"CONTRIBUIÇÃO TEÓRICA PARA ENTENDER OS PROBLEMAS DE SÍNTESE E AMPLIAÇÃO DE REDES"

Luiz Carlos Galetti

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

Nelson Maculan Filho

Prof. Nelson Maculan Filho

João Lizardo R. H. de Araújo

João Lizardo R.H.Araújo

José Manoel C. de Mello

Prof.José Manoel C.de Mello

ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL

MARÇO DE 1976

D E D I C A T Ó R I A

À Lylia, companheira incansável na luta diária, e à Ana, recém nascida aos 20/02/1976.

A G R A D E C I M E N T O S

A Nelson Maculan Filho, pela colaboração e estímulo neste trabalho.

A Angela Maria Schwartz Cupolillo pela beleza do texto batido.

R E S U M O

A contribuição principal deste trabalho é esclarecer como são as soluções do problema de ampliação, vistas no politopo de soluções do problema de programação linear, que corresponde à formulação matemática do problema de ampliação.

Na síntese de redes discutimos o significado do enunciado teórico do problema e ficou mostrada a possibilidade de resolver um problema de síntese de rede através do método Simplex.

Outro aspecto presente é o entendimento amplo do que significam as variáveis requisito de fluxo, capacidade de arco, custo de ampliação, etc., que precedem à formulação do problema de ampliação e do problema de síntese.

Verificamos que os dois problemas são semelhantes. Eles foram resolvidos, com resultados numéricos, bastando lançar mão da bibliografia citada.

No Capítulo I escrevemos os conceitos. No Capítulo II partimos do significado do problema de ampliação, ex-

plicamos as variáveis, fizemos a colocação matemática e analisamos o conjunto de soluções. No Capítulo III estudamos a síntese de uma rede. Um caso real de síntese de uma rede telefônica foi estudado, na parte do equacionamento e posterior desenvolvimento teórico, chegando ao ponto de resolução prática.

Os resultados obtidos no trabalho da Tese foram:

1. Politopo de soluções do problema de ampliação.

2. Rede sintetizada final de uma rede dada.

As conclusões são:

Os problemas de síntese e amplicação envolvem variáveis semelhantes. A formulação matemática também será quase igual. Ao resolver um problema real as diferenças são muitas.

Merece atenção o enfoque conduzido no sentido de entender os problemas por analogia com casos reais. Usamos exemplos de problemas de engenharia, para entender a definição de fluxo em redes. Quando foi possível comparar um conceito, definição, com figuras, e conceitos mais fáceis, usamos este artifício. Do Apêndice vemos que um problema de redes pode, em geral, ser resolvido por programação linear.

Há, neste campo de trabalho muitas publicações, sobretudo estrangeiras. No Brasil, os trabalhos neste assunto contam-se nos dedos. A Ciência está doente.

A B S T R A C T

The contribution of this work is tell how are the solutions 'of the expansion problem, in the polytope solu tions of the linear programming problem, wich is related with the matematical formulation of the expansion problem.

In network synthesis we discuss what is the theoretical significance of the problem. We show that the simplex procedure can be applied to a synthesis like this.

It's important to know in a large sense what are the variables. For example, to know what arc capacity means. With donbts like this, we are asking about required flows, expansion costs, and anothers.

We observed that expansion and synthesis are similar problems. They are resolved in many books.

In chapter I we write concepts. In chapter II, we study the expansion problem. In chapter III we discuss the synthesis problem.

We have got some results:

1. Polytope solutions' of the expansion pro blem

2. A synthesized network of a given network.

The conclusions are:

Both problems can be formulated like linear programs. When we are working in a engineering problem, with many cables and stations, and we need to expand the total capacity of the system, many questions and some philosophical aspects will be solved before.

In most cases the publications are made in foreign countries. In Brasil, works like this one are rare. Science is sick...

I N D I C E

INTRODUÇÃO

As metas de um trabalho científico e sua realização são o avanço de conhecimentos que permitem resolver um problema dentro de uma realidade social.

A Tese de Mestrado exige um método de pesquisa, entre outras coisas. O método usado consiste em conhecer, através da leitura de textos e outras publicações, o panorama geral relativo a problemas de teoria de redes, localização de recursos, caminhos mais curto entre vários nós de uma rede, estabilidade e outros, usando formulação matemática conhecida da programação linear. Como sabemos na programação linear o problema consiste em procurar um máximo (ou mínimo) dentro de certas condições. Desde o levantamento de publicações afins nas revistas "Operations Research", "Management Science", "Information and Control", passando por trabalhos de colegas, na forma de algoritmos de fluxo máximo, circulação de fluxos, de síntese e expansão a custo mínimo em redes capacitadas, até a leitura dos clássicos L.R. Ford e D.R. Fulkerson, T.C. Hu, etc., que têm livros conhecidos na área.

O modo de desenvolver um problema nesses estudos citados é o seguinte: equacionamento das funções matemáticas e restrições, verificação de que o problema se situa dentro de um problema padrão já resolvido pelas formas tradicionais de programação linear, falando de outro jeito, usam os métodos Simplex, Simplex Revisado, Simplex Revisado Primal, etc. Muitas vezes um problema não foi ainda estudado e as formas de resolvê-lo poderão ser novas. Que método seguir para obter resultados aplicáveis, dentro de uma exposição didática acessível ao entendimento rápido, e eficientemente utilizáveis, dentro de um contexto tecnológico conhecido?

Um dos objetivos da tese é ser um trabalho científico adequado a uma realidade social. Que permita resolver problemas reais e atuais.

Fazendo um paralelo, pergunto como trabalha uma empresa para solucionar problemas dessa natureza. A prática mostrou que uma determinada empresa tem custos que ela conhece pelas suas atividades, pelos postes que coloca, pelo número de valas cavadas, quantidade de homens utilizados nesse trabalho, quantidade de material importado, colocando em termos matemáticos, funções especificas do nível da tecnologia usada. Assumir que os custos de ampliação de uma rede são funções lineares, funções convexas ou números reais depende da aproximação maior, da precisão melhor, enfim, dos objetivos que queremos alcançar.

As dificuldades no empreendimento de uma tese de mestrado são a insuficiência de dados e informações recentes no campo do conhecimento que estamos pesquisando, inexistência de centralização das publicações dentro da área específica de pesquisa, grande quantidade de pesquisa científica teórica não verificada e não realimentadas pela resolução de problemas reais nas indústrias, escolas e na sociedade como um todo.

Tornar de uso mais fácil, com eficiência maior, e com custos mais baixos, sem usar apenas os métodos tradicionais para tornar operacional um sistema de equações constituem também objetivos da tese.

O método para resolver os problemas da tese foi: estudo teórico de textos dentro das colocações anteriores e tentativa de levar os problemas formulados para obter resultados . Seleção de artigos de revistas, ordenação didática, e procura de encadeamento entre trabalhos de pesquisa já publicados, conhecimento de definições essenciais, teoremas mestres e princípios universalmente aceitos na bibliografia existente no campo de trabalho.

O dia a dia de pesquisa revelou dificuldades de metodologia e sistematização pela grande quantidade e diversificação de temas interrelacionados. Consistia em definir o problema central, e outros menores, suplementares ou complementares que formassem um todo, que fosse uma pequena contribuição crítica para a Ciência.

A criação científica alia a imaginação e o método, partindo de condições históricas dadas do conhecimento em um determinado nível de desenvolvimento científico de uma nação .

A preocupação em adequar o problema à realidade, obter resultados, tirar conclusões e ver os frutos das teorizações foi a busca constante no correr deste trabalho.

Quais são as metas do trabalho cinetífico ? O que é um trabalho científico ? Esclarecer primeiro o que determina e a essência que caracteriza o trabalho de natureza científica. O trabalho criativo de valores, de conhecimentos, de aquisição de novos instrumentos e métodos de abordagem de um equacionamento matemático.

Desde explicar os custos de ampliar capacidades de arcos, as próprias capacidades desses arcos, o significado de um fluxo de recursos materiais por entre vários pontos de uma configuração de rede, ou seja, uma colocação ordenada ou não de pontos interligados por vários ramos ou linhas. Onde está a essência de dois pontos ligados entre si através de uma linha. Dois pontos no caso são duas cidades, dois postes, duas pessoas. Duas linhas são duas estradas, dois fios telefônicos, duas relações sociais. Sabemos que as linhas são insuficientes para conduzir uma quantidade material dada que sai de um ponto e se destina ao outro ponto. A capacidade da linha não é igual à quantidade de material que vai circular de um ponto ao outro do sistema.

Onde reside a dificuldade ? Na relação x da cidade A = y da cidade B expresso que x estradas saem de A e vão para B. E que y estradas saem de B e vão para A. Os veículos circulam de A para B. Acontece que uma estrada genérica de A para B tem uma capacidade dada, definida, determinada tecnicamente, que possi bilita um fluxo normal médio de carros de A para B.

Aumentando a quantidade numérica de carros acima do fluxo normal médio posso resolver o problema aumentando em correspondência a largura dessa estrada. Ou construindo outra estrada. Para decidir fixo qual o objetivo que me interessa. Aí estamos no aspecto quantitativo do problema. A solução será a que proporcionar custos menores.

Assim também as mentes se alargam nas diferentes atividades de trabalho humano. Desejamos passar tranquilos os carros pelas diferentes vias de comunicação. Vamos alargar as estradas de uma quantidade apenas que baste para tornar o trânsito normal. Uma solução possível para o problema.

Tomamos as diferenças existentes entre capacidade de fluxo de cada via e o fluxo de carros que vai passar em cada via. Podemos tomar essa diferença linha por linha, estrada por estrada. Então vamos alargar cada estrada pela diferença encontrada. O alargamento de estrada por estrada dará uma solução para todas as horas do dia e para qualquer condição de trânsito. Porém essa solução é a que custa mais caro. Porque estamos tomando a máxima diferença em cada estrada. Observar que para cada hora do trânsito teremos diferentes tráfegos, portanto diferentes larguras de estradas poderiam resolver o problema. Não questionamos, e a hipótese não foi assumida de carros se desviarem de seus trajetos , porque uma determinada via estava saturada, isto é, trafegando no seu limite máximo de capacidade.

A solução de alargamento máximo satisfaz a todas as outras condições de tráfego. Porém podemos ter um conjunto de soluções horárias. Para cada hora do dia um determinado fluxo é conhecido. Teremos uma solução bem determinada. E as soluções vão definir de hora para hora.

Então temos as soluções:

1. Alargar todas as vias de tráfego na diferença máxima, obtendo as capacidades máximas de vazão do tráfego.

2. Ter soluções horárias diferentes, isto é, alargando nas quantidades máximas de cada período horário.

3. Pesquisar, dentro de outra colocação alternativa para o problema, as estradas que apresentam menor custo de alargamento. A partir daí descubro o caminho de menor custo de alargamento total entre duas cidades definidas. Esse caminho, que é uma sucessão de estradas será alargado de modo a ter capacidade que permita o fluxo normal de todo o tráfego excedente.

Como exemplo explicativo vou tomar um sistema de dois pontos ligados por uma linha, ou duas cidades A e B ligadas por uma estrada.

Raciocinemos a nível abstrato.

A cidade A se liga a cidade B através de uma estrada.

A cidade A é diferente da cidade B. São Paulo e Rio de Janeiro são dois nomes de realidades diversas. Em conteúdo e forma. Estando em São Paulo posso ir ao Rio de Janeiro pela via Dutra. Também a Belém - Brasília é uma estrada acessível, porém o trajeto é mais longo. Saindo de São Paulo passo por vários lugares e atinjo a antiga e ensolarada Rio.

Sejam uma cidade A, outra B, outra C. Posso ir de A para B, diretamente. Posso também ir de A para B passando por C. As circunstâncias de ir de A para B diretamente ou passando por um ponto intermediário C não interessam no momento. Fazendo o caminho direto com tráfego normal médio da estrada e condições técnicas conhecidas e equivalentes dos dois caminhos possíveis, mais rapidamente irei pelo caminho direto. Então para dois caminhos idênticos geograficamente, com condição de trânsito normal médio e para um mesmo veículo, gastarei menos tempo fazendo o caminho de menor distância quilométrica.

Estamos sempre vendo um carro circular entre duas cidades, três cidades ou mais cidades em condições normais dadas e já determinadas em média.

A situação complexa e completa do problema é: várias cidades interligadas e vários carros circulando pelas estradas de ligação. Os dados indicam a quantidade de carros que pretendem passar pelas várias estradas, nas diferentes horas do dia. As estradas foram construídas por trabalhadores e são de uma largura conhecida o que foi o dispêndio de uma quantia de horas de trabalho que representam um valor social, associadas de alguma maneira dando os custos da construção. Alargar as estradas significa dedicar mais horas de trabalho e empregar máquinas adequadas para esse processo técnico.

O ponto A pode gerar fluxos, líquidos, ou correntes. Pode ser também um ponto estéril, do ponto de vista que não gera nada, mas apenas permite a passagem de elementos materiais pela sua estrutura. É então um ponto intermediário. Há pontos que não dão passagem, mas só absorvem, sugam e recebem. Lançar, de um ponto inicial, uma quantidade material passando por um ou vários pontos intermediários, até atingir um ponto final, constitui um processo que se vê em vários fenômenos físicos.Como o início e o fim às vezes coincidem, e não existe o meio. Poderíamos ficar jogando as palavras início, fim e meio, fazendo combinações diferentes delas. Porém a Ciência não é jogo de palavras. Procuramos a origem , o intermediário e o destino em uma rede.

Muitas vezes nos defrontamos com várias origens, muitas intermediárias e grande número de destinos. Também as origens e os destinos podem ser os mesmos. Qual a importância em detetar a origem e o destino, quando pesquisamos custos de um sistema de pontos interligados entre si ? Muitas vezes é grande o número dos pontos de início, dos intermediários e dos finais. O número de ramos que ligam os vários pontos também é grande. Um problema gigante leva tempo para resolver, também pelo emaranhado e entrelaçamento em grande quantidade de suas ligações internas. Simplificá-lo constitui tarefa essencial. Por que não reduzi-lo a dois pontos ligados entre si ? Perder particularidades e detalhes internos na estrutura constitui um limite para a simplificação.

Procurar simplicidade sem perder particularidades e características fundamentais, também sem alterar a natureza essencial do problema. Através de um sistema de dois pontos e uma linha que os interliga o que poderemos saber ? Ora, o que esse sistema pode nos revelar. Quantidade de fluxo material que sai de um ponto e chega no outro. Capacidade da linha de ligação. A quantidade de fluxo que flui entre os dois pontos pode ou não estourar a capacidade limite da ligação. Para tempos diferentes, as quantidades irão mudando e os acontecimentos terão natureza vária. Ao primeiro ponto aplicamos a lei de conservação de fluxo (e também ao segundo). Quantificamos as várias grandezas, medimos os fluxos, avaliamos as ampliações de capacidade, calculamos os custos para os aumentos de capacidade. Porém um sistema de dois pontos e uma linha de ligação não será nunca a expressão verdadeira de um sistema grande de pontos, quando queremos quantificar grandezas, calcular custos para cada ponto do sistema grande. Assumindo uma visão macroscópica, externa e simplista, perdemos a visão microscópica, interna e que dá as características peculiares de ponto por ponto, linha por linha.

Podemos extrair do sistema dois pontos interligados por uma linha todas as grandezas, variáveis, incógnitas, enfim, elementos para formalizar as dúvidas e pensar no conjunto de equações.

No Capítulo I vão colocados os alicerces teóricos, na forma de conceitos, definições, teoremas importantes no desenvolvimento do corpo da tese. Este capítulo não pretende esgotar o amplo embasamento matemático existente no campo da teoria de grafos e redes. Porque o instrumental matemático é enorme e vem crescendo com as variadas aplicações da teoria de grafos.

No referente à nomenclatura e simbologia é fato notável a quantidade de nomes que exprimem o mesmo conceito, e que no fundo têm o mesmo significado. Falta, portanto padronizar nomes, ou então homogeneizar os conceitos e os símbolos. Entretanto, tal atitude deverá ocorrer sem tolher a criatividade e sem barrar designações novas, as vezes mais precisas e significativas, dentro de cada realidade especifica. Por exemplo, a designação "síntese de uma rede" não exprime um método que reúne os elementos simples para formar o composto, portanto é um nome inadequado.

No CapítuloIII explicamos o que é a síntese e delineamos os passos para a solução de um problema de síntese de uma rede de comunicações.

O problema é árido. Exige um pensamento lógico matemático, pelos encadeamentos de Teoria dos Conjuntos , com Espaços Vetoriais de muitas dimensões, e com Álgebra Linear , aplicados a um problema grande. O tamanho do problema medimos pelo número de incógnitas que desejamos saber quanto valem e pelo número de dados que são fornecidos. Visão e imaginação espaciais, concretizados em desenhos, tornam menos nebuloso o entendimento.

O problema de síntese é: "Encontrar as capacidades de uma rede que vamos construir, de tal maneira que fiquem satisfeitos os requisitos de fluxo dados, com um custo total de construção mínimo".

Então, conhecemos os requisitos de fluxo de ponto para ponto, em vários períodos de tempo, e desejamos as capacidades dos arcos da rede que satisfaçam aos requisitos, com custo total mínimo para construir essas capacidades.

No Capítulo II vem o problema de ampliação de capacidade de uma rede.

O problema de ampliação é: "Dada uma rede capacitada, onde não estão sendo atendidos os requisitos de fluxos. Encontrar as capacidades finais dos arcos da rede, de tal maneira que fiquem satisfeitos os requisitos de fluxo. Pede-se também que o custo total de ampliação de capacidades seja mínimo."

