PROGRAMAÇÃO CONTÍNUA: PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES

JOSÉ ANTÔNIO ORTEGA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS.

APROVADA POR:

Presidente

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

NOVEMBRO DE 1971

A Vera

Ao Maurício

AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar sua gratidão a todos que, de uma maneira ou de outra, colaboraram na realização dêste trabalho.

Especialmente:

Ao Professor NELSON ORTEGOSA DA CUNHA, pela valiosa orientação.

Aos Professores PRAVIN VARAYA, RODRIGO RESTREPO e RICHARD SAEKS e demais colegas pelas discussões e sujestões.

À CAPES, pelo apôio financeiro.

À SONIA MARIA ESTRELA CARVALHO, pela sua dedicação no trabalho de datilografia.

RESUMO

O assunto desta tese é o Problema de Programação Contínua, entendido como uma versão contínua de problemas discretos de programação linear. Inicialmente tratamos do caso em que as restrições são lineares, no espaço das funções limitadas e Lebesgue - mensuráveis, apresentando resultados envolvendo uso generalizado de dualidade. Para tratar o caso em que as restrições não são lineares, demonstramos uma versão contínua de um teorema de / "Turnpike", usado na Economia Matemática para processos discretos. Êste teorema indica a natureza do comportamento das soluções ótimas quando a duração do processo é suficientemente grande.

ABSTRACT

This thesis is concerned with the Continuous Programming Problem, regarded as a continuous version of discrete problems in linear programming. First we treat the case in which the constraints are linear, in the space of bounded Lebesgue-measurable functions, presenting results involving extensive use of duality. To treat the case when the constraints are not linear, a continuous version of a "Turnpike" theorem, used in Mathematical Economics for discrete processes, is derived. This theorem indicates the nature of the behavior of all optinal solutions when the process time is"large".

ÍNDICE

Páginas:

INTRODUÇÃO

Na análise de processos econômicos, surgem frequentemente problemas de otimização de formas lineares, devendo ser satisfeitas restrições lineares. No atual estágio da teoria da programação linear, uma grande parte dêsses problemas podem ser resolvidos numèricamente, com o emprêgo de computadores e de algorítmo "simplex".

Entretanto, no estudo de processos envolvendo um número moderado de atividades mas um número muito grande de estágios, encontra-se a dificuldade usual da dimensionabilidade, quando são usados métodos computacionais convencionais. Processos dêsse tipo são encontrados na siderurgia e nas indústrias de petróleo e cimento, por exemplo.

É devido a Bellman [1] a idéia de se efetuar versões contínuas de tais problemas, que êle mesmo enfatizou, podem em muitos casos realmente estar mais próximos da realidade do que as versões discretas.

Uma ferramenta essencial nesse tratamento é a versão contínua do problema dual, explorando assim a linearidade do processo.

Assim, no 1º capítulo, apresentamos as origens de tais versões e formulamos o problema geral, particularizando para o caso das restrições serem lineares, quando então temos o problema de programação linear contínua. Estabelecemos também alguns resultados introdutórios sem o uso de dualidade. A definição do problema dual, resultados fracos é um teorema de dualidade forte são vistos no 2º capítulo.

A resolução pròpriamente dita do problema de programação linear contínua é tratada no 3º capítulo, onde discutimos duas maneiras, uma algorítmica e outra fazendo uso de equações diferenciais.

O 4º Capítulo é dedicado à análise das propriedades das soluções do problema de programação contínua cujas restrições não sejam lineares. Para tanto, é demonstrada uma versão contínua de um teorema de "Turnpike".

Finalmente, no 5º capítulo, fazemos considerações gerais sôbre o assunto tratado e damos sugestões para pesquisas futuras.

OBSERVAÇÕES SÔBRE A NOTAÇÃO ADOTADA

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de n-uplas de números reais. Um vetor x de $\mathbb{R}^n$ será representado por uma matriz coluna; x_i $i = 1,..,n$ será a i-ésima componente dêsse vetor.

A transposta de uma matriz A será escrita A'.

Também, se x e y são vetores de $\mathbb{R}^n$,

$x \geqq y \iff x_i \geq y_i \qquad i = 1,..,n$

$x \geq y \iff x_i \geq y_i \qquad i = 1,..,n$ mas existe pelo menos um i tal que $x_i > y_i$

$x > y \iff x_i > y_i \qquad i = 1,..,n$

$\mathbb{R}^n_+$ será o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $x \geqq 0$.

$\mathbb{R}^n_{++}$ o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $x \geq 0$.

Como norma de um vetor de $\mathbb{R}^n$ será usada a aplicação:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i| \end{aligned}$$

1º CAPÍTULO

Para efeito de ilustração, apresentaremos nêste capítulo um processo elementar do ponto de vista econômico, mas que apresenta as características citadas acima. Formularemos um problema de otimização em forma discreta associado ao processo, e estabeleceremos sua versão contínua. Finalmente generalizaremos o problema, daremos uma aplicação ao contrôle ótimo e estabeleceremos alguns resultados introdutórios.

O exemplo será do tipo "Botlleneck", e foi ao estudar um problema dêsses que Bellman teve a idéia de estabelecer versões contínuas.

EXEMPLO ILUSTRATIVO

Seja um complexo de três indústrias:

De automóveis, de aço e de ferramentas.

Nêste modêlo-a parâmetros concentrados- de inter dependência econômica, nós admitiremos que o estado de cada indústria é completamente especificado em qualquer instante pelo seu <u>estoque</u> de matéria prima e pela sua <u>capacidade</u> de produzir novas quantidades usando essa matéria prima. Admitiremos também que é suficiente considerar que mudanças nessa quantidades básicas (estoque e capacidade) ocorrem apenas em tempos discretos $t=0,1,\ldots,T_f$.

Definamos então as seguintes variáveis de estado:

$x_1(t)$= número de autos produzidos até o instante t.

$x_2(t)$= capacidade de fabricar autos no instante t.

$x_3(t)$= estoque de aço em t.

$x_4(t)$= capacidade de fabricar aço em t.

$x_5(t)$= estoque de ferramentas em t.

$x_6(t)$= capacidade de fabricar ferramentas em t.

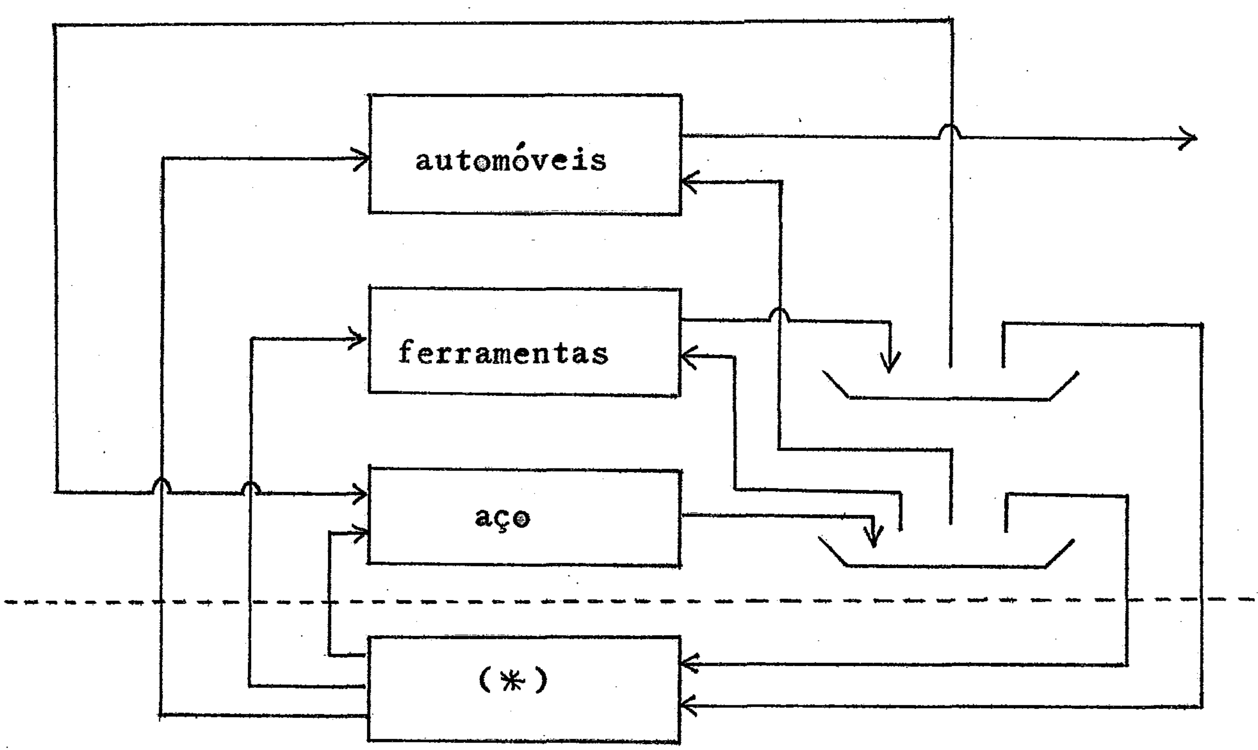
Hipóteses de interdependência das indústrias:

(1) Aumento de tôdas as capacidades só requer aumento dos estoques de aço e de ferramentas.

(2) Produção de autos só requer capacidade de produção de autos e estoque de aço.

(3) Produção de aço só requer capacidade de produção de aço e estoque de ferramentas.

(4) Produção de ferramentas requer capacidade de produção de ferramentas e estoque de aço.



(*) Infraestrutura industrial responsável pelo aumento das capacidades.

Dinâmica do processo de produção:

No início de $[t,t+1]$ alocamos uma certa quantidade de aço e ferramentas tomadas de seus estoques, para:

(i) aumentar o estoque dêsses materiais.

(ii) aumentar as capacidades de produção das indústrias.

Definição das variáveis de alocação:

$\bar{v}_i(t)$=quantidade de aço alocada em t com o propósito de aumentar $x_i(t)$.

$\bar{w}_i(t)$=quantidade de ferramentas alocada em t com o propósito de aumentar $x_i(t)$.

$$i=1,2,..,6$$

OBS:

$$(1),..,(4) \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{v}_3(t)=0 \\ \bar{w}_1(t)= w_5(t)=0 \end{array}$$

Hipótese de "bottleneck":

A quantidade produzida de um item entre os instantes t e t+1 é diretamente proporcional ao mínimo das quantidades/ dos ítens relevantes ao caso (vide (1),..,(4)).

Levando em consideração também o fato de que a possibilidade de produção determina os níveis de alocação, pois não há vantagem em se alocar maiores quantidades, teremos as seguintes equações:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + \min\left\{\gamma_2\, x_2(t),\ \alpha_1\, \bar{v}_1(t)\right\}$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) + \min\left\{\alpha_2\, \bar{v}_2(t),\ \beta_2\, \bar{w}_2(t)\right\}$$

$$x_3(t+1) = x_3(t) + \min\left\{\gamma_4\, x_4(t),\ \beta_3\, \bar{w}_3(t)\right\} - \bar{v}_1(t) - \bar{v}_2(t) - \bar{v}_4(t) - \bar{v}_5(t) - \bar{v}_6(t).$$

$$x_4(t+1) = x_4(t) + \min\left\{\alpha_4\, \bar{v}_4(t),\ \beta_4\, \bar{w}_4(t)\right\}$$

$$x_5(t+1) = x_5(t) + \min\left\{\gamma_6\, x_6(t),\ \alpha_5\, \bar{v}_5(t)\right\} - \bar{w}_2(t) - \bar{w}_3(t) - \bar{w}_4(t) - \bar{w}_6(t)$$

$$x_6(t+1) = x_6(t) + \min\left\{\alpha_6\, \bar{v}_6(t),\ \beta_6\, \bar{w}_6(t)\right\}$$

$$\alpha_i,\ \beta_i \text{ e } \gamma_i \in \mathbb{R}_{++}$$

A essas equações devemos associar as seguintes restrições naturais:

$$\bar{v}_i(t),\ \bar{w}_i(t) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 6$$

$$\bar{v}_1(t) + \bar{v}_2(t) + \bar{v}_4(t) + \bar{v}_5(t) + \bar{v}_6(t) \leq x_3(t)$$

$$\bar{w}_2(t) + \bar{w}_3(t) + \bar{w}_4(t) + \bar{w}_6(t) \leq x_5(t)$$

Acrescentaremos também as restrições:

$$\alpha_1\, \bar{v}_1(t) \leq \gamma_2\, x_2(t) \qquad\qquad \delta_1\, \bar{v}_1(t) \leq x_2(t)$$

$$\beta_3\, \bar{w}_3(t) \leq \gamma_4\, x_4(t) \qquad \text{ou} \qquad \lambda_3\, \bar{w}_3(t) \leq x_4(t)$$

$$\alpha_5\, \bar{v}_3(t) \leq \gamma_6\, x_6(t) \qquad\qquad \delta_3\, \bar{v}_3(t) \leq x_6(t)$$

$$\delta_i, \lambda_i, \varphi_i \in \mathbb{R}_{++}$$

e

$$\alpha_2\,\bar{v}_2(t) = \beta_2\,\bar{w}_2(t) \qquad\qquad \varphi_2\,\bar{v}_2(t) = \bar{w}_2(t)$$

$$\alpha_4\,\bar{v}_4(t) = \beta_4\,\bar{w}_4(t) \qquad \text{ou} \qquad \varphi_4\,\bar{v}_4(t) = \bar{w}_4(t)$$

$$\alpha_6\,\bar{v}_6(t) = \beta_6\,\bar{w}_6(t) \qquad\qquad \varphi_6\,\bar{v}_6(t) = \bar{w}_6(t)$$

que justificaremos como de bom senso, baseados em uma pressuposta experiência industrial.

