aplicação da teoria dos - sistemas lineares associados aos sistemas autônomos, para a determinação de domínios elipsoidais e esféricos de estabilidade assintótica. É fornecido ainda um procedimento lógico para o critério dado.

Nos capítulos seguintes são dados os métodos de Schultz-Gibson e o de Zubov. O primeiro usa o gradiente da função de Liapunov e, através de uma integral de linha, en - contra-se a função de Liapunov. O segundo utiliza uma equação diferencial parcial que, se tem solução em forma fechada, permite a determinação do domínio exato de estabilidade assintótica. Ambos, bem como o método do cap.4, permitem, - quando for o caso, conclusões sôbre estabilidade assintótica global.

Tôdas as noções julgadas essenciais são introduzi - das no sentido de se conseguir um trabalho auto contido - tanto quanto possível.

ABSTRACT

This work presents some methods to determine the domains of asyntotical stability of the trivial solution of first-order, non-linear, differential equations when Liapunov' s second (direct) method is used.

The first three chapters are introductory and present an historical review, the use of quadratic forms as Liapunov' s functions, and a physical interpretation of the mathematical treatment

Chapter 4 presents an application of Linear System Theory to autonomous systems, and the determination of the ellipticals and sphericals domains of stability. A logical procedure of the criterium is also presented.

The following chapters introduce the Schultz - Gibson's and Zubov' s methods. The first uses a line integral of the gradient of Liapunov's function. The second uses a partial differential equation that, as long as it has a closed-form solution, allows the determination os the exact domain of asyntotic stability.

All the concepts considered essentials are introduced in order to obtain a self- contained work as such as possible.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3 - As formas quadráticas como [illegible] função de Liapunov

CAPÍTULO 4 - Aplicação da teoria dos sistemas lineares associados aos sistemas autônomos

NOMENCLATURA

x - vetor do espaço R^n de componentes $x_1, \ldots, x_n$

x' - vetor x transposto

$f(x)$ - função vetorial de componentes $f_1, \ldots, f_n$

t - tempo

$\dot{x}$ - $\frac{dx}{dt}$

$\{ \}$ - conjunto

$\| \|$ - norma

$| |$ - determinante

$[ ]$ - matriz

i, j, k - índices e se não especificado valem $1, 2, \ldots, n$

$\forall$ - para todo

$\in$ - pertence

$\subset$ - contido

A - Domínio de estabilidade assintótica

A, B, Q - matrizes constantes $n \times n$

$V(x,t)$ - função de Liapunov para sistemas não autônomos

$v(x)$. função de Liapunov para sistemas autônomos

λ, ξ - auto-valores

I - matriz identidade

Λ - matriz diagonal

D, E, G - conjuntos abertos e conexos

$h(v,G)$ - número real positivo

$\mathcal{G}(v,G)$ - Domínio de estabilidade assintótica

$U(z)$ - matriz da família de sistemas associados

$\{0\}$ - conjunto cujo único elemento é a origem

∇v - gradiente de v

$\bar{A}$ - aderência de A

$\bar{A} \setminus A$ - fronteira de A

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES

1.1- Introdução

Històricamente o problema da estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema surgiu na Mecânica em 1788 com Lagrange e seu Mechanique Analytique. A teoria de estabilidade de Lagrange foi colocada sôbre firmes bases matemáticas por Lejeune- Dirichlet e a prova, publicada no Crelle's Journal em 1846, ficou conhecida como teorema de Dirichlet. No ano de 1892 foram publicados os trabalhos de Liapunov [1], Poincaré [2] e Routh [3].

Um pouco antes e durante a segunda guerra mundial as necessidades militares exerceram um notável estímulo nas pesquisas em Sistemas de Contrôle Automático (Nyquist [4], Bode [5], Nichols [6], Evans [7]). Mas a maioria dos métodos desenvolvidos era aplicável apenas a sistemas lineares- enquanto que a análise dos sistemas não lineares foi relegada a um segundo plano pelas dificuldades que apresentava.

Em 1950 Kochenburger [8] publicou um artigo apresentando o método das funções descritivas que durante muito tempo se constituiu, no ocidente, na única ferramenta disponível para a análise e síntese de servo-mecanismos não lineares.

Na Russia eram desenvolvidos métodos de análise de sistemas de contrôle não lineares baseados no trabalho de Liapunov [1] que fornecia condições suficientes para estabilidade. Em 1938 Persidskii [9] atacou o problema da determinação de condições necessárias, no que foi seguido por Malkin, Massera e outros, e em 1945 Lur'e [10] utilizou os métodos de Liapunov na análise de servo-mecanismos não lineares, sem que isto despertasse curiosidade no ocidente.

A partir de 1953 ressurgiu o interêsse pelos métodos diretos* de análise da estabilidade de sistemas não lineares.

Intuitivamente sabemos que estabilidade significa a aptidão a recuperar o equilíbrio após uma perturbação passageira. Quando um sistema é descrito por equações diferenciais ordinárias lineares a volta ou não ao equilíbrio independe da magnitude da perturbação o que não acontece necessàriamente nos sistemas não lineares. Daí ser importante na análise da estabilidade de sistemas não lineares conhecer até que ponto o sistema pode ser perturbado conservando a sua tendência a recuperar o equilíbrio perdido.

No presente trabalho expomos e criticamos vários métodos para determinar o comportamento assintótico de sistemas descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (não necessàriamente lineares). Para tanto precisamos definir rigorosamente os conceitos básicos da teoria da estabilidade, o que será feito nos parágrafos seguintes.

1.2- Definições básicas do problema da estabilidade

Uma equação diferencial ordinária de ordem n

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)} \ldots \dot{x},\ x,\ t)$$

pode ser reduzida a um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com a introdução das variáveis [11]

$$x_1 = x\ ,\quad x_2 = \dot{x}\ ,\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}$$

---

* - São chamados métodos diretos aqueles que não pressupõem a resolução das equações que descrevem a evolução do sistema.

Seja o sistema

$$\dot{x} = f(\ x,\ u(t),\ t) \qquad (1.2.1)$$

$$x(t_o) = x_o$$

onde $x \in R^n$, $u \in S([t_o, +\infty), R^m)$ onde

$$S([t_o, +\infty), R^m) = \{u /\ u : [t_o,\ \infty) \to R^m,\ u \text{ seccionalmente cont.}\}$$

e

$$f : R^n \times S([t_o, +\infty), R^m) \times [t_o,\ \infty) \longrightarrow R^n$$

satisfaz as condições para existência, unicidade e prolongabilidade até $+\infty$ das soluções da equação (1.2.1) quaisquer que sejam $t_o \in R$ e $x_o \in R^n$.

Se em (1.2.1) $u = 0$ o sistema é dito Livre (não forçado) e sua equação assume a forma

$$\dot{x} = f(\ x,\ t) \qquad (1.2.2)$$

No caso de sistemas livres admitiremos, além da existência, unicidade e prolongabilidade das soluções, que a função de transição [12]

$$\varphi : R \times R^n \times R \to R^n$$
$$(t; x_o, t_o) \mapsto x = \varphi(t; x_o, t_o)$$

que no caso de sistemas físicos é definida para $t \geq t_o$ [13], é contínua e diferenciável com derivadas parciais contínuas.

Existem casos em que o segundo membro da equação - (1.21) não depende explicitamente de t e (1.2.1) pode ser escrita na forma

$$\dot{x} = f(\ x,\ u(t)) \tag{1.2.3}$$

e um sistema descrito por uma equação deste tipo é chamado invariante no tempo ou estacionário.

Um sistema livre e estacionário é chamado autônomo e é descrito por uma equação do tipo

$$\dot{x} = f(\ x) \tag{1.2.4}$$

No caso de um sistema autônomo

$$\varphi(t;x_o,t_o) = \varphi(t+\tau\ ;x_o,t_o+\tau) \tag{1.2.5}$$

$$\forall\ t_o \in R,\ \forall\ t \geq t_o,\ \forall\ x_o \in R^n \text{ e } \forall \tau \geq 0$$

Em virtude desta proposição fixaremos $t_o = 0$ quando estivermos analisando sistemas autônomos e escreveremos *

$$\varphi(t;x_o)$$

em lugar de escrever

$$\varphi(t;x_o,0)$$

A cada solução de (1.2.1) pode ser associada uma curva no R^{n+1} chamada movimento [15] . No caso de sistemas autônomos associamos a cada solução uma curva parametrizada no R^n chamada trajetória de fase ou curva de fase. Explìcitamente

$$\gamma_{x_o} = \left\{ x(t) \in R^n \ /\ x = \varphi(t;x_o) \right\} \tag{1.2.6}$$

* - Lembremos que $\varphi(0;x_o) = x_o$ [14]

Um ponto $x_o \in R^n$ divide uma trajetória que o contenha (que passe por êle) em duas semi-trajetórias [15]

$$x_-(t;x_o) = \left\{ x(t;x_o) \;/\; t_o \geq t > -\infty \right\}$$

e

$$x_+(t;x_o) = \left\{ x(t;x_o) \;/\; +\infty > t \geq t_o \right\}$$

Podemos definir axiomàticamente sistema dinâmico a partir de certas condições sôbre a função de transição independentemente das equações diferenciais que lhe deram origem.

Def.: Sistema dinâmico é uma função

$$\varphi : R \times R^n \times R \rightarrow R^n$$

que satisfaz

a - $\forall\, x_o < K,\ \ K < \infty,\ \varphi(t;x_o)$ são funções definidas $\forall\, t \in (-\infty, \infty)$ (1.2.7)

b - $\varphi(0;x_o) = x_o$ (1.2.8)

c - $\varphi(t_2;\, x(t_1;\, x_o)) = \varphi(t_1 + t_2; x_o)\ ,\forall\, t_1,\ t_2$ (1.2.9)

Para que (1.2.4) descreva um sistema dinâmico (para que a função de transição da equação (1.2.4) satisfaça os axiomas (1.2.7),(1.2.8) e (1.2.9))é suficiente que a função f no segundo membro de (1.2.4) seja limitada. Isto assegura a existência da solução de (1.2.4) para $t \geq t_o$, $t_o \in (-\infty, \infty)$. Se êste não é o caso podemos substituir em (1.2.4) a variável independente t pela variável

$$s = \int_{t_o}^{t} \sqrt{1 + \| f(x(t)) \|^2}\,.\, dt \qquad (1.2.10)$$

Assim obtemos a equação [15,16]

$$\frac{dx}{ds} = \frac{f(x)}{\sqrt{1+\|f(x)\|^2}} \qquad (1.2.11)$$

cujas soluções são definidas para todo $t \in R$ e apresentam o mesmo comportamento assintótico de (1.2.4)

A equação (1.2.1), bem como o sistema que ela representa, é linear se f é uma função linear de x e de u.

Os valores de x que anulam idênticamente o segundo membro de (1.2.2) são chamados estados de equilíbrio, pontos críticos ou pontos de equilíbrio. Em outras palavras

$$\text{"}x_e \text{ é ponto de equilíbrio de (1.2.2)"} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\ t \geq t_o)(\ f(x_e,t) = 0)$$

Um ponto de equilíbrio é isolado se existe uma vizinhança do mesmo que não contém nenhum outro ponto de equilíbrio [31].

Um sistema linear não pode ter mais do que um ponto de equilíbrio isòlado, enquanto que os sistemas não lineares podem apresentar vários.

Estudaremos sempre a estabilidade de pontos de equilíbrios isolados e a análise para cada um dêles deve ser feita separadamente.

Na equação (1.2.1) se considerarmos a função u fixada (p/ exemplo $u = \bar{u}$) podemos escrever

$$\dot{x} = g(x,t) \qquad (1.2.12)$$

ao invés de

$$\dot{x} = f(x,\bar{u}(t),t) \qquad (1.2.13)$$

Neste caso estamos considerando a entrada como fazendo parte da dinâmica do sistema.

A cada $\bar{u}$ em (1.2.13) corresponde uma função g em (1.2.12) e variando $\bar{u}$ podemos ter diferentes comportamentos assintóticos. Se limitarmos as entradas à classe das entradas - constantes reduziremos as equações dos sistemas estacionários à forma da equação (1.2.4) (sistemas autônomos).

1.3- A idéia do segundo método ou método direto de Liapunov

O trabalho original de Liapunov [1] contém dois métodos para a análise da estabilidade da solução trivial de - sistemas livres e homogêneos conhecidos na literatura como o primeiro e segundo métodos de Liapunov.

O primeiro método é aplicado quando o segundo membro de (1.2.2) tem a forma

$$f(x,t) = A(t)x + q(x,t) \qquad (1.3.1)$$

onde A(t) é uma matriz nxn e as componentes de q(x,t) são da forma

$$q_j(x,t) = \sum_{m_1+\dots+m_n > 1} p_j^{(m_1\dots m_n)}(t).\, x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \,,$$

$j=1,\dots n$

em alguma vizinhança da origem de R^n, onde as funções $p_j^{(m_1\dots m_n)}$ para $1 \leq j \leq n$ e $m_1+m_2+\dots+m_n > 1$ são limitadas e seccionalmente contínuas em $[t_o, \infty)$ qualquer que seja t_o e R [17].

Se o segundo membro de (1.2.2) for da forma (1.3.1) a estabilidade da solução trivial do sistema

$$\dot{x} = A(t)x + q(x,t) \qquad (1.3.1)$$

pode ser determinada a partir do sistema

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.3.3}$$

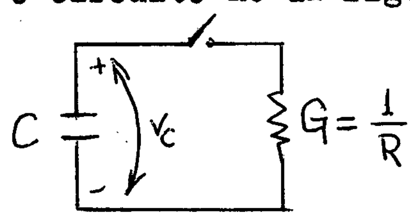
chamada aproximação linear de (1.3.1), desde que os pontos de equilíbrio de (1.3.3) sejam isolados [1,17,18] .

O segundo método utiliza funções (que são generalizações da função energia total no caso de sistema físico) cujas derivadas ao longo das trajetórias de (1.2.2) dão informação sôbre a estabilidade do sistema. Êste método fornece condições suficientes para a estabilidade.

Para ilustração consideremos o exemplo 1.3.1.

Exemplo 1.3.1

Seja o circuito RC da fig. 1.3.1



descrito pela equação diferencial

$$c\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{R}v_c \tag{1.3.4}$$

A equação (1.3.4) tem como solução

$$v_c(t) = v_c(t_o)\exp(-\frac{t}{RC}) \tag{1.3.5}$$

Podemos concluir por inspeção que o sistema é estável. Consideremos no entanto a energia amarzenada no capacitor

$$E_c = \frac{1}{2} C v_c^2 \qquad (1.3.6)$$

e calculemos

$$\dot{E}_c = C\, \dot{v}_c v_c = - \frac{2}{RC} E_c < 0 \qquad (1.3.7)$$

A energia do sistema é sempre positiva e sua derivada no caso é negativa. Isto indica que a energia é decrescente. Logo o sistema tende a um equilíbrio estável.

