ROBUSTEZ EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEIS

ROOSEVELT JOSÉ DIAS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.).

Aprovada por:

S. P. Bhattacharyya-Orientador

J. Lizardo R.H. de Araujo

A. C. Del Nero Gomes

Nelson Maculan Filho

ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL

SETEMBRO DE 1976

À minha esposa IVONE
pela incansável dedicação
e companheirismo nas horas difíceis.

AGRADECIMENTOS

Quero deixar aqui consubstanciada minha profunda gratidão:

- Ao Dr. S. P. Bhattacharyya pela dedicação e excelente orientação neste trabalho.

- À COPPE por me ter proporcionado a oportunidade de ingressar em seu corpo discente.

- À todos aqueles que de alguma forma me incentivaram nesta inesquecível jornada.

ABSTRACT

In this thesis we consider the following problem which is of interest in the design of multivariable linear time-invariant control systems that are robust:

Given $A_o : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B_o : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, determine conditions under which a given subspace $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ has that property that there exists $F_o : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ for which $[(A_o + \delta A) + (B_o + \delta B)(F_o + \delta F)]\, \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ for a given class of perturbations $(\delta A , \delta B , \delta F)$.

Using the necessary and sufficient conditions for solvability of this problem a constructive sythesis of the disturbance rejection problem when the system parameters are subject to perturbations, is presented.

These results are also used to establish the structural incompatibility of minimal order Luenberger observers with robustness.

RESUMO

Em linhas gerais diremos que esta tese trata do seguinte problema:

Dados $A_o : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B_o : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ e um subespaço $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$, determinar condições para a existência de uma síntese $F_o : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$ que torna $\mathcal{V}$ um "subespaço robusto" em relação à variações nos parâmetros A_o , B_o e F_o isto é,

$$[(A_o + \delta A) + (B_o + \delta B)\ (F_o + \delta F)]\ \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

para todo δA, δB e δF em uma classe apropriada de perturbações.

Uma consequência imediata dos resultados obtidos refere-se aos observadores de Luenberger de ordem mínima, cuja estrutura mostraremos ser incompatível com robustez. Todavia o principal resultado deste trabalho consiste na solução do problema de rejeição de perturbação com variação nos parâmetros do sistema.

ÍNDICE

Notação:

$\mathbb{R}$	: corpo dos números reais
$\underline{p}$	: conjunto dos p primeiros números naturais
$\mathbb{R}^p$	: conjunto de todas as p-uplas $(x_1,\ldots,x_p)$ com $x_i \varepsilon \mathbb{R}$, $i \varepsilon \underline{p}$
$\mathcal{X}$,$\mathcal{U}$...	: espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$
$A_o, B_o, \ldots$	: representação matricial de homomorfismos entre espaços vetoriais
$B_o : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$	: homomorfismo de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{X}$
$\mathcal{B}_o$, Im B_o	: imagem em $\mathcal{X}$ de B_o
Ker B_o	: núcleo de B_o $(\{u \varepsilon \mathcal{U} : B_o u = 0\})$
$\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{V}$	: soma direta de $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{V}$
$\emptyset$	: conjunto vazio
$K_o \mid \mathcal{V}$	: restrição do homomorfismo K_o ao subespaço $\mathcal{V}$
$\subset$	: relação de inclusão em $\mathcal{X}$
$\not\subset$	: negação da relação de inclusão em $\mathcal{X}$
$\mathbb{C}^-$	: semiplano esquerdo aberto do plano complexo $\mathbb{C}$.
$\sigma(K_o)$	: espectro de K_o (conjunto dos auto-valores de K_o)
$\lvert\sigma_i\rvert$	: valor absoluto de $\sigma_i \varepsilon \mathbb{R}$
$A_o^{-1} \mathcal{V}$	: imagem inversa de $\mathcal{V}$ por A_o
$\prod$	: símbolo de produtório
$\sum$	: símbolo de somatório

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Quando projetamos um sistema de controle desejamos que seu comportamento dinâmico seja compatível com as necessidades impostas pelo problema que lhe é inerente. Entretanto, nem sempre isto é possível.

Se investigarmos as causas de tal impossibilidade, concluiremos que em muitos casos foi ignorada a presença de eventuais perturbações no sistema.

Assim, se quisermos projetar um sistema de controle eficaz, devemos projetá-lo de maneira robusta, ou seja, seu comportamento dinâmico não deve sofrer alterações bruscas em presença de perturbações.

Nesta tese apresentaremos soluções robustas para alguns problemas clássicos. Os conceitos básicos para um bom entendimento dos assuntos abordados são tratados no capítulo II. No capítulo III, dados $A_o : X \to X$, $B_o : U \to X$ e um subespaço $V \subset X$ apresentamos condições para a existência de uma síntese robusta $F_o : X \to U$ que tornam V um subespaço $[A_o + B_o (F_o + \delta F)]$ - invariante independente das perturbações δF em F_o nos seguintes casos:

a) quando perturbamos todos os parâmetros de F_o

b) quando perturbamos apenas os parâmetros não-nulos de F_o.

Usando a condição de solubilidade do problema (b) mostramos como os observadores dinâmicos de ordem mínima possuem estrutura incompatível com robustez.

Todavia, o principal resultado encontra-se no capítulo IV, com a versão robusta do problema de rejeição de perturbação. A condição de solubilidade para este problema

$$\mathrm{Im}\,[D_o\ D_1 \ldots D_{k_4}] \subset \tilde{V}^*$$

nos permitiu introduzir na literatura um novo subespaço $\tilde{V}^*$, o maior subespaço robusto não-observável contido em $\mathrm{Ker}\ C_o$.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo é apenas introdutório. Nele objetivamos apresentar os conceitos fundamentais sobre (A_o , B_o) - invariância, espaços quocientes e diagramas comutativos.

Seção 2.1 - Subespaços (A_o , B_o) - invariantes

No decorrer deste trabalho, consideraremos apenas espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo R dos números reais.

Letras maiúsculas do alfabeto latino serão utilizadas para representar matricialmente aplicações lineares de espaços vetoriais em espaços vetoriais.

Sejam X , U espaços vetoriais, A_o um endomorfismo de X , B_o um monomorfismo de U em X .

Definição 1 - Um subespaço $V \subset X$ é (A_o , B_o) - invariante se

$$A_o V \subset B_o + V \tag{1}$$

A classe de todos os subespaços (A_o , B_o) - invariantes de X para algum par (A_o , B_o) será indicada por

$$C^* (A_o , B_o ;X) \tag{2}$$

É claro que se $V \subset X$ é A_o - invariante para algum endomorfismo A_o de X , V é (A_o , B_o) - invariante para todo monomorfismo de U em X .

A principal propriedade de um subespaço (A_o , B_o) - invariante reside no fato de que tal subespaço pode ser tornado $(A_o + B_oF_o)$ - invariante para algum homomorfismo F_o de X em U.

Se $V \in C^* (A_o , B_o ; X)$, uma classe

$$F^* (V) = \{F : (A_o + B_oF)\ V \subset V\} \tag{3}$$

de homomorfismos F que tornam V um subespaço $(A_o + B_oF)$ - invariante pode ser determinada da maneira seguinte: seja $X_1 \subset X$ um subespaço de X tal que $X = X_1 \oplus V$, $Q : X \to X_1$ a projeção sobre X_1 ao longo de V e $V : V \to X$ a inserção de V em X definida por:

$$(\forall x)\ (x \in V \Rightarrow Vx = x) \tag{4}$$

Claramente V é um monomorfismo e Im V = V .

Como $V \in C^* (A_o , B_o ; X)$,

$$Q\ A_o\ V \subset Q\ B_o$$

e a equação

$$Q\ A_o\ V = Q\ B_o\ Z \tag{5}$$

tem uma solução

$$Z = -F\ V \tag{6}$$

Combinando as equações (5) e (6), resulta

$$Q\ (A_o + B_oF\ )\ V = 0$$

ou ainda

$$(A_o + B_oF\ )\ V \subset V = \mathrm{Ker}\ Q$$

Assim cada classe $F^* (V)$ é determinada pela escolha de X_1 e dada por:

$$F^* (\mathcal{V}) = \{F : (A_o + B_oF)\, \mathcal{V} \subset \mathcal{V}\} = \{F : Z = - F\, V\} \tag{7}$$

É importante ressaltar que

$$F^* (\mathcal{V}) \neq \emptyset \text{ se e somente se } \mathcal{V} \in C^* (A_o, B_o; \mathcal{X}) \tag{8}$$

Seção 2.2 - Elemento maximal da classe $C^* (A_o , B_o ; \mathcal{K})$

Seja $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ um subespaço de $\mathcal{X}$ e $C^* (A_o , B_o ; \mathcal{K})$ a subclasse dos subespaços (A_o , B_o) - invariantes de $\mathcal{X}$ contidos em $\mathcal{K}$:

$$C^* (A_o , B_o ; \mathcal{K}) = \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \in C^* (A_o , B_o ;\mathcal{X}) \;\&\; \mathcal{V} \subset \mathcal{K}\} \tag{9}$$

Agora, $0 \in C^* (A_o , B_o ;\mathcal{K})$ e a classe $C^* (A_o , B_o ; \mathcal{K})$ é não-vazia. Como $\mathcal{K}$ é um subespaço de $\mathcal{X}$, $C^* (A_o, B_o ; \mathcal{K})$ é fechada em relação à operação de adição de subespaços e portanto possui um único elemento maximal

$$\mathcal{V}^* = \sup\ C^* (A_o , B_o ; \mathcal{K}) \tag{10}$$

O seguinte algoritmo, sugerido por Wonham & Morse em [1] nos permite encontrar $\mathcal{V}^*$ em um número de passos $\leq$ dimensão $\mathcal{K}$.