Baseados nessas restrições e procurando eliminar o maior número de variáveis, podemos escrever:

$$x_1(t+1) - x_1(t) = \alpha_1\,\bar{v}_1(t) \qquad x_1(0) = x_1^o$$

$$x_2(t+1) - x_2(t) = \alpha_2\,\bar{v}_2(t) \qquad x_2(0) = x_2^o$$

$$x_3(t+1) - x_3(t) = \beta_3\,\bar{w}_3(t) - \bar{v}_1(t) - \bar{v}_2(t) - \bar{v}_4(t) - \bar{v}_5(t) - \bar{v}_6(t) \qquad x_3(0) = x_3^o$$

$$x_4(t+1) - x_4(t) = \alpha_4\,\bar{v}_4(t) \qquad x_4(0) = x_4^o$$

$$x_5(t+1) - x_5(t) = \alpha_5\,\bar{v}_5(t) - \varphi_2\,\bar{v}_2(t) - \bar{w}_3(t) - \varphi_4\,\bar{v}_4(t) - \varphi_6\,\bar{v}_6(t) \qquad x_5(0) = x_5^o$$

$$x_6(t+1) - x_6(t) = \alpha_6\,\bar{v}_6(t) \qquad x_6(0) = x_6^o$$

onde acrescentamos as quantidades iniciais dos itens ($x_i(0)$)

Agrupando as restrições:

$$\bar{v}_i(t) \geq 0$$

$\delta_1 \, \bar{v}_1(t) \leqslant x_2(t)$

$\bar{v}_1(t) + \bar{v}_2(t) + \bar{v}_4(t) + \bar{v}_5(t) + \bar{v}_6(t) \leqslant x_3(t)$

$\lambda_3 \, \bar{w}_3(t) \leqslant x_4(t)$

$\varphi_2 \, \bar{v}_2(t) + \varphi_4 \, \bar{v}_4(t) + \varphi_6 \, \bar{v}_6(t) + \bar{w}_3(t) \leqslant x_5(t)$

$\delta_3 \, \bar{v}_3(t) \leqslant x_6(t)$

Admitamos que o nosso problema seja o de escolher $\bar{v}_i(t)$ $\bar{w}_i(t)$, $t=0,1,..,\ T_f-1$ viáveis para êsse processo e que maximize $x_1(T_f)$.

Versão contínua:

Substituamos $\bar{v}_i(t)$ e $\bar{w}_i(t)$ por $\Delta t \ v_i(t)$ e $\Delta t \ w_i(t)$ / nas equações e levemos ao limite quando Δt tende para zero. Teremos então:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 \, v_1(t) \qquad x_1(0) = x_1^o$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 \, v_2(t) \qquad x_2(0) = x_2^o$$

$$\dot{x}_3(t) = \beta_3 \, w_3(t) - v_1(t) - v_2(t) - v_4(t) - v_5(t) - v_6(t) \qquad x_3(0) = x_3^o$$

$$\dot{x}_4(t) = \alpha_4 \, v_4(t) \qquad x_4(0) = x_4^o$$

$$\dot{x}_5(t) = \alpha_5 \, v_5(t) - \varphi_2 \, v_2(t) - w_3(t) - \varphi_4 \, v_4(t) - \varphi_6 \, v_6(t) \qquad x_5(0) = x_5^o$$

$\dot{x}_6(t) = \alpha_6 \, v_6(t)$ $\qquad\qquad$ $x_6(0) = x_6^{\circ}$

ou, matricialmente:

$\dot{x}(t) = K_1 \, v(t) + K_2 \, w(t)$ $\qquad\qquad$ $x(0) = x^{\circ}$

ou ainda, combinando $\left[\begin{array}{c} v(t) \\ \hline w(t) \end{array}\right] = z(t)$

(5) $\quad \dot{x}(t) = K \, z(t) \qquad$ onde $K = \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \end{array}\right]$

Fica claro que $z(t)$ é um fluxo de alocação.

Admitiremos, como Bellman, que êsse fluxo fica também limitado por questões tecnológicas.

De uma maneira geral:

$G\,(\,x(t),\, z(t)\,) \lesseqgtr 0$

Mas $\quad (5) \Rightarrow x(t) = x^{\circ} + \int_0^t K\, z(s)\, ds = x^{\circ} + K \int_0^t z(s)\, ds.$

Então $\quad G\,(\,x^{\circ} + K \int_0^t z(s)\, ds,\, z(t)\,) \lesseqgtr 0$

Chamando $\quad \int_0^t z(s)\, ds = y(t).$

$R\,(\,y(t)\,,\, z(t)\,) \triangleq G\,(\,x^{\circ} + K\, y(t)\,,\, z(t)\,) \lesseqgtr 0 \qquad (**)$

Podendo perfeitamente se tratar de uma função não linear. Entretanto, para completar o nosso exemplo, vamos supor que as restrições tenham forma semelhante às da versão discreta ,

---

(**) O caso geral será visto no capítulo 4 .

Sendo B a matriz dos coeficientes do 1º membro das desigualdades de restrição, então:

(6) $z(t) \geqslant 0 \quad , \quad Bz(t) \leqslant x(t) \qquad \forall\, t \in [0, T_f]$

O nosso problema seria então o de escolher

$z(t) \qquad t \in [0, T_f]$ viável para o processo contínuo, e que maximize:

$b'x(T_f) \qquad$ onde $\qquad b = (1,0,0,0,0,0)'$

Podemos contudo reformular o modêlo da seguinte maneira:

$$x(t) = x^\circ + \int_0^t Kz(s)\, ds$$

que levado em (6):

$$Bz(t) \leqslant x^\circ + \int_0^t Kz(s)\, ds \qquad \forall t \in [0, T_f]$$

$$z(t) \geqslant 0$$

também, maximizar $b'x(T_f)$ é equivalente a maximizar:

$$\int_0^{T_f} b'Kz(t)\, dt = \int_0^{T_f} a'z(t)\, dt$$

onde $b'K \triangleq a'$. Chamemos também $c \triangleq x^\circ$

Ficamos assim com o seguinte problema:

$$\text{maximizar} \qquad \int_0^{T_f} a'z(t)\, dt$$

$$\text{com} \qquad Bz(t) \leqslant c + \int_0^t Kz(s)\, ds \qquad t \in [0, T_f]$$

$$z(t) \geqslant 0$$

PROBLEMA GERAL DE PROGRAMAÇÃO LINEAR CONTÍNUA:

A seguinte generalização é devida a Levinson [2] :

Achar uma função $z: [0, T_f] \to \mathbb{R}^n$ de componentes z_i limitadas e Lebesgüe-mensuráveis que

$$\text{maximize} \quad \int_0^{T_f} a(t)' z(t)\, dt$$

$$\text{sujeita a} \quad B(t)\, z(t) \leqslant c(t) + \int_0^t K(t,s)\, z(s)\, ds \quad , \; z(t) \geqslant 0$$

(para quase todo $t \in [0, T_f]$)

onde $\forall \; t \in [0, T_f]$ $B(t)$ é uma matriz real MxN, $a(t)$ um vetor de ordem n, $c(t)$ um vetor de ordem m e $\forall \; s \leqslant t$ $K(t,s)$ é uma matriz mxn . Se $s > t$ $K(t,s) = [0]$ B,K,a e c são todas limitadas e Lebesgue-mensuráveis.

(7) <u>LEMA</u>:

Se $K = 0$, B fôr matriz constante, c e a vetores fixos, para tôda solução ótima do problema existe um vetor de $\mathbb{R}^n_+$ que como função constante é viável e proporciona o mesmo valor que a solução ótima para o funcional objetivo.

<u>prova</u>: Seja $\bar{z}(t)$ solução ótima de:

$$\max \int_0^{T_f} a' z(t)\, dt.$$

com $B\, z(t) \leqslant c$, $z(t) \geqslant 0$, $z : [0, T_f] \to \mathbb{R}^n$ de componentes z_i limitadas e Lebesgue-mensuráveis

seja $\bar{x} = \dfrac{1}{T_f} \displaystyle\int_0^{T_f} \bar{z}(t)\, dt$, $\bar{x}(t) = \bar{x}$ $\bar{x}(t)$ é viável pois

$$B\, \bar{x}(t) = B \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \bar{z}(t)\, dt = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} B\, \bar{z}(t)\, dt \leqslant \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} c\, dt = c$$

e $\quad \bar{x}(t) \geqslant 0$

também, $$\int_0^{T_f} a' x(t)\, dt = \int_0^{T_f} a' \left(\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \bar{z}(t)\, dt \right) dt = $$
$$= a' \int_0^{T_f} \bar{z}(t)\, dt. \qquad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO:

Então, nas circunstâncias do Lema (7) o nosso problema se reduz a um de programação linear, pois se solucionarmos

$$\max a'x \qquad x \in \Omega_p$$

$$\Omega_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \mid Bx \leqslant c ,\ x \geqslant 0 \right\}$$

Obteremos também uma solução para o problema de programação linear contínua, fazendo

$$\bar{x}(t) = \bar{x}$$

APLICAÇÃO AO CONTRÔLE ÓTIMO:

É devido a Grinold [3] a seguinte aplicação ao Contrôle ótimo linear:

Seja x(t) uma variável de estado m dimensional e u(t) / um vetor de contrôle n dimensional.

Queremos maximar uma forma linear:

(8) $$\max \left[\int_0^{T_f} h'(t)\, x(t)\, dt + \int_0^{T_f} g'(t)\, u(t)\, dt + a' x(T_f) \right]$$

Sendo o sistema dinâmico dado por:

(9) $$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + H(t)\, u(t) + f(t) \quad , \quad x(0) = 0$$

e o sistema deve satisfazer as restrições:

(10) $\quad B(t)\ u(t) \leqslant d(t) + D(t)\ x(t)\ , \quad u(t) \geqslant 0$

onde todas as funções que aparecem são limitadas e Lebesgue-mensuráveis, exceto A(t) que deve ser contínua.

Então, (9) $\Rightarrow x(t) = \int_0^t \Phi(t,s)\left[H(s)\ u(s) + f(s)\right] ds.$

onde $\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\ \Phi(t,t_0) \quad ; \quad \Phi(t_0,t_0) = I.$

ou ainda: $x(t) = \int_0^t Y(t)\ Y^{-1}(s)\left[H(s)\ u(s) + f(s)\right] ds.$

sendo $\dot{Y}(t) = A(t)\ Y(t).$

$$x(t) = Y(t) \int_0^t Y(s)^{-1}\left[H(s)\ u(s) + f(s)\right] ds.$$

levando em (8) e (10) e observando que :

$$\int_0^{T_f} h'(t)\ Y(t)\left[\int_0^t Y^{-1}(s)\ H(s)\ u(s)\ ds\right] dt =$$

$$= \int_0^{T_f}\left[\int_0^{T_f} h'(s)\ Y(s)\ ds\right] Y^{-1}(t)\ H(t)\ u(t)\ dt$$

já, que chamando $Y^{-1}(s)\ H(s)\ u(s) = y(s)$ e $\dot{h}(t)\ Y(t) = v(t)$

e sendo w o degrau unitário:

$$\int_0^{T_f} v(t) \int_0^t y(s)\ ds\ dt = \int_0^{T_f} v(t)\int_0^{T_f}\left[w(s) - w(s-t)\right] y(s)\ ds\ dt=$$

$$= \int_0^{T_f}\int_0^{T_f} v(t).\left[w(s)-w(s-t)\right] dt\ .\ y(s)\ ds = \int_0^{T_f}\int_s^{T_f} v(t)\ dt\ .\ y(s)ds,$$

podemos transformar o problema de controle ótimo em um de programação linear contínua:

$$\text{maximizar} \quad \int_0^{T_f} \left[g'(t) + \left\{ \int_t^{T_f} h'(s)\, Y(s)\, ds \right\}' Y^{-1}(t)\, H(t) + \right.$$
$$\left. + \; a' Y(T_f) \,.\, Y(t)^{-1} \,.\, H(t) \right] u(t)\, dt.$$

sujeito a $u(t) \geqslant 0$

$$B(t)\, u(t) \leqslant d(t) + D(t) \,.\, Y(t) \left[\int_0^t Y(s)^{-1} \,.\, \left[H(s)\, u(s) + f(s) \right] ds \right]$$

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR CONTÍNUA:

Sejam:

$$Q^n = \left\{ y \,\middle|\, y : [0, T_f] \to \mathbb{R}^n \text{ , } y \text{ contínua} \right\}$$

$$Q = \left\{ y \,\middle|\, \hat{z}(t) + y(t) \in Z \text{ , } y \in Q^n \right\}$$

onde

$$Z = \left\{ z \in Q^n \,\middle|\, z(t) \geqslant 0 \text{ , } B\, z(t) \leqslant c(t) + \int_0^t K\, z(s)\, ds \right\}.$$

B , K matrizes reais constantes nxn e $\hat{z}$ é uma solução ótima para o problema:

$$\max_{z \in Z} \int_0^{T_f} a(t)' z(t)\, dt \qquad \text{com } a, c \in Q^n$$

<u>LEMA</u>:

$\hat{z}$ solução ótima

$$\Longrightarrow \int_0^{T_f} a(t)' \, y(t) \, dt > 0 \quad \text{não tem solução } y(t) \text{ em } Q.$$

<u>prova</u>: vide apêndice.

