

PROBLEMA DE GRAETZ NO ESCOAMENTO ENTRE DISCOS PARALELÒS

NIVALDO ELIAS MURAD

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

APROVADO POR

Alfonso Silva Telles.

Julio Masc...

J. A. Coimbra

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

ABRIL DE 1.968.

Aos meus pais e avós pelo apoio

Ao tio José pela orientação

Ao professor Telles pela capacidade

ofereço êste trabalho.

I N D I C E

	PAG.
SUMÁRIO	1
INTRODUÇÃO	2
CAPITULO 1 - ANÁLISE TEÓRICA	4
CAPITULO 2 - TEMPERATURA MÉDIA	14
CAPÍTULO 3 - FLUXO DE CALOR EM UM PONTO E TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	17
CAPÍTULO 4 - OBTENÇÃO DA TEMPERATURA, TEMPERATURA MÉDIA, FLUXO TÉRMICO, CALOR TOTAL, PARA VALORES PARTICULARES DE E	20
TABELA 1 - VALORES CARACTERÍSTICOS E COEFICIENTES.	22
TABELA 2 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS MÉDIAS	23
TABELA 3 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS	24
TABELA 4 - FLUXO DE CALOR POR UNIDADE DE ÁREA	26
TABELA 5 - TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	27
GRÁFICO 1 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS	28
GRÁFICO 2 - DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS MÉDIAS	29
GRÁFICO 3 - FLUXO DE CALOR POR UNIDADE DE ÁREA	30
GRÁFICO 4 - TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	31
CONCLUSÕES -	32
BIBLIOGRAFIA -	33
APÊNDICE - EQUAÇÃO E FUNÇÃO PARABÓLICO-CILÍNDRICAS	34
APÊNDICE - PROGRAMAS UTILIZADOS	35
NOMENCLATURA -	40

S U M Á R I O

O presente trabalho refere-se à resolução das equações de movimento e energia, para o escoamento paralelo, radial e em regime permanente, de um fluido Newtoniano, entre os dois discos paralelos.

Inicialmente, resolve-se a equação do movimento, obtendo-se uma expressão para a distribuição de velocidades, que é substituída na equação da energia, resultando uma equação diferencial, parcial, linear, de 2ª ordem, para a distribuição de temperaturas.

A técnica de separação de variáveis fornece uma solução adequada para esta equação, fazendo-a recair em duas equações de derivadas totais.

Os valores característicos são então obtidos, aplicando-se as condições de contorno à expressão que fornece a distribuição de temperaturas. Esta expressão possui coeficientes que devem ser determinados utilizando-se propriedades de ortogonalidade das funções.

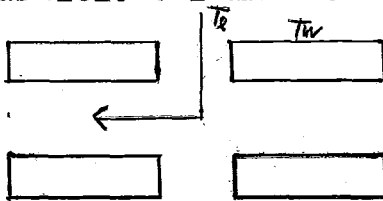
Obtida a expressão para o perfil de temperaturas, são determinados a seguir o fluxo térmico na superfície dos discos e a taxa de transferência de calor entre esta superfície e o fluido.

I N T R O D U Ç Ã O

A solução matemática do problema relativo à convecção forçada, em fluxo laminar, através de um tubo, foi apresentada por Graetz (1.885), que fez algumas suposições simplificadoras sem as quais o cálculo do fluxo de calor é demasiadamente complicado.

Este mesmo problema foi resolvido mais tarde por Lévêque, considerando a velocidade do fluido constante e igual à velocidade média, em cada secção do tubo. O mesmo problema, para o fluido escoando entre placas planas e paralelas foi resolvido por Lévêque.

A solução, relativa a uma geometria diferente, é apresentada neste trabalho: discos paralelos, à temperatura uniforme, entre os quais flui radialmente o líquido refrigerante, em escoamento paralelo e laminar.



O fluido inicialmente à temperatura T_c entra em contato com as paredes, à T_w , havendo fluxo de calor entre as paredes e o fluido.

O cálculo do fluxo de calor é bastante útil em determinadas operações de resfriamento, em que o fluido se escoa entre

discos paralelos, à temperatura inferior conveniente.

Também é útil no problema inverso, ou seja, resfriamento de equipamentos industriais em forma de discos paralelos. Como exemplo podem ser citados certos reatores nucleares, em que os discos são constituídos de material fissionável (ver Bonilla (1)).

C A P Í T U L O 1

ANÁLISE TEÓRICA

O problema em estudo consiste na determinação do fluxo de calor para a convecção forçada entre discos planos, e paralelos.

Pela resolução da equação do movimento obtem-se a distribuição da velocidade, a qual é substituída na equação da energia obtendo-se uma equação, diferencial, parcial, linear, de 2ª ordem, para a distribuição de temperaturas. Conhecido o perfil de temperaturas, o fluxo de calor é finalmente determinado.

Para que a solução não se torne extremamente complicada, algumas suposições simplificadoras se tornam necessárias.

Assim considera-se

o escoamento é paralelo, laminar e estacionário de fluido Newtoniano, com propriedades físicas constantes;

os gradientes de velocidade na direção do movimento são pequenos (podendo-se então, desprezar os termos correspondentes à dissipação viscosa, na equação da energia);

a condução radial pode ser desprezada em relação à condução axial, desde que a diferença entre a temperatura da parede e a do líquido que entra ($T_w - T_\ell$) seja suficientemente grande;

são desprezados os distúrbios de borda.

As equações da continuidade, movimento e energia, em coordenadas cilíndricas, já devidamente simplificadas são expostas a seguir

Equação da continuidade

$$\frac{d}{dz}(\pi v_r) = 0 ; \quad (1)$$

Equação do movimento

$$\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} ; \quad (2)$$

Equação da energia

$$\rho c_p \cdot v_r \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} . \quad (3)$$

As condições de contorno do problema são

$$z = l \quad v_r = 0 \quad T = T_w \quad (4)$$

$$z = 0 \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$r = 0 \quad T = T_e \quad (6)$$

a) Resolução da equação da continuidade.

A equação (1) indica que o grupamento de variáveis rv_r é função apenas de z , pois a velocidade radial é função de r e z , e a derivada parcial de rv_r em relação a r é nula. Pode-se então escrever

b) Resolução da equação do movimento.

Substituindo v_r por $\varphi(z)/r$ na equação (2) vem

$$\rho \cdot \frac{\varphi^2}{r^3} = - \frac{dP}{dz} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

Integra-se a equação do movimento em relação a r para obter-se

$$\frac{1}{2} \rho \varphi^2 \left(\frac{1}{\pi_2^2} - \frac{1}{\pi_1^2} \right) = \Delta P + \left(\mu \ln \frac{\pi_2}{\pi_1} \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \quad (7)$$

Resolvendo-se a equação acima por um método de perturbação, supõe-se uma solução da forma

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} P^k B^{(k-1)} \varphi^k(z/b) \quad (8)$$

na qual

$$P = \frac{b^2 \Delta P}{\mu \ln(\pi_2/\pi_1)} \quad B = \frac{\frac{1}{2} P \left(\frac{1}{\pi_2^2} - \frac{1}{\pi_1^2} \right) b^2}{\mu \cdot \ln(\pi_2/\pi_1)}$$

O primeiro termo em (8) corresponde à solução de (7) com um fluxo muito lento. Ora, se o fluxo é muito lento o termo não linear de (7) pode ser omitido, pois nêle aparece v_r^2 .