Então, conhecemos as capacidades de cada arco de uma rede dada. Conhecemos os requisitos de fluxo de ponto para ponto, e em vários períodos de tempo. Um fato constatado é que os requisitos de fluxo não estão sendo atendidos. Queremos sa ber de quanto vamos aumentar a capacidade de cada arco, para que a rede ampliada satisfaça aos requisitos de fluxo, com custo total de ampliação de capacidades mínimo.

Quando dizemos que os requisitos de fluxo não estão sendo atendidos, significa que especificamos passar entre dois nós determinados certa quantidade de fluxo, mas a capacidade do arco, que liga os dois pontos não está permitindo a passagem desse fluxo.

Então aumentaremos a capacidade desse arco para que ele dê passagem ao fluxo requerido. Observar que pode ocorrer o problema oposto. Um determinado arco permite uma vazão de fluxo superior ao requisito de fluxo correspondente. Teríamos então de diminuir a capacidade desse arco e fazer passar o fluxo estritamente igual ao requisito especificado.

Já o sentido da palavra ampliação, aqui empregada, corresponde ao seu significado ortográfico usual. É manejada no sentido de que vamos aumentar as capacidades da rede, vamos incrementar algum elemento estrutural característico do sistema de pontos e linhas em estudo.

O significado da expressão "os requisitos de fluxo estão sendo atendidos" é que para todo arco a capacidade de fluxo é igual ou superior ao requisito de fluxo especificado para aquele arco. Por exclusão, um requisito de fluxo não está sendo atendido em um determinado arco, quando a capacidade de fluxo des te arco for inferior ao requisito de fluxo especificado para este arco.

Por exemplo, um requisito de fluxo em um determinado arco é um número inteiro positivo. A cada arco da rede associamos um requisito de fluxo, em um certo período de tempo . Ele poderá ser zero, como poderá também ser um numero pequeno, ou um número comumente usado, e até um número extremamente grande, mas não será nunca negativo.

Dados os requisitos de fluxo, associados a cada arco, a rede está amarrada, definida, caracterizada.

Seja A o conjunto dos requisitos de fluxo.

$$A = \{a_{ij},\ i = 1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n;\ i \neq j,$$

$$a_{ij} \in I^{+}\}$$

Podemos caracterizá-los também m tricial - mente. Seja P a matriz de requisitos de fluxo.

$$P = \left[\ P\ ij\ \right] \qquad \begin{array}{l} P\ ij \ \varepsilon\ I^{+} \\ i,j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n \\ \text{se } i = j \Longrightarrow p_{ij} = 0 \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

P é uma matriz quadrada, simétrica, e $p_{11} = p_{22} = \dots = p_{nn} = 0$. Estamos supondo que não circula fluxo de um nó para ele mesmo.

Uma representação desenhada de dez requisitos de fluxo p_{12}, p_{13}, p_{14}, ..., p_{45} vemos na figura 0.1..

No problema de síntese desejamos encontrar as capacidades da rede a construir.

Seja V o conjunto de capacidades da rede.

$$V = \{v_{ij},\ i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,n;\ i \neq j\}$$

Sendo Q a matriz de capacidades,

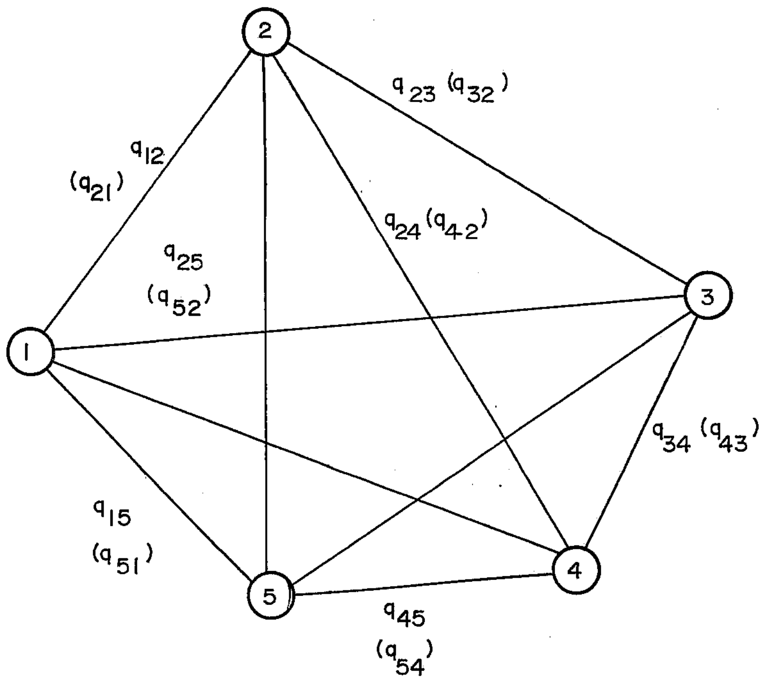


Figura 0.2

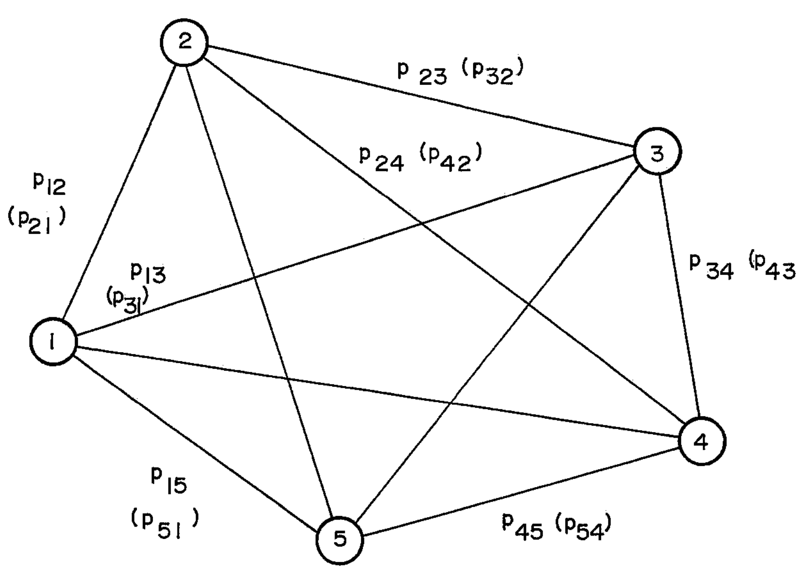


Figura 0.1

$$Q = \left[q_{ij} \right] \quad i,j = 1,2,\ldots,n \;, \text{ se } i=j \Rightarrow q_{ij} = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ - & - & - & - \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Q é uma matriz quadrada, simétrica, onde

$$q_{11} = q_{22} = \ldots = q_{nn} = 0$$

Um esquema usual para dez capacidades de uma rede q_{12}, q_{13}, q_{14}, ... , q_{45} é a figura 0.2..

O aspecto financeiro da questão surge com a grandeza custos para construção de capacidades unitárias da rede, tratando-se do problema de síntese.

Supomos conhecido o custo para construir um arco de capacidade unitária na rede.

Colocando os pés no chão e a cabeça no lugar, e olhando ao longe vejamos, sem abstrações ou mistificações . Na realidade, num problema concreto de construção de uma rede entregam-nos a demanda de mercado para o fluxo entre dois pontos. Essa demanda de fluxo é também conhecida, no decorrer de um dia solar, isto é, sabemos seu máximo, mínimo, outros picos e vales. Podemos discretizar essa demanda e aproximá-la, em vários períodos de tempo, de números inteiros. Uma estimativa do crescimento da demanda de fluxo pode ser feita ao longo dos anos. Os requisitos de fluxos então conhecemos, teórica e praticamente. A menos de situações de crise, onde entram fatores e acontecimentos imprevisíveis, as vezes revolucionários.

As capacidades dos arcos são medidas por instrumentos mecânicos ou elétricos, ou outros, nos problemas puramente técnicos. As capacidades de grupos sociais envolvem variáveis não facilmente quantificáveis, de natureza humana, emocional, fugindo muitas vezes da racionalidade matemática.

Diremos que os custos de construção de capacidades unitárias são conhecidos quantitativamente, e eles traduzem fatores sociais, políticos e econômicos. Apenas estaremos interessados em cálculos, que máquinas de somar, ou computadores realizam.

Seja C o conjunto de custos

$$C = \{c_{ij};\ i,j = 1,2,\ldots,n\ ,\ i \neq j,\ c_{ij} \in I^+ \}$$

A matriz de custos é:

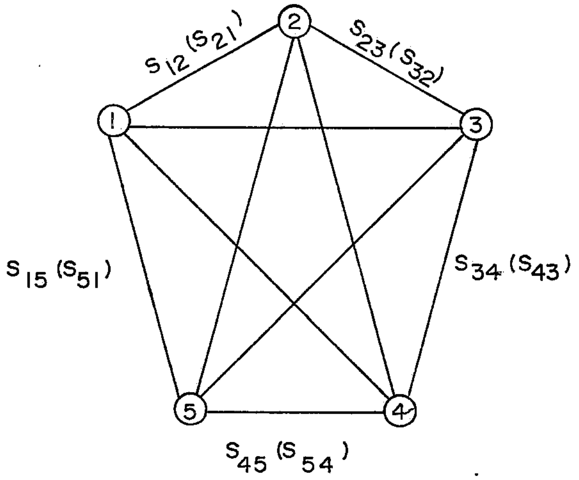
$$S = \left| s_{ij} \right| \quad i,j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n \qquad s_{ij} \in I^+$$
$$\text{se } i = j \qquad s_{ij} = 0$$

A matriz S é quadrada e simétrica

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ - & - & - & - \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix} \quad s_{11}=s_{22} = \ldots = s_{nn}=0$$

A representação diagramática para cinco nós é a figura 0.3..

Figura 0.3.



Conhecemos ainda a definição de fluxo numa rede. No problema de síntese vamos manobrar com estas variáveis : requisitos de fluxo, capacidade de arco, custo de construção de capacidade unitária de rede, e fluxo em rede.

A existência e unicidade de solução do problema de síntese é outro ponto para pesquisa. Construir uma rede cujas capacidades atendam aos requisitos de fluxo, e tenha custo de construção mínimo é um problema que tem solução ? Ainda mais , a solução é única ? O questionamento se aplica também ao problema de ampliação.

Um comentário de alguns artigos vai anexo à Bibliografia. O objetivo foi apanhar contribuições para a resolução dos dois problemas abordados. Infelizmente, dentro dessa finalidade não tiveram uso algum. Apenas foram riqueza teórica incorporada e solidificaram alguns conceitos. Dão uma triste idéia do quadro atual em que se encontra a pesquisa científica no país.

Um estudo que permita aprofundar mais as relações entre a Programação Linear e o Fluxo em Redes é importante. Foi desenvolvido como Apêndice um quadro introdutório do assunto . O objetivo foi tentar dar bases teóricas para a análise dos problemas.

Quais são as diferenças entre os problemas de síntese e ampliação ? Eles são bastante semelhantes entre si.

No problema de síntese podemos construir uma rede ótima, exata. O conceito de otimização aqui significando que a partir de requisitos de fluxo estabelecidos, vamos construir uma rede nova, onde a capacidade de qualquer arco é um resultado ótimo relativamente ao requisito de fluxo que lhe corresponde. Teremos resolvido um problema de otimização do produto dos custos pelas capacidades procuradas, com a única restrição de que o fluxo em cada arco atenda ao requisito de fluxo correspondente. As capacidades são variáveis não negativas. O ótimo obtido no produto dos custos pelas capacidades procuradas será um ótimo global ou local ? Vai depender de como é a função produto dos custos pelas capacidades. Se esta função é convexa o problema tem solução relativamente fácil. Porém, se a função não for convexa o problema não é fácil de resolver.

No problema de ampliação estaremos procurando o ótimo para uma rede já existente. Algum arco pode estar com o correpondente requisito de fluxo atendido. Mais do que isso, pode estar trabalhando de modo não eficiente, do ponto de vista de otimização dos grafos totais da rede. Estamos dizendo que um determinado arco tem uma capacidade altamente grande, que permite uma vazão de fluxo bastante superior ao requisito de fluxo que lhe corresponde. Como o problema é de ampliação, por outra palavra, de expansão de capacidades, não vamos diminuir a capacidade desse arco. Um cano de dez metros de diâmetro interno, por onde circule um tênue fiozinho d'água, é do ponto de vista de otimização de custos um sistema ineficiente. Assim, ao deparar com um caso real, uma rede já construí da, talvez tenhamos que resolver um problema de ampliação, ou de síntese, ou algum outro de nome desconhecido, ainda não batizados teoricamente.

C A P Í T U L O I

CONCEITOS

Uma rede é um conjunto de nós e um conjunto de arcos ligando esses nós. Os nós também são chamados vértices, ou pontos e os arcos, arestas, linhas, ramos ou ligações.

Se um arco tem um sentido então é chamado de um arco orientado. Em caso contrário será um arco não orientado.

Uma rede é convexa se para cada partição de nós da rede nos subconjuntos X e $\overline{X}$, há um arco A_{ij} ou A_{ji} com $N_i \in X$ e $N_j \in \overline{X}$.

N_i indica o nó i

A_{ij} indica o arco orientado ligando N_i a N_j

Se o arco entre N_i e N_j é não orientado, então podemos usar A_{ij} ou A_{ji}.

Vamos assumir que entre dois nós quaisquer de uma rede há no máximo dois arcos orientados, um arco A_{ij} e outro arco A_{ji}. Na maior parte dos casos um arco não orientado poderá ser substituído por um par de arcos orientados. Excluímos os ar cos que ligam um nó a ele próprio.

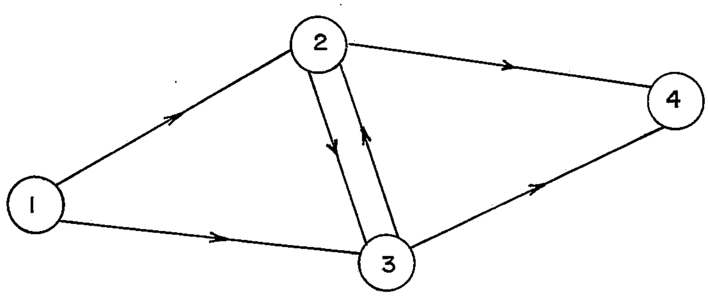


Figura I.1

Rede com arcos orientados

A sequência N_1, A_{12}, N_2, A_{24}, N_4 é uma cadeia de N_1 para N_4, na figura I.1.. A sequência N_2, A_{23}, N_3, A_{32}, N_2 é um ciclo. Uma cadeia é chamada simples se não contém ciclos. Muitas vezes dizemos apenas cadeia e estamos falando de cadeia simples.

Um caminho é uma sequência de nós e arcos, mas os arcos podem ser orientados em qualquer sentido, ou podem ser arcos não orientados. Na figura 2.1.

N_1, A_{13}, N_3, A_{23}, N_2, A_{24}, N_4 é um caminho.

Estamos chamando rede e grafo como sendo a mesma coisa.

A cada arco associamos um número inteiro positivo y_{ij} que é a capacidade do arco.

Um conjunto de números inteiros não negativos x_{ij} é um fluxo em uma rede se satisfazem as seguintes condições:

$$a)\ \sum_i x_{ij} - \sum_K x_{jK} = \begin{cases} -v & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j \neq 1,4 \\ v & \text{se } j = 4 \end{cases}$$

$$b)\ 0 \leq x_{ij} \leq y_{ij} \qquad \forall i, j$$

v é um número não negativo, chamado o valor do fluxo.

A colocação b) indica que o fluxo em um arco é sempre limitado pela capacidade y_{ij} do arco.

A colocação a) expressa a lei mais geral da conservação de fluxo em cada nó, exceção feita para o nó origem (nó 1) e o nó destino (nó 4).

Vamos fazer uma anologia da definição de fluxo com um caso real de fluxo de papeis da produção em uma pequena fábrica. Um esquema simplificado da fábrica é a figura I.2..

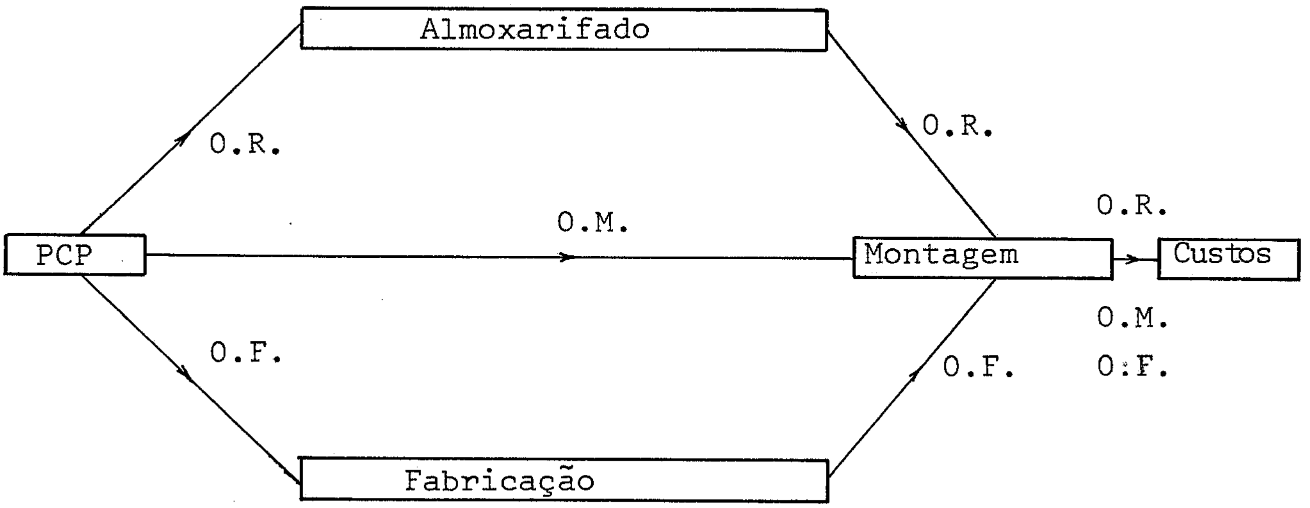


Figura I.2

PCP - Seção de planejamento e controle da produção.