O segundo método de Liapunov utiliza uma generalização da análise acima. Do ponto de vista matemático era lícito tentar a aplicação de funções mais gerais não ficando restrita a análise à função que dá medida da energia do sistema. Neste sentido Liapunov mostrou que se podem encontrar funções definidas positivas ou negativas, cujas derivadas ao longo das trajetórias do sistema, como em (1.3.7), sejam definidas e de sinal contrário à função considerada, além de provar a suficiência das condições acima.

1.4- Comentários

O segundo método de Liapunov é poderoso e sua grande vantagem é que as conclusões sôbre a estabilidade da solução trivial de um sistema podem ser tiradas diretamente dos segundos membros de suas equações diferenciais, sem necessidade do conhecimento explícito das suas soluções.

Êste método é de interêsse principalmente nos sistemas não lineares, quando se torna difícil a obtenção das soluções e quando aqueles métodos clássicos de Nyquist, etc., deixam de ser aplicáveis.

A grande dificuldade porém reside na procura de uma função com as propriedades acima. Infelizmente ainda não pode mos contar com um procedimento geral que forneça em qualquer caso uma função de Liapunov. Contudo existem métodos aplicáveis a certos tipos de sistemas que fornecem em geral uma função de Liapunov. Trataremos destes métodos mais adiante. Antes porém se fazem necessárias algumas definições e teoremas que damos a seguir.

---oOo---

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÕES BÁSICAS DO PROBLEMA DA ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

2.1- Introdução

Êste capítulo contém um resumo dos conceitos de estabilidade e os principais teoremas de Liapunov. Baseado na idéia do segundo método dada antes vamos definir as funções de Liapunov de modo geral e depois tecer alguns comentários sôbre as funções usadas no estudo da estabilidade da solução trivial de sistemas autônomos.

Seja um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{y} = g(y,t) \tag{2.1.1}$$

onde $y \in R^n$, $t \geq t_0$ e g contínua de tal modo que se possa garantir a existência, unicidade e prolongabilidade até $+\infty$, dado y_0, das soluções.

2.2- Movimentos perturbados e não perturbados

Consideremos um movimento

$$\Gamma_{(y_0,t_0)} = \left\{ (y(t),t) \in R^{n+1} \;/\; y(t) = \varphi(t;y_0,t_0),\ t \geq t_0 \right\} \tag{2.2.1}$$

onde φ é a função de transição de (2.1.1).

Vamos considerar uma vizinhança V_{y_o} de $y_o \in R^n$ e a família

$$(\Gamma(y,t_o))_{y \in V_{y_o}}. \tag{2.2.2}$$

O movimento

$$\Gamma(y_o,t_o) \tag{2.2.3}$$

é chamado movimento não perturbado e os membros da família - (2.2.2) diferentes de (2.2.3) são chamados movimentos perturbados.

Def.: Estabilidade de um movimento não perturbado

O movimento (2.2.3) é estável no sentido de Liapunov se

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \geq t_o)(\| y-y_o\| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t;y,t_o) - \varphi(t;y_o,t_o)\| < \epsilon)$$

(2.2.4)

Def.: Instabilidade de um movimento não perturbado

O movimento (2.2.3) é instável no sentido de Liapunov se

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists t_1 \geq t_o)(\| y-y_o\| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t_1;y,t_o) - (t_1;y_o,t_o)\| \geq \epsilon)$$

(2.2.5)

Obs.: As noções de estabilidade e instabilidade segundo Liapunov não são contrárias.

Consideremos a equação (2.1.1) e o movimento

(2.2.1). Façamos

$$x(t)=y(t)-\varphi(t;y_0,t_0)\ ,\quad \forall\ t\geq t_0 \tag{2.2.6}$$

Então $$y(t)=x(t)+\varphi(t;y_0,t_0)\ ,\quad \forall\ t\geq t_0 \tag{2.2.7}$$

Derivando obtemos

$$\dot{y}=\dot{x}(t)+\dot{\varphi}(t;y_0,t_0)=g(x(t)+\varphi(t;y_0,t_0),t)$$

$$\forall\ t\geq t_0 \tag{2.2.8}$$

Derivando (2.2.6) e substituindo (2.2.8) em (2.2.6) vem

$$\dot{x}(t)=g(x(t)+\varphi(t;y_0,t_0),t)-\dot{\varphi}(t;y_0,t_0)$$

$$\forall\ t\geq t_0 \tag{2.2.9}$$

que tem a forma da equação (1.2.2) onde

$$f(x(t),t)=g(x(t)+\varphi(t;y_0,t_0),t)-\dot{\varphi}(t;y_0,t_0)$$

$$\forall\ t\geq t_0 \tag{2.2.10}$$

e $$f(0,t)=g(\varphi(t;y_0,t_0))-\dot{\varphi}(t;y_0,t_0)=0$$

$$\forall\ t\geq t_0 \tag{2.2.11}$$

A equação (2.2.9) traduz a evolução das perturbações do movimento não perturbado (2.2.1). Com a mudança de variáveis (2.2.6) o movimento (2.2.3) é reduzido à origem $x = 0$ e as perturbações, bem como sua evolução, passam a ser estudadas por um sistema do tipo (1.2.2).

Como os métodos disponíveis para a análise da estabilidade de sistemas não lineares estudam a estabilidade da solução trivial de um sistema livre e homogêneo, se quizermos estudar a estabilidade de um movimento qualquer devemos fazer a mudança de variáveis como em (2.2.6).

Desta forma consideraremos apenas os sistemas regidos por equações na forma (1.2.2), supondo ainda que

$$f(o,t) = 0 \; , \; \forall \; t \geq t_o \tag{2.2.12}$$

Diremos neste caso que o sistema pertence à classe $\mathcal{E}(t)$, se é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma

$$\dot{x} = f\,(x,t)$$

$$f(0,t) = 0 \quad , \quad \forall \; t \geq t_o \tag{2.2.13}$$

2.3- Definições de estabilidade para sistemas livres

Def.: Estabilidade da solução trivial

A solução trivial da equação (2.2.13) é estável no sentido de Liapunov se para todo t_o e R o movimento

$$\Gamma_{(0,t_o)} = \left\{ (x(t),t) \text{ e } R^{n+1} \;/\; x=0, \; t \geq t_o \right\}$$

é estável no sentido de Liapunov.

Em outras palavras

$$(\forall \; t_o \text{ e } R)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|x-x_o\| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \varphi(t;x_o,t_o) - \varphi(t;x,t_o) \| < \epsilon) \tag{2.3.1}$$

Notemos que δ depende de ϵ e de t_o.

Def.: Estabilidade assintótica da solução trivial

A solução trivial da equação (2.2.13) é assintòticamente estável no sentido de Liapunov se $\Gamma(0,t_0)$

i) é estável no sentido de Liapunov

ii) $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t;x_0,t_0)\| = 0$

Def.: Instabilidade da solução trivial

A solução trivial da equação (2.2.13) é instável no sentido de Liapunov se para todo $t_0 \in R$ o movimento

$$\Gamma_{(0,t_0)} = \{(x(t),t) \in R^{n+1} \;/\; x(t) = 0,\; t \geqslant t_0\}$$

é instável no sentido de Liapunov.

2.4- Domínios de estabilidade assintótica

Def.: Domínio exato de estabilidade assintótica

O conjunto

$$A_{t_0} = \{ x_0 \in R^n \;/\; \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t;x_0,t_0)\| = 0 \} \quad (2.4.1)$$

é chamado domínio exato de estabilidade assintótica da solução trivial da equação (2.2.13) em relação a t_0.

Se $\forall\; t_1, t_2 \in R \Rightarrow A_{t_1} = A_{t_2}$

diremos que $A = A_{t_1} = A_{t_2}$ é um domínio de estabilidade assintótica de (1.2.4), que é o caso dos sistemas autônomos.

Def.: Domínio de estabilidade assintótica

A um subconjunto S aberto e simplesmente conexo de A que contenha a origem de R^n chamaremos de domínio de estabilidade assintótica da solução trivial de (2.2.13).

Quando $A = R^n$ dizemos que a origem é um ponto de equilíbrio assintòticamente estável globalmente, ou que a solução trivial do sistema (2.2.13) é assintòticamente estável globalmente.

As palavras domínios e região têm significado variado de autor para autor. No presente trabalho usaremos a convenção

Domínio = Conjunto aberto e simplesmente conexo,
Região = Conjunto fechado e simplesmente conexo.

Do que foi visto anteriormente não resulta óbvio que A_{t_0} definido em (2.4.1) seja um domínio. Erugin, citado por Zubov [16], demonstrou que os conjuntos A são realmente domínios e além disso que a fronteira de A é a reunião de uma família de trajetórias do sistema.

2.5- Funções definidas

Def.: Função definida positiva (negativa)

Uma função

$$V : R^{n+1} \to R$$
$$(x,t) \mapsto V(x,t)$$

é dita definida positiva (negativa) se

$$\text{i) } V(x,t) > 0 \quad (< 0), \quad \forall\, x \neq 0, \forall\, t \geq t_0 \qquad (2.5.1)$$
$$\text{ii) } V(0,t) = 0, \forall\, t \geq t_0 \qquad (2.5.2)$$

Def.: Função semi-definida positiva (negativa)

Uma função

$$V : R^{n+1} \to R$$
$$(x,t) \mapsto V(x,t)$$

é dita semi-definida positiva (negativa) se

$$\text{i) } V(x,t) \geq 0 \quad (\leq 0), \; x \neq 0, \forall t \geq t_o \qquad (2.5.3)$$

$$\text{ii) } V(x,t) = 0, \forall t \geq t_o \qquad (2.5.4)$$

Def.: Função indefinida

Se $V: R^{n+1} \to R$ não é semi-definida positiva nem semi-definida negativa a V é dita indefinida. Em outras palavras

$$(\exists x_1, x_2 \in R^n)(\exists t_1, t_2 \geq t_o)(V(x_1,t_1)>0, \; V(x_2,t_2)<0) \qquad (2.5.6)$$

Def.: Limite superior infinitesimal

Dizemos que $V : R^{n+1} \to R$ admite um limite superior infinitesimal se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ arbitràriamente pequeno tal que, se $\|x\| < \delta$ então temos

$$|V(x,t)| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_o \qquad (2.5.7)$$

Qualquer função que anule na origem admite um limite superior infinitesimal [19].

Def.: Conjunto L (φ,h)

Seja $\varphi : R^n \to R$, definida positiva e $h \in R^+$. Definimos

$$L(\varphi,h) = \{ x \,/\, x \in R^n \wedge \varphi(x) \leq h \} \qquad (2.5.8)$$

Def.: Função-π

Dizemos que uma função $\varphi : R^n \to R$ é função-π se satisfaz as propriedades

i) φ é contínua $\forall x \in R^n$ e admite derivadas parciais
ii) $\varphi(0) = 0$
iii) $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
iv) Os conjuntos $L(\varphi, h)$ são limitados $\forall\, h < \sup_{x \in R^n} \varphi(x)$

2.6- Funções de Liapunov

Baseado na discussão do capítulo anterior vamos considerar funções que têm propriedades de função de energia, mas que não representam a energia do sistema necessàriamente. Vamos admitir que $V: R^{n+1} \to R$ é contínua e tem derivadas parciais.

Def.: Função de Liapunov para estabilidade

Dizemos que V é função de Liapunov para estabilidade da solução trivial do sistema (2.2.13) em $D \subset R^n$, D aberto, simplesmente conexo e contendo a origem, se existe uma função-Π φ tal que

$$V(x,t) \geq \varphi(x), \quad \forall\, x \neq 0, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{2.6.1}$$

$$V(0,t) = 0, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{2.6.2}$$

$$\dot{V}(x,t) \leq 0, \quad \forall\, x \in D, \forall\, t \geq t_0 \tag{2.6.3}$$

$$\dot{V}(0,t) = 0, \quad \forall\, x \in D, \forall\, t \geq t_0. \tag{2.6.4}$$

Def.: Função de Liapunov para estabilidade assintótica

Dizemos que V é função de Liapunov para estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (2.2.13) em $D \subset R^n$, se existem funções-Π ψ, φ e Θ tais que

$$\psi(x) \geq V(x,t) \geq \varphi(x), \quad \forall\, x \in D, \forall\, t \geq t_0 \tag{2.6.5}$$

$$V(0,t) = 0 \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{2.6.6}$$

$$\dot{V}(x,t) \leqslant -\theta(x), \forall\, x \in D, \forall\, t \geqslant t_o \qquad (2.6.7)$$

$$\dot{V}(0,t) = 0\,, \quad \forall\, x \in D, \quad t \geqslant t_o \qquad (2.6.8)$$

Em resumo uma função de Liapunov para estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (2.2.13) é uma função definida positiva limitada por duas funções e que têm derivada definida negativa ao longo das trajetórias do sistema (2,2.13). Do mesmo modo poderíamos definir uma função que - fosse definida negativa e cuja derivada ao longo das trajetórias do sistema (2,2.13) fosse definida positiva.

A derivada de V ao longo das trajetórias do sistema (2.2.13) é dada pela expressão

$$\dot{V}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\, \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t}\,, \quad \forall\, x \in R^n, \forall\, t \geqslant t_o$$

ou
$$\dot{V}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\, f_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V'\, f + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\forall\, x \in R^n, \forall\, t \geqslant t_o \qquad (2.6.9)$$

onde $\nabla V'$ é o transposto do vetor gradiente.

2.7- Principais teoremas de Liapunov

Teorema da estabilidade

A solução trivial do sistema (2.2.13) é estável no sentido de Liapunov se existe uma função de Liapunov $V : R^{n+1} \to R$ definida positiva ou negativa, cuja derivada ao longo das trajetórias do sistema (2.2.13) em relação ao tempo é uma função semi-definida e de sinal contrário a V. em $D \subset R^n$, $\forall t \geq t_0$.

Teorema da estabilidade assintótica

A solução trivial do sistema (2.2.13) é assintóticamente estável no sentido de Liapunov se existe uma função de Liapunov $V: R^{n+1} \to R$ definida positiva ou negativa, cuja derivada ao longo das trajetórias do sistema (2.2.13) em relação ao tempo é uma função definida, de sinal contrário a V, em $D \subset R^n, \forall t \geqslant t_o$.

Teorema da instabilidade

Se existe uma função $V: R^{n+1} \to R$

$$(x,t) \mapsto V(x,t)$$

que admite um limite superior infinitesimal e cuja derivada ao longo das trajetórias do sistema (2.2.13) em relação ao tempo é uma função definida positiva ou negativa e, se a V, para x suficientemente pequeno e valores de t suficientemente grandes, tem o mesmo sinal que a derivada, então a solução trivial do sistema (2.2.13) é instável.

A prova destes teoremas pode ser encontrada nas referências [1,17,18,20]. A função V foi considerada definida e contínua em R^{n+1}. Para se garantir ou não a estabilidade da solução trivial do sistema (2.2.13) exige-se um comportamento determinado em relação a sinal para a função V, bem como para sua derivada. Desse modo é mais ou menos evidente que existirá um certo domínio contido em D para o qual o comportamento em relação a sinal da função V e de sua derivada verificam as condições dos teoremas. A êste domínio chamaremos domínio de estabilidade ou instabilidade. Devido ao objetivo deste trabalho mencionaremos sòmente domínios de estabilidade tal como definidos em 2.4.