A equação (4) se reduz a

$$0 = \Delta P + \left(\mu \ln \pi_2/\pi_1 \right) \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

A integração da equação acima conduz a

$$v_r = \frac{b^2 \Delta P}{2 \mu \pi \ln(\pi_2/\pi_1)} \left[1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Pode-se notar fãcilmente nêsta equação que o perfil de velocidades para cada valor de r, é parabólico. Esta parábola é tanto menor, quanto maior for r.

Para um determinado valor do raio, a velocidade radial do fluido é máxima para o menor valor de z, ou z = 0. A velocidade máxima é dada por

$$v_{r/1max} = \frac{b^2 \Delta P}{2 \mu \pi \ln(\pi_2/\pi_1)}$$

A velocidade média é obtida dividindo-se pela área do cilindro do raio r e altura ab, a integral do producto da veloci

dade radial pela área do cilindro de raio r e altura dz

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{4\pi r b} \int_{-b}^{+b} v_r (2\pi r dz) = \\ &= \frac{b \Delta P}{2\mu r L_m(\kappa_2/\kappa_1)} \int_0^b \left[1 - \left(\frac{z}{b}\right)^2 \right] dz = \frac{b^2 \Delta P}{3\mu r L_m(\kappa_2/\kappa_1)} ; \\ \bar{v} &= \frac{b^2 \Delta P}{3\mu r L_m(\kappa_2/\kappa_1)} . \end{aligned} \quad (10)$$

c) Resolução da equação da energia

Tendo sido determinada a expressão para a velocidade radial, ela é substituída na equação da energia, obtendo-se uma equação diferencial, parcial, linear de 2ª ordem, para a distribuição de temperaturas. Substituindo-se v_r por seu valor (9) em (3) virá

$$\frac{\rho c_p b^2 \Delta P}{2k\mu L_m(\kappa_2/\kappa_1)} \left[1 - \left(\frac{z}{b}\right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} . \quad (11)$$

Efetua-se então uma mudança de variáveis de modo que as novas variáveis sejam adimensionais e que a equação da energia esteja livre de quaisquer parâmetros. As novas variáveis adimensionais são

$$\xi = \frac{z}{b} ;$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2k\mu L_m(\kappa_2/\kappa_1)}{\rho c_p b^4 \Delta P}} ;$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_w - T_c} ;$$

$$\Theta = 1 - \theta .$$

Efetuada a mudança de variáveis, a equação (11) se modifica para

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\eta} (1 - \xi^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad (12)$$

Para as novas variáveis, as condições de contorno são

$$\xi = 0 \quad \Theta_{\xi}(\eta, 0) = 0; \quad (13)$$

$$\xi = 1 \quad \Theta(\eta, 1) = 0; \quad (14)$$

$$\eta = \eta_1 \quad \Theta(\eta_1, \xi) = 1. \quad (15)$$

Uma vez que Θ é função de η e ξ , e sendo 1 seu máximo valor (nas paredes, onde $T = T_w$), pode-se considerar para expressar Θ , a seguinte equação

$$\Theta = 1 - X(\xi) \cdot N(\eta)$$

ou

$$\Theta = 1 - \Theta = X(\xi) \cdot N(\eta) \quad (16)$$

onde, $X(\xi)$ e $N(\eta)$ são funções somente de ξ e η , respectivamente.

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

A resolução da equação (12) fornecerá o perfil de temperaturas. Para esta resolução pode-se empregar o método de separação de variáveis, que transformará a equação em duas equações de diferenciais totais. Este método é aplicado a seguir.

Substituindo Θ por seu valor (16) em (12), e passando para um mesmo membro todas as funções de uma mesma variável,

resulta

$$\frac{N'}{\eta N} - \frac{\ddot{X}}{(1-\xi^2)X} = -\lambda^2$$

O primeiro membro da equação acima sendo uma função apenas de η e o segundo, apenas de ξ , podem ser igualadas a uma constante. Esta constante será sempre negativa pois valores positivos e nulo conduziram a solução do problema a resultados absurdos.

Para solucionar o problema, basta resolver separadamente as duas equações diferenciais totais que seguem

$$\frac{\ddot{X}}{(1-\xi^2)} = -\lambda^2 \quad (17)$$

$$\frac{N'}{\eta N} = -\lambda^2 \quad (18)$$

Considerando a primeira destas equações, pode-se escrever

$$\ddot{X} - \lambda^2 (\xi^2 - 1)X = 0 \quad (19)$$

Com uma simples mudança de variáveis esta equação pode ser colocada na forma de uma equação parabólico-cilíndrica, cuja solução é uma função parabólico-cilíndrica, reproduzidas no apêndice. A mudança de variáveis, assim como a solução da equação resultante são dados a seguir:

$$\xi = \frac{\beta}{\sqrt{2\lambda}}$$

$$X(\xi) = A \cdot X_1\left(\sqrt{2\lambda} \xi, -\frac{\lambda}{2}\right) + B \cdot X_2\left(\sqrt{2\lambda} \xi, -\frac{\lambda}{2}\right)$$

onde $X_1(\sqrt{2\lambda} \xi, -\lambda/2)$ é função par e $X_2(\sqrt{2\lambda} \xi, -\lambda/2)$ é função impar.

Aplicando a condição de simetria em $\xi = 0$, conclui-se que B, o coeficiente da parte ímpar da solução deve ser nulo.

X(ξ) portanto se reduz a

$$X(\xi) = A X_1(\sqrt{2\lambda} \xi, -\frac{1}{2}) = A \exp(-\frac{1}{2} \xi^2) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{2\lambda}{2!} \xi^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{4\lambda^2}{4!} \xi^4 + \dots \right\}$$

X(ξ) é então substituído por seu valor na equação (16) resultando

$$0 = A \cdot N(\gamma) \cdot X_1(\sqrt{2\lambda} \xi, -\frac{1}{2})$$

Aplicando-se a esta equação a condição de contorno (14)

vem:

$$X_1(\sqrt{2\lambda}, -\frac{1}{2}) = 0$$

Os valores característicos são portanto os valores de que satisfazem a equação abaixo:

$$X_1(\sqrt{2\lambda}, -\frac{1}{2}) = X_1(x, -\frac{x^2}{4}) = \exp(-\frac{x^2}{4}) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) \left(\frac{5}{2} - \frac{x^2}{4}\right) \frac{x^4}{4!} + \dots \right\} = 0 \quad (20)$$

onde $x = \sqrt{2\lambda}$

Tem-se portanto que calcular os valores λ_m que anulam a série entre colchetes de (20), e determinar os valores característicos através da relação

$$\lambda_m = \frac{1}{2} x_m^2 \quad \therefore \lambda_m = \frac{x_m^2}{2}$$

Isto foi feito utilizando-se um computador IBM 1130 do Departamento de Cálculo científico da Coppe. Em um primeiro programa, os valores da série foram tabelados em função de χ , para χ variando de 0 a 10 (Programa no apêndice). Cada raiz deverá estar obrigatoriamente entre os valores de χ , cujos valores correspondentes da série passem de positivo para negativo. Determinados os intervalos de existência das raízes, os seus valores exatos foram obtidos por meio de um programa adequado, utilizando-se a sub-rotina científica RTMT. (Método Iterativo de Müller) da IBM.

Para os valores de χ de 0 a 10 foram encontrados 13 valores característicos (tabela 1). Note-se nesta tabela que a diferença entre cada valor característico e o anterior é aproximadamente constante e igual a 4.