Primeiramente, defina a sequência de subespaços $\mathcal{V}_\mu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_o &= \mathcal{K} \\ \mathcal{V}_1 &= \mathcal{K} \cap A_o^{-1} (\mathcal{B}_o + \mathcal{V}_o) \\ \mathcal{V}_\mu &= \mathcal{K} \cap A_o^{-1} (\mathcal{B}_o + \mathcal{V}_{\mu-1}) \end{aligned} \tag{11}$$

onde,

$$A_o^{-1} (\mathcal{B}_o + \mathcal{V}_j) = \{x : x \in \mathcal{X} \;\&\; A_o\, x \in \mathcal{B}_o + \mathcal{V}_j\}$$

Observando a sequência $\mathcal{V}_\mu$ vemos que $\mathcal{V}_\mu \uparrow$ (sequência não-crescente) e $V_\mu \subset V_{\mu-1}$.

Assim, para algum $k \leq$ dimensão K,

$V^* = V_k$.

Seção 2.3 - Espaços Quocientes e Diagramas Comutativos

Definição 2 - Seja $V \subset X$ um subespaço de X . Diremos que x é equivalente a y módulo V e escreveremos

$$x \equiv y \pmod{V} \tag{12}$$

se

$x - y \in V$

Em particular, a equivalência

$x \equiv 0 \pmod{V}$

corresponde a $x \in V$

É claro que a equivalência módulo V é uma relação de equivalência.

Portanto, o espaço X fica decomposto em classes de equivalência módulo V . A classe gerada por um elemento x será denotada por $\bar{x}$.

Se

$x_1 \equiv y_1 \pmod{V}$ & $x_2 \equiv y_2 \pmod{V}$

então

$x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \pmod{V}$ & $\alpha x_1 \equiv \alpha y_1 \pmod{V}$

Este fato permite introduzir de uma maneira natural no conjunto das classes por um módulo fixado, as operações de adição e de multiplicação por um escalar, fazendo

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \overline{x_1 + x_2}$ & $\alpha\bar{x} = \overline{\alpha x}$

O conjunto destas classes torna-se assim um espaço vetorial conhecido como espaço quociente X/V (X/V não é subespaço de X).

Para os espaços quocientes valem as seguintes propriedades:

(a) $X/0$ é isomorfo a X

(b) $X/X = 0$

(c) dimensão X/V + dimensão V= dimensão X.

Definição 3 - Por uma <u>contração</u> do espaço X módulo V (também conhecida como projeção canônica de X em X/V), entenderemos o epimorfismo $P : X \to X/V$ tal que

$\text{Ker } P = V$ & $\text{Im } P = X/V$

Agora, se V X é um subespaço A_o - invariante para algum endomorfismo A_o de X e P é uma contração de X módulo V, seja $\bar{A}_o$ o endomorfismo induzido em X/V por A_o. Então, o diagrama 1 é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A_o"] \arrow[d, "P"'] & X \arrow[d, "P"] \\ X/V \arrow[r, "\bar{A}_o"'] & X/V \end{tikzcd} \qquad (13)$$

Diagrama 1

ou seja,

$$P A_o = \bar{A}_o P \tag{14}$$

Sejam X , Z espaços vetoriais, C_o um homomorfismo de X em Z e $V \subset X$ um subespaço de X tal que Ker $C_o \supset V$. Se P é uma contração X módulo V , existe um único homomorfismo $\bar{C}_o$ de X/V em Z que torna o diagrama 2 comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "C_o"] \arrow[d, "P"'] & Z \\ X/V \arrow[ur, "\bar{C}_o"'] & \end{tikzcd} \tag{15}$$

Diagrama 2

ou seja,

$$C_o = \bar{C}_o P \tag{16}$$

Em particular, se C_o é um epimorfismo e ker $C_o = V$, X/V é isomorfo a Z .

CAPÍTULO III

INVARIÂNCIA DE SÍNTESE E SUA RELAÇÃO COM PROJETO DE OBSERVADORES DINÂMICOS DE ORDEM MÍNIMA

Neste capítulo solucionaremos os seguintes problemas:

1º - Dado um subespaço $\mathcal{V}$ ε C^* $(A_o , B_o ; \mathcal{X})$ sob que condições existe um homomorfismo F_o ε F^* $(\mathcal{V})$ de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{U}$ tal que:

a) F_o tolera perturbações em todos os seus parâmetros.

b) F_o tolera perturbações apenas em seus parâmetros não-nulos.

2º - Projeto de observadores dinâmicos de ordem mínima e sua incompatibilidade com robustez.

Seção 3.1 - Invariância de Síntese

Com o advento da Teoria dos Observadores introduzida na literatura de Controle por David G. Luenberger [2], muitos autores tem voltado sua atenção para este problema.

Inúmeros trabalhos foram publicados no sentido de cada vez mais aperfeiçoar os projetos referentes a estes sistemas.

Recentemente, Bhattacharyya [3] mostrou que em uma situação mais realística na qual são introduzidas perturbações nos parâmetros do observador, tais projetos nem sempre são eficazes. Isto conduz naturalmente a uma nova reformulação do problema, visando encontrar novas estruturas para as quais tenhamos projetos fisicamente realizáveis.

O objetivo deste capítulo é mostrar que para observadores dinâmicos de ordem mínima, a estrutura clássica de tais observadores é completamente afetada em presença de perturbações.

Definição 4 - Dado um subespaço $V \in C^* (A_o, B_o ; X)$, uma síntese de V é todo homomorfismo F_o de X em U tal que

$$F_o \in F^* (V) \tag{17}$$

Sejam dimensão X = n e dimensão U = m. Se M (mxn, $\mathbb{R}$) denota o espaço vetorial das matrizes mxn sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, $M(mxn, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{mn}$ e como $F_o \in M(mxn, \mathbb{R})$ podemos identificar o homomorfismo F_o com o ponto f_o de uma superfície em $\mathbb{R}^{mn}$.

Seja $\varepsilon > 0$ um número real suficientemente pequeno e defina as classes de perturbações:

$$\Omega_o\ (\varepsilon) = \{\delta F : \delta F \in \mathbb{R}^{mn} \ \& \ |\delta\ fij| < \varepsilon,\ i \in \underline{m},\ j \in \underline{n}\} \tag{18}$$

$$\Omega_1\ (\varepsilon) = \{\delta F : \delta F \in \mathbb{R}^{mn} \ \& \ |\delta\ f_{ij}| < \varepsilon \text{ se } f_{ij} \neq 0$$

$$\text{e } \delta f_{ij} = 0 \text{ se } f_{ij} = 0,\ i \in \underline{m},\ j \in \underline{n}\} \tag{19}$$

Claramente,

$$\Omega_1\ (\varepsilon) \subset \Omega_o\ (\varepsilon)\ ,\ \forall\ \varepsilon \tag{20}$$

Podemos então formular nosso problema da seguinte maneira:

Dado $V \in C^*\ (A_o\ ,\ B_o\ ;\ X)$, encontrar condições para a existência de uma síntese δF_o de V tal que

$$\left[A_o + B_o(F_o + \delta F_o)\right]\ V \subset V \tag{21}$$

para todo F_o em uma vizinhança aberta de $f_o \in R^{mn}$. Temos dois casos a considerar:

<u>1º caso</u>: todos os parâmetros de F_o são perturbados.

<u>2º caso</u>: apenas os parâmetros não-nulos de F_o são perturbados.

Seção 3.2 - Teoremas

Teorema 1 - Dado $V \in C^*\ (A_o,\ B_o;\ X)$, existe uma síntese F_o de V tal que F_o tolera pequenas variações para todo δF_o em $\Omega_o\ (\varepsilon)$ se e somente se

$$\mathcal{B}_o \subset V \tag{22}$$

Demonstração:

Como $\mathcal{V} \varepsilon C^* (A_o, B_o; \mathcal{X})$,

$$(A_o + B_oF_o) \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{23}$$

$$[A_o + B_o (F_o + \delta F_o)] \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \;,\; \forall \delta F_o \; \varepsilon \; \Omega_o (\varepsilon) \tag{24}$$

De (23) e (24) resulta que

$$(A_o + B_oF_o) V = V \Gamma_1 \tag{25}$$

$$[A_o + B_o (F_o + \delta F_o)] V = V \Gamma_2 (\delta) \tag{26}$$

onde

$$\Gamma_1 = (A_o + B_oF_o) \mid \mathcal{V} \tag{27}$$

$$\Gamma_2 (\delta) = [A_o + B_o (F_o + \delta F_o)] \mid \mathcal{V} \tag{28}$$

e $V : \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ a inserção de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{X}$.

Combinando as equações dadas por (25) e (26) temos:

$$B_o \delta F_o V + V \Gamma_1 = V \Gamma_2 (\delta)$$

ou

$$B_o \delta F_o V = V (\Gamma_2 (\delta) - \Gamma_1) \tag{29}$$

Suponhamos $V \neq 0$. Então, se $\delta F_o \; \varepsilon \; \Omega_o (\varepsilon)$

a condição

$$\mathcal{B}_o \subset \mathcal{V}$$

é necessária e suficiente para (29) acontecer. Além disso, se $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{V}$, (24) é sempre satisfeita, $\forall \delta F_o \; \varepsilon \; \Omega_o (\varepsilon)$.

Teorema 2 - Dado $\mathcal{V} \in C^* (A_o , B_o ; \mathcal{X})$, existe uma síntese F_o de $\mathcal{V}$ tal que F_o tolera pequenas variações para todo δF_o em $\Omega_1 (\varepsilon)$ se e somente se

$$A_o \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{30}$$

Demonstração:

Necessidade - Particionemos B_o em $B_o = [B_1 : B_2]$ onde $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_o \cap \mathcal{V}$ e $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{V} = 0$. Sejam F_o e δF_o escritas de maneira compatível como

$$F_o = \begin{bmatrix} F_1 \\ \hline F_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \delta F_o = \begin{bmatrix} \delta F_1 \\ \hline \delta F_2 \end{bmatrix}$$

Como $\mathcal{V} \in C^* (A_o , B_o ; \mathcal{X})$ temos:

$$(A_o + B_o F_o) \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{31}$$

$$(A_o + B_o F_o + B_1 \delta F_1 + B_2 \delta F_2) \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{32}$$

Combinando (31) e (32) resulta

$$(B_1 \delta F_1 + B_2 \delta F_2) \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{33}$$

Porém, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{V}$ e (33) torna-se

$$B_2 \delta F_2 \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{34}$$

ou

$$B_2 \delta F_2 V = V \Gamma_3 (\delta) \tag{35}$$

onde

$$\Gamma_3 (\delta) = B_2 \delta F_2 \mid \mathcal{V}$$

e $V : \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ é a inserção de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{X}$.