Almoxarifado - setor onde estão estocadas as meteri as primas, acessórios, (parafusos , porcas, arruelas, etc.), materiais de manutenção de máquinas e materiais de uso geral na fábrica.

Fabricação - setor de confecção de gabaritos para peças, de fabricação de peças auxiliares e de outros trabalhos, por exemplo, de pintura, serralheria, forjaria, prensagem, perfuração, etc.

Montagem - seção de linhas de montagem de peças. Local onde as várias partes componentes de uma peça são acopladas, dando as peças mais complexas prontas.

Custos - setor de contabilidade de custos. Cálculo dos custos de uma peça pronta, de acordo com a quantidade de matéria prima e acessórios gastos, e dos materiais de manutenção de máquinas, energia elétrica, horas de trabalho humano direto e indireto, e desgaste dos instrumentos de trabalho, etc.

O esquema está colocado de modo a dar um entendimento mais fácil do problema. É evidente que há outros setores que não estão aparecendo no desenho.

Do PCP saem as O.R., ordens de requisição de materiais que vão para o Almoxarifado. Daí saem acompanhadas dos materiais pedidos e vão para a seção de montagem. Acompanhando o produto, dele se desligam na etapa final de montagem e vão para a seção de custos, não de modo fantasma mas pela mão de algum homem ou sistema montado para esta tarefa, para determinação do preço de produção, por exemplo.

As O.M., ordens de montagem de peça, são emitidas no Planejamento e Controle da Produção e vão para a Montagem. O fato vai ocorrendo no tempo. Portanto, podem ocorrer gargalos na produção. As O.M., acompanham as peças e depois vão para os Custos. As O.F., ordens de fabricação, emitidas no PCP, chegam à Fabricação e daí saem com os materiais trabalhados, dirigindo-se à Montagem. Por exemplo, um gabarito de aço liga especial para suporte de peças de asa de avião, está acompanhado de uma O.F. e o gabarito não sairá da oficina, mas servirá para a confecção de várias peças. Por fim, a O.F., vai para os Custos.

Considerando que a O.R., a O.F., e a O.M., são três papéis diferentes entre si, no seu significado e natureza de operação ou explicitação de materiais, vamos ter três fluxos diferentes em qualidade e quantidade, ocorrendo simultaneamente no tempo.

Figura I.3

Diagrama do caminho das O.R.

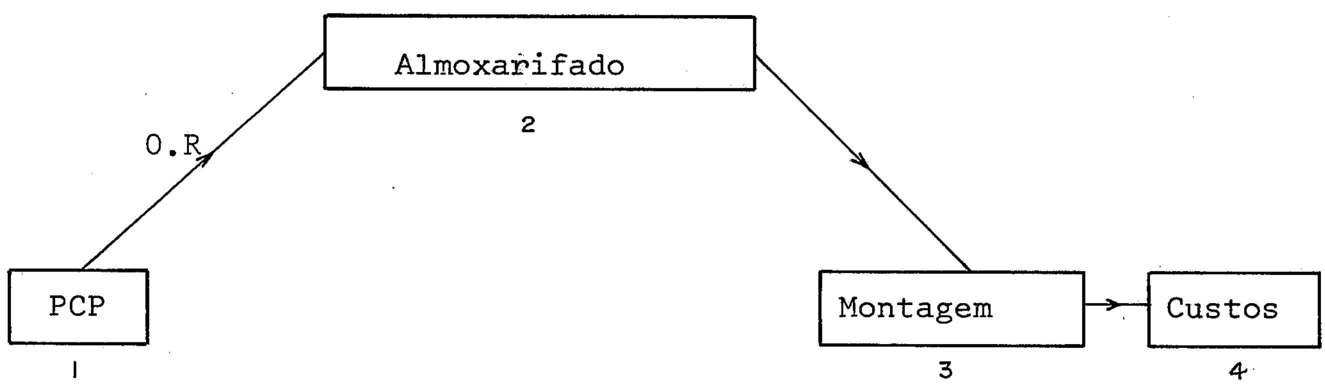
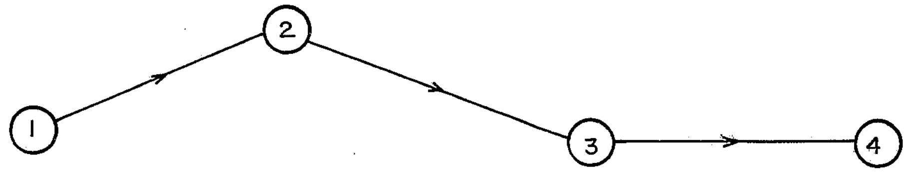


Figura I.4.

Rede de nós e arcos das O.R.



De modo igual podemos desenhar diagramas para as O.M. e O.F.

A figura I.2. que é o esquema de circulação das várias ordens de produção dentro da fábrica pode ser mais complexa. Por exemplo, a figura I.5.:

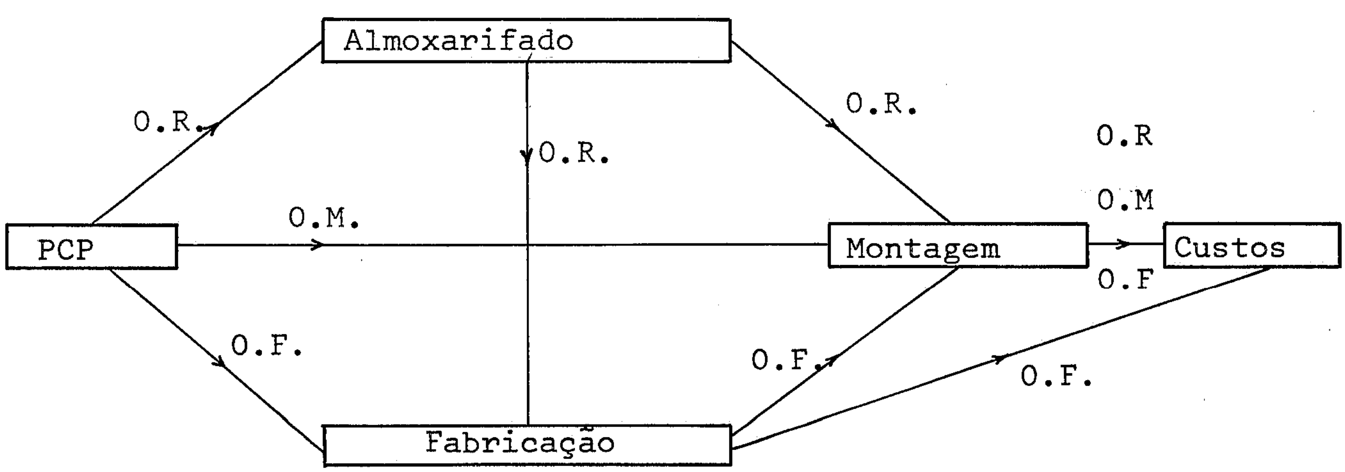


Figura I.5

Uma peça é totalmente confeccionada na Fabricação e não necessita da Montagem. Necessita de materiais do Almoxarifado. O número de setores (departamentos) de uma fábrica quase sempre é um número grande. As ligações, burocráticas ou técnicas, entre os vários setores da produção também serão em grande número. Podemos ainda desmembrar cada setor nas suas várias atividades, e o tamanho dos esquemas e sua complexidade vai aumentar. Um problema notável que surge é o seguinte: Como dimensionar, em termos materiais e humanos os vários setores, PCP, Fabricação, Almoxarifado, Montagem e Custos, tal que não ocorram gargalos de produção ? Quantificar a produtividade de cada setor, a sua dependência em relação aos centros produtores e distribuidores externos, as interligações entre os departamentos, são problemas, entre outros, que vão então surgir.

Uma aproximação matemática pode ser usada para o caso, na forma de uma rede de pontos e arcos. Também uma forma racional de distribuir os setores, pensando em termos de distância entre as várias seções é uma das considerações a ser levada em conta.

Associamos a cada setor um ponto da rede. Dados dois setores que se ligam entre si por um arco, a capacidade do arco será a menor produtividade entre as duas produtividades dos setores em pauta.

Voltando a analisar a analogia entre a definição de fluxo e o caso real do fluxo de papéis da produção, sabemos que nenhum processo real segue a definição matemática de fluxo apresentada. Muitas ordens de produção são extraviadas, às vezes ordens não são executadas devido a mudanças nas técnicas de produção, ou mesmo peças defeituosas são produzidas no processo.

Pergunto: Até onde uma aproximação através de um problema de programação linear padrão é uma forma aceitável para solucionar um problema como o exposto linhas atrás ? Faremos, no texto, uso da afirmação de que um problema de redes pode ser formulado como um problema linear.

É importante caracterizar a linearidade ou a não linearidade das equações que traduzem um escoamento de fluxo em um sistema.

Partindo da definição já vista de fluxo, de T.C. Hu, "Integer Programming and Network Flows", pags.106, 107, etc.: Um conjunto de inteiros não negativos x_{ij} é chamado um fluxo em uma rede se satisfazem as seguintes restrições:

$$\sum_{i} x_{ij} - \sum_{K} x_{jK} = \begin{cases} -v & \text{se } j = s \\ 0 & \text{se } j \neq s, t \\ v & \text{se } j = t \end{cases} \qquad (1)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \qquad \text{(para todo } i,j) \qquad (2)$$

s - nó origem

t - nó destino

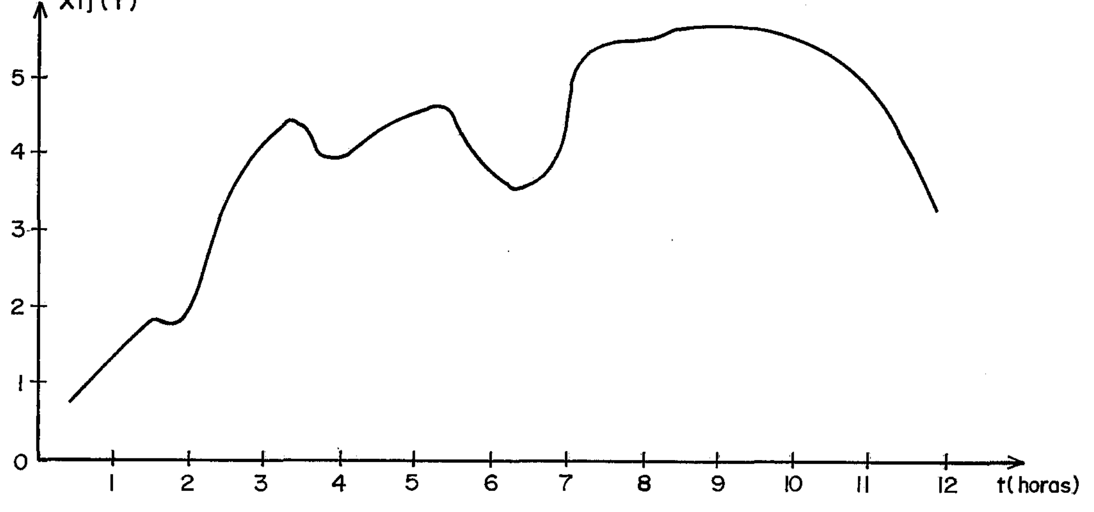
v - número não negativo, chamado o valor do fluxo.

b_{ij} - capacidade do arco (i,j)

O sistema definido em (1) e (2) dá um conjunto de equações (e inequações) lineares. Então na resolução de redes com base nessa definição estaremos trabalhando com fluxos lineares.

Outros casos podem acontecer. Por exemplo, os fluxos podem pertencer ao conjunto dos números reais. Levando em conta a variação de fluxos no tempo podemos ter fluxos variando não linearmente no tempo. Na realidade são os casos que acontecem.

Figura I.6. Variação do fluxo $x_{ij}(t)$ de meia noite às 12:00 horas de um determinados dia.



Também a lei de conservação de fluxos não se verifica na maioria dos casos. Dizer que num nó genérico duma rede os fluxos de matéria, de informações se conservam é um fato assumido em bases matemáticas, com fundamentos que visam uma aproximação nem sempre verdadeira dos casos reais. Não há uma lei geral universal da conservação de quantidade da matéria, nem da conservação da quantidade de fluxos, como há um Princípio Universal de Conservação da Energia.

Uma árvore é um grafo conexo, não orientado, que não contém ciclos.

Portanto entre dois nós quaisquer de uma árvore há uma única cadeia ligando os dois nós.

Árvore geradora de um grafo G é um subgrafo de G tal que todo nó de G está na árvore.

Se G é um grafo com n nós, uma árvore com n nós é uma árvore geradora .

Vamos associar a cada arco de uma rede um número d_{ij}.

Uma árvore geradora mínima (máxima) de uma rede é uma árvore geradora tal que a soma dos d_{ij} dos arcos na árvore é mínima (máxima) com respeito a todas as árvores geradoras da rede.

De importância no correr do texto serão os teoremas:

1. Lema de Mimkowski-Farkas: Um sistema de desigualdades lineares $A\ x \leq d$ tem uma solução não negativa $x \geq 0$ se e somente se $\pi' d \geq 0$ para todo vetor π tal que: $\pi \geq 0$ e $\pi' A \geq 0$.

2. A solução do sistema de equações lineares do problema de Programação Linear correspondente ao Problema de Ampliação de Capacidade de uma Rede é um politopo convexo e ilimitado, com número finito de vértices.

3. No R^2, o politopo convexo e ilimitado apresenta duas arestas paralelas aos eixos coordenados.

C A P Í T U L O II

II.1. COLOCAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE AMPLIAÇÃO DE CAPACIDADE DE UMA REDE

Conhecemos:

1. Uma rede não orientada (N, A, Y^e)

   $N = \{1, 2, \ldots , n\}$ conjunto de nós

   $A = \{(i,j), i \in N, j \in N, i \neq j\}$ conjunto de arcos.

   $Y^e = (Y_1^e, Y_2^e, \ldots, Y_m^e)$ vetor cujos componentes são as capacidades existentes dos arcos.

2. Um conjunto $r_{ij}(t)$ de fluxos requeridos distribuídos arcos por arco na rede para um período de tempo t.

$\{r_{ij}(t),\ i \in N,\ j \in N\}$

3. Um vetor de custos para aumentar unidade de capacidade para cada arco.

   $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$. Cada componente do vetor c é o custo para aumentar de uma unidade a capacidade do arco correspondente.

Desejamos:

Uma rede não orientada (N, A,Y) tal que o custo total de ampliar os arcos seja mínimo, e os fluxos requeridos em todos os períodos de tempo sejam satisfeitos.

Em termos matemáticos o problema de ampliação é:

$$\text{(e)}\quad \min\ C^T\,(Y - Y^e)$$

Sujeito a:

$$a)\ \sum_{i\varepsilon N} x_{ij}^{pq}(t) - \sum_{K\varepsilon N} x_{jK}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j = p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j = q \end{cases}$$

$j,\ p,\ q,\ \varepsilon\ N$

$$b)\ \sum_{p,q\varepsilon N} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq Y_{ij}, \quad \forall (i,j)\ \varepsilon\ A$$

$$c)\ f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t) \quad p,\ q\ \varepsilon\ N$$

$$d)\ y \geq y^{e}$$

As equações se verificam para todo t=1,...,T, o tempo t estando dividido em períodos que vão de 1,2,...,etc,... até T. As variáveis acima são:

C^T - é o vetor custo de ampliação de capacidade unitária tansposto.

$y - y^e$ - incremento de capacidade, capacidade final ampliada menos a capacidade inicial existente.

$x_{ij}^{pq}(t)$ - fluxo que sai do nó p e se destina ao nó q , passando pelo arco (i,j) no tempo t.

$x_{jK}^{pq}(t)$ - fluxo que sai do nó p e se destina ao nó q , passando pelo arco (j,K) no tempo t.

$f_{pq}(t)$ - quantidade de fluxo que sai de p e se destina a q no período t.

$r_{pq}(t)$ - requisito de fluxo entre o nó p e o nó q no período de tempo t.

O conjunto dos vetores capacidade de arco que vão atender aos requisitos de fluxo em todos os períodos de tempo forma um politopo convexo e ilimitado.

Portanto, existe um número finito de pontos extremos desse politopo. Os arcos da rede são em número de m . O politopo é definido no R^m. Portanto, sendo o politopo P_t^m temos que $P_t^m \subset R^m$.

As equações (a), (b), (c), (d) e (e) formam um Problema de Programação Linear. O fato não constitui surpresa. Sabemos que problemas de redes podem ser formulados como problemas lineares.

Vamos analisar passo a passo o significado de cada uma das equações ou inequações desse Problema de Programação Linear. Como vimos ele está expresso pelo sistema formado por (a), (b), (c), (d) e (e).