Considerando-se agora, a equação (18), com $\lambda = \lambda_m$, vem

$$\frac{N_m'}{\eta N_m} = -\lambda_m^2 .$$

Resolvendo-se esta equação obtem-se para N_m a seguinte expressão

$$N_m = \exp\left(-\frac{\lambda_m^2 \eta^2}{2}\right) .$$

O valor de Θ será portanto

$$\Theta = \sum_0^{\infty} C_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2 \eta^2}{2}\right) \cdot X_m\left(\sqrt{2\lambda_m} \xi, -\frac{\lambda_m}{2}\right) . \quad (21)$$

Aplicando-se a condição de contorno (15) à equação (21),

vem

$$1 = \sum_0^{\infty} C_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2 \eta^2}{2}\right) \cdot X_m\left(\sqrt{2\lambda_m} \xi, -\frac{\lambda_m}{2}\right) ;$$

ou abreviadamente, pode-se escrever

$$1 = \sum_0^{\infty} D_m \cdot X_m^* \quad (22)$$

sendo $D_m = C_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2}{2} \eta_1^2\right)$ e $X_m^* = X_m\left(\sqrt{2\lambda_m} \xi, -\frac{\lambda_m}{2}\right)$

Substituindo os coeficientes C_m por D_m na equação (21), resulta

$$0 = \sum_0^{\infty} D_m \exp\left(-\frac{\lambda_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2)\right) \cdot X_m\left(\sqrt{2\lambda_m} \xi, -\frac{\lambda_m}{2}\right) \quad (23)$$

Evidentemente para que o perfil de temperaturas possa ser conhecido é necessário a determinação dos coeficientes D_m .

Para a determinação destes coeficientes, é necessário conhecer-se a função pêso que torna o conjunto de funções $X_n\left(\sqrt{2\lambda_n} \xi, -\frac{\lambda_n}{2}\right)$ ortogonais. Isto recai no problema de Sturm-Liouville, o que será estudado a seguir.

PROBLEMA DE STURM LIOUVILLE

A determinação da função pêso que torna um conjunto de funções ortogonais em determinado intervalo, fica bastante facilitada se estiverem satisfeitas as condições do problema de Sturm-Liouville.

A equação (19) é da forma geral da equação de Sturm-Liouville e as condições de contorno

$$\Theta_{\xi}(\eta, 0) = N(\eta) \cdot X(0) = 0 \quad \therefore X(0) = 0$$

$$\Theta(\eta, 1) = N(\eta) \cdot X(1) = 0 \quad \therefore X(1) = 1$$

são do tipo geral das condições estudadas por Sturm-Liouville.

ville.

Um análise da equação (19) fornece para função \hat{p}°
 $P(x)$ a função

$$P(x) = (1 - \xi^2)$$

Pode-se agora aplicar a propriedade de ortogonalidade de
função, em relação à função \hat{p}° $(1 - \xi^2)$, multiplicando-se ambos
os membros de (22) por $(1 - \xi^2) X_k^*$ ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot X_n^* \cdot X_k^* (1 - \xi^2) = X_k^* (1 - \xi^2)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \int_0^1 X_n^* \cdot X_k^* (1 - \xi^2) d\xi = \int_0^1 X_k^* (1 - \xi^2) d\xi$$

A integral da esquerda só é diferente de zero para $n = k$,
portanto, o somatório se reduz a um só termo, e

$$D_n = \frac{\int_0^1 X_n^* (1 - \xi^2) d\xi}{\int_0^1 X_n^* (1 - \xi^2) d\xi}$$

Para cálculo dos coeficientes D_n foi utilizado o computa -
dor.

Para cada valor característico λ_n , obtem-se uma tabela
de valores de X_n^* , para ξ variando de 0 a 1, que são guardados
na memória do computador. No mesmo programa efetuam-se as inte-
grações indicadas, utilizando-se a sub-rotina QUADR da IBM, res-
sultando um valor de D_n para cada valor característico (Programa
no apêndice).

Conhecidos estes valores, e especificado um valor para η ,
os valores de $\theta = 1 - \ominus$ podem ser determinados para cada valor de
 η , em função de ξ , ou seja, para determinado raio do dis-
co, os valores de θ em função de ξ podem ser determinados e tabe-
lados.

CAPÍTULO 2

TEMPERATURA MÉDIA

Já foi esclarecido nos capítulos anteriores que, conhecida a distribuição de temperaturas entre as placas, o fluxo de calor pode ser determinado.

O cálculo da temperatura média na superfície do cilindro de raio r é também de grande importância pois, o conhecimento da distribuição de temperaturas médias fornece outra maneira de calcular aquele fluxo. A comparação dos resultados obtidos de uma e outra maneira, constitui-se num teste decisivo para os cálculos.

A diferença média de temperaturas em relação a $T=T_e$ (JAKOB (4) é

$$\overline{\Delta T} = \bar{T} - T_e = \frac{\dot{\Delta H}}{\rho \dot{V} c_p}$$

onde

$\overline{\Delta T}$: diferença média de temperaturas ;

$\dot{\Delta H}$: velocidade de aumento de entalpia, tendo por base a temperatura de entrada do fluido;

\dot{V} : vazão volumétrica.

A temperatura média adimensional é obtida, substituindo na expressão de Θ , T por \bar{T} , ou seja:

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{T} - T_e}{T_w - T_e} = \frac{\dot{\Delta H}}{\rho \dot{V} c_p (T_w - T_e)} \quad (24)$$

a) Cálculo de \dot{V}

A vazão volumétrica através da superfície do cilindro de raio r e altura $2b$, é o produto da velocidade média naquela superfície, pela área da superfície. Portanto

$$\dot{V} = 4\pi r b \bar{v} \quad (25)$$

b) Cálculo de $\dot{\Delta H}$

A diferencial da velocidade de aumento de entalpia, a partir de uma determinada temperatura é dada por:

$$d(\dot{\Delta H}) = v \rho c_p \Delta T dA ;$$

Que, aplicada ao problema em estudo, considerando-se a superfície de um cilindro de raio r e altura infinitesimal dz fornece:

$$d(\dot{\Delta H}) = v \rho c_p \Delta T 2\pi r dz ;$$

onde

$$\Delta T = T - T_e = \frac{T - T_e}{T_w - T_e} \cdot (T_w - T_e) = \theta (T_w - T_e) ;$$

portanto

$$\frac{\dot{\Delta H}}{T_w - T_e} = 4\pi r \rho c_p \int_0^b v \theta dz .$$

De (9) e (10) pode-se tirar a seguinte relação

$$v = \frac{3}{2} \bar{v} (1 - \xi^2)$$

que é substituída na relação acima, resultando

$$\frac{\dot{\Delta H}}{T_w - T_e} = 6\pi r \rho c_p b \bar{v} \int_0^b \theta (1 - \xi^2) d\xi .$$

Substituindo a vazão volumétrica (25) e esta última expressão obtida, (24), obtem-se

$$\bar{\theta} = \frac{3}{2} \int_0^1 \theta (1 - \xi^2) d\xi ;$$

ora

$$\Theta = 1 - \Theta = 1 - \sum_0^{\infty} D_m \exp \left[-\frac{\lambda_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \cdot X_m^*$$

Substituindo Θ por seu valor na equação que fornece $\bar{\Theta}$

vem

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} &= \frac{3}{2} \int_0^1 \left\{ 1 - \sum_0^{\infty} D_m \exp \left[-\frac{\lambda_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \cdot X_m^* \right\} (1 - \xi^2) d\xi = \\ &= 1 - \sum_0^{\infty} \left[\frac{3}{2} D_m \int_0^1 X_m^* (1 - \xi^2) d\xi \cdot \left\{ \exp \left[-\frac{\lambda_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

Pode-se escrever ainda:

$$\bar{\Theta} = 1 - \sum_0^{\infty} E_m \cdot \exp \left[-\frac{\lambda_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \quad (26)$$

sendo:

$$E_m = \frac{3}{2} D_m \int_0^1 X_m (1 - \xi^2) d\xi = \frac{3 \left[\int_0^1 X_m (1 - \xi^2) d\xi \right]^2}{2 \int_0^1 X_m^2 (1 - \xi^2) d\xi}$$

Verifica-se facilmente que o mesmo programa utilizado para calcular os coeficientes D_m , pode com pequenas modificações ser utilizado para o cálculo dos E_m . Estes resultados também se encontram na Tabela 1.