<u>TEOREMA</u>: O sistema de inequações:

$$y \geqslant 0$$

$$B\, y(t) \leqslant \int_0^t K\, y(s)\, ds$$

$$\int_0^{T_f} a(t)' \, y(t) \, dt > 0 \quad \text{não tem solução em } Q^n.$$

<u>prova</u>: vide apêndice.

<u>TEOREMA</u>: $\hat{z}$ é uma solução ótima $\Longleftrightarrow$

$$a(t)' \, \hat{z}(t) \geqslant a(t)' \, z(t) \quad \forall \; t \in [0, T_f]$$

$$\forall \; z \in Z$$

<u>prova</u>: vide apêndice.

<u>COROLÁRIO</u>: Qualquer porção da solução ótima é ótima:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)' \, \hat{z}(t) \, dt \geqslant \int_{t_1}^{t_2} a(t)' \, z(t) \, dt.$$

$$\forall \; z \in Z \;, \; \forall \; t_1, t_2 \in [0, T_f] \;, \quad t_1 < t_2$$

2° CAPÍTULO

DUALIDADE

No capítulo anterior, definimos o problema geral de programação linear contínua:

$$\underset{z \in Z}{\text{maximizar}} \int_0^{T_f} a(t)' \, z(t) \, dt$$

onde

$$Z = \left\{ z \,\middle|\, B(t)\, z(t) \leq c(t) + \int_0^t K(t,s)\, z(s)\, ds \quad \text{quase sempre}, \; z(t) \geq 0 \quad \text{limitada e Lebesgue-mensurável} \right\}$$

Passaremos a chamá-lo problema primal de programação linear contínua: (P) .

Podemos definir também um problema dual (D) , de programação linear contínua:

$$\underset{w \in W}{\text{minimizar}} \int_0^{T_f} w(t)\, c(t)\, dt$$

onde:

$$W = \left\{ w \,\middle|\, w(t)'\, B(t) \geq a(t) + \int_t^{T_f} w(s)'\, K(s,t)\, ds \quad \text{quase sempre}, \; w(t) \geq 0 \quad \text{limitada e Lebesgue-mensurável} \right\}$$

Consideremos o problema de programação linear resultante quando tomamos $K = 0$, c e a vetores fixos para (P) :

(p) $\max\limits_{x \in \Omega_p} a'x \qquad \Omega_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leqslant c \text{ , } x \geqslant 0 \right\}$

Anàlogamente para (D):

(d) $\min\limits_{u \in \Omega_d} u'c \qquad \Omega_d = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid u'B \geqslant a' \text{, } u \geqslant 0 \right\}$

Êsses problemas assim definidos são duais, e é bem conhecido o seguinte teorema:

(11) TEOREMA: dados os problemas definidos acima:

$$\Omega_p \neq \emptyset \Rightarrow \left((\exists \text{ solução de (p)}) \Leftrightarrow \Omega_d \neq \emptyset. \right)$$

$$\Omega_d \neq \emptyset \Rightarrow \left((\exists \text{ solução de (d)}) \Leftrightarrow \Omega_p \neq \emptyset. \right)$$

Sejam x^* solução de (p) e u^* de (d):

então, $\forall \ x \in \Omega_p$, $\forall \ u \in \Omega_d$:

$a'x \leqslant a'x^* = u^{*'} c \leqslant u'c.$

O melhor teorema de dualidade para programação linear / contínua, seria uma generalização direta do teorema (11) . Entretanto, tal não seria válido, e contraexemplos foram apresentados pela primeira vez por Tyndall [4] .

RESULTADOS FRACOS (*): (Tyndall [4] , Levinson [2] , Grinold [3]).

(12) LEMA:

$$\int_0^{T_f} \left[w(t)^` . \int_0^t K(t,s)\, z(s)\, ds \right] dt = \int_0^{T_f} \left[ \left( \int_t^{T_f} w(s)^` K(s,t)\, ds \right)^` . z(t) \right] dt.$$

prova: [3], pg 85.

(13) LEMA:

$$\inf \left\{ \int_0^{T_f} w(t)^` c(t)\, dt \;\middle|\; w \in W \right\} \geqslant \sup \left\{ \int_0^{T_f} a(t)^` z(t)\, dt \;\middle|\; z \in Z \right\}$$

prova: [5], pg 85.

(14) LEMA:

$$\int_0^{T_f} a(t)^` z(t)\, dt = \int_0^{T_f} w(t)^` c(t)\, dt \quad , \quad z \in Z \, , \quad w \in W$$

$\Longrightarrow$ (i) e (ii) valem para quase todo $t \in [0, T_f]$:

(i) $\forall\ i = 1,2,..,m$

$$B(t)_{i.}\, z(t) < c(t)_i + \int_0^t K(t,s)_{i.}\, z(s)\, ds \qquad (**)$$

$$\Longrightarrow \quad w(t)_i = 0$$

(ii) $\forall\ j = 1,2,..,n$

(*) Assim denominamos porque sòmente descrevem propriedades de soluções ótimas para os problemas primal e dual.

(**) Se A é uma matriz, $A_{i.}$ é sua i-ésima linha e $A_{.j}$ sua j-ésima coluna.

$$w(t)'B(t)_{\cdot j} > a(t)_j + \int_t^{T_f} w(s)'K(s,t)_{\cdot j}\, ds$$

$$\Longrightarrow \quad z(t)_j = 0$$

<u>prova</u>: [3] , pg 86.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Tais soluções são ditas de equilíbrio.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: É uma questão aberta ainda, se a desigualdade do Lema (13) pode ser transformada em igualdade.

UM TEOREMA DE DUALIDADE FORTE:

Foram demonstrados teoremas de dualidade forte, [4] , [2] com condições diferentes de regularidade de B,a,c e K. Entretanto, todos êles requerem as mesmas condições algébricas:

(15) $\left\{ z \mid B(t)\, z \leqslant 0 \,,\, z \geqslant 0 \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad \forall\, t$

(16) $B(t) \geqslant 0 \,,\quad K(t,s) \geqslant 0 \,,\quad c(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t,s$

O teorema que apresentaremos aqui demonstrado por Grinold [3] , é uma generalização daqueles. Vamos entretanto inicialmente estabelecer algumas definições e lemas auxiliares:

<u>DEFINIÇÃO</u>:

$$\text{pos}\left[F\right] \triangleq \left\{ d \mid Fx = d \,,\, x \geqslant 0 \right\}$$

onde F é uma matriz mxn e pos[F] é o cone poliédrico gerado pelas colunas de F

OBSERVAÇÃO:

(i) pos $\left[B(t) \mid I\right] = \left\{ d \mid B(t)\, z + Iy = d \; ; \; z, y \geqslant 0 \right\}$

(ii) pos $\left[F'\right]$ é o cone gerado pelas linhas de F

(iii) pos $\left[I\right]$ = ortante não negativo

(iv) $c \in$ pos $\left[B \mid I\right] \Longleftrightarrow Bx \leqslant c$, $x \geqslant 0$ tem uma solução viável.

EXEMPLO: Podemos rescrever o teorema de dualidade para programação linear usando a definição acima:

"Se as condições:

$$a' \in \text{pos}\left[B' \mid -I\right]$$

$$c \in \text{pos}\left[B \mid I\right]$$

são satisfeitas, os problemas primal e dual de programação linear têm soluções ótimas x^* e u^*, com:

$$a'x^* = u^{*\prime}c \text{ "}$$

As condições garantem a viabilidade respectivamente dos problemas primal e dual.

Em programação linear contínua, a viabilidade é garantida pelas condições:

$$\text{(17)} \quad \left[a(t) + \int_t^{T_f} w(s)\, K(s,t)\, ds \right]' \in \text{pos}\left[B'(t) \mid -I\right]$$

$$\text{(18)} \quad \left[c(t) + \int_0^t K(t,s)\, z(s)\, ds \right] \in \text{pos}\left[B(t) \mid I\right]$$

quase sempre

LEMA:

As condições (17), (18) são garantidas respectivamente por

(19) i) $a'(t) \in \text{pos}\left[B'(t) \mid -I\right]$

ii) $\text{pos}\left[K'(s,t)\right] \subset \text{pos}\left[B'(t) \mid -I\right] \quad \forall\, s \geqslant t, \forall t$

(20) i) $c(t) \in \text{pos}\left[B(t) \mid I\right]$

ii) $\text{pos}\left[K(t,s)\right] \subset \text{pos}\left[B(t) \mid I\right] \quad \forall\, s \leqslant t, \forall t$

prova: [3], pg 86.

LEMA:

Se as condições (15) e (16) são satisfeitas, as condi - ções (19) e (20) (consequentemente (17) e (18)) o são.

prova: [3], pg 88.

DEFINIÇÕES:

(i) $K(B,d) \triangleq \left\{ x \mid Bx \leqslant d,\ x \geqslant 0 \right\}$

(ii) $J(B,h) \triangleq \left\{ u \mid u'B \geqslant h,\ u \geqslant 0 \right\}$

(iii) $\overline{K}(B,d) \triangleq$ a envoltória convexa dos pontos extremos de $K(B,d)$

(iv) $\overline{J}(B,h) \triangleq$ a envoltória convexa dos pontos extremos de $J(B,h)$

(21) TEOREMA: (Dualidade forte):

Se as condições de limitação:

(22) $\exists \ \rho > 0 \ \ni \ \forall \ t \in [0,T_f]$ e $\forall \ d \in \mathbb{R}^m, \forall \ h \in \mathbb{R}^n$

i) $x \in \bar{K}(B(t),d) \Rightarrow \|x\| \leqslant \rho \|d\|$

ii) $u \in \bar{J}(\ B(t),h\ ) \Rightarrow \|u\| \leqslant \rho \|h\|$

E as condições de regularidade:

(23) i) As funções $B(\cdot)_{ij}$, $a(\cdot)_j$ e $c(\cdot)_i$ são contínuas em quase todo $t \in [0,T_f]$, $i = 1,2,..,m$

$j = 1,2,..,n$

ii) As funções $K(t,s)_{ij}$ são contínuas em quase todo

$(t,s) \in [0,T_f] \times [0,T_f]$, $i = 1,2,..,m$; $j =$
$t \geqslant s$ $= 1,2,..,n$

São satisfeitas, então as condições:

(24) $\forall \ t$

i) $a'(t) \in \text{pos}\left[B'(t) \mid -I\right]$

ii) $\text{pos}\left[K'(s,t)\right] \subset \text{pos}\left[B'(t) \mid -I\right] \ \forall \ s \geqslant t$

(25) $\forall \ t$

i) $c(t) \in \text{pos}\left[B(t) \mid I\right]$

ii) $\text{pos}\left[K(t,s)\right] \subset \text{pos}\left[B(t) \mid I\right] \quad \forall\, s \leq t$

Implicam a existência de soluções de equilíbrio para os problemas primal e dual de programação linear contínua.

<u>prova</u>: [3], pg 89.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Se B e K forem matrizes constantes as condições (22) (e òbviamente as (23)) são satisfeitas.

(26) <u>OBSERVAÇÃO</u>:

As condições (25) $\Rightarrow \exists$ solução ótima para (P)

As condições (24) $\Rightarrow \exists$ solução ótima para (D)

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Há um teorema de dualidade forte denonstrado por Tyndal [5] onde as matrizes são constantes mas a e c são funções apenas limitadas e Lebesgue-mensuráveis, não sendo portanto englobado pelo Teorema (21). Entretanto, nêsse contexto a observação (26) não é verdadeira, sendo necessárias as condições / (24) e (25) tanto para garantir a existência de solução ótima para (P), como para (D).