Do ponto de vista de aplicação, encontrada uma função de Liapunov o problema da estabilidade da solução trivial de sistemas como (2.2.13) tem solução elegante. A questão porém é que, infelizmente, estas funções não são únicas e de modo geral, encontrada uma delas, não sabemos se o domínio determinado é o mais conveniente. Outra questão que surge é a de se - para qualquer sistema estável existe ao menos uma função de Liapunov. Êste problema é chamado o problema inverso e se encontra resolvido satisfatòriamente sòmente para sistemas autônomos lineares, apesar de resultados promissôres já obtidos - ([21]).

Conforme mencionado por Hahn [22] o interêsse nos - teoremas inversos tem importância teórica mas não encontram - grande aplicação no tratamento dos problemas da estabilidade - na prática, já que êle supõe o conhecimento anterior da solução das equações que regem o sistema. É claro que, eventualmente, o conhecimento da existência da função de Liapunov pode ser muito importante.

Na determinação das funções de Liapunov foram investigados procedimentos lógicos que se aplicassem a qualquer sistema. No entanto os resultados obtidos sòmente são aplicáveis a certos tipos de sistemas. O método de Zubov [16] por exemplo exige que o sistema admita uma aproximação linear assintòticamente estável. O método de Schultz-Gibson exige que o sistema seja de um tipo determinado com um único ponto de equilíbrio. O de Borges Vieira exige que um certo conjunto contenha a origem em seu interior.

Trataremos quase que exclusivamente do problema da determinação de regiões de estabilidade assintótica para sistemas autônomos usando formas quadráticas e os procedimentos acima.

Existem na literatura certos estudos que conduzem a funções de Liapunov através de considerações sôbre os balanços de energia do sistema físico. Êste é o caso de reatores químicos, por exemplo, onde existe uma série de funções de Liapunov propostas. No entanto êstes estudos cuidam do problema da estabilidade da solução trivial para um sistema físico particular, ao contrário dos métodos citados,

É conveniente considerar, devido à sua grande aplicabilidade e importância prática, o caso dos sistemas autônomos com maior ênfase. Os sistemas autônomos, em contrôle por exemplo, correspondem aos reguladores onde se quer manter uma determinada variável de saída em um certo valor independentemente de variações na entrada do sistema ou em seus parâmetros.

O segundo método de Liapunov fornece condições suficientes para se estudar o comportamento de sistemas em regime permanente sob a influência de perturbações, permanentes ou não. A atenção tem sido voltada principalmente para o caso de perturbações passageiras.

Devido às considerações feitas sôbre translação no tempo para sistemas autônomos, podemos reduzir o estudo do sistema em regime permanente com perturbações passageiras ao estudo de um sistema com um ponto de equilíbrio na origem e em que contamos o tempo a partir do instante em que cessa a perturbação. Isto pode ser feito considerando a origem como um ponto de equilíbrio e estudando sua resposta a condições iniciais aplicadas equivalentes à perturbação.

Assim, para as considerações dos capítulos seguintes é importante considerarmos os ítens seguintes.

2.8- Os sistemas autônomos

Seja o sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in R^n$$
$$f(0) = 0 \qquad (2.8.1)$$

onde o segundo membro satisfaz condições semelhantes àquelas impostas ao segundo membro de (1.2.1).

As definições de estabilidade para êstes sistemas são as mesmas que aquelas dadas em 2.3. Vamos repetir que o segundo membro de (2.8.1) não depende explìcitamente do tempo e, como função de Liapunov para estabilidade assintótica da solução trivial de (2.8.1), podemos usar uma $v : R^n \to R$ (independente de t) com as propriedades

$$v(x) = \varphi(x) > 0 , \forall x \neq 0 \tag{2.8.2}$$

$$v(0) = 0 \tag{2.8.3}$$

$$\dot{v}(x) < -\theta(x) = 0 , \forall x \neq 0 \tag{2.8.4}$$

$$\dot{v}(0) = 0 \tag{2.8.5}$$

onde φ e θ são funções-Π, ou, resumindo,

$$v(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad (2.8.6)$$

$$v(0) = 0 \qquad (2.8.7)$$

$$\dot{v}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad (2.8.8)$$

$$\dot{v}(0) = 0 \qquad (2.8.5)$$

Continuam válidos os teoremas de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade se trocamos (2.2.13) pelo sistema (2.8.1) e a

$$V: R^{n+1} \longrightarrow R$$
$$(x,t) \longmapsto V(x,t)$$

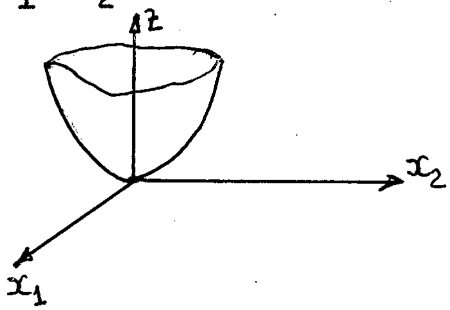
pela função

$$v: R^n \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow v(x).$$

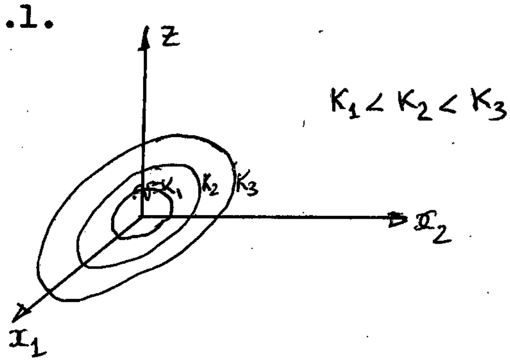
Para completar êste capítulo é interessante dar uma interpretação das funções definidas em sinal. Consideremos - $x \in R^2$ para facilitar. Assim $v(x) = v(x_1,x_2)$. Façamos

$$z = v(x_1,x_2) \qquad (2.8.9)$$

e vamos construir um gráfico escolhendo para eixos de referência x_1, x_2, z como na figura 2.8.1.



(a)



(b)

fig. 2.8.1

Como $v(x) > 0$, definida e contínua para qualquer $x \neq 0$ e $v(0)=0$, a equação (2.8.9) representa uma superfície em R^3 com o aspecto da figura 2.8.1a. Se tomarmos $Z = k$ teremos

$$k = v(x_1,x_2) \qquad (2.8.10)$$

que é uma curva fechada resultante da interseção de um plano paralelo ao plano $x_1 x_2$ com a superfície de equação (2.8.9). Considerando agora as projeções destas curvas fechadas, obtidas variando k, sôbre o plano $x_1 x_2$ obteremos curvas fechadas, chamadas curvas de nível de v, como na figura 2.8.1b, que determinarão conjuntos de valores em seus interiores. Considerações semelhantes podem ser feitas para o espaço R^n.

2.9- Comentários

Considerando as propriedades da função de Liapunov concluímos que uma das etapas presentes na procura de uma tal função é a verificação da sua definição em sinal. As formas - quadráticas do tipo

$$x' B x,$$

onde B é uma matriz nxn e $x \in R^n$, são candidatas e, se são definidas ou não, pode ser determinado utilizando-se as condições de Sylvester. As funções não quadráticas em geral são de difícil decisão quanto a sinal. Assim é lícito e conveniente tentar antes de tudo formas quadráticas como função de Liapunov. Êste procedimento é o objetivo do capítulo seguinte.

---oOo---

CAPÍTULO 3

AS FORMAS QUADRÁTICAS COMO FUNÇÃO DE LIAPUNOV

3.1- Introdução

Para que uma $v: R^n \to R$ possa ser escolhida como possível função de Liapunov, a primeira imposição sôbre a mesma é que ela seja definida. De um modo geral nem sempre é fácil decidir se v é definida ou não.

Da classe das funções prováveis fazem parte as funções do tipo

$$v: R^n \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto v(x) = x'Bx$$

onde $$x'Bx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j .$$

Estas funções em particular permitem verificação de sinal com a utilização das condições de Sylvester.

3.2- Condições de Sylvester [23]

Para a forma quadrática x'Bx ser definida positiva é necessário e suficiente que a matriz V seja definida positiva isto é, todos os determinantes menores principais dominantes são positivos, ou seja

$$D_1 = \left| b_{11} \right| > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b22 \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

De modo semelhante, para que x'Bx seja definida negativa é necessário e suficiente que a matriz B seja definida negativa, isto é, tenha os determinantes menores principais dominantes de ordem par positivos e os de ordem ímpar negativos, ou seja

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0$$

Convém observar que se $D_1 \geqslant 0$, $D_2 \geqslant 0$, ... , $D_n \geqslant 0$ isto não implica necessàriamente que a forma quadrática x'Bx seja semi-definida positiva [23] .

3.3- Funções de Liapunov para sistemas Lineares

Consideremos os sistemas da forma

$$\dot{x} = A\bar{x}$$

$$x(0) = x_0 \qquad (3.3.1)$$

onde A é uma matriz constante nxn e $x \in R^n$. Consideremos também uma função

$$v: R^n \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto v(x) = x' B x,$$

onde B é uma matriz constante nxn, e calculemos sua derivada ao longo das trajetórias do sistema (3.3.1)

$$\frac{dv}{dt} = \dot{x}' B x + x' B \dot{x} \quad \forall x \in R^n$$

$$= x' A' B x + x' B A x , \quad \forall x \in R^n$$

ou $$\frac{dv}{dt} = x' \left[A'B + BA \right] x , \forall x \in R^n \qquad (3.3.2)$$

Admitindo-se que v é definida positiva, temos que ter $\dot{v}$ definida negativa para que v seja uma função de Liapunov para estabilidade assintótica da solução trivial de (3.3.1). Escrevamos

$$\dot{v}(x) = - x' \ Q \ x \qquad (3.3.3)$$

onde $$-Q = (A'B + BA) \qquad (3.3.4)$$

Desse modo, dado o sistema linear (3.3.1), precisamos encontrar condições sob as quais a matriz Q seja definida positiva o que implicaria na estabilidade assintótica da - solução trivial do sistema (3.3.1). Assim vamos escolher a matriz Q e determinar os elementos de B mediante a resolução de um sistema de n^2 equações algébricas lineares. Considerar a matriz B simétrica acarreta que Q também é simétrica como pode fàcilmente ser verificado. Com esta consideração,escolhida uma matriz Q, a matriz B pode ser determinada agora resolvendo-se $\frac{n(n+1)}{2}$ equações lineares que sempre tem solução* [19].

É importante notar que, se a solução trivial do sistema (3.3.1) é assintòticamente estável, isto é, a matriz A tem todos os auto-valores com parte real negativa, existirá sempre, escolhida uma matriz Q definida, uma matriz B, ùnicamente determinada através de um sistema de $\frac{n(n+1)}{2}$ equações lineares, de sinal oposto ao da matriz Q [1,17,24].

Existe uma relação importante e que nos será bastante útil no capítulo seguinte, entre os sistemas lineares e as formas quadráticas. Esta relação é dada pela proposição seguinte.

Proposição 1

Uma condição necessária e suficiente para que a forma quadrática x'Ax seja definida negativa é que o sistema

$$\dot{x} = A\,x,$$

obtido com a matriz A da forma quadrática, seja assintòticamente estável, isto é, tenha auto-valores com parte real negativa.

Prova

a) Suficiência

Seja $x \in R^n$ e A uma matriz nxn.

Seja λ_i o i-ésimo auto-valor e consideremos os n auto-valores em ordem crescente

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_{n-q}$$

* - Salvo menção explícita em contrário consideraremos sempre a matriz B simétrica.

se houver n-q auto-valores repetidos e onde $\lambda_{n-q} < 0$. É conhecida a seguinte relação entre os auto-valores [23]

$$\lambda_1 \leq \frac{x'Ax}{x'x} \leq \lambda_{n-q}, \quad \forall x \neq 0, \; x \in R^n \quad (3.3.5)$$

Existe $\bar{x} \neq 0$ tal que

$$\lambda_1 = \frac{\bar{x}'A\bar{x}}{\bar{x}'\bar{x}}$$

e $\bar{\bar{x}} \neq 0$ tal que

$$\lambda_{n-q} = \frac{\bar{\bar{x}}'A\bar{\bar{x}}}{\bar{\bar{x}}'\bar{\bar{x}}}$$

Assim para $x'Ax$ ser definida negativa é suficiente que $\lambda_{n-q} < 0$ já que $x'x > 0 \quad \forall x \neq 0$. Mas isto é nossa hipótese. Daí segue a suficiência.

b) Necessidade

Admitindo agora

$$x'Ax < 0 \quad \forall x \neq 0$$

$\lambda_{n-q} < 0$ porque como

$$\frac{x'Ax}{x'x} \leq \lambda_{n-q}$$

ou $$x'Ax \leq \lambda_{n-q} \, x'x,$$

e $x'x > 0 \quad \forall x \neq 0$, segue que $\lambda_{n-q} < 0$ necessàriamente. Mas

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_{n-q}$$

que garante que a proposição é satisfeita, suficiente e necessàriamente.

É conveniente agora, ainda para aplicação no capítulo seguinte, enunciar a proposição abaixo, que nos garante que A pode ser uma matriz diagonal quando tomamos v como função de Liapunov para o sistema (3.3.1).

Proposição 2

Um sistema linear autônomo cuja solução trivial é assintòticamente estável (auto-valores com parte real negativa) admite como função de Liapunov uma forma definida positiva do tipo

$$v: R^n \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto v(x) = x'Bx$$

onde B é uma matriz diagonal e $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ os elementos da diagonal principal.

Prova

Para provar a proposição é suficiente provar que a derivada em relação ao tempo, ao longo das trajetórias do sistema (3.3.1), é definida negativa.

Da mesma forma que antes

$$\dot{v}(x) = x' \left[A'B + BA\right] x \quad , \forall x \in R^n$$

onde a matriz

$$-(A'B + BA)$$

deve ser definida positiva e pode ser escrita na forma

$$- \left\{ \begin{bmatrix} a_{11}\xi_1 \cdots & & \cdots a_{n1}\xi_n \\ \vdots & \cdots a_{ji}\xi_j \cdots & \\ \vdots & & \\ a_{1n}\xi_1 \cdots & & \cdots a_{nn}\xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}\xi_1 \cdots & & \cdots a_{1n}\xi_1 \\ \vdots & \cdots a_{ij}\xi_i \cdots & \\ \vdots & & \\ a_{n1}\xi_n \cdots & & \cdots a_{nn}\xi_n \end{bmatrix} \right\}$$

Aplicando agora as condições de Sylvester para as parcelas acima temos, para o k-ésimo menor principal dominante $(k=1,2,\ldots,n)$,

$$- \left| A'B \right| = -(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \\ a_{1k} \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

o que acarreta

$$x'(-A'B)x > 0$$

porque $-A$ definida positiva implica em $-A'$ definida positiva. De modo semelhante

$$- \left| BA \right| = -(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k) \begin{vmatrix} a_{11} \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \\ a_{k1} \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

e também

$$x'(-BA)x > 0$$

Se cada parcela é definida positiva também o será sua soma e, em consequência, a função

$$\dot{v}: R^n \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto \dot{v}(x) = x' \left[A'B + BA \right] x,$$

é definida negativa. Além disso $\dot{v}(0) = 0$ e portanto a v do enunciado é função de Liapunov para o sistema (3.3.1).