A condição $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{V} = 0$ nos fornece de (35) que

$$B_2 \; \delta F_2 \; V = 0 \tag{36}$$

e sendo B_2 um monomorfismo,

$$\mathcal{V} \subset \ker \; \delta F_2 \tag{37}$$

Suponha agora que $F_o \in F^* (\mathcal{V})$ seja tal que $\forall \; \delta F_o$, δF_o em $\Omega_1 \; (\varepsilon)$, $F_o + \delta F_o \in F^* (\mathcal{V})$.

Escolha $\delta F_o^* = \varepsilon_1 \; F_o$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. É claro que

$$\delta F_o^* \in \Omega_1 \; (\varepsilon)$$

e portanto,

$$F_o + \delta F_o^* \in F^* (\mathcal{V})$$

Tome $\delta F_2^* = \varepsilon_1 \; F_2$.

Então,

$$\mathcal{V} \subset \mathrm{Ker} \; \delta F_2^* = \ker \varepsilon_1 \; F_2 = \ker F_2 \tag{38}$$

De (32) , temos

$$(A_o + B_1 \; F_1 + B_2 \; F_2 + B_1 \; \delta F_1 + B_2 \; \delta F_2) \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

ou ainda

$$(A_o + B_2 \; F_2 + B_2 \; \delta F_2) \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \;\; ; \tag{39}$$

pois $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{V}$

Levando os resultados de (37) e (38) em (39) resulta

$$A_o \; \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

Suficiência - É trivialmente verificada escolhendo $F_o = 0$.

Seção 3.3 - Exemplos

a) Exemplo para o 1º caso -

Suponhamos que $\mathcal{B}_o \not\subset V$

Sejam $A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Como $V \in C^* \; (A_o , B_o ; X)$, $F^* \; (V)$ é não-vazia.

Seja $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e construamos a classe

$F^* \; (V)$.

Da equação $Q \, A_o \, V = Q \, B_o \, (-FV)$ chegamos a

$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & -1 & -f_1 \\ f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{bmatrix}$ e a classe $F^* \; (V)$

é então constituída pelo conjunto de todos os homomorfismos $F : X \to U$ que possuem a estrutura acima.

Para cada $F_o \in F^* \; (V)$ tomemos $f_o \in R^8$ como sendo

$f_o = (f_1 \;\; f_2 \;\; -1 \;\; -f_1 \;\; f_5 \;\; f_6 \;\; f_7 \;\; f_8)$ e se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno seja Ω_o (ε) a classe de perturbações definida por (18).

$$\text{Seja} \quad \delta F_o = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$\delta f_o = (\delta_1 \;\; \delta_2 \;\; \delta_3 \;\; \delta_4 \;\; \delta_5 \;\; \delta_6 \;\; \delta_7 \;\; \delta_8)$ numa vizinhança aberta do ponto f_o .

$$\text{Agora,} \; \left[A_o + B_o\,(F_o + \delta F_o)\right] V =$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&1 \\ 1&0 \\ 0&0 \\ 0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1+\delta_1 & f_2+\delta_2 & -1+\delta_3 & -f_1+\delta_4 \\ f_5+\delta_5 & f_6+\delta_6 & f_7+\delta_7 & f_8+\delta_8 \end{bmatrix} \right] V =$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} f_5+\delta_5 & f_6+\delta_6 & f_7+\delta_7 & f_8+\delta_8 \\ f_1+\delta_1 & f_2+\delta_2 & -1+\delta_3 & -f_1+\delta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_5+\delta_5 & f_6+\delta_6 & f_7+\delta_7 & f_8+\delta_8 \end{bmatrix} \right] V =$$

$$= \begin{bmatrix} f_5+\delta_5 & f_6+\delta_6+1 & f_7+\delta_7 & f_8+\delta_8+1 \\ f_1+\delta_1 & f_2+\delta_2 & \delta_3 & -f_1+\delta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_5+\delta_5+1 & f_6+\delta_6+1 & f_7+\delta_7 & f_8+\delta_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1&0 \\ 0&0 \\ 0&1 \\ 1&0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} f_5+\delta_5+f_8+\delta_8+1 & f_7+\delta_7 \\ \delta_1+\delta_4 & \delta_3 \\ 0 & 0 \\ f_5+\delta_5+f_8+\delta_8 & f_7+\delta_7 \end{Bmatrix}$$

Claramente, não existe $F_o \in F^*$ (V) que consiga anular o efeito das perturbações δ_1 , δ_3 e δ_4 .

b) Exemplo para o 2º caso -

Primeiramente, $A_o \mathcal{V} \not\subset \mathcal{V}$. Seguindo o exemplo anterior,

seja $F_o = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \in F^*(\mathcal{V})$.

Tomemos $\delta F_o \in \Omega_1(\varepsilon)$ como

$$\delta F_o = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & \delta_6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[A_o + B_o(F_o + \delta F_o)]\ \mathcal{V} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \not\subset \mathcal{V} \text{ para todo } \delta_3$$

Observando a estrutura da classe $F^*(\mathcal{V})$, notamos que o único parâmetro de $F_o \in F^*(\mathcal{V})$ que podemos realmente perturbar é -1, e este parâmetro é quem contribui com a perturbação indesejável δ_3 , a qual independe dos parâmetros de F_o.

Seção 3.4 - Projeto de observadores dinâmicos de ordem mínima e sua incompatibilidade com robustez

Consideremos o sistema dinâmico observável

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_o x(t) + \mathcal{V}(t) \\ y(t) = C_o x(t) \ , \quad t \geqslant 0 \\ x(o) = x_o \end{cases} \tag{40}$$

onde A_o é um endomorfismo de $\mathcal{X}$, C_o um epimorfismo de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$

espaços vetoriais com dimensão $\mathcal{X} = n$

Procuremos um observador para (40) sob a forma:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = J_o\, Z(t) + K_o\, Y(t) + \mathcal{V}(t) \\ z(o) = Z_o \quad , \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{41}$$

com $Z(t) \in \mathcal{X}$, J_o um endomorfismo de $\mathcal{X}$ e K_o um homomorfismo de $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{X}$ a serem determinados.

Escreva

$$e(t) = x(t) - Z(t) \quad , \quad t \geq 0 \tag{42}$$

resultando

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{Z}(t) \quad , \quad t \geq 0 \tag{43}$$

Combinando as equações (42) e (43) temos:

$$\dot{e}(t) = (A_o - K_oC_o)\, x(t) - J_oZ(t) \tag{44}$$

Como o par (C_o , A_o) é observável, por [4] , existe um homomorfismo K_o de $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{X}$ tal que $\sigma\,(A_o - K_oC_o) \subset \mathbb{C}^-$.

Selecione $J_o = A_o - K_oC_o$.

De (44) vem que:

$$\dot{e}(t) = J_oe(t) \quad , \quad t \geq 0 \tag{45}$$

e sendo J_o estável, $e(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ para cada par de estados iniciais (x_o, Z_o).

Na prática, J_o é escolhida de maneira tal que a convergência seja rápida comparada com a resposta do sistema que está sendo observado. Tais observadores são ditos de ordem $\underline{n}$.

Suponha agora (C_o , A_o) observável. Pelo teorema da dualidade [4] , o par (A'_o , C'_o) é controlável, com A'_o um endomorfismo do espaço dual $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}$, C'_o um monomorfismo de $\mathcal{Y}'$ em $\mathcal{X}'$ e dimensão $\mathcal{X}'$=n. Se dimensão $\mathcal{Y}'$=p , seja Λ um conjunto simétrico de n-p números complexos.

Então, por [4] , existe um subespaço $\mathcal{V}' \subset \mathcal{X}'$ de dimensão n-p e um homomorfismo K_o de $\mathcal{Y}$ em $\mathcal{X}$ tal que:

$$\begin{cases} \text{Im } C' \oplus \mathcal{V}' = \mathcal{X}' & \text{(44a)} \\ (A_o - K_oC_o)' \, \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}' & \text{(44b)} \\ \sigma \left[(A_o - K_oC_o)' \mid \mathcal{V}'\right] = \Lambda & \text{(44c)} \end{cases}$$

As condições (44a) - (44b) - (44c) são equivalentes a existência de um observador mínimo de ordem n-p para o sistema (40).

Em termos matriciais, as condições (44) ficam:

$$\begin{cases} \text{posto} \begin{bmatrix} C_o \\ \hline V \end{bmatrix} = n & \text{(44a)'} \\ V \left[A_o - K_oC_o\right] = TV & \text{(44b)'} \\ \sigma(T) = \Lambda & \end{cases}$$

onde $A_o \in M(nxn,\mathbb{R})$, $K_o \in M(nxp,\mathbb{R})$, $C_o \in M(pxn,\mathbb{R})$, $T \in M\left[(n-p)x(n-p),\mathbb{R}\right]$ e $V \in M\left[(n-p)xn,\mathbb{R}\right]$.

Supondo observabilidade vamos agora construir um observador dinâmico de ordem mínima para o sistema (40).

Seja

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TZ(t) + VK_o y(t) + V\mathcal{V}(t) \\ z(o) = z_o \ , \qquad t \geq 0 \end{cases} \tag{45}$$

com T , K_o e V dadas por (44)'.

Escreva

$$e(t) = Vx(t) - Z(t) \ , \quad t \geq 0 \tag{46}$$

e daí resulta

$$\dot{e}(t) = V\dot{x}(t) - \dot{Z}(t) \ , \quad t \geq 0$$

ou ainda

$$\dot{e}(t) = T\,e(t) \ , \quad t \geq 0 \tag{47}$$

Se T é tal que $\sigma(T) \subset \mathbb{C}^-$, como $Z(t) = Vx(t) - e(t)$, teremos $Z(t) = Vx(t)$ com erro exponencialmente pequeno, quando $t \to \infty$.