<u>OBSERVAÇÃO</u>: A prova do Teorema (21) é feita discretizando os problemas primal e dual, transformando-os consequentemente em problemas de programação linear (P^N) e (D^N). Usando o Teorema (11) obtemos soluções de equilíbrio para êsses problemas. Como as condições (24) e (25) garantem a limitação dessas soluções, as soluções de equilíbrio de (P^N) e (D^N) convergirão / fracamente para soluções de equilíbrio de (P) e (D), a medida que a discretização fique mais fina.

A discretização usada é a seguinte:

O intervalo $[0, T_f]$ é dividido em N intervalos de comprimento $\Delta_N = T/N$.

Para $k = 1,2,..,N$ e $1 > k$:

(i) $a^{N,k} = a(k\,\Delta_N) \in \mathbb{R}^n$

(ii) $c^{N,k} = c(k\,\Delta_N) \in \mathbb{R}^m$

(iii) $B^{N,k} = B(k\,\Delta_N)$ uma matriz mxn

(iv) $K^{N,1,k} = {}_N K(1\,\Delta_N, k\,\Delta_N)$ uma matriz mxn

Assim,:

(P^N) Achar $z^{N,j} \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,2,..,N$, que

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{N} a^{N,i'} \cdot z^{N,i}$$

com
$$B^{N,k} \; z^{N,k} \leqslant c^{N,k} + \sum_{j=1}^{k-1} K^{N,k,j} \; z^{N,j} \qquad z^{N,j} \geqslant 0$$
$$k = 1,2,..,N$$

(D^N) Achar $w^{N,i} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1,2,..,N$ que

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{N} w^{N,i'} \; c^{N,i}$$

com
$$w^{N,k} \; B^{N,k} \geqslant a^{N,k} + \sum_{j=k+1}^{N} w^{N,j'} \; K^{N,j,k} \qquad w^{N,k} \geqslant 0$$
$$k = 1,2,..,N$$

Problemas êsses que como problemas de programação linear, são duais.

3° CAPÍTULO

RESOLUÇÃO

Trataremos agora da resolução de um problema de programação linear contínua. Serão vistas duas maneiras, uma algorítmica e outra utilizando equações diferenciais.

RESOLUÇÃO ALGORITÍMICA

O Teorema (21) do capítulo anterior nos sujere, quando as referidas condições forem satisfeitas, uma solução aproximada do problema, já que as soluções dos problemas discretos convergem fracamente às do problema linear contínuo, à medida que a discretização torna-se mais fina. Entretanto, como técnica, essa maneira apresenta vários inconvenientes: as soluções do problema discreto não são viáveis para o problema contínuo; não há nenhum critério de parada fàcilmente verificável; e finalmente, embora o problema geral de programação contínua tenha ganho certa independência dos problemas dos quais se originou, a dificuldade da dimensionalidade, da qual com versões contínuas nós pretendiamos escapar, reaparecem, pois o número de restrições e variáveis de (P^N) aumenta quando a discretização se torna mais fina.

RESOLUÇÃO USANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:

(Larsen e Polak [6])

Vamos admitir que K é uma matriz constante, e B é uma matriz constante não singular tal que:

(i) todos os elementos de B são não negativos

ou (ii) todos os elementos de B^{-1} são não negativos

Também, redefinamos:

$$Z = \left\{ z \mid Bz(t) \leqslant c(t) + \int_0^t Kz(s)\, ds \;,\; z(t) \geqslant 0 \text{ para quase todo } t \in [0,T_f] \text{ e } z(t) = 0 \text{ para } t < 0 \text{ funções limitadas e Lebesgue-mensuráveis} \right\}$$

$$W = \left\{ w \mid w'(t)\, B \geqslant a(t) + \int_t^{T_f} w(s)'K\, ds \;,\; w(t) \geqslant 0 \text{ para } t \in [0,T_f] \text{ e } w(t) = 0 \text{ para } t > T_f \text{ funções limitadas e Lebesgue-mensuráveis} \right\}$$

(20) <u>DEFINIÇÃO</u>: $1(z_i) = 1$ se $z_i > 0$

$1(z_i) = 0$ se $z_i \leqslant 0$

Também, reescrevamos:

(P) Achar um $z^* \in Z$ tal que

$$\int_0^{T_f} a(t)' z^*(t)\, dt = \max_{z \in Z} \int_0^{T_f} a(t)' z(t)\, dt$$

(D) Achar um $w^* \in W$ tal que

$$\int_0^{T_f} w^*(t)'\ c(t)\, dt = \min_{w \in W} \int_0^{T_f} w(t)'\ c(t)\, dt$$

(21) DEFINIÇÃO: Seja K_p o conjunto de pares (x,u) de funções $x:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $u:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tais que

(22) u é mensurável e x é absolutamente contínua (*)

(23) $u(t) \geqslant 0, \quad B^{-1}\left[-u(t) + c(t) + Kx(t)\right] \geqslant 0 \quad \forall\ t \in \left[0, T_f\right]$

(24) $x(0) = 0$

(25)
$$\dot{x}(t) = B^{-1}\left[-u(t) + c(t) + Kx(t)\right] \quad \forall\ t \in \left[0, T_f\right]$$

$$\dot{x}(t) = 0 \qquad \forall\ t \notin \left[0, T_f\right]$$

A equação (25) é obtida introduzindo-se em Z a mudança de variáveis $x(t) = \int_0^t z(s)\, ds$

(*) u pode ser considerada uma variável de folga.

Também, (25) $\Rightarrow$ a segunda parte de (23) é equivalente a

$\dot{x}(t) \geqslant 0$ para $t \in [0, T_f]$ completando as condições de Z.

Os pares (x,u) que forem elementos de K_p serão chamados/ soluções viáveis para o problema primal.

Em têrmos de (21), podemos reescrever o problema primal:

(P`)

Seja J_p definido por: $\forall\ (x,u) \in K_p$

(26) $$J_p(x,u) = \int_0^{T_f} a(t)'B^{-1}\Big[-u(t) + c(t) + Kx(t)\Big]\,dt$$

Achar um par $(x^*, u^*) \in K_p$ tal que $J_p(x^*, u^*) =$

$$= \max_{(x,u) \in K_p} J_p(x,u)$$

É fàcilmente verificado que (26) define o mesmo funcional do problema original (P) quando levamos (22), (23), (24), (25) em consideração. Qualquer par $(x,u) \in K_p$ que maximize J_p será referido como uma solução ótima para o problema primal.

(27) DEFINIÇÃO: Seja K_d o conjunto de pares (y,v) de funções $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que ,

(28) v é mensurável e y é absolutamente contínua (*)

(*) v pode ser considerada uma variável de folga.

(29) $v(t) \geqslant 0$, $\left[v(t) + a(t) - \dot{y}(t)K\right]`B^{-1} \geqslant 0 \quad \forall\, t \in [0,T_f]$

(30) $y(T_f) = 0$

(31)
$$\dot{y}(t) = \left[v(t) + a(t) - y(t)`K\right]` B^{-1} \quad \forall\, t \in [0,T_f]$$
$$\dot{y}(t) = 0 \quad \forall\, t \notin [0,T_f]$$

A equação (31) é obtida introduzindo-se em W a mudança de variáveis $y(t) = -\int_t^{T_f} w(s)\,ds$.

Também, (31) $\Longrightarrow$ a segunda parte de (29) é equivalente a $\dot{y}(t) \geqslant 0$ para $t \in [0,T_f]$ completando as condições de W.

Os pares (y,v) que forem elementos de K_d serão chamados <u>soluções viáveis</u> para o problema dual.

Em têrmos de (27), podemos reescrever o problema dual:

(D`) Seja J_d definido por:

(32) $$J_d(y,v) = \int_0^{T_f} \left[v(t) + a(t) - y(t)`\, K\right]`\, B^{-1}\, c(t)\, dt$$

Achar um par $(y^*,v^*) \in K_d$ tal que $J_d(y^*,v^*) = \min\limits_{(y,v) \in K_d} J_d(y,v)$

É fàcilmente verificado que (32) define o mesmo funcional do problema original(D) quando levamos (28), (29), (30), (31)/ em consideração. Qualquer par $(y,v) \in K_d$ que minimize J_d será referido como uma solução ótima para o problema dual.

1° PARTE : Método primal

Nós consideraremos o problema primal (P') e, por meio de funções multiplicadoras, obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução ótima (x,u). Então, admitindo/ que existe uma solução ótima para o problema primal (P') , obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução para o problema dual (D').

(33) <u>DEFINIÇÃO</u>: Sendo $\lambda(t),\ \delta(t) \in \mathbb{R}^n$,

(34)
$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}(1((a(t) - \lambda(t)\, B_i^{-1}))) \quad \forall\, t \in [0,T_f]$$
$$\Lambda(t) = 0 \quad \forall\, t \notin [0,T_f]$$

(35)
$$\Delta(t) = \mathrm{diag}\,(\,1(a_i(t) - \delta_i(t)\,)\,) \quad \forall\, t \in [0,T_f]$$
$$\Delta(t) = 0 \quad \forall\, t \notin [0,T_f]$$

matrizes diagonais nxn

<u>TEOREMA</u>: Se a função a é contínua por partes em $[0,T_f]$, as equações:

(36) $$\dot{\lambda}(t) = -\left\{\left[\lambda(t) - a(t)\right]' B^{-1}\Lambda(t)\, K\right\}, \quad \lambda(T_f) = 0$$

(37) $$\dot{\delta}(t) = -\left\{\left[\delta(t) - a(t)\right]'\Delta(t)\, B^{-1} K\right\}, \quad \delta(T_f) = 0$$

têm solução absolutamente contínua única definida em todo $[0,T_f]$, que usaremos como funções multiplicadoras.

<u>prova</u>: [6], pg 9.

<u>TEOREMA</u>: Se as equações (36) e (37) têm soluções λ e δ, as equações:

(38) $$\dot{x}(t) = B^{-1}\Lambda(t)\left[c(t) + Kx(t)\right], \quad x(0) = 0$$

(39) $$\dot{x}(t) = \Delta(t)\, B^{-1}\left[c(t) + Kx(t)\right], \quad x(0) = 0$$

que aquelas soluções definem por intermédio de Λ e Δ, têm soluções únicas que serão denotadas respectivamente por x_λ e x_δ

<u>prova</u>: [6], pg 9.

DEFINIÇÃO: Se (36) e (37) têm solução, estas, por intermédio de Λ e Δ definem:

(40) $\Lambda_1 = I - \Lambda$

(41) $\Delta_1 = I - \Delta$ onde I é a matriz identidade

DEFINIÇÃO: Sejam x_λ e x_δ as soluções de (38) e (39) relacionadas com as mesmas matrizes Λ e Δ que aparecem na definição (33).

Então definamos:

$$(42)\quad \begin{aligned} u_\lambda(t) &= \Lambda_1(t)\left[c(t) + Kx(t)\right] \quad \forall\, t \in [0, T_f] \\ u_\lambda(t) &= 0 \quad \forall\, t \notin [0, T_f] \end{aligned}$$

$$(43)\quad \begin{aligned} u_\delta(t) &= B\,\Delta_1(t)\,B^{-1}\left[c(t) + Kx(t)\right] \quad \forall\, t \in [0, T_f] \\ u_\delta(t) &= 0 \quad \forall\, t \notin [0, T_f] \end{aligned}$$

É visto fàcilmente que se:

$$\dot{x}_\lambda(t) \geqslant 0,\ u_\lambda(t) \geqslant 0 \quad \forall\, t \in [0, T_f]$$

$$\dot{x}_\delta(t) \geqslant 0,\ u_\delta(t) \geqslant 0 \quad \forall\, t \in [0, T_f]$$

então (x_λ, u_λ) e (x_δ, u_δ) são soluções viáveis para o problema primal.

(44) TEOREMA: Se a função multiplicadora λ determinada por (36) existir, se (x_λ, u_λ) determinado/ por ela por intermédio de (38) e (42) é viável e se todos os elementos da matriz B são não negativos, então (x_λ, u_λ) é uma solução ótima / para o problema primal.

prova: [6], pg 13.

(45) TEOREMA: Se a função multiplicadora δ determinada por (37) existir, se (x_δ, u_δ) determinado/ por ela por intermédio de (39) e (43) é viável e se todos os elementos da matriz B^{-1} são não/ negativos, então (x_δ, u_δ) é uma solução ótima para o problema primal.

prova: [6], pg 15.

TEOREMA: Suponhamos que a função multiplicadora definida por (36) exista e que ela defina uma solução ótima / (x_λ, u_λ) para o problema primal.