3.4- Sistemas que admitem aproximação linear

Em certos casos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in R^n \tag{3.4.1}$$

$$f(0) = 0$$

pode ser escrito na forma

$$f(x) = Ax + g(x), \ \forall x \in R^n \tag{3.4.2}$$

onde A é uma matriz constante não singular e $g: R^n \to R^n$ é uma função cujas componentes $g_i: R^n \to R$ são funções algébricas não lineares de x de grau maior ou igual a dois.

Da equação (3.4.2), considerando que a função $g: R^n \to R^n$ possa ser expandida em série de potências em tôrno da origem, nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, começando com têrmos de ordem maior ou igual a dois, podemos obter o sistema

$$\dot{x} = Ax \tag{3.4.3}$$

chamado aproximação linear. As imposições acima implicam em que f(x) possa ser expandida em série onde a primeira parcela contém os têrmos lineares e a segunda contém os têrmos de ordem superior ou igual a dois.

Assim se de (3.4.1) podemos obter (3.4.2) e g admite expansão em série em tôrno da origem, podemos obter (3.4.3) diretamente, simplesmente tomando apenas os têrmos lineares.

Sôbre sistemas deste tipo Liapunov [1] estabeleceu o seguinte teorema, muito representativo para o estudo da estabilidade.

Teorema da aproximação linear

Se a solução trivial do sistema (3.4.3) é um ponto de equilíbrio assintòticamente estável, ou seja, se A tem auto-valores com parte real negativa, então a solução trivial também é um ponto de equilíbrio assintòticamente estável do sistema (3.4.1), cujo segundo membro é da forma (3.4.2).

Se A possue pelo menos um auto-valor nulo estaremos em presença de um caso crítico. Margolis [19] prova que neste caso não há região de estabilidade assintótica que contenha a origem. Assim estudaremos os casos em que A tenha auto-valores com parte real negativa. A importância deste procedimento reside no fato de podermos tirar conclusões rápidas do sistema em questão acêrca de um possível domínio de estabilidade assintótica de (3.4.1), cujo segundo membro admite a forma (3.4.2), analisando a aproximação linear.

3.5- Função de Liapunov para sistemas não lineares - Formulação de Krasovskii

Consideremos o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x) \qquad (3.4.1)$$

$$f(0) = 0$$

onde $f: R^n \rightarrow R^n$ em geral não linear. Seguiremos o procedimento usual fornecido por Krasovskii [25] e que é uma extensão do trabalho de Liapunov.

Vamos escolher como função de Liapunov a forma quadrática

$$v(x) = f'Bf \,, \qquad x \in R^n \qquad (3.4.4)$$

onde B é uma matriz definida positiva constante(simétrica) e f' é a matriz f transposta.

Calculemos a derivada de v em relação a t ao longo das trajetórias de (3.4.1)

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} = f'B\dot{f} + \dot{f}'B\ f \qquad (3.4.5)$$

Mas

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\ f = Jf$$

onde

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Assim ao longo das trajetórias de (3.4.1)

$$\dot{v}(x) = f'BJf + f'J'Bf$$

ou $$\dot{v}(x) = f'(BJ + J'B)f \tag{3.4.6}$$

Escrevamos

$$\dot{v}(x) = -f'Qf$$

onde $$-Q = BJ + J'B$$

A condição para estabilidade assintótica agora fica reduzida à imposição de restrições sôbre a matriz Q de modo a torná-la definida positiva. Escolhida a matriz Q podemos tentar determinar os elementos de B. Se êstes elementos são tais que a matriz B seja definida positiva, tôdas as condições são satisfeitas e a estabilidade assintótica é assegurada.

Note-se que aqui não se garante sempre a existência de B definida positiva podendo mesmo nem existir. Êste procedimento dá portanto condições suficientes. Se não for possível encontrar a matriz B escolhendo a matriz Q não se pode concluir a instabilidade da solução trivial do sistema (3.4.1).

3.6- Domínio de estabilidade assintótica

Consideremos o sistema (3.4.1) e vamos admitir que exista uma função de Liapunov v para estabilidade assintótica da solução trivial de (3.4.1). Isto equivale a dizer que a v é, por exemplo, definida positiva e sua derivada em relação ao tempo ao longo das trajetórias de (3.4.1) é definida negativa. Para determinar um domínio de estabilidade assintótica vamos proceder como segue.

Escrevamos

$$v(x) = c, \quad x \in R^n, \quad c > 0 \;, \quad c \in R \;.$$

Podemos variar c até obter

$$v(x) = c_1$$

que tangencia a superfície definida pela equação

$$\dot{v}(x) = 0.$$

O conjunto de pontos interiores à superfície fechada

$$v(x) = c_1$$

são tais que

$$\dot{v}(x) < 0$$

formando portanto um domínio de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (3.4.1).

Considere $x \in R^2$ e veja a figura 3.6.1 para ilustração.

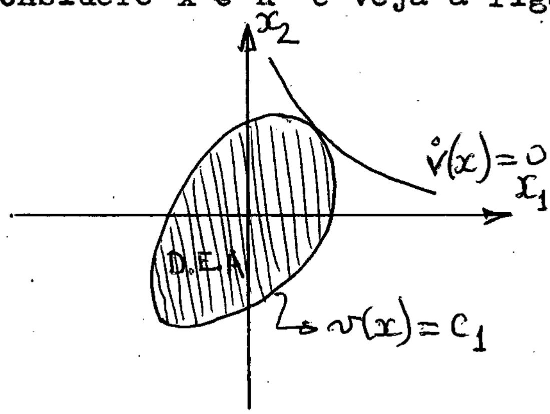


fig. 3.6.1

3.7- Comentários

Na procura de uma função de Liapunov a primeira tentativa sempre recai nas formas quadráticas pela facilidade de discussão de sinal que apresentam. Em realidade na maioria das aplicações do segundo método de Liapunov considera-se uma forma quadrática básica $-x'Q\,x$ e procura-se obter a forma $x'B\,x$ de sinal contrário. Esta discussão no entanto nem sempre é fácil, especialmente se o sistema não admite aproximação linear e, além disso, a matriz B pode nem existir. Repetimos que se B não é encontrada ainda não se pode concluir instabilidade para o sistema considerado.

Devido a estas dificuldades tem-se procurado maneiras diferentes de ataque ao problema. Êste é o objetivo do capítulo seguinte, onde damos uma aplicação do método dos sistemas lineares associados aos sistemas autônomos. Êste procedimento se baseia na escôlha prévia de uma forma quadrática de certo tipo e, usando a noção de sistema linear associado, permite conclusões sobre a estabilidade assintótica da solução trivial de sistemas como (1.2.4).

---oOo---

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DA TEORIA DOS SISTEMAS LINEARES ASSOCIADOS AOS SISTEMAS AUTÔNOMOS

4.1- Introdução

Êste capítulo é baseado no trabalho do professor L. R. Borges Vieira [26] e seu principal resultado é uma padronização das escôlhas arbitrárias permitidas pelo método. Estudando sistemas autônomos e procurando domínios elipsoidais e e esféricos de estabilidade assintótica pudemos chegar a algumas conclusões interessantes.

É bem verdade que as escôlhas permitidas pelo método de Borges Vieira dão flexibilidade mas também aumentam as dificuldades de aplicação pelos utilizadores menos experimentados.

A escôlha que fixaremos permitem mais facilidade - nas aplicações. Para isto foi necessário modificar alguns teoremas e introduzir outros. Borges Vieira define funções e conjuntos importantes para seus resultados. Daremos sòmente um resumo destas definições e o faremos já com o intuito de aplicá-las aos sistemas autônomos.

4.2- O sistema autônomo de classe $C(2$

Consideremos o sistema

$$\dot{x} = f(x) , \qquad (4.2.1)$$

$$f(0) = 0$$

onde $f: R^n \longrightarrow R^n$

$$x \longrightarrow f(x)$$

e satisfaz tôdas as condições usuais para existência, continuidade, unicidade e prolongabilidade até ∞ das soluções.

4.3- A função de Liapunov

Em seu trabalho Borges Vieira estuda os sistemas não autônomos de um modo geral e utiliza como função de Liapunov uma função $V(x,t)$ para estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (1.2.2), que tem propriedades como em 2.6. Utilizamos várias funções-π de modo que

$$\psi(x) \geqslant v(x) \geqslant \varphi(x), \quad \forall x \in R^n$$

e

$$\dot{v}(x) \leqq -\theta(x), \quad \forall x \in R^n .$$

Ao tratarmos com sistemas autônomos usaremos aqui, como função de Liapunov, formas quadráticas definidas positivas. Estas formas pertencem à classe π e, de acôrdo com a discussão de Borges Vieira, há interêsse em se tomar

$$\psi(x) = v(x) = \varphi(x), \quad \forall x \in R^n$$

É conveniente também tomar θ menor possível. Em particular tomaremos $\theta(x) = 0$ para os sistemas autônomos, o que elimina a necessidade de várias escôlhas arbitrárias. Desse modo utilizaremos funções de Liapunov como definidas em 2.8 para estabilidade assintótica da solução trivial de (4.2.1), ou seja, usaremos uma função $v: R^n \to R$ tal que

$$v(x) > 0, \forall x \neq 0 \tag{4.3.1}$$

$$v(0) = 0 \tag{4.3.2}$$

$$\dot{v}(x) < 0, \forall x \neq 0 \tag{4.3.3}$$

$$\dot{v}(0) = 0$$

4.4- Teorema e definições importantes

Def.: O número $h(v,D)$

Seja $v: R^n \to R$ uma função e $D \subset R^n$ aberto conexo, que contém a origem em seu interior. Definimos

$$h(v,D) = \sup \left\{ h \ / \ h \in (0, \sup v) \wedge L(v,h) \subset D \right\}$$

onde $$L(v,h) = \left\{ x \in R^n \ / \ v(x) \leq h \right\}$$

É claro que da definição

$$0 < h(v,D) \leq \sup v$$

Def.: O conjunto $\mathcal{G}(v,D)$

Seja v e D como definidos antes.

$$\mathcal{G}(v,D) = \left\{ x \ / \ x \in D \wedge v(x) < h(v,D) \right\} \tag{4.3.4}$$

Podemos escrever também das definições acima que

$$\mathcal{G}(v,D) = \bigcup_{0<h<h(v,D)} \operatorname{Int} L(v,h) \tag{4.3.5}$$

e ainda que

$$\mathcal{G}(v,D) = \operatorname{Int} L(v,h(v,D)) \tag{4.3.6}$$

Teorema de Borges Vieira

Seja $v: R^n \to R$

$$x \mapsto v(x) = x' B x.$$

Se v é uma função de Liapunov em D para estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (4.2.1), onde B é uma matriz nxn, constante, definida positiva (simétrica), então os conjuntos $\mathcal{G}(v,D)$ são domínios de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (4.2.1).

Prova

Devemos mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x_0) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{G}(v,D) \quad (4.3.7)$$

Mas $\quad x_0 \in \mathcal{G}(v,D) \Rightarrow v(x_0) < h(v,D).$

Mostremos primeiramente que

$$\lim_{t\to\infty} v(\varphi(t,x_0)) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{G}(v,D)$$

Consideremos a relação (4.3.3). $\dot{v}$ é uma derivada em relação ao tempo e estritamente negativa para $\varphi(t,x_0) \in D - \{0\}$. Então

$$h(v,D) > v(\varphi(t_0,x_0)) > v(\varphi(t,x_0)) \geq \bar{v}$$

$$\forall x_0 \in \mathcal{G}(v,D), \forall t > t_0$$

onde $\bar{v}$ é um número real conveniente. A função v é definida positiva. Logo $\bar{v}$ não pode ser negativo e também não pode ser positivo porque para qualquer $x = \varphi(t,x_0) \neq 0$ $\dot{v}$ é negativa. Assim $\bar{v}$ é estritamente decrescente e assume valô res menores do que qualquer restrição inferior positiva estabelecida. Então

$$\lim_{t \to \infty} v(\varphi(t,x_o)) = \bar{v} = 0 \quad , \forall x_o \in \mathcal{G}(v,D) \tag{4.3.8}$$

A matriz B é constante, simétrica e definida positiva admitindo portanto n auto-valores reais positivos $\lambda_1, \ldots ,\lambda_n$ que suporemos em ordem crescente

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \; \ldots \leq \lambda_n$$

Sabemos que

$$\lambda_1 \leq \frac{x'B\, x}{x'x} \leq \lambda_n \qquad \forall x \neq 0 \; , \; x \in R^n$$

Como $\quad \lambda_1 \; x'x \leq x'B\, x \qquad \forall x \in R^n$

e a $v(x) = x'B\,x$ é função de Liapunov por hipótese

$$\lim_{t \to \infty} v(\varphi(t,x_o)) = \lim_{t \to \infty} [\varphi(t,x_o)]' B\, \varphi(t,x_o) = 0,$$

porque $\quad v(x) = v(\varphi(t,x_o)) = x'B\,x \geq \lambda_1 \| \varphi(t,x_o) \|$

$$\forall \; x = \varphi(t,x_o) \quad \in \mathcal{G}(v,D)$$

Mas para que $x=\varphi(t,x_o)$ tenda a zero necessàriamente tôdas as componentes de x devem tender a zero também. Desse modo

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t,x_o) = 0 \qquad \forall x_o \in \mathcal{G}(v,D)$$

que nos garante a tese do teorema.

4.5- Famílias de Sistemas associados

Consideremos novamente o sistema de classe $\mathcal{E}$

$$\dot{x} = f(x) \quad , \; x \in R^n \tag{4.5.1}$$

$$f(0) = 0$$

Seja $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)' \in R^n$. Vamos escrever a seguinte família de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem parametrizada pelo vetor z

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1(x_1,\ldots,x_n;z_1,\ldots,z_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u_n(x_1,\ldots,x_n;z_1,\ldots,z_n) \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

onde as funções de transição ψ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ dependem de z. Escreveremos abreviadamente (4.5.2) como

$$\dot{x} = U(x;z) \tag{4.5.3}$$

Def.: Família de sistemas associados

Dizemos que a família de sistemas de equações diferenciais (4.5.3) é uma família de sistemas associados, em D, ao sistema (4.5.1) se as duas condições seguintes são satisfeitas

i) A cada $\bar{z} \in D \subset R^n$ corresponde um sistema $\dot{x} = U(x;\bar{z})$ da família (4.5.3) que pertence à classe $\mathcal{E}$;

ii) A função U(x;z) deve ser tal que

$$U(z;z) = f(z) \qquad \forall z \in D \tag{4.5.4}$$

A condição ii é chamada de condição de associação e pode ser interpretada do seguinte modo. Seja $\gamma(t, x_o)$ uma trajetória qualquer tal que em $t = \bar{t}$ o ponto que descreve a trajetória está na posição z, isto é

$$z = \varphi(\bar{t}, x_o).$$

Consideremos o sistema da família associada (4.5.3) que corresponde a $z = \varphi(\bar{t}, x_o)$ e seja $\tilde{\gamma}(z, t)$ a trajetória deste sistema que em $t = \bar{t}$ passa por

$$z = \varphi(\bar{t}, x_o)$$

A condição ii indica que as trajetórias têm no ponto z o mesmo vetor velocidade, isto é

$$\dot{\varphi}(t, z) = \dot{\alpha}(t, z)$$

onde $\alpha(t, z)$ é a função de transição do sistema obtido fixando-se z na família associada (4.5.3).

