

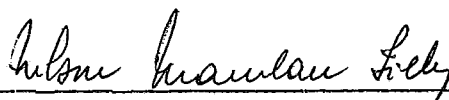
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INVESTIMENTOS

EM REDES DE TRANSPORTE

Geraldo Gil Veiga

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



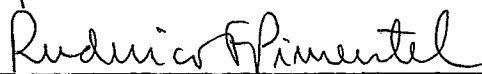
Prof. Nelson Maculan Filho



Prof. Ronaldo C. Marinho Persiano



Prof. Christopher A. Paterson



Prof. Ruderico F. Pimentel

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO - 1977

AGRADECIMENTOS

Aos professores Christopher Amaral Paterson e Nelson Maculan Filho pela orientação na realização deste trabalho.

Aos professores Ruderico Ferraz Pimentel e Ronaldo Marinho Persiano pela participação na banca examinadora.

À CAPES pelo apoio financeiro no decorrer do curso de Mestrado.

RESUMO

Este trabalho refere-se às técnicas de programação matemática utilizadas na resolução de problemas de alocação de recursos em redes de transportes. Após o desenvolvimento de um modelo para um sistema de transportes, formula-se o problema de otimização de redes dentro de um processo de planejamento a curto prazo, apresentando-se os métodos conhecidos para a sua resolução. A seguir, estuda-se o mesmo problema dentro de um processo de planejamento a longo prazo, sendo formulado como um problema de decisões sequenciais. Um método de solução é, então, desenvolvido, baseado em algoritmos de buscas heurísticas em grafos. Apresenta-se, também, a experiência da implementação do método, aplicado a um problema específico de otimização de redes rodoviárias.

ABSTRACT

The present work is concerned with the application of mathematical programming techniques to capital budgeting problems in transport networks. Firstly, we develop a model for a transportation system and formulate the network optimization problem within a short term planning process. Secondly, the same problem is studied within a long term planning process, as a sequential decision problem. A solution method is developed for this last problem based on algorithms designed for the heuristic determination of minimum-cost paths in graphs. The computational experience with the applications of this algorithm to a road network optimization problem is also reported.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - MODELO PARA UM SISTEMA DE TRANSPORTES	
2.1. - Introdução	6
2.2. - A Rede de Transportes	8
2.3. - A Demanda de Transportes	13
2.4. - Equilíbrio em uma Rede de Transportes	16
2.5. - A Alocação de Tráfego	23
CAPÍTULO III - OTIMIZAÇÃO DE UMA REDE DE TRANSPORTES	
3.1. - Introdução	30
3.2. - Formulação Matemática	32
3.3. - Método de Solução	39
3.4. - Algoritmos Branch-and-Bound	
3.4.1. - Introdução	47
3.4.2. - Método de Ridley	52
3.4.3. - Branch-and-Bound de Ochoa-Rosso e Silva	57
3.4.4. - Branch-and-Bound de Chan	60
3.4.5. - Branch-and-Bound de Scott	63
3.4.6. - Branch-and-Bound de Hoang Hai Hoc ...	67
3.4.7. - Branch-and-Bound de Leblanc	71
3.5. - Algoritmos Heurísticos	
3.5.1. - Introdução	75
3.5.2. - Seleção dos Melhores Projetos Segundo a Razão Benefício/Custo	77

3.5.3. - Método de Barbier	79
3.5.4. - Método de Steenbrink	84
3.5.5. - Algoritmo de Inserção/Elimina- ção de Arcos	89
CAPÍTULO IV - PROGRAMA DE INVESTIMENTOS EM UMA REDE RODOVIÁRIA	
4.1. - Introdução	94
4.2. - Descrição do Modelo	97
4.3. - Método de Solução	110
CAPÍTULO V - EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL - CONCLUSÕES	
5.1. - Introdução	124
5.2. - Estrutura dos Programas	126
5.3. - Exemplo	150
5.4. - Conclusões	162
APÊNDICE A - ALGORITMOS DE BUSCA DE TODOS OS CAMINHOS MAIS CURTOS	
A.1. - Introdução	165
A.2. - Algoritmo de Dantzig e suas Extensões	
A.2.1. - Algoritmo Original	168
A.2.2. - Aproveitamento da Inexistência de Ar- cos	171
A.2.3. - Melhoramento para Grafos Não Orienta- dos	175
A.3. - Algoritmo de Floyd	182
A.4. - Modificação dos Caminhos Mínicos Após a Altera- ção de um Arco	184
APÊNDICE B - BUSCA HEURÍSTICA DE CAMINHOS MÍNIMOS EM UM GRAFO	
	189
REFERÊNCIAS	196

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise e resolução do problema de alocação de recursos em uma rede de transportes constituem uma das principais etapas do processo de planejamento de um sistema de transportes. A obtenção da solução deste problema tem por finalidade alocar, obedecendo a critérios pré-estabelecidos, uma quantidade disponível de recursos em projetos que contribuam para o melhor desempenho do sistema. Neste contexto, entende-se como projeto a adição ou a alteração de um trecho da rede de transportes, permitindo-se diferentes níveis de implementação para cada projeto. A avaliação de cada conjunto de alterações na rede é feita através da comparação do impacto das modificações sobre o sistema de transportes com os recursos exigidos para a implementação dos projetos que envolvem tais modificações. Em geral, é dentro de um processo de planejamento a longo prazo que este problema se apresenta. Consequentemente, sua solução deve, além de indicar o conjunto de projetos a serem implementados, também estabelecer um programa de implementações ao longo do tempo. Na resolução do problema, deseja-se estabelecer uma estratégia de investimentos na rede transportes, de maneira a obter-

se a máxima melhoria no desempenho do sistema, obedecendo-se a um orçamento que regula a alocação de recursos até o último período do horizonte de planejamento.

Existem dificuldades óbvias para o estabelecimento rigoroso do problema, já que não constitui uma tarefa fácil a avaliação correta do nível de desempenho de um sistema de transportes. A fim de estimar satisfatoriamente o impacto da implementação de um projeto em um sistema de transportes, seria necessário um conjunto de indicadores quantitativos que pudesse considerar todos os fatores relevantes, expressando com exatidão os custos e benefícios associados a cada projeto ou grupo de projetos. Com a utilização destes indicadores, poderia-se avaliar cada conjunto de projetos através de uma expressão quantitativa dos custos e benefícios auferidos pelo sistema como consequência da implementação dos projetos. Todavia, não é sempre possível identificar e quantificar corretamente todos os custos e benefícios envolvidos em um grupo de alterações em uma rede rodoviária. Valores monetários sempre podem ser associados aos custos de viagem dos usuários ou aos custos de construção e manutenção da rede rodoviária, mas outros custos e benefícios ligados aos usuários ou ligados a terceiros, como por exemplo danos ao meio ambiente, não podem ser identificados facilmente, nem se prestam à simples associação de valores monetários.

Além das dificuldades para a caracterização dos custos e benefícios envolvidos na implementação de projetos, existe um outro grave obstáculo a ser superado, que consiste na previsão da demanda dos serviços oferecidos pela in

fra-estrutura do sistema após algumas modificações. Pode-se observar facilmente que existe uma relação bastante estreita entre a distribuição geográfica dos locais ligados por alguma relação de transportes, e as características da infra-estrutura que torna possível a existência destas relações de transporte. Qualquer alteração na configuração da infra-estrutura pode, então, induzir modificações na geografia da demanda de transportes, alterando as características das relações de transportes. O investimento em transportes é, inclusive, um dos instrumentos utilizados na implantação de uma política de desenvolvimento regional, quando o problema de planejamento do sistema de transportes é tratado juntamente com problemas de localização. Como última peculiaridade a ser ressaltada na avaliação de projetos em redes de transportes, é necessário ressaltar que os custos e benefícios associados a cada projeto não podem ser estimados individualmente, pois pode existir algum grau de interdependência entre os projetos. É possível que existam grupos de projetos competitivos ou complementares, de modo que o impacto da realização de um projeto pode ser maior ou menor que o impacto da realização deste projeto após a implementação de outros.

Este trabalho apresenta técnicas de programação matemática para a resolução de problemas de alocação de recursos em redes de transporte. O desenvolvimento de tais técnicas deve atentar para algumas condições peculiares que cercam a ocorrência prática destes problemas. Primeiramente, é necessário ressaltar a dimensão dos recursos financeiros envolvidos no processo de planejamento de transportes, não ape

nas os recursos investidos diretamente na infra-estrutura de transportes, mas também aqueles ligados aos usuários que se utilizam desta infra-estrutura. Desta forma, o desenvolvimento de ferramentas matemáticas eficazes pode ser compensador na medida que a utilização destas ferramentas por analistas de transporte possa significar uma economia significativa, dado o montante dos recursos envolvidos. Outro ponto a ser destacado, é o fato de tratarmos com problemas de grandes dimensões, se analisados sob a ótica das técnicas de programação matemática. Sendo assim, os métodos a serem desenvolvidos devem levar em conta, não a hipótese de caracterizar teoricamente uma solução ótima, mas com a possibilidade de obtenção rápida e eficiente de boas soluções.

Visando a caracterização dos elementos utilizados na formulação dos problemas de investimentos em transportes, apresentamos inicialmente, no Capítulo II deste trabalho, o desenvolvimento de um modelo para um sistema de transportes. Os conceitos de oferta e demanda de transporte são introduzidos, e descreve-se o problema de equilíbrio em uma rede de transporte, dentro do contexto que será utilizado nos capítulos posteriores. O Capítulo III trata do planejamento de transportes a curto prazo, apresentando o problema de alocação de recursos na infra-estrutura de transportes como um problema de otimização em redes. São sugeridos métodos de solução para este último problema, sempre considerando a existência de algum grau de interdependência entre os projetos para a melhoria da rede, e distribuindo o tráfego da rede de modo a descrever o comportamento do usuário quando avalia-se uma configuração da rede de transportes. Os Ca

pítulos IV e V apresentam, respectivamente, o desenvolvimento de um método de solução e o relato da experiência computacional da implantação deste método, na resolução de um problema de planejamento rodoviário a longo prazo. O problema de investimentos em uma rede rodoviária é formulado como um processo de decisões sequenciais, definindo-se claramente os objetivos e as restrições considerados. O método utilizado está dividido em duas partes distintas. Como primeira etapa obtem-se uma estratégia inicial através de um algoritmo que calcula sequencialmente os projetos a serem implementados a cada período. Num segundo estágio, procura-se obter, iterativamente novas estratégias utilizando-se a anterior. São fornecidos no Capítulo V detalhes da implantação do algoritmo em computador com exemplos do seu funcionamento. Devido a importância prática de um algoritmo eficiente para a obtenção dos caminhos mais curtos através de uma rede, utilizado na alocação de tráfego sempre que se deseja avaliar uma configuração para a rede de transportes, descrevemos em anexo alguns métodos utilizados na resolução deste problema. Um segundo apêndice trata da busca heurística de caminhos mínimos, com o objetivo de aplicá-los à resolução de problemas de decisões sequenciais.

CAPÍTULO II

MODELO PARA UM SISTEMA DE TRANSPORTES

2.1. Introdução

Transporte é o aspecto da atividade econômica que provê a transferência de indivíduos ou bens de um local para outro. Os fatores envolvidos nesta transferência, que incluem tanto os recursos materiais e humanos utilizados na atividade como os usuários dos serviços de Transporte, são os componentes de um Sistema de Transportes. Pode-se distinguir no Sistema dois componentes fundamentais que são a oferta de Transporte e a demanda de Transporte.

Compreende-se a oferta de transporte como a infra-estrutura que serve ao sistema. A infra-estrutura inclui as instalações fixas utilizadas, os veículos e a forma de utilização dos recursos do sistema. Os serviços de transporte são oferecidos em diferentes modos de Transporte que utilizam, cada um, diferentes setores da infra-estrutura fixa. São os seguintes os modos de transporte:

- i) Transporte ferroviário.
- ii) Transporte rodoviário.
- iii) Transporte fluvial e marítimo.

iv) Transporte aéreo.

v) Transporte por dutos.

Para cada um dos modos de transporte o movimento de veículos caracteriza o tráfego através de cada via de transporte, geralmente quantificado como o número de viagens envolvidas. Eventualmente, é preciso distinguir entre diferentes classes de usuários dentro de um mesmo modo de transporte, sendo possível a existência de diferentes tipos de tráfego em uma mesma via, como, por exemplo, os tráfegos de caminhões e automôveis em uma rodovia.

A demanda de transporte é formada pelos indivíduos e bens a serem transferidos, junto com as causas e relações de comportamento determinantes da transferência. Basicamente caracterizam a demanda os locais geradores de viagens chamados zonas geradoras ou Origens, os locais que atraem estas viagens chamados Destinos e a expressão quantitativa e qualitativa das viagens geradas.

A análise de um Sistema de Transportes depende dos resultados advindos da interação entre seus dois componentes fundamentais, a oferta e demanda de transporte. O objetivo deste capítulo é descrever estes dois componentes do sistema através dos modelos comumente utilizados pela teoria dos sistemas de transportes. Além disto, analisa-se como a oferta e a demanda interagem, de modo a prever o desempenho do sistema a cada situação.

2.2. A Rede de Transportes

Uma rede de transportes é o modelo matemático utilizado na representação da infra-estrutura de transporte. A rede consiste de um grafo orientado $G = (N, A)$, onde N é o conjunto de nós e A o conjunto de arcos. Os nós representam as origens, os destinos e as interseções de vias de tráfego. Cada trecho de uma via, entre dois nós i e j , é representado pelo arco (i, j) , e também pelo arco (j, i) caso seja possível o tráfego nos dois sentidos do trecho. Aos arcos estão usualmente associadas características numéricas como, por exemplo, capacidade, tempo de viagem, extensão ou custo de viagem. Outras características podem fixar a forma de utilização de cada arco como, por exemplo, destinar o arco a apenas um modo de transporte ou a uma classe de usuários. Os nós que representam as origens formam um conjunto $N^O \subset N$, e os nós que representam os destinos formam o conjunto $N^D \subset N$. Define-se $R = \{ab \in N^O \times N^D \mid \text{exite tráfego gerado de } a \text{ para } b\}$ como o conjunto das relações de transporte do sistema. O tráfego que atravessa a rede é representado por um fluxo X , com componentes $X_{m,u}^{ab}$ para cada relação de transporte $ab \in R$, utilizando cada modo de transporte m e para cada classe de usuários u . Em geral, as leis de conservação de fluxo para a rede devem levar em conta cada uma destas componentes.

Este modelo para a infra-estrutura de transportes pode ser formulado de uma maneira simples e geral quando consideramos apenas um modo de transporte e uma classe de u-

suários. Neste caso, o fluxo X é tal que para cada arco $(i,j) \in A$, x_{ij} $\sum_{ab \in R} x^{ab}(i,j)$ expressa, em número de viagens, o tráfego que atravessa o arco. Para cada relação de transporte $ab \in R$, x^{ab} representa o valor do fluxo x^{ab} componente de X . As leis de conservação de fluxo devem ser satisfeitas independentemente para cada um dos fluxos componentes x^{ab} . Desta maneira, fica caracterizado um fluxo de multicomodidade, onde cada comodidade é uma relação de transportes $ab \in R$. Através de uma formulação não-arco, as leis de conservação de fluxo podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\{i | (i,j) \in A\}} x_{ij}^{ab} - \sum_{\{k | (j,k) \in A\}} x_{jk}^{ab} \\ \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ para todo } j \neq a \text{ ou } b, j \in N \\ = -x^{ab} \text{ se } j=a \\ = x^{ab} \text{ se } j=b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

para todo $ab \in R$ e $j \in N$

$$x_{ij}^{ab} \geq 0 \text{ para todo } ab \in R \text{ e } (i,j) \in A$$

$$x_{ij} = \sum_{ab \in R} x_{ij}^{ab} \leq m_{ij} \text{ para todo } (i,j) \in A$$

Na formulação acima, x_{ij}^{ab} é o fluxo gerado em a com destino b , que atravessa o arco (i,j) . A matriz $X^{OD} = |x^{ab}|$, contendo para cada relação de transporte o valor x^{ab} do fluxo componente x^{ab} , é usualmente chamada de matriz Origem/Destino. Os elementos da matriz Origem/Destino são fornecidos, como mostraremos oportunamente, pela função de deman-

da do sistema. m_{ij} é a capacidade do arco (i,j) .

Pode-se utilizar restrições mais fracas na descrição das leis de conservação de fluxo. Neste caso, nenhuma distinção é feita entre os fluxos gerados a partir de uma mesma origem (ou entre todos os fluxos com o mesmo destino). Esta hipótese parece apropriada na descrição do tráfego em um sistema de transportes. As leis de conservação são, então, reescritas da maneira abaixo:

$$\sum_{\{i | (i,j) \in A\}} x_{ij}^a - \sum_{\{k | (j,k) \in A\}} x_{jk}^a \begin{cases} = & \text{se } j \neq a \text{ e } aj \notin R \\ = & - \sum_{\{b | ab \in R\}} \text{se } j = a \\ = & \text{se } aj \in R \end{cases}$$

para todo $a \in N^0$ e $j \in N$

$$x_{ij}^a = \sum_{a \in N^0} x_{ij}^a \leq m_{ij} \text{ para todo } (i,j) \in A$$

$$x_{ij}^a \geq 0 \text{ para todo } a \in N^0 \text{ e } (i,j) \in A,$$

onde x_{ij}^a é o fluxo partindo de $a \in N^0$ que atravessa o arco (i,j) . As leis de conservação podem ser escritas equivalentemente, se consideramos cada comodidade como o fluxo que se dirige a um certo destino.

Alguns tipos de análise da rede de transportes exigem uma formulação arco-cadeia da rede, que fornece uma descrição sucinta e elegante do problema. A aplicação desta formulação na solução de problemas é dificultada por um obstáculo de ordem prática: seria necessário enumerar todos os caminhos

ligando cada par Origem/Destino.

Nesta formulação, C^{ab} é conjunto de todos os caminhos ligando a e b. No contexto deste trabalho, um caminho é uma sequência de arcos $C = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_4) \dots \dots \dots (i_{n-1}, i_n)\}$ com os arcos orientados na direção indicada. A formulação arco-cadeia das leis de conservação de fluxo é, então, a seguinte:

$$x_{ij}^{cab} = x_{kl}^{cab} \quad \text{para todo } (i,j) \in C, (k,l) \in C, c \in C^{ab}, ab \in R$$

$$\sum_{c \in C} x_{aj}^{cab} = x^{ab} \quad \text{para todo } ab \in R$$

$$x_{ij}^{cab} \geq 0 \quad \text{para todo } (i,j) \in C, c \in C^{ab}, ab \in R$$

$$\sum_{\substack{c \in C \\ ab \in R}} x_{ij}^{cab} \leq m_{ij} \quad \text{para todo } (i,j) \in A$$

onde x_{ij}^{cab} é o fluxo expressando o número de viagens de a até b que utiliza o caminho $c \in C^{ab}$ e atravessa o arco (i,j) .

Quando se consideram vários modos de transporte os setores da infra-estrutura associados a cada modo são, em geral, tratados independentemente. As leis de conservação de fluxo podem então ser formuladas da maneira descrita acima com o fluxo representando o tráfego de cada modo de transporte.

Com o desenvolvimento de um modelo para a infra-estrutura de transportes, desenvolvemos, de certa forma, uma função de oferta do sistema. Utilizando a caracterização for-

necida pela rede de transporte, é possível estabelecer o fluxo que atravessa cada arco a partir do fluxo x^{ab} para cada relação de transporte ab , e introduzir uma avaliação para o nível de serviço oferecido aos usuários, $S = O(X,Y)$, onde O é a função oferta do sistema e Y são variáveis que caracterizam a configuração da rede de transporte.

X

2.3. A Demanda de Transporte

O desenvolvimento de um modelo para a Demanda de Transporte objetiva a caracterização da geração de viagens para um determinado Sistema de Transportes. O modelo mais desejável para este fim deveria fornecer uma função de demanda exata e detalhada que relacionasse a geração das viagens que utilizariam a infra-estrutura de transportes com toda a sorte de fatores que determinam o fenômeno de transporte. Esta função de demanda forneceria a matriz Origem/Destino X^{OD} , cujos elementos indicam o fluxo para cada $a \in R$ em função de um conjunto de atividades sócio-econômicas A e do nível de serviço S oferecido pela infra-estrutura de transportes cada fluxo, tomando a seguinte forma: $X^{OD} = D(S, A)$, onde D é a função demanda.

Modelos para a demanda de Transporte com as características acima são os chamados modelos diretos de demanda. Todavia, razões práticas impedem, na maior parte dos casos, o estabelecimento de uma função demanda da forma descrita acima. Os modelos usuais para a demanda de transporte utilizam, então, uma abordagem muito mais limitada e indireta. Estes modelos consideram independentemente os fenômenos de geração de viagens, distribuição e escolha do modo de transporte. Esta hipótese de independência permite que o método de solução seja dividido em uma sequência de procedimentos executados um após o outro. A sequência é a seguinte:

i) Geração e Atração de viagens: Determina as origens e destinos, estima o número de viagens gerados a par-

tir de cada origem e o número de viagens atraídas por cada destino.

ii) Distribuição de viagens: Determina o número de viagens partindo de cada origem para cada destino. É o processo de escolha do destino para cada viagem gerada.

iii) Escolha do modo de Transporte: Divide as viagens geradas para cada par origem destino entre os modos de transporte disponíveis.

Ao final deste processo, conhece-se, para cada relação de transportes, o número de viagens utilizando cada modo de transporte e para cada classe de usuários. A seguir, resta apenas distribuir estas viagens através da rede, o que constitui o problema de alocação de tráfego tratado ainda neste capítulo.

O desenvolvimento de métodos que resolvam simultaneamente duas ou mais partes deste processo para a solução da demanda de transporte é objeto de atenção de alguns trabalhos. As referências [1],[2],[3],[4],[5] apresentam algoritmos para a resolução simultânea da distribuição de viagens e alocação de tráfego, sendo conhecido o resultado do problema de geração de viagens, e supondo a existência de apenas um modo de transporte. Um método que resolve simultaneamente o problema de geração e de distribuição de viagens pode ser encontrado na referência [6], desta maneira o modelo pode expressar a simultaneidade do processo "viajar e escolher o destino". A referência [7] trata de um método simultâneo para a distribuição de viagens e escolha do modo de transporte. A referência [8] tra

ta da simultaneidade entre a geração de viagens e escolha do modo de transporte.

2.4. Equilíbrio em uma Rede de Transporte

O problema de equilíbrio em uma rede de Transporte consiste na predição do comportamento do fluxo através de uma rede de Transportes, quando é conhecida a função demanda que descreve as características da geração de viagens para este sistema de transportes. O objetivo do problema é, então, encontrar o equilíbrio entre uma função de oferta, que caracteriza a infra-estrutura de transporte, e uma função demanda. O desenvolvimento e resolução de modelos para este problema são tarefas complexas na medida em que se consideram vários modos de viagem, várias classes de usuário ou uma função de demanda de caráter muito geral.

Quando são considerados apenas uma classe de usuários, um modo de viagem e uma função de demanda simplificada, onde o número de viagens entre uma origem e um destino depende apenas do custo total de viagem, entre os dois nós, podem se estabelecer condições necessárias e suficientes que o fluxo deve obedecer quando em equilíbrio. Como primeira abordagem, as condições de equilíbrio serão formuladas empiricamente. Numa segunda abordagem, o problema será formulado como um problema de programação não linear, e serão estabelecidas condições de otimalidade para este problema, supondo que a função demanda e a função de custo para cada arco atendem a certas hipóteses. Neste caso, é possível garantir a existência de uma solução única para o fluxo em equilíbrio.

A predição do fluxo em cada arco da rede depen

de do conhecimento do comportamento do usuário na escolha de seu caminho, ao se deslocar de uma certa origem para um destino. A hipótese mais natural neste caso é supor que ao trafegar, através da rede o caminho escolhido para a viagem é sempre de menor custo. Numa situação de equilíbrio, então, nenhum usuário deve poder diminuir seu custo de viagem mediante uma mudança de caminho. As condições que o fluxo em equilíbrio deve satisfazer, se supomos a validade das hipóteses acima, estão formuladas no segundo princípio de Wardrop:

- i) Os custos de viagem em todos os caminhos efetivamente utilizados entre uma origem e um destino são iguais.
- ii) Não existe um caminho alternativo não utilizado entre uma origem e um destino com custo menor do que o custo dos caminhos efetivamente utilizados.

O fluxo através da rede que satisfaz a estas condições é chamado fluxo ótimo do usuário. Supondo a existência de apenas um modo de transporte e uma classe de usuários, este princípio pode ser expresso de maneira mais precisa, através de uma formulação matemática. Consideremos para esta formulação, uma rede de transportes $G = (N, A)$, onde a cada arco $(i, j) \in A$ está associada uma função $t_{ij}(x_{ij})$ que determina o custo de viagem através do arco, em função do fluxo x_{ij} que atravessa (i, j) . Consideremos $x^{ab} = d(t^{ab})$, a função demanda para cada relação de transporte $ab \in R$, que expressa o número de vi-

agens de a até b , em função do custo total de viagem t^{ab} . Supõe-se que a função $d(t^{ab})$ possui uma inversa $t^{ab} = g^{ab}(x^{ab})$.

Através de uma formulação arco-cadeia, onde x_{ij}^{cab} é o fluxo gerado de a até b que utiliza o caminho $c \in C^{ab}$, atravessando o arco (i,j) , o princípio de Wardrop será escrito como:

- i) se $x_{aj}^{cab} = 0$ então $g^{ab}(x^{ab}) \geq \sum_{(i,j) \in c} t_{ij}(x_{ij})$
 ii) se $x_{aj}^{cab} > 0$ então $g^{ab}(x^{ab}) = \sum_{(i,j) \in c} t_{ij}(x_{ij})$

Para todo $ab \in R$ e todo $c \in C^{ab}$, onde
 $x^{ab} = \sum_{c \in C^{ab}} x_{aj}^{cab}$ e $x_{ij} = \sum_{\substack{c \in C^{ab} \\ ab \in R}} x_{ij}^{cab}$. Como $t^{ab} = g^{ab}(x^{ab})$

independe do caminho c , e fazendo $t_{ij} = t_{ij}(x_{ij})$ as condições podem ser reescritas da forma abaixo:

- i) $\sum_{(i,j) \in c} t_{ij} = t^{ab}$ para todos os caminhos utilizados de a até b .
 ii) $\sum_{(i,j) \in c} t_{ij} \geq t^{ab}$ para todos os caminhos não utilizados de a até b . Para todo $ab \in R$.

Observe-se que estas condições implicam em $t^{ab} = \min_{c \in C^{ab}} \sum_{(i,j) \in c} t_{ij}$,

i.e., o custo de viagem de a até b é mínimo.

Observando através de uma formulação não-arco, quando x_{ij}^{ab} é o fluxo que atravessa o arco (i,j) devido à relação de transporte $ab \in R$, o princípio de Wardrop será formulado

da seguinte maneira:

$$i) \text{ se } x_{ij}^{ab} > 0 \text{ então } t^{ai} + t_{ij} = t^{aj}$$

ii) se $t^{ai} + t_{ij} > t^{aj}$ então $x_{ij}^{ab} = 0$. Para todo $ab \in R$ e todo $(i,j) \in A$. Assim garantimos que todos os caminhos utilizados são mínimos.

Supondo ainda a existência de um único modo de transporte e uma classe de usuários, o problema de equilíbrio pode ser expresso como um problema de programação não linear. Utilizando uma formulação arco-cadeia para a representação da rede de transportes, temos que o fluxo que estabelece o equilíbrio é solução do seguinte problema:

$$\text{Min}_{\substack{x_{ij}^{cab} \\ x_{ij}^{cab}}} F = \sum_{ab \in R} \int_0^{x_{ab}} g^{ab}(x) dx + \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx$$

Sujeito a:

$$x_{ij}^{cab} = x_{kl}^{cab} \text{ para todo } (i,j) \in C, (k,l) \in C, c \in C^{ab}, ab \in R$$

(PNL)

$$x_{ij}^{cab} \geq 0$$

$$\text{onde } x^{ab} = \sum_{c \in C^{ab}} x_{aj}^{cab} \quad (\text{todo o fluxo gerado de a até b})$$

$$x_{ij} = \sum_{\substack{c \in C^{ab} \\ ab \in R}} x_{ij}^{cab} \quad (\text{todo o fluxo atravessa o arco } i,j)$$

O princípio de Wardrop está fortemente ligado a esta formulação do problema de equilíbrio, pois, apesar de ser enunciado empiricamente, o princípio fornece as condições de otimalidade para o problema de programação não linear. Pode-se demonstrar facilmente que o princípio de Wardrop é equivalente às condições de Kuhn-Tucker aplicadas ao problema (PNL), que formam neste caso, após hipóteses conveniente sobre as funções $t_{ij}(x_{ij})$ e $g^{ab}(x^{ab})$, condições necessárias suficientes para a solução do problema. Os fatos que fornecem as condições de otimalidade, e garantem ainda a solução única para o equilíbrio são as seguintes:

i) Suponha $t_{ij}(x_{ij})$ e $g^{ab}(x^{ab})$ seja funções não decrescentes.

ii) Com as hipóteses acima, a função objetivo do problema de equilíbrio

$$F = \sum_{ab \in R} \int_0^{x^{ab}} -g^{ab}(x) dx + \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx$$

é estritamente convexa.

iii) O princípio de Wardrop fornece condições necessárias e suficientes para o problema, pois, é equivalente às condições de Kuhn-Tucker. As condições de Kuhn-Tucker são condições necessárias e suficientes de otimalidade para um problema convexo com restrições lineares.

iv) Como a função objetivo é estritamente convexa e as restrições formam um conjunto fechado, a solução é única.

Métodos de solução são disponíveis para versões limitadas do problema de equilíbrio, formulados como problemas de programação não linear de maneira análoga à formulação que apresentamos. Algumas soluções tratam o problema com a demanda fixa, i.e., a função $x^{ab} = d(t^{ab})$ é constante, e o número de viagens é, então, fixo para cada $ab \in R$. Neste último caso o problema se resume a um Problema de Alocação de Tráfego minimizando o custo individual de cada usuário. Este problema será tratado a seguir neste trabalho. Outros métodos, encontrados nas referências [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21] resolvem o problema para demanda elástica, supondo a existência de apenas um modo de transporte e uma classe de usuários.

O algoritmo descrito na referência [15] consiste em alocar incrementos de fluxo pelos caminhos mais curtos a cada instante, até que o equilíbrio aproximado seja alcançado. Este algoritmo segue a mesma linha dos métodos incrementais de tráfego e apresenta como principais problemas o grande número de cálculos de caminhos mais curtos, a impossibilidade de se alcançar a solução ótima e falta de medidas do erro cometido na solução aproximada. Os algoritmos descritos nas referências [21] e [22] utilizam técnicas de programação matemática no cálculo exato do fluxo em equilíbrio. O primeiro método é baseado no uso iterativo de um algoritmo que calcula o equilíbrio com a demanda fixa, associado a uma adaptação da Decomposição de Benders Generalizada. A referência [21] apresenta resultados computacionais satisfatórios para redes de médio porte, quando foi utilizado o algoritmo descrito na referência [23] para o cálculo com demanda fixa. No segundo método para a resolu-

ção exata do problema de equilíbrio, formula-se o problema como um problema de Circulação de Multicomodidades que é resolvido utilizando uma abordagem que elimina ciclos negativos a cada iteração.

C.

2.5. A Alocação de Tráfego

O problema de alocação de tráfego é a parte final de um processo de previsão do desempenho de um sistema de transporte, sempre que após a resolução do modelo para a demanda de transporte obtém-se uma função de demanda constante. Neste caso, não é necessária a resolução de um problema de equilíbrio para a predição do comportamento do fluxo através da rede. Isto acontece usualmente, sempre que são utilizados os modelos sequenciais, descritos anteriormente, para a demanda de transporte. O problema de alocação de tráfego é resolvido para cada modo de transporte, após o processo de escolha de modo de Transporte. A alocação de tráfego consiste no processo de distribuição do fluxo gerado para cada relação de transporte, entre os vários caminhos possíveis que ligam cada par Origem/Destino. Existem, naturalmente, muitas maneiras possíveis de distribuir o tráfego em uma rede de maneira que o fluxo obtido seja viável. O problema, então, é alocar o tráfego de maneira a atender a um objetivo que descreve o mecanismo regulador do uso da infra-estrutura fixa de transporte. Quando foi analisado o problema de equilíbrio em uma rede, tentou-se descrever o fenômeno que ocorre sempre que os usuários têm livre escolha quanto a seu comportamento na rede. Esta, porém, não é a única maneira de ser operado um sistema de transporte, o tráfego pode ser alocado, por exemplo, de maneira a minimizar os custos sociais de operação da rede, que podem incluir o custo total dos usuários, os custos de conservação da infra-estrutura

e outros custos externos ao usuário individualmente.

A análise do problema de alocação de tráfego introduz, então, duas classes distintas de sistemas de transporte:

- i) Os Sistemas Normativos, onde o modo de utilização da rede é imposto, levando em conta os custos de operação do Sistema.
- ii) Os Sistemas Descritivos, onde os usuários utilizam a infra-estrutura de transportes segundo seus custos individuais.