Seja (y_λ, v_λ) determinado por λ como soluções das equações:

$$\dot{y}_\lambda(t) = \left[a(t) - y_\lambda(t)' K \right] \Lambda(t)\, B^{-1} \qquad \forall\, t \in [0, T_f]$$

(46)

$$\dot{y}_\lambda(t) = 0 \qquad \forall\, t \notin [0, T_f]$$

$$v_\lambda(t) = -\left[a(t) - \breve{y}\ (t)'\ K\right] \Lambda_1(t) \qquad \forall t \in [0, T_f]$$

(47)

$$v_\lambda(t) = 0$$

Se (y_λ, v_λ) satisfaz:

$$\dot{y}_\lambda(t) \gtrless 0 \quad , \quad v_\lambda(t) \gtrless 0 \qquad \forall t \in [0, T_f]$$

e a matriz B^{-1} comuta com $\Lambda(t)$ então (y_λ, v_λ) é uma solução ótima para o problema dual.

prova: [6], pg 15.

TEOREMA: Suponhamos que a função multiplicadora definida por (37) exista e que ela defina uma solução ótima/ (x_δ, u_δ) para o problema primal.

Seja (y_δ, v_δ) determinado por δ como soluções das equações:

(48) $$\dot{y}_\delta(t) = \left[a(t) - y\ (t)'\ K\right] B^{-1} \Delta(t) \quad , \quad y_\delta(T_f) = 0$$

(49) $$v_\delta(t) = -\left[a(t) - y\ (t)'\ K\right] B^{-1} \Delta_1(t)\ B$$

Se (y_δ, v_δ) satisfaz:

$$\dot{y}_\delta(t) \gtrless 0 \quad , \quad v_\delta \gtrless 0 \qquad \forall\ t \in [0, T_f]$$

e a matriz B^{-1} comuta com Δ (t) então (y_δ, v_δ) é uma solução ótima para o problema dual.

prova: [6], pg 17.

2° PARTE : Método dual

Faremos agora o oposto que no método primal. Por meio de funções multiplicadoras obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução ótima (y,v) para o problema dual (D'). Então, admitindo que existe uma solução ótima para / êste problema, obteremos uma condição suficiente para a existência de uma solução para o problema primal (P').

TEOREMA: Se a função a é contínua por partes em $[0,T_f]$ então as equações:

$$\dot{y}_\mu(t) = \left[a(t) - y_\mu(t)' K\right] M(t)\, B^{-1}, \quad y_\mu(T_f) = 0 \tag{50}$$

$$\dot{y}_\nu(t) = \left[a(t) - y_\nu(t)' K\right] B^{-1} N(t), \quad y_\nu(T_f) = 0 \tag{51}$$

onde

$$\begin{array}{ll} M(t) = \operatorname{diag} 1(a_i(t) - y_\mu(t)' K_i) & \forall\, t \in [0,T_f] \\ M(t) = 0 & t \notin [0,T_f] \end{array} \tag{52}$$

$$N(t) = \text{diag } 1(\ (a(t) - y_\nu\ (t)`K\ )\ B_i^{-1}\ ) \qquad \forall\ t \in [0,T_f]$$

(53)

$$N(t) = 0 \qquad \forall\ t \notin [0,T_f]$$

têm soluções absolutamente contínuas únicas:

<u>prova</u>: [6], pg 21.

(54) <u>DEFINIÇÃO</u>: Sejam y_μ e y_ν soluções de (50),(51). Então, definamos:

(55) $$v_\mu\ (t) = -\left[a(t) - y_\mu\ (t)`\ K\right] M_1(t)$$

(56) $$v_\nu\ (t) = -\left[a(t) - y_\nu\ (t)`\ K\right] B^{-1}\ N_1(t)\ B$$

onde $M_1 = I - M$

$N_1 = I - N$

É visto fàcilmente que se:

$$\dot{y}_\mu \gtreqless 0\ ,\quad v_\mu \gtreqless 0 \qquad \forall\ t \in [0,T_f]$$

$$\dot{y}_\nu \gtreqless 0\ ,\quad v_\nu \gtreqless 0 \qquad \forall\ t \in [0,T_f]$$

então (y_μ, v_μ) e (y_ν, v_ν) são soluções viáveis para o problema dual.

<u>TEOREMA</u>: Se as equações (50) e (51) têm soluções y_μ , y_ν , as equações:

(57) $$\dot{\mu}(t) = K\,M(t)\,B^{-1}\left[\mu(t) - c(t)\right] \qquad \mu(0) = 0$$

(58) $$\dot{\nu}(t) = K\,B^{-1}\,N(t)\left[\nu(t) - c(t)\right] \qquad \nu(0) = 0$$

têm soluções únicas.

<u>prova</u>: [6], pg 22.

<u>TEOREMA</u>: Se o par (y_μ ,v_μ) determinado por (50) e (55) e xiste e é viável, se todos os elementos da matriz B são não negativos e a função multiplicadora μ deter - minada por (57) satisfaz:

(59) $$B^{-1}\left[-\mu(t) + c(t)\right] \gtrless 0 \qquad \forall\, t \in [0,T_f]$$

então (y_μ ,v_μ) é uma solução ótima para o problema / dual.

<u>prova</u>: [6] , pg 23.

<u>TEOREMA</u>: Se o par (y_ν ,v_ν) determinado por (51) e (56) existe e é viável, se todos os elementos da matriz B^{-1} são não negativos e se a função multiplicadora ν de terminada por (58) satisfaz:

$$c(t) - \nu(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t \in [0, T_f]$$

então (y_ν, v_ν) é uma solução ótima para o problema dual.

prova: [6] , pg 24.

TEOREMA: Suponhamos que a função μ definida por (57) exista e que o par (y_μ, v_μ) relacionado com ela e determinado por (50) e (55) seja ótimo. Então, se (x_μ, u_μ) que são definidos por:

$$\dot{x}_\mu(t) = B^{-1} M(t)\left[c(t) + K\, x_\mu(t)\right], \quad x_\mu(0) = 0$$

$$u_\mu(t) = M_1(t)\left[c(t) + K\, x_\mu(t)\right]$$

satisfaz:

$$\dot{x}_\mu(t) \geqslant 0 \quad , \quad u_\mu(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t \in [0, T_f]$$

e as matrizes B^{-1} e $M(t)$ comutam, é uma solução ótima para o problema primal.

prova: [6], pg 25.

TEOREMA: Suponhamos que a função ν definida por (58) exista e que o par (y_ν, v_ν) relacionado com ela e determinado por (51), (56) seja ótimo. Então, se (x_ν, u_ν) que são definidos por:

$$\dot{x}_\nu(t) = N(t)\, B^{-1}\left[c(t) + K\, x_\nu(t)\right], \qquad x_\nu(0) = 0$$

$$u_\nu(t) = B\, N(t)\, B^{-1}\left[c(t) + K\, x_\nu(t)\right]$$

satisfaz:

$$\dot{x}_\nu(t) \geqslant 0 \quad , \quad u_\nu(t) \geqslant 0 \qquad \forall \; t \in \left[0, T_f\right]$$

e as matrizes B^{-1} e $N(t)$ comutam, é uma solução ótima para o problema primal.

prova: [6] , pg 25.

OBSERVAÇÃO: Não há nenhuma dificuldade computacional fora do comum envolvida com o cálculo das soluções das equações diferenciais que apareceram acima. Poderíamos por exemplo na aplicação do Teorema (44), integrar primeiramente a equação (36) de trás para diante no tempo para obter λ. Calcularíamos então Λ por (34) correspondente a λ e integraríamos finalmente a equação (38). Se a solução da equação (38) juntamente com u_λ dado pela expressão (42) formar um par que é uma solução viável, então será também uma solução ótimapara o problema primal. Podemos / proceder anàlogamente na aplicação dos outros teoremas.

4° CAPÍTULO

PROGRAMAÇÃO CONTÍNUA COM RESTRIÇÕES NÃO LINEARES - UM TEOREMA DE "TURNPIKE" PARA PROCESSOS CONTÍNUOS.

Podemos considerar que um problema de programação contínua consiste em determinar um processo contínuo, que satisfazendo certas restrições, maximize um funcional objetivo, entre todos os processos contínuos que satisfaçam as referidas/ restrições.

Assim, no primeiro capítulo, retirando a hipótese de linearidade das restrições, tinhamos que determinar:

$$\max \int_0^{T_f} a' z(t)\, dt$$

com $\qquad R(\, y(t),\, z(t)\,) \leqq 0 \qquad$ para quase todo t

onde $\qquad y(t) = \int_0^t z(s)\, ds \qquad$ e z é limitada

$\forall\, t \in [0, T_f] \qquad$ e Lebesgue-mensurável.

Isto, por conveniência, considerando-se y uma função absolutamente contínua, pode ser reescrito:

Determinar:

$$\max \; a^{*} \, y(T_f)$$

com $\quad (y(t), \; z(t) = \dot{y}(t)) \in T \;$ quase $\forall t \in [0, T_f]$

onde $\quad T = \left\{ (y,z) \;\middle|\; R(y,z) \leqq 0 \; ; \; y,z \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$

<u>OBSERVAÇÃO</u>: No caso de programação linear contínua:

$$T = \left\{ (y,z) \;\middle|\; Bz \leqq Ky \; ; \; y,z \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$$

Para processos discretos, existem Teorema ditos de "Turnpike" ([7] , [8] , [9]), que nos dão informações valiosas para a determinação de processos viáveis ótimos.

Nêste capítulo, demonstraremos um Teorema de "Turnpike" para processos contínuos, aplicável a problemas de programação / contínua não lineares.

<u>DEFINIÇÃO</u>: Um conjunto T de pares de vetores de $\mathbb{R}^n$, satisfazendo as condições abaixo, será chamado um conjunto/ transformação.

(60) T é um cone convexo fechado no ortante não negativo de $\mathbb{R}^{2n}$.

(61) $(0,z) \in T \Longrightarrow z = 0$

Para a obtenção dos resultados a seguir será necessário adicionar as seguintes hipóteses:

(62) $(y,z) \in T$, $\hat{y} \geqslant y$ e $0 \leqslant \hat{z} \leqslant z \Rightarrow (\hat{y},\hat{z}) \in T$

(63) $\exists \, (y^{\circ}, z^{\circ}) \in T \ni z^{\circ} > 0$

(64) Se (y,z) , $(u,v) \in T$ e y e u são linearmente independentes, então, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}$, $\alpha + \beta = 1$

$$\exists \, w \ni (\alpha y + \beta u , w) \in T \text{ e } \alpha z + \beta v < w$$

(nem sempre precisaremos de todas condições)

<u>LEMA</u>: Se T satisfaz também (62) e (63), então

(65) $\exists \; y^* \in \mathbb{R}^n_+$,

$p^* \in \mathbb{R}^n_+$,

$\lambda^* \in \mathbb{R}_{++}$ tais que

$(y^*, \lambda^* y^*) \in T$

$p^* \cdot (z - \lambda^* y) \leqslant 0 \qquad \forall \, (y,z) \in T$

prova: [10] , pags 338, 339.

LEMA: Se T satisfaz (64) y^*, p^*, λ^* referidos no lema anterior satisfazem:

(66) $p^{*\prime}(z - \lambda^* y) < 0 \quad \forall\, (y,z) \in T$ exceto se

$y = \beta\, y^*$ para algum $\beta \in \mathbb{R}_{++}$

(67) y^* é único a menos de um fator de escala.

prova: [7], pags 203, 206.

DEFINIÇÃO: O conjunto $\{\, y(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_h \}$ (abreviadamente: $\{ y(t) \}_0^{T_f}$) onde $y: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ é absolutamente contínua , será denominado um processo viável de horizonte finito $T_h \leqslant T_f$, T_f finito, se:

$$(y(t), \dot{y}(t)) \in T \quad \forall\, t \in [0, T_h]$$

LEMA: Se $\exists\, k \in \mathbb{R}_{++} \ni \forall$ processo viável $\{ y(t) \}_0^{T_f}$, $T_f \geqslant k$, com $y(T_f) \geqslant 0$, acontecer de

$\exists t_i \ni$

$y_i(t_i) > 0 \qquad i = 1,\ldots,n\ , \qquad 0 \leq t_i < T_f$

(e assim, segundo Nikaido [7] , pg 204, o conjunto transformação é dito indecomponível)

então $\qquad y^* > 0$

<u>prova</u>: $\left\{ e^{\lambda^* t}\, y^* \right\}_0^{T_f} \quad \forall\, T_f \in \mathbb{R}_{++}$ é um processo viável com $\quad e^{\lambda^* T_f}\, y^* \geq 0$. E se $y_i^* = 0$ para algum i, êsse processo viável para $T_f > k$ satisfaria $e^{\lambda^* t_i}\, y_i^* = 0$ ($0 \leq t_i < T_f$) contrariando a nossa hipótese. ∎

<u>LEMA</u>: $\qquad y^* > 0 \Rightarrow p^* > 0$

<u>prova</u>: [7] , pag 209.