Em particular as trajetórias têm o mesmo vetor tangente. Por outro lado se a família (4.5.3 satifaz à condição i e se a igualdade dos vetores velocidade tem lugar em qualquer ponto de qualquer trajetória de (4.5.1), então a condição ii é satisfeita necessàriamente.

4.6- Família de sistemas lineares associados

É conveniente verificar se dado qualquer sistemacda classe $\mathcal{E}$ sempre existe uma família de sistemas associados. Se as famílias associadas a um dado sistema não linear são também não lineares, o estudo destas últimas não apresenta grande interêsse. Neste sentido a proposição seguinte é muito importante.

Proposição 3

Qualquer que seja o sistema (4.5.1) de classe $\mathcal{E}$ existe pelo menos uma família de sistemas lineares associada a êle.

Para a prova desta proposição Borges Vieira construiu uma família linear associada e mostrou que as condições i e ii são satisfeitas. Esta família é da forma

$$\dot{x} = U(z)\, x \tag{4.5.5}$$

onde os elementos $u_{ik}(z)$, $(i,k=1,2,..,n)$ são da forma

$$u_{ik}(z_1,\dots,z_n) = \frac{z_k}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2}}\, f_i(z_1,\dots,z_n)$$

$$\forall z \in D - \{0\}, \tag{4.5.6}$$

isto é $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2} \neq 0$, e se $z = 0$ $u_{ik}(0,\dots,0)=0$,

onde $f_i(z)$ é a i-ésima componente do vetor $f(x)$ com $x= z$.

Tendo em vista as condições de associação, em particular a ii, Borges Vieira mostrou que existe uma relação entre a estabilidade dos sistemas associados da família - (4.5.3) e o sistema (4.5.1), tratando-se da estabilidade da solução trivial.

Vamos construir a função $\bar{v}^{\bullet}(x;z)$, derivada de v em relação a t ao longo das trajetórias dos sistemas associados.

$$\bar{v}^{\bullet}(x;z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \qquad x,z \in D \qquad (4.5.7)$$

$$\bar{v}^{\circ}(x;z) = \sum_{i=1}^{n} v_{x_i} u_i \qquad x,z \in D,\ i=1,\dots,n \quad (4.5.7a)$$

Teorema

Seja $z \in E$, $\{0\} \subset E$, E aberto e seja $\dot{x} = U(z,x)$ uma família associada ao sistema (4.5.1). Se a função v é função de Liapunov em D para todos os sistemas associados obtidos fixando-se um $z \in E$, então, se $G = D \cap E$, a v é também função de Liapunov em G para estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (4.5.1) dado.

Prova

Se v é função de Liapunov para os sistemas associados então

$$v(x) > 0 \quad \forall x \in D \qquad (4.5.8)$$

$$v(0) = 0 \qquad (4.5.9)$$

$$\bar{v}^{\bullet}(x;z) < 0 \quad \forall x \in D, \forall z \in E \qquad (4.5.10)$$

$$\bar{v}^{\bullet}(0;z = 0 \quad \forall z \in E \qquad (4.5.11)$$

Como

$$\{0\} \subset E \quad e \quad \{0\} \subset D \Rightarrow \{0\} \subset G$$

Consideremos agora $x,z \in G$. Assim

$$v(x) > 0 \quad \forall x \in G \qquad (4.5.12)$$

$$v(0) = 0$$

$$\bar{v}^{\bullet}(x;z) < 0 \quad \forall x,z \in G \tag{4.5.13}$$

$$\bar{v}^{\bullet}(0;z) = 0 \quad \forall z \in G \tag{4.5.14}$$

Agora em G tomemos $x = z$ e podemos escrever (4.5.13) e (4.5.14) como

$$\bar{v}^{\bullet}(x;x) < 0 \quad \forall x \in G \tag{4.5.15}$$

$$\bar{v}^{\bullet}(0;0) = 0$$

onde $$\bar{v}^{\bullet}(x;x) = \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}(x)\, u_i(x;x) \tag{4.5.16}$$

válida para qualquer $x \in D$ e consequentemente para qualquer $x \in G$. A condição ii fornece

$$U(x;x) = f(x), \forall x \in G$$

Substituindo em (4.5.16) vem

$$\bar{v}^{\bullet}(x;x) = \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}(x)\, f_i(x) \qquad \forall x \in G$$

onde o segundo membro é exatamente $\overset{o}{v}$ derivada de v ao longo das trajetórias do sistema (4.5.1).

A prova do teorema fica completada se considerarmos agora as relações (4.5.12) e (4.5.15) escritas

$$v(x) > 0 \qquad \forall x \in G, \; x \neq 0$$

$$v(0) = 0$$

$$\bar{v}^{\bullet}(x) < 0 \qquad x \in G, \; x \neq 0$$

$$\bar{v}^{\bullet}(0) = 0.$$

Combinando o teorema de Borges Vieira e o teorema anterior podemos enunciar o critério abaixo.

Critério 1

Se o sistema de classe $\mathcal{E}$ (4.5.1) tem uma família de sistemas associados (4.5.3) constituída de sistemas associados obtidos fixando-se um $z \in G = D \cap E$, $\{0\} \subset G$, e se os sistemas associados têm como função de Liapunov para estabilidade assintótica em D a função v, então os conjuntos $\mathcal{G}(v,D)$ são domínios de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (4.5.1).

Os teoremas anteriores são enunciados e demonstrados sem se fazer menção específica sôbre a família associada usada. Exige-se apenas:

$$\{0\} \subset E \Rightarrow \{0\} \subset G = D \cap E$$

Se isto acontece o método dá um resultado concreto.

Ao se aplicar o método é conveniente estudar as famílias de sistemas associados que permitem análise simples e rápida. Damos adiante um outro critério aplicável aos sistemas autônomos utilizando famílias lineares associadas.

4.7- O método dos sistemas lineares associados.

Seja um sistema de classe $\mathcal{E}$

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in R^n \tag{4.7.1}$$

$$f(0) = 0.$$

Suponhamos que êste sistema admita

$$\dot{x} = U(z)\ x \qquad (4.7.2)$$

como família de sistemas lineares associados. O procedimento do critério 1 se resume em escolher a função de Liapunov v para os sistemas lineares associados e daí determinar - $G = D \cap E$ onde E é o conjunto de valores de z tais que os sistemas lineares associados tenham v vomo função de Liapunov em D para estabilidade assintótica de suas soluçãoes triviais.

Mas encontrar o conjunto E, baseado na proposição 1 e 2 admitindo v uma forma quadrática, é a mesma coisa que procurar o conjunto E de pontos z tais que os sistemas lineares associados sejam estáveis, como veremos adiante.

Observemos agora várias coisas. Vamos procurar, dado o sistema (4.7.1) e a família linear associada, uma função de Liapunov para sistemas lineares. Usaremos sempre então

$$v: R^n \longrightarrow R$$

$$x \longmapsto v(x) = x'B\ x$$

onde B é uma matriz constante $n x n$, definida positiva e simétrica.

O cálculo de $\dot{\bar{v}}(x;z)$, derivada de v em relação ao tempo e ao longo das trajetórias dos sistemas lineares associados, fornece:

$$\dot{\bar{v}}(x;z) = \dot{x}'B\ x + x'B\ \dot{x} \qquad \forall x \in D \qquad (4.7.3)$$

ou $$\dot{\bar{v}}(x;z) = x'U'B\ x + x'B\ U\ x \quad \forall x \in D$$

ou $$\dot{\bar{v}}(x;z) = x'\left[U'B + BU\right] x \qquad (4.7.4)$$

Para estabilidade assintótica da solução trivial dos sistemas lineares associados, se v é definida positiva, é suficiente que $\bar{v}^{\bullet}$ seja definida negativa. Esta imposição conduz a uma relação entre os elementos da matriz B e os parâmetros z. Para solução do problema vamos então escolher os elementos de B e determinar os valores de z tais que (4.7.4) seja definida negativa.

De acôrdo com a proposição 1, a condição necessária e suficiente para que uma forma quadrática x'P x seja definida negativa é que o sistema linear formado com a matriz P, $\dot{x} = Px$, seja assintòticamente estável. Assim vamos, a partir de (4.7.4), formar o sistema linear

$$\dot{x} = \left[U'B + B\,U\right] x \tag{4.7.5}$$

e impor restrições de modo a obter um conjunto de valores para os parâmetros z tais que o sistema (4.7.5) seja assintòticamente estável.

Impor restrições para estabilidade assintótica da solução trivial de (4.7.5) é o mesmo que impor condições para que as partes reais dos auto-valores da matriz

$$U'B + B\,U$$

sejam negativos.

O conjunto D contém a origem como único ponto de equilíbrio de (4.7.1) e o conjunto E, escolhida uma função de Liapunov v, está perfeitamente determinado. Assim - $G = D \cap E$ também pode ser determinado. Se G contém a origem em seu interior o conjunto $\mathcal{G}(v, G)$ é um domínio de estabilidade assintótica da solução trivial de (4.7.1)

Mas já sabemos que

$$\mathcal{G}(v,G) = \{ x \,/\, x \in G \wedge v(x) < h(v,G) \}$$

e, como

$$h(v,G) = \sup \{ h \,/\, h \in (0, \sup v) \wedge L(v,h) \subset G \}$$

então $\quad \mathcal{G}(v,G) = \operatorname{Int} L(v,h)$

se $\quad h = h(v,G).$

Desse modo para determinar o domínio de estabilidade assintótica da solução trivial de (4.7.1) é suficiente determinar o conjunto

$$\bigcup_{o<h<h(v,G)} \operatorname{Int} (L(v,h) = \operatorname{Int} L(v,h(v,G))$$

4.8- Critério para estabilidade assintótica da solução trivial de sistemas autônomos utilizando sistemas lineares associados

Consideremos o sistema (4.7.1). De acôrdo com as considerações anteriores podemos resumir êste critério nos passos seguintes:

1. Encontrar os pontos de equilíbrio de (4.7.1) e escolher o conjunto D de modo a conter a origem como único ponto de equilíbrio (podemos tentar uma hiper-esfera por exemplo, ou R^n se a origem é o único ponto de equilíbrio),

2. Encontrar uma família de sistemas lineares associados $\dot{x} = U(z)x$,

3. Escolher uma $v: R^n \to R$

$$x \mapsto v(x) = x'B\,x,$$

onde B é uma matriz constante nxn, definida positiva e simétrica,

4. Formar o sistema (4.7.5)

5. Determinar E, conjunto de pontos z tais que (4.7.5) é assintòticamente estável,

6. Fazer $G = D \cap E$ e se $\{0\} \subset G$ encontrar

$$\theta(v,G) = \text{Int}\,(L(v,h(v,G)))$$

que é um domínio de estabilidade assintótica de (4.7.1).

4.9- Domínios de estabilidade assintótica elipsoidais

Se procurarmos agora sòmente domínios de estabilidade elipsoidais cujos eixos coincidam com os eixos coordenados de R^n chegaremos a alguns resultados interessantes.

Para encontrar a família associada vamos usar a condição ii. Assim

$$\begin{bmatrix} u_{11} \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ u_{n1} \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{matrix} u_{11}(z)\, z_1 & \cdots & u_{1n}(z)\, z_n & = & f_1(z) \\ \vdots & & & & \\ u_{n1}(z)\, z_1 & \cdots & u_{nn}(z)\, z_n & = & f_n(z) \end{matrix}$$

A família associada é então

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para obter domínios de estabilidade assintótica elipsoidais para a solução trivial de (4.7.1) com os eixos coincidentes com os eixos coordenados devemos tomar $B = \Lambda$,onde Λ é uma matriz diagonal, com elementos ξ_i na diagonal principal.

Assim o sistema

$$\dot{x} = \left[U'\Lambda + \Lambda U \right] x \tag{4.9.1}$$

fica

$$\dot{x} = \left\{ \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & u_{ji} & \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & u_{ij} & \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \right\} x$$

$$\dot{x} = \left\{ \begin{bmatrix} u_{11}\xi_1 & \cdots & u_{n1}\xi_n \\ \vdots & u_{ji}\xi_j & \\ u_{1n}\xi_1 & \cdots & u_{nn}\xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11}\xi_1 & \cdots & u_{1n}\xi_1 \\ \vdots & u_{ij}\xi_i & \\ u_{n1}\xi_n & \cdots & u_{nn}\xi_n \end{bmatrix} \right\} x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2u_{11}\,1 & \cdots & u_{n1}\,n\; u_{1n}\,1 \\ & u_{ji}\,j\; u_{ij}\,i & \\ u_{1n1}\; u_{n1}\,n & & 2u_{nn}\,n \end{bmatrix} x \qquad (4.9.2)$$

Podemos agora determinar E encontrando o conjunto de pontos z tais que o sistema (4.9.2) tenha a origem como ponto de equilíbrio assintòticamente estável. Agora é possível realizar o passo 5 de 4.8 de modo mais simples e, com o passo 6, encontar um domínio de estabilidade assintótica para a solução trivial do sistema (4.7.1), se a origem está contida em E.

4.10- Domínios de estabilidade esféricos

Sabemos que $\mathcal{G}(v,G)$ tem uma forma que depende da relação

$$v(x) < h(v,G)$$

onde no caso anterior

$$v(x) = x'\Lambda x.$$

Para domínios que são interiores de hiperesferas podemos tomar

$$\Lambda = k\,I$$

onde I é a matriz identidade.

Proposição 4

Seja $v: R^n \rightarrow R$

$$x \mapsto v(x) = x'\Lambda x$$

e o sistema (4.9.1). Se os elementos da matriz Λ são iguais a k, então a determinação do conjunto E só depende da forma de v (independe de k).

Prova

Tomemos o sistema (4.9.1) fazendo os elementos λ_i de Λ iguais a k com i = 1,2,...,n. Podemos agora escrever

$$\dot{x} = (U'kI + kIU)\,x$$

então $$\dot{x} = k(U' + U)\,x \qquad (4.10.1)$$

Para estabilidade assintótica de (4.10.1) os auto-valores da matriz $(U' + U)$ devem ter parte real negativa, e podem ser calculados através de

$$k\,\left|(U' + U) - I\right| = 0$$

e, como $k \neq 0$

$$\left|(U' + U) - I\right| = 0$$

Com a equação acima podemos determinar o conjunto E de valores z tais que os auto-valores de (4.10.1) tenham parte real negativa, ou seja, é possível determinar o conjunto de valores z tais que $(U' + U)$ seja definida negativa. Como k não influencia a determinação dos autovalores, temos provada a proposição.