Na prática, escolhemos Λ de tal modo que o erro seja anulado rapidamente comparado com a resposta do sistema observado.

Vamos mostrar agora que a formulação do problema para observador dinâmico de ordem mínima é incompatível com robustez quando K_o sofre perturbações em $\Omega_1(\varepsilon)$.

Inicialmente, consideremos o sistema descrito por (40) e suponhamos que estejam satisfeitas as condições (44), isto é,

$$\mathrm{Im}C' \oplus \mathcal{V}' = \mathcal{X}'$$

$(A_o - K_oC_o)' \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}'$

$\sigma\,[(A_o - K_oC_o)' \,|\mathcal{V}'] = \Lambda$

para algum $(\mathcal{V}', K_o, \Lambda)$ onde Λ é um conjunto simétrico de números complexos arbitrariamente escolhido.

Teorema 3 - Com (44) satisfeitas para algum $(\mathcal{V}', K_o, \Lambda)$ se K_o sofre perturbações em $\Omega_1(\varepsilon)$, então, (44a) ou (44c) falham.

Demonstração:

Se K_o tolera perturbações δK_o para todo δK_o em $\Omega_1(\varepsilon)$, então, pelo teorema 2

$$A_o' \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}' \tag{48}$$

Teremos então,

$(A_o' - C_o'K_o') \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}'$

e

$$A_o' \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}' \tag{49}$$

$$(A_o' - C_o'K_o') V' = V'\Gamma_1 \tag{50}$$

$$A_o' V' = V'\Gamma_2 \tag{51}$$

com $\Gamma_1 = (A_o - K_oC_o')'|\mathcal{V}'$

$\Gamma_2 = A_o' \,|\mathcal{V}'$

É claro que $\sigma(\Gamma_2) = \sigma(A_o | V')$ é fixo, $\forall K_o$.

Assim, das equações (50) e (51) resulta:

$$C_o' K_o' V' = V' \left[\Gamma_1 - \Gamma_2\right] \tag{52}$$

(a) Se $\mathrm{Im}C_o' \oplus V' = X$, $\mathrm{Im}C_o' \cap V' = 0$ e

$$C_o' K_o' V' = 0 \,. \tag{53}$$

Como V' é um monomorfismo (V' é a inserção de V' em X') $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Logo, Λ não é arbitrário, pois $\sigma(\Gamma_2) = \Lambda = \sigma(\Gamma_1)$.

Falha portanto, a condição (44c).

(b) Se $\sigma(\Gamma_1) \cap \sigma(\Gamma_2) \neq \emptyset$, então $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ e daí vem que

$V' (\Gamma_1 - \Gamma_2) \neq 0$ pois V' é monomorfismo.

Assim,

$C_o' K_o' V' \neq 0$ e consequentemente $\mathrm{Im}C_o' \cap V' \neq 0$ contradizendo (44a).

É interessante notar que mesmo sendo $\sigma(\Gamma_1) \subset \mathbb{C}^-$ e $\Gamma_2 = \Gamma_1$ teremos o observador com a mesma dinâmica do sistema observado.

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO COM VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DO SISTEMA

O Problema de Rejeição de Perturbação considerado por Wonham & Morse é agora solucionado de maneira mais significativa, introduzindo perturbações nos parâmetros do sistema.

A condição de solubilidade deste problema, embora mais restritiva que a anterior nos conduz à existência de um novo subespaço não-observável, robusto em relação a estas perturbações.

Seção 4.1 - Introdução ao Problema de Rejeição de Perturbação.

O problema de rejeição de perturbação, baseado no princípio de Poncelet, consiste em usar o controle, se possível, para anular o efeito de perturbações exógenas na saída.

Vários autores abordaram este problema encontrando condições para sua solubilidade.

Wonham & Morse em [5] mostraram que o problema de rejeição de perturbação tem solução usando realimentação de estado, se e somente se

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{V}^*$$

onde

$$\mathcal{V}^* = \sup C^* (A_o, B_o; \text{Ker } C_o)$$

Posteriormente, Bhattacharyya [6], usando um controle do tipo $u(t) = F_o \; X(t) + G_o \; \xi(t)$ ($\xi(t)$ sendo uma perturbação exógena arbitrária) ampliou a classe de soluções do problema estabelecendo para este caso a condição necessária e suficiente

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_o + \mathcal{V}^* \tag{55}$$

com $\mathcal{V}^* = \sup C^* (A_o, B_o; \text{Ker } C_o)$

Em nenhum destes tratamentos, entretanto, foi suposta a possibilidade de haver pequenas variações nos parâmetros das matrizes A_o, B_o, C_o e D_o do sistema, além da perturbação exógena considerada.

Mostraremos neste capítulo que se estas variações estiverem concentradas numa vizinhança aberta da origem no espaço R(.) é possível, sob certas condições, encontrar um controle que anule completamente o efeito de perturbações na saída, independente destas variações (que podemos considerar como novas perturbações).

Esta nova condição mais geral que as anteriores, torna $\tilde{\mathcal{V}}^*$ um subespaço quase A_o - invariante.

Seção 4.2. - O problema de rejeição de perturbação.

Consideremos o sistema dinâmico linear e invariante no tempo:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_o\, x(t) + B_o\, u(t) + D_o\, \xi(t) \\ Y(t) = C_o\, x(t) \quad , \quad t \geqslant 0 \\ x(o) = x_o \end{array}\right\} \qquad (56)$$

onde

$A_o : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é um endomorfismo de $\mathcal{X}$,$B_o : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $D_o : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ monomorfismos de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ em $\mathcal{X}$ respectivamente e $C_o : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ um epimorfismo de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$.

O termo $\xi(t)$ representa uma perturbação exógena não-mensurável diretamente pelo controlador, $\xi(.)$ pertencente à uma classe arbitrária Ω de perturbações.

Definição 5 - Dizemos que o sistema (56) é invariante sob perturbações em relação ao par $(\xi(.), y(.))$ se para cada estado inicial $x(o) \in \mathcal{X}$, a saída $Y(t)$ é a mesma para todo $\xi(.) \in \Omega$. Isto quer dizer que a resposta forçada $Y_\xi(t)$

devida às perturbações

$$Y_\xi(t) = C_o \int_o^t e^{(t-\tau)A_o} D_o \, \xi(\tau) \, \partial\tau \tag{57}$$

é nula para todo $\xi(.)$ em Ω .

Supondo agora que $|\xi(.)|$ cresce exponencialmente rápido quando $t \to \infty$, então $Y_\xi(t)$ tem a transformada de Laplace

$$Y_\xi(s) = \int_o^\infty e^{-st} \, Y_\xi(t) \, \partial t$$

$$= \int_o^\infty e^{-st} \left[C_o \int_o^t e^{(t-\tau)A_o} D_o \, \xi(\tau) \, \partial\tau \right] \partial t$$

$$= C_o \int_o^\infty e^{-st} \left[\int_o^t e^{(t-\tau)A_o} D_o \, \xi(\tau) \, \partial\tau \right] \partial t$$

$$= C_o(sI - A_o)^{-1} \, D_o \, \xi(s)$$

Como $Y_\xi(t) = 0$, $\forall \xi(t) \in \Omega$, resulta

$Y_\xi(s) = 0$, $\forall$ (s) e daí concluímos que a condição (57) é equivalente a

$$H(s) = C_o(sI - A_o)^{-1} \, D_o \equiv 0, \; \forall s \in \mathbb{C} - \sigma(A_o)$$

Em termos de realização de estado, o problema de rejeição de perturbação fica então reduzido a: encontrar um homomorfismo F_o de $\mathcal{U}$ em χ tal que

$$H(s,F_o) = C_o(sI - A_o - B_oF_o)^{-1} D_o \equiv 0, \quad \forall s, s \in \mathbb{C} - \sigma(A_o + B_oF_o)$$

Seção 4.3 - Problema de Rejeição de Perturbação com variação nos parâmetros de A_o , B_o , C_o e D_o .

Seja o sistema dado por (56).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_o\, x(t) + B_o\, u(t) + D_o \xi(t) \\ Y(t) = C_o\, x(t) \\ x(o) = x_o\,, \quad t > 0 \end{cases}$$

com dimensão $\mathcal{X} = n$, dimensão $\mathcal{U} = m$, dimensão $\mathcal{Y} = p$ e dimensão $\mathcal{Z} = r$.