CAPÍTULO 3

FLUXO DE CALOR EM UM PONTO E TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.

A taxa de transferência de calor entre a superfície e o fluido pode ser calculada de duas maneiras diferentes: calculando-se o fluxo de calor em um ponto e efetuando a integração sobre a área total de transferência de calor, ou a partir da temperatura média.

a) fluxo de calor em um ponto.

A velocidade de transferência de calor por unidade de área é dada por

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = -k (T_w - T_e) \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=l}$$
$$= -\frac{k}{l} (T_w - T_e) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} ; \quad (27)$$

e de (23) deduz-se que

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \sum_0^{\infty} D_n \dot{X}_n^* \Big|_{\xi=1} \exp \left[-\frac{\lambda_n^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] =$$
$$= \sum_0^{\infty} F_n \exp \left[-\frac{\lambda_n^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] ; \quad (28)$$

onde

$$F_n = D_n \dot{X}_n^* \Big|_{\xi=1}$$

O cálculo de F_m foi feito utilizando-se o computador IBM e o programa se encontra no apêndice. Os valores determinados para F_m podem ser vistos na tabela 1.

Considerando-se agora, as relações (27) e (28), pode-se escrever

$$q'' = \frac{k(T_w - T_e)}{b} \sum_0^{\infty} F_m \exp \left[-\frac{\lambda_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \quad (29)$$

Substituindo η e η_1 por seus valores em função do raio vem

$$q'' = \frac{k(T_w - T_e)}{b} \sum_0^{\infty} F_m \exp \left[\frac{m_m}{2} (\pi^2 - \pi_1^2) \right]$$

onde

$$m_m = \frac{2 \lambda_m^2 \mu \rho c_p b^2 \Delta T}{\rho c_p b^2 \Delta T}$$

b) taxa de transferência de calor

O produto do fluxo de calor em um ponto pela área elementar $2\pi r dr$, representa a taxa de transferência de calor através da referida área. A taxa de transferência de calor entre $r=r_1$ e $r=r$ é obtida portanto por integração, ou seja

$$q = \int_{r_1}^r q'' 2\pi r dr = \frac{2\pi k(T_w - T_e)}{b} \int_{r_1}^r \left\{ \sum_0^{\infty} F_m \cdot \exp \left[\frac{m_m}{2} (\pi^2 - \pi_1^2) - \pi^2 \right] \right\} r dr$$

$$q = \frac{2\pi k(T_w - T_e)}{b} \sum_0^{\infty} \frac{F_m}{m_m} \left\{ \exp \left[\frac{m_m}{2} (\pi^2 - \pi_1^2) - 1 \right] \right\} \quad (30)$$

A taxa de transferência de calor pode ser calculada também a partir da distribuição de temperaturas médias. Esta taxa é dada pela seguinte relação:

$$q = A \bar{v} (-\Delta T) \rho C_p$$

onde A é a área de transferência de calor considerada.

Substituindo A e $\bar{\Delta T}$ por seus valores respectivos vem

$$q = 2\pi r \bar{v} (-\bar{\theta}) (T_w - T_e) \rho C_p$$

De (26) e levando-se em conta a expressão para m_n segue

$$q = 2\pi r \bar{v} \rho C_p (T_w - T_e) \left\{ \sum_0^{\infty} E_n \exp \left[\frac{m_n (\kappa^2 - \kappa_1^2) - 1}{2} \right] \right\} \quad (31)$$

Como (29) e (30) são duas maneiras de expressar o mesmo resultado, podem ser iguallados os coeficientes relativos à função exponencial.

Substituindo m_n , por seu valor em (29), igualando os coeficientes relativos à exponencial e simplificando, obtém-se

$$\frac{3(-F_n)}{\lambda_n^2} = 2E_n$$

Esta última relação deve ser válida para todos os valores característicos e constiu-se num teste decisivo para os valores numéricos obtidos. É fácil, utilizando-se os dados da Tabela 1, verificar que a referida relação é sempre verdadeira.

CAPÍTULO 4

OBTENÇÃO DA TEMPERATURA, TEMPERATURA MÉDIA, FLUXO TÉRMICO, CALOR TOTAL, PARA VALORES PARTICULARES DE η e ξ .

a) TEMPERATURA

A distribuição de temperaturas $\Theta = 1 - \Theta$, levando-se em conta a equação (23) é

$$\Theta = 1 - \sum_0^{\infty} D_n \exp\left[-\frac{\lambda_n^2}{2}(\eta^2 - \eta_1^2)\right] \cdot X_n^*$$

O valor da constante η_1 foi suposto igual a 0,1. Para cada valôr de η , obtem-se uma distribuição de Θ em função de ξ .

Para um dado valor de ξ , determinam-se $X_0(\sqrt{2}\lambda_0 \xi, -\frac{\lambda_0}{2})$, $X_1(\sqrt{2}\lambda_1 \xi, -\frac{\lambda_1}{2})$, $X_2(\sqrt{2}\lambda_2 \xi, -\frac{\lambda_2}{2})$, $X_3(\sqrt{2}\lambda_3 \xi, -\frac{\lambda_3}{2})$, ...

... $X_{12}(\sqrt{2}\lambda_{12} \xi, -\frac{\lambda_{12}}{2})$ que são multiplicados respectivamente por $D_0 \exp\left[-\frac{\lambda_0^2}{2}(\eta^2 - \eta_1^2)\right]$, $D_1 \exp\left[-\frac{\lambda_1^2}{2}(\eta^2 - \eta_1^2)\right]$, $D_2 \exp\left[-\frac{\lambda_2^2}{2}(\eta^2 - \eta_1^2)\right]$, ... $D_{12} \exp\left[-\frac{\lambda_{12}^2}{2}(\eta^2 - \eta_1^2)\right]$

e somados os resultados obtidos. O valôr de Θ é obtido, subtraindo-se de 1 esta soma. Os resultados encontram-se na tabela 3 e o gráfico correspondente é o gráfico 1.