Por outro lado tomando

$$\Lambda = kI,$$

se o conjunto $G = D \cap E$ contiver a origem então $\mathcal{G}(v,G)$ é um domínio de estabilidade e será determinado por

$$v(x) = kx'x < h(v,G)$$

ou $$x'x < \frac{h(v,G)}{k}$$

Desse modo é conveniente para facilidade tomar $k = 1$

Com estas consideraçãoes a procura de domínios de forma esférica de estabilidade assintótica pode ser realizada - com os passos seguintes:

1. Encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (4.7.1) e escolher o conjunto aberto D,

2. Encontrar a família linear associada $\dot{x} = U(z)x$,

3. Formar o sistema $\dot{x} = (U' + U)x$,

4. Encontrar o conjunto E de valores z tais que o sistema linear $\dot{x} = (U' + U)x$ tenha a origem como um ponto de equilíbrio assintòticamente estável (auto-valores com parte real negativa),

5. Encontrar $G = D \cap E$ e $\bar{h}(v,G)$ que é o supremo dos h, quadrado dos raios das hiperesferas ainda contidas em G. O domínio de estabilidade assintòtica da solução trivial do sistema (4.7.1), se $\{0\} \subset G$, é dado por $x'x < h(v,G)$.

4.11- Domínios de estabilidade assintótica quando U(z) é diagonal

Há casos em que os sistemas de classe $\mathcal{E}$, como (4.7.1), podem ser colocado na forma

$$\dot{x} = g(x)\, x \tag{4.11.1}$$

Neste caso a família associada ao sistema (4.11.1) tem uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} g_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & g_n(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{bmatrix}$$

e a família linear associada é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} g_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & g_n(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O sistema (4.9.1) é escrito na forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \zeta_1 g_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & \zeta_n g_n(z) \end{bmatrix} x$$

O conjunto E agora é determinado resolvendo-se o sistema de inequações

$$\begin{gathered} \zeta_1 g_1(z) < 0 \\ \vdots \\ \zeta_n g_n(z) < 0. \end{gathered}$$

e, como $\xi_i > 0$, é suficiente encontrar a solução do sistema de inequações

$$g_1(z) < 0$$
$$\vdots$$
$$g_n(z) < 0$$

Exemplo 4.11.1-

Encontre um domínio de estabilidade assintótica para a solução trivial do sistema

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -4x_2 + x_2^3.$$

Encontremos os pontos de equilíbrio do sistema; para isto é suficiente resolver o sistema algébrico abaixo

$$0 = -4x_1 + x_1^3$$

$$0 = -4x_2 + x_2^3$$

cuja solução é $(0,0)$, $(0,\pm 2)$, $(\pm 2,0)$, $(\pm 2,2)$, $(2,\pm 2)$.

O conjunto D será o interior do quadrado de lado igual a 2,"centrado"na origem.

A família linear associada será

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 + x_1^2 & 0 \\ 0 & -4 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e o conjunto E será dado pela solução das inequações

$$-4 + x_1^2 < 0$$

$$-4 + x_2^2 < 0$$

cuja solução é

$$x_1 < \pm 2$$

$$x_2 < \pm 2$$

Assim $G = D \cap E = D = E$. O domínio de estabilidade assintótica será o interior do conjunto de pontos dado pela superfície fechada de equação

$$v(x) = x' x = h(v,G) = 4,$$

ou seja,

$$\mathcal{G}(v,G) = \left\{ x \in R^2 \ / \ x_1^2 + x_2^2 < 4 \right\}$$

Exemplo 4.11.2-

Mudemos o sistema anterior dado para

$$\dot{x}_1 = -16x_1 + x_1^3$$

$$\dot{x}_2 = -4x_2 + x_2^3 \qquad (4.11.2)$$

Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$, $(\pm 4,0)$, $(0,\pm 2)$, $(\pm 4,2)$, $(4,\pm 2)$. Consideremos D como sendo o interior do retângulo de vértices $(-4,2)$, $(4,2)$, $(-4,-2)$, $(4,-2)$.

Aqui também $U(z)$ é diagonal e a família associada é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -16 + x_1^2 & 0 \\ 0 & -4 + x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O conjunto E agora é dado por

$$-16 + x_1^2 < 0$$

$$-4 + x_2^2 < 0$$

cuja solução é

$$x_1 < \pm 4$$

$$x_2 < \pm 2$$

Assim $G = D \cap E = E = D$, $\{0\} \subset G$.
Do mesmo modo que antes tomemos os pontos interiores à superfície fechada de equação

$$v(x) = x'\Lambda x = h(v,G).$$

Se quizéssemos um domínio de estabilidade assintótica de forma esférica tomaríamos

$$\Lambda = I$$

e a solução seria

$$\mathcal{G}(v,G) = \{ x \in R^{n=2} \ / \ x_1^2 + x_2^2 < 4 \} .$$

No caso de domínio elipsoidal poderíamos tomar

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e assim

$$v(x) = x'\Lambda x = x_1^2 + 4x_2^2 < h(v,G)$$

onde

$$h(v,G) = 16$$

Desse modo o conjunto $\mathcal{G}(v,G)$ dado

$$\mathcal{G}(v,G) = \{ x \in R^2 \ / \ x_1^2 + 4x_2^2 < 16 \}$$

é um domínio de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema (4.11.2) dado.

4.12- Comentários

O procedimento dado neste capítulo conduz a resultados concretos sempre que o conjunto G contém a origem em seu interior. A determinação do conjunto E não pressupõe o conhecimento da função de Liapunov, que só aparece explìcitamente na determinação do domínio de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema considerado. Contudo foi através do uso dessas funções que foi possível estabelecer as provas dos teoremas básicos.

Nos casos em que a origem é o único ponto de equilíbrio e $G = R^n$, a estabilidade assintótica global da solução trivial do sistema poderá ser garantida.

Deve-se notar que é possível obter melhores resultados com aplicações repetidas usando funções de Liapunov diferentes. O domínio de estabilidade assintótica final será a reunião dos domínios obtidos em cada aplicação.

O procedimento considerado no capítulo anterior admite a função de Liapunov como sendo uma forma quadrática e, através da imposição de condições sobre a derivada de v, em relação a t ao longo das trajetórias do sistema, procura-se determinar a função v.

Neste capítulo a função de Liapunov foi o veículo para o estabelecimento de resultados e foi sempre admitido que fosse uma forma quadrática.

No capítulo seguinte apresentamos o método de Schultz-Gibson que inicia a resolução do problema fazendo considerações sôbre o gradiente de v. O procedimento difere essencialmente dos anteriores porque não usa o conhecimento a priori da forma da função v para a obtenção dos resultados.

---oOo---

CAPÍTULO 5

O MÉTODO DOS GRADIENTES VARIÁVEIS

5.1- Introdução

Êste método, devido a Schultz-Gibson[27], fornece um procedimento lógico para a determinação de uma função de Liapunov. Na literatura em geral parte-se de uma certa função e procuram-se condições sob as quais ela conduza a conclusões sôbre estabilidade. Deste tipo são, principalmente, as funções propostas por Krasovskii.

O método dos gradientes variáveis não pressupõe o conhecimento da função v. Admite-se que o gradiente de v seja de uma forma geral considerada e, com restrições sobre os coeficientes e anulando o rotacional do gradiente, determina-se $\dot{v}$ de tal modo que v possa ser encontrada através de uma integral de linha.

O método, como apresentado, permite conclusões sôbre estabilidade assintótica global. Para isto consideraremos a equação do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= f(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}\qquad (5.1.1)$$

onde $f(0) = 0$. Êste sistema apresenta um único ponto de equilíbrio, a origem, e admitiremos que o segundo membro satisfaça as condições usuais para existência, unicidade e prolongabilidade até $+\infty$ das soluções, dado $x_o = \varphi(0;x_o)$.

Podemos escrever (5.1.1) do modo compacto seguinte

$$\dot{x} = A(x)x \qquad (5.1.2)$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

onde

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ a_1(x) & \cdots & & & a_n(x) \end{bmatrix}$$

onde as funções $a_i: R^n \to R$ são contínuas.

Utilizaremos um teorema de Liapunov modificado devido a La Salle, citado por Schultz e Gibson.

5.2- Um teorema de Liapunov modificado

Se existe uma função $v: R^n \to R$ com derivadas parciais contínuas de tal modo que

$$v(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\dot{v}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{(ao menos semi-definida negativa)}$$

$$v(x) \to \infty \quad \text{se} \quad \|x\| \to \infty,$$

então, se $\dot{v}$ não é idênticamente nula ao longo de qualquer trajetória diferente da origem, o sistema (5.1.2) é assintòticamente estável globalmente.

5.3- O método dos gradientes variáveis

Se v é uma função de Liapunov, a derivada de v em relação aotempo ao longo das trajetórias de um sistema autônomo dado, é calculada pela expressão

$$\dot{v}(x)=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \tag{5.3.1}$$

Esta expressão também pode ser escrita, em têrmos do gradiente, na forma

$$\dot{v}(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

que notaremos

$$\dot{v}(x) = \nabla v' \, \dot{x} \tag{5.3.2}$$

onde $\nabla v'$ é um vetor linha de componentes $(\nabla v_1, \dots, \nabla v_n)$.

Para obter a função v a partir de $\dot{v}$ é suficiente calcular a integral

$$v(x) = \int_0^x \nabla v' dx \tag{5.3.3}$$

O integrando é em última análise um produto escalar de dois vetores e, portanto, como era de se esperar, v será um escalar. A integral (5.3.3) deve ser calculada de modo - que v seja única. Vamos então impor que o rotacional do gradiente seja nulo, isto é

$$\nabla \times \nabla v = 0 \quad {}^{*}$$

porque assim o integrando será uma diferencial exata e a v será única, independentemente do percurso de integração. Estas condições podem ser resumidas do modo seguinte.

Para o rotacional do gradiente se anular a condição é que a matriz ϕ formada pelos elementos

$$\frac{\partial \nabla v_i}{\partial x_j}$$

seja simétrica. Assim

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \nabla v_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_n} & \cdots & & \frac{\partial \nabla v_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

De um modo geral as $\frac{(n-1)n}{2}$ condições para ϕ ser simétrica são

$$\frac{\partial \nabla v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla v_j}{\partial x_i} \qquad (\, i,j=1,\ldots,n,\ i \neq j)$$

* - No caso do R^n

$$\nabla \times \nabla v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[u_j \times u_k \right] \frac{\partial \nabla v_k}{\partial x_j}$$

onde u_j é o vetor unitário na direção x_j.

Se (5.3.3) pode ser calculada independentemente do percurso de integração, podemos tomar o mais simples como na figura 5.3.1, considerando para exemplo $x \in R^3$.

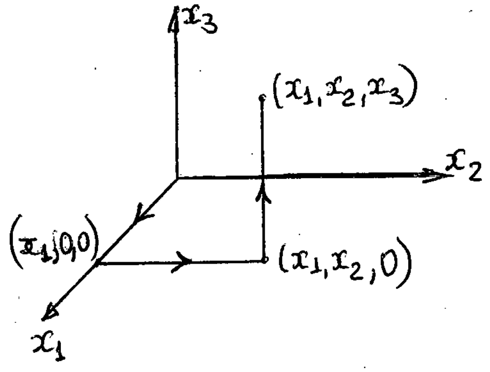


fig. 5.3.1

Então podemos calcular

$$v(x) = \int_0^{x_1(x_2=x_3=\ldots=x_n=0)} \nabla v_1 \, dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1, x_3=\ldots=x_n)} \nabla v_2 \, dx_2$$

$$\ldots + \int_0^{x_n(x_1=x_1, x_2=x_2, \ldots, x_{n-1}=x_{n-1})} \nabla v_n \, dx_n$$

(5.3.4)

As considerações sôbre o rotacional do gradiente de v e as relações decorrentes aparentemente complicam o problema, mas são elas justamente que permitem a determinação de v.

É de se esperar que o gradiente de v tenha n componentes. Vamos supor então que o gradiente de v é da forma geral abaixo, com coeficientes variáveis,

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Devemos agora impor condições sôbre o ∇v de modo que $\dot{v}$ seja ao menos semi-definida negativa. Para isto usemos $\alpha_{ii} > 0$ $(i=1,\ldots,n)$ para que v tenha ao menos uma chance de ser definida positiva e α_{ii} função sòmente de x_i $(i=1,\ldots,n)$.

A escôlha de $\alpha_{nn} = 2$ garante a inclusão de um têrmo x_n^2. Os α_{ij} $(i \neq j)$ são deixados arbitrários e são a soma de uma parcela constante α_{ijc} e de uma parcela α_{ijv} função de até (n-1) variáveis. Assim

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ijc} + \alpha_{ijv}(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

Desse modo podemos escrever em sua forma mais geral, com as imposições feitas, a matriz $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} \alpha_{11c}+\alpha_{11v}(x_1) & \alpha_{12c}+\alpha_{12v}(x_1\ldots x_{n-1}) & \alpha_{1nc}+\alpha_{1nv}(x_1\ldots x_{n-1}) \\ \alpha_{21c}+\alpha_{21v}(x_1\ldots x_{n-1}) & \alpha_{22c}+\alpha_{22v}(x_2) & \cdots \\ \vdots & & \ddots \\ \alpha_{n1c}+\alpha_{n1v}(x_1\ldots x_{n-1}) & & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\nabla v = \mathbb{H}\, x$ (5.3.5)

Note que α_{nn} foi escolhido como constante e α_{ij} podem ser funções de qualquer ou de tôdas as variáveis x_i exceto a enésima.

Estas condições são impostas para assegurar que $\nabla \dot{v}$ tenha uma parcela da forma x_n^2 e não produza qualquer têrmo linear ou de mais alta ordem naquela variável. Perde-se - pouco na generalidade e com estas imposições é possível verificar, mediante considerações geométricas, se $v = c$, c positivo, são curvas fechadas.

Para aplicar o método podemos proceder de acôrdo - com os passos seguintes:

1. Supor ∇v da forma (5.3.5);

2. Do ∇v determinar $\dot{v} = \nabla v' \dot{x}$;

3. Restringir $\dot{v}$ para ser ao menos semi-definida negativa;

4. Usar as $\frac{n(n-1)}{2}$ equações do rotacional obtidas de modo a tornar simétrica a matriz ϕ para determinar os coeficientes ainda desconhecidos no ∇v;

5. Conferir a função $\dot{v}$ pois o passo anterior pode alterá-la;

6. Calcular v usando (5.3.3) e verificar se v é definida positiva, que é o mesmo que verificar se v= c são curvas fechadas, c positivo.

Convém observar que nas aplicações a maioria dos α_{ii} se anulam quando se impõem restições sôbre $\dot{v}$.