Vamos definir as seguintes classes de perturbações:

$\Omega\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}) = \{\delta A : \delta A \in M(nxn; \mathbb{R})$ &

$\delta A = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i A_i$, para todo $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que

$|\alpha_i| < \varepsilon_{1i}$, $\varepsilon_{1i} > 0$ $(i=1,2,\ldots,k_1)\}$

$\Omega\ (\beta_1, \ldots, \beta_{k_2}) = \{\delta B : \delta B \in M(nxm; \mathbb{R})$ &

$\delta B = \sum_{i=1}^{k_2} \beta_i B_i$, para todo $\beta_i \in \mathbb{R}$ tal que

$|\beta_i| < \varepsilon_{2i}$, $\varepsilon_{2i} > 0$ $(i = 1,2,\ldots, k_2)\}$

$\Omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_3}) = \{\delta C : \delta C \in M(pxn; \mathbb{R})$ &

$\delta C = \sum_{i=1}^{k_3} \gamma_i C_i$, para todo $\gamma_i \in \mathbb{R}$ tal que

$|\gamma_i| < \varepsilon_{3i} > 0 \; (i = 1,2,\ldots,k_3)\}$

$\Omega(\delta_1, \ldots, \delta_{k_4}) = \{\delta D : \delta D \in M(nxr; \mathbb{R})$ &

$\delta D = \sum_{i=1}^{k_4} \delta_i D_i$, para todo $\delta_i \in \mathbb{R}$ tal que

$|\delta_i| < \varepsilon_{4i}$, $\varepsilon_{4i} > 0 \; (i = 1,2,\ldots, k_4)\}$

Tomemos agora o sistema com perturbação

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_o + \delta A)\, x(t) + (B_o + \delta B)\, u(t) + (D_o + \delta D)\, \xi(t) \\ y(t) = (C_o + \delta C)\, x(t) \\ x(o) = x_o \;, \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{58}$$

Seja $F_o \in M(mxn; \mathbb{R})$ um homomorfismo de X em U e consideremos o sistema de malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[A_o + \delta A + (B_o + \delta B)\, F_o\right] x(t) + (D_o + \delta D)\, \xi(t) \\ y(t) = (C_o + \delta C)\, x(t) \\ x(o) = x_o, \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{59}$$

Se $\tilde{H}(s,F_o)$ denota a matriz de transferência do sistema com perturbação, uma condição necessária e suficiente para que o sistema (59) rejeite perturbações é que

$$\tilde{H}(s,F_o) = 0, \quad \forall s \tag{60}$$

ou equivalentemente

$$(C_o + \delta C) \left[(A_o + \delta A) + (B_o + \delta B)\, F_o \right]^j (D_o + \delta D) \equiv 0, \tag{61}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \delta A \in \Omega\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}) \\ \forall \delta B \in \Omega\, (\beta_1, \ldots, \beta_{k_2}) \\ \forall \delta C \in \Omega\, (\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_3}) \\ \forall \delta D \in \Omega\, (\delta_1, \ldots, \delta_{k_4}) \end{array}\right. \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Nosso problema será então determinar condições para a existência de uma classe não-vazia de homomorfismos F de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{U}$, que verificam (61) independente das variações em A_o, B_o, C_o e D_o.

Seção 4.4 - Resultado Principal

Seja $\mathcal{H}(F)$ a classe dos homomorfismos de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{U}$ que satisfazem a (61) independente das variações em A_o, B_o, C_o e D_o.

Teorema 4 - A classe $\mathcal{H}(F)$ é não-vazia se e somente se

$$\text{Im}\, [D_o\ D_1 \ldots D_{k_4}] \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \tag{62}$$

onde $\tilde{V}^* = \sup \{V \subset X : A_o V \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \mathrm{Ker}\, P_i B_i + V,$

$A_i V \subset V \quad (i = 1,2,\ldots,k_1)$ & $V \bigcap_{i=0}^{k_3} \mathrm{Ker}\, C_i\}$

com $P_i : X \to \dfrac{X}{B_i \cap V}$ denotando a contração de X módulo $B_i \quad V$.

Lema 1 - Sejam $\sigma_i \in \mathbb{R}$ tais que $|\sigma_i| < \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ e

$H_i \in M(m\mathrm{x}n; \mathbb{R})$.

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i H_i \equiv 0 \ , \ \forall \ \sigma_i$$

se e somente se

$H_i = 0$ para todo $i=1,2,\ldots k$.

Demonstração:

Temos que $\phi(H_i) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i H_i$ é contínua para todo σ_i,

$\dfrac{\partial}{\partial \sigma_i} \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i H_i \right) = H_i$, $i=1,2,\ldots,k$ e como $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i H_i \equiv 0$, resulta que

$H_i = 0$ para todo $\underline{i}$.

Agora, suponha que $H_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,k$. Existem $\sigma_i \in \mathbb{R}$, com $|\sigma_i| < \varepsilon_i, \varepsilon_i > 0$ tais que

$\sigma_i H_i = 0$, $\forall \ \sigma_i$ e teremos naturalmente

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i H_i \equiv 0 \text{ , para todo } \sigma_i \text{ satisfazendo a}$$

$|\sigma_i| < \varepsilon_i$, $i = 1,2,\ldots,k$.

Demonstração do teorema 4:

Necessidade. Suponhamos que $\mathcal{H}(F)$ seja não-vazia. Então, existe um homomorfismo F_o de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{U}$ satisfazendo a (61). Para facilitar a demonstração vamos reescrever (61) como

$$(C_o + \delta C)\,(\sigma_o \tilde{A}_o + \sigma_1 \tilde{A}_1 + \ldots + \sigma_g \tilde{A}_g)^j\,(D_o + \delta D) = 0 \tag{63}$$

onde:

$$A_o + B_o F_o = \tilde{A}_o \qquad \sigma_o = 1$$

$$\begin{array}{ccc} A_1 = \tilde{A}_1 & & \sigma_1 = \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k_1} = \tilde{A}_{k_1} & \text{e} & \sigma_{k_1} = \alpha_{k_1} \\ & & \\ B_1 F_o = \tilde{A}_{k_1+1} & & \sigma_{k_1+1} = \beta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k_2} F_o = \tilde{A}_{k_1+k_2} & & \sigma_{k_1+k_2} = \beta_{k_2} \end{array}$$

fazendo também $k_1 + k_2 = g$.

É claro que (63) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} C_o \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{k_3} \end{bmatrix} \quad (\sigma_o\tilde{A}_o + \ldots + \sigma_g\tilde{A}_g)^j \; (D_oD_1 \ldots D_{k_4}) = 0 \tag{64}$$

$$j = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Fixando $j=k(j\neq 0)$, procuremos o desenvolvimento de $(\sigma_o\tilde{A}_o + \ldots + \sigma_g\tilde{A}_g)^k$.

Para tanto, seja $S = \{0,1,2,\ldots,g\}$ e consideremos o produto cartesiano S^k.

Definamos as aplicações

$\phi_k : S^k \to \mathbb{R}$

$\psi_k : S^k \to M(nxn; \mathbb{R})$

definidas por

$$\phi_k \; (x_1) \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} \sigma_{k_i}$$

$$\psi_k \; (x_1,\ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} \tilde{A}_{x_i}$$

para todo elemento $(x_1,\ldots, x_k) \in S^k$.

Seja R a relação em S^k dada por:

" $Z_1 \; R \; Z_2$ se e somente Z_1 é uma permutação de Z_2" .

Claramente, R é uma relação de equivalência sobre S^k. Assim, poderemos particionar S^k em classes de equivalência

$$S_1^k \; , \; S_2^k \; , \; \ldots \; , \; S_{\mu_k}^k$$

tais que

$$S_{\ell_1}^k \cap S_{\ell_2}^k = \emptyset \quad \text{para} \quad \ell_1 \neq \ell_2$$

e

$$\bigcup_{\ell=1}^{\mu_k} S_\ell^k = S^k$$

Seja $Z_\ell(k)$ um gerador da classe S_ℓ^k .

Logo,

$$(\sigma_o\tilde{A}_o + \ldots + \sigma_o\tilde{A}_g)^k = \sum_{\ell=1}^{\mu_k} \phi_k \; (Z_\ell \; (k)) \left[\sum \psi_k \; (S_\ell^k) \right]$$

Escrevendo $\tilde{C}_o = \begin{bmatrix} C_o \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{k_3} \end{bmatrix}$, teremos de (64)

que

$$\tilde{C}_o \; \{ \sum_{i=1}^{\mu_k} \; \phi_k \; (Z_\ell(k) \left[\sum \psi_k \; (S_\ell^k) \right] \} \; (D_o D_1 \ldots D_{k_4}) = 0$$

e aplicando o lema 1 ,

$$\tilde{C}_o \left[\sum \psi_k (S^k_\ell)\right] [D_o D_1 \dots D_{k_4}] = 0 \ , \quad \ell = 1,2,\dots \mu_k \tag{64'}$$

ou ainda

$$\mathrm{Im}\, [D_o D \dots D_{k_4}] \subset \bigcap_{\ell=1}^{\mu_k} \mathrm{Ker}\, \tilde{C}_o \left[\sum \psi_k (S^k_\ell)\right]$$

convencionando que para $j = 0$,

$\phi_o = 1$ e $\psi_o = I_n \in M(n\mathrm{x}n; \mathbb{R})$,

fazendo $j = 0,1,\dots, n-1$, teremos

$$\mathrm{Im}\, [D_o D_1 \dots D_{k_4}] \subset \bigcap_{j=0}^{n-1} \left\{\bigcap_{\ell=1}^{\mu_j} \mathrm{Ker}\, \tilde{C}_o \left[\sum \psi_j (S^j_\ell)\right]\right\} \tag{65}$$

Lema 2 - Seja $\mathcal{W}^* = \bigcap_{j=0}^{n-1} \left\{\bigcap_{\ell=1}^{\mu_j} \mathrm{Ker}\, \tilde{C}_o \left[\sum \psi_j (S^j_\ell)\right]\right\}$. (66)

Então, $\mathcal{W}^*$ é um subespaço de $\mathrm{Ker}\, \tilde{C}_o$ tal que

$\tilde{A}_i \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^*$;

$i = 0,1,2,\dots, g$

Demonstração:

Seja $\mathcal{V}^*$ o subespaço maximal da classe.

$\underline{\tilde{C}}^* (\tilde{A}_o, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_g ; \mathrm{Ker}\ \tilde{C}_o) = \{V \subset X : \tilde{A}_i V \subset V,$

$(i = 0,1,2,\ldots, g)\ \&\ V \subset \mathrm{Ker}\ \tilde{C}_o\}$.

Se tomarmos a sequência de subespaços V_ρ em Ker $\tilde{C}_o$,

$$V_o = \mathrm{Ker}\ \tilde{C}_o$$

$$V_1 = \mathrm{Ker}\ \tilde{C}_o \cap \tilde{A}_o^{-1} V_o \cap \ldots \cap \tilde{A}_g^{-1} V_o$$

$$\vdots$$

$$V_\rho = \mathrm{Ker}\ \tilde{C}_o \cap \tilde{A}_o^{-1} V_{\rho-1} \cap \ \ldots \ \cap \tilde{A}_g^{-1} V_{\rho-1}$$

$$\vdots$$

como $V_o \supset V_1 \supset \ldots \supset V_\rho \supset \ldots$ existe um índice $\rho \leqslant$ dimensão Ker $\tilde{C}_o$,

tal que $V_\rho = V^*$.