O programa utilizado encontra-se no apêndice.

b) TEMPERATURA MÉDIA

Já foi visto (26), que

$$\bar{\Theta} = 1 - \sum_0^{\infty} E_n \exp\left[-\frac{\lambda_n^2}{2}(\eta^2 - \eta_1^2)\right]$$

Considerando-se portanto $\eta_1 = 0,1$ para cada valor de η ob-

tem-se um valor para a temperatura média. O programa correspondente por ser extremamente simples, não se encontra reproduzido no apêndice. Os resultados foram tabelados, (tabela 2) e o gráfico correspondente é o gráfico 2.

c) FLUXO DE CALOR EM UM PONTO

De (29) vem que a quantidade adimensional (número de Nusselt)

$$Nu = \frac{q'' b}{k(T_w - T_e)} = \left| \sum_0^{\infty} F_m \exp \left[-\frac{B_m^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \right|$$

pode ser calculada em função de η , da mesma maneira como foram calculados as temperaturas médias. Os resultados obtidos se encontram na Tabela 4 e o gráfico correspondente é o gráfico 3.

d) CALOR TOTAL

Substituindo m_m por seu valor, na equação (31) e passando alguns termos para o primeiro membro, de modo que este fique adimensional, segue que

$$\frac{q'' L_m (T_2 - T_1)}{(T_w - T_e) \rho c_p b^3 \Delta P} = \left| \sum_0^{\infty} \frac{0,785 F_m}{B_m^2} \left[1 - \exp \left[-2 B_m^2 (\eta^2 - \eta_1^2) \right] \right] \right|$$

em que $\eta_1 = 0,1$ e $B = \frac{\lambda_m}{2}$.

Para cada valor de η , obtém-se um valor para o somatório e portanto, um valor para o calor total adimensional.

Os resultados obtidos se encontram na tabela 5, e por meio desta tabela obtém-se o gráfico 4.

TABELA 1

X	λ_m	λ_m^2	D_m	E_m	\dot{X}_m	$F_m = D_m \dot{X}_m$
1,8338	1,682	2,829	-1,209	0,9104	-1,429	-1,7276
3,3675	5,670	32,149	-0,2991	0,05315	3,807	-1,1387
4,3973	9,667	93,494	0,1609	0,01528	-5,920	-0,9525
5,2283	13,668	186,814	-0,1075	0,006811	7,892	-0,8484
5,9443	17,667	312,123	0,07966	0,003741	-9,871	-0,7784
6,5829	21,667	469,459	-0,06278	0,002323	11,580	-0,7281
7,1648	25,667	658,795	0,05153	0,001565	-13,334	-0,6861
7,7029	29,667	880,131	-0,04351	0,001116	15,043	-0,6545
8,2057	33,667	1133,467	0,03754	0,0008304	-16,709	-0,6273
8,6795	37,667	1418,803	-0,03294	0,0006391	18,352	-0,6045
9,1287	41,667	1736,211	0,02928	0,0005050	-19,961	-0,5845
9,5569	45,667	2085,475	-0,02631	0,0004077	21,547	-0,5669
9,9666	49,667	2466,810	0,02386	0,0003354	-23,105	-0,5513

TABELA 2

TEMPERATURA MÉDIA

	$\eta = 0,20$	$\eta = 0,21$	$\eta = 0,23$	$\eta = 0,25$	$\eta = 0,30$	$\eta = 0,40$
$\bar{\theta} = \theta_{med}$	0,0904	0,0984	0,1143	0,1305	0,1719	0,2588
	=0,50	=0,60	=0,70	=0,80	=0,90	=1,0
$\bar{\theta} = \theta_{med}$	0,3505	0,4498	0,5382	0,6235	0,7062	0,7755
	=1,1	=1,2	=1,5	=1,7	=1,9	=2,0
$\bar{\theta} = \theta_{med}$	0,8332	0,8795	0,9617	0,9845	0,9944	0,9968

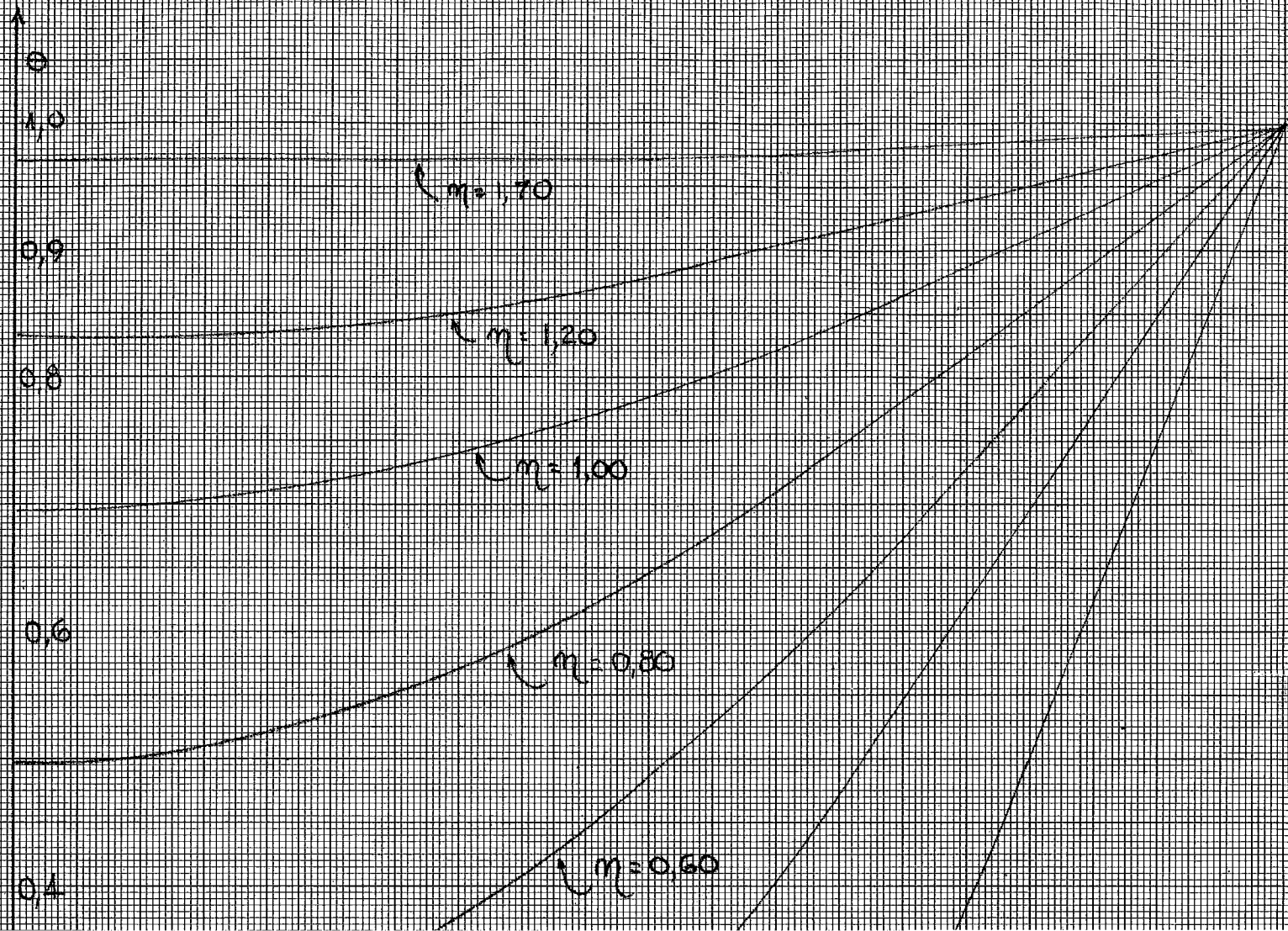
TABELA 4
CALOR EM UM PONTO

	$\eta = 0,11$	$\eta = 0,13$	$\eta = 0,15$	$\eta = 0,17$	$\eta = 0,20$	$\eta = 0,21$
$\frac{q'' l}{K(T_w - T_e)}$	-6,5194	-4,3958	-3,5876	-3,1123	-2,6527	-2,5372
	$\eta = 0,23$	$\eta = 0,25$	$\eta = 0,30$	$\eta = 0,40$	$\eta = 0,50$	$\eta = 0,60$
$\frac{q'' l}{K(T_w - T_e)}$	-2,3420	-2,1821	-1,8807	-1,5004	-1,2545	-1,0573
	$\eta = 0,70$	$\eta = 0,80$	$\eta = 0,90$	$\eta = 1,00$	$\eta = 1,10$	$\eta = 1,20$
$\frac{q'' l}{K(T_w - T_e)}$	-0,8770	-0,7090	-0,5574	-0,4261	-0,3167	-0,2287
	$\eta = 1,50$	$\eta = 1,70$	$\eta = 1,90$	$\eta = 2,0$		
$\frac{q'' l}{K(T_w - T_e)}$	-0,07277	-0,02944	-0,01064	-0,006129		