No segundo caso já observamos que o problema se resume ao problema de equilíbrio que descrevemos, considerando a demanda fixa. O problema de alocação pode, portanto, ser formulado de maneira semelhante:

$$\text{Min}_{x_{ij}^{cab}} F = \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx, \text{ onde } x_{ij} = \sum_{c \in C^{ab}} x_{ij}^{ab}$$

Sujeito a:

$$x_{ij}^{cab} = x_{kl}^{cab} \text{ para todo } (i,j) \in C, (k,l) \in C, P \in C^{ab}, ab \in R$$

$$\sum_{c \in C^{ab}} x_{aj}^{cab} = x^{ab} \text{ para todo } ab \in R$$

$$x_{ij}^{cab} \geq 0 \text{ para todo } (i,j) \in P, C \in C^{ab} \quad ab \in R$$

O problema também pode ser expresso através de uma formulação no-arco na seguinte maneira:

$$\text{Min}_{x_{ij}^a} F = \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx$$

Sujeito a:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^a - \sum_{(j,k) \in A} x_{jk}^a &= 0 \quad \text{se } j \neq a, j \notin N_D \\ &= -\sum_{\{b | ab \in R\}} x^{ab} \quad \text{se } j = a \\ &= x^{ab} \quad \text{se } j \in N^D \end{aligned} \right\} \text{ para todo } a \in N^0 \text{ e } j \in N$$

$$x_{ij} = \sum_{a \in N^0} x_{ij}^a \quad \text{para todo } (i,j) \in A$$

$$x_{ij}^a \geq 0 \quad \text{para todo } a \in N^0 \text{ e } (i,j) \in A$$

No caso de um Sistema Normativo, a formulação do problema é modificada pela função objetivo. Para cada arco $(i,j) \in A$ existe uma função $F_{ij}(x_{ij})$ que expressa o custo social de operação deste arco em função do fluxo x_{ij} . A função objetivo F será então:

$$F = \sum_{(i,j) \in A} F_{ij}(x_{ij})$$

Algumas comparações entre os dois sistemas podem ser feitas se consideramos um exemplo particular de alocação normativa, onde o objetivo é minimizar o custo total de viagem dos usuários, i.e., $F = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} t_{ij}(x_{ij})$, atendendo ao

chamado primeiro princípio de Wardrop. O fluxo obtido através de uma alocação descritiva é em geral diferente do fluxo obtido através desta alocação normativa. Podemos, no entanto, es

tabelecer a condição de igualdade dos dois fluxos quando a alocação normativa se faz da forma especial citada acima. Observemos, primeiramente, que sempre que $F_{ij}(x_{ij})$ é diferenciável podemos expressar o problema de alocação normativa como um problema de equilíbrio fazendo $t_{ij}(x_{ij}) = \frac{dF_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}}$, e reescrevendo a função objetivo da maneira abaixo:

$$F = \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} \frac{dF_{ij}(x)}{dx} \cdot dx$$

A condição para igualdade dos fluxos normativo e descritivo é então:

$$t_{ij}(x_{ij}) = \frac{dF_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} \quad \text{para todo } (i,j) \in A.$$

Quando $F_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij})$ temos que

$$\frac{dF_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} = t_{ij}(x_{ij}) + x_{ij} \frac{dt_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} = t_{ij}(x_{ij})$$

$$\text{donde } \frac{dt_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} = 0.$$

A função $t_{ij}(x_{ij})$, custo médio de viagem no arco (i,i) , deve ser constante com o fluxo, i.e., não são levados em conta quaisquer efeitos de congestionamento nos arcos. A forma recomendada pelo U.S. Federal Highway Administration para a função $t_{ij}(x_{ij})$ quando são considerados efeitos de congestionamento é

$t_{ij}(x_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}(x_{ij})^4$. Se o custo de viagem é considerado apenas pelo tempo de viagem a referência [24] oferece uma forma mais explícita para $t_{ij}(x_{ij})$:

$$t_{ij}(x_{ij}) = \bar{t}_{ij} \left[1.0 + 1.5 \left(\frac{x_{ij}}{m_{ij}} \right)^4 \right] \quad \text{onde}$$

\bar{t}_{ij} é o tempo médio de viagem sem congestionamento,

m_{ij} é a capacidade prática do arco (i,j) .

Os algoritmos de solução para o problema de alocação de tráfego dependem, em geral, do tipo de função $t_{ij}(x_{ij})$ utilizado para cada arco. Quando supõem-se inexistentes os efeitos de congestionamento, i.e., $t_{ij}(x_{ij})$ constante, a resolução do problema se resume à busca dos caminhos de custo mínimo ligando os pares Origem/Destino. A solução de problemas de busca de caminhos mais curtos em um grafo pode ser feita a baixo custo computacional, através de um bom número de algoritmos, que são analisados em um apêndice deste trabalho.

A maioria dos algoritmos de resolução do problema de alocação, levando em conta efeitos de congestionamento, estão entre os métodos chamados métodos de capacidade restrita. Estes métodos podem ser utilizados em grandes rede, e empregando algoritmos de alocação a custo fixo, baseiam-se em justificativas heurísticas para o tratamento dos efeitos de congestionamento. A referência [25] apresenta um algoritmo baseado nos métodos de capacidade restrita e se constitui na primeira tentativa de alocar o tráfego de maneira a satisfazer ao segundo princípio de Wardrop. Este algoritmo, chamado de algoritmo in

cremental, mesmo nas variações sugeridas posteriormente, começa sempre com o fluxo nulo em todos os arcos e gradualmente aloca-se incrementos da matriz Origem-Destino até que se aloque todas as viagens da matriz O/D da seguinte forma:

- Passo 1 - Selecionar uma origem aleatoriamente.
- Passo 2 - Calcular o caminho mínimo até todos os destinos.
- Passo 3 - Alocar o fluxo correspondente a um incremento da diferença entre a matriz O/D total e a parte já alocada.
- Passo 4 - Se toda a demanda de todas as origens já foi alocada, Parar.
Se não ir para o Passo 5.
- Passo 5 - Recalcular os fluxos e custos de viagens, ir para o Passo 5.

A referência [26] apresenta uma análise crítica do método, apontando suas incorreções. O ponto principal apresentado é de que o método não resolve o problema de minimização associado com o problema de alocação de tráfego. Além deste argumento, observe-se que não existem maneiras de se avaliar o erro cometido no fluxo final a cada escolha do tamanho do incremento, e que não existe uma maneira prática de se recalculá-lo após pequenas modificações na rede.

Como solução para os problemas apresentados, alguns métodos baseados em algoritmos de programação convexa tem sido desenvolvidos. A referência [27] propõe um algoritmo base

ado numa formulação arco-cadeia da rede. Este algoritmo aparece em uma versão melhorada na referência [28]. Embora a formulação arco-cadeia apresente uma boa interpretação do fluxo final, baseando-se nas condições de Kuhn-Tucker, existem grandes dificuldades computacionais para os métodos que resolvem problemas formulados desta maneira, pois é necessário considerar explicitamente todos os caminhos ligando os pares Origem/Destino. Procurando ultrapassar esta dificuldade, a referência [23] apresenta um algoritmo eficiente, onde se resolve o problema de minimização, baseado em uma formulação não-arco do problema. O método assume os custos de viagem como funções crescentes do fluxo e, pode ser utilizado tanto para a alocação decisiva, como para casos especiais da alocação normativa. O algoritmo foi elaborado a partir do método simplex convexo, tirando vantagem da estrutura das restrições que formam a rede de transporte. Basicamente, o algoritmo consiste na decomposição do problema em uma sequência de subproblemas mais simples que são resolvidos via Simplex Convexo, acrescido de um mecanismo especial para a geração de colunas. O método permite atualizações do fluxo ótimo no caso de alterações na rede. A referência [23] apresenta resultados computacionais satisfatórios para redes de médio porte.

CAPÍTULO III
OTIMIZAÇÃO DE UMA REDE DE TRANSPORTES

3.1. Introdução

Entre as versões mais estudadas do problema de alocação de recursos na infra-estrutura de um sistema de transportes está aquela em que analisa-se o problema dentro de um processo de planejamento a curto prazo. Nesta situação, não se considera a evolução da infra-estrutura ao longo do tempo, supondo-se que as alterações realizadas serão todas implementadas simultaneamente, além de estarem imediatamente disponíveis para utilização. Problemas de investimentos em transportes incluídos nesta categoria podem ser encarados, após hipóteses convenientes, como membros de uma classe geral de problemas que podem ser expressos da seguinte forma:

"Selecionar o conjunto de modificações nos arcos que produz a melhor rede de transportes, de acordo com algum critério de avaliação pré-fixado."

A resolução deste problema, chamado problema da rede ótima, pode ser de grande valia na otimização de redes de transporte dentro de um processo de planejamento a longo prazo, quando os investimentos na infra-estrutura são tratados de forma dinâmica.

São necessárias algumas hipóteses sobre o pro-

blema de investimentos em um sistema de transportes, se desejamos formulá-lo como um problema de rede ótima, principalmente se consideramos a aplicação das técnicas de solução comumente referidas na literatura. Estas hipóteses se referem ao comportamento do sistema de transportes ante as modificações que serão realizadas na sua infra-estrutura. Primeiramente, supõem-se que as alterações na rede de transporte não induzem modificações na estrutura geográfica do sistema, expressa pela função demanda conhecida no início do processo. Embora, em geral, seja considerada constante, a demanda de transporte pode ser função da configuração da rede e, qualquer exigência de uma forma particular aparece como consequência das limitações dos métodos utilizados para a resolução do problema. Além destas suposições, na maior parte dos casos o problema que tratamos refere-se a apenas um modo de transporte e a uma classe de usuários.

Este capítulo trata da formulação e solução do problema de rede ótima. Muitas hipóteses adicionais serão impostas ao modelo do sistema de transportes quando tratamos de cada método de solução. Em geral, a demanda será considerada constante para cada modo de transporte, não sendo considerados também, em alguns casos, efeitos de congestionamento quando o tráfego é alocado. A avaliação de cada configuração possível da rede de transportes será feita por uma função objetivo que pode incluir os custos de viagem do usuário, e os custos sociais diretamente ligados à construção e à manutenção da infra-estrutura.

3.2. Formulação Matemática

O problema de otimização de uma rede de transportes será formulado a seguir, como um problema de programação matemática. Como passo inicial para a formulação, é preciso definir os elementos que caracterizam um problema de programação matemática. São os seguintes, os três principais componentes a serem definidos:

- a) As variáveis de decisão.
- b) As restrições.
- c) A função objetivo.

Para cada um dos três elementos as suposições usuais da existência de apenas um modo de transporte e uma classe de usuários, além da demanda constante, acarretam em versões simplificadas do problema.

1. As variáveis de decisão:

A administração do sistema de transportes é responsável pela fixação de valores para as variáveis de decisão. O conjunto destas variáveis depende do tipo de escolhas que são permitidas à administração do sistema. Já nos referimos anteriormente, a dois tipos de sistemas de transportes. Nos sistemas normativos, a autoridade central do sistema tem poder sobre a alocação do tráfego na rede, determinando modo de transporte e caminho a ser seguido por cada usuário, de maneira que

estas escolhas fazem parte do conjunto de variáveis de decisão. Num sistema descritivo estas escolhas são feitas por cada usuário livremente, constituindo uma parcela das restrições do problema. Para ambos os tipos de sistema, a configuração da rede de transporte é resultado de escolhas da administração do sistema. As variáveis de decisão associadas a estas escolhas são as principais para um problema de rede ótima de transportes já que, geralmente, procuramos as modificações a serem realizadas na configuração da rede.

As variáveis de decisão descritas acima englobam as escolhas exercidas pela administração diretamente sobre a rede ou sobre os usuários no caso de um sistema normativo. No caso de um sistema descritivo, a administração pode se utilizar de alguns artifícios que influenciem o comportamento dos usuários. Estas escolhas, que não agem diretamente sobre a rede de transportes, formam um outro grupo de variáveis de decisão que em geral manipulam os preços para o uso da infraestrutura. Este trabalho, porém, não leva em conta este tipo de variáveis. Em síntese, dentro do contexto que analisamos o problema de otimização de redes de transportes, as variáveis de decisão estão agrupadas em duas classes distintas:

- a) As variáveis que determinam a configuração da rede.

A cada arco $(i,j) \in A$ está associada uma variável y_{ij} , elemento do vetor Y . Estas variáveis, em geral tomando apenas valores discretos, expressam a configuração de cada arco. A ca-

da possível configuração de um arco estão associadas características numéricas, como a capacidade do arco e o custo de viagem através dele, que determinam o nível do arco. A configuração da rede é expressa pelo vetor Y .

- b) As variáveis que determinam a alocação do tráfego na rede.

No Capítulo II deste trabalho, modelamos a infraestrutura de transportes através de uma rede de transportes. Neste modelo, o tráfego é representado pelo fluxo na rede. Quando tratamos com apenas uma classe de usuários e um modo de transporte, o fluxo em cada arco $(i,j) \in A$ é expresso pela variável x_{ij} , elemento do vetor X . No caso de várias classes de usuários de vários modos de transporte, x_{ij} é um vetor com um componente para cada fluxo distinto. Como preferimos expressar a rede de transportes através de uma formulação não-arco, as variáveis x_{ij} serão utilizadas, no caso normativo, como variáveis de decisão no problema de otimização, determinando a alocação de tráfego na rede. Estas variáveis não podem, porém, ser utilizadas diretamente na implantação da política indicada pela solução do problema de otimização. Isto será feito, através das variáveis que expressam o fluxo numa formulação arco-cadeia, que podem ser expressas a partir de uma transformação aplicada às variáveis x_{ij} . Após a aplicação da transformação obtém-se as variáveis x^{cab} que indicam o fluxo para cada caminho c , ligando a origem a ao destino b . Observe-se

que no caso descritivo, as variáveis x_{ij} são apenas variáveis auxiliares.

2. As Restrições

As restrições para o problema de programação matemática utilizado na formulação do problema de rede ótima estão divididas basicamente em três grupos:

i) Conservação de fluxo - São as restrições referentes à rede de transporte que expressam as leis de conservação de fluxo para uma determinada configuração. Assume-se que a função demanda fornece o número de viagens para cada relação de transportes, em função da configuração da rede e do fluxo que a atravessa, de modo que $x^{ab} = f^{ab}(X, Y)$. Estas restrições, introduzidas na seção 2.2. quando se supunha a existência de uma classe de usuários e um modo de transportes, estão resumidas da seguinte forma:

$$H(X, Y) = 0, X \geq 0, X \leq M(Y) ;$$

onde o vetor $M(Y)$, com componentes $m_{ij}(y_{ij})$, indica a capacidade dos arcos na configuração Y .

ii) Alocação de tráfego - Quando tratamos com um sistema descritivo o fluxo na rede deve obedecer a um princípio de alocação de tráfego que expressa o comportamento dos usuários. Pode-se exigir, por exemplo, que o fluxo determine o equilíbrio na rede obedecendo ao segundo princípio de Wardrop, co-

mo descrevemos em 2.4. Neste último caso teremos:

$$X = \text{Arg min}_x \left\{ \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx \mid H(X, Y) = 0, X \geq 0, X \leq M(Y) \right\}$$

onde o Arg min de um problema de programação matemática expressa a sua solução ótima. Representaremos estas restrições como:

$$W(X, Y) = 0$$

iii) Gerais - Para cada problema particular, a solução deve obedecer a algumas restrições particulares que dizem respeito às configurações permitidas para a rede. As restrições de orçamento constituem um exemplo bastante comum. Neste caso, a cada configuração está associado um custo total de investimento limitado superiormente. Estas restrições são apresentadas como:

$$G(X, Y) <, =, > 0$$

3. A função Objetivo

Dentro do contexto em que analisamos o problema de otimização de redes de transporte, o objetivo do problema é a minimização dos custos totais envolvidos na operação da rede. Outras considerações poderiam ser feitas abrangendo uma grande variedade de custos e benefícios sociais, resultando na definição da função objetivo como a maximização dos benefícios líquidos gerados pelo sistema de transportes para a sociedade como

um todo. Como a descrição detalhada de todas as características de uma função objetivo, que avalie completa e consistentemente todos os fatores envolvidos, foge ao escopo deste trabalho, consideraremos a função objetivo como a avaliação dos custos totais de operação da rede, incluindo:

- a) custos de viagem do usuário.
- b) custos de construção associados a cada configuração da rede.
- c) custos de manutenção da infra-estrutura de transportes.

A função objetivo resultante será $F(X,Y)$.

Em resumo, os problemas de programação matemática utilizados na formulação do problema de otimização de redes de transporte são os seguintes:

i) Sistema normativo:

$$\begin{array}{ll}
 & \min_{X,Y} F(X,Y) \\
 \text{(PN)} & \text{s.a.} \\
 & H(X,Y) = 0, \quad X \geq 0, \quad X \leq M(Y) \\
 & G(X,Y) >, =, < 0
 \end{array}$$

ii) Sistemas Descritivos:

$$\begin{array}{l}
 \text{Min } F(X,Y) \\
 \quad Y \\
 \text{(PD) s.a } H(X,Y) = 0, X \geq 0, X \leq M(Y) \\
 \quad W(X,Y) = 0 \\
 \quad G(X,Y) >, =, < 0
 \end{array}$$

Para os sistemas normativos include-se o fluxo como variável de decisão, e para os sistemas descritivos utiliza-se um grupo de restrições que expressam o princípio de alocação de tráfego.

3.3. Métodos de Solução

A finalidade desta seção é apresentar métodos de solução para o problema de otimização de redes de transportes. O desenvolvimento de métodos de solução para este problema tem sido objeto de atenção de muitos trabalhos sobre a aplicação de técnicas de programação matemática em problemas de planejamento de transportes. As referências [9] e [29] apresentam uma análise de alguns destes métodos de solução, que são, na maioria dos casos, desenvolvidos para formulações particulares do problema. Os algoritmos desenvolvidos levam em conta hipóteses especiais sobre a forma da função objetivo e da função demanda. A dificuldade de desenvolvimento de um algoritmo para a resolução deste problema de otimização está na necessidade de se manipularem redes de transporte de grandes dimensões, implicando em enormes dificuldades na elaboração e implementação do método de solução, mesmo sob as hipóteses mais simplificadas.

Quando um sistema normativo é tratado, surgem, como mostraremos abaixo, as versões mais simples do problema quanto à possibilidade de aplicação de técnicas de programação matemática. As restrições do problema para o caso normativo tomam uma forma bastante especial. As restrições da rede $H(X,Y) = 0$, $X \geq 0$, $X \leq M(Y)$ formam um conjunto de restrições lineares, se supomos que a capacidade de cada arco (i,j) é uma função linear $m_{ij}(y_{ij})$. As restrições $G(X,Y) <, = ,> 0$, na maior parte dos casos, envolvem apenas as variáveis Y , e podem

ser facilmente linearizadas. O problema para o caso normativo \bar{e} , portanto, um problema de programação mista com restrições lineares. Este problema poderia ser resolvido através dos métodos usuais de programação mista, após algumas hipóteses sobre a função objetivo. Todavia, a utilização destes métodos em redes de grande porte não constitui uma tarefa fácil, dado o grande número de restrições e, principalmente, o grande número de variáveis inteiras sempre que houver um número grande de arcos passíveis de alteração. Tomemos, por exemplo, a versão mais simples para o problema no caso normativo, quando valem as seguintes hipóteses:

- a) Não existem restrições de orçamento.
- b) As modificações na rede são caracterizadas pela inclusão de novos arcos, de modo que:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \text{ não é incluído na rede.} \\ 1 & \text{se } (i,j) \text{ é incluído na rede.} \end{cases}$$

- c) A função objetivo \bar{e} formada pela soma dos custos de construção e dos custos de viagem. O custo de viagem para cada usuário independe do fluxo através de cada arco.

Neste caso, o problema a resolver \bar{e} :

$$\min_{X,Y} F(X,Y) = \sum_{(i,j) \in A} (I_{ij} \cdot y_{ij} + t_{ij} \cdot x_{ij})$$

$$(PN1) \quad \text{s.a} \quad H(X,Y) = 0$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \leq m_{ij} \cdot y_{ij} \quad \text{para todo } (i,j) \in A;$$

onde I_{ij} é o custo de construção, e t_{ij} é o custo de viagem para o arco (i,j) . As restrições de capacidade são da forma $x_{ij} \leq y_{ij} \cdot m_{ij}$, de modo que não existe fluxo nos arcos não incluídos na rede. O problema acima é um caso especial do problema de multi-comodidades, com um custo inicial para cada variável x_{ij} . Embora este problema tenha sido longamente tratado na literatura de programação matemática, carece ainda de técnicas que possam tratá-lo eficientemente para redes de grande porte. Portanto, mesmo nos casos mais simples a utilização de técnicas de programação mista deve ser cercada de cuidados especiais, o que mostra as dificuldades encontradas, para a elaboração de um método de solução para um problema de otimização de redes de transporte.

A utilização de modelos descritivos é quase sempre considerada como uma alternativa mais realista na representação de um sistema de transportes. Com efeito, especialmente nos sistemas de transporte rodoviário, que constituem a preocupação principal deste trabalho, um modelo normativo não oferece um retrato adequado, ao contrário de sistemas envolvendo outros modos de transporte. No caso de um sistema descritivo, a formulação do problema não se presta tão facilmente à aplicação de técnicas de programação mista, como mostramos anteriormente para os sistemas normativos. Neste caso, a existência das restrições $W(X,Y) = 0$, que expressam o princípio de alocação de tráfego, encobrem um outro problema de otimização necessário para a obtenção do fluxo em equilíbrio para cada configuração da rede de transportes. A grande dificuldade no desenvolvimento de métodos de solução para o problema envolvendo um

sistema descritivo reside no fato de existirem na realidade duas funções objetivo, a função objetivo do problema, que pode incluir todos os custos de operação da rede, e uma função objetivo para o problema de equilíbrio, que diz respeito apenas aos custos de viagens dos usuários.

Portanto, para cada configuração proposta para a rede, o cálculo do fluxo envolve a resolução de um problema de otimização cuja função objetivo difere da função objetivo do problema de rede ótima. As dificuldades que os métodos de solução enfrentam ao tratar este fato podem ser expressas através de um exemplo bastante simples apresentado na referência [30]. Neste exemplo, a função objetivo do problema de rede ótima será a soma dos custos de viagem dos usuários, de modo que:

$$F = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$$

O fluxo ótimo é calculado de acordo com o princípio de Wardrop, através da resolução do problema de equilíbrio abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad F_1 &= \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx \\ \text{(PE)} \quad \text{s.a} \quad & H(X, Y) = 0 \\ & x \leq M(Y) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Tomemos como exemplo, a rede proposta na Fig.1, onde o nó 1 é a única origem, e o nó 4 é o único destino, com o fluxo $x^{1,4} = 6$. Examine-se, então, duas configurações para

rede, com e sem a presença do arco (2,3). Os valores das variáveis correspondem a:

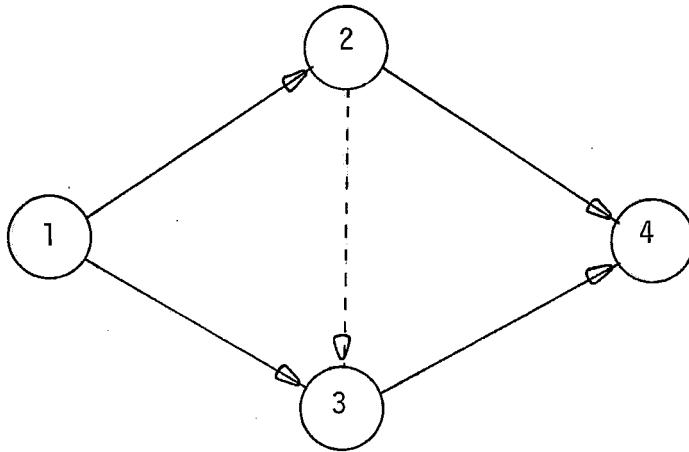


Fig 1. Rede exemplo

$y_{23} = 0$ ou $y_{23} = 1$, e $y_{12} = y_{13} = y_{24} = y_{34} = 1$ para ambos os casos. As funções para tempo de viagem em cada arco são as seguintes:

$$t_{12}(x, 1) = 40 + .5 x^4$$

$$t_{13}(x, 1) = 185 + .9 x^4$$

$$t_{24}(x, 1) = 185 + .9 x^4$$

$$t_{34}(x, 1) = 40 + .5 x^4$$

$$t_{23}(x, 1) = 15.4 + x^4$$

$$t_{ij}(x, 0) = \infty, \text{ o que equivale à retirada dos arcos da rede. Inicialmente, excluindo-se o arco (2,3), i.e.,}$$

$y_{23} = 0$, o fluxo ótimo do usuário, solução do problema (PE), será:

$$x_{12} = x_{13} = x_{24} = x_{34} = 3,$$

o que fornece o valor $F = 2034.4$ para a função objetivo do problema (PD). O custo de viagem para cada usuário será:

$$\bar{t} = 2030.4/6 = 338.40$$

Suponha agora, que o arco (2,3) é incluído na rede. Neste caso, o fluxo ótimo dos usuários será:

$$x_{12} = x_{34} = 4$$

$$x_{13} = x_{24} = 2$$

O valor da função objetivo é $F = 2204.4$, e o valor do custo de viagem para cada usuário será:

$$\bar{t} = 2204.4/6 = 367.4$$

Observe que a inclusão de um novo arco na rede aumenta o custo de viagem de cada usuário. Este fenômeno, em que a inclusão de arcos provoca um aumento no custo individual de cada viagem, é conhecido como o paradoxo de Braess, apresentado na referência [31]. Obviamente, não existe nenhuma contradição envolvida neste fenômeno aparentemente absurdo. Matematicamente, não se esperava que ocorresse o contrário, já que após a modificação da configuração da rede, o novo fluxo ótimo é obtido através da resolução do problema (PE), cuja função objetivo,

$$F_1 = \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx,$$

difere da função objetivo do problema (PD),

$$F = \sum_{(i,j) \in A} \bar{x}_{ij} \cdot t_{ij}(\bar{x}_{ij}, y_{ij}) ,$$

onde \bar{x}_{ij} é o fluxo em equilíbrio para a configuração Y . A aparente contradição resultante deste exemplo é estimulada pela forma especial da função objetivo do problema (PD), que inclue apenas os custos de viagem dos usuários. Quando trabalhamos com uma função objetivo mais completa, incluindo também os custos de construção e manutenção da rede, a observação entre a diferença dos objetivos do problema de rede ótima e do problema de equilíbrio é mais clara não levando a resultados aparentemente contraditórios. A finalidade da apresentação deste exemplo é ressaltar a dificuldade de escolha e avaliação de novas configurações para a rede. A impossibilidade de indicar se um conjunto de melhorias causará uma diminuição no valor da função objetivo do problema, sem antes resolver um problema de equilíbrio, caracteriza a natureza combinatória do problema de otimização de redes de transportes no caso descritivo. Os algoritmos de enumeração são os métodos de solução mais apropriados para este tipo de problema.

Neste capítulo apresentaremos, a seguir, alguns métodos de solução do problema de rede ótima no caso descritivo. Os algoritmos apresentados são, na maior parte dos casos, algoritmos de enumeração. A dificuldade fundamental a ser superada na elaboração destes métodos é de natureza computacional. Como a avaliação de cada configuração da rede implica na resolução do problema de equilíbrio, o número de configurações

examinadas fica limitado, tendo em vista os recursos computacionais disponíveis, a uma pequena parcela do número total de possibilidades. Sempre que tratamos com redes de grande porte, onde um grande número de arcos pode ser adicionado ou alterado, o obstáculo é evidente. As técnicas de solução que apresentamos estão divididas entre duas classes:

i) Algoritmos de Branch-and-Bound - São métodos de enumeração implícita que procuram limitar o número de configurações examinadas na busca da solução, utilizando limites superior inferior para a função objetivo. As técnicas para o cálculo destes limites são desenvolvidos especificamente para cada algoritmo.

ii) Algoritmos heurísticos - Como as técnicas de Branch-and-Bound não são capazes de resolver problemas para redes de grande porte, as soluções heurísticas são oferecidas como alternativa. Estes métodos procuram não a solução ótima, mas, a abáixo custo computacional, soluções sub-ótimas que satisfazam às exigências do contexto do problema.

As técnicas de solução apresentadas a seguir referem-se às versões particulares do problema de rede ótima em que cada método se aplica. Na maior parte dos casos estas técnicas são desenvolvidas para casos particulares supondo-se formas especiais para a função objetivo, funções de custo e funções de capacidade para os arcos.

3.4. Algoritmos Branch-and-Bound

3.4.1. Introdução

Sempre que as variáveis Y são consideradas discretas, como é o caso da maioria dos problemas de rede ótima, estamos diante de um problema de programação discreta. Quando trata-se de um sistema descritivo, a impossibilidade de aplicação de técnicas de programação inteira recomenda a utilização de métodos de enumeração para a resolução do problema. Os algoritmos apresentados nesta seção são algoritmos de enumeração implícita desenvolvidos para o problema de rede ótima, com as variáveis Y tais que $y_{ij} \in \{0,1\}$ corresponde à inclusão ou exclusão do arco na rede. Além desta suposição, cada método supõe diferentes particularidades para o problema, cada um tratando-o para diferentes funções objetivos, funções de custo para os arcos e restrições de orçamento.

Os métodos apresentados são, exceto o método de Ridley descrito em 3.4.2., algoritmos clássicos de Branch-and-Bound que podem sofrer algumas variações dependendo, principalmente, da heurística que determina a forma de exame da árvore de soluções. Descrições teóricas bastante claras das técnicas de Branch-and-Bound podem ser encontradas nas referências [32] e [33]. Todos os métodos apresentados nas subseções a seguir partilham, salvo indicação contrária, de um mesmo procedimento para a construção da árvore de Branch-and-Bound, i.e., a mesma

operação Branch. Cada nó z da árvore é caracterizado por uma solução parcial, onde o conjunto dos arcos da rede A é particionado em três subconjuntos:

$$A^0(z) = \{(i,j) \in A \mid y_{ij} = 0\}$$

$$A^1(z) = \{(i,j) \in A \mid y_{ij} = 1\}$$

$$A^L(z) = \{(i,j) \in A \mid y_{ij} \text{ é não especificado}\}$$

Sendo S o conjunto de soluções do problema (PD), apresentado em 3.2., a cada nó z da árvore de soluções está associado um subconjunto de soluções $S(z) = \{Y \in S \mid y_{ij} = 1 \text{ se } (i,j) \in A_1, y_{ij} = 0 \text{ se } (i,j) \in A_0\}$. A operação Branch, quando aplicada a um nó z , escolhe um arco $(i_1, j_1) \in A^L(z)$ e cria dois sucessores, z_0 e z_1 , dividindo o subconjunto $S(z)$ em dois outros subconjuntos, um associado a cada sucessor. Desta maneira temos que:

$$S(z_0) = \{Y \in S(z) \mid y_{i_1 j_1} = 0\}$$

$$S(z_1) = \{Y \in S(z) \mid y_{i_1 j_1} = 1\}$$

No desenvolvimento de cada método apresentado neste capítulo, constrói-se uma função $F^i(z)$, que indica para cada nó z um limite inferior para o valor da função objetivo sobre o subconjunto de soluções $S(z)$. Um limite superior F^S é determinado pelo valor da função objetivo para a melhor solução conhecida do problema a cada iteração do algoritmo como o cálculo $F^i(z)$ envolve o valor da função objetivo para uma determinada configuração \bar{Y} , de modo que $F^i(z) = F(\bar{Y})$, sempre que \bar{Y} é uma solução viável do problema e $F(\bar{Y}) < F^S$, o limite supe-

rior F^S pode ser atualizado e \bar{Y} armazenado como a melhor solução disponível. É sempre possível obter variações no procedimento de cada algoritmo através da utilização de diferentes heurísticas na escolha do nó ao qual será aplicada a operação Branch. As duas variações mais comuns surgem das seguintes heurísticas:

- i) Aplicar a operação Branch ao nó com menor limite inferior $F^i(z)$.
- ii) Aplicar a operação Branch ao último nó aberto na árvore de soluções.

No primeiro caso a solução ótima \bar{e} , em geral, alcançada mais rapidamente, porém, é necessário armazenar todos os nós ativos já abertos na árvore de soluções, juntamente com o valor de $F^i(z)$ para cada um deles. O procedimento geral que resulta da aplicação desta heurística pode ser resumido nos seguintes passos:

Passo 0 : Tornar ativo o primeiro nó da árvore de soluções. Calcular $F^i(z)$ para este nó. Fazer $F^S = \infty$ se não existe nenhuma solução inicial para o problema.

Passo 1 : Escolher entre os nós ativos aquele com o menor valor $F^i(z) < F^S$. Se não existe tal nó, parar, a solução ótima \bar{Y} foi encontrada.

Passo 2 : Aplicar a operação Branch para o nó z escolhido.

Calcular $F^i(z_k)$ para cada um dos sucessores de z .

Passo 3 : Para cada um dos sucessores z_k :

a) Testar se \bar{Y} tal que $F^i(z_k) = F(\bar{Y})$ é viável. Em caso afirmativo atualizar o limite superior F^S e armazenar a solução \bar{Y} se $F^S > F(\bar{Y})$.

b) Tornar ativo o nó z_k se $F^i(z) < F^S$.

Passo 4 : Voltar ao Passo 1.

No segundo caso procura-se obter o mais rapidamente possível novas soluções viáveis para o problema, em um procedimento que resulta em um algoritmo Branch-Backtrack. Como a escolha do nó ao qual será aplicada a operação Branch não exige o conhecimento do valor $F^i(z)$ para cada nó ativo da árvore de soluções, o valor do limite inferior, cujo cálculo exige algum esforço computacional, será calculado apenas para os nós expandidos, no momento da aplicação da operação Branch. Desta maneira a busca se dirige mais rapidamente à obtenção de novas soluções viáveis, além de evitar o armazenamento de quaisquer informações sobre os nós abertos. O procedimento resultante é o seguinte:

Passo 0 : Tornar ativo o primeiro nó da árvore de soluções.

Fazer $F^S = \infty$ se não existe nenhuma so-

lução inicial para o problema.

Passo 1 : Escolher o \bar{n} aberto mais recentemente.

Calcular $F^i(z)$ para este \bar{n} . Se não existem \bar{n} s abertos a solução \bar{Y} é ótima.

Passo 2 : Testar se \bar{Y} que $F^i(z) = F(\bar{Y})$ é viável. Em caso afirmativo atualizar o limite superior F^S e armazenar a solução \bar{Y} se $F^S > F(\bar{Y})$.