Uma outra expressão para V^* é

$$V^* = \bigcap_{j=0}^{n-1} \{\bigcap_{\ell=1}^{\mu_j} \mathrm{Ker}\ \tilde{C}_o\ [\psi_j\ (S_\ell^j)]\} \tag{67}$$

Comparando (66) e (67) temos que

$$V^* \subset W^* \tag{68}$$

Consideremos agora a classe de subespaços

$\tilde{Z}^* (\tilde{A}_o, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_g ; \sigma_o, \sigma_1, \ldots, \sigma_g) = \{ Z \subset X : (\sigma_o \tilde{A}_o + \ldots + \sigma_g \tilde{A}_g)\ Z \subset Z$, para todo σ_i tal que

$|\sigma_i| < \varepsilon_i$, $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1,2,\ldots,g)$; $Z \subset \text{Ker}\ \tilde{C}_o\}$

Esta classe é não-vazia e é fechada em relação à operação de adição de subespaços.

Seja

$$Z^* = \sup\ \underline{\tilde{Z}}^* \ (A_o,\ldots,\tilde{A}_g\ ;\ \sigma_o, \sigma_1,\ldots,\sigma_g) \qquad (69)$$

Logo,

$$(\sigma_o\tilde{A}_o + \ldots + \sigma_g\tilde{A}_g)^j\ Z^* \subset Z^*,\quad j = 0,1,2,\ldots,n-1$$

e portanto, Z^* é o conjunto de todos os vetores $z \in \text{Ker}\ \tilde{C}_o$ tais que $\forall\ \sigma_i$,

$$\tilde{C}_o\ (\sigma_o A_o + \ldots + \sigma_g A_g)^j\ z = 0\ ,\quad j = 0,1,2,\ldots,n-1$$

A partir da estrutura de w^* e pelo lema 1, para todo σ_i tal que $|\sigma_i| < \varepsilon_i$, $1 = 1,2,\ldots,g$,

$$\tilde{C}_o\ (\sigma_o\tilde{A}_o + \ldots + \sigma_g\tilde{A}_g)^j\ w = 0\ ,\quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

e consequentemente,

$$W^* \subset Z^* \qquad (70)$$

Observando a estrutura da classe $\underline{\tilde{Z}}^*$, como $Z^* \in \underline{\tilde{Z}}^*$, é claro que Z^* é $\tilde{A}_i$ - invariante para todo $i = 0,1,2,\ldots,g$.

Claramente, $\mathcal{Z}^* \subset \mathcal{V}^*$.

Assim,

$$\mathcal{V}^* \subset \mathcal{W}^* \subset \mathcal{Z}^* \tag{71}$$

e pela transitividade, resulta

$$\mathcal{V}^* \subset \mathcal{Z}^* \tag{72}$$

Portanto,

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{Z}^*$$

e por (71), teremos

$$\mathcal{W}^* = \mathcal{Z}^* \tag{73}$$

Logo,

$$A_i \, \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^* \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots,g.$$

Agora, pelo lema 2

$$(A_o + B_o F_o) \, \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^* \tag{74}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1 F_o \, \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^* \\ \vdots \\ B_{k_2} F_o \, \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^* \end{array}\right\} \quad \text{(b)} \tag{75}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \, \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^* \\ \vdots \\ A_{k_1} \, \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^* \end{array}\right\} \qquad (76)$$

$$\mathcal{W}^* \subset \operatorname{Ker} \tilde{C}_o \qquad (77)$$

Seja $P_i : X \to X / B_i \cap \mathcal{W}^*$, $i = 1,2,\ldots, k_2$

o epimorfismo canônico de X em $X / B_i \cap \mathcal{W}^*$.

Do grupo (b) vem:

$$P_i B_i F_o \, \mathcal{W}^* = \bar{o}_i \qquad i = 1,2,\ldots, k_2$$

$$F_o \, \mathcal{W}^* \subset \operatorname{Ker} P_i B_i \qquad i = 1,2,\ldots, k_2$$

$$F_o \, \mathcal{W}^* \subset \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i \qquad (78)$$

Agora, se $w \in \mathcal{W}^*$, por (74) e (78) ,

$$A_o \, w^* \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + w^*$$

Logo, $\mathcal{W}^*$ é um elemento da família $\underline{V}$ $(A_o , A_1 ,\ldots, A_{k_1}, B_o, B ,\ldots, B_{k_2}, C_o, C_1,$

$\ldots, C_{k_3}) =$

$$\{\mathcal{V} \subset X : A_o \, \mathcal{V} \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + \mathcal{V} \ , \ A_i \, \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

$(i = 1,2,\ldots,k_1)$; $V \subset \bigcap_{i=1}^{k_3} \operatorname{Ker} C_i \}$

Lema 3 - A classe $\underline{V}$ é fechada em relação à operação de adição de subespaços.

Demonstração:

Como $0 \in \underline{V}$ é claro que $\underline{V} \neq \emptyset$.

Sejam V_1 , $V_2 \in \underline{V}$.

$$A_o \; V_1 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{\mu_2} \operatorname{Ker} P_{1_i} B_i + V_1 \tag{79}$$

$$A_o \; V_2 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{\mu_2} \operatorname{Ker} P_{2_i} B_i + V_2 \tag{80}$$

com

$$P_{1_i} : X \to X \big/ B_i \cap V_1 \; , \; i = 1,2,\ldots, k_2$$

$$P_{2_i} : X \to X \big/ B_i \cap V_2$$

Seja

$$P_i : X \to X \big/ B_i \cap (V_1 + V_2) \; , \; i = 1,2,\ldots,k_2$$

Tomemos $u \in \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_{1_i} B_i$.

$$P_{1_i} B_i \, u = \bar{o}_{1_i} \quad , \quad i = 1,2,\ldots, k_2$$

$B_i\, u \in \operatorname{Ker} P_{1_i} = B_i \cap V_1 \subset B_i \cap V_1 + B_i \cap V_2 \subset B_i \cap (V_1 + V_2) =$

$= \operatorname{Ker} P_i \ , \ i = 1,2,\ldots,k_2$

Logo,

$P_i B_i\, u = \bar{0}_i \ , \ i = 1,2,\ldots,k_2$

$u \in \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i \ ,$

$\bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_{1_i} B_i \subset \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_1 B_i \ ,$

$B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i \ ,$

e

$$B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + V_1 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + V_1 + V_2 \tag{81}$$

Analogamente, teríamos:

$$B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + V_2 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + V_1 + V_2 \tag{82}$$

De (79) (80) (81) (82)

$A_o V_1 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + V_1 + V_2$

$$A_o\, \mathcal{V}_2 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$$

$$A_o\, \mathcal{V}_1 + A_o\, \mathcal{V}_2 \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$$

e tendo-se em conta o fato de que

$$A_o\, (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) = A_o\mathcal{V}_1 + A_o\mathcal{V}_2 \; .$$

$$A_o\, (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \quad ,$$

onde

$$P_i : X \to X \Big/ B_i \cap (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \quad , \; i = 1,2,\ldots,k_2$$

Além disto,

$$A_i(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \subset \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \;, \quad i = 1,2,\ldots,k_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 \subset \bigcap_{i=1}^{k_3} \operatorname{Ker} C_i$$

Pelo lema 3, $\underline{\mathcal{V}}$ possui um único elemento maximal. Denotemos por $\tilde{\mathcal{V}}^*$ o supremo da classe $\underline{\mathcal{V}}$.

Então,

$$\mathcal{W}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$$

e por (65)

$$\operatorname{Im} \left[D_o D_1, \ldots, D_{k_4}\right] \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$$

Suficiência.

Suponhamos que a condição

$\mathrm{Im}\,[D_o D_1 \dots D_{k_4}] \subset \tilde{V}^*$

esteja verificada.

$A_o\,\tilde{V}^* \subset B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \mathrm{Ker}\,P_i B_i + \tilde{V}^*$

Seja $X_1 \subset X$ tal que $X = X_1 \oplus \tilde{V}^*$

e $Q : X \to X_1$ a projeção sobre X_1 ao longo de $\tilde{V}^*$.

$QA_o\,\tilde{V}^* \subset QB_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \mathrm{Ker}\,P_i B_i$

Se

$\tilde{V}^* : \tilde{V}^* \to X$ é a inserção de $\tilde{V}^*$ em X e $U^* : \bigcap_{i=1}^{k_2} \mathrm{Ker}\,P_i B_i \to X$ é a inserção de $\bigcap_{i=1}^{k_2} \mathrm{Ker}\,P_i B_i$ em X, a equação

$$QA_o\tilde{V}^* = QB_oU^*\,Z \tag{83}$$

tem uma solução Z . Como $\tilde{V}^*$ é um monomorfismo, $Z = -K\tilde{V}^*$.

De (83) vem:

$QA_o\tilde{V}^* + QB_oU^*K\tilde{V}^* = 0$

$Q(A_o + B_oU^*K)\,\tilde{V}^* = 0$

$(A_o + B_oU^*K)\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \text{Ker } Q = \tilde{\mathcal{V}}^*.$

Escolhendo $F = U^*K$,

$F^*\ (\tilde{\mathcal{V}}^*) = \{F : F = U^*K\}$

$P_iB_iF\ \tilde{\mathcal{V}}^* = P_iB_i\ U^*K\ \tilde{\mathcal{V}}^* = \bar{0}_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,k_2$

$B_iF\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \text{Ker } P_i = \mathcal{B}_i \cap \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \quad , \quad i = 1,2,\ldots,k_2$

Portanto,

$B_iF\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \quad$, para todo $\ F \in F^*\ (\tilde{\mathcal{V}}^*)$

Seja $\ F_o \in F^*\ (\tilde{\mathcal{V}}^*)$.