TABELA 5

CALOR TOTAL

	$\eta = 0,20$	$\eta = 0,21$	$\eta = 0,23$	$\eta = 0,25$	$\eta = 0,30$	$\eta = 0,40$
$\frac{q \mu L_n(r_2/r_1)}{P C_p (T_w - T_c) b^3 \Delta P}$	-0,1837	-0,1999	-0,2344	-0,2680	-0,3551	-0,5381
	$\eta = 0,50$	$\eta = 0,60$	$\eta = 0,70$	$\eta = 0,80$	$\eta = 0,90$	$\eta = 1,00$
$\frac{q \mu L_n(r_2/r_1)}{P C_p (T_w - T_c) b^3 \Delta P}$	-0,7311	-0,9299	-1,1266	-1,3126	-1,4808	-1,6266
	$\eta = 1,10$	$\eta = 1,2$	$\eta = 1,5$	$\eta = 1,7$	$\eta = 1,9$	$\eta = 2,0$
$\frac{q \mu L_n(r_2/r_1)}{P C_p (T_w - T_c) b^3 \Delta P}$	-1,7482	-1,8458	-2,0190	-2,0671	-2,0880	-2,0930



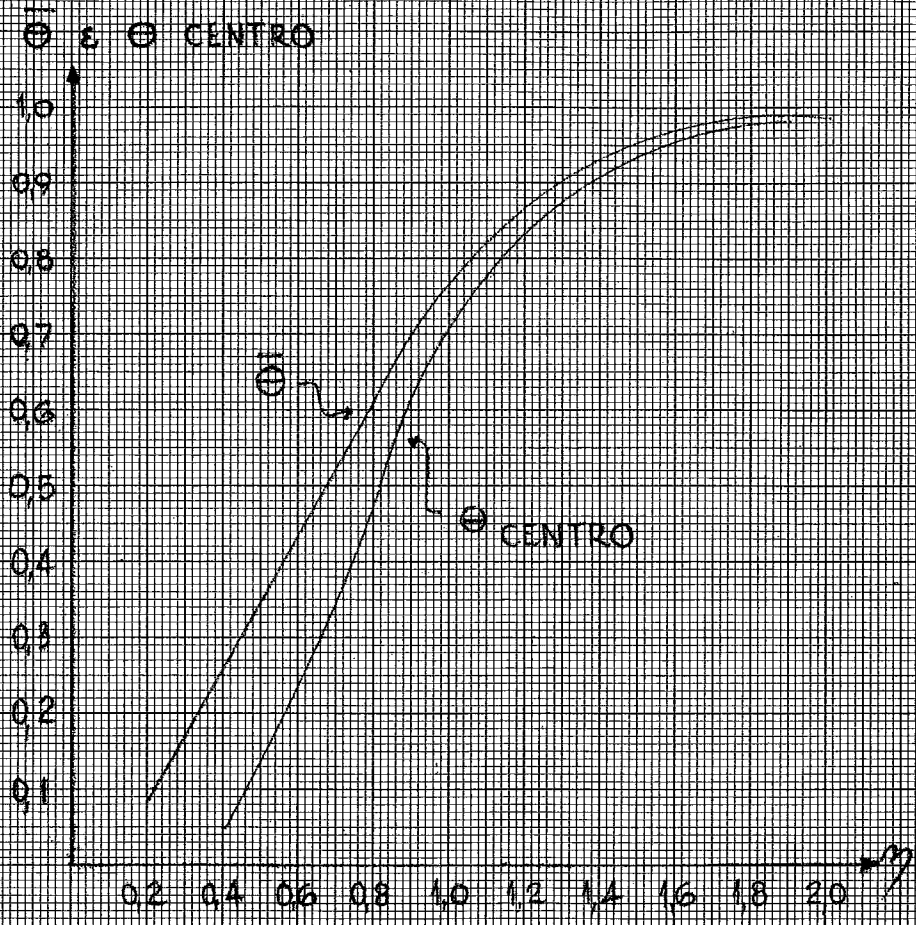


GRAFICO 2

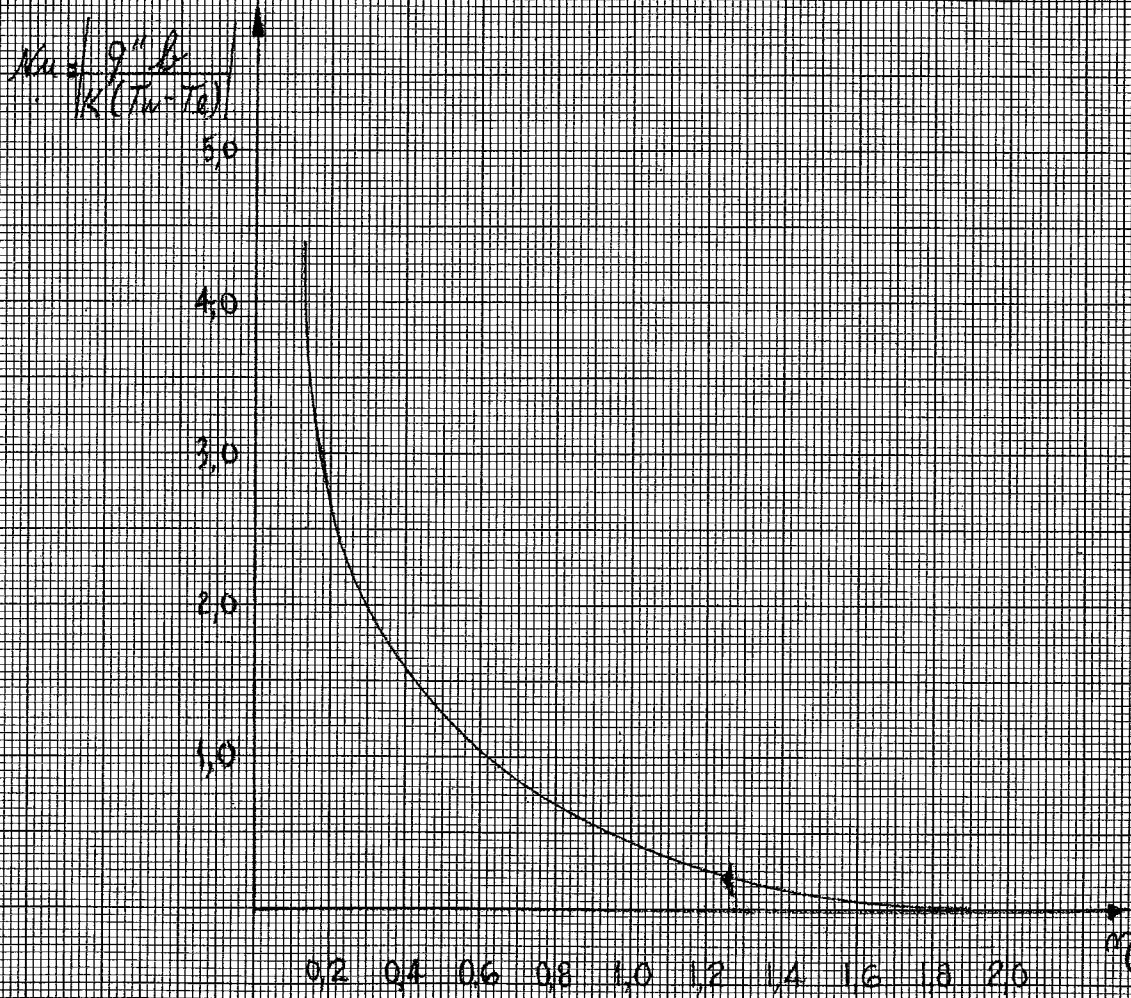


GRAFICO 3

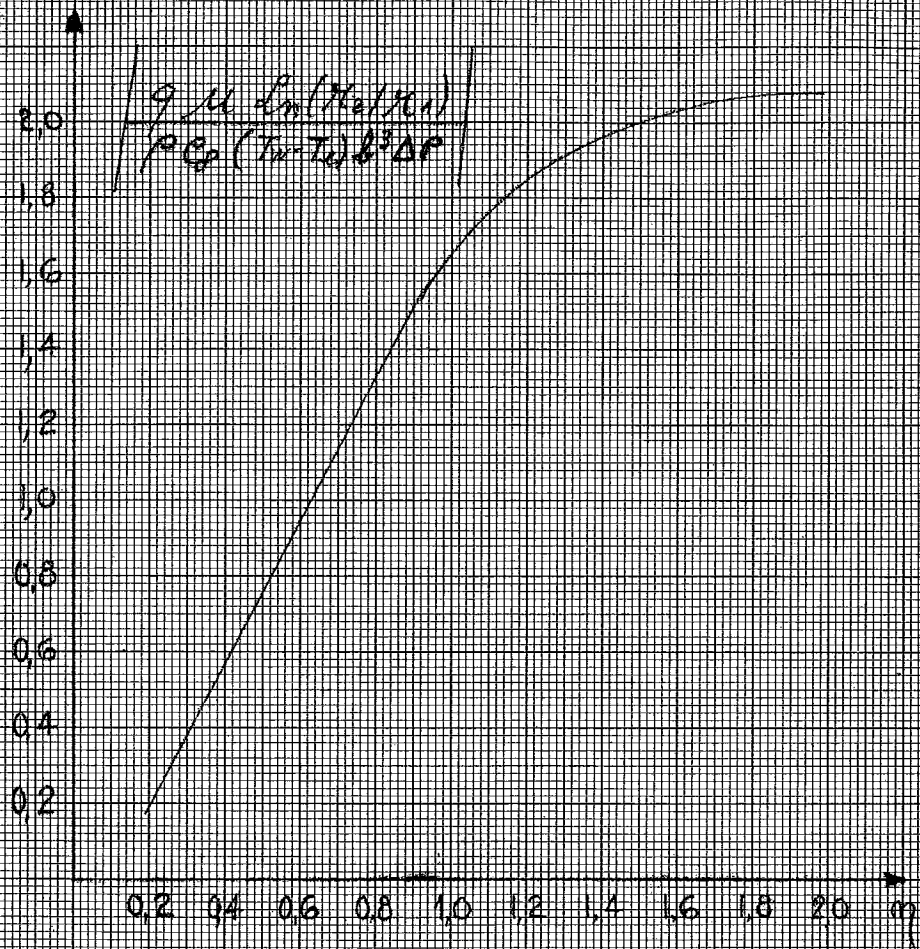


GRÁFICO 4

C O N C L U S Õ E S

Verifica-se na Tabela 3 que, para pequenos valores de η e ξ (próximo da entrada do líquido, e pequeno no valor de z), foram encontrados resultados negativos para Θ , o que é impossível. No entanto, o primeiro algarismo significativo está na quarta casa decimal, depois da vírgula, e o erro encontrado é um erro de precisão (provavelmente no Programa em que se calculou as raízes da série pela sub-rotina RTMIT, em que a precisão adotada foi 0,001).

Deve-se notar, no Gráfico 3, que $\bar{\Theta}$, para altos valores de η , se aproxima assintoticamente de 1,0 e, teoricamente, alcançará este valor no infinito.

Θ centro, como era de se esperar, tem um valor sempre menor que $\bar{\Theta}$, e seria igual a $\bar{\Theta}$ no infinito ($\eta = \infty$).

Analizando o Gráfico 4, verifica-se que a curva possui duas assíntotas. Ela se aproxima assintoticamente da reta $\eta = 0,1$. Fisicamente isto quer dizer que, para $\eta = 0,1$ teoricamente, a velocidade de troca de calor, por unidade de área, seria infinitamente grande.