5.4- Exemplo

Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 - x_1 - x_2 \tag{5.4.1}$$

1. Vamos usar

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \tag{5.4.2}$$

2. Com o gradiente na forma acima calculemos $\dot{v}$ ao longo das trajetórias do sistema (5.4.1):

$$\dot{v} = v'\dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 & \alpha_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^2 x_2 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

3. Efetuando as operações indicadas chegamos a

$$\dot{v} = -\alpha_{21}x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 + (\alpha_{11} - \alpha_{21}x_1^2 - \alpha_{21} - 2)\, x_1 x_2 -$$
$$-(2 - \alpha_{12})\, x_2^2 \, .$$

Para $\dot{v}$ ser definida negativa vamos impor

$$\alpha_{11} - \alpha_{21}x_1^2 - \alpha_{21} - 2 = 0$$

$$2 - \alpha_{12} > 0$$

$$\alpha_{21} > 0$$

4. Escolhendo $\alpha_{12} = 1$ e com

$$\alpha_{11} = 2+\alpha_{21}+\alpha_{21}x_1^2$$

o ∇v fica

$$\nabla v = \begin{bmatrix} (2+\alpha_{21}+\alpha_{21}x_1^2)x_1+x_2 \\ \alpha_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

A condição para o rotacional do gradiente se anular neste caso é

$$\frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1}$$

Logo $$1 = \frac{\partial \alpha_{21v}}{\partial x_1} x_1 + \alpha_{21c} + \alpha_{21v}$$

onde

$$\alpha_{21v} = \psi(x_1) = \text{cte.}$$

e assim $\alpha_{21} = 1.$

5. Com êstes valores para os coeficientes temos agora:

$$\dot{v} = -x_1^2 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^2 < 0 \qquad \forall\, x \neq 0.$$

A v pode agora ser calculada usando (5.3.3)

$$v = \int_0^{x_1(x_2=0)} (3x_1 + x_1^3 + x_2)\, dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} (x_1 + 2x_2)\, dx_2$$

que fornece

$$v(x) = \frac{5x_1}{4} + \frac{x_1^4}{4} + \left(\frac{x_1}{2} + x_2 \right)^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Assim pudemos encontrar uma função v definida positiva que tem derivada, em relação ao tempo ao longo das trajetórias do sistema (5.4.1), definida negativa. Além disso

se $\|x\| \to \infty$ $\quad v \to \infty$

satisfazendo assim tôdas as condições do teorema de La Salle dado no ítem 5.2. Podemos então concluir que a origem do sistema (5.4.1) é assintòticamente estável globalmente.

Observemos que a escôlha de

$$\alpha_{12} = 0$$

acarreta

$$\alpha_{21} = 0$$

Nestas condições o gradiente de v fica então

$$\nabla v = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\dot{v}(x) = -(2x_1^2 + 1)\, x_2^2$$

que, com auxílio de (5.3.3), fornece

$$\bar{v}(x) = x_1^2 + x_2^2$$

A função v é definida positiva e

se $\|x\| \to \infty$ $\quad v \to \infty$.

Além disso, como a função $\dot{v}$ é sòmente semi-definida negativa, devemos verificar a última condição do teorema de La Salle (ítem 5.2).

A função $\dot{v}$ só se anula ao longo do eixo x_1 de equação $x_2 = 0$. Porém a reta $x_2 = 0$ não é solução do sistema (5.4.1). Desse modo também aqui, já que $\dot{v}$ não se anula ao longo de nenhuma trajetória de (5.4.1), a estabilidade assintótia global da solução trivial do sistema (5.4.1) é garantida.

5.5- Comentários

Êste método fornece meios para se encontrar funções de Liapunov para sistemas como (5.1.1), que admitem sòmente a origem como ponto de equilíbrio e que, em sua forma mais geral, aplica-se a todos os casos para os quais uma solução ≠ trivial assintòticamente estável exista.

As funções de Liapunov encontradas nem sempre são - formas quadráticas, o que dificulta bastante a discussão de sinal, já que não se aplicam condições do tipo das condições de Sylvester àqueles casos.

A parcela mais à direita do segundo membro de (5.3.4) é

$$\int_0^{x_n(x_1=x_1,\dots,x_{n-1}=x_{n-1})} \underline{\nabla} v_n \, dx_n \qquad (5.5.1)$$

que é uma das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A enésima linha do vetor gradiente (5.3.5) tem a forma

$$\left[\alpha_{n1c} + \alpha_{n1v}(x_1 \ldots x_{n-1})\right] x_1 + \ldots +$$
$$\left[\alpha_{n(n-1)c} + \alpha_{n(n-1)v}(x_1 \ldots x_{n-1})\right] x_{n-1} + 2x_n$$

Assim (5.5.1) fornece uma soma do tipo

$$2g(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n + x_n^2.$$

As outras parcelas do segundo membro de (5.3.5) fornecem funções h_i $(i=1,\ldots,n-1)$ de no máximo (n-1) variáveis com as restrições impostas antes. Assim v é sempre da forma

$$v(x) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 2\, g(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n + x_n^2 \tag{5.5.2}$$

Como discutido por La Salle [27] podemos escrever

$$v(x) = (x_n + g)^2 + h - g^2$$

Para que v seja definida positiva é suficiente que

$(h - g^2)$, função de (n-1) variáveis, seja definida positiva. Se esta função for quadrática em uma ou mais variáveis podemos repetir o procedimento. Êste foi o caso do exemplo dado.

Os autores sugerem um procedimento geométrico que ilustramos com um sistema de terceira ordem. Vamos admitir que

$$v(x) = v(x_1, x_2, x_3) \tag{5.5.3}$$

é uma função de Liapunov para o sistema de terceira ordem

$$\dot{x} = f(x)$$

Se na (5.5.3) fazemos constante uma das variáveis estaremos interceptando

$$v = c \tag{5.5.4}$$

por um plano perpendicular à direção definida pela variável fixada. As interseções deste plano com (5.5.4) devem sempre determinar curvas fechadas.

Se movemos o plano ao longo da direção definida pela variável fixada a curva interseção deve desaparecer. Considerações semelhantes podem ser feitas com relação a sistemas de ordem n.

Afora estas dificuldades que podem ocorrer, o método dá uma maneira lógica de se procurar funções de Liapunov para sistemas da forma do sistema (5.1.1). Reconhece-se que é realmente de auxílio valioso na solução de problemas de - estabilidade da solução trivial com auxílio do segundo método de Liapunov.

Também no capítulo seguinte apresentamos outro procedimento que tem um caráter diferente do usual. Utilizando a noção de sistemas dinâmicos (capítulo 1) Zubov encara o problema da estabilidade assintótica sob um ângulo novo e apresenta resultados bastante interessantes.

---oOo---

CAPÍTULO 6

O MÉTODO DE ZUBOV

6.1- Introdução

Usando os resultados do matemático russo V.I.Zubov [16,17] , uma função de Liapunov pode ser encontrada, para sistemas cuja solução trivial é assintòticamente estável, através da solução de uma equação diferencial parcial e, se esta equação tem solução numa forma fechada, a função de Liapunov, solução da equação, será única e permitirá a determinação do domínio exato de estabilidade assintótica (ítem 2.4).

Nos casos em que a equação diferencial parcial mencionada não tem solução em forma fechada, é possível encontrar funções de Liapunov que nos levarão a um domínio de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema considerado (contido no domínio exato), mediante o uso de expansão em série.

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\dot{x} = f(x)$$

$$f(0) = 0 \qquad (6.1.1)$$

onde $x \in R^n$, a origem $x=0$ é assintòticamente estável e o segundo membro de (6.1.1) é uma função contínua que satisfaz certas condições que garantem a existência, unicidade e prolongabilidade até $+\infty$ da solução $\varphi(t;x_0)$ para todo x_0.

Os teoremas de estabilidade quando formulados tendo em vista a noção de sistema dinâmico assumem formas particularmente elegantes. Com êste enfoque Zubov apresenta seus resultados principais bem como uma aplicação para os sistemas autônomos.

Vimos no ítem 1.2 condições sob as quais um sistema de n equações diferenciais ordinárias pode ter como solução um sistema dinâmico. A importância deste fato é que os resultados de Zubov para sistemas dinâmicos são aplicáveis a sistemas da forma (6.1.1), de acôrdo com o seguinte teorema.

6.2- Teorema de Zubov [16]

Se existirem $A \subset R^n$, A aberto contendo a origem, $v: A \to R^n$ contínua, $\theta: R^n \to R$ contínua tais que

i. $0 < v(x) < 1 \quad \forall x \in A \setminus \{0\}$

ii. $\theta(x) > 0 \quad \forall x \in A \setminus \{0\}$, $\theta(0) = 0$

iii. $\langle \nabla v, f \rangle = \dot{v} = -\theta(x)(1-v(x)) \sqrt{1+\|f(x)\|^2}$, $\forall x \in A$

iv. Para tôda sequência $(x_k)_{k \geq 1}$ de pontos de A, convergente para algum $x_0 \in \bar{A} \setminus A$, $\lim_{k \to \infty} v(x_k) = 1$

v. No caso de A ser ilimitado, para tôda sequência $(x_k)_{k \geq 1}$ de pontos de A tal que $\lim_{k \to \infty} \|x_k\| = \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} v(x_k) = 1$$

então A é o domínio exato de estabilidade assintótica da solução trivial de (6.1.1).

A condição v pode ser escrita, considerando (6.1.1) um sistema de segunda ordem, na forma

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2 = -\theta(x)\,(1-v(x))\,\sqrt{1+\|f(x)\|^2} \tag{6.2.1}$$

que é uma equação diferencial parcial linear com coeficientes variáveis. A função θ pode ser uma forma quadrática - definida positiva ou semi-definida positiva conforme [28].

Em lugar de (6.2.1) vamos considerar a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2 = -\varphi(x)\,(1-v(x)) \tag{6.2.2}$$

Se o segundo membro de (6.1.1) satisfaz as condições próprias que garantem a existência, unicidade e continuidade das soluções para

$$-\infty < t < \infty$$

então a função v pode ser encontrada de maneira única através de (6.2.2), escolhendo-se φ como uma forma quadrática definida positiva. Se êste não é o caso então usamos (6.2.1) escolhendo θ da mesma maneira. A função v assim encontrada satisfaz a (6.2.2) e a (6.2.1) respectivamente, bem como às condições do teorema de Zubov.

6.3- Conclusões do teorema de Zubov

Vejamos algumas conclusões importantes obtidas diretamente do teorema de Zubov.

Seja A um domínio de estabilidade assintótica da solução trivial de (6.1.1) e seja

$$G(\lambda) = \{ x \in R^n \ / \ 0 \leq v(x) < \lambda, \ \lambda \in (0,1) \}$$

a. Se $x \in A$, $A \subset R^n$, então $0 \leq v(x) < 1$

b. Se $y \in \bar{A} \setminus A$, $x \in A$, então $\lim\limits_{x \to y} v(x) = 1$

c. Se $\lambda \in (0,1)$ então $G(\lambda) \subset A$ e é limitado

d. Se $v(x) = 1$ existe ela é solução de (6.1.1)

e. Para θ fixada, a $v(x)$ solução de (6.2.2) é única

f. $\bar{A} \setminus A$ é uma família de curvas $v(x) = 1$

g. Para que a solução trivial de (6.1.1) seja assintòticamente estável globalmente é necessário e suficiente que $v(x) < 1 \quad \forall x \in R^n$

Estamos interessados em, dado o sistema (6.1.1), determinar uma função de Liapunov $v(x)$ que nos dê informações acêrca da estabilidade assintótica da solução trivial do -

sistema. O teorema de Zubov dá condições, através da expressão (6.2.2) e das conclusões acima, para a determinação da função v de Liapunov que pode conduzir ao domínio exato de estabilidade assintótica da solução trivial, cuja fronteira tem a equação $v(x) = 1$.

Vejamos um exemplo citado por Zubov e outro por Margolis. (Referências [16] e [28] respectivamente).

6.4- Exemplos

Exemplo 6.4.1

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \qquad (6.4.1)$$

Vamos escolher

$$\varphi(x) = \theta(x)\sqrt{1+\|f\|^2} = x_1^2 + x_2^2$$

A equação deferencial parcial (6.2.2) é então

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)(1-v) \qquad (6.4.2)$$

Esta equação pode ser solucionada resolvendo-se o sistema, comumente chamado associado, de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \frac{dv}{-\varphi(x)(1-v)}$$

e determinando-se duas funções $u(x)$ e $w(x)$ tais que

$$F(u,w) = 0$$

onde F é uma função arbitrária relacionando u com w e fornecendo uma solução da equação diferencial parcial de primeira ordem (6.2.2). F é uma solução geral de (6.2.2).

Neste caso a função v encontrada, solução de (6.4.2), é

$$v(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2(1-x_1 x_2)} \right) \qquad (6.4.3)$$

Já sabemos que a fronteira é dada pela equação

$$v(x) - 1 = 0.$$

Quando temos

$$xy = 1 \qquad (6.4.4)$$

a condição acima é satisfeita. Portanto esta curva (6.4.4) define a fronteira do domínio exato de estabilidade assintótica da solução trivial do sistema dado.

Podemos usar ainda uma outra função de Liapunov fazendo a substituição

$$\nu = - \ln (1-v).$$

Derivando ambos os membros obtemos

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{1-v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Substituindo em (6.2.2) obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2 = -\varphi(x) \qquad (6.4.5)$$

e agora a condição que define a fronteira do domínio exato de estabilidade assintótica da solução trivial de (6.1.1) é

$$v(x) \to \infty \qquad \text{quando} \quad \|x\| \to \infty$$

Com esta substituição a equação (6.4.2) do exemplo 6.4.1 fica

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

cuja solução é

$$v(x) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2(1-x_1x_2)}$$

que, com a condição de fronteira modificada, também conduz à curva

$$xy = 1.$$

Exemplo 6.4.2

Consideremos agora o sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \qquad (6.4.6)$$

Baseado na equação (6.4.5) podemos escrever

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\left(-2x_1 + 2x_2^4\right) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(-x_2) = -\varphi(x). \qquad (6.4.7)$$

Usando uma função definida positiva

$$\varphi(x) = 24\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

podemos obter, como solução de (6.4.7), a função de Liapunov

$$= 6x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_1x_2^4 + x_2^8$$

Notemos que para qualquer $x \in R^n$ e

$$\|x\| < \infty \Rightarrow v(x) < \infty .$$

Assim, como

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow v(x) \rightarrow \infty$$

a solução trivial do sistema (6.4.6) é assintòticamente estável globalmente.

6.5- Considerações

Como se pode ver, teòricamente, o método de Zubov - conduz sempre a um resultado que fornece o domínio exato de estabilidade assintótica da solução trivial de (6.1.1), se a solução trivial de (6.1.1) é assintòticamente estável. Para isto basta que o sistema de equações diferenciais ordinárias (6.1.1) satisfaça às condições usuais de existência, unicidade e prolongabilidade até $+\infty$ das soluções.

Normalmente é muito difícil encontrar-se a solução de (6.2.2) numa forma fechada. São bem poucos mesmo os casos possíveis. Desse modo é interessante e conveniente pensar-se numa solução aproximada de (6.2.2), que nos leve pelo menos a uma estimativa do domínio de estabilidade assintótica da solução trivial de (6.1.1). As soluções em série são os recursos que se prestam a êste tipo de solução.

6.6- As soluções em série

O sistema de equações diferenciais (6.1.1) admitirá um domínio de estabilidade assintótica para a solução - trivial se e sòmente se a solução trivial for assintòticamente estável .