<u>LEMA</u>: Se T satisfaz (62) e $y^* > 0$, a seguinte condição é satisfeita:

(68) Dado um vetor inicial $y^\circ > 0$, para algum $\sigma \in \mathbb{R}_{++}$ e algum $T_0 \in \mathbb{R}_{++}$, $\exists$ um processo viável $\left\{ r(t) \right\}_0^{T_0}$ co

meçando em $r(0) = y^{\circ}$ e terminando em $r(T_{\circ}) = \sigma\, y^{*}$ com

$\dot{r}(T_{\circ}) = \lambda^{*} \sigma\, y^{*}$

<u>prova</u>: Seja a equação:

$$\dot{r}(t) = 0.\ r(t) + z(t) \quad \text{e as condições:}$$

(69)

$$r(0) = y^{\circ}\ ,\ \dot{r}(T_{\circ}) = z(T_{\circ}) = \sigma \lambda^{*}\, y^{*},\ r(T_{\circ}) = \sigma\, y^{*}$$

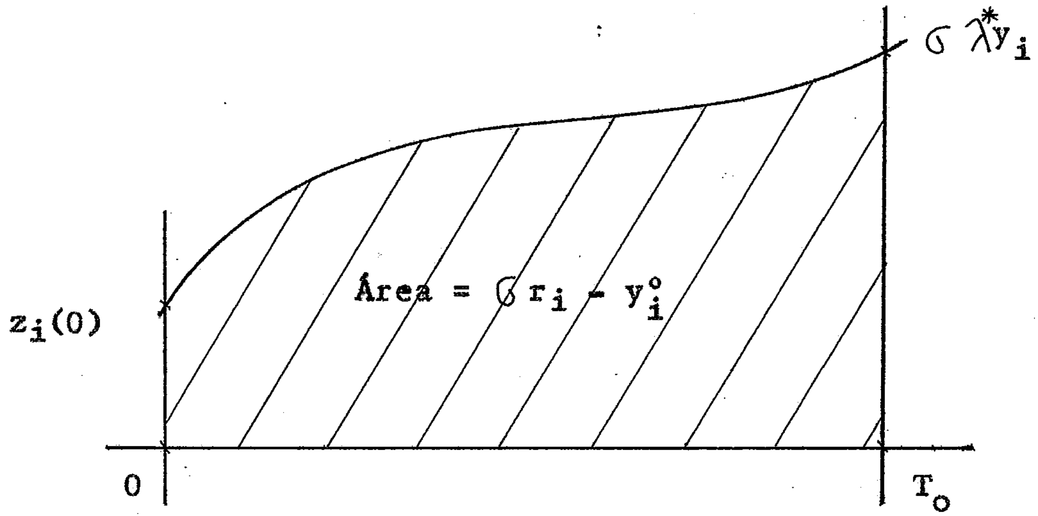
Integrando (69):

$$\sigma\, y^{*} - y^{\circ} = \int_{0}^{T_{\circ}} z(t)\, dt$$

Como, para viabilidade, z tem que ser não negativa, temos a condição a ser satisfeita:

(70) $\sigma\, y^{*} \geqslant y^{\circ}$

Evidentemente, até êste ponto, podemos garantir a existência de soluções de (69) satisfazendo a condição adicional (70), pois para cada componente, fixos σ e $T_{\circ}$:



é suficiente que tomemos para $z_i(t)$ uma função tal que

$$\int_0^{T_o} z_i(t)\,dt = \sigma y_i^* - y_i^\circ \qquad i = 1,..,n \text{ , valor êsse fi-}$$

xo e bem determinado para cada i .

Entretanto, para o processo

$$\left\{ r(t) = y^\circ + \int_0^t z(\tau)\,d\tau \right\}_0^{T_o} \text{ ser viável, ainda temos que}$$

ter: $\quad (r(t) , z(t)) \in T \qquad \forall\, t \in [0,T_o]$

Agora, uma condição suficiente para isso é que:

(71) $\quad z(t) \leqslant \delta \lambda^* e^{\lambda^* t} \cdot y^* \triangleq \bar{z}(t)$ $\qquad$ para algum

(72) $\quad r(t) \geqslant \delta \cdot e^{\lambda^* t} \cdot y^* \triangleq \underline{r}(t)$ $\qquad$ $\delta \in \mathbb{R}_{++}$

pois estamos admitindo (62) e o processo $\left\{ \delta e^{\lambda^* t} y^* \right\}_0^t$ é viável $\forall t \in \mathbb{R}_{++}$

Mas para que as condições (71) e (72) possam ser satisfeitas por soluções de (69) com a condição (70), é preciso que:

$$\bar{z}(T_0) = \delta \lambda^* e^{\lambda^* T_0} y^* \geqslant \sigma \lambda^* y = z(T_0) \qquad \text{ou seja:}$$

$$e^{\lambda^* T_0} \geqslant \frac{\sigma}{\delta} \qquad \text{ou ainda:}$$

(73) $$\log \sigma - \log \delta \leqslant \lambda^* T_0$$

Também, já que

$$r(t) = \int_0^t z(\tau)\, d\tau + y^0 = \int_0^{T_0} z(\tau)\, d\tau - \int_t^{T_0} z(\tau)\, d\tau + y^0 =$$

$$= \sigma y^* - \int_t^{T_0} z(\tau)\, d\tau \geqslant \sigma y^* - \int_t^{T_0} \bar{z}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sigma y^* - \delta e^{\lambda^* T_0} y^* + \delta e^{\lambda^* t} y^*$$

Vamos impor que:

$$r(t) \geqslant \sigma y - \delta e^{\lambda^* T_0} y^* + \delta e^{\lambda^* t} y^* \geqslant \underline{r}(t) = \delta e^{\lambda^* t} y^*$$

$$\forall t \in [0, T_0]$$

ou seja: $\sigma \geq e^{\lambda^* T_o}$

ou ainda:

(74) $\log \sigma - \log \delta \geqslant \lambda^* T_o$

E, finalmente, é preciso que:

$r(0) = y^\circ \geqslant \underline{r}(0) = \delta\, y^*$

ou seja:

$\delta\, y^* \leqslant y^\circ$

Reunindo então as condições (73) e (74) em uma só, temos as seguintes condições a ser satisfeitas por σ, δ e T_o, para que existam soluções de (69) viáveis:

$$
(75)\begin{cases} \sigma\, y^* \geqslant y^\circ \\ \delta\, y \leqslant y^\circ \\ T_o = \dfrac{1}{\lambda^*}\left(\log \sigma - \log \delta \right) > 0 \end{cases}
$$

Realmente, essas condições são suficientes para que soluções de (69) possam satisfazer (71) e (72) e portanto serem viáveis.

Ora, as condições (75) são sempre possíveis de serem satisfeitas, escolhendo σ suficientemente.

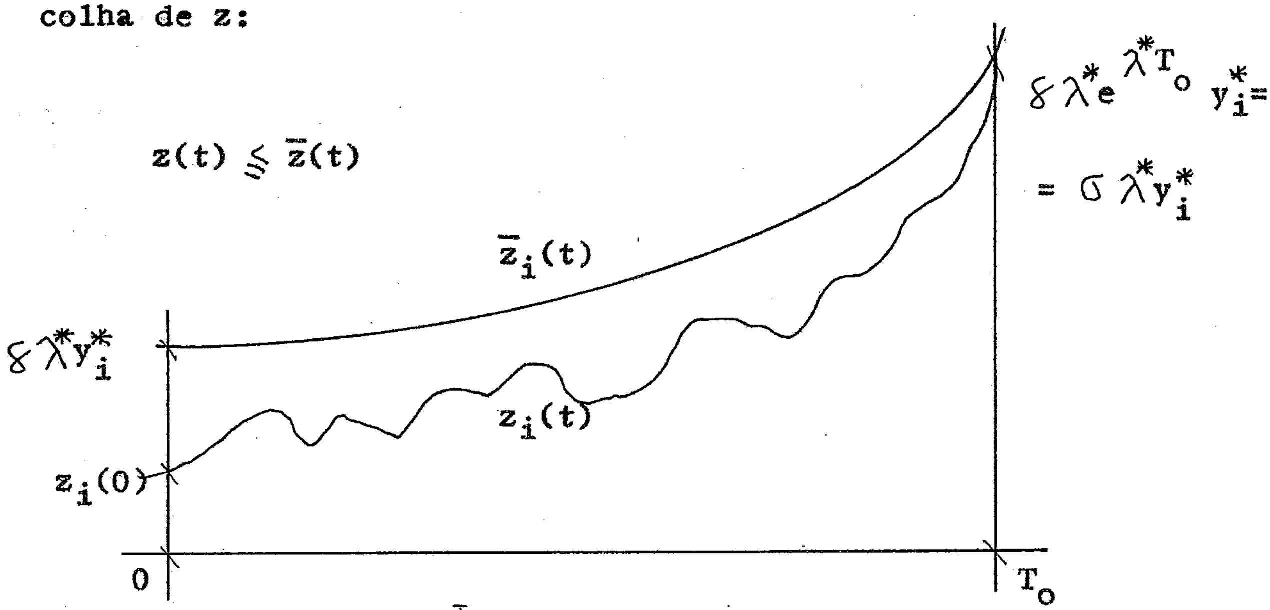
grande e δ suficientemente pequeno.

Então, a condição $(r(t) , z(t)) \in T , \quad \forall t \in [0,T_0]$

que o processo $\{ r(t) \}_0^{T_0}$ deve satisfazer, introduz, escolhi-

dos já δ , σ e T_0 apropiados, a seguinte limitação à nossa es-

colha de z:



E ainda, como $\int_0^{T_0} z_i(t)\, dt = \sigma\, y_i^* - y_i^o$

e $\int_0^{T_0} \bar{z}_i(t)\, dt = \underline{r}(T_0) - \underline{r}(0) \geqslant \delta\, e^{\lambda^* T_0} y^* - \underline{r}(0)$

que, pelas condições (75) e (73) é $\geqslant \sigma y^* - y^o$,

uma função vetorial cujas componentes sejam exponenciais pas-

sando por $\sigma \lambda^* y_i$ e tendo para integral entre 0 e T_0 os valores $\sigma y_i - y_i^{\circ}$ é uma solução viável de (69). $\blacksquare$

<u>DEFINIÇÃO</u>: Seja U uma coleção de funções $u: \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tais que $u(\alpha y) = \alpha u(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n_+, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$

Um processo viável $\{ y(t) \}_0^{T_f}$ começando em / $y(0) = y^{\circ}$ é dito U-ótimo se:

$\exists u \in U \ni$

$$u(y(T_f)) = \max\left\{ u(x(T_f)) \;\middle|\; \{x(t)\}_0^{T_f} \text{ viável }, \; x(0) = y^{\circ} \right\}$$

<u>LEMA</u>: Se $U = \left\{ u_a \mid u_a(y) = a'y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \; a \in P_n \right\}$ onde P_n é o simplex padrão de $\mathbb{R}^n$ (*), é satisfeita a seguinte condição:

(76) Para algum $\hat{u} \in \mathbb{R}_{++}$ e algum $T_1 \in \mathbb{R}_+$, $\exists$ um processo viável $\{ w(t) \}_0^{T_1}$ começando em $w(0) = y^*$ e terminando /

(*) $P_n = \left\{ q \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \|q\| = 1 \right\}$

em $w(T_1) = q \ni u(q) \geq \hat{u} \qquad \forall\, u \in U$

<u>prova</u>: basta tomar $\hat{u} = \min\limits_{a \in P_n} a'q$ $\blacksquare$

<u>LEMA</u>: Se U é o do lema anterior e $p^* > 0$, temos também:

(77) As funções $\in U$ são majoradas uniformemente por $p^{*\prime}y$ no sentido de que existe um $C \in \mathbb{R}_{++} \ni u(y) \leq C\, p^{*\prime}\, y$ $\forall\, u \in U$ e $\forall\, y \in \mathbb{R}^n_+$

<u>prova</u>: Façamos $C = \max\,(1 / p^*_i)$

$$a_i \leq 1 \leq C p^*_i \qquad i = 1,..,n \qquad \forall a \in P_n$$

$$\Rightarrow u_a(y) = a'y \leq C\, p^{*\prime}y \quad \forall u_a \in U, \ \forall y \in \mathbb{R}^n_+ \ \blacksquare$$

(78) <u>LEMA</u>: Se T satisfaz (62), o conjunto

$$\Lambda = \Big\{ (y,z) \;\Big|\; y \in P_n \text{ e } \exists \text{ um processo viável } \{y(t)\}_0^{T_f} \ni \text{para algum } t \in [0,T_f],\ y(t) = y \text{ e } \dot{y}(t) = z \Big\}$$

é compacto.