A assíntota horizontal indica que a velocidade de troca de calor, por unidade de área só seria nula para $\eta = \infty$.

B I B L I O G R A F I A

- 1 - Bonilla, C.F., Nuclear Engineering- Mc-Graw-Hill,
New-York -(1957) - Pag. 457
- 2 - Bird R.B., Stewart W.E., Lighfoot, E.N.Transport Phe-
nomena - J. Wiley International Edition (1960)
- 3 - Abramowitz, M.Stegun, I.A.,
Handbook of Mathematical Functions - Dover -
New-York - (1965) - Pag. 68
- 4 - Jakob,M.Heat Transfer - J.Willey, New-York - 1.964
Volume 1 -
- 5 - Kreyzig, E.Advanced Engineering Mathematics - J.Wi -
ley International Edition - (1966)

A P Ê N D I C E

1) Função parabólico cilíndrica

A equação parabólico cilíndrica é uma equação de forma

geral $\frac{d^2 X}{dx^2} - \left(\frac{1}{4} x^2 - a\right) X = 0$;

e tem por solução uma função parabólico cilíndrica, ou

seja $X(x) = AX_1(x, -a) + BX_2(x, -a)$

sendo

$$X_1(x, -a) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} - a\right) \frac{x^2}{2!} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{5}{2} - a\right) \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{5}{2} - a\right) \left(\frac{9}{2} - a\right) \frac{x^6}{6!} + \dots \right\}$$

uma função par e

uma função ímpar .•

2) Programas Utilizados

i) Programa para listar X_1 em função de X na série expressa em (20)

// JOB

// FOR

EXTENDED PRECISION

LIST SOURCE PROGRAM

IOCS (CARD,1132 PRINTER)

C PROGRAMA PARA TABELAR Y EM FUNÇÃO DE X

C NIVALDO MURAD

80 A = ((- X**2)) 4. + .5)*(X**2/2.)

SOMA = 0.0

DO 20 I=2,500,2

SOMA = SOMA + A

C = I

E = ((c+1.)*(c+2.))