Passo 3 : Se $F^i(z) < F^S$ aplicar a operação Branch ao \bar{n} e adicionar os sucessores à lista dos \bar{n} s abertos.

Voltar ao Passo 1.

3.4.2. Método de Ridley

O algoritmo desenvolvido por Ridley na referência [34] não pode ser classificado como um método Branch-and-Bound. Todavia, este método de enumeração implícita introduz uma primeira tentativa para o estabelecimento de limites superior e inferior para o valor da função objetivo em um problema de rede ótima. O problema tratado pelo método é minimizar o custo total dos usuários em uma rede, investindo em um subconjunto de arcos. Estes investimentos incluem não apenas a inserção de novos arcos, mas também o melhoramento de arcos já existentes na rede. O número de arcos a serem melhorados é limitado superiormente, restrição que pode ser substituída por uma restrição de orçamento após pequenas modificações no algoritmo. A função de custo de viagem para cada usuário é considerada independente do tráfego que atravessa cada arco, dependendo apenas da realização ou não de modificações no arco. A alocação de tráfego é considerada descritiva. Todavia, como a função objetivo inclui apenas os custos de viagem de cada usuário, que são considerados constantes com o fluxo que atravessa os arcos, a alocação descritiva e normativa coincidem neste caso.

A formulação do problema é a seguinte:

$$\text{Min}_Y F =, \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$$

Sujeito a:

i) Restrições da rede $H(x) = 0$ com matriz 0/D cons-

tante $x \geq 0$.

ii) Princípio de Wardrop para a alocação de tráfego

$$x = \underset{x}{\operatorname{Argmin}} \left\{ \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx \right\}$$

$$\text{iii) } t_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = \begin{cases} a_{ij} - b_{ij} y_{ij} & (i,j) \in A \\ a_{ij} & (i,j) \in A - \bar{A}, \text{ on} \end{cases}$$

de a_{ij} e $b_{ij} \geq 0$ são constantes e \bar{A} é o conjunto de arcos passíveis de alteração. No caso de um trecho inicialmente inexistente, basta considerar a_{ij} como uma constante suficientemente grande.

iv) $y_{ij} \in \{0,1\}$ para $(i,j) \in \bar{A}$

v) $\sum_{(i,j) \in \bar{A}} y_{ij} \leq I^0$, limite para o número de arcos modificados.

O procedimento de Ridley procura os melhores conjuntos de melhorias na rede, variando, iterativamente, o número máximo de arcos modificados. Primeiramente, relaxando a restrição (v) do problema obtém-se o valor da função objetivo quando todos os arcos $(i,j) \in \bar{A}$ são melhorados. Este valor é expresso como:

$$F_{I_{\max}}, \text{ onde } I_{\max} = |\bar{A}|.$$

A seguir, resolve-se o problema, diminuindo-se o número de arcos modificados a cada iteração. A restrição (v) é substituída sucessivamente por:

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \leq m \quad \text{para} \quad m = I_{\max}^{-1}, \dots, I^0 + 1, I^0.$$

Observe-se que:

$$F_{I_{\max}} \leq \dots \leq \dots \leq F_{I^0} \quad , \text{ onde } F_m \text{ é o valor ótimo}$$

da função objetivo para cada uma das resoluções sucessivas do problema. Ridley apresenta um método para o cálculo de limites inferior e superior para F_m , depois de feitas as operações para o cálculo de F_{m+1} .

Sejam $\bar{A}_m \subset \bar{A}$ um conjunto de m arcos sujeitos a melhoria, e Y_m uma configuração da rede de maneira que:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \bar{A}_m \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin \bar{A}_m \end{cases} .$$

Neste caso, $F(Y_m) \geq F(Y_{m+1})$ sempre que $\bar{A}_m \subset \bar{A}_{m+1}$. O melhor limite inferior para $F(Y_m)$ que pode ser extraído desta relação é:

$$F^i(Y_m) = \max_{\bar{A}_{m+1} \supset \bar{A}_m} F(Y_{m+1}) .$$

Para o limite superior, F_m^s , utilizamos sempre o menor valor já calculado para $F(Y_m)$. Como valor inicial faz-se:

$$F_m^{S(0)} = \underset{\bar{A}_m}{\text{Min}} F^i(Y_m) .$$

De posse destes limites, a obtenção de cada $F_m = \underset{Y_m}{\text{Min}} F(Y_m)$ utiliza os limites de modo a evitar o cálculo de todos os valores $F(Y_m)$. O algoritmo resultante é o seguinte:

Passo 0 : Fazer $m = I_{\text{max}}$.

Passo 1 : Fazer $m = m-1$.

Passo 2 : Gerar todos os conjuntos \bar{A}_m e \bar{A} .

Passo 3 : Calcular $F^i(Y_m)$ para cada um dos conjuntos \bar{A}_m .

Passo 4 : Fazer $F_m^S = \underset{\bar{A}_m}{\text{Min}} F^i(Y_m)$. Com Y^* indicando a solução ótima.

Passo 5 : Fazer para cada conjunto \bar{A}_m .

Se $F^i(Y_m) < F_m^S$ então calcular $F(Y_m)$.

Se $F(Y_m) < F_m^S$ então fazer $F_m^S = F(Y_m)$ e $Y^* = Y_m$.

Passo 6 : Se $m = I^0$ parar. A solução ótima é Y^* .
Se não, voltar ao Passo 1.

Observe-se que para o cálculo de cada $F^i(Y_m)$ no Passo 3, devem ser conhecidos os valores $F(Y_{m+1})$. Para evitar todas estas avaliações da função objetivo, podem ser utilizados os valores $F^i(Y_{m+1})$ sempre que $F(Y_{m+1})$ não for conhecido da iteração anterior.

rior. Em consequência, um número maior de valores $F(Y_m)$ deve ser obtido no Passo 5. Durante a obtenção da rede ótima com I^0 modificações, são conhecidas as redes ótimas permitindo-se um maior número de modificações. Este pode ser um resultado útil na análise dos resultados.

3.4.3. Branch-and-Bound de Ochoa-Rosso e Silva

O primeiro dos algoritmos Branch-and-Bound a ser apresentado é o de Ochoa-Rosso e Silva descrito na referência [35]. Este método escolhe os arcos a serem inseridos na rede de modo a minimizar o custo total dos usuários.

A formulação do problema é a seguinte:

$$\text{Min}_Y F = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$$

Sujeito a:

- i) Restrições da rede $H(x)=0$, com a matriz O/D constante. $x \geq 0$, $x \leq M \cdot Y$, de modo que, só existe fluxo em um arco (i,j) se $y_{ij}=1$, quando M é uma constante suficientemente grande.
- ii) Princípio de Wardrop para a alocação de tráfego.

$$x = \underset{x}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx \right\}.$$
- iii) F é monotonamente decrescente com Y .
- iv) $y_{ij} \in \{0,1\}$.
- v) $\sum_{(i,j) \in A} I_{ij} \cdot y_{ij} \leq I$, I_{ij} é o custo de adição do arco (i,j) . I expressa o orçamento.

A restrição (iii) exige do problema certa regularidade. Quando consideramos uma função de custo $t_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = t_{ij}$, i.e., o custo de viagem para cada usuário é constante, esta condição é necessariamente satisfeita. Isto, porém, não é verdade em geral, como demonstra o exemplo que utilizamos como ilustração do paradoxo de Braess.

O algoritmo calcula para cada novo nó z aberto na árvore de Branch-and-Bound um limite inferior para as soluções contidas no subconjunto $S(z)$, fazendo todas as variáveis não especificadas $y_{ij}=1$. Desta maneira temos que:

$$F^i(z) = F(\bar{Y}) \quad \text{onde} \quad \bar{y}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \\ 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \quad A^L(z). \end{cases}$$

Observe-se que $F(Y) \geq F^i(z)$ para todo $Y \in S(z)$, pois F é estritamente decrescente. A cada novo nó aberto, examina-se se $S(z)$ contém alguma solução viável para o problema, anulando todas as variáveis não especificadas de modo que:

$$y_{ij}^* = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \quad A^L(z) \\ 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \end{cases}$$

Se Y^* não é uma solução viável, não existem soluções viáveis $S(z)$ e podemos tornar o nó z inativo. Observe-se que $F(Y^*)$ é um limite superior para o valor da função objetivo, que pode ser utilizado para atualizar F^S se não dispomos de outro va-

lor melhor. Como o cálculo do limite inferior para cada nó exige algum esforço computacional, pois envolve a resolução de um problema de alocação de tráfego, é conveniente evitar esta operação sempre que possível. Como a operação Branch é aplicada sempre sobre o nó de menor $F^i(z)$, então, no começo do processo basta escolher o nó com o conjunto $A^1(z)$ de maior cardinalidade, até que a restrição de orçamento seja violada. Em seguida calculam-se os valores $F^i(z)$ para os nós ativos, e continua-se o processo aplicando a operação Branch ao nó de menor limite inferior.

3.4.4. Branch-and-Bound de Chan

Um algoritmo bastante similar ao anterior é utilizado na referência [36]. O método minimiza o custo total de investimentos, impondo à configuração da rede um limite superior para o custo total dos usuários. A formulação do problema é a seguinte:

$$\text{Min}_Y \quad F = \sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \cdot I_{ij}$$

Sujeito a:

i) Restrições da rede $H(x)=0$, com a matriz O/D constante.

$$x \geq 0, \quad x \leq M \cdot Y.$$

ii) Princípio de Wardrop para a alocação de tráfego.

$$x = \text{Argmin}_x \left\{ \int_0^{x_{ij}} t(x, y_{ij}) dx \right\}$$

iii) $y_{ij} \in \{0,1\}$

$$\text{iv)} \quad \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t(x_{ij}, y_{ij}) \leq T$$

A árvore do Branch-and-Bound é desenvolvida de maneira idêntica à descrita em 3.4.1. Para cada nó z o limite inferior $F^i(z)$ é calculado, anulando-se as variáveis não especificadas. Deste modo temos que:

$$F^1(z) = F(Y) \quad \text{onde} \quad y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \\ 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \end{cases} \quad A^L(z)$$

Claramente, temos $F^1(z) \leq F(Y)$ para todo $Y \in S(z)$. A cada nó aberto z pode-se examinar a existência de soluções viáveis pertencentes ao subconjunto de soluções $S(z)$. Com efeito, basta calcular o custo total dos usuários quando fazemos as variáveis não especificadas iguais à unidade. O nó z é feito inativo sempre que:

$$T(Y) = \sum_{(i,j) \in A} \bar{x}_{ij} \cdot t(\bar{x}_{ij}, y_{ij}) > T \quad \text{onde } \bar{x}_{ij} \text{ é a}$$

solução do problema de alocação de tráfego quando:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \\ 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \end{cases} \quad A^L(z)$$

Além disto, devemos supor uma condição de regularidade para o custo total de viagem dos usuário. $T(Y)$ é considerada monotonamente decrescente com y_{ij} , condição idêntica à utilizada para a função objetivo no método descrito em 3.4.3.

Para evitar ao máximo as resoluções do problema de alocação de tráfego, Chan sugere uma atualização aritmética para o valor dos custos totais dos usuários. Sejam z_1 e z_0 os nós sucessores de um nó z . Deseja-se estabelecer um limite superior para $T(Y^1)$, onde Y^1 é tal que:



$$y_{ij}^1 = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z_1) \\ 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z_1) \end{cases} \quad A^L(z_1) .$$

Seja $(k,m) \in A^L(z)$ o n̄o envolvido na operaç̃ão Branch que resultou nos novos n̄os z_1 e z_0 . Entã, temos que:

$T(Y_1^1) \leq T(Y) - \bar{x}_{km} \cdot (t_{km}(\bar{x}_{km}, 1) - t_{km}(\bar{x}_{km}, 0))$ onde \bar{x}_{km} corresponde ao fluxo õtimo obtido para o cãlculo de $T(Y)$. A expressã ã esquerda da desigualdade avalia o novõ total dos usuãrios, se não houve modificações na alocaçã de trãfego apõs a modificaçã do arco (k,m) . Este limite superior pode ser utilizado na verificaçã de viabilidade do conjunto de soluções $S(z_1)$. Todavia, como limite não ã muito forte, o processo tende a se deteriorar com a sua utilizaçã sucessiva.

3.4.5. Branch-and-Bound de Scott

A referência [37] apresenta um algoritmo para o problema rede ótima em uma versão bastante particular. Trata-se de obter o conjunto de arcos que, construídos, minimizam a soma dos custos de viagem dos caminhos de custo mínimo ligando cada par Origem/Destino, satisfazendo a uma restrição de orçamento. Este problema pode, naturalmente, ser formulado como um caso particular do problema (PD), bastando para isto fazer $x^{ab} = 1$ para todo $ab \in R$. Constrói-se, então, uma função objetivo que expressa o custo total de viagem dos usuários, que neste caso iguala a soma dos custos através dos caminhos mínimos. A formulação do problema é a seguinte:

$$\text{Min}_Y \quad F = \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeito a:

- i) Restrições da rede $H(x) = 0$ com a matriz O/D tal que, $x^{ab} = 1$ para todo $ab \in R$. $x \geq 0$ e $x \leq M$. Y de modo que um arco só pode ser utilizado se $y_{ij} = 1$.
- ii) Princípio de Wardrop. Neste caso, corresponde ao cálculo dos caminhos mais curtos ligando aos pares Origem/Destino.
- iii) $t_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = t_{ij}$ constante.
- iv) $\sum_{(i,j) \in A} I_{ij}(y_{ij}) \leq I$, restrição de orçamento.

v) $y_{ij} \in \{0,1\}$ para $(i,j) \in A$

Observe-se que na situação acima, a função objetivo é monotonamente decrescente com Y , i.e., $Y_1 > Y_2$ implica em $F(Y_1) \leq F(Y_2)$. O fenômeno descrito no paradoxo de Braess não é possível neste caso, pois, como o custo de viagem é constante para cada arco, a função objetivo do problema coincide com aquela do equilíbrio. Com efeito, este problema pode ser considerado como um problema de rede ótima no caso normativo, pois não existe entre a alocação normativa e descritiva.

A árvore de soluções do problema é construída de maneira que, a cada nó z está associado um conjunto de arcos $A(z)$ excluídos da rede, i.e., a cada nó está associado um subconjunto de soluções $S(z) = \{Y \in S \mid y_{ij} = 0 \text{ se } (i,j) \in A(z)\}$ onde S é o conjunto de soluções do problema. O nó z_0 origem da árvore é definido pela inclusão de todos os arcos, i.e., $A(z_0) = \emptyset$ e $S(z_0) = S$. Os sucessores de um determinado nó z são gerados com a exclusão de mais um arco da rede. Para que não haja mais de um nó representando o mesmo subconjunto de soluções os sucessores de cada nó devem ser escolhidos de maneira especial. Suponhamos que o conjunto de arcos A está ordenado de modo que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Então, se o nó z é tal que $A(z) = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ com $i_k > i_{k-1} > \dots > i_1$, os sucessores de z , que resultam da exclusão de cada um dos arcos com ordem superior a i_k , são os seguintes: $z_{i_{k+1}}, \dots, z_m$ com $A(z_i) = A(z) \setminus \{a_i\}$. Sempre que $a_m \in A(z)$ não existem sucessores de z .

Na árvore de soluções estão representadas todas

as configurações possíveis para a rede. Destas, são configurações viáveis aquelas que satisfazem a restrição (iv) do orçamento, e são degeneradas aquelas em que não é possível a obtenção de caminhos ligando cada par Origem/Destino. Estas últimas são claramente não ótimas.

Para cada nó z aberto na árvore de soluções o limite inferior para o valor da função objetivo para as soluções contidas no subconjunto $S(z)$ é calculado como:

$$F^i(z) = F(Y(z)) \text{ onde } y_{ij}(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A(z) \\ 1 & \text{se } (i,j) \notin A(z) \end{cases}$$

Este é um limite válido, pois $F(Y)$ é monotonamente decrescente.

O algoritmo é iniciado com o nó z origem da árvore de soluções, com $A(z_0) = \emptyset$. A cada nó z selecionado, obtêm-se seus sucessores z_1, \dots, z_n pela operação Branch, e calcula-se para cada um deles os limites inferiores $F^i(z_i)$. Para cada sucessor z_i obtido, examina-se a configuração da rede utilizada para o cálculo de $F^i(z_i)$. Se esta configuração é viável o limite superior é atualizado sempre que $F^i(z_i) < F^S$. Neste caso, o nó z_i é feito inativo, pois a solução $Y(z_i)$ é tal que $F(Y(z_i)) = \min_{Y \in S(z_i)} F(Y)$ não havendo necessidade de exame dos nós sucessores de z_i . Aplica-se, também, a cada nó z_i aberto pela operação branch, o teste usual do método Branch-and-Bound, tornando inativos os nós em que $F^S < F^i(z_i)$.

A referência [37] apresenta este método em um caso particular, como um algoritmo Branch-and-Backtrack, onde

o nó selecionado para a aplicação da operação Branch é sempre o último nó ativo obtido. Como neste caso tenta-se obter novas soluções viáveis o mais rapidamente possível, é conveniente retardar-se o cálculo do limite inferior para um nó, realizando-se a operação apenas no momento em que o nó é selecionado para a aplicação da operação Branch, ao invés de realizá-la no momento que o nó é adicionado à árvore como resultado de uma operação Branch anterior.

3.4.6. Branch-and-Bound de Hoang Hai Hoc

O algoritmo desenvolvido na referência [38] destina-se à solução do problema de rede ótima quando deseja-se minimizar a soma dos custos dos caminhos mínimos ligando cada par de nós, satisfazendo a uma restrição de orçamento. A formulação do problema, já apresentada em 3.4.3., é a seguinte:

$$\text{Min}_Y \quad F = \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeito a:

- i) Restrições da rede $H(x) = 0$ com a matriz O/D com $x^{ab} = 1$. $x \geq 0$ e $x \leq M.Y$ de modo que um arco só pode ser utilizado se $y_{ij} = 1$.
- ii) Princípio de Wardrop.
- iii) $t_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) = t_{ij}$ constante.
- iv) $\sum_{(i,j) \in A} I_{ij}(y_{ij}) \leq I$ restrição de orçamento.
- v) $y_{ij} \in \{0,1\}$ para $(i,j) \in A$.

Este método utiliza a construção da árvore Branch-and-Bound descrita 3.4.1. O limite inferior que cada nó aberto pela operação Branch é calculado utilizando-se valores fornecidos pela configuração da rede resultante da inclusão de todos os arcos. O método para este cálculo de limites inferiores está baseado nas considerações teóricas abaixo.

Consideremos para cada arco $(i,j) \in A$ a configuração da rede indicada por Y^{ij} tal que as componentes de Y^{ij} são:

$$y_{km} = \begin{cases} 0 & \text{se } (k,m) = (i,j) \\ 1 & \text{se não} \end{cases}$$

o que corresponde à inclusão de todos os arcos exceto (i,j) . Considere-se também, $Y^0 = (1,1,\dots,1)$ que caracteriza a configuração da rede quando todos os arcos são incluídos. Neste caso, define-se

$$\Delta f_{ij} = S_{ij} - t_{ij}$$

onde S_{ij} é o custo do caminho mais curto de i para j quando a configuração da rede é representada por Y^{ij} , e t_{ij} é o custo de viagem através do arco (i,j) .

Δf_{ij} é a diferença de custo entre o menor e o segundo menor caminho ligando i e j , quando consideramos a rede com todos os arcos incluídos. Claramente, $F(Y^{ij}) \geq F(Y^0) + \Delta f_{ij}$.

A partir daí apresentamos os seguintes Lema e Teorema, introduzidos e demonstrados na referência [38], os quais utilizaremos no desenvolvimento de um limite inferior a ser utilizado no método Branch-and-Bound:

Lema: Seja $(i,j) \in A$ tal que $y_{ij}^1 = 1$. Sejam Y^1 e Y^2 tais que

$$y_m^2 = \begin{cases} y_m^1 & \text{se } (,m) \neq (i,j) \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \quad . \text{Então}$$

$$F(Y^1) \geq F(Y^2) + \Delta f_{ij} .$$

Teorema 1: Seja Y uma configuração da rede $G = (N,A)$ então $F(Y) \geq F(Y^0) + \sum_{(i,j) \in A} (1-y_{ij}) \cdot \Delta f_{ij}$

Para cada nó z na árvore de Branch-and-Bound, o limite inferior para as soluções $YCS(z)$ podem ser obtidos com a utilização do teorema 1. Desta maneira um limite inferior $F^i(z)$ pode ser calculado, de modo que:

$$F^i(z) = \text{Max}_{Y \in S(z)} (F(Y^0) + \sum_{(i,j) \in A} (1-y_{ij}) \cdot \Delta f_{ij})$$

Reescrevendo o problema explicitamente temos:

$$\text{Max}_Y F = \sum_{(i,j)} y_{ij} \cdot \Delta f_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \cdot i_{ij} \leq I$$

$$(P1) \quad \begin{aligned} y_{ij} &= 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \\ y_{ij} &= 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \\ y_{ij} &\in \{0,1\} & \text{se } (i,j) \in A^L(z). \end{aligned}$$

Como a solução do problema (P1) apresenta problemas computacionais devidas às variáveis inteiras, $F^i(z)$ pode ser calculado a

partir da solução do problema (P2) obtido de (P1), quando supomos as variáveis y_{ij} contínuas.

$$\text{Max}_Y F = \sum_{(i,j)} y_{ij} \cdot \Delta f_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \cdot i_{ij} \leq I$$

$$(P2) \quad \begin{aligned} y_{ij} &= 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \\ y_{ij} &= 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \\ 0 \leq y_{ij} &\leq 1 & \text{se } (i,j) \in A^L(z) \end{aligned}$$

Seja \bar{Y}_1 e \bar{Y}_2 as soluções ótimas de (P1) e (P2), respectivamente, para um dado nó z da árvore do Branch-and-Bound. Para todo $Y \in S(z)$ pelo Teorema 1 temos que:

$$F(Y) \geq F(Y^0) + \sum_{(i,j) \in A} (1 - y_{ij}) \cdot \Delta f_{ij}, \text{ como}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \cdot \Delta f_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in A} \bar{y}_{ij}^1 \cdot \Delta f_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in A} \bar{y}_{ij}^2 \cdot \Delta f_{ij} \text{ para todo}$$

$Y \in S(z)$, temos que:

$$F(Y) \geq F(Y^0) + \sum_{(i,j) \in A} (1 - y_{ij}) \cdot \Delta f_{ij} = F^1(z).$$

3.4.7. Branch-and-Bound de Leblanc

Este algoritmo foi desenvolvido na referência [30] para solução de um problema de otimização de redes de transporte, no caso descritivo, quando devem ser escolhidos novos arcos para a rede. A função objetivo inclui os custos de viagem do usuário, e a função de custo para cada arco não é suposta linear como na maioria dos métodos apresentados anteriormente. O problema está formulado da seguinte maneira:

$$\text{Min}_Y F = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$$

sujeito a:

- i) Restrições da rede $H(x) = 0$ com a matriz O/D constante. $x \geq 0$, $x \leq M \cdot Y$ de modo que um arco só pode ser utilizado se $y_{ij} = 1$, quando n é uma constante suficientemente grande.
- ii) Princípio de Wardrop para a alocação de tráfego.

$$x = \underset{x}{\text{Argmin}} \left\{ \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx \right\}.$$

- iii) $t_{ij}(x_{ij})$ é monotonamente crescente.
- iv) $y_{ij} = 1$ se $(i,j) \in A^*$, conjunto de arcos iniciais.
 $y_{ij} \in \{0,1\}$ se $(i,j) \in \bar{A}$, conjunto de arcos adicionados.

$$v) \sum_{(i,j) \in \bar{A}} I_{ij} \cdot y_{ij} \leq I, \text{ restrição de orçamento.}$$

Para cada novo nó z adicionado à árvore de Branch-and-Bound pela operação Branch descrita em 3.4.1., a forma mais imediata para o cálculo de um limite inferior para a função objetivo em $S(z)$ seria o mesmo método sugerido pelo Branch-and-Bound de Ochoa-Rosso e Silva, i.e., fazem-se as variáveis não especificadas $y_{ij} = 1$, adicionando-se os arcos $(i,j) \in A^L(z)$ à rede de transporte. Após o cálculo do fluxo em equilíbrio para a configuração resultante, obtem-se o valor da função objetivo, utilizado como limite inferior. Todavia, como não se exige aqui nenhum comportamento especial para a função objetivo $F(Y)$, e as funções de custo de viagens para cada arco,

$t_{ij}(x_{ij}), (i,j) \in A$, não são assumidas constantes, o paradoxo de Braess apresenta um contra-exemplo claro para o limite inferior calculado da maneira acima. Naturalmente, sempre que as funções $t_{ij}(x_{ij})$ forem constantes, e a função objetivo

$$F = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}) \text{ incluir apenas os custos de viagem}$$

do usuário não será necessário o estabelecimento de um novo método para o cálculo do limite inferior. Neste caso, a função objetivo do problema será idêntica à função objetivo

$$F = \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x) dx \text{ utilizada no cálculo do equilíbrio}$$

na rede, incluindo o problema no caso normativo.

O limite inferior $F^i(z)$ deve subestimar o valor da função objetivo para o subconjunto de soluções $S(z)$, i.e.,

$F^1(z)$ é um limite inferior para a solução do problema:

$$\text{Min}_{Y \in S(z)} F = \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij})$$

(P1) s.a (i),(ii),(iii),(iv),(v)

O método para o cálculo deste limite inferior é indicado pelo seguinte lema:

LEMA: Para todo nó z na árvore do Branch-and-Bound, a solução ótima de (P1) é maior ou igual à solução ótima do problema (P2) que substitui o problema (P1) se supomos o sistema normativo.

$$\begin{aligned} \text{(P2)} \quad \text{Min}_{X,Y} F &= \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}) \\ \text{s.a} \quad &(i),(iii),(iv),(v) \text{ e } Y \in S(z) \end{aligned}$$

Outrossim, a solução ótima de (P2) é maior ou igual à solução ótima do problema (P3) que surge de (P2) com adição à rede de todos os arcos $(i,j) \in A^L(z)$.

$$\begin{aligned} \text{(P3)} \quad \min_x F &= \sum x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}) \\ \text{s.a} \quad &(i),(iii), (iv), \\ &y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \in A^0(z) \\ 1 & \text{se } (i,j) \in A^1(z) \end{cases} \quad A^L(z) \end{aligned}$$

A prova deste lema pode ser encontrada na referência |30|. O valor do limite inferior $F^i(z)$ é igualado ao valor ótimo da função objetivo do problema (P3), que constitui um problema de alocação normativa de tráfego.

A referência |30| narra a experiência computacional resultante da aplicação deste algoritmo. O problema resolvido constava da adição de novos arcos a uma rede rodoviária com 24 nós, todos considerados origens e destinos de tráfego. A configuração inicial da rede incluía 32 arcos, e a função de custo de viagem de um usuário através de cada arco era da forma:

$$t_{ij}(x) = a + bx^4.$$

Foram considerados 5 novos arcos para adição, com um total de 32 possíveis combinações. Este problema de pequenas dimensões foi resolvido rapidamente em um processo que exigiu o cálculo de 15 limites inferiores, e a resolução de 17 problemas de alocação de tráfego, necessárias às avaliações da função objetivo.

3.5. Algoritmos Heurísticos

3.5.1. Introdução

A aplicação das técnicas de Branch-and-Bound na resolução de problemas de investimentos em transportes enfrenta um grave obstáculo: a eficiência computacional. Os métodos apresentados na seção anterior encontram a solução ótima em um número finito de passos, oferecendo a cada iteração uma solução viável sub-ótima além de limites superior e inferior para o valor ótimo da função objetivo. Todavia, embora estes métodos Branch-and-Bound constituam algoritmos de enumeração matematicamente claros, elegantes e capazes de tratar o problema nas suas formulações mais complexas, não é possível a obtenção de resultados eficientes no trato de problemas de grande porte. Com efeito, só existem referências à aplicação de tais algoritmos a redes com 20 ou 30 nós. A utilização destes métodos, quando tratam-se de redes de grande porte, é proibitiva dado o grande número de cálculos do custo total de viagem dos usuários, operação que inclui a resolução de um problema de alocação de tráfego. Isto acontece devido à deficiência dos limites inferiores e superiores utilizados pelos algoritmos, que obrigam o exame e armazenamento de um grande número de soluções parciais, exigindo recursos de computação que crescem com o tamanho da rede a ser analisada.

O desenvolvimento de técnicas heurísticas pa-

ra a solução de problemas de otimização de redes de transporte é extremamente importante, na medida em que o trato de redes de grande porte é comum na maioria das ocorrências práticas do problema. Os métodos heurísticos abandonam a busca da solução ótima, procurando apenas uma solução sub-ótima que passa ser alcançada com a utilização de recursos limitados de computação. Com este fim, estes métodos se utilizam de versões simplificadas do problema, fruto da linearização da função objetivo, da relaxação da restrição de valores inteiros para algumas variáveis ou do abandono da interdependência dos efeitos dos projetos. Os algoritmos heurísticos de enumeração procuram aproveitar as ferramentas desenvolvidas para as técnicas de Branch-and-Bound, utilizando os métodos de cálculo de limites inferior e superior associados à regras simplificadas de busca na árvore de soluções. Nas próximas seções apresentamos algumas técnicas desenvolvidas para atender à necessidade de resolução de problemas de otimização de redes de grande porte, dentro de recursos razoáveis de computação.

3.5.2. Seleção dos Melhores Projetos Segundo a Razão Benefício/Custo

Uma das técnicas heurísticas mais utilizadas em problemas de investimentos em redes de transportes consiste em selecionar os projetos mais promissores ordenados segundo a razão Benefício/Custo. Esta razão é calculada supondo-se a independência dos projetos, e uma variação contínua para a configuração de cada arco. A formulação do problema é a seguinte:

$$\text{Min}_Y z(Y) = \sum_{(i,j) \in A} I_{ij}(y_{ij}) + x_{ij} \cdot t_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$$

sujeito a:

(P1) i) Restrições da rede $H(x) = 0$ com a matriz O/D constante. $x \geq 0$, $x \leq M(Y)$ de modo que a capacidade de cada arco (i,j) depende da configuração expressa pela variável y_{ij} .

ii) Princípio de Wardrop para a alocação de Tráfego:

$$x = \arg\left\{ \text{Min}_x \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x, y_{ij}) dx \right\}$$

$$\text{iii) } \sum_{(i,j) \in A} I_{ij}(y_{ij}) \leq I$$

$$\text{iv) } 0 \leq y_{ij} \leq y_{ij}^* \quad \text{para } (i,j) \in A$$

O método de solução despreza as modificações na alocação de tráfego resultantes das modificações no nível dos arcos. Desta for

ma, utiliza-se o fluxo $x^{(1)}$ obtido como solução do problema de alocação de tráfego para a configuração inicial da rede, e ignorando todas as restrições, obtemos então o seguinte problema:

$$(P2) \quad \text{Min}_Y \quad z(Y) = \sum_{(i,j) \in A} I_{ij}(y_{ij}) + x_{ij}^{(1)} \cdot t_{ij}(x_{ij}^{(1)}, y_{ij})$$

Assumindo que $z(y)$ é diferenciável com relação a y_{ij} , a condição de mínimo para (P1) é satisfeita quando:

$$\frac{\partial z}{\partial y_{ij}} = 0 \quad \text{para todo } (i,j) \in A$$

ou

$$\frac{dz_{ij}}{dy_{ij}} = 0 \quad \text{para todo } (i,j) \in A \quad \text{onde}$$

$$z_{ij}(y_{ij}) = I_{ij}(y_{ij}) + x_{ij}^{(1)} \cdot t(x_{ij}^{(1)}, y_{ij}).$$

Se supomos que $z_{ij}(y_{ij})$ é convexa então:

$$\frac{dz_{ij}}{dy_{ij}} < 0 \quad \text{se } y_{ij} < \bar{y}_{ij} \quad , \quad \text{onde } \bar{Y} \text{ é a solução ótima}$$

do problema (P2). Isto significa que deve-se investir no arco (i,j) enquanto $\frac{dz_{ij}}{dy_{ij}} < 0$ ou, explicitamente:

$$\frac{dI_{ij}}{dy_{ij}} + x_{ij}^{(1)} \frac{dt_{ij}}{dy_{ij}} < 0 \quad \text{ou}$$

$$r_{ij} = \frac{-x_{ij}^{(1)} \frac{dt_{ij}}{dy_{ij}}}{\frac{dI_{ij}}{dy_{ij}}} > 1 \quad \text{onde}$$

r_{ij} é chamado razão Benefício/Custo. Uma solução para o problema (PI) pode ser obtida investindo-se nos arcos com maior r_{ij} até que a restrição de orçamento seja violada. Quando as variáveis y_{ij} são inteiras um processo semelhante pode ser utilizado calculando-se a razão Benefício/Custo através dos incrementos das funções t_{ij} e I_{ij} .

São claros os perigos da utilização deste método. Primeiramente, qualquer mudança no fluxo ótimo X após as modificações na rede pode invalidar totalmente os resultados obtidos. Além disto, quando as variáveis y_{ij} são restritas a valores inteiros, a solução oferecida não é ótima mesmo se a alocação de tráfego não se altera com as alterações na configuração da rede.