$(A_o + B_oF_o)\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$

$$\left.\begin{array}{l} B_1F_o\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \\ \quad\vdots \\ B_{k_2}F_o\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \\ \quad\vdots \\ A_{k_1}\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \end{array}\right\}$$

$\tilde{\mathcal{V}}^* \subset \text{Ker } \tilde{C}_o$

Claramente, $\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \mathcal{Z}^*$. Assim, Im $[\tilde{D}_o D_1 \ldots D_{k_4}] \subset Z^*$ e teremos:

$$\tilde{C}_o\ (\sigma_o \tilde{A}_o + \ldots + \sigma_g \tilde{A}_g)^j\ [\tilde{D}_o D_1 \ldots D_{k_4}] = 0$$

$\forall\ \sigma_1, \ldots\ \sigma_g\ ,\quad j = 0,1,2,\ldots,n-1.$

Ou também,

$$\tilde{C}_o\ [(A_o + \delta A_o) + (B_o + \delta B)]^j\ [\tilde{D}_o D_1 \ldots D_{k_4}] = 0$$

e finalmente,

$$(C_o + \delta C)\ [(A_o + \delta A) + (B_o + \delta B)\ F_o]^j\ (D_o + \delta D) \equiv 0$$

$j = 0,1,2,\ldots,n-1$, para todo $\delta A \in \Omega\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1})$,

$\forall\ \delta B \in \Omega\ (\beta_1, \ldots, \beta_{k_2})$, $\forall\ \delta C \in \Omega\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_3})$,

$\forall\ \delta D \in \Omega\ (\delta_1, \ldots, \delta_{k_4})$.

Assim, a suficiência fica trivialmente verificada se tomarmos $H(F) = F^*\ (\tilde{V}^*)$.

Seção 4.5 - Algoritmo para a determinação do elemento maximal $\tilde{V}^*$.

Consideremos a sequência de subespaços V_ρ em Ker $\tilde{C}_o$ dada por:

$V_o = \text{Ker}\ \tilde{C}_o$

$$\mathcal{V}_1 = \operatorname{Ker} \tilde{C}_o \cap A_o^{-1}(B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_{oi}B_i + \mathcal{V}_o) \cap A_1^{-1}\mathcal{V}_o \cap \ldots \cap A_{k_1}^{-1}\mathcal{V}_o$$

$\vdots$

$$\mathcal{V}_{\rho+1} = \operatorname{Ker} \tilde{C}_o \cap A_o^{-1}(B_o \bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_{\rho i}B_i + \mathcal{V}_\rho) \cap A_1^{-1}\mathcal{V}_\rho \cap \ldots \cap A_{k_1}^{-1}\mathcal{V}_\rho$$

onde

$$P_{\rho i} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} / \mathcal{B}_i \cap \mathcal{V}_\rho$$

$i = 1,2,\ldots,k_2$ denota a contração de $\mathcal{X}$ módulo $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{V}_\rho$.

Como a sequência $\mathcal{V}_\rho$ é não crescente, isto é,

$$\mathcal{V}_o \supset \mathcal{V}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{V}_\rho \supset \ldots$$

existe um índice $\rho \leq$ dimensão $\operatorname{Ker} \tilde{C}_o$ para o qual $\mathcal{V}_\rho = \tilde{\mathcal{V}}^*$.

Seção 4.6 - Exemplo

Consideremos o sistema dado por

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_o\, x(t) + B_o\, u(t) + D_o\, \xi(t) \\ y(t) &= C_o\, x(t) \\ x(o) &= x_o \ , \ t \geq 0 \end{aligned}\right|$$

com:

$$A_o = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B_o = \begin{pmatrix} 0&0\\0&1\\1&0\\0&0\\0&0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D_o = \begin{pmatrix} 0&0\\0&0\\0&0\\1&1\\0&1 \end{pmatrix}$$

$$C_o = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Vamos perturbar os parâmetros a_{13} e b_{22} de A_o e B_o. Tomemos η_1 e δ_1 tais que $|\eta_1| < \varepsilon^*$ e $|\delta_1| < \varepsilon^*$ com $\varepsilon^* > 0$ suficientemente pequeno.

$$A_o + \delta A_o = \begin{pmatrix} 1&0&1+\delta_1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad ; \; B_o + \delta B_o = \begin{pmatrix} 0&0\\0&1+\eta_1\\1&0\\0&0\\0&0 \end{pmatrix}$$

com $\delta A_o \in \Omega(\delta_1)$ e $\delta B_o \in \Omega(\eta_1)$.

Agora,

$$C_o (A_o + \delta A_o)^j D_o = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0&0\\0&0 \end{pmatrix}, & j = 0,1 \\[2ex] \begin{pmatrix} 0&0\\1+\delta_1&1+\delta_1 \end{pmatrix}, & j = 2,3,4 \end{cases}$$

Escolhendo $\varepsilon^* = 1$, $C_o (sI - A_o - \delta A_o)^{-1} D_o \neq 0$, $\forall\, \delta A_o \in \Omega(\delta_1)$; $\forall s$.

$$\tilde{V}^* = \sup \{V : A_o V \subset B_o \operatorname{Ker} P_1 B_1 + V,\ A_1 V \subset V \ \& \ V \subset \operatorname{Ker} C_o\}$$

onde

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \ P_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \big/ B_1 \cap \mathcal{V}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathcal{V}}^* = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\mathcal{D}_o \subset \mathcal{V}^*$, o problema tem solução.

$$B_1 \cap \tilde{\mathcal{V}}^* = 0 \quad e \ P_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \big/ B_1 \cap \tilde{\mathcal{V}}^*$$

$P_1 = I_5 \ \varepsilon \ M\ (5x5,\ R)$.

$\mathrm{Ker}\ P_1 \hat{B}_1 = \mathrm{Ker}\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $U^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] A_o \tilde{V}^* = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] B_o \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} Z$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (k_1\ k_2\ k_3\ k_4\ k_5) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_4 & -k_5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e daí ,} \quad \left[\begin{array}{l} k_5 = 0 \\ k_4 = -1 \end{array} \right.$$

Então,

$$K = (k_1\ k_2\ k_3 - 1\ 0)$$

Como $F = U^* K$,

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (k_1\ k_2\ k_3\ -1\ \ 0) \quad \text{e}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H\ (F) = \{F : F = \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ \}$$

$$[A_o + \delta A_o + (B_o + \delta B_o)\ F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora,

$$C_o D_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_o\,[A_o + \delta A_o + (B_o + \delta B_o)\,F_o]\,D_o =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_o\,[A_o + \delta A_o + (B_o + \delta B_o)\,F_o]^2\,D_o =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_o\,[A_o + \delta A_o + (B_o + \delta B_o)\,F_o]^3\,D_o =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* indicando a presença da perturbação δ_1 .

Tomemos agora $D_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{D}_o \subset \operatorname{Ker} C_o$ mas $\mathcal{D}_o \not\subset \tilde{\mathcal{V}}^*$.

$$C_o D_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_o\,[A_o + \delta A_o + (B_o + \delta B_o)\,F_o]\,D_o =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1+\delta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

pois, como $|\delta_1| < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* = 1$ teremos $1+\delta_1 \neq 0$, $\forall\delta_1$.

CONCLUSÕES

Se fizermos uma análise dos resultados apresentados concluiremos que projetando um sistema físico com robustez estaremos tornando sua estrutura cada vez mais restritiva.

Em alguns casos, um tal sistema nem existe, por exemplo, o observador de Luenberger de ordem mínima.

No caso do observador de ordem mínima, sua estrutura tornou-se incompatível com robustez porque não suportou o sacrifício de ter

$\sigma\ [(A_o - K_oC_o)' \mid V']$ fixo para todo K_o, condição esta necessária para K_o tolerar perturbações em $\Omega_1\ (\xi)$.

Considerando agora o problema de rejeição de perturbação com variação nos parâmetros de A_o, B_o, C_o e D_o, a condição de solubilidade

$$\mathrm{Im}\ [D_o, D_1, \ldots, D_{k_4}] \subset \tilde{V}^*$$

em muitos casos não será satisfeita e $\tilde{V}^*$ quase sempre será um subespaço A_o - invariante.

Embora na prática não tenhamos sistemas físicos cuja estrutura seja compatível com robustez, a condição de solubilidade

$$\mathrm{Im}\ [D_o, D_1, \ldots, D_{k_4}] \subset \tilde{V}^*$$

vale como ponto de partida para a solução de um problema prático de grande interesse: "encontrar condições para existência de uma lei controle que consiga <u>minimizar</u> o efeito das perturbações na saída", uma vez que este problema decorre da

$$\operatorname{Im}\left[D_o, D_1 \ldots, D_{k_4}\right] \not\subset \tilde{V}^*.$$

A eficiência de uma lei de controle $u = Fx$ que torna a resposta do sistema na malha fechada insensível à perturbações é evidenciada pelo seguinte fato:

No caso geral, restrição de B_o ao subespaço $\bigcap_{i=1}^{k_2} \operatorname{Ker} P_i B_i$ impossibilita a utilização de todas as colunas de B_o. Esta perda de utilidade deve ser compensada por uma ação decisiva do controle.

Além disto, uma solução F_o para este problema deve satisfazer ao conjunto de equações matriciais não-lineares dado por $(64)'$.

Uma maneira sistemática de encontrar F_o desta consiste em linearizar este conjunto de equações não-lineares, tomando $F_o \in F^* (\tilde{V}^*)$ pois $\tilde{V}^*$ torna não-observável na saída qualquer perturbação eventual no sistema.

O leitor interessado no problema de rejeição de perturbação com variação nos parâmetros do sistema, poderá solucionar o mesmo problema usando uma lei de controle do tipo $u(t) = F_o\, x(t) + G_o\, \xi(t)$.

APÊNDICE A

Desenvolvimento do polinômio matricial $(\sigma_o A_o + \sigma_1 A_1 + \ldots + \sigma_g A_g)^k$ para o par $(g,k) = (2,3)$ e a estrutura de $\mathcal{W}^*$ quando dimensão $\chi = 4$.