<u>prova</u>: é limitado pois supondo por absurdo que não, seja

$t_o \in [0, T_f] \} \circ$ conjunto dos vetores $z(t_o) \} \exists$ um processo viá-

vel $\{ y(t) \}_0^{T_f}$ com $y(t) \in P_n$ e $\dot{y}(t_o) = z(t_o)$ não é limitado.

Seja $\{ y^i(t) \}_0^{T_f}$ uma sequência de tais processos com

$$\lim_{i \to \infty} \| z^i(t_o) \| = \infty$$

observando que $(y^i(t_o) , z^i(t_o)) \in T$ e, em vista de T ser um cone, temos:

$$\left(\frac{y^i(t_o)}{\|z^i(t_o)\|} , \frac{z^i(t_o)}{\|z^i(t_o)\|} \right) \in T \qquad i = 1,2,\ldots$$

Como $y^i(t_o)$ é limitado por hipótese,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{y^i(t_o)}{\| z^i(t_o)\|} = 0$$ mas $\dfrac{z^i(t_o)}{\| z^i(t_o) \|}$ tem norma unitária, então sem perda de generalidade, pode ser admitido que:

$$\frac{z^i(t_o)}{\| z^i(t_o)\|} \to \hat{z} \qquad \text{com } \| \hat{z} \| = 1$$

então, $\left(\dfrac{y^i(t_o)}{\| z^i(t_o)\|} , \dfrac{z^i(t_o)}{\| z^i(t_o)\|} \right) \longrightarrow (0,\hat{z}) \in T$ pois T é fechado.

Logo (61) $\Longrightarrow$ $\hat{z} = 0$, absurdo pois $\|\hat{z}\| = 1$

Vamos agora mostrar que Λ é fechado. Seja uma sequência $(y_i, z_i) \in \Lambda$ convergindo para $(\hat{y}, \hat{z})$.

Então $(\hat{y}, \hat{z}) \in T$, pois T é fechado.

$$\text{Mas} \quad (y_i, z_i) \longrightarrow (\hat{y}, \hat{z}) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_i \longrightarrow \hat{y} \\ z_i \longrightarrow \hat{z} \end{cases}$$

já que P_n é fechado, $\hat{y} \in P_n$.

Por (62), podemos construir um processo viável:

$$\left\{ y(t) = \hat{y} + t\hat{z} \right\}_0^{T_f} \qquad \text{com} \qquad \frac{d}{dt} (\hat{y} + t\hat{z}) = \hat{z}$$

Como $\hat{y} = y(0) \in \left\{ \hat{y} + t\hat{z} \right\}_0^{T_f}$, $(\hat{y}, \hat{z}) \in \Lambda$ e Λ é fechado.

Mas Λ é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^{2n}$, logo é compacto. ∎

(79) <u>LEMA</u>: Dado um conjunto transformação T, admitindo (65), (66) e (68) satisfeitas, e, sem perda de generalidade, que $\| y^* \| = 1$,

Temos:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{++},\ \exists\, \rho \in \mathbb{R} \ni :$$

(80) $\lambda^* > \rho > 0$

(81) $\| (y / \|y\|) - y^* \| \geq \varepsilon$, $y = y(t_o) \in \{y(t)\}_o^{T_f}$

processo viável, $\dot{y}(t_o) = z \implies p^{*'}(z - \rho y) \leqslant 0$

<u>prova</u>: Como T é um cone, só precisamos provar para processos $(y,z) \ni \|y\| = 1$

Consideremos: $V = \{ (y,z) \mid y = y(t_o) \in \{y(t)\}_o^{T_f}$ processo viável, $\dot{y}(t_o) = z$, $\|y\| = 1$, $\|y - y^*\| \geq \varepsilon \}$

Se $V = \emptyset$, qualquer $\rho \in \mathbb{R}_{++}$ satisfazendo (80) satisfará também (81).

Se $V \neq \emptyset$ reescrevamo-lo:

$V = \Lambda \cap \{(y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^{2n} , \|y - y^*\| \geq \varepsilon \}$

Como $\{ (y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^{2n} , \|y - y^*\| \geq \varepsilon \}$ é fechado em $\mathbb{R}^{2n}$ e Λ é compacto, V é compacto.

Mas $(y,z) \in V \implies y \neq 0$ e y não é proporcional a y^*

$p^{*}`z < \lambda^{*} p`y$ por (66)

Então, $p^{*}`y > 0$. Definamos:

$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(y,z) = \dfrac{p^{*}`z}{p^{*}`y}$ f é contínua em V, e como V é compacto, f tem um máximo τ em V que por (66) é menor que λ^{*}.

Então, qualquer $\rho \ni \tau \leq \rho < \lambda^{*}$ satisfaz (80) e (81) ∎

<u>TEOREMA</u>: Dado um conjunto transformação T e admitindo satisfeitas (65), (66), (68), (76) e (77), temos que:

$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}\ \exists\ k \in \mathbb{R}_{++} \ni$

todos os processos u-ótimos, $\{y(t)\}_0^{T_f}$, $T_f \geq k$, T_f finito não fixo, começando em $y(0) = y^{\circ} > 0$ satisfazem:

$\left\| \dfrac{y(t)}{\|y(t)\|} - y^{*} \right\| < \varepsilon$ exceto possìvelmente durante um tempo máximo k. (estamos considerando, como no lema (79) que $\|y^{*}\| = 1$)

<u>prova</u>: Seja L o conjunto dos $t \in [0,T_f] \ni \left\| \dfrac{y(t)}{y(t)} - y^{*} \right\| \geq \varepsilon$ vale para um processo viável $\{y(t)\}_0^{T_f}$ começando em y° .

Como y e $\|\cdot\|$ são aplicações contínuas, L é mensurável. Se ja então l a sua medida. L como também l dependem do processo em questão. O teorema será então provado se l é limitada uniformemente para todos os processos U-ótimos começando em y°.

Como $(y(t), z(t)) \in T \quad 0 \leqslant t \leqslant T_f$, por viabilidade, nós temos por (65):

(82) $\qquad p^{*\prime} z(t) \leqslant \lambda^{*} p^{*\prime} y(t) \qquad \forall t \in [0,T_f]$ e, em particular, pelo Lema (79), $\exists \quad 0 < \rho < \lambda^{*} \ni$

(83) $\qquad p^{*\prime} z(t) \leqslant \rho \; p^{*\prime} y(t)$ se $t \in L$

Definamos $\qquad f: \; [0,T_f] \rightarrow \mathbb{R}_{++}$

$$f(t) = \begin{cases} \rho & \text{se } t \in L \subset [0,T_f] \\ \lambda^{*} & \text{se } t \in [0,T_f] - L \end{cases}$$

Como $z(t) = \dot{y}(t)$, (82) e (83) podem ser reunidas:

(84) $\qquad p^{*\prime} \dot{y}(t) \leqslant f(t) \, p^{*\prime} y(t), \qquad p^{*\prime} y(0) = y^{\circ} \quad \forall t \in [0,T_f]$

Consideremos também : (veja [11])

(85) $\qquad p^{*\prime} \dot{x}(t) = f(t) \, p^{*\prime} x(t), \qquad p^{*\prime} x(0) = y^{\circ} \quad \forall t \in [0,T_f]$

$$p^{*\prime} x(t) = e^{\int_0^t f(s)ds} \cdot p^{*\prime} y^{\circ} \text{ , pois:}$$

$$p^{\prime} \dot{x}(t) = f(t) \, e^{\int_0^t f(s)ds} \cdot p^{*\prime} y^{\circ} = f(t) \, e^{\int_0^t f(s)ds}$$

Agora, seja um $t_o \in [0,T_f] \ni p^{*'} x(t_o) = p^{*'} y(t_o)$

Então $p^{*'} \dot{y}(t_o) \leq f(t)\, p^{*'} y(t_o) = f(t)\, p^{*'} x(t_o) =$

$$= p^{*'} \dot{x}(t_o)$$

Isto é, em qualquer "cruzamento", $p^{*'} \dot{y}(t_o) \leq p^{*'} \dot{x}(t_o)$

$\therefore$ Se $\exists\ s_o \in [0,T_f] \ni p^{*'} y(s_o) \leq p^{*'} x(s_o)$

Então $p^{*'} y(t) \leq p^{*'} x(t) \quad \forall\, t \in [0,T_f] \ni t \geq s_o$

Como $p^{*'} y(0) = p^{*'} x(0)$

$\therefore$ $p^{*'} y(t) \leq p^{*'} x(t) \quad \forall\, t \in [0,T_f]$ ou seja:

$$(86)\quad p^{*'} y(t) \leq p^{*'} y^{\circ}\, e^{\int_0^t f(s)ds} .$$

Logo (84), (86) $\Rightarrow$

$$p^{*'} \dot{y}(t) \leq f(t)\, p^{*'} y(t) \leq f(t)\, p^{*'} y^{\circ}\, e^{\int_0^t f(s)ds}$$

$$\Rightarrow \int_0^{T_f} p^{*'} \dot{y}(t)dt = p^{*'} y(T_f) - p^{*'} y^{\circ} \leq p^{*'} y^{\circ} \int_0^{T_f} f(t)\, e^{\int_0^t f(s)ds}\, dt =$$

$$= p^{*'} y^{\circ} \left. e^{\int_0^t f(s)ds} \right]_0^{T_f} = p^{*'} y^{\circ}\, e^{\int_0^{T_f} f(t)dt} - p^{*'} y^{\circ}$$

$$\Rightarrow$$

$$(87)\quad p^{*'} y(T_f) \leq p^{*'} y^{\circ}\, e^{\rho^1} \cdot e^{\lambda^*(T_f-1)}$$

Seja agora $\overline{y}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$ definida por:

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} r(t) & T_o \geqslant t \geqslant 0 \\ e^{\lambda^*(t-T_o)} \sigma \; y^* & T_f - T_1 \geqslant t > T_o \\ e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma \; w(\; t-(T_f-T_1)\;) & T_f \geqslant t > T_f-T_1 \end{cases}$$

onde $\left\{ r(t) \right\}_0^{T_o}$ e $\left\{ w(t) \right\}_0^{T_1}$ são processos viáveis tais que

$r(0) = y°$, $r(T_o) = \sigma \; y^*$ e $w(0) = y^*$, o que é sempre possível

pelas hipóteses (68) e (76).

Logo: $e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma \; w(0) = e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma \; y^*$

Mas $\left\{ \overline{y}(t) \right\}_0^{T_f}$ é viável, pois:

$$\left\{ \overline{y}(t) \right\}_0^{T_f} = \left\{ r(t) \right\}_0^{T_o} \cup \left\{ e^{\lambda^*(t-T_o)} \sigma \; y^* \right\}_{T_o}^{T_f-T_1} \cup$$

$$\cup \left\{ e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma \; w(t-(T_f-T_1)) \right\}_{T_f-T_1}^{T_f}$$

Também, os dois primeiros conjuntos são evidentemente processos viáveis, assim como o terceiro:

$\left\{ e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma \; w(t) \right\}_0^{T_1}$ porque T é um cone.

Agora, se $T_f \geqslant T_o + T_1$ e o processo $\left\{ y(t) \right\}_0^{T_f}$ em questão é U-ótimo, existe $\tilde{u} \in U$ tal que $\tilde{u}(y(T_f))$ é máximo para todos os processos viáveis começando em $y°$.

Mas então, em particular:

$\tilde{u}(y(T_f)) \geqslant \tilde{u}(\bar{y}(T_f))$ onde ,

$$(88) \qquad \tilde{u}(\bar{y}(T_f)) = e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma\, \tilde{u}(a) \geqslant$$

$$\geqslant e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma\, \hat{u} \quad \text{por (76)}$$

Então (88) $\Longrightarrow$

$$(89) \qquad \tilde{u}(y(T_f)) \geqslant e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma\, \hat{u} \qquad \text{finalmente ,}$$

vemos que os primeiros membros de (87) e (89) são relacionados por:

$$(90) \qquad \tilde{u}(y(T_f)) \leqslant C\, p^{*\prime}\, y(T_f) \quad \text{por meio de (77)}$$

Sintetizando (87), (89) e (90) temos:

$$C\, p^{*\prime}\, y°\, e^{\rho . 1} \, . \, e^{\lambda^*(T_f-1)} \geqslant e^{\lambda^*[T_f-(T_o+T_1)]} \sigma\, \hat{u} \qquad \text{ou:}$$

$$(91) \qquad 0 < \frac{\sigma\, \hat{u}}{e^{\lambda^*(T_o+T_1)}} \leqslant C \left(\frac{e^{\rho}}{e^{\lambda^*}}\right)^1 p^{*\prime}\, y°$$

Como $1 > \frac{\rho}{\lambda^*} > 0$, de (91) nós conseguimos a majoração:

$$\log \sigma\, \hat{u} - \lambda^*(T_o+T_1) \leqslant \log C\, p^{*\prime}\, y^{\circ} + 1(\rho - \lambda^*)$$

$$\Longrightarrow\ 1 \leqslant \frac{\log \sigma\, \hat{u} - \log C\, p^{*\prime}\, y^{\circ} - \lambda^*(T_o+T_1)}{\rho - \lambda^*}$$

Finalmente, $k = \max\ (\ T_o+T_1\ ,\ 1\ )$ ▮

Êste k é independente dos processos U-ótimos, dependendo ùnicamente de ε . Provamos então a ε-proximidade uniforme dos processos U-ótimos exceto para um tempo de duração máxima k.