3.5.3. Método de Barbier

ra minimização dos custos de investimento e viagem, que oferece soluções razoáveis em tempos relativamente baixos, mesmo para grandes redes, segundo informações fornecidas pela referência [9]. O algoritmo procura, iterativamente, novas configurações a partir de uma configuração inicial, através da inclusão e deleção de arcos. A análise dos efeitos das modificações na rede é feita utilizando-se o fluxo ótimo obtido pela resolução do problema de alocação de tráfego para a configuração da rede que inicia de cada iteração. O problema é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Min}_Y F = \sum_{(i,j) \in A} I_{ij} \cdot y_{ij} + x_{ij} \cdot t(y_{ij})$$

sujeito a:

i) Restrições da rede de transportes $H(x) = 0$
com a matriz O/D constante.

$$x \geq 0$$

ii) Princípio de alocação de tráfego:

$$x = \arg\left\{\min_x \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(y_{ij}) dx\right\}$$

iii) $y_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $(i,j) \in A$

iv) supõe-se que $t_{ij}(1) \leq t_{ij}(0)$ para todo $(i,j) \in A$

Observemos que os custos de viagem t_{ij} são independentes do fluxo que atravessa o arco. Não existe restrição de orçamento, e o custo de melhoria em um arco (i,j) é expres-

so por I_{ij} . Quando $y_{ij} = 0$ corresponde à exclusão do arco da rede, o fluxo no arco (i,j) é forçado a tomar o valor $x_{ij} = 0$ através do custo de viagem $t_{ij}(0) = \infty$, já que os arcos não possuem uma capacidade explícita.

O método de solução corresponde à execução iterativa do procedimento abaixo.

Passo 1 - Calcular $x^{(1)} = \underset{x}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^{x_{ij}^{(1)}} t_{ij}(y_{ij}^{(1)}) dx \right\}$ com $y_{ij}^{(1)} = 1$ para todo $(i,j) \in A$.

Passo 2 - Tenta-se minimizar a função objetivo desviando por caminhos alternativos o fluxo de cada arco. Obtem-se um novo fluxo $x^{(2)}$, através da resolução de um problema de alocação de tráfego para a rede onde todos os nós tais que $(i,j) \in A$ são considerados origens e destinos. A matriz Origem/Destino da nova rede é constituída a partir do fluxo $x^{(1)}$ fazendo $x_{ij}^{(2)} = x_{ij}^{(1)}$. A nova configuração da rede é obtida fazendo-se:

$$y_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{se } x_{ij}^{(2)} = 0 \\ 1 & \text{se } x_{ij}^{(2)} > 0 \end{cases} \quad \text{para todo } (i,j) \in A$$

O fluxo $x^{(2)}$ obtido é uma solução aproximada de um problema de alocação de tráfego para a nova rede, com a função objetivo incluindo os custos de investimento e os custos de viagem.

A alocação é feita da seguinte maneira:

a) Fazer $x_{ij}^{(2)} = 0$ e $y_{ij}^{(2)} = 0$ para todo $(i,j) \in A$

b) Para cada $(i,j) \in A$ procurar o caminho \bar{u} ligando i e j , solução de:

$$\text{Min}_{u \in G^{ij}} \sum_k \{I_k (1-y_k^{(1)}) + t_k (y_k^{(2)}) \cdot x_{ij}^{(1)}\}, \text{ onde}$$

G^{ij} é o conjunto dos caminhos que ligam i e j na rede.

Para cada $(k,m) \in \bar{u}$ fazemos :

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} + x_{ij}^{(1)}$$

$$y_k^{(2)} = 1$$

Passo 3 - Calcular $x^{(3)} = \text{Argmin}_x \left\{ \int_0^{x_{ij}^{(3)}} t_{ij}(y_{ij}^{(2)}) dx \right\}$.

Fazer $x^{(1)} = x^{(3)}$, $y^{(1)} = y^{(2)}$ e voltar para o passo 2.

O procedimento se repete até que as mudanças na função objetivo não justifiquem a sua continuação. Claramente, a ordem de exame dos arcos para a realocação de tráfego no Passo 2 influencia na obtenção do fluxo $x^{(2)}$. Pode-se observar que depois que um investimento é feito em um arco, existe uma tendência de realocar pequenos fluxos por caminhos que incluem este arco. Por esta razão, recomenda-se que a realocação de tráfego no Passo 2 examine primeiro os arcos com maiores fluxos $x_{ij}^{(1)}$. Desta forma, os fluxos maiores, cuja realocação reúne maiores possibilidades de induzir novos investimentos, são examinados inicialmente, e a realocação de pequenos fluxos será feita quando todos os investimentos prováveis nesta iteração já foram feitos.

A referência [9] apresenta uma extensão do método de

Barbier, onde procura-se minorar a dependência da ordem de exame dos arcos na realocação de tráfego. A idéia é partilhar o custo de melhoria de um arco entre os vários fluxos já realocados por caminhos que o utilizam. Desta maneira, a realocação será feita através da solução do problema

$$\text{Min}_{u \in C^{ij}} z = \sum_{(km) \in u} \{ I_k(y_{ij}^{(2)}) \cdot \frac{x_{ij}^{(1)}}{x_{ij}^{(1)} + x_{km}^{(2)}} + t_{km}(y_k^{(2)}) \cdot x_{ij}^{(1)} \}$$

Outra possibilidade, é dividir o custo de investimento entre todos os fluxos que, provavelmente, serão realocados através de caminhos que incluem o arco, utilizando neste cálculo, as informações contidas no fluxo $x^{(1)}$. Desta maneira temos:

$$\text{Min}_{u \in C^{ij}} z(u) = \begin{cases} \sum_{km \in u} \{ I_{km}(y_{km}^{(2)}) \cdot \frac{x_{ij}^{(1)}}{x_{ij}^{(1)} + x_{km}^{(2)} + \alpha x_{km}^{(1)}} + t_{km}(y_{km}^{(2)}) \cdot x_{ij}^{(1)} \} & \text{para } u \neq (i,j) \\ I_{ij}(y_{km}^{(2)}) \cdot \frac{x_{ij}^{(1)}}{x_{ij}^{(1)} + x_{ij}^{(2)}} + t_{ij}(y_{ij}^{(2)}) \cdot x_{ij}^{(1)} & \text{para } u = (i,j) \end{cases}$$

onde α é uma constante fixada a priori, $0 \leq \alpha \leq 1$.

3.5.4. Método de Steenbrink

Um novo método é apresentado na referência [9] para resolução de problemas de investimentos em transportes para sistemas normativos, com possibilidade de aplicação a sistemas descritivos, como foi aplicado ao caso prático descrito na mesma referência. Esta técnica exige que as variáveis que determinam a configuração de cada arco, expressando a capacidade do arco, sejam contínuas. A função objetivo pode tomar formas bastante variadas. Embora a solução ótima só possa ser estabelecida para uma função objetivo convexa, soluções sub-ótimas podem ser obtidas no caso de funções não convexas. O procedimento consiste na decomposição do problema original em um conjunto de sub-problemas, e um problema mestre. Cada sub-problema fornece a relação entre a dimensão ótima do arco e o fluxo que o atravessa. O problema mestre toma a forma de um problema de alocação de tráfego, que é resolvido através de um método incremental de alocação. A característica mais importante do método reside no pequeno tempo de computação necessário, já que apenas uma alocação de tráfego é feita durante o procedimento.

O problema é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Min}_{Y, X} F = \sum_{(i,j) \in A} F_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$$

sujeito a:

i) Restrições da rede de transportes $H(X, Y) = 0$

com a matriz O/D constante. $X \leq Y$, fixando a capacidade de cada arco.

$$\text{ii) } y_{ij}^{\min} \leq y_{ij} \leq y_{ij}^{\max} \quad \text{para todo } (i,j) \in A$$

O problema é decomposto em um problema mestre e $m = |A|$ subproblemas:

i) Subproblemas:

$$\text{Min}_{y_{ij}} F_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) \quad \text{para todo } (i,j) \in A$$

$$\text{sujeito } \tilde{a}: y_{ij}^{\min} \leq y_{ij} \leq y_{ij}^{\max}$$

A solução dos subproblemas fornece a relação entre o valor mínimo da função objetivo em cada arco e o fluxo que atravessa o arco, expressa pela função

$$F_{ij}^{\min}(x_{ij}) = \text{Min}_{y_{ij}^{\min} \leq y_{ij} \leq y_{ij}^{\max}} F_{ij}(y_{ij}, x_{ij}).$$

Estes subproblemas são, em geral, facilmente resolvíveis. Tome-se, por exemplo, o caso em que a função objetivo inclui apenas os custos de investimentos no arco e o custo de viagem dos usuários. Neste caso,

$$F_{ij}(y_{ij}, x_{ij}) = I_{ij}(y_{ij}) + t_{ij}(x_{ij}, y_{ij}) \cdot x_{ij}.$$

Suponha que:

- o arco (i,j) não existe inicialmente.
- os projetos correspondam à construção do arco com diferen-

tes capacidades, y_1, y_2, y_3 . A função $I_{ij}(y_{ij})$ toma a forma indicada na Fig 1.

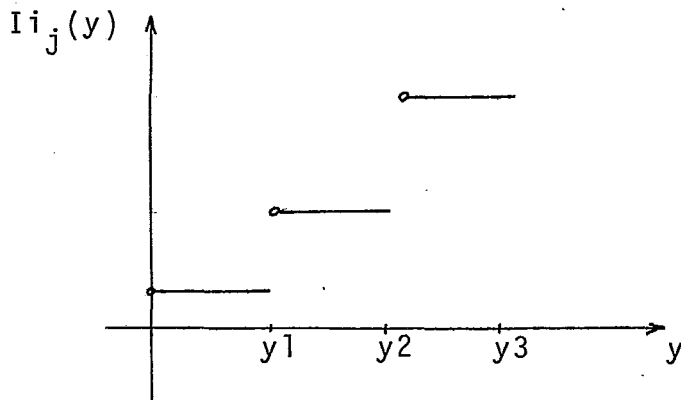


Fig 1. Custo de investimentos em um arco

c) A função que expressa o custo de viagem para um usuário tem a forma indicada na Fig 2.

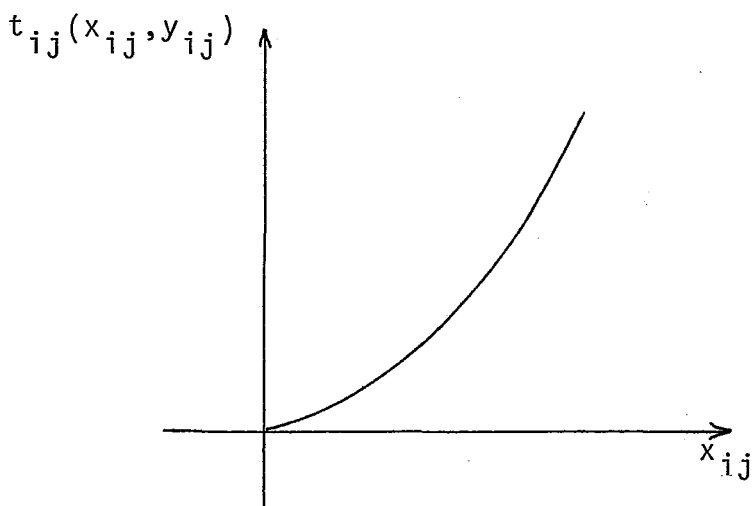


Fig 2. Custo de viagem através do arco (i,j)
com capacidade y_{ij}

Observe que nestas condições a função $F_{ij}^{\min}(x_{ij})$ toma a forma indicada na Fig 3.

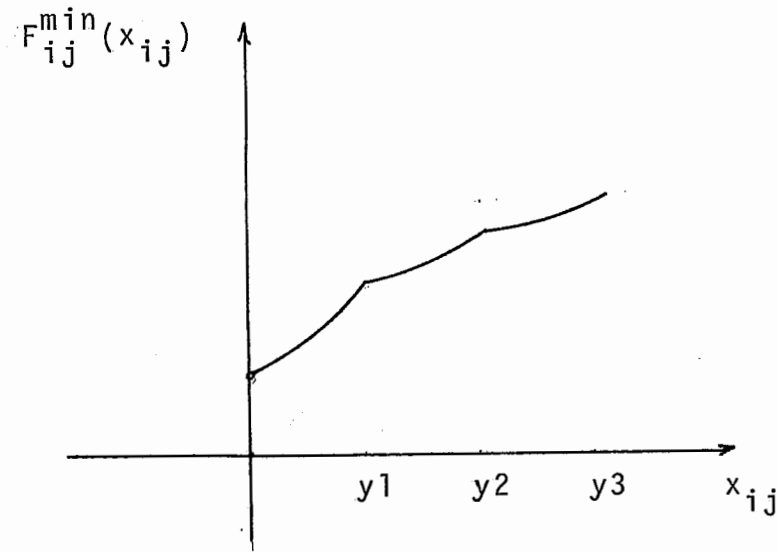


Fig 3. Solução dos subproblemas

ii) O Problema Mestre:

$$\text{Min}_X \sum_{(i,j) \in A} F_{ij}^{min}(x_{ij})$$

$$\text{sujeito } \bar{a}: \quad Ax = 0$$

$$x \geq 0$$

A referência [9] sugere que o problema mestre seja resolvido através de um método incremental de alocação de tráfego. Este método consiste em alocar, a cada iteração, frações da matriz O/D por caminhos com mínimo valor marginal da função objetivo, calculado para o fluxo total obtido nas iterações anteriores. Para a iteração k aloca-se uma fração α_k de cada elemento x^{ij} da matriz O/D, pelo caminho u que minimiza o valor de

$$\sum_{(i,j) \in u} \frac{d_{ij}^{F \min}}{d_{ij}} \mid x_{ij} = \sum_{q=1}^{k-1} \alpha_q \mid \cdot x^{ij}$$

para todo $(i,j) \in A$

O processo continua até que em n iterações toda a matriz O/D foi alocada, de modo que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$.

3.5.5. Algoritmo de Inserção/Eliminação de Arcos

O método desenvolvido na referência [40] emprega alternativamente critérios de inserção e de eliminação de arcos, buscando uma configuração ótima ou quase-ótima para a rede de transportes, quando a função objetivo do problema inclui os custos de viagem do usuário e os custos de construção dos projetos. As operações de inserção e eliminação de arcos são aplicadas até que se atinja um ponto de ótimo local. No curso do procedimento são estabelecidos limites inferior e superior para o valor ótimo da função objetivo. Análise da sensibilidade da solução encontrada, e a identificação de arcos necessariamente incluídos e excluídos da rede ótima são passíveis durante a execução do algoritmo.

A formulação do problema é a seguinte:

$$\text{Min}_{Y} F = \sum_{(i,j) \in A} (I_{ij} \cdot y_{ij} + t_{ij}(y_{ij}) \cdot x_{ij})$$

Sujeito a:

- i) Restrições da rede de transportes $H(X,Y) = 0$, com a matriz O/D constante. $x \geq 0$.
- ii) Princípio de alocação de tráfego

$$x = \underset{x}{\text{Argmin}} \left\{ \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(y_{ij}) dx \right\}$$
- iii) $y_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $(i,j) \in A$
- iv) $y_{ij} = 1$ para todo $(i,j) \in A_1$, conjunto inicial de arcos.

$$v) t_{ij}(0) = \infty \text{ para todo } (i,j) \in A - A_1.$$

O algoritmo é iniciado assumindo-se todos os arcos incluídos na rede, i.e., $y_{ij} = 1$ para todo $(i,j) \in A$. O tráfego é alocado para esta configuração da rede, e aplica-se o procedimento de eliminação de arcos.

Eliminação de Arcos - Primeiramente, calcula-se para cada arco $(i,j) \in \{(i,j) \in A - A_1 \mid y_{ij} = 1\}$ o caminho mínimo ligando i a j quando $y_{ij} = 0$, i.e., obtem-se os segundos caminhos mínimos ligando as extremidades de cada arco incluído na rede. Um parâmetro de melhoramento Δ_{ij} é calculado para cada um dos arcos, da seguinte maneira:

$$\Delta_{ij} = x_{ij}(d_{ij} - d'_{ij}) + I_{ij} \text{ onde } d_{ij} \text{ e } d'_{ij}$$

representam, respectivamente, os custos do menor e do segundo menor caminho ligando o nó i ao nó j na configuração atual da rede. O fluxo X é o fluxo ótimo dos usuários nesta mesma configuração.

O arco que oferece $\Delta_{ij} > 0$ máximo é retirado da rede fazendo-se $y_{ij} = 0$. A seguir, desvia-se o fluxo que atravessa o arco eliminado pelo segundo caminho mínimo, obtendo-se um novo fluxo X , e calculam-se os novos parâmetros Δ_{ij} apenas para os arcos que pertencem ao novo caminho mínimo, ligando as extremidades do arco eliminado. Estes arcos tiveram seus fluxos alterados. O procedimento de eliminação é repetido até que tenhamos $\Delta_{ij} \leq 0$ para todo $(i,j) \in \{(i,j) \in A - A_1 \mid y_{ij} = 1\}$.

Após o término deste processo, realoca-se o tráfego para a nova configuração da rede, e aplica-se a operação de inserção de arcos.

Inserção de Arcos - O procedimento de inserção de arcos considerada os arcos eliminados para reinserção na rede. Um parâmetro de melhoria δ_{ij} é calculado para cada arco.

$(i,j) \in \{(i,j) \in A - A_1 \mid y_{ij} = 0\}$ da seguinte maneira:

$$\delta_{ij} = \sum_{(\ell,m) \in A} (x_{\ell m} b_{\ell m} - x'_{\ell m} b'_{\ell m}) - I_{ij}$$

onde x_{ij} e x'_{ij} são o fluxos antes e depois da inserção do arco (i,j) . $b_{\ell m}$ e $b'_{\ell m}$ são os custos dos caminhos mínimos ligando i e j antes e depois da inserção do arco (i,j) .

Os parâmetros δ_{ij} sã serão calculados para os arcos cuja inserção altera efetivamente o fluxo ótimo na rede, i.e., algum caminho mínimo ligando um par Origem/Destino é alterado. O arco com maior $\delta_{ij} > 0$ é inserido na rede fazendo-se $y_{ij} = 1$. O fluxo ótimo do usuário é recalculado para a nova rede, e repete-se o processo até que $d_{ij} \leq 0$ para todo

$(i,j) \in \{(i,j) \in A - A_1 \mid y_{ij} = 0\}$. Observe-se que, ao contrário do processo de eliminação de arcos, o processo de inserção de arcos recalcula o fluxo ótimo do usuário após cada modificação na rede. Após uma eliminação de arco é feita apenas um ajuste aproximado no fluxo. A justificativa para este procedimento é a facilidade com que os novos caminhos mínimos podem ser obtidos após a inserção de um arco, como mostramos no Apêndice A deste trabalho.

A aplicação das operações de eliminação e inserção são feitas alternadamente até que não haja mais modificações na rede. O algoritmo converge em número finito de iterações já que cada modificação na rede diminui a função objetivo de um valor $\epsilon > 0$. Nada se pode afirmar, porém, quanto a otimalidade da solução, pois não se pode garantir a convexidade da função objetivo, além do cálculo do parâmetro de melhoria Δ_{ij} para a operação de eliminação de arcos não ser exato. O cálculo de Δ_{ij} com o desvio do fluxo que atravessa o arco (i,j) pelo segundo caminho mínimo ligando i a j apenas um limite inferior para o decréscimo da função objetivo após a eliminação do arco. A referência [40] desenvolve ainda, associados ao algoritmo, métodos para o estabelecimento de limite superior

e inferior para o valor ótimo da função objetivo. O limite inferior é obtido após a identificação de arcos necessariamente incluídos ou excluídos da rede ótima. As regras que permitem esta identificação são apresentadas na mesma referência.

CAPÍTULO IVPROGRAMA DE INVESTIMENTOS EM UMA REDE RODOVIÁRIA

4.1. Introdução

A finalidade deste capítulo é a apresentação de um método para a resolução de um problema específico de alocação de recursos em redes de transportes. Trata-se da elaboração de um programa de investimentos em uma rede rodoviária, dentro de um processo de planejamento a longo prazo. A partir de uma rede inicial, deseja-se estabelecer um conjunto de melhorias para cada período do plano de construção, de modo que os custos de implementação dos projetos escolhidos obedeam aos orçamentos estabelecidos para cada período. São conhecidos os projetos passíveis de implementação que representam, cada um, a adição ou melhoria de um arco da rede. Associados a cada arco, podem existir vários projetos, e a implementação de cada um deles resulta em diferentes níveis de operação para o arco envolvido. A estratégia ótima de investimentos na rede será escolhida de maneira a minimizar uma função objetivo que expressa os custos de viagem, construção e manutenção da rede, durante todos os períodos de um horizonte de planejamento.

As dificuldades de resolução de um problema in-

investimentos em uma rede de transportes foram mencionadas no capítulo anterior, quando discutimos o problema no caso de um processo de planejamento a curto prazo. Quando tratamos o problema dentro de um processo de planejamento a longo prazo, estas dificuldades se multiplicam, pois procuramos obter as redes ótimas para cada período, minimizando uma função objetivo que inclui os custos durante todo o horizonte de planejamento. O método que desenvolveremos para a resolução deste problema será um procedimento que oferece uma solução subótima utilizando recursos computacionais admissíveis, sendo capaz de tratar o problema para redes de grande porte. Algumas simplificações serão impostas ao modelo do sistema de transportes durante o desenvolvimento de método de resolução. Entretanto, exigiremos que certas características do modelo original sejam preservadas. Primeiramente, como tratamos especificamente de redes rodoviárias, é preciso considerar o sistema de transportes como descritivo, de modo que a previsão do fluxo que atravessa cada arco, em uma determinada configuração da rede, será feita através da resolução de um problema de alocação de tráfego, considerando apenas os custos de viagem dos usuários na função objetivo. Outras premissas básicas serão obedecidas quando da formulação do problema de investimentos na rede. Supõe-se que os projetos passíveis de implementação são interdependentes, i.e., o impacto da construção ou melhoria de um arco depende da configuração da rede ante a qual o projeto é analisado. Além disso, uma vez que a função objetivo do problema incluirá tanto os custos do usuário como os custos de construção e manutenção da rede, esta

função não poderá ser considerada como monotonamente decrescente com a implementação de novos projetos.

Descreveremos a seguir neste capítulo detalhes de modelagem do problema a ser resolvido, juntamente com sua formulação matemática, estabelecida através de um processo de decisões sequenciais. O método de resolução é desenvolvido com base em uma técnica geral de solução de problemas de planejamento, na qual são utilizados procedimentos de busca de caminhos mínimos através de grafos. Apresentaremos, também, um algoritmo para a resolução de um problema de rede ótima que surge como subproblema no método de resolução do problema de planejamento a longo prazo.

4.2. Descrição do Modelo

Para os propósitos deste capítulo, considera-se um sistema de transporte restrito apenas ao transporte por rodovias, independentemente dos outros modos de transporte. O modelo empregado para o sistema de transportes deverá sofrer algumas modificações em relação ao modelo descrito no Capítulo II. Da parte da demanda de transportes exige-se que a demanda pelo transporte rodoviário seja independente da demanda pelos outros modos de transporte. Com efeito, neste capítulo consideraremos a função demanda para o transporte rodoviário constante para cada período do horizonte de planejamento, o que não acrescenta nenhuma nova característica em relação ao modelo sequencial de demanda descrito no Capítulo II. Somente a infra-estrutura rodoviária diz respeito a este capítulo. Ela será modelada matematicamente através de uma rede rodoviária, de maneira similar ao do modelo descrito para a infra-estrutura de transportes no Capítulo II. A rede rodoviária é um grafo não orientado $G=(N,A)$, onde os nós representam as origens, os destinos e as interseções de rodovias. Neste caso, não será necessário considerar os arcos orientados, pois o fluxo em cada arco representará a soma dos tráfegos nos dois sentidos do trecho rodoviário. São as seguintes as características do problema de investimentos em uma rede rodoviária e os aspectos particulares do sistema de transportes envolvido:

i) São consideradas três classes de usuários - automóveis, ônibus e caminhões. O tráfego através da rede para cada uma das classes está caracterizado pelo tráfego local em cada um dos trechos e pelo tráfego de longa distância entre as origens e os destinos. O tráfego de longa distância é representado pelo fluxo na rede, e o tráfego local é apenas utilizado no cálculo dos custos envolvidos.

ii) Para cada período do horizonte de planejamento, o tráfego de longa distância entre cada par Origem/Destino e o tráfego local são conhecidos para cada classe de usuários. O tráfego está expresso pelo número de viagens para cada período. Isto corresponde a uma função demanda fixa para cada período.

iii) Os custos de viagem para cada arco variam linearmente com o fluxo que atravessa o arco, para cada classe de usuários. O cálculo do custo total dos usuários é feito através da soma dos custos associados ao tráfego de longa distância, representado pelo fluxo através da rede, e dos custos de viagem associados ao tráfego local. O custo de viagem de cada usuário varia com o nível do arco.

iv) A alocação do tráfego de longa distância será descritiva, i.e., utilizando os caminhos de custo mínimo para cada usuário. Por simplicidade, utiliza-se o caminho mínimo segundo os custos de viagem dos automóveis para todas as classes de usuários.

v) São conhecidos todos os projetos, i.e., adições e melhorias de arcos, passíveis de implementação, a partir de uma configuração inicial da rede. A cada arco, estão

associados vários projetos, que possibilitam, para cada um dos arcos, diversas alternativas, discretizadas em diferentes níveis, com a implementação de um projeto em um determinado período k , o arco envolvido será considerado alterado a partir do período $k+1$.

vi) A cada projeto está associado um custo de construção que corresponde ao custo envolvido na elevação do nível de um arco a partir da configuração inicial da rede.

vii) A cada arco está associado um custo de manutenção que varia com o nível do arco. Este custo tem uma parcela fixa e outra variando linearmente com o tráfego total no trecho.

viii) O custo total de construção de projetos durante um período é limitado superiormente por um orçamento para cada um dos períodos.

ix) A função objetivo expressa o custo total de viagem, manutenção e construção para cada período de horizonte de planejamento. Os projetos são implementados durante os períodos do plano de construção, e os custos de viagem e conservação são computados até o último período do horizonte de planejamento.

O problema de alocação de recursos em uma rede rodoviária constitui, dentro do contexto em que o analisamos, um problema de otimização a longo prazo.

Deseja-se, a partir de uma configuração inicial para a rede, otimizar a evolução da configuração da rede período a período. Problemas de otimização a longo prazo com estas características podem ser formulados, de uma forma concisa e

elegante, como um processo de decisões sequenciais. Os elementos que compõem esta formulação estão descritos abaixo para este caso particular.

i) Espaço de Estados - O estado \bar{e} é representado pela configuração da rede, caracterizada pelo níveis de operação dos arcos. O vetor $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, cujas componentes y_j indicam o nível de cada arco $a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, determina o estado do sistema envolvido no processo de decisões sequenciais. O espaço de estados será definido como:

$$S = \{ Y \mid 0 \leq y_j \leq n_j, y_j \in Z, \text{ para todo } a_j \in A \}$$

onde cada variável y_j pode tomar os valores inteiros $0, \dots, n_j$ que indicam os possíveis níveis de cada arco a_j . Inicialmente, $y_j = 0$ para todo $a_j \in A$, definindo assim o estado inicial $Y^0 = (0, 0, \dots, 0)$. Se inexistirem projetos envolvendo um certo arco a_j teremos $n_j = 0$.

ii) Espaço de Decisões - Uma decisão é caracterizada pela implementação de um grupo de projetos e pela consequente modificação dos níveis dos arcos envolvidos. Representa-se uma decisão pelo par ordenado (\bar{A}, \bar{Y}) , onde $\bar{A} \subset A$ é o subconjunto de arcos modificados pelos projetos escolhidos para implementação, e o vetor $\bar{Y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$ indica os novos níveis dos arcos $\bar{a}_j \in \bar{A}$. O espaço de decisões é expresso da seguinte maneira:

$$D = \{ (\bar{A}, \bar{Y}) \mid \bar{A} \subset A; 0 \leq \bar{y}_j \leq n_j, \bar{y}_j \in Z, \text{ para todo } \bar{a}_j \in \bar{A} \},$$

onde n_j é o maior nível de operação possível para o arco onde n_j é o maior nível de operação possível para o arco $\bar{a}_j \in \bar{A}$.

iii) Conjunto de Estágios - Os estágios correspondem aos períodos componentes do plano de construção.

$$I = \{0, 1, 2, \dots, p\},$$

onde p indica o último período do plano de construções.

iv) Estados Viáveis - A cada estágio $k \in I$, está associado um conjunto S_k de estados viáveis assim definido:

$$S_k = \begin{cases} S & k \in I - \{0\} \\ Y^0 & \text{se } k=0 \end{cases}$$

v) Decisões Admissíveis - A cada estágio $k \in I - \{p\}$ e a cada estado viável $s_k \in S_k$, associa-se um conjunto $D_k(s_k) \subset D$ de decisões admissíveis a partir do estado $s_k = (y_{a_1}, \dots, y_{a_m})$ onde cada elemento y_{a_i} corresponde a um arco $a_i \in A$

$$D_k(s_k) = \{(\bar{A}, \bar{Y}) \in D \mid \sum_{\bar{a}_j \in \bar{A}} P_j(y_{\bar{a}_j}, \bar{y}_{\bar{a}_j}) \leq I_k\},$$

onde I_k é o orçamento para o período k do plano de construções. $P_j(x, y)$ expressa o custo de implementação do projeto que eleva o nível do arco \bar{a}_j de x para y . Caso não exista tal projeto, fazemos $P_j(x, y) = \infty$.

O conjunto $D_k(s_k)$ é construído de modo que são admissíveis as decisões que correspondem à implementação de um grupo de projetos cujo custo de construção não excede o orçamento permitido. $P_j(x,y)$ é construído de modo que apenas os projetos efetivamente existentes façam parte de decisões admissíveis. Uma decisão com $\bar{A} = \emptyset$ é válida, correspondendo à não implementação de projetos.

vi) Função de Transição de Estado - Esta função associa a cada estado $s_k \in S$ e a cada decisão $d_k \in D$, considerados em um estágio $k \in I - \{p\}$, um estado sucessor $s_{k+1} \in S$

$f : S.D.I - \{p\} \rightarrow S$ de modo que:

Seja $s_k = (y_{a1}, \dots, y_{am})$, onde cada elemento y_{aj} corresponde a $aj \in A$. Seja $d_k = (\bar{A}, \bar{Y})$, com $\bar{Y} = (\bar{y}_{a1}, \dots, \bar{y}_{am})$, onde cada elemento \bar{y}_{aj} corresponde a $\bar{aj} \in \bar{A}$. Neste caso, $s_{k+1} = (x_{a1}, \dots, x_{am}) = f(s_k, d_k)$ é tal que:

$$x_{aj} = \begin{cases} \bar{y}_{aj} & \text{se } aj \in \bar{A} \\ y_{aj} & \text{se } aj \notin \bar{A} \end{cases} \quad \text{para todo } aj \in A.$$

vii) Estratégia Admissível - Consideremos uma estratégia como uma sequência $E = (d_0, d_1, \dots, d_{p-1})$, como $d_i \in D$ para $i \in I - \{p\}$. Uma estratégia é dita admissível a partir de um estado inicial $s_0 \in S_0$, se é satisfeita a seguinte condição:

A sequência de estados (s_0, s_1, \dots, s_p) gerada a partir do estado s_0 pela aplicação sucessiva

das decisões pertencentes a E é tal que:

- a) $d_i \in D_i(s_i)$ para todo $i \in I - \{p\}$
- b) $s_i \in S_i$ para todo $i \in I$
- c) $s_{i+1} = f(s_i, d_i)$ para todo $i \in I - \{p\}$

viii) Custo de Transição - Supõe-se conhecida uma função real que associa a cada estágio $k \in I - \{p\}$, a cada estado viável $s_k \in S_k$, no estágio k e a cada decisão admissível a partir s_k , $d_k \in D_k(s_k)$, um custo de transição.

$$c : S_k \cdot D_k(s_k) \cdot I - \{p\} \rightarrow R$$

$$s_k, d_k, k \rightarrow c(s_k, d_k, k)$$

o custo de transição $c(s_k, d_k, k)$ deve expressar tanto os custos de operação da rede durante os períodos em que sua configuração é representada pelo estado $s_{k+1} = f(s_k, d_k, k)$, como os custos de implementação dos projetos envolvidos na decisão d_k . Como a avaliação do comportamento da rede rodoviária, neste problema específico, inclui os custos de operação da rede durante todo um horizonte de planejamento, supomos que um estado $s_p \in S_p$ representa a configuração da rede desde o último período do plano de construções, até o último período do horizonte de planejamento. Portanto, o valor de $c(s_k, d_k, k)$ inclui os custos de operação da rede, com configuração s_{k+1} , para o período $k+1$ do plano construção, exceto o período $k=p-1$, quando $c(s_{p-1}, d_{p-1}, p-1)$ inclui os custos de operação da rede desde o período p , correspondendo ao último período do plano de construção, até o último período do horizonte de planeja-

mento. O custo de operação da rede durante um período de planejamento divide-se em duas parcelas:

a) Custo de viagem - Sejam k um período do horizonte de planejamento e $Y = (y_1, \dots, y_m)$ um vetor que caracteriza a configuração da rede para este período, com cada componente y_j indicando o nível do arco $a_j \in A$. O custo total de viagem dos usuários durante o período k será expresso por:

$$CV = \sum_{a_j \in A} \sum_{u=1} t_{j,u}^k(y_j) \cdot (\bar{x}_{j,u}^k + o_{j,u}^k),$$

onde : u indica a classe dos usuários.

$t_{j,u}^k(y_j)$ é o custo de viagem para cada usuário da classe u , no arco $a_j \in A$ com nível y_j no período k .

$\bar{x}_{j,u}^k$ é o fluxo representando o tráfego de longa-distância associado aos usuários da classe u no período k . O fluxo $\bar{x}_{j,u}^k$ é obtido com a resolução de um problema de alocação de tráfego como mostraremos abaixo.

$o_{j,u}^k$ é o tráfego local associado aos usuários da classe u no período k .