A rede explicitada obedece a lei de conservação de fluxos. Portanto devemos ter:

$$\sum_i x_{ij}(t) - \sum_K x_{jK}(t) = \begin{cases} -v(t) & \text{se } j = c \\ 0 & \text{se } j \neq c,t \\ v(t) & \text{se } j = t \end{cases}$$

Significando a conservação do fluxo $x_{ij}(t)$, variável no tempo e tomada para um nó genérico j da rede. Podemos também dizer, de outra forma que o fluxo proveniente de nós antecessores a j e o fluxo decorrente de nós sucessores a j é igual . Exceção feita para o caso em que j = c, o nó j é <u>nó começo</u> (origem), ou j = t, o nó j é o <u>nó final</u> (destino).

Outra propriedade é que o fluxo em um determinado arco não excederá a capacidade desse arco, sob pena de "estourarmos" a rede e alterarmos sua configuração estrutural. Então,

$$x_{ij}(t) \leq Y_{ij} \,, \qquad \forall (i,j), \quad t$$

Para atender os fluxos requeridos em cada arco, os fluxos que passarão por esse arco deverão no mínimo superar os requisitos de fluxo dados. O que exprimimos na seguinte forma :

$$x_{ij}(t) \geq r_{ij}(t) \qquad \forall(i,j), \quad t$$

Observar que se trata de entender o que significa atender os requisitos de fluxo. Podemos ter

$$x_{ij}(t) + p_1(t) = r_{ij}(t) \text{ ou}$$

$$x_{ij}(t) - p_2(t) = r_{ij}(t) \qquad (i,j), \ t$$

onde $x_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$, $p_1(t)$ e $p_2(t)$ ε I^+

I^+ - conjunto dos inteiros positivos.

Podemos atender os requisitos de fluxo por excesso ou por falta, ou atendê-los estritamente, no caso de o fluxo no arco ser igual ao requisito no arco. Estamos assumindo que os fluxos que passam no arco vão igualar ou superar os requisitos correspondentes.

O problema é de ampliação. Portanto iremos aumentar ou manter a capacidade de qualquer arco. Ela nunca será diminuida. Então

$$Y_{ij} \geq Y^{e}_{ij} \quad \forall (i,j)$$

Desejamos: $\min C^{T} (Y - Y^{e})$

com as restrições (a), (b), (c) e (d).

Que relações guardam as colocações (a), (b), (c) e (d) entre si ? As equações (a) se situam no campo da geração, emissão, modo como se propagam, se transmitem ou são absorvidos os escoamentos de fluxo. Leis matemáticas e físicas regem um escoamento de matéria, de informações ou outras grandezas assumidas como variáveis num processo. Escoamentos lineares e contínuos, ou não lineares, exponenciais, descontínuos, etc., podem ocorrer. Mas assumida a lei de conservação de fluxos para qualquer nó da rede, não estamos indagando a forma de propagação, ou outras características importantes do processo. Não estamos perguntando o comportamento ponto a ponto de uma linha de fluxo, nem estamos traçando superfícies equipotenciais para a matéria circulante nos arcos da rede.

Um nó genérico j da rede dirá: "chegaram cinco unidades de fluxo e sairam cinco unidades de fluxo. Nenhuma unidade ficou retida aqui dentro".

Também na rede em discussão não foram especificadas equações que descrevam como se propaga no espaço e no tempo um escoamento de fluxo, a menos da lei estabelecida de conservação de fluxo.

A colocação (b) expressa uma limitação física da rede. Um cano condutor de água dará passagem a uma quantidade de água que pode ser medida pelo diâmetro interno do cano. Para a mesma velocidade de deslocamento do fluxo a vazão aumentará com o aumento do diâmetro interno do cano. Por toda a extensão do arco a sua capacidade é sempre a mesma. Um turbilhão de água por dentro de um cano que se vai afunilando poderá levá-lo à ruptura. Um ponto da superfície do cano condutor então dirá: "Já não somos mais a mesma rede de antes, a água vaza e não atinge mais o próximo consumidor".

Uma fábrica especifica quantas unidades de fluxo necessita para a fabricação de determinado produto, num certo tempo. Diretrizes de planejamento, técnicas de produção, quantidades de reagentes químicos, vão nos dar os requisitos de fluxo , por exemplo.

As colocações (a), (b), (c) e (d) são independentes entre si. Mas as equações apresentadas ainda não permitem resolver o problema de modo fácil. Por exemplo para uma rede com 20 nós, (a) seria escrito vinte vezes. As equações (b), (c) e (d) são escritas para cada arco. Teremos

$$m = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = \frac{380}{2} = 190 \text{ arcos para}$$

uma rede completa.

Portanto, vamos ter um sistema muito grande, que vai apresentar dificuldades para a resolução prática.

O que irá acontecendo com a rede ?

O número de nós da rede final, solução do problema, será o mesmo da rede inicial. O número de arcos da rede final poderá ser diferente do número de arcos da rede inicial, quando tivermos algum arco com capacidade zero (o arco não existe) e houver necessidade de construir o arco, para atender a um requisito de fluxo.

Iremos aumentando as capacidades de cada arco onde não estiverem sendo atendidos os requisitos de fluxo.

Aclarando idéias, vamos traçar um paralelo com um caso real. Seja uma companhia telefônica. Existem as estações onde a população telefona, e os postes que conduzem os fios dos cabos telefônicos. A companhia, seguindo a expansão do mercado e o progresso industrial poderá aumentar sua capacidade total de atendimento a chamadas colocando maior número de fios entre postes já colocados nas ruas, que por sua vez se ligam a estações também já construídas. Outra solução é cavar mais buracos, colocar mais postes e construir novas casas telefônicas pelas várias cidades e estradas do país. Qual das duas soluções é mais econômica, do ponto de vista de custos para a emprêsa telefônica ? Ampliar em cima das linhas já existentes, das estações já construídas e dos postes já colocados, ou construir novas estações, colocar fios e postes ? Ambas são adotadas e também ocorrem outros fatos. Algumas linhas são retiradas, alguns postes arrancados, e casas mudam de dono, seja pela ação dos homens, da natureza, ou os efeitos dos tempos. Também não é o caráter econômico dos custos para a companhia o único fator que questionamos. As necessidades sociais da população são conhecidas, o avanço industrial é verificado e outros fatores vão influir na política de decisões da empresa.

Continuando pelos caminhos matemáticos vamos desenvolver as seguintes etapas:

1. As capacidades Y_{ij}, que são as soluções procuradas formam um politopo convexo e ilimitado P_m^t contido no R^m.

2. Escrever o politopo em uma forma conveniente, explicitando-o em relação a seus vértices.

3. Relacionar o vetor de capacidades Y com o politopo onde estão as soluções da rede.

4. Observaremos que o problema está numa forma tal que se aplica o lema de Minkowski-Farkas.

5. Pela aplicação do lema chegaremos à formulação definitiva do problema, que poderá ser resolvido pelo Simplex.

Então o politopo convexo e ilimitado P_m^t é o conjunto de soluções para as redes de m arcos , com vetor de capacidades Y, num determinado período t. O politopo tem um número finito de vértices. Podemos escrever:

$$P_m^t = \{N_1^t , N_2^t , \ldots , N_K^t \}$$

$N_1^t , N_2^t , \ldots , N_K^t$ são os pontos extremos (vértices) do politopo.

Como escrever um ponto qualquer do politopo em função de um ponto dado e dos raios vetores que passam pelos pontos extremos ? A expressão simplificada para o politopo é

$$P_m^t = \{N^t \varepsilon R^m | \; N^t = \sum_i \lambda_i^t \; N_i^t \;, \; \lambda_i^t \geq 0, \; \sum_i \; \lambda_i^t \geq 1 \}$$

O politopo P_m^t pode ser escrito também como a soma do conjunto K de combinações lineares convexas dos pontos p_r e do cone poliédridrico convexo C, formado pelas combinações lineares positivas de pontos q_s , conforme:

$$K = \{x | x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_r \, p_r, \ \alpha_r \geq 0, \sum_{r=1}^{p} \alpha_r = 1\}$$

$$C = \{y | y = \sum_{s=1}^{q} \beta_s \, q_s \ , \ \beta_s \geq 0 \ \}$$

Portanto, $P_m^t = K + C$

(Ver Simmonard : "Linnear Programming", pg. 395, 1966).

$$P_m^t = \sum_{r=1}^{p} \alpha_r \, p_r + \sum_{s=1}^{q} \beta_s \, q_s \qquad (1)$$

$$\alpha_r \geq 0, \ \sum_{r=1}^{p} \alpha_r = 1, \quad \beta_s \geq 0$$

Pensando em termos de pontos extremos do politopo vamos chamá-los de x_i. Então (1) fica:

$$P_m^t = \sum_i \alpha_i \, x_i + \sum_i \beta_i \, x_i \quad , \quad \alpha_i \geq 0, \ \beta_i \geq 0, \ \sum_i \alpha_i = 1$$

$$\sum_i \alpha_i x_i + \sum_i \beta_i x_i = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i$$

Façamos $\alpha_i + \beta_i = \lambda_i$

$$\alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0 \implies \lambda_i \geq 0$$

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i = \sum_i \lambda_i$$

$$1 + \sum_i \beta_i = \sum_i \lambda_i$$

Como $\beta_i \geq 0 \qquad \sum_i \beta_i \geq 0$

Então $\sum_i \lambda_i \geq 1$

$$P_m^t = \sum_i \alpha_i x_i + \sum_i \beta_i x_i = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) x_i = \sum \lambda_i x_i$$

Portanto, o politopo pode ser escrito:

$$P_m^t = \{X(t) \in R^m \mid X(t) = \sum_i \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i \geq 1\}$$

Para que um vetor de capacidades y seja solução do problema em todos os períodos de tempo devemos ter

$$Y \geq X(t), \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

Como $X(t) = \sum_i \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i \geq 1$

$$Y \geq \sum_i \lambda_i x_i,\quad \lambda_i \geq 0,\quad \sum_i \lambda_i \geq 1$$

Uma formulação compacta para o Problema de Programação Linear (PPL) é:

$$\min\ C^T (Y - Y^e)$$

$$Y \geq \sum_i \lambda_i x_i \qquad (2)$$

$$\sum_i \lambda_i \geq 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$Y - Y^e \geq 0$$

Não estamos usando o índice t . Fica esclarecido que estamos resolvendo o problema para um período de tempo t , mas a solução é geral, para qualquer tempo t. Fazendo

$Y - Y^e = z \qquad Y = z + Y^e$, o problema (2) será:

$$\min \quad C^T z \qquad \text{sujeito a:}$$

$$z + Y^e \geq \sum_i \lambda_i \; x_i$$

$$\sum_i \lambda_i \geq 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$z \geq 0$$

Podemos escrever a primeira e a segunda inequações como:

$$\sum_i \lambda_i x_i \leq z + y^e$$

$$\sum \lambda_i \leq -1$$

Vamos escrever estas duas inequações em uma única:

$$\sum_i \lambda_i x_i - \sum_i \lambda_i \leq z + y^e - 1$$

$$\sum_i \lambda_i |x_i, -1| \leq |z + y^e, -1|$$

x_i é um vetor.

$(z + y^e)$ também.

λ_i são escalares.

O Problema de Programação Linear agora é:

$$\min \ C^T z$$

$$\sum_i \lambda_i |x_i, -1| \leq |z + y^e, -1| \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i \geq 0 \\ \\ z \geq 0 \end{array}\right. \qquad (4)$$

Aplicando a (3) e (4) o lema de Minkowski-Farkas que diz: "a inequação $Ax \leq b$ tem uma solução não negativa se e somente se para todo $\pi \geq 0$, $\pi'A \geq 0$ implica $\pi \quad \geq 0$".

Então podemos dizer que a inequação

$$\sum_i \lambda_i \, |x_i, -1| \leq |z + y^e, - 1| \quad \text{tem uma solução}$$

não negativa se e somente se para todo

$$(5) \quad \begin{array}{l} \pi \geq 0 \\ \pi'|x_i, - 1| \geq 0 \quad \text{implica} \end{array}$$

$$(6) \quad \pi'|z + y^e, -1| \geq 0$$

O conjunto dos vetores π que satisfazem (5) forma um politopo convexo ilimitado $D^{m+1} \subset R^{m+1}$. Por um raciocínio idêntico ao usado atrás podemos dizer que

$$D^{m+1} = \{\pi \in R^{m+1} / \pi = \sum_i a_i \pi_i, a_i \geq 0, \sum_i a_i \geq \}$$

Vamos mostrar que (5) e (6) são equivalentes a

$$(7) \ |\pi_i|' \ |z + y^e, -1| \geq 0$$

Seja um vetor $\pi \in D^{m+1}$. Então

$$\pi = \sum_i a_i \pi_i, \quad \sum_i a_i \geq 1, \ a_i \geq 0$$

Como (7) é válida:

$$a_i . \ |\pi_i|' \ |z + y^e, -1| \geq 0$$

$$\sum_i a_i \ |\pi_i|' |z + y^e, -1| \geq 0$$

$$\sum_i a_i \ \pi_i' \ |z + y^e, -1| \geq 0$$

$$\pi' \ |z + y^e, -1| \geq 0$$

No outro sentido se (5) e (6) são válidas, como $\pi_i \in D^{m+1}$, então é óbvio que (7) também será válida.

O PPL então pode ser escrito:

$$\min C^T z$$

$$|\pi_i|'|z + y^e, -1| \geq , \qquad \forall i$$

$$z \geq 0$$

Das restrições do problema acima

$$|\pi_i|' |z + y^e, -1| \geq 0$$

$$|\pi_i|' ||z, -1| + |y^e, 0|| \geq 0$$

$$\pi'_i |z, -1| \geq \pi'_i |-y^e, 0|$$

Fazendo ainda a mudança $\min C^T z = -\max(-C^T z)$ vem:

$$\pi'_i |z, -1| \geq \pi'_i |-y^e, 0|, \quad \forall i$$

$$z \geq 0$$

A forma definitiva do PPL é:

$$\max - C^T z$$

sujeito a $\quad \pi'_i \, |z, -1| \geq \pi'_i \, |-y^e, 0|, \quad \forall i$

$$z \geq 0$$

A formulação acima vai ser aplicada para cada intervalo de tempo t. Como $\pi'_i \in D^{m+1} \subset R^{m+1}$, vamos ter (m+1) linhas para cada período de tempo t. O número de colunas é bem menor. Serão em número de m, uma coluna para cada componente do vetor z. Este problema foi resolvido em |29|, páginas 14,15,16, etc.

II.2. ESTUDO DO POLITOPO DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR FORMULADO

Como vimos mais atrás as soluções do PPL formulado dão um politopo convexo ilimitado. O PPL é: "Determinar as capacidades finais de uma rede conhecendo:

1. A configuração estrutural da rede (N,A,V), onde N é o conjunto de nós, A é o conjunto de arcos e V o conjunto de capacidades de arcos existentes da rede.

2. Custos para ampliação de unidade de capacidade para cada arco.

3. Requisitos de fluxo para diferentes períodos de tempo.

O objetivo do problema é que o custo total da ampliação da rede seja mínimo, atendidos os requisitos de fluxo". Então, o conjunto dos vetores capacidades $N^t \varepsilon R^m$, correspondentes a todas as redes de m arcos que satisfazem aos requisitos de fluxo num determinado período t, forma um politopo convexo ilimitado $P_m^t \subset R^m$.

Na figura II.1. está um esboço, dando uma idéia aproximada de como podemos visualizar um politopo, cujos vértices são as soluções do problema de programação linear.