Isto nos dá informações sôbre o comportamento dos processos U-ótimos para uma dada tecnologia (um dado conjunto transformação). Ou seja, das soluções de problemas de programação contínua em que as restrições e os funcionais objetivos satisfaçam certas condições.

5° CAPÍTULO

CONCLUSÕES

As soluções das versões contínuas, ainda que mais próximas da realidade do que as versões discretas, necessitam grande complexidade matemática para sua obtenção. Essa dificuldade é perceptível na tentativa de solução por equações diferenciais apresentada no 3º capítulo.

Se as dificuldades são grandes no caso de restrições lineares, com muito mais razão o serão no caso de problemas com restrições não lineares. Foi tentado então um novo enfoque, estabelecendo-se uma versão contínua de um teorema de "Turnpike" utilizado na Economia Matemática em processos discretos.

Como sujestão para pesquisas futuras poder-se-ia tentar / versões contínuas de outros Teoremas de "Turnpike" , como o de Mc. Kenzie e o de Tsukui [8] , onde algumas hipóteses restritivas como a (64) poderiam ser relaxadas.

APÊNDICE

DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS DO 1º CAPÍTULO (Verma [12])

LEMA: $\hat{z}$ solução ótima $\Longrightarrow$

$$\int_0^{T_f} a(t)' y(t)\, dt > 0 \quad \text{não tem solução em } Q.$$

prova: (contradição)

Seja $y \in Q$ solução.

$$\Longrightarrow z(t) = \hat{z}(t) + y(t) \in Z \quad \text{e}$$

$$\int_0^{T_f} a(t)' z(t)\, dt = \int_0^{T_f} a(t)' (\hat{z}(t) + y(t))\, dt >$$

$$> \int_0^{T_f} a(t)' \hat{z}(t)\, dt \; ! \quad \text{pois } \hat{z}(t) \text{ é ótimo} \quad \blacksquare$$

TEOREMA: O sistema de inequações:

$$y \geqslant 0$$

$$B\, y(t) \leqslant \int_0^{t} K\, y(s)\, ds$$

$$\int_0^{T_f} a(t)' y(t)\, dt > 0 \qquad \text{não tem solução em } Q^n .$$

prova: (contradição)

Seja y solução.

Como $\hat{z}$ é viável:

$$z(t) = \hat{z}(t) + y(t) \geqslant 0$$

$$B\, z(t) = B\, \hat{z}(t) + B\, y(t) \leqslant c(t) + \int_0^t K\, \hat{z}(s)\, ds + \int_0^t K\, y(s)\, ds =$$

$$= c(t) + \int_0^t K\, z(s)\, ds$$

$$\Longrightarrow \qquad z \in Z$$

Mas $\displaystyle\int_0^{T_f} a(t)'\, z(t)\, dt = \int_0^{T_f} a(t)'\, \hat{z}(t)\, dt \; +$

$$+ \int_0^{T_f} a(t)'\, y(t)\, dt > \int_0^{T_f} a(t)'\, \hat{z}(t)\, dt \; ! \quad \blacksquare$$

(92) <u>TEOREMA</u>: $\hat{z}$ é uma solução ótima $\Longleftrightarrow$

$$a(t)'\, \hat{z}(t) \geqslant a(t)'\, z(t) \qquad \forall t \in [0, T_f]$$

$$\forall\, z \in Z$$

Para provar êsse teorema, necessitaremos de várias definições e Lemas auxiliares:

<u>DEFINIÇÕES</u>: Seja Q_1 uma classe de funções contínuas tais que

$$y \in Q_1 \quad \Longleftrightarrow$$

(a) $y \in Q^n$

(b) $\quad y_j = 0 \quad$ se $\quad a_j(t) \neq 0 \qquad \forall\, t$ e $j = 1,\ldots,N$

NOTA: $\quad y = 0 \in Q_1$

$$Q_2 \triangleq \left\{ y \;\middle|\; y(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t, \quad y \notin Q_1 \right\}$$

$$Q_3 \triangleq \left\{ y \;\middle|\; y(t) \leqslant 0 \qquad \forall\, t, \quad y \notin Q_1 \right\}$$

$$Q_4 \triangleq \left\{ y \;\middle|\; y \in Q^n, \quad y \notin Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \right\}$$

(93) $\quad$ NOTA: $\quad Q \subset Q^n = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$

NOTA: É óbvio que Q_4 consiste do conjunto das funções n-vetoriais contínuas que têm pelo menos uma das componentes trocando sinal pelo menos uma vez em $[0, T_f]$

Seja $\; y(t) \triangleq y^p(t) + y^n(t) \qquad$ onde

$$y_j^p(t) = y_j(t) \qquad \text{se } y_j(t) \geqslant 0$$

e é zero de outra feita

$$y_j^n(t) = y_j(t) \qquad \text{se } y_j(t) \leqslant 0$$

para $j = 1,\ldots,N$

NOTA: $\quad y^p$, y^n são contínuas em $[0, T_f]$ e têm as seguintes propriedades:

$$y^p(t) \geq 0 \quad \forall\, t$$

(94)

$$y^n(t) \leq 0 \quad \forall\, t$$

Acrescentaremos as seguintes hipóteses:

$$K \geqslant 0$$

(95)

$$a(t) \geqslant 0 \quad \forall\, t \qquad \text{(não consideraremos o caso } a = 0\text{)}$$

(96) LEMA: $Q \cap Q_2 = \emptyset$

prova: (contradição)

Suponhamos que $\exists\, y \in Q \cap Q_2$

(97) então $z = \hat{z} + y$ é viável e

$$\int_0^{T_f} a(t)' \, z(t)\, dt = \int_0^{T_f} a(t)' \, \hat{z}(t)\, dt + \int_0^{T_f} a(t)' \, y(t)\, dt$$

(98) $\therefore \int_0^{T_f} a(t)' \, z(t)\, dt > \int_0^{T_f} a(t)' \, \hat{z}(t)\, dt$ já que

$\int_0^{T_f} a(t)' \, y(t)\, dt > 0 \quad \forall\, y \in Q_2$. Isso completa a prova pois

z por (97) e (98) contradiz a otimilidade de $\hat{z}$. ∎

(99) <u>LEMA</u>: $Q \cap Q_4 = \emptyset$

<u>prova</u>: (contradição)

Seja $y \in Q \cap Q_4$. Então:

(100) $z = \hat{z} + y$ é viável. Agora:

(101) $z^+(t) = \max \left\{ \hat{z}(t), z(t) \right\}$. Claramente,

(102) z^+ é uma função contínua e

(103) $z^+(t) \geqslant 0$ já que $\hat{z}(t)$ e $z(t)$ o são.

Então, de (101):

(104) $z^+(t) = \hat{z}(t) + y^p(t)$

Para provar a viabilidade de z^+ , peguemos um componente arbitrário $z_j^+(t)$ em um instante de tempo arbitrário $t \in [0, T_f]$

Então:

a) $z_j^+(t) = z_j(t)$ ou

b) $z_j^+(t) = \hat{z}_j(t)$ ou

c) $z_j^+(t) = z_j(t) = \hat{z}_j(t)$

É suficiente considerar apenas os dois primeiros casos.

caso a): Como z é viável,

$$z_j^+(t) = z_j(t) \leqslant c_j(t) + \int_0^t K^{j'} z(s)\, ds$$

Mas $z^+(t) \geqslant z(t) \quad \forall t$ por definição e

$K^j \geqslant 0$ por hipótese. Então,

(105) $$z_j^+(t) \leqslant c_j(t) + \int_0^t K^{j'} z^+(s)\, ds$$

caso b): Anàlogamente chegamos a:

$$z_j^+(t) = \hat{z}_j(t) \leqslant c_j(t) + \int_0^t K^{j'} \hat{z}(s)\, ds$$

$\Longrightarrow$

(106) $$z_j^+(t) \leqslant c_j(t) + \int_0^t K^{j'} z^+(s)\, ds$$

Então, (102), (103), (105), (106) e o fato que t e j fo - ram escolhidos arbitràriamente, $\Longrightarrow$

(107) z^+ é uma solução viável.

Também, de (104)

(108) $$\int_0^{T_f} a(t)' z^+(t)\, dt = \int_0^{T_f} a(t)' \hat{z}(t)\, dt + \int_0^{T_f} a(t)' y^p(t)\, dt$$

Como a, $y^p \neq 0$ e $y^p \in Q_1 \Rightarrow$

$$\int_0^{T_f} a(t)' \, y^p(t)\, dt > 0.$$ Isto e (107) $\Rightarrow$

$$\int_0^{T_f} a(t)' \, z^+(t)\, dt > \int_0^{T_f} a(t)' \, \hat{z}(t)\, dt \qquad (109)$$

Mas a prova está então completa, pois (107) e (109) contradizem a otimilidade de $\hat{z}$.

<u>NOTA:</u> (93), LEMA(96) e LEMA(99) $\Rightarrow$

(110) $Q \subset Q_1 \cup Q_3$

(111) <u>LEMA:</u> Se $z(t) = \hat{z}(t) + y(t)$ e $y \in Q \cap Q_1$

então $a(t)' \, \hat{z}(t) = a(t)' \, z(t) \quad \forall \, t$

<u>prova:</u> Por definição de Q_1, $a(t)' \, y(t) = 0$. ∎

(112) <u>LEMA:</u> Se $z(t) = \hat{z}(t) + y(t)$ e $y \in Q \cap Q_3$

então $a(t)' \, \hat{z}(t) \geqq a(t)' \, z(t) \quad \forall \, t$

<u>prova:</u> Como $y \in Q_3$, fica claro da definição e de (95) que $a(t)' \, y(t) \leqq 0$. ∎

<u>NOTA</u>: Notemos que embora o LEMA (112) não proporcione uma inequação estrita, a definição de Q_3 e (95) asseguram que o produto escalar será menor que zero no mínimo em um sub intervalo infinitezimal, resultando:

$$\forall\ y \in Q_3\ , \quad \int_0^{T_f} a(t)'\ \hat{z}(t)\ dt > \int_0^{T_f} a(t)'\ z(t)\ dt.$$

<u>prova do TEOREMA</u> (92): Suficiência:

dado que $a(t)'\ \hat{z}(t) \geqslant a(t)'\ z(t)\ \ \forall\ z$ viável e evidentemente $\hat{z}$ é viável,

$$a(t)'\ \hat{z}(t) - a(t)'\ z(t) = f(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \int_0^{T_f} a(t)'\ \hat{z}(t)\ dt \geqslant \int_0^{T_f} a(t)'\ z(t)\ dt$$

Isto prova a otimilidade de $\hat{z}$.

Necessidade:

Se $\hat{z}$ é ótimo, então valem os Lemas (111) e (112). Isto, junto com (110) nos dá:

$$a(t)'\ \hat{z}(t) \geqslant a(t)'\ z(t) \qquad \forall\ z \in Z\ . \ \blacksquare$$

REFERÊNCIAS

1 BELMAN, R., Dynamic Programing, Princeton University Press, 1957

2 LEVINSON, N., A Class of Continuous Linear Programming Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applica tions, 1966

3 GRINOLD, R. C., Symmetric Duality for Continuous Line- ar Programs, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1970

4 TYNDALL, W. F, A Duality Theorem for a Class of Conti- nuous Linear Programming Problems, Journal of the So - ciety for Industrial and Applied Mathematics, 1965

5 TYNDALL, W. F. , An Extended Duality Theorem for Conti- nuous Linear Prgramming Problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1967

6 LARSEN, A. and POLAK, E. , Some Sufficient Conditions for Continuous Linear - Programming Problems, ERL Tech nical Memorandum M - 123, University of California, Ber keley, 1965

7 NIKAIDO, H. , Convex Structures and Economic Theory, A- cademic Press, 1968

8 BURMEISTER, E. and DOBELL, A. R., Mathematical Theories of Economic Growth, The Macmillan Company, 1970

9 ARDUINO, A., Determinação de uma Raia de von Neumann para a Expansão da Economia Brasileira, Tese de M. Sc., COPPE, 1971

10 KARLIN, S. , Mathematical Methods and Theory in Games , Programming and Economics, Addison - Wesley, Reading, 1959

11 WALTER, W., Differential and Integral Inequalities, Springer - Verlag, 1970

12 VERMA, J. P., Necessary Conditions for Continuous Linear Programming Problems, M. Sc. Thesis, University of California, Berkeley, 1966