Observe-se que o custo individual de cada viagem em um arco independe do volume de tráfego que o atravessa, variando somente com o nível do arco e a classe de usuários.

b) Custo de manutenção - O custo de conservação de

cada arco da rede rodoviária está dividido, neste trabalho, em duas partes. Uma parcela varia linearmente com o tráfego que atravessa o arco, e outras independe do fluxo. Supondo que $Y = (y_1, \dots, y_m)$ caracteriza a configuração da rede num período k , a expressão para o custo total de conservação da rede durante este período é a seguinte:

$$CM = \sum_{a_j \in A} (cf_j^k(y_j) + \sum_{u=1} cv_{j,u}^k(y_j) \cdot (\bar{x}_{ju}^k + o_{j,u}^k)),$$

onde : $k, A, u, \bar{x}_{j,u}^k, o_{j,u}^k$ já foram definidos anteriormente.

$cf_j^k(y_j)$ é o custo fixo de manutenção no período k para o arco $a_j \in A$ no nível y_j .

$cv_{j,u}^k(y_j)$ é o custo adicional de cada viagem nas mesmas condições acima, para a classe de usuários u .

Para o cálculo do valor do custo de transição são utilizadas as expressões desenvolvidas acima para o custo de conservação para cada período, acrescentando-se uma terceira parcela:

c) Custo de construção - Trata-se do custo de implementação dos projetos envolvidos na decisão $d_k = (\bar{A}, \bar{Y})$, a partir do estado $s_k = (y_{a_1}, \dots, y_{a_m})$

$$CC = \sum_{\bar{a}_j \in \bar{A}} P_j(y_{\bar{a}_j}, \bar{y}_{\bar{a}_j})$$

A forma da função que expressa o custo de transição quando $s_k = (y_{a1}, \dots, y_{am})$, $d_k = (\bar{A}, \bar{Y})$ e $s_{k+1} = f(s_k, d_k, k) = (z_1, \dots, z_m)$ é a seguinte:

$$c(s_k, d_k, k) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a_j \in A} \sum_{u=1}^3 t_{j,u}^{k+1}(z_j) \cdot (\bar{x}_{j,u}^{k+1} + o_{j,u}^k) + \\ + \sum_{a_j \in A} (cf_j^{k+1}(z_j) + \sum_{u=1}^3 cv_{j,u}^{k+1}(z_j) \cdot (\bar{x}_{j,u}^{k+1} + o_{j,u}^{k+1})) + \\ \sum_{\bar{a}_j \in \bar{A}} P_j(y_{\bar{a}_j}, \bar{y}_{\bar{a}_j}) \quad \text{se } k < p-1 \\ \sum_{q=k+1}^h \left(\sum_{a_j \in A} \sum_{a_j \in a} \sum_{u=1}^3 t_{j,u}^q(z_j) \cdot (\bar{x}_{j,u}^q + o_{j,u}^k) + \right. \\ \left. + \sum_{a_j \in A} (cf_j^q(z_j) + \sum_{u=1}^3 cv_{j,u}^q(z_j) \cdot (\bar{x}_{j,u}^q + o_{j,u}^q)) \right) + \\ \sum_{\bar{a}_j \in \bar{A}} P_j(y_{\bar{a}_j}, \bar{y}_{\bar{a}_j}) \quad \text{se } k = p-1 \end{array} \right.$$

onde h é o último período do horizonte de planejamento.

O cálculo do custo de transição utiliza os valores do fluxo em equilíbrio para cada configuração da rede, durante cada um dos períodos do horizonte de planejamento. A obtenção destes valores $\bar{x}_{j,u}^k$ implica na resolução de um problema de alocação de tráfego, utilizando o tráfego de longa distância para o período k . Formulamos a seguir o problema de alocação de tráfego durante um período k , quando a configuração da rede é expressa por $Y = (y_1, \dots, y_m)$. Supõem-se a existência de três classes de usuários, e os custos de cada viagem constantes com o fluxo. O tráfego será alocado obedecen-

do ao segundo princípio de Wardrop, e considera-se constante a demanda durante cada período.

$$\begin{aligned} \text{Min } F &= \sum_{aj \in A} \sum_{u=1}^3 \int_0^{x_{j,u}^k} t_{j,u}^k(y_j) dx = \\ &= \sum_{j \in A} \sum_{u=1}^3 t_{j,u}^k(y_j) x_{j,u}^k, \end{aligned}$$

s.a. Restrições da rede de transportes $H(X) = 0$,

$$0 \leq X \leq M(Y).$$

As restrições que descrevem as leis de conservação na rede rodoviária podem ser reescritas em relação àquelas apresentadas no Capítulo II, pois aqui tratamos com uma rede não orientada, além de supormos a existência de várias classes de usuários. Eis as restrições que fixam as leis de conservação de fluxo:

$$\sum_{j \in w_i^+} (x_{j,u}^{+k,a} - x_{j,u}^{-k,a}) + \sum_{j \in w_i^-} (x_{j,u}^{-k,a} - x_{j,u}^{+k,z}) = \begin{cases} 0 & \text{se } ai \notin R \text{ e } a \neq i \\ -\sum_{\{b \mid ab \in R\}} x_{k,u}^{ab} & \text{se } i=a \\ x_{k,u}^{ai} & \text{se } ai \in R \end{cases}$$

para todo $a \in N^0$; $u = 1, \dots, 3$ e todo $i \in N$.

$$x_{j,u}^k = \sum_{a \in N^0} (x_{j,u}^{+k,a} + x_{j,u}^{-k,a}) \text{ para todo } j \in A \text{ e } u = 1, \dots, 3.$$

$$x_{j,u}^{+k,a} \geq 0 \quad x_{j,u}^{-k,a} \geq 0 \text{ para todo } a \in N^0, u = 1, \dots, 3 \text{ e}$$

todo $j \in A$.

- onde :
- w_i^+ é o conjunto de arcos cujo sentido positivo é emergente do nó i .
 - w_i^- é o conjunto de arcos cujo sentido negativo é emergente do nó i .
 - $x_{j,u}^{+k,a}$ é o fluxo representando o tráfego de longa distância que parte da origem a , com usuário u , no período k e no nó $j \in A$, atravessando o arco no sentido arbitrado positivo.
 - $x_{j,u}^{-k,a}$ é o fluxo nas mesmas condições acima, atravessando o arco no sentido arbitrado negativo.
 - $x_{k,u}^{ab}$ é o tráfego de longa distância do nó a para o nó b , no período k e para os usuários da classe u .
 - R é o conjunto de relações de transporte para o sistema.
 - N^0 é o conjunto de origens.

Na implantação do método de resolução do problema de investimentos em redes rodoviárias, modificou-se a formulação do problema de alocação de tráfego. Por razões de simplicidade computacional, aloca-se o tráfego supondo-se que os custos de viagem são idênticos para todas as classes de usuários, utilizando-se os custos de viagem de automóveis. O algoritmo utilizado para a resolução do problema busca, segundo estes últimos custos, dos caminhos mínimos ligando cada par Origem/Destino, e aloca o tráfego de todas as classes de usuários através destes caminhos.

ix) Custo de uma estratégia. A cada estratégia admissível, $E = (d_0, \dots, d_{p-1})$, a partir de $s_0 \in S_0$, associa-se o custo da estratégia:

$$c(s_0, E) = \sum_{k=1}^{p-1} c(s_k, d_k, k)$$

O objetivo do problema de decisões sequenciais é encontrar a partir do estado inicial $s_0 \in S_0$ uma estratégia \bar{E} de custo mínimo, entre todas as estratégias admissíveis partindo de s_0 .

$$\text{Min}_E c(s_0, E)$$

s.a.

$$s_0 \in S_0$$

E é admissível a partir de s_0 .

4.3. Método de Solução

A formulação do problema de investimentos a longo prazo em uma rede de transportes como um problema de decisões sequenciais sugere naturalmente a utilização de algoritmos de Programação Dinâmica. Como trata-se de um processo discreto, determinístico com horizonte finito, a utilização de tais algoritmos pode realizar-se sem dificuldades teóricas. Todavia, como objetivamos a resolução do problema de investimentos no caso de redes rodoviárias de grande porte, a utilização de algoritmos de Programação Dinâmica torna-se computacionalmente inviável. Com efeito, para cada estágio, seria necessário avaliar as configurações da rede representadas por cada estado viável, o que inclui a resolução de um problema de alocação de tráfego para cada uma destas configurações em cada estágio.

Uma nova classe de algoritmos para a resolução de problemas de decisões sequenciais discretos, determinísticos, com horizonte finito pode ser obtida se modelamos este problema como um problema de busca de caminhos mínimos em um grafo. A partir dos elementos que definem um processo de decisões sequenciais pode se construir um grafo, chamado grafo Estado-Estágio, que representa o processo.

Seja $H = (N_H, A_H)$ um grafo orientado e onde:

i) Os nós correspondem aos pares ordenados (s_k, k) onde $s_k \in S_k$ e $k \in I$.

ii) Os arcos são obtidos a partir dos sucesso-

res de s_k , obtidos pelas decisões admissíveis a partir deste estado. Os arcos são, então, pares ordenados $((s_k, k), (s_{k+1}, k+1))$ de modo que:

$((s_k, k), (s_{k+1}, k+1)) \in A_H$ existe $d_k \in D_k(s_k)$ tal que

$$s_{k+1} = f(s_k, d_k, k)$$

iii) A cada arco $((s_k, k), (s_{k+1}, k+1))$, está associado um custo que é o custo de transição de estado $c(s_k, d_k, k)$.

iv) É conveniente representar-se o grafo $H=(N_H, A_H)$ pelo par ordenado (N_H, T) , onde T é o operador que associa a cada nó $i \in N_H$ um conjunto de sucessores $T(i) = \{j \in N_H \mid (i, j) \in A_H\}$. Neste caso específico,

$$T(s_k, k) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } k = p. \\ \{(s_{k+1}, k+1) \mid s_{k+1} = f(s_k, d_k, k), d_k \in D_k(s_k)\} & \text{se} \\ 0 < k < p. \end{cases}$$

Por construção, observa-se que a cada estratégia admissível a partir do estado inicial s_0 corresponde um caminho através do grafo Estado-Estágio, ligando o nó inicial $s = (s_0, 0)$ ao conjunto alvo $T = \{(s_p, p) \mid s_p \in S_p\}$.

Após o estabelecimento desta equivalência, o problema se resume à busca de um caminho mínimo ligando um nó origem s e um conjunto alvo T . Portanto, qualquer algoritmo com esta finalidade poderá ser utilizado. Como o grafo esta-

do-estágio associado a um processo de decisões sequenciais é um grafo sem arcos múltiplos, e se exigimos que o custo associado a cada arco seja não negativo, o algoritmo mais eficiente entre os métodos clássicos de busca de caminhos mínimos ligando um nó a um conjunto alvo é o algoritmo de Dijkstra, cuja descrição pode ser encontrada na referência [41].

No Apêndice B deste trabalho, descrevemos os algoritmos A^* e \tilde{A} que, aproveitando informações heurísticas sobre a estrutura do grafo, oferecem melhores performances se comparadas com os algoritmos clássicos de busca de caminhos mínimos. Estes algoritmos utilizam uma função de avaliação $\tilde{f}(i)$ que fornece para cada nó i do grafo uma estimativa para o custo total do menor caminho entre o nó inicial s e o alvo T , passando pelo nó i . Neste algoritmos, $\tilde{f}(i) = \tilde{g}(i) + \tilde{h}(i)$, onde $\tilde{g}(i)$ é o custo do menor caminho conhecido ligando s a i e $\tilde{h}(i)$ é uma estimativa para o caminho mínimo ligando i a T . A principal dificuldade destes algoritmos é exatamente a definição da heurística \tilde{h} que determina a eficiência do procedimento.

A aplicação do algoritmo A^* exige que a heurística $\tilde{h}(i)$ subestime o caminho mínimo a partir do nó i até o alvo T , se desejamos a solução ótima do problema. Todavia, não nos parece possível definir uma heurística com esta propriedade, dita heurística admissível, que forneça um resultado eficiente. Devido à esta impossibilidade acrescida do fato de que a utilização de heurísticas não admissíveis pode levar rapidamente à soluções sub-ótimas, torna-se atraente o enfoque utilizado na referência [42] que resultou no desenvolvi-

mento do algoritmo \bar{A} . Neste algoritmo, é possível a reformulação da heurística \bar{h} após a obtenção de uma solução sub-ótima. O resultado deste procedimento é uma sequência de soluções sub-ótimas que, com a função \bar{h} que proporemos, não fornece necessariamente a solução ótima, mas oferece soluções cada vez mais próximas da ótima, o que certamente satisfaz os propósitos da resolução de problemas de investimento em redes de transportes. Definimos abaixo uma heurística \bar{h} para uma possível utilização do algoritmo \bar{A} :

Seja $\bar{E} = (\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{p-1})$ uma estratégia viável a partir de s . Seja $n_i = (s_k, k)$ um nó do grafo estado-estágio. Então definimos

$$\bar{h}(n_i) = \sum_{i=k}^{p-1} c(\bar{s}_i, \bar{d}_i, i) \quad \text{onde } \bar{s}_i \text{ é tal que:}$$

$$\bar{s}_i = \begin{cases} s_k & \text{se } i = k \\ f(s_i, \bar{d}_i, i) & \text{se } i > k \end{cases}$$

A estimativa para os custos nos estágios posteriores a k é feita supondo-se que as decisões são tomadas segundo uma estratégia viável já conhecida. Sempre que uma nova estratégia é obtida a heurística \bar{h} pode ser reformulada. Note-se que $\bar{h}(n_i)$ não depende apenas do estágio k mas também do estado s_k .

O sucesso computacional da aplicação deste algoritmo depende ainda da superação de um obstáculo. Para problemas de grande porte, a aplicação do operador sucessor a um

nó $i = (s_k, k)$ envolve a avaliação de um grande número de configurações da rede, operação computacionalmente demorada. É necessário, então, reduzir ao mínimo possível o número de nós a serem examinados. A referência [42] apresenta, dentro da aplicação do algoritmo \hat{A} a um problema de expansão de rede elétricas, uma sugestão para superação desta dificuldade. O procedimento sugerido resume-se a selecionar entre os sucessores de cada nó apenas alguns sucessores considerados eficientes dentro do contexto da aplicação. Consequentemente, obteríamos a cada utilização do operador sucessor um menor número de novos nós passíveis de exame posterior, além de tornar-se mais rápida a expansão de cada nó. Um artifício deste tipo poderia ser aplicado neste trabalho definindo um novo operador sucessor de modo a selecionar apenas os melhores sucessores, de modo que:

$$\hat{T}(i) = \{i \in (i) \mid \hat{f}(i) = \hat{g}(i) + \hat{h}(i) < L\},$$

onde \hat{e} é o novo operador sucessor, \hat{f} é a função de avaliação utilizada pelo algoritmo e L é um limite superior para o custo heurístico das estratégias ditas eficientes. Outra possibilidade é, simplesmente escolher os melhores sucessores classificados segundo o valor da função de avaliação \hat{f} , de modo que:

$$\hat{T}(i) = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}.$$

Entretanto, mesmo após as simplificações acima, a aplicação do algoritmo \hat{A} não nos parece computacionalmente viável no trato de grandes redes rodoviárias. Propomos, então, um

novo algoritmo cujo procedimento, embora estruturalmente diferente do procedimento de \bar{A} , preserva algumas idéias básicas do algoritmo anterior. O novo método, que também procura obter u ma seqüência de soluções sub-ótimas reformulando a heurística \bar{h} após a obtenção de cada uma destas soluções, surge quando consideramos apenas um sucessor na expansão de um $n\bar{o}$. Desta maneira, o algoritmo estará sempre dirigido para a obtenção de uma nova solução, considerando, em cada instante, apenas o $n\bar{o}$ obtido na expansão anterior. Cada vez que o alvo é atingido, reformula-se a heurística \bar{h} , e inicia-se a obtenção de um novo caminho a partir do $n\bar{o}$ inicial s . Para cada iteração a escolha do sucessor j a partir de um determinado $n\bar{o}$ i pode oferecer diferentes resultados, já que esta escolha se faz através da resolução do problema.

$$\min_{j \in T(i)} \hat{f}(j) = \hat{g}(j) + \bar{h}(j).$$

Isto é, escolhe-se o melhor sucessor segundo a função de avaliação \hat{f} .

O novo algoritmo pode ser escrito na seguinte maneira:

Algoritmo

Passo 1 Definir a função $\bar{h} : N \rightarrow R$ inicial, introduzir na lista Aberto o $n\bar{o}$ inicial s associando-lhe valores $\hat{g}(s)$ e $\hat{f}(s) = \hat{g}(s) + \bar{h}(s)$.

Passo 2 Transferir da lista Aberto para a lista Fechado o $n\bar{o}$

i. Se $i \in T$, ir para o Passo 5. Escolher o sucessor de i resolvendo o problema:

$$\text{Min}_{j \in \Gamma(i)} \quad \hat{f}(j) = \hat{g}(i) + c(i, j) + \hat{h}(j).$$

Passo 3 Seja j^* uma solução do problema acima.

Introduzir j^* na lista Aberto, associando-lhe valores $\hat{g}(j^*) = \hat{g}(i) + c(i, j^*)$, $\hat{f}(j^*) = \hat{g}(j^*) + \hat{h}(j^*)$ e apontador i . Ir para o Passo 2.

Passo 4 Redefinir a função $\hat{h} : N \rightarrow R$, e fazer as listas Aberto e Fechado = \emptyset .

Ir para o Passo 2.

Passo 5 Se algum critério de parada for satisfeito, terminar o algoritmo, recuperando o caminho entre s e T através dos apontadores.

Se não, ir para o Passo 4.

A regra de parada a ser incluída no Passo 5 pode se resumir ao limite do tempo de computação para o algoritmo. Todavia, o método pode convergir para uma solução que corresponde a um ponto de mínimo local, quando as soluções sub-ótimas obtidas em iterações sucessivas são idênticas. Este fato, pode ser utilizado como uma regra de parada desde que levemos em conta as propriedades específicas da política de reformulação da heurística \hat{h} ao longo do algoritmo.

Quando utilizamos este último algoritmo para a resolução de problemas de decisões sequenciais, a heurística definida anteriormente, associada à utilização do algoritmo \hat{A} , se

adapta perfeitamente ao novo algoritmo. Cada vez que uma nova estratégia $E = (d_1, \dots, d_{p-1})$ é obtida, os novos valores da heurística $\bar{h}(n_i)$ cada $n_i = (s_k, k)$ expressam o custo total da aplicação das decisões d_k, \dots, d_{p-1} componentes da nova estratégia. O procedimento pode ser iniciado através de uma estratégia viável conhecida a priori, como, por exemplo, no problema de investimentos em redes rodoviárias, a estratégia cujas componentes são decisões nulas, expressando a não implementação de qualquer projeto. A utilização desta heurística associada ao novo algoritmo introduz algumas propriedades desejáveis no procedimento, desde que o processo satisfaça a certas condições. Primeiramente, pode-se garantir que os custos das estratégias obtidas pelo algoritmo são decrescentes. Além disso, pode-se estabelecer uma espécie de convergência, já que, se uma estratégia se repete na sequência obtida pelo algoritmo, então esta estratégia se repetirá na próxima iteração, devendo-se interromper o procedimento. Estes dois fatos estão expressos nos teoremas que se seguem:

Teorema 1 - Considere a aplicação do algoritmo a um grafo estado-estágio associado a um processo de decisões sequenciais que satisfaz a seguinte hipótese:

(1) $D_k(u_k) = D_k(v_k)$ para todo $u_k, v_k \in S_k$ e todo $k \in I - \{p\}$. Suponha que seja utilizada a heurística \bar{h} descrita anteriormente. Sob estas condições temos que:

Se $\bar{E} = (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{p-1})$ e $E^* = (d_1^*, \dots, d_{p-1}^*)$ são duas estratégias tais que \bar{E} foi obtida pelo algoritmo numa i-

teração em que a heurística \hat{h} foi construída com a estratégia \bar{E} , então, temos que $c(s_0, E^*) \leq c(s_0, \bar{E})$ onde $c(s_0, E)$ indica o custo total da estratégia E a partir de s_0 .

Demonstração :

Sejam E^1, E^2, \dots, E^{p-1} estratégias tais que:

$$E^1 = \bar{E}$$

$$E^k = (d_1, \dots, d_{p-1}) \quad d_m = \begin{cases} d_m^* & \text{se } m \leq k \\ \bar{d}_m & \text{se } m > k \end{cases}$$

para $i = 2, \dots, p-2$

$$E^{p-1} = E^*$$

O custo total de cada uma das estratégias E^k corresponde ao valor $\hat{f}(j)$ calculado no Passo 3 do algoritmo, quando mais um nó j pertencente ao novo caminho através do grafo estado-estágios foi obtido. Este nó, ao qual está associada uma decisão d_k pertencente à nova estratégia, é obtido através da resolução do problema $\text{Min}_{j \in (i)} \hat{f}(j) = \hat{g}(i) + c(i, j) + \hat{h}(j)$. Como a cada nó $j \in (i)$, com $i = (s_k, k)$, corresponde uma decisão $d_k \in D_k(s_k)$, e $\hat{f}(j)$ pode ser expresso como o custo total da estratégia $E = (d_1, \dots, d_{p-1})$ com

$$d_m = \begin{cases} d_m^* & \text{se } m < k \\ \bar{d}_m & \text{se } m > k \end{cases}, \quad \text{podemos reescrever o}$$

problema como:

$\text{Min}_{d_k \in D_k(s_k)} c(E, s_0)$. Seja d_k^* a solução deste

problema correspondendo ao $n\bar{o}$ j^* referido no algoritmo. Então, temos que:

$$c(E^k, s_0) = \text{Min}_{d_k \in D_k(s_k)} c(E, s_0) \leq c(E^{k-1}, s_0) \text{ pois}$$

$\bar{d}_k \in D_k(s_k)$ pela hipótese (1) sobre o processo de decisões sequenciais. Desta forma, conclui-se que:

$$\begin{aligned} c(E^*, s_0) &= c(E^{p-1}, s_0) \leq \dots \leq c(E^k, s_0) \leq \dots \leq c(E^0, s_0) = \\ &= c(\bar{E}, s_0) \quad \text{donde } c(E^*, s_0) \leq c(\bar{E}, s_0). \end{aligned} \quad \text{CQD.}$$

O teorema acima indica que se pudermos supor que se os conjuntos de decisões admissíveis são idênticos para todos os estados viáveis em um determinado estágio, então cada nova decisão na nova estratégia deve, no mínimo, repetir a decisão correspondente na estratégia anterior. Observe-se que para o nosso problema específico que, para a verificação da hipótese (1), devemos introduzir uma equivalência entre as decisões. Desta forma duas decisões $d_1 = (\bar{A}_1, \bar{Y}_1) \in D_k(s_k)$ e $d_2 = (\bar{A}_2, \bar{Y}_2) \in D_k(s_k)$ são equivalentes quando aplicadas a partir do estado s_k , se $f(s_k, d_1, k) = f(s_k, d_2, k)$.

Desta maneira, tornamos equivalentes decisões que, apesar de conterem projetos sobre arcos $a_j \in A$ diferentes, causam o mesmo efeito quando aplicados ao estado s_k pois para

os arcos $a_j \notin \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, não haverá mudança de nível.

Teorema 2 - Sejam E^1 , E^2 e E^3 três estratégias obtidas uma após a outra pelo algoritmo, aplicado a um grafo estado-estágio, quando se utiliza a heurística \bar{h} expressa anteriormente.

Nestas condições; se $E_1 = E_2$ então $E_1 = E_2 = E_3$.

Demonstração: Basta observar que os problemas, resolvidos no Passo 2 para a obtenção dos nós que compõem os caminhos equivalentes às estratégias, são idênticos na obtenção de E_2 e E_3 pois as heurísticas \bar{h} são idênticas nos dois casos.

A definição completa de um método de solução para o problema de investimentos em uma rede rodoviária depende, ainda, da elaboração de um algoritmo para a resolução do subprograma a ser resolvido na escolha de cada decisão componente da nova estratégia no Passo 2 do algoritmo. Este problema corresponde, de certa forma, a um problema de otimização a curto prazo, já que deseja-se escolher os projetos a serem realizados durante um estágio na rede, minimizando uma certa função objetivo. Desta maneira, poderíamos tentar sua resolução através da adaptação das técnicas desenvolvidas no Capítulo III para o problema da rede ótima. Todavia, visto que pretendemos lidar com redes de grande porte, e o subproblema deve ser resolvido várias vezes, teremos de utilizar um método heurístico de enumeração computacionalmente muito simples, onde apenas uma boa solução será apresentada para cada resolução do subproblema.

O método toma como premissas básicas no seu desenvolvimento as seguintes características:

- i) O método considera a interdependência dos projetos na avaliação de uma melhoria na rede.
- ii) Rapidez na obtenção da solução e o pouco gasto de memória no processo de enumeração. Desta forma, quando se percorre a árvore de soluções do problema, aplica-se uma operação Branch e escolhe-se em seguida o sucessor mais promissor, não se armazenando outras soluções parciais para uma possível operação Backtrack.
- iii) A árvore de soluções deve ter como raiz um nó representando a configuração inicial da rede. A partir deste nó a operação Branch deve acrescentar novos nós, pois a avaliação de modificações deste tipo pode ser computada mais facilmente como demonstramos no Apêndice A, com a apresentação de um algoritmo para este fim.

Consideremos a escolha de uma nova decisão para o estágio k durante a execução do Passo 2 do algoritmo para uma determinada iteração. Seja $s_k = (y_1^k, \dots, y_m^k)$ o estado a partir do qual uma nova decisão $d_k = (\bar{A}, \bar{Y})$ será escolhida, e seja $E^* = (d_1^*, \dots, d_{p-1}^*)$ com $d_i^* = (\bar{A}_i^*, \bar{Y}_i^*)$ a estratégia inicial utilizada para o cálculo da heurística \bar{h} . Podemos expressar o problema de escolha da nova decisão, formulando-o como um problema de rede ótima, com alguns pontos coincidentes com a formulação apresentada no Capítulo III deste trabalho. Deseja-se obter um conjunto de modificações a serem implementadas na rede durante o período k , de modo a minimizar os custos

totais de operação e investimento na rede até o último período do horizonte de planejamento. As configurações da rede utilizadas no cálculo dos custos para os períodos posteriores a $k+1$ são obtidas a partir da aplicação sucessiva das decisões componentes da estratégia E^* . Desta maneira, a formulação que desenvolvemos para o problema deve conter um conjunto restrições para a rede de transportes em cada período, utilizando as configurações mencionadas acima e as matrizes de viagens previstas para cada período. A função objetivo deve incluir apenas os custos a partir do período $k+1$, fazendo $F(d_k) = c(i,j) + h(j)$, onde $i = (s_k, k)$ e $j = (f(s_k, d_k, k), k+1)$, já que o custo total até o período não será alterado com uma nova decisão.

O problema de escolha de uma nova decisão pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\text{Min}_{\bar{Y}, \bar{A}} F = \sum_{m=k+1}^h F^m(Y^m, X^m) \quad \text{onde } F^m(Y^m, X^m) \text{ é o custo total no período } m.$$

sujeito a : i) Restrições da rede de transportes para cada período, com matrizes O/D constantes.

$$H^m(Y^m, X^m) = 0 \quad \text{para } m = k+1, \dots, h.$$

$$x^m \geq 0$$

$$\text{ii) } y_i^{k+1} = \begin{cases} \bar{y}_i^k & \text{se } i \in \bar{A}. \\ y_i^k & \text{se } i \notin \bar{A}. \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad y_i^m = \begin{cases} \bar{y}_i^{*m-1} & \text{se } i \in \bar{A}_{m-1}^* \\ y_i^{m-1} & \text{se } i \in \bar{A}_{m-1}^* \end{cases} \quad \text{para } m=k+2, \dots, p$$

$$\text{iv)} \quad Y^m = Y^p \quad \text{para } m=p+1, \dots, h.$$

$$\text{v)} \quad (\bar{Y}, \bar{A}) \in D_k(s_k).$$

A árvore de soluções utilizada pelo algoritmo é construída de maneira que a cada nó z , está associado um conjunto de arcos $\bar{A}(z)$ A , que indica os arcos modificados em relação à configuração inicial $s_k = (y_1^0, \dots, y_m^0)$, e um vetor $\bar{Y}(z) = \{\bar{y}_1(z), \dots, \bar{y}_m(z)\}$, expressando o nível da configuração de cada arco $a_i \in \bar{A}(z)$ após as modificações. Deste modo, podemos relacionar a cada nó z um subconjunto de soluções do problema, $S(z) = \{(\bar{A}, \bar{Y}) \mid \bar{A} \subseteq \bar{A}(z) \text{ e } \bar{y}_i > \begin{cases} \bar{y}_i(z) & \text{se } a_i \in \bar{A}(z) \\ y_{a_i}^0 & \text{se } a_i \notin \bar{A}(z) \end{cases}\}$.

O nó z_0 raiz da árvore de soluções é definido pela configuração da rede inicial com $\bar{A}(z_0) = \emptyset$. Os sucessores de um determinado nó z^* são gerados com a elevação do nível da configuração de um arco em relação ao par $(\bar{A}(z^*), \bar{Y}(z^*))$. A obtenção de um sucessor consiste em escolher um certo arco a_i , e elevar o nível deste arco para um novo nível y . O conjunto de sucessores (z^*) fica definido da seguinte maneira:

Definição - Um nó z é um sucessor de z^* , i.e., $z \in (z^*)$ se são satisfeitas as seguintes condições:

- i) Existe um arco $a_i \in A$ que pode ser elevado para o nível y de modo que $y > \begin{cases} \bar{y}_i(z) & \text{se } a_i \in \bar{A}(z^*) \\ y_{a_i} & \text{se } a_i \in \bar{A}(z^*) \end{cases}$

CAPÍTULO VEXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL - CONCLUSÕES5.1. Introdução

Apresentamos a seguir, a descrição da implantação em computador do método proposto no Capítulo IV para a resolução de problemas de investimentos em redes rodoviárias. Algumas simplificações foram impostas ao algoritmo para a sua codificação, resultado de limitações dos recursos de máquina e de algumas considerações sobre o problema prático não incluídas na formulação matemática.

Duas fases distintas compõem a codificação do algoritmo. Um primeiro programa obtém uma estratégia inicial, aproveitando algumas características particulares do método quando a heurística h é construída a partir de uma estratégia nula, i.e., suas decisões componentes consistem em não modificar nenhum arco. Nesta situação, a avaliação de cada configuração da rede, durante a resolução do problema da rede ótima para um determinado período, supõe que a configuração testada permanece inalterada até o último período do horizonte de planejamento; possibilitando uma codificação bastante simples do algoritmo. A operação de alocação de tráfego é, então, simultânea para todos os períodos, já que os caminhos mínimos não

se alteram. O segundo programa possibilita a obtenção de novas estratégias a partir de uma estratégia inicial qualquer, que será, preferivelmente, a estratégia obtida como resultado da execução do primeiro programa. Este segundo programa exige mais recursos de máquina, pois a heurística h é construída a partir de uma estratégia geral, necessitando de um processo bastante elaborado para a avaliação de cada configuração, já que a cada operação de alocação de tráfego será preciso conhecer os caminhos mais curtos para as configurações da rede de cada período do horizonte de planejamento.

Os programas oferecem como saídas as características de cada estratégia obtida, informando as alterações efetuadas nos arcos para cada período do plano de construções, de onde podemos contruir as configurações da rede para cada período. Um exemplo ilustrativo está incluído no final deste capítulo demonstrando a utilização dos programas.

5.2. Estrutura dos Programas

Os dois programas correspondendo às duas fases do método de solução foram codificados na linguagem PL1-OS/370. Ambos resultam, basicamente, do mesmo procedimento, utilizando ferramentas comuns. Todavia, na obtenção da primeira estratégia algumas simplificações computacionais são possíveis, possibilitando uma melhor performance do algoritmo. Assim, o primeiro programa utiliza memória auxiliar apenas para o armazenamento dos dados de entrada e resultados. O procedimento para a obtenção de novas estratégias exige que os caminhos e custos mínimos para as configurações da rede a cada período sejam armazenados em arquivos em disco, que são acessados a cada avaliação de uma configuração da rede na resolução do problema de rede ótima para um determinado período. O conteúdo destes arquivos é atualizado a cada modificação de um arco. Além das simplificações no armazenamento das informações utilizadas temporariamente pelo programas, a primeira fase permite a obtenção de uma estratégia em tempos bem menores do que a obtenção das estratégias posteriores. A descrição que se segue diz respeito, primeiramente, aos dados utilizados como entradas para os programas, e, também, à forma de armazenamento e manipulação destas informações. Mais adiante descreveremos detalhadamente o procedimento de cada programa, introduzindo alguns detalhes não esclarecidos na formulação matemática do problema e na descrição do método de solução.

São as seguintes as informações de entrada fornecidas aos programas. Indica-se a forma de manipulação e armazenamento na memória:

1. A estrutura da rede é fornecida através dos arcos existentes e planejados. Os nós extremidades de um arco j estão fornecidos pelo vetor $TRECHO(j,*)$, com $TRECHO(j,2) > TRECHO(j,1)$.

2. A extensão de cada arco i , em cada um dos possíveis níveis de melhoria j são fornecidos pelo vetor $EX(i,j)$.

3. O vetor $NIVIN(i)$ indica o nível inicial de cada arco i , com

$$NIVIN(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ não pertence à rede inicial.} \\ 1 & \text{se } i \text{ pertence à rede inicial.} \end{cases}$$

4. Os níveis admissíveis para cada arco i são indicados pelo vetor $NIVADM(i,*)$. Onde

$$NIVADM(i,k) = \begin{cases} 1 & \text{se o nível } k \text{ é possível.} \\ 0 & \text{se não.} \end{cases}$$

Supõe-se a existência de até 3 níveis para cada arco.

5. O tráfego local diário para cada arco é fornecido para o primeiro e para o último período do horizonte de planejamento, de onde é obtida uma taxa de crescimento linear, utilizada no cálculo do tráfego local para cada período. Para cada arco i $TRLOC(i,ic,1)$ indica o tráfego local no período inicial para a classe de usuários ic .

$TRLOC(i,ic,2)$ indica a taxa de crescimento nas mesmas condi-

ções.