Os eixos orientados x_1, x_2, x_3,...,etc ..., x_m formam o espaço dos números reais R^m . O sólido geométrico desenhado é como se fosse um balão, ou um diamante, com grande número de faces e grande número de vértices. Para dar uma visão espacial mais clara o sólido geométrico foi interceptado segundo vários planos, que truncam seu alongamento, seu crescimento ao longo dos

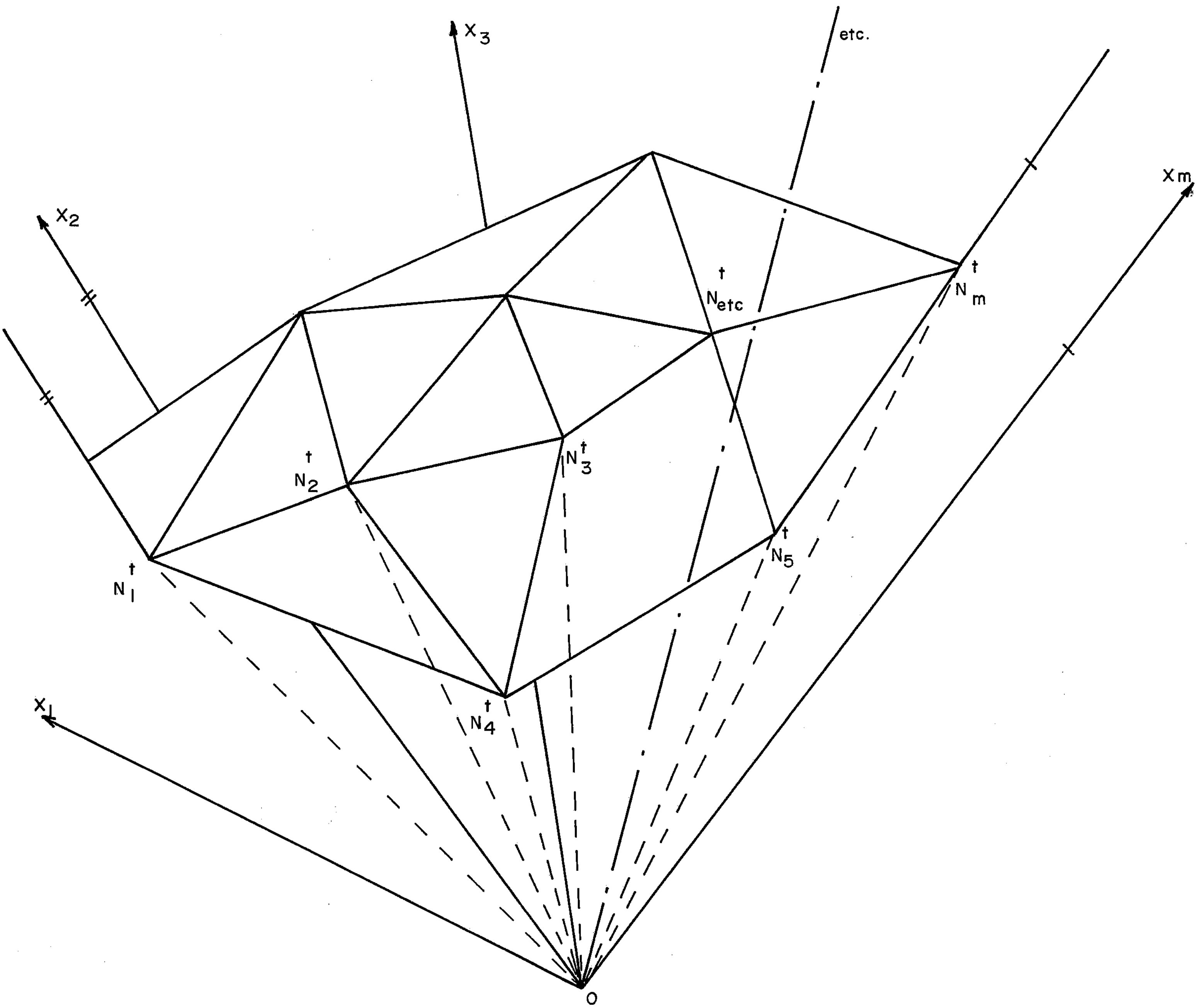


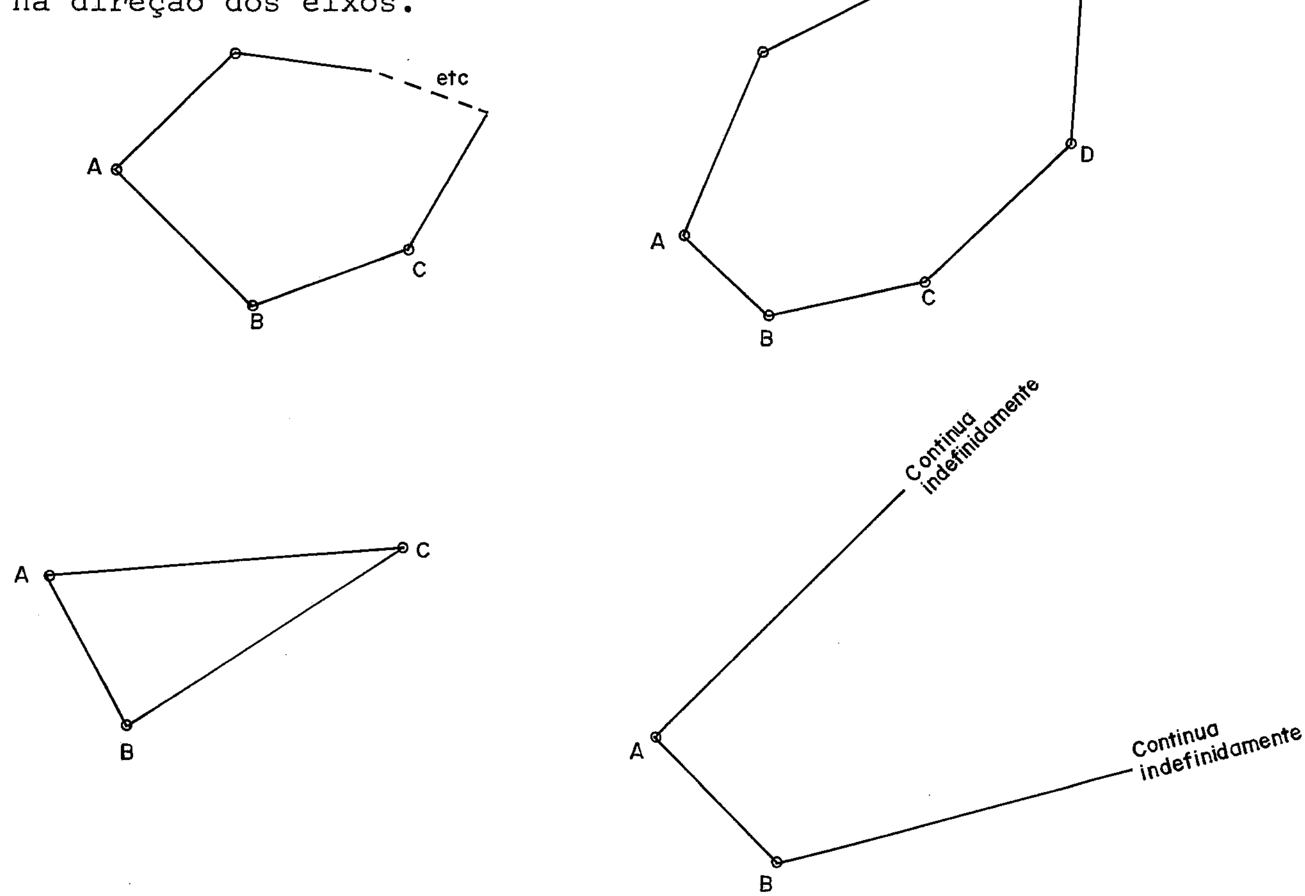
Figura II.1

Politopo P^t_m convexo e ilimitado. Na figura II.1. está um esboço, dando uma idéia aproximada de como podemos visualizar um politopo, cujos vértices são as soluções do problema de programação linear.

vários eixos do espaço R^m. O politopo, poderíamos chamá-lo de um poliedro que cresce indefinidamente segundo direções determinadas é convexo, o que significa que não tem reintrâncias, concavidades, ou regiões que se assemelhem a vales ladeados por montanhas. Suas faces, então são tais que mantém a propriedade da convexidade, definição já conhecida da Programação Linear.

Cortando o sólido geométrico por um plano genérico qualquer conseguimos um polígono plano, convexo que teria por exemplo uma das formas desenhadas na figura II.2.

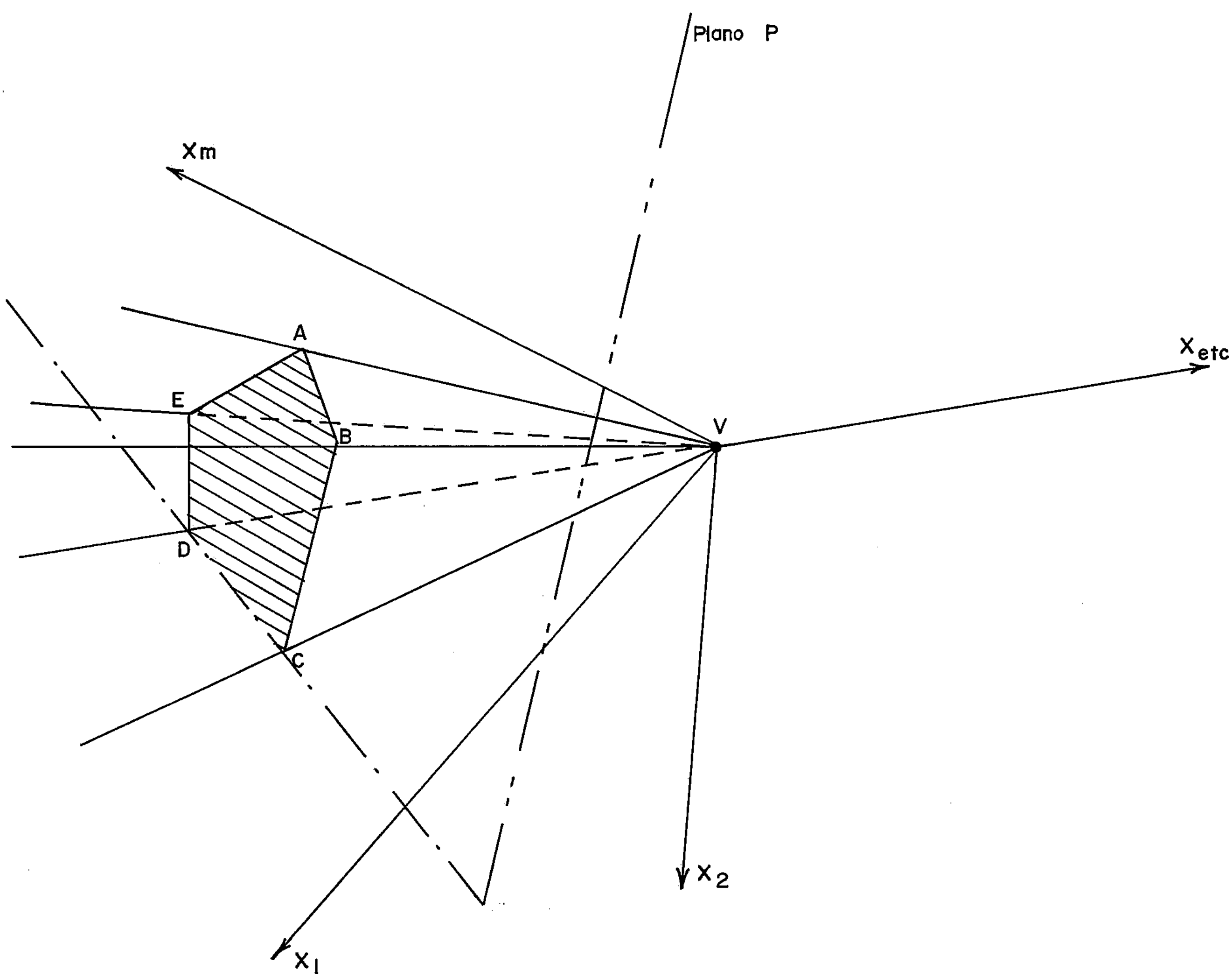
<u>Figura II.2</u> - O politopo também é ilimitado. Um poliedro é um politopo limitado. O politopo é a interseção de semi-espaços fechados. O politopo se alonga e cresce indefinidamente na direção dos eixos.



O politopo também é ilimitado. Um poliedro é um politopo limitado. O politopo é a interseção de semi espaços fechados. O politopo se alonga e cresce indefinidamente na direção dos eixos.

Por desenhos, vemos na figura II.3. como isso ocorre.

Figura II.3

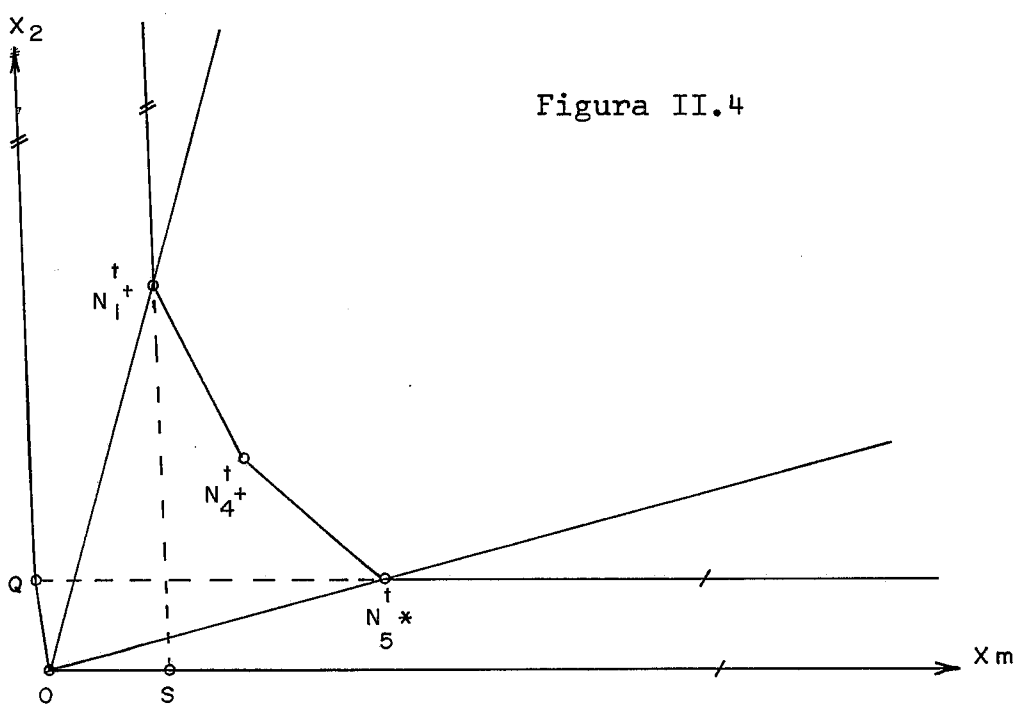


Nesse caso o único vértice do politopo passa pela origem do sistema de eixos que pertencem ao espaço R^m $(x_1, x_2, x_{etc}, \dots, x_m)$. O sólido geométrico foi interceptado segundo um plano P, que dá origem ao polígono ABCDE. Os raios VA, VB, VC, VD, VE, definem semi-retas de comprimento infinito. O politopo gerado por VA, VB, VC, VD e VE é um politopo convexo e ilimitado , contido no R^m.

Olhando a figura II. .1, é interessante analisar o politopo P_m^t , segundo o corte que nele aplicamos originado pelo plano definido pelos eixos x_2, x_m.

Colocando a figura seccionada no plano x_2, x_m vamos ter (admitida a ortogonalidade de x_2 e x_m) a figura II.4.

Figura II.4



$S\ N_1^t +$ é paralela a x_2

$Q\ N_1^t +$ é paralela a x_m

Este duplo paralelismo é um resultado demonstrado, conhecido.

Poderíamos ter também as figuras II.5(a) e (b).

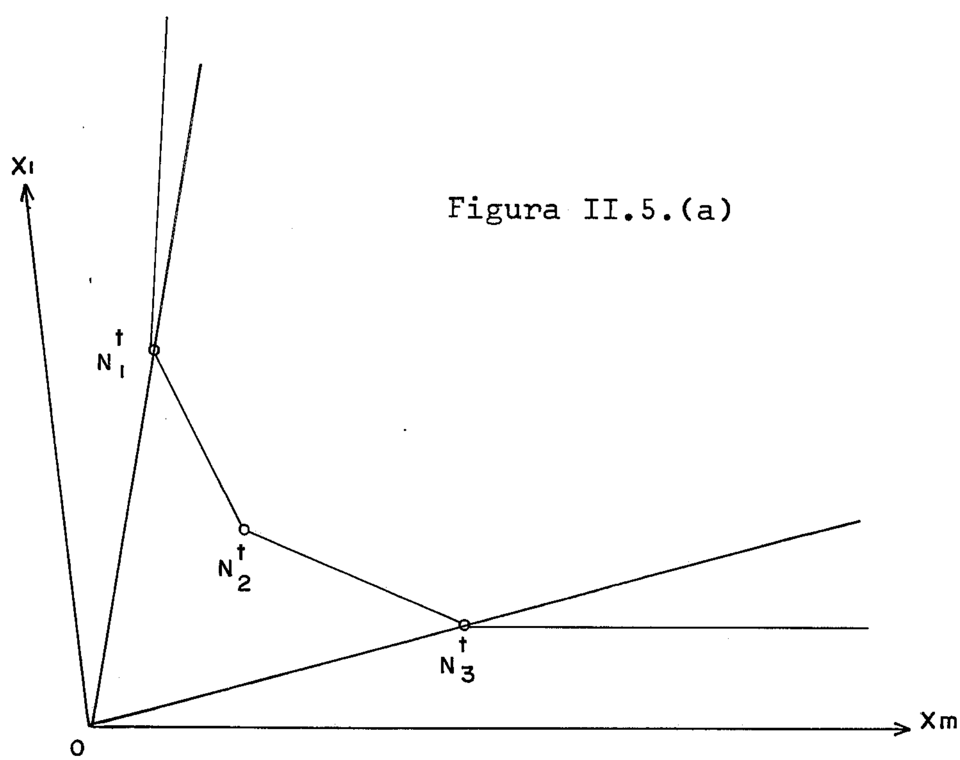


Figura II.5.(a)

(a)