A = A* ((-X**2)) 4. + ((2.*c+1.)/2.) * (X**2)/E

IF(ABS(A)-(1.E-4))30,30,20

20 CONTINUE

30 Y = SOMA + 1.

WRITE (3,1)X,Y,C

1 FORMAT (E14.7,4X,E14.7,4X,F5.1)

X=X +0.05

IF(X-10.)80,80,100

100 CALL EXIT

END

// XEQ

Com êste Programa, tabelam-se os valores da série correspondente à equação (20), em função de x. Haverá uma raiz, sempre que o valôr da série, trocar de sinal.

Então, com auxilio de uma Sub-Rotina RTMIT, determinam-se os valôres x que anulam a série. Os valores característicos são, então determinados pela relação $\lambda_n = \frac{\chi_n^2}{2}$.

ii) Os valôres de D_n e E_n são determinados em um mesmo programa, as integrações sendo feitas pela Sub-Rotina QUADR. O Programa correspondente é fornecido a seguir, suprimindo-se a parte inicial que é comum a todos os programas.

```
DIMENSION D(200), R (200), T(200), Z(200)
Do 200 j = 1,13
READ (2,1000)X
1000 FORMAT ( F.10.6)
B=-X**2/4
K=1
U=0.0
80 A=(B+0.5) * (-2.*B*U**2)
SOMA = 0.0
Do 20 I=2,500,2
SOMA = SOMA + A
C=I
E= ( ( C+1.) * (C+2.) )
A=A*(B+(2.*C+1.)/2.)*(-4.*B*U**2)/E
IF(ABS(A)-1.E-4) 30,30,20
20 CONTINUE
```

30 Y = SOMA + 1.

D(K) = Y*EXP(B*U**2)

Z(K) = (1.-U**2)*D(K)

T(K)=D(K)**2

R(K)=(1.-U**2)*T(K)

U=U+0.01

IF(U-1.)90,90,100

90 K=K+1

GO TO 80

100 CALL QUADR(Z,K,0.01,S,IER)

CALL QUADR (R,K,0.01,I,IER)

Q=S/P

F=(3./2.)*(S**2/P)

200 WRITE(3,1)S,P,Q,F,B,IER

1 FORMAT (3X,5E16.7,2X,I5)

CALL EXIT

END

// XEQ

iii) Determinação dos coeficientes F_n

DIMENSION X(13)

DO 200 J=1,13

READ(2,1000)X(J)

1000 FORMAT (F14.6)

B=-(X(J)**2)/4

A=(B+0.5)*(-4.*B)

SOMA=0.0

DO 20 I=2,500,2

SOMA = SOMA+A

C=1

E=C*(C+1.)

A=A*(E+(2*C+1.)*(-4.*B)/E

IF(ABS(A)-(1.E-4))30,30,20

20 CONTINUE


```
30 Y=SOMA
    F=Y*EXP(B)
200 WRITE (3,1)B,Y,F,C
    1 FORMAT (4X,3E14.7,3X,F5.1)
    CALL EXIT
    END
```

// XEQ

Obtidos os valores de F , os de F_n são fornecidos pela relação $F_n = F \cdot D_n$.

iiii) Obtenção da distribuição dos valores de Θ com η e ξ .
O programa foi passado de cada vez, para 3 valores distintos de η .

```
DIMENSION X(13),P(13),T(13),R(13),SOMA 4(13),SOMA 5(13),
SOMA 6(13),RA(13).
```

```
READ (2,1000)(X(J),J=1,13)
```

```
1000 FORMAT (F10.6,F10.5)
```

```
U=0.0
```

```
K=1
```

```
80 F=0.0
```

```
OA=0.0
```

```
SA=0.0
```

```
DO 200 J=1,13
```

```
B=-(X(J)**2)/4
```

```
A=(B+0.5)*(-2*B*U**2)
```

```
SOMA =0.0
```

```
DO 20 I=2,500,2
```

```
SOMA = SOMA + A
```

```
C=1
```

```
E=((C+1.)*(C+2.))
```

```
A=A*(B+(2*C+1.)/2.)*(-4.*B*U**2)/E
```

```
IF (ABS(A)-(1.E-4))30,30,20
```

```
20 CONTINUE
```

```
30 Y=SOMA +1.
```

```
G=Y*EXP(B*(U**2))
T(J)=G*(P(J)*EXP(-4.48*(B**2)))
R(J)=G*(P(J)*EXP(-5.76*(B**2)))
RA(J)=G*(F(J)*EXP(-7.20*(B**2)))
IF(ABS(RA(J)-(1.E-5))121,121,51
51 SOMA 6(J)=SA+RA(J)
GO TO 41
121 SOMA 6(J)=SA
41 IF(ABS(R(J)-(1.E-5))42,42,52
52 SOMA5(J) =OA+R(J)
GO TO 123
42 SOMA 5(J)=OA
123 IF(ABS(T(J)-(1.E-5))43,43,53
43 SOMA 4(J)=F
GO TO 203
53 SOMA 4(J)=F+T(J)
F=SOMA 4(J)
OA=SOMA5(J)
SA=SOMA 6(J)
200 CONTINUE
203 WRITE (3,2)J,K,OA,F,SA
2 FORMAT (50X,' J=',I5, '//,15,3E16.7)
U=U+0.1
IF(U-1.)90,90,100
90 K=K+1
GO TO 80
100 CALL EXIT
END
```

// XEQ

Os programas para o Cálculo de Temperatura Média, Calor em um Ponto, Calor Total, se resumem em operações simples de exponenciação, multiplicação, soma e subtração, aplicando-se diretamente as equações que fornecem aqueles valores. Não serão transcritos neste trabalho os referidos Programas.

N O M E N C L A T U R A

- ρ : densidade
 π : raio
 U_r : velocidade radial
 $\varrho(z)$: função de z
 P : pressão
 k : condutividade térmica
 C_p : capacidade calorífica a pressão constante, por unidade de massa
 T : temperatura absoluta
 μ : viscosidade
 Z : coordenada na direção vertical
 b : meia distância entre as placas
 π_2 : raio externo dos discos
 π_1 : raio interno dos discos
 \bar{U} : velocidade média na superfície do cilindro do raio r
 η : raio adimensional,
 ξ : coordenada adimensional na direção vertical
 T_e : temperatura de entrada do líquido (absoluta)
 T_w : temperatura da parede (absoluta)
 θ : temperatura adimensional
 Θ : temperatura adimensional $1 - \theta$
 N : função de η , $N(\eta)$
 X : função de ξ , $X(\xi)$
 $X_1(\sqrt{2\pi} \xi, -\frac{1}{2}) = X_1^*$: função par

$X_2(\sqrt{2\lambda} \xi, -\frac{\lambda}{2}) = X_2^*$: função impar

λ_n : valor característico

X_n^* : forma abreviada de $X_n(\sqrt{2\lambda_n} \xi, -\frac{\lambda_n}{2})$

β : função de $\xi, \sqrt{2\lambda} \xi$

D_n : coeficientes da equação que fornece θ

$\overline{\Delta T}$: diferença média de temperaturas

$\bar{\theta}$: temperatura adimensional média (θ_{med})

ΔH : velocidade de aumento de entalpia

\dot{V} : velocidade volumétrica

E_n : coeficiente da equação que fornece $\bar{\theta}$

q'' : velocidade de transferência de calor por unidade de área

F_n : coeficientes da equação que fornece o número de Nusselt

$$m_n = \frac{2 \lambda_n^2 k \mu d_n (\kappa_2 / \kappa_1)}{\rho c_p l^4 \Delta P}$$

$$B_n = \frac{\lambda_n}{2}$$