6. O tráfego diário de longa distância é fornecido para apenas duas classes de usuários, automóveis e caminhões, desprezando-se a contribuição do tráfego de ônibus. Para cada classe de usuários a matriz Origem/Destino é fornecida para o primeiro e para o último período do horizonte de planejamento. O vetor $MOD(i,j,k)$ indica as viagens entre as origens i e j da seguinte forma:

$$MOD(i,j,k) = \begin{cases} \text{viagens para o primeiro período} \\ \text{se } i < j. \\ \text{viagens para o último período se} \\ \text{ } i > j. \end{cases}$$

Onde $k=1$ e $k=2$ referem-se, respectivamente, ao tráfego de automóveis e caminhões.

7. O custo de viagem para cada usuário através de um arco i , para o nível k é fornecido através do vetor:

$$CUSTO(i,j,k) = \begin{cases} \text{custo para automóveis} & \text{se } j=2. \\ \text{custo para caminhões} & \text{se } j=3. \\ \text{custo para ônibus} & \text{se } j=4. \end{cases}$$

8. Para efeito do cálculo dos caminhos mínimos, utilizam-se os custos fornecidos pelo vetor $CUSTO(i,1,j)$ para um arco i no nível j . Estes custos referem-se ao custo de viagem por automóveis, e são utilizados na alocação de tráfego de todas as classes de usuários.

9. Os custos de conservação anual para cada arco são divididos em duas partes. O custo fixo anual para um arco i no nível k é expresso pelo vetor $CCONSF(i,k)$. O custo anual para cada viagem diária é fornecido pelo vetor $CCONSV(i,k)$. A parcela variável do custo de conservação no arco i é calculada multiplicando-se este valor pelo número total de viagens através do arco.

10. O custo de construção para um arco i no nível k é expresso pelo vetor $CUSTO 1(i,k)$. Este custo se refere à elevação do nível do arco desde o nível inicial até o nível k , constituindo o único tipo de melhoria permitido.

11. Os custos dos caminhos mínimos ligando cada par de nós iej , $i < j$, estão armazenados, de maneira a aproveitar a simetria do problema, no vetor $C((j-1).(j-2)/2+i)$.

Os caminhos mínimos podem ser obtidos utilizando-se os apontadores armazenados no vetor $SUC(i,j)$, que indicam sempre o próximo arco no caminho de i para j .

12. O orçamento para cada período é fornecido pelo vetor $ORCA(k)$. Este valor limita superiormente o total dos custos de construção para as melhorias implementadas no período k .

13. Os custos de viagem e de manutenção calculados durante um período são referenciados ao primeiro período do horizonte de planejamento, quando são incluídos na função objetivo. A taxa de desconto para cada período k é calculada a partir do custo de oportunidade de Capital, COP, da seguinte maneira:

$$\text{TAX}(k) = 1 / ((1 + \text{COP})^{**k})$$

O procedimento executado pelo primeiro programa está esquematizado na Fig.1 Descrevemos abaixo as particularidades de cada uma das operações que compõem o procedimento, com indicações dos algoritmos especiais utilizados quando for o caso.

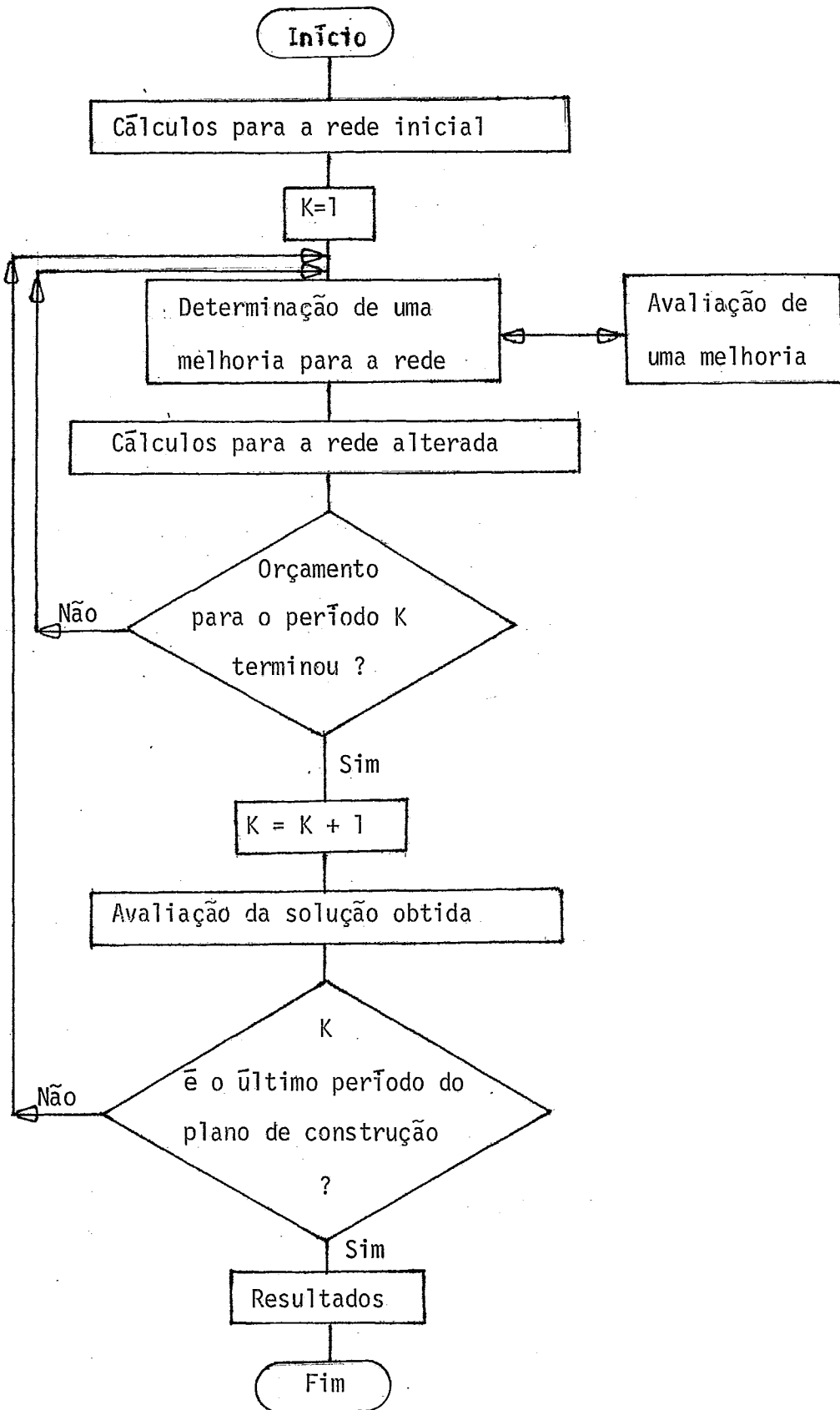


Fig. 1. Fluxograma do programa de obtenção de uma primeira estratégia.

1. Cálculos para a rede inicial - Para a rede inicial são realizadas as seguintes operações:

i) Cálculo dos caminhos mínimos:

Utilizando o algoritmo de Floyd, descrito neste trabalho no Apêndice A dedicado aos algoritmos de caminhos mínimos, são calculados os caminhos mais curtos ligando cada par de nós da rede. Os custos utilizados para cada arco i estão armazenados no vetor $CUSTO(i,l,k)$, onde k é o nível do arco na configuração considerada. Estes custos correspondem, neste trabalho, aos custos de viagem dos automóveis, e as viagens entre os pares Origem/Destino tomarão este caminho obtido qualquer que seja a classe de usuários. Os custos mínimos estão indicados no vetor $C(*)$ e os arcos componentes dos caminhos estão armazenados no vetor $SUC(*,*)$.

ii) Alocação de Tráfego:

Trata-se do cálculo do tráfego de longa distância em cada arco, para as duas classes de usuários em que é considerado este tipo de tráfego, no primeiro e no último período do horizonte de planejamento. Para cada par Origem/Destino percorre-se, arco a arco, o caminho mínimo que liga os nós alocando-se a cada arco o tráfego associado a este par O/D.

Após a obtenção do tráfego de longa distância para o primeiro e último período do horizonte de planejamento, calcula-se, para cada arco, a taxa de crescimento linear do tráfego de longa distância. Os resultados estão armazenados no vetor $TRLDT(i,j,k)$ que indica o tráfego no primeiro período se $k=1$, ou a taxa de crescimento se $k=2$, para o arco i . O tráfego é de automóveis se $j=1$ e de caminhões se $j=2$. O tráfego de longa distância de ônibus foi su posto inexistente.

iii) Cálculo do custo total de operação da rede: Calcula-se o custo total de operação da rede, i.e, custos de viagem e custos de manutenção, durante todo o horizonte de planejamento, supondo a rede inicial alterada. Como resultados, apresentam-se os custos de operação para to do o horizonte de planejamento a partir do primeiro e do segundo período. Este último valor será utilizado na comparação de configurações propostas para a rede a partir do segundo período.

Estes custos totais são calculados supondo-se que, para cada período, os tráfegos local e de longa distância para cada arco são calculados a partir dos tráfegos no primeiro período e da taxa de crescimento obtidas nesta operação. Os

custos calculados para cada período são referenciados ao primeiro período, utilizando-se uma taxa de desconto. Observe-se que o valor obtido para o custo total a partir do primeiro período corresponde ao valor da função objetivo do problema de investimentos na rede rodoviária, quando nenhuma modificação é imposta à rede. O custo total a partir do segundo período expressa o valor inicial da função objetivo do problema de obtenção da nova decisão para o primeiro período, já que as modificações na rede são consideradas no período seguinte às suas implementações.

2 - Determinação de uma melhoria para a rede.

Como são consideradas válidas as modificações que envolvem a elevação do nível de um arco do nível inicial para um dos possíveis níveis de melhoria, examinam-se todos os níveis admissíveis para cada arco ainda não modificado durante o procedimento, desde que o custo de construção da melhoria examinada não esgote o orçamento disponível para o período considerado. Para cada modificação calcula-se o novo custo total de operação desde o período seguinte ao considerado na atual escolha de uma nova decisão, até o último período do horizonte de planejamento. Adiciona-se a este valor, o custo de construção das melhorias já realizadas na rede durante este período, e o custo de construção da modificação ora examinada. Escolhe-se após o exame de todas as possíveis modificações, a melhoria viável, i.e., que diminui o valor anterior da função objetivo, que oferece o menor custo total. Se não

for encontrada nenhuma modificação admissível para a rede a nova decisão para o período K foi encontrada. Observe-se que não são consideradas, nesta operação, as melhorias em que o novo custo de viagem para o arco envolvido iguale ou exceda o custo do caminho mínimo ligando os dois nós extremidades do arco.

3 - Avaliação de uma melhoria.

Durante a escolha de uma nova melhoria para a rede, é necessário o cálculo do novo custo de operação da rede após a adição ou modificação de um arco na rede. As operações contidas neste procedimento são as seguintes:

i) Cálculo das alterações no tráfego.

Sempre que uma modificação na rede rodoviária é tal que o custo de viagem para o novo arco é menor que o custo do caminho mínimo ligando os dois nós extremidades do arco, antes da modificação, pode-se utilizar o algoritmo de atualização dos caminhos mais curtos, descrito no apêndice A deste trabalho. O objetivo deste procedimento é conhecer temporariamente as modificações no tráfego de longa distância que atravessa cada arco.

Através do algoritmo de alteração de caminhos mínimos pode-se obter os pares Origem/Destino entre os quais o caminho mínimo será alterado.

Como as alterações são temporárias, destinando-se apenas à avaliação dos custos de uma modificação, não é preciso atualizar os caminhos mínimos ligando outros pares de nós. A cada par Origem/Destino cujo caminho mínimo é alterado, aplica-se um procedimento que obtém as alterações no tráfego de longa distância no período inicial e na taxa de crescimento para cada arco envolvido no desvio de caminho. As alterações são, porém, apenas temporárias, preservando-se o tráfego de longa distância calculado para a configuração da rede anterior à modificação.

ii) Cálculo da alteração no custo de operação. A partir do cálculo das alterações no tráfego de longa distância em alguns arcos, pode-se calcular o custo total de operação para a nova alternativa para a configuração da rede. Para cada arco cujo tráfego de longa distância foi efetivamente alterado, calculam-se os custos de viagem e conservação antes e depois da modificação, obtendo-se, assim, a contribuição de cada arco para a diferença entre os custos totais de operação antes e depois. Observe-se que para o arco modificado as diferenças de custos se devem não apenas à modificação no tráfego mas também às mudanças nos custos do arco devido à modificação de nível. Aqui também os custos são calculados para cada período após o período K , para o qual procura-se uma nova decisão, até o último período do hori

zonte de planejamento. O custo total é, também, obtido com a soma dos valores referenciados ao primeiro período através de uma taxa de desconto.

4. Cálculos para rede melhorada.

Após a escolha de uma melhoria para a rede, deve-se alterar a configuração da rede, atualizando-se o nível do arco modificado do modo indicado pela melhoria escolhida. Em seguida, atualiza-se o orçamento disponível para o período K, descontando-se o custo de construção da melhoria. A seguir, alteram-se, definitivamente, o tráfego de longa distância, os custos e os caminhos mínimos da seguinte forma:

- i) Alteração na alocação de tráfego e custos de operação.

Utilizando-se o mesmo processo utilizado na avaliação de uma melhoria. Calculam-se as diferenças no tráfego de longa distância e nos custos totais de viagem e conservação. A seguir, altera-se, definitivamente, o tráfego de longa distância, e calcula-se o custo da solução obtida até este momento, expresso pelos novos custos de operação, somados aos custos de construção das melhorias já selecionadas.

- ii) Atualização dos caminhos mínimos da rede. Após a modificação definitiva da configuração

da rede, é necessário atualizar o caminho mínimo entre todos os pares de nós da rede. Desta maneira, na próxima escolha de uma modificação, será possível examinar as mudanças de tráfego para cada alternativa. O algoritmo utilizado é o algoritmo descrito no apêndice A para a modificação dos caminhos mais curtos. Os vetores C e SUC no final do procedimento passam a indicar, respectivamente os novos custos mínimos e os novos caminhos mais curtos.

5. Avaliação da solução obtida para um período.

Ao final da obtenção de um conjunto de melhorias na rede para um período, é necessário calcular os custos totais de viagem e de conservação a partir do período seguinte ao próximo a ser considerado, até o último do horizonte de planejamento. Estes valores serão utilizados na avaliação das melhorias a serem propostas para o período seguinte, correspondendo ao valor inicial da função objetivo do problema de obtenção de uma nova decisão para o período $K+1$.

Após a obtenção de uma estratégia inicial, que pode ser aquela obtida pelo primeiro programa ou qualquer uma considerada conveniente, é possível obter novas estratégias com a execução do procedimento esquematizado na Fig.2. Este procedimento, na realidade, não difere fundamentalmente daquele que define o programa para a obtenção da primeira estratégia. Com efeito, podemos obter os mesmos resultados obtidos pelo primeiro programa se utilizamos o procedimento descrito

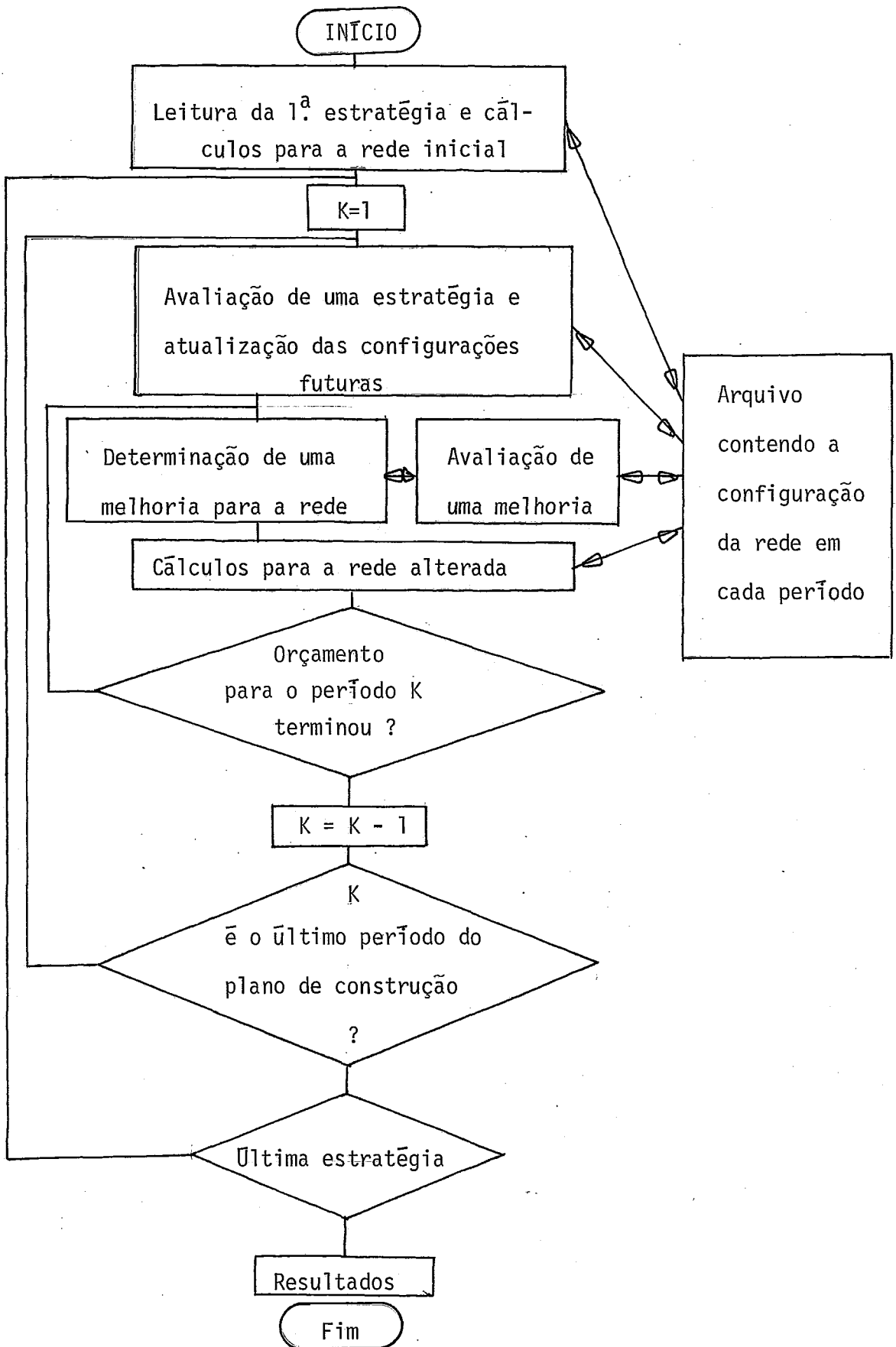


Fig.2. Fluxograma do programa de obtenção de novas estratégias.

a seguir, a partir da mesma estratégia inicial, que consiste em não fazer nenhuma melhoria na rede em qualquer período. Os dois procedimentos se distinguem na medida em que o segundo pode avaliar os custos de operação da rede fazendo diferentes suposições sobre a configuração da rede nos períodos futuros. Estas suposições são expressas pela estratégia inicial fornecida ao programa, utilizada na construção da heurística h .

Descrevemos abaixo as operações que compõem o programa de obtenção de novas estratégias. Referimo-nos à descrição do primeiro programa sempre que houver coincidências entre operações dos dois procedimentos. O fluxograma está esquematizado de maneira que cada nova estratégia obtida durante a execução serve de partida para outra estratégia até que haja repetição de uma solução, o que implica na parada do programa. Outras regras de parada podem ser imaginadas como, por exemplo, a função objetivo não decrescer de um certo valor comparando duas soluções sucessivas.

1. Leitura da estratégia inicial e cálculos para configuração inicial da rede.

O programa obtém do arquivo de entrada informações que determinam, para cada arco melhorando pela estratégia inicial, o período de cada alteração e o nível após a melhoria. A seguir, de maneira análoga ao primeiro programa, executam-se as operações abaixo para a configuração inicial da rede.

- i) Cálculo dos caminhos mínimos.
- ii) Alocação de tráfego.

As características da configuração inicial da rede - nível dos arcos, caminhos mínimos tráfego de longa distância - são armazenados em um arquivo temporário.

2. Avaliação de uma estratégia e atualização das configurações futuras:

O algoritmo, a partir de uma estratégia inicial, constrói uma nova, escolhendo um novo conjunto de melhorias para cada período do plano de construções. No início do processo de decisão do novo conjunto de melhorias de um período, avalia-se o custo total da rede desde o período seguinte ao considerado para as melhorias, até o último período do horizonte de planejamento, supondo que:

- a) Durante o período considerado para a nova decisão, nenhuma melhoria foi realizada. A configuração da rede no final deste período é, então, a mesma do final do último período até onde já foram obtidas as decisões componentes da nova estratégia.
- b) Para os períodos posteriores, supõe-se que os conjuntos de melhorias são os indicados pela estratégia inicial. A configuração da rede no final de cada um destes períodos é obtida iterativamente com a aplicação da decisão componente da estratégia inicial, correspondente a este período, à configuração no final do período anterior.

As seguintes operações devem ser realizadas:

i) Leitura da configuração inicial e cálculo dos custos de operação.

A configuração inicial mencionada acima corresponde àquela resultante da aplicação das decisões já obtidas da nova estratégia até o período anterior ao período K em questão. Os caminhos mínimos, os níveis de cada arco e o tráfego de longa distância, para esta configuração, são lidos do arquivo temporário. Os arcos envolvidos nas decisões componentes da estratégia inicial, exceto os incluídos na porção já decidida da nova estratégia, estão todos disponíveis para melhorias. Os custos de operação, durante o período K+1, para esta configuração inicial da rede, são calculados

ii) Construção e cálculos para as configurações futuras.

A partir da configuração inicial referida acima, são aplicadas as melhorias indicadas pela estratégia inicial, obtendo-se as configurações válidas ao final de cada um dos períodos futuros, componentes do plano de construções. As seguintes operações são aplicadas a cada uma destas configurações:

- a) Cálculo dos caminho mínimos.
- b) Alocação de tráfego
- c) Cálculo do Custos operacionais

Utilizando-se a configuração obtida para o

final de cada período, calculam-se os custos operacionais durante o período seguinte a cada um deles, exceto o último período do plano de construção em que a configuração resultante é utilizada para o cálculo dos custos operacionais durante todos os períodos posteriores, até o último do horizonte de planejamento.

iii) Avaliação do custo total da estratégia.

Somando-se os custos operacionais durante todos os períodos que seguem a período k para o qual se escolhe o novo conjunto de melhorias, e adicionando-se a este total o custo de construção das melhorias nas configurações futuras resultantes da primeira estratégia, obtêm-se o valor inicial da função objetivo do problema de escolha da nova decisão para o período k .

3. Determinação de uma melhoria na rede.

Procede-se de maneira análoga ao primeiro programa. Serão examinados todos os arcos ainda não melhorados pela nova estratégia nos períodos anteriores. Estão, portanto, incluídos nos arcos passíveis de melhoria os arcos envolvidos nas decisões da antiga estratégia. Para cada possível melhoria, o custo de avaliação inclui os custos de construção das melhorias supostas para os períodos posteriores a partir da estratégia inicial, os custos de construção das melhorias já incluídas na nova decisão para o atual período, e o custo da nova melhoria proposta. Sempre que o arco proposto para modificação já está incluído nos conjuntos de melhorias posteriores obtidos da estratégia antiga, desconta-se do custo total o custo de construção desta melhoria. De resto, o procedimento é idêntico ao do primeiro programa.

4. Avaliação de uma melhoria.

Durante a escolha de uma nova melhoria para a rede, o cálculo do novo custo de operação, após a modificação de um arco, se faz através das operações abaixo. Para cada período do plano de construções, a partir do período seguinte àquele considerado para as melhorias e até, exclusive, o primeiro período em cuja configuração o arco considerado já foi modificado, executa-se o seguinte procedimento:

i) Leitura dos dados da rede para o período.

Obtém-se, a partir de um arquivo temporário, os caminhos mais curtos, o nível de cada arco, o tráfego de longa distância para cada arco, para a configuração da rede considerada para o período durante o qual se calcula novo custo de operação.

ii) Cálculo das alterações no tráfego.

Utilizando-se as informações obtidas da forma acima, procede-se de maneira idêntica ao primeiro programa.

iii) Cálculo da alteração no custo operacional.

Procede-se de maneira idêntica ao primeiro programa. Calcula-se, porém, a diferença de custos de operação durante apenas o período considerado, com exceção do último período do plano de construções. Neste caso, a operação se refere aos custos até o último período do horizonte de planejamento.

5. Cálculos para a rede melhorada.

Após a escolha de uma melhoria para a rede, de ve-se atualizar o nível do arco melhorado e atualizar o orçamento disponível para o período K. Se o arco modificado estava envolvido em alguma das decisões da estratégia inicial, para algum dos períodos futuros, o custo de construção de melhorias futuras deve ser atualizado, descontando-se o custo da modificação que envolvia o arco escolhido. A seguir, para cada período posterior ao período considerado para a nova decisão, e até, exclusive, o primeiro período em cuja configuração o arco considerado já havia sido modificado, realizam-se as seguintes operações:

- i) Leitura dos dados da rede para o período.
- ii) Cálculo das alterações no tráfego.
- iii) Cálculo da alteração no custo operacional.

Todas idênticas às operações para a avaliação de uma melhoria. Em seguida, executa-se os procedimentos:

- iv) Atualização dos caminhos mínimos da rede.
São atualizados todos os caminhos mínimos para a nova configuração da rede no período considerado.
- v) Atualização do arquivo temporário.
Os novos caminhos mínimos, os novos níveis para os arcos e o novo tráfego de longa distância pa

ra cada arco são armazenados no arquivo temporário.

6. Arquivo temporário para as configurações da rede em cada período.

Para cada período do plano de construções, o arquivo contém informações que expressam a configuração da rede no final do período.

São os seguintes os dados fornecidos para cada configuração:

- a) Caminhos mínimos.
- b) Nível dos arcos.
- c) Tráfego de longa distância para cada arco.

5.3. Exemplo

A Fig. 1 apresenta uma rede exemplo à qual aplicamos o procedimento computacional descrito neste capítulo para a resolução de problemas de investimentos em redes rodoviárias. O processo de planejamento abrange um período de construção de 4 anos, supondo-se um horizonte de planejamento de 5 anos na avaliação dos projetos. Na Fig.1, as linhas tracejadas representam os novos arcos, não incluídos na rede básica. Para cada arco, inclusive aqueles pertencentes à rede básica, podem existir até 3 níveis possíveis. Os nós assinalados indicam as zonas geradoras de tráfego. Os dados de entrada estão indicados nas tabelas que se seguem, indicando o volume de tráfego local em cada arco, o volume de tráfego de longa distância para cada par Origem/Destino, os custos de viagem, conservação e construção para cada nível dos arcos, além do orçamento para cada período do plano de construção. A taxa de desconto foi considerada nula para este exemplo.

Dentro destas condições, o primeiro programa foi aplicado ao problema, fornecendo a primeira estratégia indicada nos resultados finais. Esta estratégia foi utilizada como partida para o segundo problema, fornecendo estratégias sucessivas até que houvesse uma repetição de soluções, quando o procedimento foi interrompido.

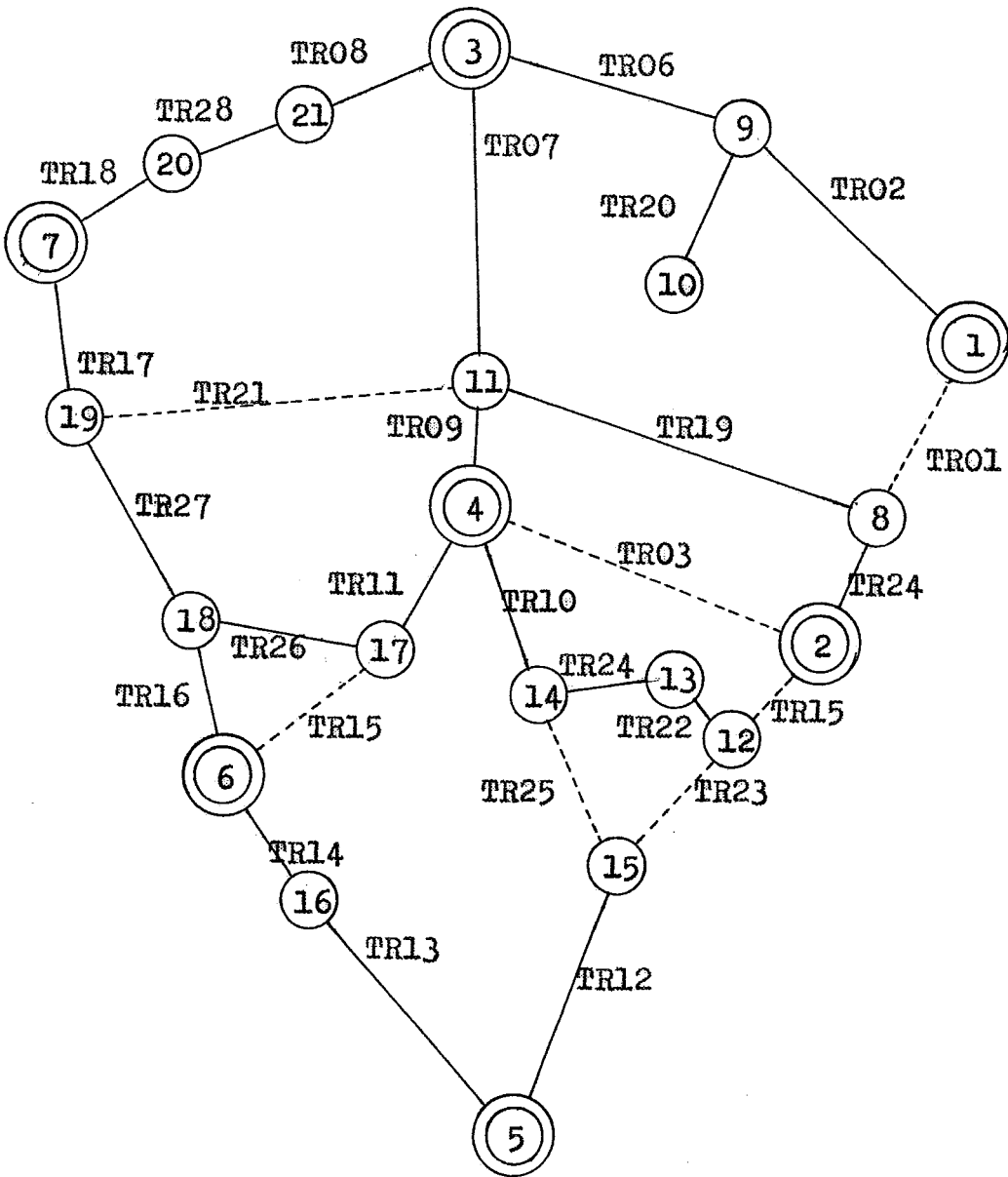


Fig 1. Rede exemplo

REDE EXEMPLO - DADOS DE ENTRADA

TRAFEGO LOCAL

TRECHO	NO INIC.FINAL	E/P	AUTOMOVEIS	TRAFEGO DIARIO-ANO	BASE UNIBUS	AUTOMOVEIS	FATOR DE CRESCIMENTO	ONIBUS
TR01	1 8	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR02	1 9	0	1725	468	499	1.0364	1.0319	1.0305
TR03	2 8	0	66	165	0	1.0603	1.0169	1.0261
TR04	2 4	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR05	2 12	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR06	3 9	0	710	454	237	1.0364	1.0319	1.0305
TR07	3 11	0	139	146	54	1.0364	1.0319	1.0305
TR08	3 21	0	166	177	112	1.0364	1.0319	1.0305
TR09	4 4	0	68	66	74	1.0603	1.0169	1.0261
TR10	4 14	0	36	78	3	1.0603	1.0169	1.0261
TR11	4 17	0	134	138	76	1.0603	1.0169	1.0261
TR12	5 15	0	56	18	5	1.0603	1.0169	1.0261
TR13	5 16	0	34	32	8	1.0603	1.0169	1.0261
TR14	6 16	0	49	223	2	1.0603	1.0169	1.0261
TR15	6 17	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR16	6 18	0	35	29	0	1.0603	1.0169	1.0261
TR17	7 19	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR18	7 20	0	148	30	107	1.0302	1.0312	1.0413
TR19	8 11	0	57	44	4	1.0364	1.0319	1.0305
TR20	9 10	0	27	17	4	1.0364	1.0319	1.0305
TR21	11 19	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR22	12 13	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR23	12 15	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR24	13 14	0	30	36	3	1.0603	1.0169	1.0261
TR25	14 15	1	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
TR26	17 18	0	6	9	2	1.0603	1.0169	1.0261
TR27	18 19	0	24	20	0	1.0437	1.0237	1.0392
TR28	20 21	0	0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000

		TRAFEGO DE LONGA DISTANCIA			
ORIGEM	DESTINO	AUTOMOVEIS		CAMINHÕES	
		ANO BASE	FUTURO	ANO BASE	FUTURO
1	2	123.0	125.0	103.0	233.0
1	3	24.0	24.0	9.0	18.0
1	4	71.0	104.0	58.0	115.0
1	5	227.0	333.0	111.0	806.0
1	6	40.0	251.0	31.0	83.0
1	7	250.0	300.0	105.0	302.0
2	3	21.0	31.0	43.0	43.0
2	4	11.0	58.0	15.0	15.0
2	5	21.0	31.0	43.0	43.0
2	6	71.0	104.0	58.0	115.0
2	7	138.0	235.0	173.0	178.0
3	4	4.0	345.0	2.0	21.0
3	5	146.0	166.0	90.0	149.0
3	6	28.0	36.0	23.0	29.0
3	7	44.0	44.0	16.0	25.0
4	5	1.0	15.0	1.0	8.0
4	6	56.0	100.0	18.0	29.0
4	7	11.0	11.0	4.0	6.0
5	6	12.0	12.0	7.0	12.0
5	7	202.0	300.0	73.0	93.0
6	7	27.0	32.0	10.0	17.0