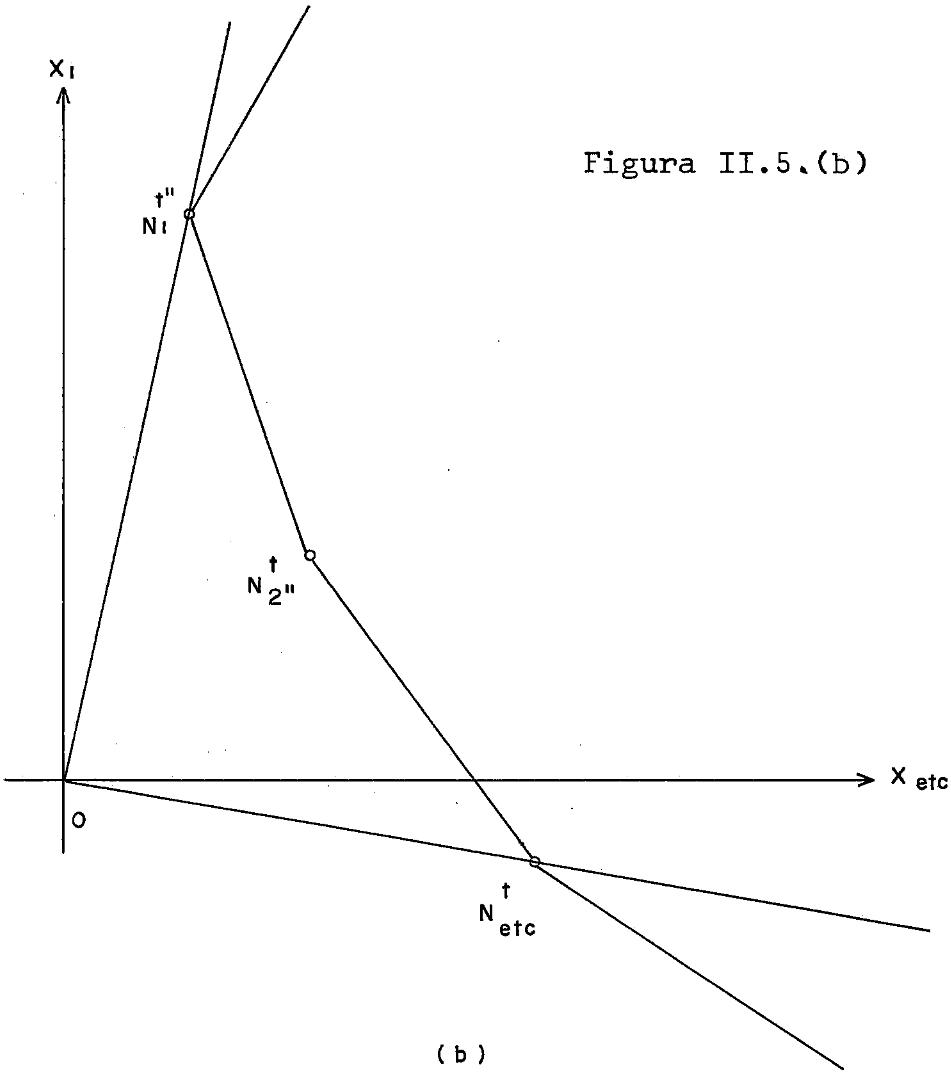


Figura II.5.(b)

Os pontos $N_1^{t'}$, $N_2^{t'}$, $N_3^{t'}$ e $N_1^{t''}$, $N_2^{t''}$, $N_3^{t''}$ são projeções dos vértices do politopo nos planos (x_1, x_m) e (x_1, x_{etc}) respectivamente. É importante saber que o número de vértices do politopo é finito. Por intuição, valendo-se de uma visão espacial é possível ver este fato, que pode ser provado. O problema até agora está sendo analisado num único período de tempo t . Para cada período de tempo t = 1, 2, ... , T, teremos um politopo do tipo P_m^t , convexo, ilimitado e com número finito de vértices , que será a solução do problema em análise. Se os períodos de tempo forem em número de n teremos n politopos diferentes que darão as soluções do problema.

Cada vértice do politopo P_m^t é um ponto extremo desse politopo. O conjunto de pontos $N_i^t \in R^m$, i = 1 , 2, ... etc, ... o que é ?

Um ponto N_i^t é um ponto do R^m. Portanto tem m coordenadas. Pergunta-se: Um ponto N_i^t é um vetor de capacidades da rede que estamos resolvendo ?

Todo ponto do politopo P_m^t é um vetor de capacidades correspondente a uma rede de m arcos, que satisfaz aos requisitos de fluxo no período t .

O conjunto de todos os pontos do politopo P_m^t dá os vetores capacidades correspondentes a todas as redes de m arcos, que satisfazem aos requisitos de fluxo no período t . Então, o politopo P_m^t é o conjunto das restrições do Problema de Programação Linear que estamos resolvendo, no período t .

Desejamos minimizar o custo total de ampliação das capacidades da rede atendendo às restrições, para diversos períodos de tempo.

Desejamos:

$$\min \quad C^T x$$

sujeito a:

$$(1) \quad \sum_{i \varepsilon N} v_{ij}^{pq}(t) - \sum_{K \varepsilon N} v_{jK}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j = p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j = q \end{cases}$$

$$\forall\, j,\ p,\ q\ \varepsilon\ N$$

$$(2) \quad \sum_{\substack{p \varepsilon N \\ q \varepsilon N}} \left| v_{ij}^{pq}(t) \right| \leq Y_{ij}, \qquad \forall (i,j)\ \varepsilon\ A$$

$$(3) \quad f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t), \qquad \forall\, p,\ q\ \varepsilon\ N$$

$$t = 1, 2, \ldots, T$$

A função objetivo é $C^T.x$

$$C^T = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

O conjunto de (1), (2) e (3) dá o politopo P_m^t, conjunto das restrições do PPL.

Podemos ver num desenho como fica a situação. Seja, por exemplo, o plano definido pelos eixos x_1, x_m. Veja a figura II.6.

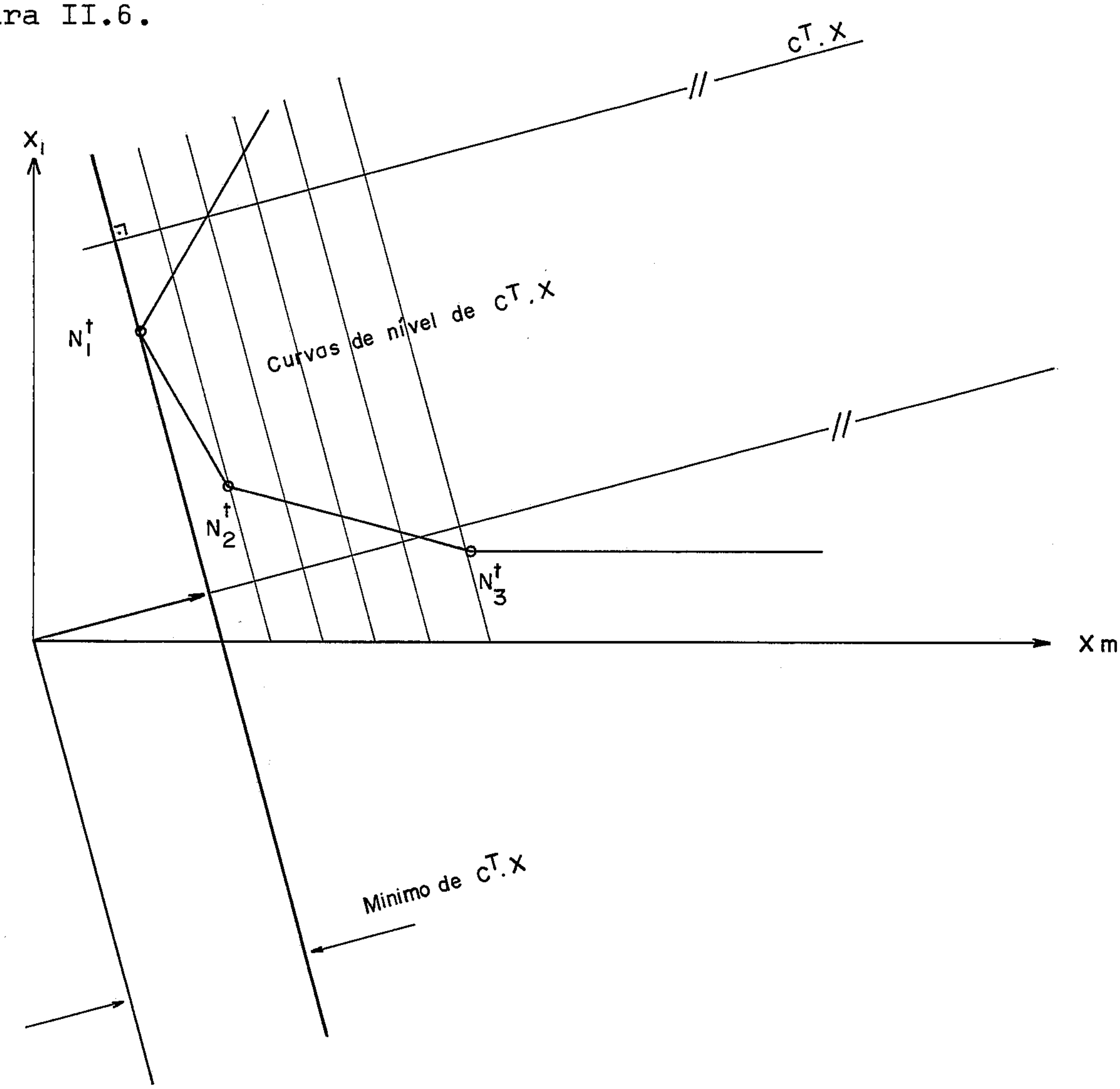


Figura II.6

O mínimo de $C^T.x$ é alcançado para a projeção de um vértice do politopo P_m^t. É o vértice por onde passa a curva de nível de $C^T.x$ situada à menor distância da origem do sis tema. Assim também para o politopo P_m^t situado no R^m podemos visualizar os planos ortogonais à reta definida pela função objetivo $C^T.x$ (as curvas de nível de $C^T.x$) cortando o politopo. O plano que dá a solução passa pelo vértice situado a menor distância da origem à curva de nível de $C^T.x$.

Para todo intervalo de tempo t obteremos um vértice do politopo que é a solução do problema. Podemos ter uma aresta toda satisfazendo ao problema, como também uma face toda , etc.

Portanto para todo intervalo de tempo podemos ter: uma única solução, várias soluções (uma quantidade infinita de soluções), não existe solução, e a solução é ilimitada.

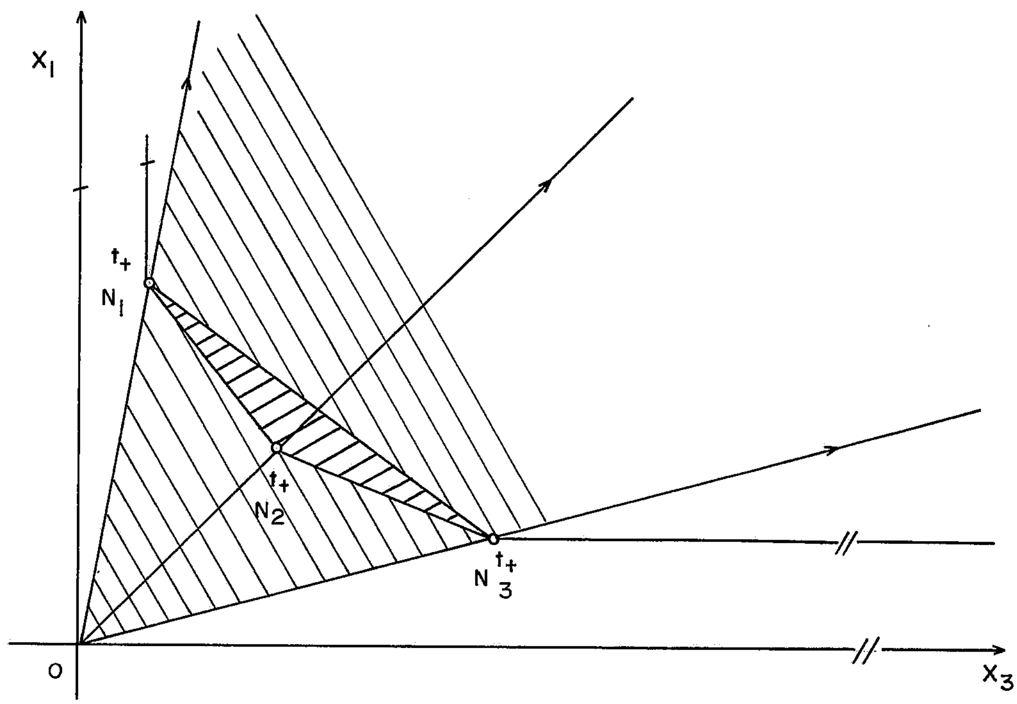
Supondo a existência de solução, vamos ter para todo período de tempo um vetor do R^m, que é o vetor de capacidades, correspondente a uma rede de m arcos, solução do problema.

Para obter a solução final fazemos a união de todos os conjuntos de restrições. Aplicamos ao conjunto união de todos os outros conjuntos o mesmo método e encontramos a solução final.

Estamos trabalhando sem a demonstração de que o PPL formulado, na parte que é o conjunto de restrições, tem como solução um politopo convexo e ilimitado. Essa afirmação, entretanto pode ser provada. Em teses anteriores o fato já foi aceito como verdadeiro e constitui conhecimento adquirido no campo de trabalho estudado. Também o fato de que o número de vértices (pontos extremos) do politopo é finito pode ser demonstrado.

Observando com mais detalhes um corte aplicado por um plano sobre o politopo, temos a figura II.7.

Figura II.7.



Vamos pesquisar sempre pontos dentro do cone $N_3^t + N_1^{t+}$ e que sejam pontos extremos do politopo, pois a solução do problema será sempre um vértice do politopo (ou uma aresta, ou face, etc.). Para encontrar a solução final do problema fazemos, pensando em termos espaciais e geométricos a união de todos os con juntos de restrições. Como fazer tal procedimento ? Fazendo a união de todos os politopos, em todos os períodos de tempo. Para um grande número de nós e arcos da rede fornecida como dado teremos um sólido geométrico com grande número de vértices e faces, para cada intervalo de tempo considerado. Do ponto de vista abstrato, puramente matemático, concebe-se como efetuar a operação de união de todos os politopos. Do ponto de vista prático, de fazer funcionar, para calcular, obter resultados computacionais, a problemática é complexa . Já na formulação matemática do PPL

$$\min \quad C^T x$$

sujeito a

$$\sum_{i \in N} v_{ij}^{pq}(t) - \sum_{K \in N} v_{jK}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j = p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j = q \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{p \in N \\ q \in N}} |v_{ij}^{pq}(t)| \leq Y_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A$$

$$f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t), \qquad \forall\, p,q \in N$$

$$Y \geq Y_e$$

$$t = 1, 2, \ldots, T$$

Qual é o tamanho físico do objeto a que nos propomos resolver ?

Interessa saber a dimensão real, palpável , em termos numéricos, para quantificar as colocações abstratas, matemáticas do modelo acima. Destrinchadas as equações, uma a uma , no que elas têm de particular e compreendido seu significado podemos ter uma visão global do modelo.

A função objetiva, o que ela significa ?

Temos um vetor de custos para ampliar unidades de capacidade em cada arco da rede dada. As capacidades são números, reais, quase sempre inteiros positivos. Como a água que circula pelos canos de diâmetros diferentes em uma cidade industrial. Há a caixa d'água, as bombas de recalque, sucção, ligadas aos poços artesianos, ou aos reservatórios de água represada. Há válulas para controlar a passagem de maior ou menor volume de água. A máxima capacidade de um cano determinado é dada proporcionalmente ao seu diâmetro interno.

O vetor de custos transposto é $C^T=(c_1,c_2,\ldots,c_m)^T$
A capacidade final é $x = (x_1, x_2, \ldots , x_m)$. A equação

$$\sum_{i\varepsilon N} v_{ij}^{pq}(t) - \sum_{K\varepsilon N} v_{jK}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j = p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j = q \end{cases}$$

$$t = 1, 2, \ldots , T$$

exprime a lei de conservação de fluxo para um nó genérico j do conjunto N de nós.

Na rede em estudo não há geradores internos de fluxos. Veja a figura II.8.

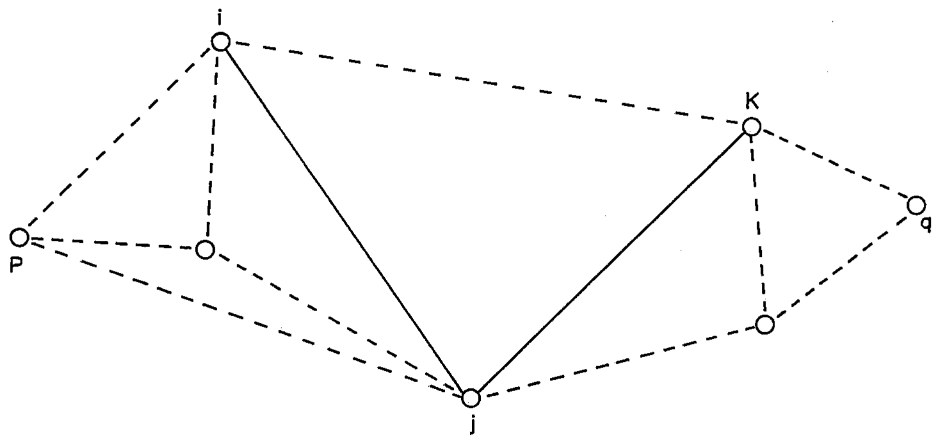


Figura II.8

$\sum\limits_{i \varepsilon N} v_{ij}^{pq}(t)$ o que é ?

$v_{ij}^{pq}(t)$ é o fluxo que sai do nó p e se destina ao nó q ($p \neq q$), passando pelo arco (i,j) no intervalo de tempo t.

$\sum\limits_{K \varepsilon N} v_{ij}^{pq}(t)$ o que é ?

$v_{jk}^{pq}(t)$ é o fluxo que sai do nó p e se destina ao nó q ($p \neq q$), passando pelo arco (j, K) no intervalo de tempo t. $f_{pq}(t)$ é a medida do fluxo que sai de p e se destina a q.