Por causa disso vamos considerar os sistemas da forma (3.4.2)

$$\dot{x} = Ax + g(x) \qquad (3.4.2)$$

onde $x \in R^n$ e A é uma matriz constante nxn, cujas raizes da equação característica

$$|A - \lambda I| = 0$$

têm parte real negativa, e onde $g(x)$ são funções que admitem expansão em série de potências com têrmos de grau maior ou igual a dois.

A matriz A ter auto-valores com parte real negativa é condição suficiente para estabilidade assintótica da solução trivial de (3.4.2).

Os sistemas da forma (3.4.2) aparecem comumente nas aplicações e permitem discutir com relativa facilidade a estabilidade da solução trivial.

Para (3.4.2) Margolis demostra que existe um domínio de estabilidade assintótica para a solução trivial sòmente - quando os auto-valores de A têm parte real negativa. [19]

Na equação diferencial (6.2.1) a expressão

$$\sqrt{1+\|f\|^2}$$

representa um fator de escala. Consideremos agora a equação diferencial parcial do ítem iii do teorema de Zubov escrita

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i = -\theta(x)\,(1+f_i^2)\,(1-v) \qquad (6.6.2)$$

Como pode ser verificado esta equação também satisfaz as condições do teorema de Zubov.

Liapunov [1] demonstrou que se $\theta(x)$ for tomada como uma forma quadrática definida positiva ou qualquer forma definida positiva de grau $2m$, $m \geq 1$, a função v pode ser - obtida de maneira única na forma de uma série de potências convergente.

$$v(x) = v_2(x) + v_3(x) + \ldots + v_m(x) + \ldots$$

onde $v_m(x)$ é um polinômio homogêneo de grau m nas componentes do vetor x.

Zubov [16] apresenta asérie (6.6.3) acima e afirma sem demostrar que os têrmos de grau zero e de primeiro grau são nulos.

Uma prova deste fato é apresentada por Margolis [19].

Para a determinação da parcela $v_m(x)$ o segundo membro de (6.6.3) é inserido em (6.6.2), conduzindo às seguintes relações de recorrência

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right] = -\theta(x) \qquad (6.6.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right] = R_m(x) \ , \ (m=3,4,\ldots) \qquad (6.6.5)$$

onde R_m é uma forma de m-ésimo grau que é conhecida quando $v_2, v_3, \ldots, v_{m-1}$ já são conhecidas.

6.7- Soluções aproximadas

Na série (6.6.3) à medida que tomamos mais têrmos òbviamente as dificuldades aumentam. Podemos, no entanto, em muitas aplicações usar um número conveniente de têrmos no segundo membro de (6.6.3). Para isto é necessário que cada conjunto de pontos

$$v_m(x) = k$$

onde $m \geqslant 2$ e k é uma certa constante, esteja inteiramente contido em A, domínio exato de estabilidade assintótica.

Vamos considerar a função $v_2(x)$ e o conjunto W_2 definido

$$W_2 = \{ x \in R^n - \{0\} \,/\, \dot{v}_2(x) = 0 \}$$

Sôbre êste conjunto vamos tomar

$$\alpha = \min \; v_2(x) \qquad x \in W_2$$

$$\beta = \max \; v_2(x) \qquad x \in W_2$$

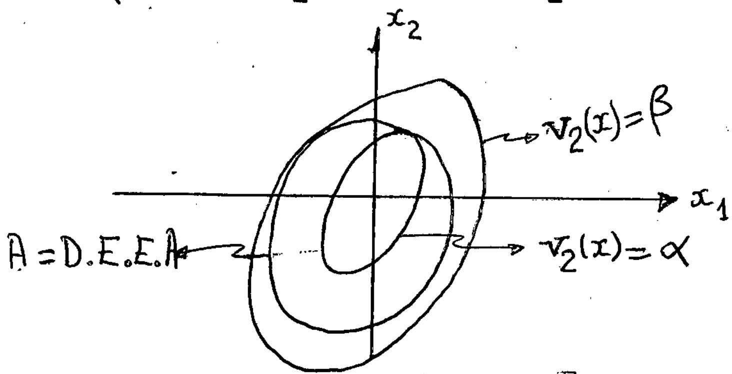


fig. 6.6.1 - Exemplo com $x \in R^2$

Teorema 6.6.1

O conjunto de pontos definido por $v_2(x) = \alpha$ está inteiramente contido no domínio de estabilidade assintótica A da solução trivial de (3.4.2).

Teorema 6.6.2

O conjunto de pontos definido por $v_2(x) = \beta$ contém inteiramente o domínio de estabilidade assintótica A da solução trivial de (3.4.2). Se $\beta = \infty$ a estabilidade assintótica global pode ser cogitada

Os dois teoremas acima combinados implicam em que - os pontos fronteira de A, domínio exato de estabilidade assintótica, permaneçam no domínio

$$\alpha < v_2(x) < \beta$$

Os argumentos na prova dos teoremas acima, dados por Hahn [22], não usam o fato de $v_2(x)$ ser forma quadrática e se aplicam igualmente bem à função

$$v_2 + v_3 \text{ , etc..}$$

Seja agora

$$v^{(n)}(x) = v_2(x) + \dots + v_n(x)$$

$$W^{(n)}(x) = \{ x \in R^n \ / \ \dot{v} = 0 \}$$

$$c_1^{(n)} = \min \{ v^{(n)}(x) \text{ sôbre } W^{(n)}(x) \}$$

$$A^{(n)} = \{ x \in R^n \ / \ v^{(n)}(x) \leq c_1^{(n)} \}$$

A extensão do teorema 6.6.1 conduz ao teorema 6.6.3.

Teorema 6.6.3

O conjunto de pontos definido por $v^{(n)}(x) = c_1^{(n)}$ es tá inteiramente contido no domínio exato de estabilidade as sintótica A da solução trivial de (3.4.2).

O teorema 6.6.3 induz a pensar que o uso de mais têrmos na série (6.6.3) conduz a melhores resultados, ou seja

$$A^{(n)} \subset A^{(n\ 1)} .$$

Isto nem sempre é verdade para todos os valores de n. (Margolis [28])

6.8- Comentários

Além das condições de suficiência o teorema de Zubov fornece condições necessárias para a existência de funções de Liapunov para estabilidade assintótica. Se a solução da equação diferencial (6.2.2) puder ser encontrada numa forma fechada, o método de Zubov conduz ao domínio exato de estabilidade assintótica para a solução trivial do sistema (6.1.1) considerado.

O método permite ainda, quando for o caso, concluir se a estabilidade assintótica da solução trivial é global.

Quando não for possível encontrar-se uma solução na forma fechada para (6.2.2), para sistemas como (3.4.2) pode-se encontrar uma aproximação do verdadeiro domínio de estabilidade.

Estudos têm sido feitos no sentido de se procurar métodos computacionais para a solução de (6.2.2). Margolis [19, 28] desenvolveu um programa codificado em Fortran, aplicável a sistemas de segunda ordem, e resolveu o problema para sistemas representáveis pela equação de Lienard e de Van der Pol, apesar de dificuldades na convergência das soluções aproximadas.

Outra dificuldade que surge na utilização de soluções aproximadas é a decorrente do aumento da ordem do sistema [29] (discussão).

---oOo---

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES FINAIS

7.1- Comentários finais

O segundo método de Liapunov, como se pôde verificar, dispensa o conhecimento explícito das soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias sob estudo. Êste é um aspecto bastante interessante e muito importante do método, pricipalmente tratando-se de sistemas não lineares que têm solução geralmente muito difícil de ser encontrada.

Por esta razão em particular êste método tem sido muito estudado, haja visto o grande número de publicações a seu respeito. No entanto, apesar da extensão da bibliografia, alguns conceitos ainda não estavam bem definidos.

Entre outros, êste trabalho teve o objetivo de fixar aquêles conceitos do segundo método de Liapunov e apresentar a matéria de uma maneira que nos parece lógica.

Tentativas têm sido feitas no sentido de se aproveitar a potencialidade dos computadores digitais. Margolis [19,28] e Rodden [30], entre outros, formularam procedimentos codificados em Fortran para sistemas de segunda e segunda e terceira ordem respectivamente.

Pode-se pensar também na sinulação de sistemas por meio de computadores analógicos ou digitais. A dificuldade é que só se pode estudar sistemas de segunda ordem.

Como se vê, o problema da determinação de domínios de estabilidade assintótica da solução trivial de um certo cistema considerado ainda se encontra longe de estar - inteiramente resolvido.

Devido à sua grande aplicação e maior facilidade de tratamento matemático tem-se dado maior atenção aos sistemas autônomos e ainda bem pouca aos sistemas não autônomos.

Apesar de não inteiramente solucionado o problema, o segundo método de Liapunov se presta razoàvelmente bem à solução de certos tipos de sistemas autônomos lineares ou não.

7.2- Sugestões para futuros estudos

Alguns ítens podem ser apontados como merecedores de mais atenção e estudo.

No método dos sistemas lineares associados um dos passos na aplicação do critério é a determinação de um conjunto E, cuja interseção com o conjunto D fornece G que - contém em seu interior o $\mathcal{G}(v,G)$, domínio deestabilidade assintótica para a solução trivial do sistema em questão. Mediante o estabelecimento de condições convenientes e com - uma função de Liapunov mais geral é interessante tentar provar que o próprio conjunto G é um domínio de estabilidade assintótica.

No método dos gradientes variáveis, como apresentado, fica-se restrito a sistemas que admitem sòmente a origem como ponto de equilíbrio. Ganha-se, quando é o caso, - condições de se concluir sôbre a estabilidade glogal. No entanto poderíamos tentar estender o procedimento a sistemas com mais de um ponto de equilíbrio.

Em acordo com sugestão de Hahn[15] em lugar de $v(x)$ poderíamos usar $\mathcal{N}(x)$, conforme substituição mencionada, e tentar um programa automático de cáculo em computador digital para solução das relações de recorrência(6.6.4) e (6.6.5).

---oOo---

BIBLIOGRAFIA

1. LIAPUNOV,A.M. -"Probleme General de La Stabilité du Mouvement",Annals de La Faculté des Sciences de Toulouse, seg.série, 9, 1907. Reimpresso Annals of Math Series, nº 17, Princeton University Press, 1949.

2. POINCARÉ,H. -"Les Methods Nouvelles de la Mécanique Céleste",Vols. I eII, Gauthier-Villars, Paris, 1892 Reimpresso Dover Publications, N.Y.,1957.

3. ROUTH,E.J. -"Dynamics of a System of Rigid Bodies", N.Y. The Macmillan Co., 1892.

4. NYQUIST,H. -"Regeneration Theory", Bell System Tech. J., 11, 1932.

5. BODE,H.W. -"Network Analysis and Feedback Amplifier Design" D. Van Nostrand Co. Princeton,N.J., 1945.

6. JAMES,H.M., NICHOLS,N.B. and PHILIPS,R.S. -"Theory of Servomenanisms",cap 4, McGraw-Hill Book Company, N.Y., 1947.

7. EVANS,W.R. -" Graphical Analysis of Control Systems", Trans. AIEE, vol 67, Part II, pp 547-551, 1948.

8. KOCHENBURGER, R.J. -"Frequence Response Method for Analysing and Synthesizing Contactor Servo Mechanisms", Trans AIEE,vol 69,PartI,pp 270,283, 1950.

9. PERSIDSKII,R. -"On the Theory of Stability of Systems of Differential Equations", Izvestia Fiz.-Mat. Obschetvo Kazan. Univ., Vol.2, nº 3, pp 29-45, 1938.

10. LUR'E,A.-"On the Stability of one Type of System Under Control", Prikladnaya Matematika i Mechanika,vol 9, pp 353-367, 1945.

11. LA SALLE,J.P. and LEFSCHETZ,S. -"Stability by Liapunos's Direct Method With Aplications", Math. in Science and Engineering, vol.4, Academic Press, 1961.

12. DE RUSSO,P.M., ROY, R;J and CLOSE,C.M. -"State Variables for Engineers", John Wiley & Sons, Inc.,N.Y. 1967.

13. KALMAN,R.E. -" Canonical Structure of Linear Dynamical Systems", Proc.Natl.Acad.Sci.,vol.48, april,pp 596-600, 1962.

14. ZADEH,L.A. and DESOER,C.A. -"Linear System Theory - The State Space Approach", McGraw-Hill Book Co.N.Y.,1963

15. HAHN,W. -"Stability of Motion",Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, N.Y.,1967

16. ZUBOV,V.I.-"Methods of A.M.Liapunov and Their Aplication" (trad.orig.russo)P. Noodhoff LTD, Groningen, The Netherlands, 1964.

17. ZUBOV,V.I.-"Mathematical Methods for the study of Automatic Control Systems",(trad.orig.russo),The MacMillan Company, N.Y., 1963

18. MALKIN,I.G. -"Theory of Stability of Motion" AEC-tr335 (trad. de public.do State Publishing House of Tecnical-Theoretical Literature, Moscow and Leningrad, 1952).

19. MARGOLIS,S.G. -"Computations of Regions of Asyntotic Stability for Closed-loop Systems By Lyapunov's Method", PhD Thesis, University of Pittsburgh, Pittsburgh,Pa., 1962.

20. CESARI,L. -"Asyntotic Behavior and Stability Problems in Ordinary differential Equations", trad. ing. - Academic Press Inc., Publishers - N.Y., 1963.

21. MASSERA,J.L. -"Converse Theorems of Liapunov's Second Method", Symp. intern. Ecuac. Diff. Ordin., México 1961, 158-163 (1962).

22. HAHN,W. -"Theory and Aplication of Liapunov's Direct Method", Ergebn.d.Math.,Heft 22, Berlin 1959 - trad. ing. Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.

23. GANTMACHER,F.R.,"Theory of Matrices",Vol 1, CHELSEA Publishing Company, N.Y., 1960.

24. BELMAN,R. -" Introduction to Matrix Analysis", N.Y. - MacGraw-Hill Book Co.,N.Y., 1960.

25. DORF,R.C. -"Time-domain Analysis and design of Control SystemS" - ADDISON- Wesley Publishing Company Inc., 1965.

26. BORGES VIEIRA,L.R.,"Theory of Associated Systems for Study of the Stability in the Large",Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, Vol 14, 1962.

27. SCHULTZ,D.G. and GIBSON,J.E. -"The Variable Gradiente Method for Generating Liapunov Functions",AIEE Trans., Part II, pp 203,210, set. 1962.

28. MARGOLIS,S.G., and VOGT,W.G., -"Control Engineering Aplication of V.I.Zubov's Construction Prodedure for Liapunov's Functions", IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-8, pp 104-113, abril 1963

29. YU,Y., and VONGSURIYA,K -"Non Linear Power System Stability Study by Liapunov Function and Zubov's Method", IEEE Trans. on Power App. and Syst.-Vol PAS-86, nº 12, Dez. de 1967.

30. RODDEN,J.J. -"Numerical Aplications of Liapunov Stability Theory",Proc. of J.A.C.C., Jun. 1964, pp 261-268.

31. KALMAN,R.E. and BERTRAM,J.E. -" Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Lyapunov - Continous-Time Systems"- Jounal of Basic Engineering, Jun. 1960, pp 371-393.

---oOo---