C U S T O S

TRECHO	NO INIC.FINAL	NIVEL	EXTENSAD	CUSTOS DE VIAGEM AUTO. CAMIN. UNIBUS	CUSTOS DE CONSERVACAO FATOR	CUSTOS DE CONSTRUCAO
TR01	1 8	3	20.0	12.4 30.6 52.2	0.91	2918.0
TR01	1 8	6	20.0	11.2 26.9 42.5	1.00	3602.0
TR02	1 9	7	11.8	6.6 15.5 27.1	1.00	0.0
TR03	2 8	6	15.0	13.6 20.1 31.1	1.00	0.0
TR03	2 8	7	15.0	13.6 20.1 31.1	1.00	1105.0
TR04	2 4	4	27.6	24.0 54.5 94.4	1.07	3000.0
TR04	2 4	5	26.0	13.4 30.7 54.8	0.60	4436.0
TR04	2 4	6	26.0	13.3 30.7 54.8	1.00	4543.0
TR05	2 12	2	5.0	3.0 7.5 13.0	0.84	1189.0
TR05	2 12	3	5.0	3.0 7.5 13.0	0.91	1152.0
TR06	3 9	7	22.0	11.6 27.4 47.6	1.00	0.0
TR07	3 11	7	12.0	6.5 15.1 20.5	1.00	0.0
TR08	3 21	7	17.0	8.7 20.1 30.0	1.00	0.0
TR09	4 11	7	22.0	11.6 27.4 47.6	1.00	0.0
TR10	4 14	2	11.5	8.8 20.0 37.0	1.04	0.0
TR10	4 14	3	11.0	6.7 16.4 23.4	0.84	240.0
TR10	4 14	5	11.0	5.6 13.0 23.2	0.60	606.0

C U S T O S

TRECHO	NO INIC.FINAL	NIVEL	EXTENSÃO	CUSTOS DE VIAGEM AUTO. CAMIN. UNIBUS	CUSTOS DE CONSERVACAO INDICE	FATOR	CUSTOS DE CONSTRUCAO
TR11	4 17	7	5.0	2.6 6.2 10.8	5	1.00	0.0
TR12	5 15	1	27.0	22.4 50.5 90.7	3	1.18	0.0
TR12	5 15	2	26.0	15.8 38.9 67.1	2	0.84	1266.0
TR12	5 15	3	26.0	15.8 38.9 67.1	2	0.91	1112.0
TR13	5 16	6	15.0	7.9 20.1 32.6	6	1.00	0.0
TR13	5 16	7	15.0	7.9 20.1 32.6	4	1.00	1107.0
TR14	6 16	6	27.1	13.9 32.1 52.2	6	1.00	0.0
TR14	6 16	7	27.1	13.9 32.1 57.2	4	1.00	2021.0
TR15	6 17	7	29.0	15.2 35.5 62.4	5	1.00	2000.0
TR16	6 18	1	17.0	16.0 35.7 59.5	1	0.93	0.0
TR16	6 18	2	17.0	10.5 26.0 44.4	2	0.84	1884.0
TR16	6 18	3	17.0	10.5 26.0 44.4	2	0.91	2374.0
TR17	7 19	3	14.0	8.6 21.5 30.8	3	1.14	0.0
TR17	7 19	4	14.0	8.5 21.1 30.2	2	1.00	581.0
TR17	7 19	5	14.0	7.2 16.7 29.6	6	1.00	894.0
TR18	7 20	7	20.0	10.2 23.0 42.1	4	1.00	0.0
TR19	8 11	6	19.5	10.5 25.8 41.2	6	1.00	0.0
TR19	8 11	7	19.5	10.5 25.7 41.2	4	1.00	1343.0

C U S T O S

TRECHO	NO INIC.	NO FINAL	NIVEL	EXTENSÃO	CUSTOS DE VIAGEM AUTO. CAMIN. UNIBUS	CUSTOS DE CONSERVAÇÃO FATOR	CUSTOS DE CONSERVAÇÃO INDICE	CUSTOS DE CONSTRUÇÃO
TR20	9	10	1	9.0	7.8	0.93	1	0.0
TR20	9	10	2	9.0	5.4	0.84	2	246.0
TR20	9	10	3	9.0	5.4	0.91	2	300.0
TR21	11	19	1	15.0	14.1	0.93	1	1000.0
TR21	11	19	2	15.0	9.3	0.84	2	1422.0
TR21	11	19	3	15.0	9.3	0.91	2	1485.0
TR22	12	13	2	8.0	4.8	0.84	2	250.0
TR22	12	13	3	8.0	4.8	0.91	2	296.0
TR23	12	15	2	18.0	10.8	0.84	2	1189.0
TR23	12	15	3	18.0	10.8	0.91	2	1152.0
TR24	13	14	1	12.0	12.9	1.18	3	0.0
TR24	13	14	2	12.0	7.6	0.84	2	199.0
TR24	13	14	3	12.0	7.6	0.91	2	234.0
TR25	14	15	1	19.0	13.3	1.10	3	1000.0
TR25	14	15	2	19.0	11.5	0.84	2	1356.0
TR25	14	15	3	19.0	11.5	0.91	2	1423.0
TR26	17	18	1	32.4	28.0	1.10	3	0.0
TR26	17	18	2	32.4	19.7	0.84	2	522.0
TR26	17	18	3	32.4	19.7	0.91	2	599.0
TR27	18	19	1	15.0	14.1	0.93	1	0.0
TR27	18	19	2	15.0	9.3	0.84	2	496.0
TR27	18	19	3	15.0	9.3	0.91	2	583.0

C U S T O S

TRECHO	NC INIC.FINAL	NIVEL	EXTENSAD	CUSTOS DE VIAGEM AUTO. CAMIN. UNIBUS	CUSTOS DE CONSERVACAO INDICE	CUSTOS DE CONSERVACAO FATOR	CUSTOS DE CONSTRUCAO
TR28	20 21	7	17.0	8.7 20.1 36.0	4	1.00	500.0

NIVEIS E CUSTOS DE CONSERVACAO

SUPERFICIE DE ROLAMENTO INDICE	CONS. PERIODICA		CONS. ROTINA	
	CUSTO FIXO	CUSTO VARIAVEL	CUSTO FIXO	CUSTO VARIAVEL
1	1477.00	29.53	0.00	0.00
2	2217.00	22.17	0.00	0.00
3	2313.00	23.13	0.00	0.00
4	1816.00	1.82	3280.00	0.46
5	2389.00	2.39	8200.00	0.55
6	1960.00	1.96	9184.00	1.31

O R C A M E N T O	
ANO	ORCAMENTO
1	4000.0
2	3000.0
3	3000.0
4	2000.0

RESULTADOS FINAIS

FOLHA - 1

ESTRATEGIA - 1

ANO	TRECHO MELHORADO	INICIAL	NIVEL FINAL	CUSTO DE CONSTRUCAO
1	TR15	0	1	2000.0
1	TR21	0	2	1422.0
1	TR27	1	2	496.0
2	TR01	0	1	2918.0
3	TR05	0	2	1152.0
3	TR10	1	3	606.0
3	TR17	1	3	894.0
3	TR24	1	2	199.0
4	TR23	0	1	1189.0

CUSTO TOTAL DA ESTRATEGIA * 1.354300E+09

OBS)

.....CUSTO TOTAL DE OPERACAO DA REDE SEM MELHORIAS * 1.852461E+09.....

ESTRATEGIA - 2

ANO	TRECHO MELHORADO	INICIAL	NIVEL FINAL	CUSTO DE CONSTRUCAO
1	TR15	0	1	2000.0
1	TR21	0	2	1422.0
1	TR27	1	2	496.0
2	TR01	0	1	2918.0
3	TR05	0	2	1152.0
3	TR10	1	3	606.0
3	TR23	0	1	1189.0
4	TR12	1	3	1112.0
4	TR24	1	2	199.0

CUSTO TOTAL DA ESTRATEGIA * 1.330689E+09

5.4. Conclusões

O desenvolvimento e implantação do método de solução para problemas de investimentos em redes de transportes, neste trabalho, levaram em conta, principalmente, os problemas de eficiência computacional. Desta maneira, procurou-se construir um procedimento que reduzisse radicalmente o número de configurações da rede examinadas para cada um dos períodos do plano de construção, embora tenha-se procurado dotar o método de artifícios que o possibilitassem oferecer soluções melhores que uma simples estratégia incremental. Dentro deste procedimento para a resolução do problema de planejamento a longo prazo, encontramos um problema de otimização de rede a curto prazo. Do ponto de vista computacional, procurou-se um método de enumeração bastante simples para a resolução deste último problema. Utilizando intensamente recursos de memória da máquina, com auxílio do algoritmo de Floyd e do procedimento descrito no Apêndice A para a atualização de caminhos mínimos, foi possível elaborar um ferramental bastante eficiente - no que diz respeito ao esforço computacional exigido - se ser utilizado pelo método na avaliação de configurações para a rede.

A experiência computacional com uma pequena rede exemplo mostrou-se satisfatória. A obtenção de uma primeira estratégia foi, como se podia prever, bastante rápida. As estratégias posteriores resultam de pequenas alterações na primeira solução que implica em pequenas reduções no custo total das estratégias. Infelizmente não é possível comparar a solu-

ção obtida com uma solução ótima do problema. A solução ótima não poderia ser obtida por outros métodos mesmo para esta rede de pequeno porte (21 nós x 28 arcos). Todavia, a comparação das soluções obtidas pelo procedimento aplicado nos garante reduções significativas no valor da função objetivo, e a sucessão de novas estratégias indica, com reduções cada vez menores, de certo modo, uma proximidade da solução ótima. A utilização do método com uma rede de grande porte (105 nós x 166 arcos) demonstrou a eficiência do programa de obtenção da primeira estratégia. Todavia, a aplicação do segundo programa não foi possível em um tempo de computação razoável. Embora o esforço computacional exigido na obtenção de novas estratégias seja de 5 a 10 vezes maior que o exigido pelo primeiro programa, se consideramos apenas as operações aritméticas, o grande número de acessos à memória auxiliar impossibilitam a utilização do programa a menos que seja tentada uma programação mais eficiente quanto a este aspecto. Outras possibilidades de melhoria residem na simplificação da heurística, utilizada na previsão dos custos futuros durante a obtenção de novas estratégias. Poderíamos, por exemplo, utilizar apenas a configuração final da rede na avaliação dos custos futuros, embora isto implique na perda de sensibilidade do método na escolha do período de implementação de um projeto.

Superado o obstáculo computacional, a política de utilização do programa pode ser fixada. Primeiramente, poderia-se aplicar sucessivamente o primeiro programa com manipulação externa dos dados da rede fruto do conhecimento empírico da estrutura da rede. Desta maneira, seria obtida uma primeira estratégia apoiada no conhecimento prévio do problema prático

co. O segundo programa seria aplicado, então, objetivamente um ajuste fino da solução. O primeiro programa, dadas suas características de eficiência e rapidez, pode ser utilizado como uma ferramenta de análise do problema, enquanto o segundo seria um instrumento de otimização.

APENDICE AALGORITMOS DE BUSCA DE TODOS OS CAMINHOSMAIS CURTOS EM UM GRAFOA.1. Intródução

A procura de caminhos mais curtos em um grafo é um problema frequentemente focalizado em se tratando de redes de transportes ou telecomunicações. A referência [41] apresenta uma grande coleção de algoritmos com este fim, indicando os métodos mais apropriados para cada tipo específico de problema. A finalidade deste apêndice é apresentar alguns métodos de caminhos mínimos, com o objetivo de utilizá-los na resolução de problemas de alocação de tráfego. A utilização destes algoritmos é imediata sempre que o tráfego é alocado supondo-se que o custo de viagem através de um arco independe do fluxo que o atravessa. Neste caso, a determinação dos caminhos mínimos ligando cada par Origem/Destino e a posterior alocação das viagens correspondentes por estes caminhos são suficientes para a obtenção do fluxo ótimo. Uma revisão dos algoritmos utilizados em redes de transportes, com esta finalidade, pode ser encontrada no capítulo 7 da referência [9].

Neste trabalho, procuramos utilizar algoritmos de busca de todos os caminhos mais curtos na resolução do problema de alocação de tráfego. Normalmente, prefere-se a busca individual dos caminhos mínimos ligando cada par Origem/Destino, ou a procura de todos os caminhos a partir de cada nó origem. A busca de todos os caminhos mínimos só se justifica, em termos de eficiência, quando o número de pares Origem/Destino é grande em relação ao tamanho do grafo, ou então, quando deseja-se atualizar os caminhos mínimos após modificações na configuração da rede. Neste último caso, no qual incluímos a resolução de problemas de investimentos em redes de transportes, o conhecimento de todos os caminhos mínimos na configuração inicial da rede possibilita a utilização de um procedimento bastante eficiente para a atualização dos caminhos mínimos após uma modificação em um arco.

Os principais algoritmos para a busca de todos os caminhos mínimos são os chamados algoritmos matriciais. Os algoritmos de Floyd e Dantzig, apresentados respectivamente nas referências [46] e [47], são os que tem recebido maior atenção, e a partir deles é que foram obtidos os procedimentos mais eficientes. Embora os dois algoritmos exijam, teoricamente, o mesmo número de comparações e adições, seus desempenhos são diversos quando adicionam-se mecanismos que aproveitem alguma forma especial de topologia do grafo. Apresentamos aqui estes dois algoritmos, junto com a descrição de variações sobre o algoritmo de Dantzig apresentadas nas referências [48] e [49]. Estas variações introduzem procedimentos que levam em conta a inexistência de arcos no grafo. Além da descrição dos

algoritmos, desenvolvemos neste apêndice um procedimento para a atualização dos caminhos mais curtos após uma diminuição no custo de algum arco.

Outros métodos, incluídos na classe dos algoritmos matriciais, podem ser considerados para a busca de todos os caminhos mínimos, embora sua aplicação não seja interessante neste trabalho. O algoritmo de Hu desenvolvido na referência [50], embora teoricamente inferior aos de Dantzig e Floyd, pode apresentar algumas vantagens quando aplicado a grafos esparsos. Um procedimento baseado no algoritmo de Floyd, associado a uma forma de decomposição do grafo, foi proposta na referência [51] para a utilização em grafos fracamente conexos. As referências [52] e [53] contêm extensões para este procedimento.

A.2. Algoritmo de Dantzig e suas extensões

A.2.1. Algoritmo Original

O método apresentado por Dantzig na referência [45] constrói matrizes de dimensões crescentes, tais que a k ésima iteração produz D , uma matriz $k \times k$, cujos elementos, d_{ij} , são os comprimentos dos caminhos mínimos ligando o nó i ao nó j , através do subgrafo formado pelos k primeiros nós do grafo considerado para a busca dos caminhos mínimos. Na iteração seguinte, acrescenta-se mais um nó ao subgrafo da iteração anterior, e obtém-se a nova matriz $(k+1) \times (k+1)$, D , contendo os comprimentos dos caminhos mínimos através do novo subgrafo.

Considere-se um grafo $G=(N,M)$ orientado, com um conjunto N de nós de n elementos, e um conjunto M de arcos. A cada arco $(i,j) \in M$ está associado um comprimento, expresso por d_{ij} . Supomos que $d_{ii} = 0$ para todo $i \in N$. Para os demais pares ordenados $(i,j) \notin M$, associamos o valor $d_{ij} = \infty$. O algoritmo de Dantzig se utiliza, a cada iteração, dos valores d_{ij}^* que expressam os comprimentos dos caminhos mínimos ligando cada par de nós i e $j \in S = \{1, 2, \dots, p-1\}$, através do subgrafo construído com o subconjunto de nós $S \subset N$.

A partir dos valores d_{ij} e d_{ij}^* , são calculados os valores dos novos caminhos mínimos $\bar{d}_{ij}^{(*)}$ ligando os nós i e $j \in S \cup \{p\}$, através do subgrafo construído com o subconjunto $S \cup \{p\}$. Inicialmente, faz-se $S = \{1\}$, e, então, para $p = 2, \dots, n$, realizamos as seguintes operações:

FASE 1 - Cálculo dos caminhos mais curtos ligando o nó p e os nós pertencentes a $S = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$.

Passo 1: Calcular $d_{pi}^* = \min_{j \in S} |d_{pj} + \bar{d}_{ji}|$ para $i = 1, \dots, p-1$.

(Como por hipótese $d_{ii} = 0$, pois não existem ciclos negativos no subgrafo construído com S , esta operação é sempre possível).

Passo 2: Calcular $d_{ip}^* = \min_{j \in S} |\bar{d}_{ij} + d_{jp}|$ para $i = 1, \dots, p-1$.

Passo 3: Se $d_{pi}^* + d_{ip}^* \geq 0$ para todo $i=1, \dots, p-1$, fazer $d_{pp}^* = 0$.

Se não, parar - foi encontrado um ciclo negativo.

(*) Na implantação deste algoritmo em computador, os valores d , d^* e \bar{d} estão armazenados no mesmo local. A diferença de notação se faz necessária apenas para tornar mais claro o desenvolvimento teórico do algoritmo.

FASE 2 - Atualização dos caminhos mais curtos entre os nós pertencentes a $S = \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Passo 4: $d_{ij}^* = \min\{\bar{d}_{ij}, d_{ip}^* + d_{pj}^*\}$ para $i = 1, \dots, p-1$ e $j = 1, \dots, p-1$.

$\bar{d}_{ij} = d_{ij}^*$ para $i=1, \dots, p$ e $j=1, \dots, p$.

Não há restrições quanto ao sinal das distâncias entre os nós. O algoritmo fornece ao seu término os caminhos mais curtos entre os nós ou, então, detecta a existência de um ciclo negativo. A argumentação do procedimento indutivo de Dantzig pode ser resumido em 4 observações:

- i) Seja $i_1 \in S$. Qualquer caminho mais curto ligando os nós i_1 e p , através do subgrafo construído com os nós de $S \cup \{p\}$, é formado ou pelo arco (i_1, p) somente, ou pelo caminho mínimo ligando i_1 e um nó $i_2 \in S$, através do subgrafo construído com S , seguido do arco (i_2, p) .
- ii) Similarmente, qualquer caminho mais curto ligando os nós p e i_1 ou é o arco (p, i_1) apenas, ou o caminho mais curto entre P e $i_2 \in S$, seguido do arco (i_2, i_1) .

- iii) Como não existem ciclos negativos no subgrafo construído com S , qualquer ciclo negativo no subgrafo construído com $S \cup \{p\}$ passa por p . Existe neste caso $i \in S$ tal que $\bar{d}_{ip} + \bar{d}_{pi} < 0$.
- iv) O caminho mais curto entre i e $j \in S$ através do subgrafo construído com $S \cup \{p\}$, ou permanece o mesmo, ou passa por p .

A.2.2. Aproveitamento da Inexistência de Arcos

O algoritmo de Dantzig não pode, na forma em que foi apresentado em A.2.1., aproveitar-se da inexistência de arcos. Se temos $d_{pj} = \infty$ no Passo 1 ou $d_{jp} = \infty$ no Passo 2, o procedimento não pode evitar uma série de comparações e somas como é possível em outros algoritmos matriciais. A fim de superar em parte esta dificuldade, uma modificação, proposta na referência [49], pode ser imposta ao algoritmo original.

A modificação a ser introduzida nos Passos 1 e 2 do algoritmo parte de uma idéia bastante simples que pode ser facilmente observada se reescrevemos o Passo 1 do algoritmo original, explicitando a operação $\text{Min}_{j \in S} |d_{pj} + \bar{d}_{ji}|$.

Passo 1 : Calcular $d_{pi}^*(j) = \text{Min} |d_{pi}^*(j-1), d_{pj} + \bar{d}_{ji}|$
para $j=1, \dots, p-1$, e para $i=1, \dots, p-1$.

Sendo $d_{pi}^*(0) = \infty$ e $d_{pi}^* = d_{pi}^*(p-1)$.

Aqui novamente, $d_{pi}^*(j)$ é introduzido apenas para a clareza da notação, já que

$d_{pi}^*(j)$ e d_{pi}^* podem ser armazenados no mesmo local.

Com a ajuda da nova notação, podemos observar que para $j=1, \dots, p-1$, $d_{pi}^*(j) = \text{Min}_{1 \leq j' \leq j} |d_{pj'} + \bar{d}_{j'i}|$ de maneira que podemos trocar a ordem de cálculo dos valores $d_{pi}^*(j)$, fazendo $i=1, \dots, p-1$ para cada $j=1, \dots, p-1$. O Passo 1 será então reescrito da seguinte forma:

Passo 1 : Fazer $d_{pi}^*(0) = \infty$ para $i=1, \dots, p-1$. Calcular $d_{pi}^*(j) = \text{Min} |d_{pi}^*(j-1), d_{pj} + \bar{d}_{ji}|$ para $i=1, \dots, p-1$, e $j=1, \dots, p-1$.

Desta maneira, se $d_{pj} = \infty$, i.e., não existe o arco (p, j) , então $d_{pj} + \bar{d}_{ji} \geq d_{pi}^*(j-1)$, donde $d_{pi}^*(j) = d_{pi}^*(j-1)$, ocupando ambos o mesmo local na memória. Portanto, nenhuma operação é necessária, e as comparações $\text{Min} |d_{pi}^*(j-1), d_{pj} + \bar{d}_{ji}|$ podem ser evitadas para $i=1, \dots, p-1$.

Mais operações podem ser evitadas com uma outra modificação similar. Suponhamos que $d_{pj} \geq d_{pj}^*(j-1)$. Se $d_{pj} = \infty$, já observamos que $d_{pi}^*(j) = d_{pi}^*(j-1)$. Se $d_{pj} < \infty$, então existe $1 \leq j' < j$ tal que $d_{pj}^*(j-1) = d_{pj'} + \bar{d}_{j'p} \leq d_{pj}$. Neste caso,

$d_{pi}^*(j-1) \leq d_{pj} + \bar{d}_{j,i} \leq d_{pj} + \bar{d}_{j,j} + \bar{d}_{ji} \leq d_{pj} + \bar{d}_{ji}$, donde
 $d_{pi}^*(j) = \text{Min} | d_{pi}^*(j-1), d_{pj} + \bar{d}_{ji} | = d_{pi}^*(j-1)$, exatamente como no
 caso $d_{pj} = \infty$. A razão deste fato é bastante simples. Se o cami-
 nho mais curto entre os nós p e j não é o arco (p,j) , somente,
 este arco pode ser ignorado sem prejuízo do cálculo dos cami-
 nhos mais curtos.

A implantação desta modificação oferece, porém,
 um obstáculo. Os valores d_{pi} e $d_{pi}^*(j)$ não poderiam estar arma-
 zenados no mesmo local, a fim de permitir a comparação
 " $d_{pj} \geq d_{pj}^*(j-1)$ ". Este problema pode ser contornado se houver
 interesse de, paralelamente à obtenção do comprimento dos cami-
 nhos mínimo, obter os caminhos propriamente ditos, através de
 uma matriz de sucessores S , cujos elementos, s_{ij} , indicam o nó
 sucessor de i no caminho mais curto para j . A matriz de suces-
 sores é atualizada sempre que algum valor d_{ij}^* é alterado, indi-
 cando sempre o caminho correspondente aos d_{ij}^* atuais. Desta
 forma, o teste " $d_{pj} \geq d_{pj}^*(j-1)$ " pode ser substituído por
 " $s_{pj} \neq j$ ", i.e., verificar se não foi encontrado algum cami-
 nho ligando p a j diferente do arco (p,j) apenas.

O algoritmo de Dantzig pode, então, ser reescri-
 to com as modificações no Passo 1 e com modificações análogo
 as no Passo 2.

Passo 1 + 2 : Fazer $d_{ip}^*(0) = \infty$ e $d_{pi}^*(0) = \infty$ para
 $i=1, \dots, p-1$.

Fazer para $j=1, \dots, p-1$, as seguintes
 operações:

a) Se $d_{pj} \geq d_{pj}^*(j-1)$ (i.e., $s_{pj} \neq j$), então $d_{pi}^*(j) = d_{pi}^*(j-1)$ para $i=1, \dots, p-1$.

Se não, $d_{pi}^*(j) = \text{Min} | d_{pi}^*(j-1), d_{pj} + \bar{d}_{ji} |$ para $i=1, \dots, p-1$.

b) Se $d_{pj} \geq d_{pj}^*(j-1)$ (i.e., $s_{jp} \neq p$), então $d_{ip}^*(j) = d_{ip}^*(j-1)$ para $i=1, \dots, p-1$.

Se não, $d_{ip}^*(j) = \text{Min} | d_{ip}^*(j-1), \bar{d}_{ij} + d_{jp} |$ para $i=1, \dots, p-1$.

O Passo 4 também pode ser reescrito de maneira a evitar operações quando $d_{ip} = \infty$. Se os nós podem ser numerados de maneira que $i < j \Rightarrow d_{ij} = \infty$ e G não possui ciclos, o Passo 4 pode ser reescrito como:

Passo 4 : Para $j=1, \dots, p-1$, fazer a operação abaixo:

Se $d_{pj}^* < \infty$ então $d_{ij}^* = \text{min} | \bar{d}_{ij}, d_{ip}^* + d_{pj}^* |$

para $i=1, \dots, p-1$.

Neste caso nenhuma operação seria realizada pois $j < p$ implica em $d_{pj}^* = \infty$. Em um grafo qualquer, no qual esta numeração de nós não é possível, os nós podem ser numerados aproximadamente segundo esta regra, i.e., $i > j \Rightarrow d_{ij} < \infty$ para a maioria dos arcos (i, j) . Desta maneira pode-se esperar que $d_{pj}^* = \infty$ ocorra com mais frequência que $d_{ip}^* = \infty$, tornando mais aconselhável o procedimento indicado para o Passo 4, i.e., i variando mais rapidamente que j .

A.2.3. Melhoramento para Grafos Não Orientados

Desenvolvida para a aplicação em grafos não orientados, a referência [48] oferece uma nova alternativa para o algoritmo de Dantzig. Além de algumas simplificações imediatas que a hipótese de arcos não orientados permite à Fase 1 do algoritmo, um tipo de decomposição é aplicado ao grafo, evitando algumas operações na Fase 2, especialmente no caso de redes esparsas.

i) Modificações na Fase 1.

$$\text{Passo 1 : } d_{pi}^* = d_{ip}^* = \min_{j \in S} |d_{pj} + \bar{d}_{ji}|$$

$$\text{Passo 2 : } d^*(p,p) = 0;$$

As modificações introduzidas em A.2.2. são também aplicáveis sem restrição.

ii) Modificações na Fase 2.

Definição: Seja k_1, \dots, k_m os nós de S tais que $d_{k_i p} < \infty$.

Seja $H = \{k_1, \dots, k_m\}$, $H \subset S$. Sejam $K_i \subset S$ para todo $k_i \in H$, os conjuntos de nós tais que se $j \in K_i$, o caminho mais curto de j a p , através do subgrafo construído com $S \cup \{p\}$, inclui o arco (k_i, p) .

Alguns dos subconjuntos K_i , definidos acima, podem ser vazios,

o que acontece sempre $d_{k_i p} > \bar{d}_{k_i k_j} + d_{k_j p}$ para algum $k_j \in H$. Nesta situação, o caminho mais curto entre k_i e p , através do subgrafo formado com os nós $S \setminus \{p\}$, não inclui o arco (k_i, p) . Este arco pode ser ignorado sem prejuízo dos cálculos dos caminhos mínimos. Quando os nós de $S \cup \{p\}$ não formam um grafo conexo, os subconjuntos K_i podem não formar uma partição de S . Este fato não constitui uma dificuldade teórica, já que as partes desconexas que não incluem o nó p podem ser desprezadas nesta iteração. Os subconjuntos $K_i \subset S$ podem ser obtidos durante, ou logo após a Fase 1 do algoritmo. Os teoremas apresentados a seguir estabelecem algumas relações entre os subconjuntos K_i , indicando os pares de nós $i, j \in S$ que podem ter o caminho mínimo que os liga alterado, após a inserção do nó p no subgrafo construído com os nós de S . A figura 1 ilustra a idéia da divisão de S em subconjuntos K_i .

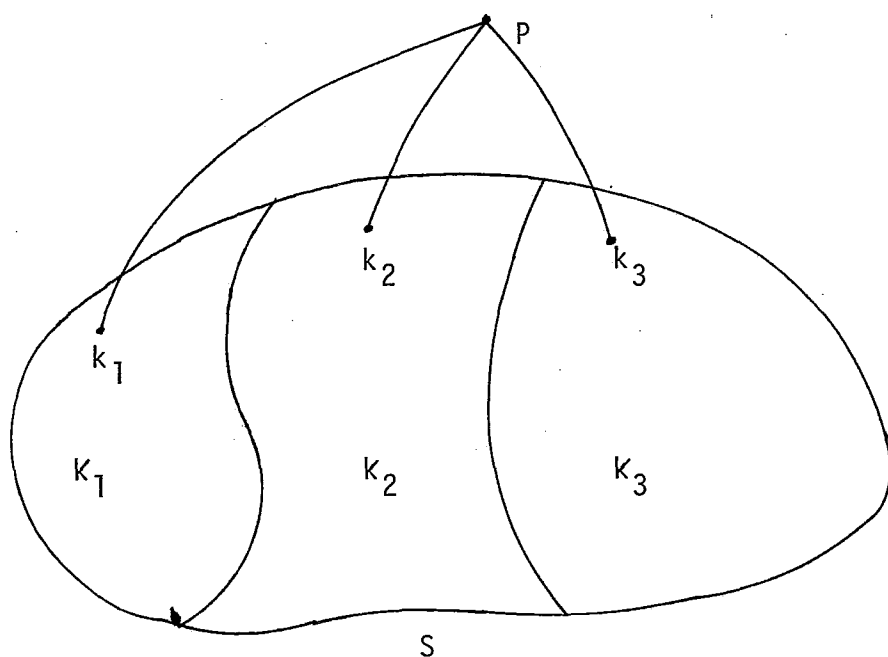


Fig 1 - Ilustração da construção dos subconjuntos K_i .

Teorema 1 : Sejam $j_1 \in K_i$ e $j_2 \in K_i$, então

$d_{j_1 j_2}^* = \bar{d}_{j_1 j_2}$, i.e., se j_1 e j_2 pertencem ao mesmo K_i , o caminho entre eles permanecerá inalterado.

Demonstração: Os antigos caminhos mínimos, através do subgrafo construído com S , obedecem à desigualdade triangular:

$$\bar{d}_{j_1 j_2} \leq \bar{d}_{j_1 k_i} + \bar{d}_{k_i j_2}$$

como $d_{pj_1}^* = \bar{d}_{j_1 k_i} + d_{k_i p}$ e

$d_{pj_2}^* = \bar{d}_{j_2 k_i} + d_{k_i p}$, temos que

$$\bar{d}_{j_1 j_2} \leq d_{pj_1}^* + d_{pj_2}^* \text{ donde } d_{j_1 j_2}^* = \bar{d}_{j_1 j_2} \quad \text{CQD.}$$

Teorema 2 : Sejam $k_1 \in K_1$ e $k_2 \in K_2$, K_1 e K_2 não vazios.

Se $d_{k_1 k_2}^* = \bar{d}_{k_1 k_2}$, então $d_{j_1 j_2}^* = \bar{d}_{j_1 j_2}$ para todos $j_1 \in K_1$ e $j_2 \in K_2$.

Demonstração: Observe-se que $d_{j_1 p}^* = \bar{d}_{j_1 k_1} + d_{k_1 p}$, de maneira

que $d_{pj_2}^* = d_{j_2 p}^* = \bar{d}_{j_2 k_2} + d_{k_2 p}$, então

$$(1) \quad d_{j_1 p}^* + d_{pj_2}^* = \bar{d}_{j_1 k_1} + \bar{d}_{j_2 k_2} + d_{k_1 p} + d_{k_2 p},$$

como por hipótese

$$(2) \quad d_{k_1 k_2}^* = \bar{d}_{k_1 k_2} \leq d_{k_1 p} + d_{pk_2}, \text{ temos que:}$$

$$(3) \quad \bar{d}_{j_1 j_2} \leq \bar{d}_{j_1 k_1} + \bar{d}_{j_2 k_2} + \bar{d}_{k_1 k_2}. \text{ De (2) e}$$

(3) temos :

$$(4) \quad \bar{d}_{j_1 j_2} \leq \bar{d}_{j_1 k_1} + \bar{d}_{j_2 k_2} + d_{k_1 p} + d_{pk_2}.$$

De (1) e (4) concluimos que:

$$\bar{d}_{j_1 j_2} \leq d_{j_1 p}^* + d_{p j_2}^* , \text{ donde } d_{j_1 j_2}^* = \bar{d}_{j_1 j_2} .$$

CQD.

Teorema 3 : Sejam $k_1 \in K_1$ e $k_2 \in K_2$, K_1 e K_2 não vazios.

Suponha que $d_{k_1 k_2}^* = d_{k_1 p} + d_{p k_2} \leq \bar{d}_{k_1 k_2}$, então:

(a) para todo $j_1 \in K_1$ tal que $d_{j_1 k_2}^* = \bar{d}_{j_1 k_2}$, temos que:

$$d_{j_1 j_2}^* = \bar{d}_{j_1 j_2} \text{ para todo } j_2 \in K_2 .$$

(b) para todo $j_2 \in K_2$ tal que $d_{j_2 k_1}^* = \bar{d}_{j_2 k_1}$, temos que:

$$d_{j_2 j_1}^* = \bar{d}_{j_1 j_2} \text{ para todo } j_1 \in K_1 .$$

Demonstração: Por hipótese, temos que:

(1) $\bar{d}_{j_1 k_2} \leq d_{j_1 p}^* + d_{p k_2}$. Temos por outro lado que:

(2) $d_{j_2 p}^* = \bar{d}_{j_2 k_2} + d_{k_2 p}$. De (1) e (2) deduzimos

que:

(3) $\bar{d}_{j_1 k_2} + \bar{d}_{k_2 j_2} \leq d_{j_1 p}^* + d_{j_2 p}^*$. Como para j_1 e j_2 vale a desigualdade.