A equação está sendo aplicada para um nó $j \in N$. Podemos pensar de outra maneira. A soma dos fluxos provenientes dos nós antecessores a j é igual a soma dos fluxos que emanam de j para os nós que lhe são sucessores, não se levando em conta o sinal algébrico dos fluxos. O nó j comporta-se como um ponto para onde convergem fluxos, e de onde emanam fluxos. A quantidade de fluxo que entra no nó é igual a quantidade de fluxo que sai do nó. Não há geração e nem dissipação ou armazenamento de fluxo.

A equação é aplicada para todos os pontos da rede. Portanto, teremos para cada nó uma equação. A rede tem n nós. Logo teremos n equações desse tipo.

Como diz a própria equação, se j for o nó p, teremos apenas fluxo saindo do nó. (Poderíamos pensar em geração do fluxo f_{pq}). Se j for o nó q, vamos ter apenas fluxo chegando ao nó. Então, pensamos que todo o fluxo será consumido, ou armazenado, e nenhum fluxo sai do nó.

A inequação

$$\sum_{\substack{p \in N \\ q \in N}} |v_{ij}^{pq}(t)| \leq Y_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

tem $|v_{ij}^{pq}(t)|$ = módulo do fluxo que sai do nó p e se destina ao nó q, passando pelo arco (i,j), no intervalo de tempo t.

Y_{ij} é a capacidade do arco (i,j)

Tomamos $v_{ij}^{pq}(t)$ em módulo porque podemos ter passando pelo arco (i,j) fluxos em dois sentidos. Por exemplo ligações telefônicas podem ocorrer simultaneamente do Rio de Janeiro para La Paz na Bolívia, ou de La Paz para o Rio de Janeiro. Está claro que as ligações nos sentidos contrários não se anularão, mas exigirão uma capacidade do sistema telefônico igual ou maior que a soma dos fluxos em valor absoluto nos fios nos dois sentidos. Facilmente chegaríamos a conclusão que uma ligação São Paulo-Buenos-Aires anularia uma ligação de Buenos-Aires para São Paulo, se trabalhassemos com V_{ij}^{pq} munidos de sinal algébrico.

A inequação é para cada arco da rede. Temos n nós na rede. Os arcos são em número de m. Para umgrafo completo, onde um nó genérico se liga diretamente a qualquer outro nó, isto é, dados dois nós quaisquer existe o arco direto que os liga, o número de arcos é $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Portanto, o número de inequações do tipo

$$\sum_{\substack{p\varepsilon N\\ q\varepsilon N}} |V_{ij}^{pq}(t)| \leq Y_{ij}, \qquad \forall (i,j)\ \varepsilon\ A \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

é menor ou igual a $\frac{n(n-1)}{2}$ para cada período $\underline{t}$.

A desigualdade

$$f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t) \qquad \begin{array}{l} \forall p, q \in N \\ t = 1, 2, \ldots , T \end{array}$$

expressa que a medida do fluxo que sai de um nó p e se destina a um nó q deve ser maior ou igual ao requisito de fluxo entre o nó p e o nó q, no período de tempo t(p ≠ q). Conhecidos, como diz o próprio problema os fluxos que desejamos de nó para nó e que são os requisitos de fluxo, para um certo período t, vamos descobrir fluxos cujas medidas sejam iguais ou superiores aos requisitos dados. Nem poderia o fluxo que passa por um arco ser inferior ao fluxo que para aquele arco foi estabelecido por condições técnicas, ou físicas, ligadas a estrutura de demanda, a situações de mercado, a fatores externos.

Os requisitos de fluxo podem vir dados de diferentes formas. Mas antes das formas vamos pesquisar o conteúdo . Dizer o que é o requisito de fluxo. Da realidade, do dia-a-dia, no mercado, as fábricas e os escritórios têm levantados com suas equipes de trabalho funções específicas, quantidades numéricas, que são, dando um exemplo, número de batidas do coração humano relacionando ao fluxo sanguíneo dos pulmões para o fígado. Se o fluxo sanguíneo for superior ou inferior a determinada quantidade conhecida pela medicina e cientificamente comprovada, graves problemas poderão ocorrer.

Em New York o tráfego urbano não poderá separar as vias de transporte construídas. As necessidades sociais fixam o número de pessoas a transportar. Quando essa condição não é atendida, as ruas serão alargadas, ou os veículos modificados, enfim mudanças de engenharia ou físicas serão postas em prática para atender aos requisitos de transporte. Na cidade de Ho Chi Minh a Ciência conhece o número de trabalhadores necessários para produzir 100 Kg de arroz diários, em condições sociais e técnicas dados. Pelas vias de comunicação que chegam ao trabalho passam os veículos e o tráfego normal é conhecido. As condições técnicas de trânsito dão os números que fixam os requisitos de tráfego das estradas. Eles podem ser superados ou não. Na inequação que vimos mais atrás o fluxo é maior ou igual ao requisito de fluxo dado. Estabelecemos que a condição é essa. Poderia ser outra. Para cada arco temos uma desigualdade. Como são $m = \frac{n(n-1)}{2}$ arcos, serão $\frac{n(n-1)}{2}$ desigualdades para cada intervalo de tempo, no máximo.

A inequação

$$Y_{ij} \geq Y^e_{ij} , \qquad t = 1, 2, \ldots , T \quad (i,j)$$

vale para todo arco. Como são $m = \frac{n(n-1)}{2}$ arcos serão $\frac{n(n-1)}{2}$ inequações para cada período de tempo t.

Qual o tamanho do problema que estamos resolvendo ?

Então o número de inequações é:

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(-1)}{2} =$$

$$= 1 + n + 3\ \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2 + 2n + 3|n(n-1)|}{2} =$$

$$= \frac{2 + 2n + 3n^2 - 3n}{2} = \frac{3n^2 - n + 2}{2}$$

Uma rede com 10 nós terá 146 inequações. Para vários períodos de tempo vamos ter um problema demasiado grande. O problema é de grande porte. Do ponto de vista computacional haverá dificuldades em resolver o problema com as técnicas normalmente usadas na Programação Linear.

É interessante falar ainda dos requisitos de fluxo. Eles podem ser invariáveis no tempo. Com a variação do tempo eles permanecem constantes. Por exemplo, são números reais inteiros e positivos. Como entender este fato tomando por base a realidade ?

É um caso abstrato, no domínio da mente humana, servindo como exemplo didático, sem aplicações reais. Nos trabalhos de engenharia os requisitos sempre variam com o tempo. Inclusive conhecer sua forma de variação, suas leis de correspondência em relação ao avanço tecnológico, sua variação sazonal, aleatória, ou determinística não constitui tarefa fácil. Pela Avenida Presidente Vargas passam táxis, carros de propriedade particular , ônibus de grandes empresas e caminhões, além de outros veículos , seres humanos e outros entes inanimados, que se movem com seus pés, ou por ação de agentes externos à sua própria constituição físico-química. É fácil medir o número de táxis que fluem pela avenida em um trecho determinado, nas várias horas do dia, das cinco horas da manhã à meia noite. A operação poderá ser repetida por vários dias, depois por meses e podemos ter a idéia do que ocorre durante os vários meses do ano. Depois ficamos sabendo como o fluxo de táxis vai ser nos outros anos, décadas e séculos, usando as medidas feitas , por exemplo, durante os vários meses de um ano. É certo que não ficaremos sabendo a longo prazo o que vai ocorrer, porque outros fatores intervirão no processo. No futuro já correrá o metropolitano, não haverá mais carros particulares, e os táxis continuarão existindo ? O que era realidade concreta passou a peça de museu. Fazemos estimativas, projeções, vislumbramos até onde a Ciência possa alcançar, correndo junto com erros e aproximações matemáticas do real. Quantificar um processo real, físico, e histórico que está acontecendo hoje, é diferente de realizar a mesma quantificação daqui a cem anos. Com os pés no chão, a mente lúcida, e com o interesse em obter alguns resultados vamos observar que os requisi tos de fluxo variam com os tempos.

Para tornar mais simples um problema podemos até assumir a sua variação discretizada no tempo. Em cada período de tempo o requisito de fluxo permanece constante. De madrugada vale cinco, à tarde vale nove, e de noite vale cem.

C A P Í T U L O III

III.1. O PROBLEMA DE SÍNTESE

Um problema de síntese pode ser entendido da maneira que descrevemos a seguir. Desejamos construir uma rede, e os dados são os requisitos de fluxo que devem ser atendidos para períodos especificados de tempo. A construção será feita dentro de um critério de custo mínimo de construção de arcos capacitados. Outra forma como enunciar o problema é a que segue: "Conhecido um conjunto de números r_{ij} , que representam os limites inferiores de fluxo máximo entre dois nós N_i e N_j, qual é a rede não orientada onde os fluxos f_{ij} satisfazem $f_{ij} \geq r_{ij}$ e cuja capacidade total de arco é mínima ?"

Vamos desenvolver a idéia de síntese usando este último enunciado.

Considerando os r_{ij} como comprimentos dos ramos do grafo, podemos formar uma árvore geradora máxima do grafo . Cabe perguntar : essa árvore existe e é única ? Ou teremos várias árvores para um mesmo grafo ? Seguiremos assumindo a existência de pelo menos uma árvore geradora máxima do grafo original.

Os requisitos associados com essa árvore geradora máxima chamaremos de requisitos dominantes, e a árvore geradora máxima é chamada de árvore dos requisitos dominantes.

A figura III.1.(a) representa os requisitos de fluxo na rede. A figura III.1.(b) é a árvore de requisitos dominantes que lhe corresponde.

Figura III.1.(a)

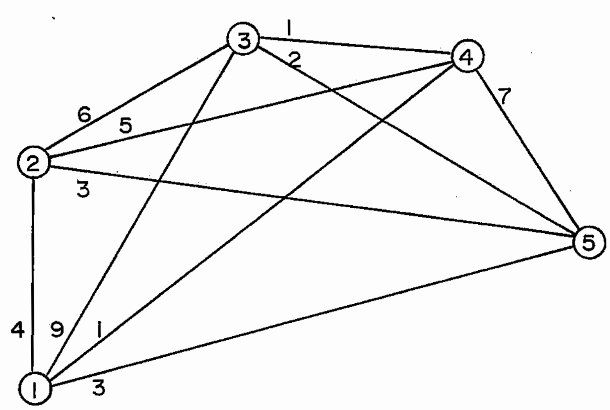
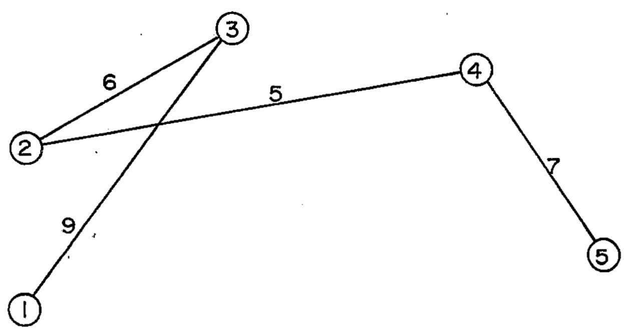


Figura III.1.(b)



Para que qualquer rede tenha $f_{ij} \geq r_{ij}$ para todo (i,j) é necessário e suficiente que $f_{ij} \geq r_{ij}$ para todo r_{ij} pertencente a T.

T - árvore dos requisitos dominantes.

A necessidade vemos da seguinte forma.

$$\forall\ (i,j)\ ,\quad f_{ij} \geq r_{ij}$$

Em particular para r_{ij} ε T, r_{ij} pertence ao conjunto dos requisitos originais. Falando com outras palavras, o conjunto dos requisitos de fluxo da árvore T é um subconjunto dos requisitos de fluxo da rede da figura III.1(a). Então, se $f_{ij} \geq r_{ij}$ para a rede original, para a árvore T também será válido $f_{ij} \geq r_{ij}$.

Para verificar a suficiência vejamos. O r_{ip} que falta satisfaz a seguinte relação :

$$r_{ip} \leq \min\ (r_{ij},\ r_{jK},\ \ldots\ ,\ r_{op})$$

onde r_{ij}, r_{jK}, ... , r_{op} são associados com os ramos que formam o caminho único em T de N_i para N_p. Em toda rede satisfazendo os requisitos dominantes, qualquer fluxo f_{ip} deve obedecer a:

$$f_{ip} \geq \min (f_{ij}, f_{jK}, \dots , f_{op}) \geq$$

$$\geq \min (r_{ij}, r_{jK}, \dots , r_{op}) \geq r_{ip}$$

Portanto, consideremos apenas os requisitos dominantes.

Sendo b_{ij} a capacidade de um arco qualquer da rede, a capacidade total de arco para uma rede não orientada é $\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} b_{ij}$. Vamos introduzir um limite inferior L_I para esta quantidade. Considere qualquer nó N_i desta rede. Seja $u_i = \max_j r_{ij}$. É o mesmo que dizer que u_i é o maior requisito de fluxo entre todos os que envolvem N_i. Qualquer rede que satisfaça aos requisitos deve ter capacidade igual ou superior a este requisito máximo em cada nó, para permitir a passagem do fluxo, ou seja $\sum_j b_{ij} \geq u_i$.

Para cada nó N_i escrevemos que $\sum_j b_{ij} \geq u_i$, pois se $\sum_j b_{ij} < u_i$, acontecerá que a rede não dará passagem ao fluxo. Para a rede toda, desde que um arco é contado duas vezes, uma vez em cada nó terminal, um limite inferior para a capacidade total de arco é:

$$L_I = \frac{1}{2} \sum_i u_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b_{ij}$$

Vamos descrever o procedimento de síntese para obter uma rede satisfatória neste limite inferior. Note que os u_i podem ser obtidos considerando apenas os requisitos dominantes, selecionando $\max_j r_{ij}$, para r_{ij} pertencente a T e adjacente a N_i. Considere uma árvore fixa T, com requisitos ligados r_{ij} e calculado o limite inferior L_I. Se os r_{ij} são substituídos por um novo conjunto de r'_{ij} obtemos um novo L'_I. Vamos fazer $r''_{ij} = r_{ij} + r'_{ij}$ como os requisitos associados com a mesma árvore e obter um novo L''_I. Então, em geral, temos:

$$L''_I \leq L_I + L'_I ,$$

desde que $\max_j r_{ij}$ e $\max_j r'_{ij}$ podem não coincidir em cada nó N_i. Mas se r_{ij} (ou r'_{ij}) são requisitos uniformes, isto é, se $r_{ij} = r$ para todos os r_{ij} em T, então

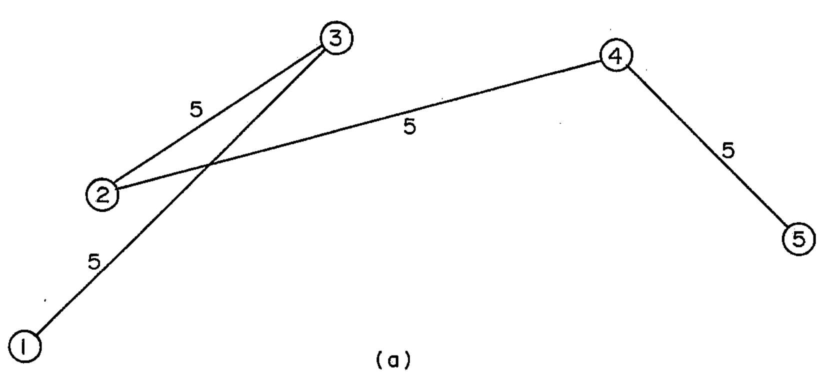
$$L''_I = L_I + L'_I$$

Considere duas redes, uma com capacidade de arco b_{ij} e fluxo máximo f_{ij}, a outra com b'_{ij} e f'_{ij}, para as mesmas grandezas. Se formamos uma terceira rede com capacidade de arco $b''_{ij} = b_{ij} + b'_{ij}$, então o fluxo máximo na terceira rede será

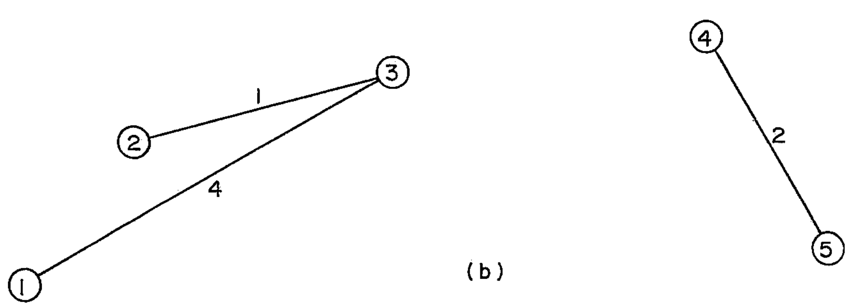
$$f''_{ij} \geq f_{ij} + f'_{ij}$$

Seja T a árvore de requisitos dominantes que vamos satisfazer. Seja r_{min} o menor requisito na árvore e escrevemos qualquer r_{ij} como $r_{min} + (r_{ij} - r_{min})$. Podemos considerar a árvore original como a superposição de duas árvores, uma com requisitos uniformes r_{min} e a outra com $r_{ij} - r_{min}$. Exemplo disso é a árvore da figura III.1.(b). Podemos considerá-la como superposição da figura III.2.(a) e (b).