O desenvolvimento do polinômio matricial

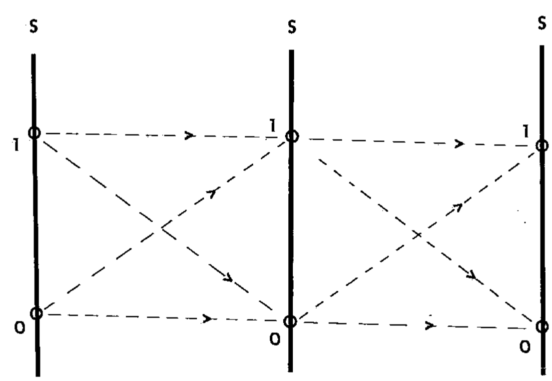
$(\sigma_o\tilde{A}_o + \sigma_1\tilde{A}_1 + \dots + \sigma_g\tilde{A}_g)^k$ é como já vimos, dado por

$$(\sigma_o\tilde{A}_o + \sigma_1\tilde{A}_1 + \dots + \sigma_g\tilde{A}_g)^k = \sum_{\ell=1}^{\mu_k} \phi_k \, (Z_\ell(k)) \, [\sum \psi_k \, (S_\ell^k)]$$

Restringindo nossas considerações para o caso onde $(g,k) = (2,3)$, determinemos então $(\sigma_o\tilde{A}_o + \sigma_1\tilde{A}_1)^3$.

Como $S = \{0,1\}$, o produto cartesiano S^3 será:

$$S^3 = \{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$$



Com os geradores:

$Z_1 = (0,0,0)$; $Z_2 = (0,1,0)$

$Z_3 = (1,1,0)$; $Z_4 = (1,1,1)$

obtemos as classes de equivalência.

$S_1\ (Z_1) = \{(0,0,0)\}$

$S_2\ (Z_2) = \{(0,1,0),\ (1,0,0),\ (0,0,1)\}$

$S_3\ (Z_3) = \{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$

$S_4\ (Z_4) = \{(1,1,1)\}$

É claro que

$$S^3_{\ell_1} \cap S^3_{\ell_2} = \emptyset\ ,\quad \ell_1 \neq \ell_2$$

$$\bigcup_{\ell=1}^{4} S^3_{\ell} = S^3$$

Por definição,

$$\phi(Z_1) = \phi(0,0,0) = \sigma_0\ \sigma_0\ \sigma_0 = \sigma_0^3$$

$$\phi(Z_2) = \phi(0,1,0) = \sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_0 = \sigma_0^2\ \sigma_1$$

$$\phi(Z_3) = \phi(1,1,0) = \sigma_1\ \sigma_1\ \sigma_0 = \sigma_1^2\ \sigma$$

$$\phi(Z_4) = \phi(1,1,1) = \sigma_1\ \sigma_1\ \sigma_1 = \sigma_1^3$$

Agora,

$$\sum \psi\ (S_1) = \psi\ (0,0,0) = \tilde{A}_0$$

$$\sum \psi\ (S_2) = \psi\ (0,1,0) = \tilde{A}_0^2\ \tilde{A}_1 + \tilde{A}_0\ \tilde{A}_1\ \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\ \tilde{A}_0^2$$

$$\sum \psi\ (S_3) = \psi\ (1,1,0) = \tilde{A}_1^2\ \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\ \tilde{A}_0\ \tilde{A}_1 + \tilde{A}_0\ \tilde{A}_1^2$$

$$\sum \psi\ (S_4) = \psi\ (1,1,1) = \tilde{A}_1^3$$

Portanto,

$$\sum_{\ell=1}^{4} \phi\,(Z_\ell)\,\left[\sum \psi\,(S_\ell)\right] = (\sigma_o \tilde{A}_o + \sigma_1 \tilde{A}_1)^3 =$$

$$= \sigma_o^3 \tilde{A}_o^3 + \sigma_o^2\, \sigma_1\, (\tilde{A}_o^2 \tilde{A}_1 + \tilde{A}_o \tilde{A}_1 \tilde{A}_o + \tilde{A}_1 \tilde{A}_o^2) + \sigma_o\, \sigma_1^2\, (\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_o + \tilde{A}_1 \tilde{A}_o \tilde{A}_1 + \tilde{A}_o \tilde{A}_1^2) + \sigma_1^3\, \tilde{A}_1^3 \;.$$

Suponhamos que dimensão $X = 4$. A estrutura do subespaço W^* definido em (66) é neste caso dada por:

$$W^* = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} \tilde{C}_o \\ \tilde{C}_o \tilde{A}_o \\ \tilde{C}_o \tilde{A}_1 \\ \tilde{C}_o \tilde{A}_o^2 \\ \tilde{C}_o \tilde{A}_1^2 \\ \tilde{C}_o\, (\tilde{A}_o \tilde{A}_1 + \tilde{A}_1 \tilde{A}_o) \\ \tilde{C}_o \tilde{A}_o^3 \\ \tilde{C}_o \tilde{A}_1^3 \\ \tilde{C}_o\, (\tilde{A}_o^2 \tilde{A}_1 + \tilde{A}_o \tilde{A}_1 \tilde{A}_o + \tilde{A}_1 \tilde{A}_o^2) \\ \tilde{C}_o\, (\tilde{A}_1^2 \tilde{A}_o + \tilde{A}_1 \tilde{A}_o \tilde{A}_1 + \tilde{A}_o \tilde{A}_1^2) \end{bmatrix}$$

APÊNDICE B

Alternativa para a demonstração do teorema 4
usando projeção canônica.

O Lema 2 pode também ser provado usando apenas as informações sobre as estruturas dos subespaços V^* e W^* .

Esta nova prova, entretanto, requer a demonstração de um lema verdadeiro, porém de difícil verificação. Fica a cargo do leitor a tentativa de demonstrá-lo rigorosamente.

Observando o subespaço W^* do ponto de vista estrutural, notamos que quando dimensão X = p, por exemplo, o subespaço W^*_p em R^p contém uma "cópia" exata da estrutura de W^*_i em $R^{i<p}$, o mesmo acontecendo com o subespaço V^* .

Este fato nos permite induzir na dimensão do espaço as estruturas de V^* e W^* provando que estes subespaços são estruturalmente idênticos para cada n, $\forall$ n .

Lema 4 $\forall$ dimensão $X = (.)$, $V^*_{(.)} = 0$

se e somente se $W^*_{(.)} = 0$.

Demonstração:

A cargo do leitor.

Suponhamos agora que $V^*_{(.)} \neq 0$ com dimensão $V^*_{(.)} = p$ e dimensão $X = (.)$.

Seja P : $X \to X / V^*_{(.)}$ a contração de X módulo $V^*_{(.)}$.

Como $V^*_{(.)} \subset W^*_{(.)}$,

$$P\,\mathcal{V}^*_{(\cdot)} \subset P\,\mathcal{W}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{W}^*_{(n-p)}$$

isto é,

$$\mathcal{V}^*_{(n-p)} \subset P\,\mathcal{W}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{W}^*_{(n-p)} \tag{84}$$

Porém, $\mathcal{V}^*_{(n-p)} = \bar{0}$ e pelo lema 4 , $\mathcal{W}^*_{(n-p)} = \bar{0}$.

De (84) resulta então que

$$\bar{0} \subset P\,\mathcal{W}^*_{(\cdot)} \subset \bar{0}$$

ou ainda,

$P\,\mathcal{W}^*_{(\cdot)} = \bar{0}$ implicando

$$\mathcal{W}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{V}^*_{(\cdot)} = \text{Ker } P \tag{85}$$

Combinando (84) e (85) teremos

$\mathcal{V}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{W}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{V}^*_{(\cdot)}$, ou

$$\mathcal{W}^*_{(\cdot)} = \mathcal{V}^*_{(\cdot)} \;, \; \forall\, (\cdot)$$

Tendo-se em conta que

$$\tilde{A}_i\ \mathcal{V}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{V}^*_{(\cdot)}, \quad i = 0,1,2,\ldots,g$$

segue-se que

$$\tilde{A}_i\ \mathcal{W}^*_{(\cdot)} \subset \mathcal{W}^*_{(\cdot)} \;, \quad i = 0,1,2,\ldots,g \;, \; \forall\, (\cdot)$$

É claro que se $V^*_{(\cdot)} = 0$, pelo lema $\tilde{A}_i\, W^*_{(\cdot)} \subset W^*_{(\cdot)}$ e a prova fica completa.

APÊNDICE C

GLOSSÁRIO

Daremos a seguir o sentido de alguns termos encontrados neste trabalho:

Homomorfismo	:	Aplicação linear entre espaços vetoriais
Monomorfismo	:	É um homomorfismo injetor, isto é, se $T : X \to U$ (X e U espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo R dos números reais) é um monomorfismo, Ker $T = 0$.
Epimorfismo	:	É um homomorfismo sobrejetor, isto é, se $T : X \to U$ é um epimorfismo, Im $T = U$.
Isomorfismo	:	É um homomorfismo bijetor (injetor e sobrejetor), isto é, se $T : X \to U$ é um isomorfismo, dimensão X = dimensão U .
Endomorfismo	:	Todo homomorfismo de um espaço vetorial em si próprio.
Automorfismo	:	É um endomorfismo injetor, ou seja, um isomorfismo de um espaço vetorial em si próprio.

BIBLIOGRAFIA

[1] Whonham, W. M. - Linear Multivariable Control (Lecture notes in economics and mathematical systems; 101).

[2] Luenberger, D. G. - An Introduction to Observers.
IEEE Trans. Aut. Control
AC - 16(6), 1971, pp 596-602.

[3] Bhattacharyya, S. P. - Robust Design of Dynamic Observers.
NASA TMX - 64874, July, 1974.
A ser publicado em IEEE Trans. Aut. Control.

[4] Wonham, W. M. - Dynamic Observers a Geometric Approach.
IEEE Trans. Aut. Control
AC - 15(2), 1970, pp 258-259.

[5] Wonham, W. M. - Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach.
SIAM J. Control 8(1), 1970, pp 1-8.

[6] Bhattacharyya, S. P. - Disturbance Rejection in Linear Systems.
Int. J. Systems Sci., Vol. 5, nº 7, pp 633-637, 1974.