(4) $\bar{d}_{j_1 j_2} \leq \bar{d}_{j_1 k_2} + \bar{d}_{k_2 j_2}$, de (3) e (4) obtemos

$$\bar{d}_{j_1 j_2} \leq d_{j_1 p}^* + d_{p j_2}^* , \text{ donde}$$

$\bar{d}_{j_1 j_2} = d_{j_1 j_2}^*$, o que demonstra a parte (a) do teorema. A parte (b) é demonstrada de forma análogo.

CQD.

As vantagens computacionais que resultam da aplicação destes teoremas são imediatas na Fase 2 do algoritmo. Do Teorema 1, sabemos que os caminhos mais curtos entre nós pertencentes a um mesmo conjunto K_i não são modificados com a introdução do nó p no subgrafo construído com os nós de S , de modo que:

Se $i_1, i_2 \in K_i$, então

$$d_{i_1 i_2}^* = \min \{ \bar{d}_{i_1 i_2}, d_{i_1 p}^* + d_{p i_2}^* \} = \bar{d}_{i_1 i_2},$$

não sendo necessária nenhuma operação.

A partir dos teoremas 2 e 3, podem-se fixar regras para a pesquisa de alteração dos caminhos mínimos ligando nós pertencentes a diferentes subconjuntos K_i . A Fase 2 do algoritmo poderá ser então reescrita como se segue:

Fase 2 :

Sejam $H = \{k_1, \dots, k_m\}$ e os subconjuntos K_i definidos anteriormente.

Os subconjuntos $K_i = \{j_1, \dots, j_{m_i}\}$ não vazios estão ordenados de modo que $j_1 = k_i$.

Para $i_1 = 2, \dots, m$ e $i_2 = 1, \dots, i_1 - 1$ executar as seguintes operações:

Passo 4A : Se $K_{i_1} \neq \emptyset$ e $K_{i_2} \neq \emptyset$, então fazer

$$d_{k_{i_1} k_{i_2}}^* = \min \{ \bar{d}_{k_{i_1} k_{i_2}}, d_{k_{i_1} p}^* + d_{p k_{i_2}}^* \}.$$

Passo 4B : Se $d_{k_{i1}k_{i2}}^* < \bar{d}_{k_{i1}k_{i2}}$, então fazer as operações abaixo:

$$a) d_{jk_{i1}}^* = \text{Min} | \bar{d}_{jk_{i1}}, d_{jp}^* + d_{pk_{i1}}^* | \text{ para todo } j \in K_{i1}.$$

$$b) d_{jk_{i2}}^* = \text{Min} | \bar{d}_{jk_{i2}}, d_{jp}^* + d_{pk_{i1}}^* | \text{ para todo } j \in K_{i2}.$$

c) Para todo $j_1 \in K_{i1}$ e $j_2 \in K_{i2}$, fazer a operação abaixo sempre que

$$d_{j_1k_{i2}}^* < \bar{d}_{j_1k_{i2}} \text{ e } d_{j_2k_{i1}}^* < \bar{d}_{j_2k_{i2}} :$$

$$d_{j_1j_2}^* = \text{Min} | \bar{d}_{j_1j_2} + d_{j_1p}^* + d_{pj_2}^* |.$$

Alguns artifícios de programação serão necessários, para que as comparações de valores \bar{d}_{ij} e d_{ij}^* possam ser evitadas, permitindo que ambos os valores partilhem o mesmo espaço de armazenamento. As comparações no Passo 4B podem ser evitadas, se, durante a execução das operações a) e b), forem construídas as listas, $L_1 \subset K_{i1}$ e $L_2 \subset K_{i2}$, indicando os nós componentes dos pares de nós que serão examinados na operação c). Observe-se que quando existe apenas um subconjunto $K_i \neq \emptyset$, nenhuma operação será realizada na Fase 2, significando que nenhum caminho mínimo será alterado com a inclusão do nó p. Para o outro caso extremo, quando existem p-1 subconjuntos $K_i \neq \emptyset$, cada K_i conterá apenas o nó $k_i \in H$, e todos os pares de nós devem ser examinados. A maior economia computacional ocorre em

grafos esparsos quando haverá sempre poucos subconjuntos K_i .

A.3. Algoritmo de Floyd

O método apresentado na referência [46] constrói os caminhos mínimos, oferecendo a cada iteração, a inclusão de um novo nó no caminho que liga cada um dos pares de nós. O procedimento é iniciado com uma matriz $n \times n$, D^0 , cujos elementos d_{ij}^0 indicam a distância entre i e j considerando apenas as ligações diretas fornecidas pelos arcos. A partir desta matriz inicial, constrói-se a cada iteração uma nova matriz $n \times n$, D^k , que fornece os comprimentos dos caminhos mínimos ligando cada par de nós, quando permite-se apenas a utilização dos nós $1, \dots, k$ como nós intermediários.

Considere-se $G=(N,M)$ um grafo orientado com um conjunto N de nós com n elementos, e um conjunto M de arcos. A cada arco $(i,j) \in M$ está associado um comprimento d_{ij}^0 . Fazemos $d_{ii}^0 = 0$ para todo $i \in N$ e $d_{ij}^0 = \infty$ para os demais pares ordenados $(i,j) \notin M$. Realiza-se, então, a seguinte operação para $k=1, \dots, n$:

$$d_{ij}^k = \min \left\{ d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \right\} \text{ para } i=1, \dots, n \\ \text{e } j=1, \dots, n$$

A matriz D_{ij}^n indica os comprimentos dos caminhos mínimos ligando cada par de nó (i,j) . Na implantação do algoritmo, as matrizes D^k , $k=0, \dots, n$, podem ser armazenadas no mesmo local. A obtenção do caminho solução do problema pode ser feita através de uma matriz de sucessores S cujos elementos s_{ij} indicam o nó sucessor de i no caminho para j . Fa-

zendo inicialmente $s_{ij}=j$, atualiza-se S ao longo do procedimento, de modo que:

$$\text{se } d_{ij}^k < d_{ij}^{k-1} \text{ então } s_{ij} = k.$$

A cada iteração, deve-se também verificar a existência de ciclos negativos fazendo o seguinte teste para todo $i \in N$:

$$\text{se } d_{ii}^k < 0 \text{ então parar.}$$

O algoritmo de Floyd pode facilmente aproveitar a inexistência de arcos, evitando algumas operações. Sempre que detetamos $d_{ik}^{k-1} = \infty$, não são realizadas as comparações para a obtenção dos elementos d_{ij}^k para $j=1, \dots, n$, não sendo necessária nenhuma operação pois $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$ estão ambos armazenados no mesmo local. O algoritmo pode ser escrito então da seguinte maneira:

Fazer para $k=1, \dots, n$ e $i=1, \dots, n$ as operações abaixo:

Passo 1 : Se $d_{ik}^{k-1} \neq \infty$, então fazer para

$j=1, \dots, n$ as operações:

$$\text{a) } d_{ij}^k = \text{Min} \{ d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \}.$$

$$\text{b) } s_{ij} = k.$$

Passo 2 : Se não, $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$ para $j=1, \dots, n$.

Passo 3 : Se $d_{ii}^{k-1} < 0$ então parar, foi encontrado um ciclo negativo.

A.4. Modificação dos Caminhos Mínimos Após a Alteração de um Arco

A utilização de algoritmos matriciais na busca dos caminhos mais curtos através de um grafo permite que os caminhos mínimos sejam atualizados com relativa facilidade após uma modificação em algum arco. Procedimentos especiais para a atualização dos caminhos dispensam a aplicação de uma nova busca de caminhos mínimos ao grafo modificado, sempre que a alteração se constitua na inclusão de um novo arco, ou na diminuição do comprimento de um arco já existente.

O procedimento mais simples para atualização dos caminhos mais curtos é apresentado na referência [54].

Seja $|\bar{d}_{ij}|$ a matriz dos caminhos mais curtos anteriores à modificação, $|d_{ij}^*|$ a matriz de caminhos mínimos após a modificação do arco (i_1, i_2) , de modo que o novo comprimento do arco é $d_n \leq \bar{d}_{i_1 i_2}$. Dentro destas condições, obtêm-se os comprimentos dos novos caminhos realizando a operação abaixo para todo i e $j \in N$;

$$d_{ij}^* = \text{Min}|\bar{d}_{ij}, \bar{d}_{i i_1} + d_n + \bar{d}_{i_2 j}| .$$

Uma alternativa para este procedimento é realizar uma nova iteração do algoritmo de Dantzig, introduzindo novamente no grafo o nó i_1 ou i_2 , extremidades do arco alterado. Numa situação em que o grafo original sofre várias alterações, basta determinar o conjunto mínimo de nós tais que todos os arcos mo-

dificados tenham pelo menos um n̄o extremidade pertencente a este conjunto. A seguir, de acordo com a sugestão da referência [48], reintroduz-se, sucessivamente, cada um dos elementos do conjunto no grafo original.

Algumas modificações são possíveis no procedimento da referência [54], de modo que a atualização dos caminhos mínimos pode ser efetivada de uma forma mais eficiente. O novo procedimento procura evitar o exame de pares de n̄os cujos caminhos mínimos não serão alterados no grafo modificado. As relações que permitem estas modificações estão apresentadas abaixo:

Definição : Sejam $N_1 \subseteq N$ e $N_2 \subseteq N$, os conjuntos de n̄os tais que:

$$N_1 = \{k \in N \mid d_{ki2}^* < \bar{d}_{ki2}\},$$

$$N_2 = \{k \in N \mid d_{i1k}^* < \bar{d}_{i1k}\}, \text{ onde } (i1, i2) \text{ é}$$

o arco orientado cujo comprimento foi alterado.

N_1 contém os n̄os cujos caminhos até o n̄o $i2$ foram alterados após a modificação no grafo, e N_2 contém os n̄os cujos caminhos partindo de $i1$ foram alterados. O teorema que se segue afirma que apenas os caminhos entre pares de n̄os i e j , tais que $i \in N_1$ e $j \in N_2$, estão sujeitas à alteração no grafo modificado.

Teorema 1 : Sejam $i \in N$ e $j \in N$, N_1 e N_2 definidos acima. se $i \notin N_1$ ou $j \notin N_2$, então

$$d_{ij}^* = \bar{d}_{ij}.$$

Demonstração :

Primeiramente, observemos que se $i \notin N_1$, temos que $d_{i2}^* = \text{Min}|\bar{d}_{i2}, \bar{d}_{i1} + d_n|$, onde $d_n < \bar{d}_{i1i2}$ é o novo comprimento do arco $(i1, i2)$. Como $d_{i2}^* = \bar{d}_{i2}$, então temos:

$$(1) \bar{d}_{i2} \leq \bar{d}_{i1} + d_n.$$

Como $d_{ij}^* = \text{Min}|\bar{d}_{ij}, \bar{d}_{i1} + d_n + \bar{d}_{i2j}|$, de (1) temos que:

$$\bar{d}_{i1} + d_n + \bar{d}_{i2j} \geq \bar{d}_{i2} + \bar{d}_{i2j} \geq \bar{d}_{ij}, \text{ pois}$$

\bar{d}_{ij} é a menor distância entre i e j antes da alteração. Então concluímos que:

$$(2) d_{ij}^* = \bar{d}_{ij}.$$

Analogamente,

se $i \notin N_2$ temos que:

$$d_{i1j}^* = \text{Min}|\bar{d}_{i1j}, d_n + \bar{d}_{i2j}|. \text{ Como } d_{i1j}^* = \bar{d}_{i1j},$$

então:

$$(3) \bar{d}_{i1j} \leq d_n + \bar{d}_{i2j}.$$

Como $d_{ij}^* = \text{Min}|\bar{d}_{ij}, \bar{d}_{i1} + d_n + \bar{d}_{i2j}|$, de (3) temos que:

$$\bar{d}_{i1} + d_n + \bar{d}_{i2j} \geq \bar{d}_{i1} + \bar{d}_{i1j}. \text{ Então concluímos que:}$$

mos que:

$$(4) \quad d_{ij}^* = \bar{d}_{ij} \quad .$$

Basta observar (2) e (4) para completar a demonstração.

Quando tratamos com grafos não orientados, a construção dos conjuntos N_1 e N_2 pode ser simplificada. Mostramos no próximo teorema que, nesta situação, os conjuntos N_1 e N_2 são disjuntos.

Teorema 2 : Sejam $G = (N, M)$ um grafo não orientado, e (i_1, i_2) o arco a ser modificado, com novo comprimento $0 \leq d_n \leq \bar{d}_{i_1 i_2} = \bar{d}_{i_2 i_1}$. Nestas condições, se $i \in N_1$, então $i \notin N_2$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \text{Se } i \in N_1, \text{ então } d_{i i_2}^* &= \text{Min} \{ \bar{d}_{i i_2}, \bar{d}_{i i_1} + d_n \} = \\ &= \bar{d}_{i i_1} + d_n < \bar{d}_{i i_2} \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \bar{d}_{i i_1} \leq \bar{d}_{i i_2} - d_n \leq \bar{d}_{i i_2} + d_n, \text{ pois } d_n \geq 0 \quad .$$

$$\text{Então } d_{i i_1}^* = d_{i i_1}^* = \text{Min} \{ \bar{d}_{i i_1}, \bar{d}_{i i_2} + d_n \} \quad . \quad \text{De}$$

(1) temos que:

$$d_{i i_1}^* = d_{i i_1}^* = \bar{d}_{i i_1} = \bar{d}_{i i_1} \quad \text{donde } i \notin N_2.$$

CQD.

O novo procedimento para a atualização dos caminhos mínimos pode ser escrito como:

Passo 1 : Executar para todo $i \in N$ as operações:

$$a) d_{ii2}^* = \text{Min}|\bar{d}_{ii2}, \bar{d}_{iil} + d_n|$$

$$b) d_{i1i}^* = \text{Min}|\bar{d}_{i1i}, d_n + \bar{d}_{i1i}|$$

Passo 2 : Construir os conjuntos:

$$N_1 = \{i \in N \mid d_{ii2}^* < \bar{d}_{ii2}\}$$

$$N_2 = \{i \in N \mid d_{i1i}^* < \bar{d}_{i1i}\}$$

Passo 3 : Para todo $i \in N_1$ e $j \in N_2$ executar a operação:

$$d_{ij}^* = \text{Min}|\bar{d}_{ij}, \bar{d}_{iil} + d_n + \bar{d}_{i2j}| .$$

APÊNDICE BBUSCA HEURÍSTICA DE CAMINHOS MÍNIMOS EM UM GRAFO

Os algoritmos descritos a seguir destinam-se à busca de caminhos de custo mínimo através de um grafo. Estes algoritmos são discutidos neste trabalho quanto à utilização na resolução de problemas de decisões sequenciais, quando a obtenção de uma estratégia ótima é feita através da determinação do caminho de custo mínimo através do grafo estado-estágio. Este apêndice trata, basicamente, do algoritmo A^* desenvolvido na referência [44] e de uma extensão proposta para este algoritmo na referência [42]. No último caso, foi desenvolvido o algoritmo \tilde{A} que procura, através de modificações iterativas na função de avaliação utilizada no primeiro algoritmo, obter uma sequência de soluções para o problema de busca de caminhos, de modo que soluções sub-ótimas sejam disponíveis rapidamente. Esta característica do algoritmo \tilde{A} é desejável em problemas de grande porte, onde a obtenção de soluções ótimas é computacionalmente inviável.

Seja $G=(N,A)$ um grafo orientado sem ramos múltiplos, onde a cada arco $(i,j) \in A$ está associado um custo $c(i,j)$. O problema de busca de caminhos mínimos é o seguinte:

Seja $s \in N$ um nó inicial e $T \subset N$ um conjunto alvo. En-

contre, se existir, um caminho $P = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, com $i_1 = s$ e $i_n \in T$, cujo custo $c(P) = \sum_{k=2}^n c(i_{k-1}, i_k)$ é mínimo se comparado com todos os caminhos que ligam s a T .

Na descrição dos algoritmos A^* e \tilde{A} é conveniente caracterizar o grafo $G=(N,A)$ através do par (N, \mathcal{T}) , onde \mathcal{T} é o operador sucessor que associa a cada nó $i \in N$ um conjunto finito de sucessores $\mathcal{T}(i) = \{j \in N \mid (i,j) \in A\}$. Se existe um caminho mínimo ligando um par de nós i e $j \in N$, o custo deste caminho é expresso por $k(i,j)$. O custo mínimo de $i \in N$ até um melhor nó alvo $n \in T$ é denotado por $h(i) = \min_{n \in T} k(i,n)$. $g(i)$ expressa

o custo do caminho mínimo ligando a fonte s até o nó i , i.e., $g(i) = h(s,i)$. A função $f(i) = g(i) + h(i)$ expressa o custo do menor caminho ligando s a T , passando pelo nó i .

O algoritmo A^* procura aproveitar alguma informação heurística a respeito da estrutura do grafo, expressando esta informação através de uma função de avaliação $\tilde{f}(i)$ que fornece para cada nó i uma estimativa de $f(i)$. Neste algoritmo, faz-se $\tilde{f}(i) = \tilde{g}(i) + \tilde{h}(i)$, onde $\tilde{g}(i)$ é o valor do custo do menor caminho conhecido ligando s a i , e $\tilde{h}(i)$ é uma estimativa para o custo $h(i)$ do caminho mínimo ligando i ao alvo T . O algoritmo atualiza a cada iteração os valores $\tilde{g}(i)$ enquanto os valores $\tilde{h}(i)$ são fornecidos exogenamente.

O procedimento do algoritmo A^* é análogo àqueles dos algoritmos clássicos de busca de caminhos mínimos através de um grafo como, por exemplo, o algoritmo de Dijkstra descrito na referência [41]. Com efeito, o algoritmo de Dijkstra se constitui em um caso particular do algoritmo A^*

quando fazemos $\hat{h}(i) = 0$ para todo $i \in N$. O algoritmo A^* manipula duas listas, Aberto e Fechado, cujos elementos são nós $i \in N$, acompanhados dos valores $\hat{g}(i)$ e $\hat{f}(i)$, e de apontadores definidos pelo algoritmo. Na lista Aberto são colocados nós gerados pelo algoritmo que escolhe, a cada iteração, um nó correspondente ao menor valor $\hat{f}(i)$ entre os nós desta lista. Este nó é expandido, i.e., obtêm-se seus sucessores através da aplicação do operador γ , e transferido para a lista Fechado. Os nós sucessores são incluídos na lista Aberto, e continua-se a busca até que um nó $n \in T$ seja escolhido, quando o algoritmo termina.

Algoritmo A^*

Passo 1 : Colocar o nó inicial s na lista Aberto. Fazer $\hat{g}(s) = 0$ e calcular $\hat{f}(s) = \hat{g}(s) + \hat{h}(s)$.

Passo 2 : Retirar de Aberto o nó i^* tal que $\hat{f}(i^*) = \text{Min}\{\hat{f}(i) \mid i \in \text{Aberto}\}$. (Se a lista Aberto estiver vazia, não existe caminho ligando s a T). Resolver os empates arbitrariamente, preferindo os nós $n \in T$.

Passo 3 : Se o nó escolhido $i^* \in T$, terminar. O caminho mínimo pode ser encontrado com auxílio dos apontadores.

Passo 4 : Se não, introduzir i^* em Fechado. Obter o conjunto de sucessores $\Gamma(i^*)$. (Se $\Gamma(i^*) = \emptyset$, ir para o Passo 2). Para cada $j \in \Gamma(i^*)$, fazer $\hat{g}(j) = \hat{g}(i^*) + c(i^*, j)$ e $\hat{f}(j) = \hat{g}(j) + \hat{h}(j)$.

Passo 5 : Introduzir em Aberto os sucessores que não pertencem nem a Aberto ou a Fechado, associando-lhes os valores \hat{g} , \hat{f} calculados. Fazer os apontadores associados a estes sucessores iguais a i^* .

Passo 6 : Associar aos sucessores que já estavam em Aberto os menores valores de \hat{f} e \hat{g} entre os calculados agora e os seus valores prévios.

Transferir para Aberto aqueles sucessores que estão em Fechado cujos valores \hat{f} foram diminuídos, associando-lhes os novos valores \hat{f} e \hat{g} .

Modificar os apontadores de todos os nós alterados neste passo para i^* .

Passo 7 : Ir para o Passo 2.

O teorema abaixo diz respeito às condições que devem ser satisfeitas para que o algoritmo A^* seja admissível, i.e., que sua aplicação forneça necessariamente a solução ótima sempre que ela exista.

Teorema : Se $\hat{h}(i) \leq h(n)$ para todo $i \in N$, e se $c(i,j) \leq \delta > 0$ para todo arco $(i,j) \in A$, então o algoritmo A^* é admissível.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência [44]. A referência [42] assinala que o mesmo resultado pode ser obtido quando se tratam de grafos finitos em que não existem ciclos negativos.

O algoritmo \tilde{A} , introduzido na referência [42] como uma extensão do algoritmo A^* , possibilita a manipulação da função heurística \hat{h} . A finalidade de um procedimento deste ti

po é utilizar, inicialmente, heurísticas que forneçam rapidamente soluções sub-ótimas para o problema. Isto é possível, se, no algoritmo A^* , utilizamos heurísticas não admissíveis tais que $\tilde{h} > h$. O algoritmo \tilde{A} procede desta maneira, reformulando a heurística \tilde{h} cada vez que uma nova solução sub-ótima é encontrada. O resultado deste procedimento é uma sequência de soluções sub-ótimas que podem, dentro de certas condições, tender para a solução ótima. Este algoritmo é relevante apenas para os casos onde se deseja efetivamente a obtenção de soluções sub-ótimas, quando a obtenção da solução ótima pode ser computacionalmente inviável. Neste último caso, utiliza-se o algoritmo \tilde{A} associado a uma política de reformulação da heurística \tilde{h} , de modo que se obtém uma sequência de soluções que se aproximam da solução ótima, até que se esgote um limite imposto ao tempo de computação, ou que a heurística satisfaça a uma condição de admissibilidade.

Algoritmo \tilde{A}

Passo 1 : Definir a função $\tilde{h}:N \rightarrow R$, introduzir na lista Aberto o nó s , associando-lhe valores $\tilde{g}(s)$ e $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{h}(s)$.

Passo 2 : Se a lista Aberto estiver vazia, parar.
Se não, retirar de Aberto o nó i^* tal que:

$$\tilde{f}(i^*) = \text{Min}\{\tilde{f}(i) | i \in \text{Aberto}\}.$$

Resolver os empates arbitrariamente, preferindo os nós $n \in T$.

Passo 3 : Se $i^* \in T$, ir para Passo 6.

Se não, introduzir i^* em Fechado.

Passo 4 : Obter o conjunto de sucessores $\overline{T}(i^*)$. (Se $\overline{T}(i^*) = \emptyset$, ir para o Passo 2).

Para cada $j \in \overline{T}(i^*)$, fazer $\hat{g}(j) = \hat{g}(i^*) + c(i^*, j)$.

Comparar cada sucessor com todos os elementos das listas, Aberto e Fechado.

Retirar de (i^*) todos os elementos j tais que $\hat{g}(k) \leq \hat{g}(j)$ e $k=j$ para algum k pertencente a Aberto ou Fechado. Retirar de (i^*) todos os elementos j tais que $\hat{g}(k) \leq \hat{g}(j)$ e $k=j$ para algum $k \in (i^*)$ com \hat{f}_n dice inferior ao de j .

Retirar da lista Aberto todos os nós j tais que $\hat{g}(k) \leq \hat{g}(j)$ e $k=j$ onde k é algum nó remanescente em (i^*) .

Introduzir na lista Aberto os nós remanescentes $j \in (i^*)$, associando-lhes valores $\hat{g}(j)$ e $\hat{f}(j) = \hat{g}(j) + \hat{h}(j)$, e apontador i^* .

Passo 5 : Redefinir a função $\hat{h} : N \rightarrow R$, atualizar seus valores nas listas Aberto e Fechado. Ir para o Passo 2.

Passo 6 : Se algum critério de parada for satisfeita, terminar o algoritmo, recuperando um caminho entre s e t por meio dos apontadores.

Se não, ir para o passo 5.

O algoritmo \tilde{A} pode resultar em um algoritmo admissível, se o grafo $G=(N,A)$ satisfaz \tilde{a} um dos conjuntos de hipóteses abaixo:

i) Grafos Finitos - Supõe-se a inexistência de ciclos negativos.

ii) Grafos Infinitos - Supõe-se que $c(i,j) \geq \delta > 0$ para todo $(i,j) \in A$.

Sob estas hipóteses demonstra-se que o algoritmo \tilde{A} é admissível quando incluímos no Passo 6 o seguinte critério de parada:

$$\begin{aligned} \text{Parar se } \tilde{h}(i) &\leq h(i) && \text{para todo } i \in N, \\ \tilde{h}(n) &= 0 && \text{para todo } n \in T. \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

- [1] Tomlin, J.A. - "A Mathematical Programming Model for the Combined Distribution - Assignment of Traffic", Trans. Science 5 : 120-140 (1971).
- [2] Bruynooghe, M. - "Um modêlo intêgrê de distribution et d'affectation de trafic sur un rêsseau", Technical Report, Institut de Recherches sur les Transport, Department de Recherche Opêrationnelle et Informatique Arcueil (1969).
- [3] Evans, S. - "Some Applications of Mathematical Optimization Theory in Transport Planning", Doctoral Thesis, Research Group in Traffic Studies, University College, London (1973).
- [4] Florian, M., Nguyen, S. e Ferland, J. - "On the Combined Distribution - Assignment of Traffic", Trans. Science 9 : 43-53 (1975).
- [5] Irwin, N.A. e von Cube, A.G. - "Capacity Restraint in Multi-Travel Mode Assignment Programs", H.R.B. Bull 347 : 258-289 (1962).
- [6] Cesario, F.J. - "A Combined Trip Generation and Distribution Model", Transp. Science 9 : 211-223 (1975).
- [7] Nilson, A.G. - "Entropy Maximizing Models in the Theory of Trip Distribution, Model Split and Route Split", J. Transp. Economics and Policy 3 : 108-126 (1969).
- [8] Quandt, R.E. e Baumol, W.J. - "The Demand for Abstract Transport Modes : Theory and Measurement", J. Regional

Sc. 6 : 13-26 (1966).

- |9| Steenbrink, P.A. - "Optimization of Transports Networks", John Wiley & Sons (1974).
- |10| Meyer, J.R., Kain, J.F. e Wohl, M.- "The Urban Transportation Problem" Havard University Press, Cambridge, Massachusetts (1971).
- |11| Manhein, M.L. - "Practical Implications of seme Fundamental Properties of Travel-Demand Models", Highway Research Record 422 (1973).
- |12| Aldana, E., de Neufville, R. e Stafford, J.H. - "Microanalysis of Urban Transportation Demand", Highway Research Record 446 (1973).
- |13| Wohl, M. e Martin, B.V. - "Traffic Systems Analysis", MacGraw-Hill Book Co. (1967).
- |14| Lane, R., Powell, T.J. e Smith, P.S. - "Analytical Transport Planning", Duckworth (1971).
- |15| Martin, B.V. e Manhein, M.L. - "A Research Program for Comparision of Traffic Assignment Techniques", Highway Research Record 88 (1965).
- |16| Gilbert, A. - "A Method for the Traffic Assignment Problem when Demand is Elastic", LBS-TNT-85, Transport Network Theory Unit, London Business School, London (1968).
- |17| Murchland, J.D. - "Road Network Traffic Distribution in Equilibrium", Artigo apresentado na conferência "Mathematical Methods in the Economic Science" Oberwolfach, outubro (1969).

- [18] Wilkie, D.F. e Stefanek, R.G. - "Precise Determination of Equilibrium in Travel Forecasting Problems Using Numerical Optimization Techniques", Highway Research Record 369 (1971).
- [19] Wigan, M.R. - "Benefit Assessment for Network Traffic Models and Application to Road Pricing", Road Research Laboratories Report LT 417, Crowthorne, Berkshire (1971).
- [20] Wigan, M.R. e Banford, T.J.G. - "A Pertubative Model for Congested and Overloaded Transportation Networks", Road Research Laboratories Report LT 411, Crowthorne, Berkshire (1971).
- [21] Florian, M. e Nguyen, S. - "A Method for Computing Network Equilibrium with Elastic Demands", Trans. Science 8 n° 4 (1974).
- [22] Ferland, J.A. - "Minimum Cost Multicommodity Circulation Problem with Convex Arc-Costs", Trans. Science 8 n° 4 (1974).
- [23] Nguyen, S. - "An Algorithm for the Traffic Assignment Problem", Trans. Science 8 n° 3 (1974).
- [24] U.S. Department of Commerce, Bureau of Public Roads - "Traffic Assignment Manual", Washington D.C. (1964).
- [25] Martin, B.V. e Manhein, M.L. - "A Research Program for Comparision of Traffic Assignment Techniques", Highway Research Record 88 (1968).
- [26] Florian, J.A., Florian, M. e Achim, C. - "On Incremental Methods for Traffic Assignment", Trans. Res. 9 : 237-239 (1975).

- |27| Dafermos, S.C. e Sparrow, F.T. - "The Traffic Assignment Problem for a General Network", Journal of Research of the National Bureau of Standards; B. Mathematical Sciences, 73B, nº 2 (1969).
- |28| Leventhal, T.L., Nemhauser, G.L. e Trotter, L.E. - "A Column Generation Algorithm for Optimal Traffic Assingment", Trans. Science 7 : 168:176 (1973).
- |29| Stairs, Sonia - "Selecting an Optimal Traffic Network", Journal of Economics and Policy vol II (1968).
- |30| Leblanc, L.J. - "An Algorithm for Discrete Network Design Problem" Trans.Science 9 nº 3 (1975).
- |31| Murchland, J.D. - "Braess Paradox of Traffic Flow", Trans. Res. 4 : 391-394 (1970).
- |32| Mitten, L.G. - "Branch-and-Bound Methods : General Formulations and Properties", Operations Research 18 : 24-34 (1970).
- |33| Lawler, E.L. e Wood, D.E. - "Branch-and-Bound Methods : A Survey", Operations Research 14 : 699-719 (1966).
- |34| Ridley, T.M. - "An Investment Policy to Reduce the Travel Time in a Transport Network" Trans. Research 2, nº 4 (1968).
- |35| Ochoa-Rosso, F. e Silva, A. - "Optimum Project Addition in Urban Transportation Networks via Descriptive Assignment Models", Research Report R68-44 MIT, Department of Civil Engineering (1968).
- |36| Chan, Y.P. - "Optimal Travel Time Reduction in a Transport Network : An Application of Network Aggregation and Branch-and-Bound Techniques", Research Report

- R.69-47 MIT, Department of Civil Engineering (1969).
- [37] Scott, Allen J. - "The Optimal Network Problem Since Computational Procedures", Trans. Research 3 : 201-210 (1969).
- [38] Hai Hoc, Hoang - "A Computational Approach to the Selection of an Optimal Traffic Network", Department d'Informatique, Université de Montreal # 10 (1971).
- [39] Barbier, M. - "Le Future Réseau de Transports en Région de Paris", Cahiers de l'Institut d'Aménagement e d'urbanisme de la Région Parisiënne, 4-5 n° 4 (1968).
- [40] Billheimer, J.W., Gray, P. - "Network Design with Fixed and Avriable Cost Elements", Trans.Science 7 : 49-74 (1973).
- [41] Dreyfus, S.E. - "An Appraisal of some shortest-Path Algorithms" Operations Research 17 : 395-412
- [42] Gonzaga, Clovis C. - "Estudo de Algoritmos de Busca em Grafos e sua Aplicação a Problemas de Planejamento", Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ (1973).
- [43] Paterson, Christopher A. - "Programa de Construções e Melhoria da Rede Rodoviária de Alagoas", Relatório do Trabalho realizado pela SPA - Rio de Janeiro (1974).
- [44] Hart, P.E., Nilsson, N.J. e Raphael B. - "A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths", IEEE Trans. vol ssc-4-n°2 (1968).
- [45] Yen, Jim Y. - "Finding all Shortest Routes from a Fixed Origin in a N-node General Network", trabalho apresentado no TIMS Tenth American Meeting, Atlanta 1-3 outu bro (1969).

- [46] Floyd, R.W. - "Algorithm 97, "Shortest Path", Comm. ACM 5, 345 (1962).
- [47] Dantzig, G.B. - "All Shortest Routes in a Graph", Operations Research House, Stanford University, Technical Report 66-3.
- [48] Grassin, J. e Minoux, M. - "Variations sur un Algorithme de Dantzig : Application a la Recherche des Plus Courts Chemins dans les Grands Reseaux" R.A.I.R.O. 1:53-62 (1973).
- [49] Tabourier, Y. - "All Shortes Distances in a Graph. An Improvement to Dantzig's Inductive Algorithm", Discrete Math. 4:83-87(1973).
- [50] Hu, T.C. - "Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths", SIAM Journal of Applied Math. 15:207-218 (1967).
- [51] Hu, T.C. - "A Decomposition Algorithm For Shortest Paths in a Network", Operations Res. 16:91-102 (1968).
- [52] Yen, Jin Y. - "On Hu's Decomposition Algorithm for Shortest Paths in a Network", Operations Res. 19 : 983-985 (1971).
- [53] Glover, F., Klingman, D. e Napier, A. - "A Note on Finding All Shortest Paths", Trans. Science 8:3-12 (1974).
- [54] Murchland, J.D. - "The Effect of Increasing or Decreasing the Length of a Single Arc on all Shortest Distances in a Graph", London Business School, Transportation Network Theory Unit, Paper 26 (1967).