Figuras III.2.(a) e (b)

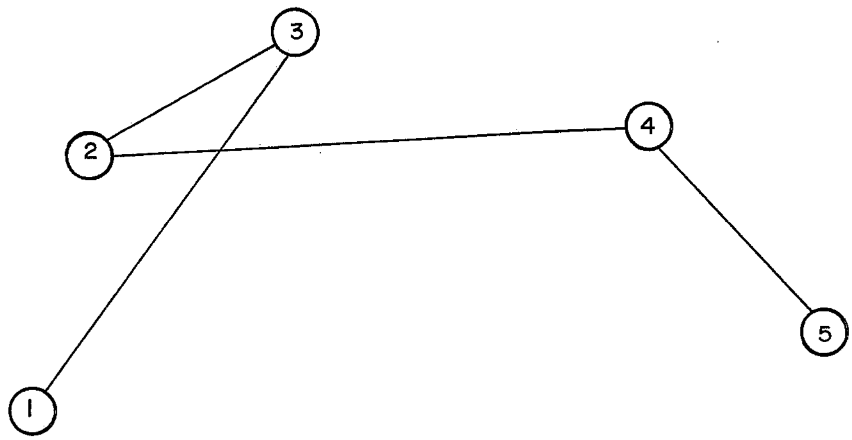


(a)



(b)

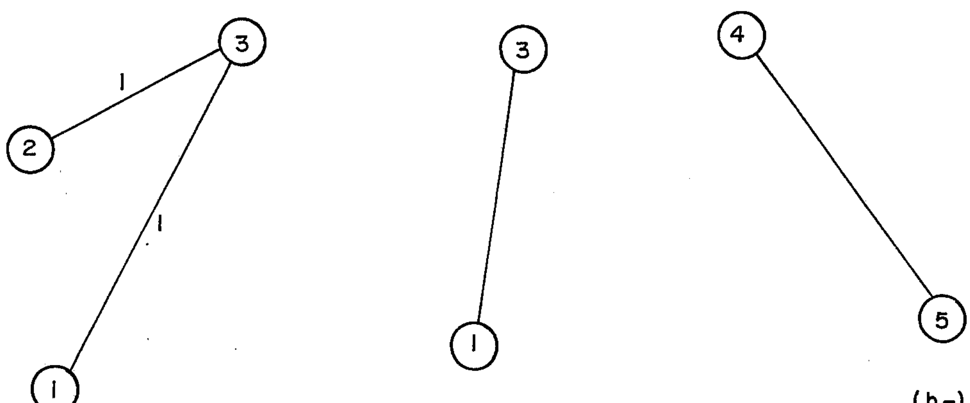
Figura III.3.(a)



(a)

Para cada parte da árvore sem requisitos uniformes, o procedimento de decomposição pode ser continuado até que cada parte tenha requisitos uniformes. Por exemplo, a figura III.2 pode ser decomposta na figura III.3..

Figura III.3.(b)

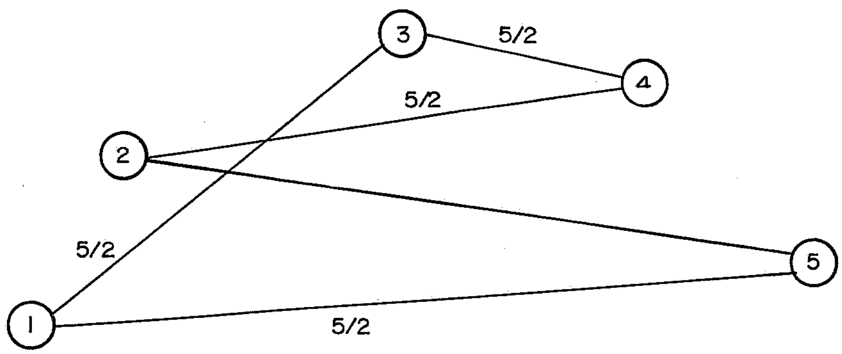


(b_1) (b_2) (b_3)

Usamos a expressão "sintetizar uma árvore" para dizer "construir uma rede com fluxo máximo maior ou igual que os requisitos de fluxo na árvore." Depois que uma árvore é decomposta numa soma de árvores uniformes, podemos sintetizar cada árvore uniforme individualmente. Se cada árvore uniforme pode ser sintetizada no limite inferior L_I que lhe corresponde, então a superposição de cada rede satisfatória dará uma rede capaz de satisfazer os requisitos originais e com uma capacidade total de arco mínima. Portanto, o problema se reduz a sintetizar uma árvore uniforme com requisitos todos iguais a r. Isto pode ser feito desenhando qualquer ciclo através dos nós e depois atribuindo $\frac{r}{2}$ a cada arco no ciclo. Quando há apenas dois nós, um arco simples de capacidade r é usado.

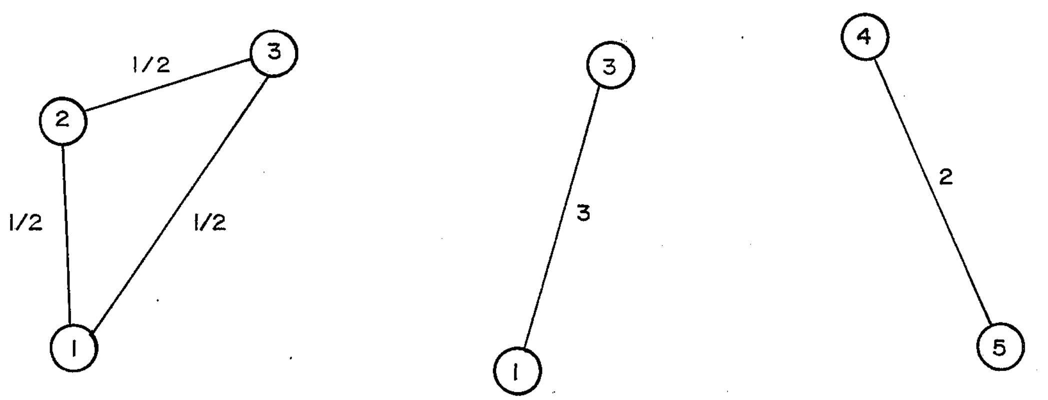
Vejamos um exemplo, a figura III.3.. Cada uma das árvores pode ser sintetizada como vemos na figura III.4. Depois de superpor as redes dessa figura III.4. obtemos a figura III.5., que é uma rede satisfazendo todos os requisitos da figura III.1(a) e de capacidade total de arco mínima.

Figura III.4.(a)



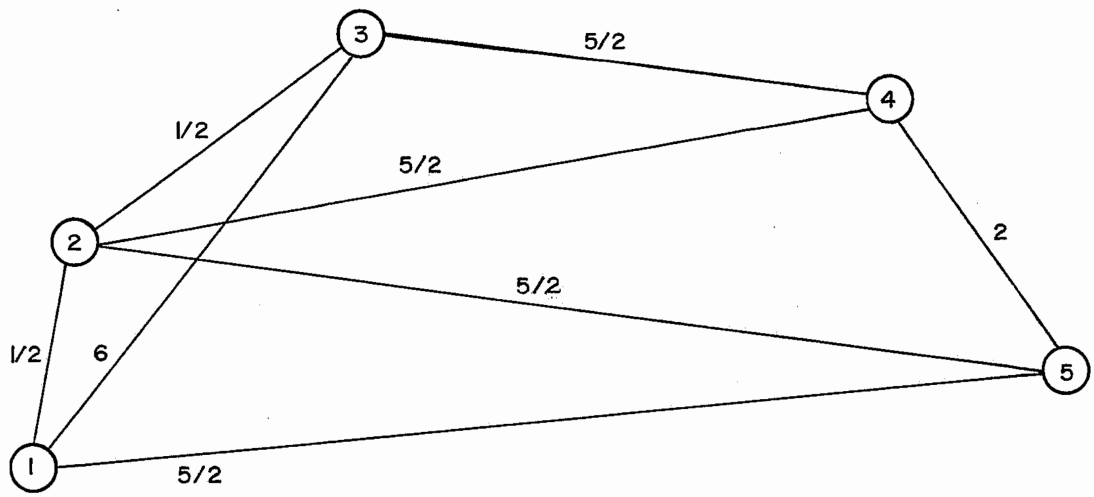
(a)

Figura III.4.(b)



(b_1) (b_2) (b_3)

Figura III.5.



III.2. SÍNTESE DE UMA REDE DE COMUNICAÇÕES

A rede que vai ser estudada pode ser pensada como um modelo abstrato de uma rede de comunicações com os nós correspondendo a estações e as capacidades de arcos a capacidades de linhas. Os fluxos podem ser interpretados como o número de chamadas telefônicas entre estações. Correspondem aos fluxos de mensagens em uma rede telefônica. Como as chamadas tem origem e destino definidos, os fluxos das chamadas são fluxos de multicomodidades divididas pelas linhas da rede. Uma estrutura de comunicações deve ser capaz de transmitir fluxos em todos os instantes.

Sejam:

f_{pq} - valor do fluxo da origem N_p ao destino N_q

x_{ij}^{pq} - fluxo através do arco A_{ij} com origem N_p e destino N_q.

Pela conservação de fluxo:

$$\sum_i x_{ij}^{pq} - \sum_K x_{jK}^{pq} = \begin{cases} -f_{pq}, & j = p \\ 0, & j \neq p,q \\ f_{pq}, & j = q \end{cases} \qquad (1)$$

Sendo y_{ij} a capacidade do arco A_{ij} :

$$\sum_{p,q} x_{ij}^{pq} \leq y_{ij} \qquad \forall\, i, j \qquad (2)$$

Sejam $r_{pq}(t)$ os fluxos requeridos de N_p para N_q no tempo t. O fato de que a rede satisfaz todos os fluxos em todos os tempos dá:

$$r_{pq}(t) \leq f_{pq} \qquad \forall p,q, \quad \forall t = 1, \ldots, T \qquad (3)$$

Vejamos como é o problema de síntese. Conhecemos os r_{pq} (t). Queremos encontrar y_{ij} tal que (1), (2) e (3) sejam satisfeitos com o custo total $\sum c_{ij}\, y_{ij}$ mínimo.

c_{ij} - custo para construir um arco de capacidade unitária de N_i para N_j.

Numa rede real os fluxos requeridos podem ser de três tipos:

1. Independem do tempo, isto é, $r_{pq}(t)$ não dependem de t.

A síntese da rede é um problema de caminho mínimo. Usando os custos c_{ij} como distâncias, nós procuramos o caminho mínimo para cada par de nós. Então construímos arcos com capacidade tal que possam passar os fluxos requeridos, ao longo desses caminhos mínimos. A rede final é obtida por superposição.

2. Requisitos completamente distribuídos no tempo.

Então o tempo é dividido em vários períodos, e durante um período genérico há apenas um fluxo passando entre cada par de nós.

Para fazer a síntese, no caso de redes não orientadas, um enfoque de programação linear pode ser usado .

Dá um grande programa linear com muitas linhas. O tamanho da matriz é reduzido pela geração apenas das linhas necessárias para a computação. Aqui o cálculo auxiliar de gerar linhas é do tipo de fluxo máximo.

3. Requisitos variando no tempo. É o caso mais geral.

Vamos estudar a colocação matemática do problema de síntese, para um período de tempo t. Seguindo vem um procedimento para resolução prática.

Sejam:

$y = (y_1, \dots, y_m)$ - vetor de m componentes, cada componente representando a capacidade de um arco, numa rede de m arcos.

V - vetor de m componentes representando uma rede capaz de conduzir os fluxos simultâneos no tempo t. V forma um politopo convexo ilimitado num espaço de m dimensões.

V_i - pontos extremos do conjunto convexo. Então, existe pelo menos um ótimo V tal que:

$$V = \sum_i \lambda_i V_i \qquad \sum \lambda_i \geq 1 \tag{4}$$

Para que y satisfaça aos requisitos de fluxo em cada período de tempo é necessário e suficiente que y contenha uma rede V para cada t.

Seja $c = (c_1, \ldots, c_m)$ o vetor custo dos arcos. Então o problema de síntese é:

$$\min c.y$$

sujeito a:

$$y \geq \sum_i \lambda_i V_i \tag{5}$$

$$1 \leq \sum_i \lambda_i$$

Nesse problema y e λ_i são desconhecidos. Assumimos que os V_i são conhecidos, e c é dado. Teremos (m+1)T linhas e um grande número de colunas, uma coluna para cada V_i. Podemos reescrever (5) como sendo:

$$\sum_i \lambda_i (V_i, -1) \leq (y, -1) \tag{6}$$

Pelo lema de Minkowski-Farkas, ou a desigualdade $Ax \leq b$ tem uma solução não negativa ou as desigualdades $yA \geq 0$ e $yb < 0$ tem uma solução não negativa. Colocando-o de modo ligeiramente diferente, a desigualdade $Ax \leq b$ tem uma solução não negativa se e somente se para todo $\pi \geq 0$, $\pi A \geq 0$ implica $\pi b \geq 0$.

Apliquemos esse lema a (6). Nós teremos que (6) tem uma solução não negativa λ_i para um dado y se e só se existe um não negativo $(\pi_1, \bar{\pi}_0)$ tal que

$$\begin{aligned} &(\pi_1 , \bar{\pi}_0) (V_i, -1) \geq 0, \quad \forall i \\ &(\pi_1 , \bar{\pi}_0) (y, -1) \geq 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Seja:

$$\bar{\pi}_0 = - \pi_0$$

$\pi = (\pi_1 , \pi_o)$. Então (7) equivale a:

$$\begin{aligned} &(\pi_1 , \pi_0) (V_i, 1) \geq 0 , \quad \forall i \\ &(\pi_1 , \pi_0) (y, 1) \geq 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

π_1 - vetor não negativo de m dimensões.

π_0 - escalar não positivo.

Os vetores π que satisfazem a (8) também formam um politopo convexo ilimitado, de modo que há um número finito de vetores π_i representando os pontos extremos. Em qualquer período t, existe π, que pode ser expresso como combinações positivas de π_i.

Portanto, podemos reformular o problema (5) como :

$$\begin{aligned} &\min c.y \\ &\text{sujeito a:} \\ &\pi_i(y, 1) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots , m \end{aligned} \tag{9}$$

Em (9) há m variáveis mas um número enorme de linhas, uma para cada π_i. Se nós listamos todos os π_i, então (9) pode ser resolvido como um programa linear.

O problema é gerar os π_i que representam coeficientes de inequações não satisfeitas pelas corrente y. Há dois modos de resolver (9). O enfoque dual, que consiste de duas partes. A parte principal é um quadro dual simplex, que começa com uma solução dual viável y sujeita às inequações que não são satisfeitas pelas corrente y. A parte auxiliar fornece as inequações para a parte principal. Para começar o cálculo da parte principal nós usamos qualquer solução dual viável, por exemplo, y = = (0, 0, ... , 0), que é certamente dual viável, desde que nós assumimos que c > 0. A esta altura não temos ainda inequações geradas pela parte auxiliar, e não podemos dar um passo no simplex da parte principal. Este y é então enviado para a parte auxiliar, onde queremos:

$$\max \quad \theta = \sum \lambda_i$$

sujeito a

$$y \geq \sum \lambda_i \ V_i \qquad i = 1, 2, \ldots , m \tag{10}$$

y é dado pela parte principal; desconhecemos os λ_i. Para começar o cálculo nós podemos usar qualquer rede V_i viável.

Resolvendo (10) podemos encontrar:

1. $\theta \geq 1$, significando que o corrente y é viável para este período t. Se $\theta \geq 1$ para todo t, então y é ótimo.

2. Nós conseguimos um vetor preço π_i tal que π_i é a solução do dual de (10):

$$\pi_i y = \theta < 1$$

$$\pi_i V_i \geq 1$$

Seja $\pi = (\pi_i, -1)$. Nós temos

$$\pi (y, 1) < 0$$
$$\pi (V_i, 1) \geq 0 \qquad (11)$$

Esta $\pi (y, 1) < 0$ é então uma inequação que não é satisfeita pelo corrente y e pode ser adicionado à parte principal. Notar que (10) é um programa linear muito grande, desde que há uma coluna para cada V_i. A fim de gerar essas colunas, nós usamos os preços π_i, dos arcos obtidos de (10), isto é, tomando um novo V_i, e vetores de folga como base. O V_i^K que não está na base e pode ser trazido para a base é tal que

$$\pi_i V_i^K \leq 1$$

Nós queremos a coluna para a qual $\pi_i V_i^K$ é mínimo. Mas este é o problema de síntese do tipo 1) discutido atrás. Nós podemos usar π_i como comprimentos dos arcos e procurar os caminhos caminhos entre todos os pares de nós para formar a coluna V_i^K. Em resumo, este algoritmo dual consiste de duas partes: na parte principal, usamos um simplex revisado dual para resolver

$$\min \quad z = c.y$$

sujeito a

$$\pi_i \, y \geq 1 \,, \qquad i = 1, 2, \ldots , m$$

$$y \geq 0$$

onde os coeficientes das inequações $\pi_i \, y$ são fornecidos pela parte auxiliar, ou de outras considerações, tais como o fato de que a capacidade total dos arcos incidentes não pode ser menor que a soma dos requisitos de fluxos que envolvem o nó. Depois de um número finito de passos no simplex dual, y é primal e dual viável com relação ao conjunto de inequações. Este y é então transmitido para a parte auxiliar. Na parte auxiliar, um simplex revisado primal é usado para resolver (10), onde y é dado pela parte principal. A coluna V_i que deve ser gerada para aumentar o valor de θ é dada por um algoritmo de caminho mínimo usando preços obtidos no simplex revisado primal com os comprimentos dos arcos. Se $\theta \geq 1$ para todos os períodos t = 1, ..., T, então a rede é ótima. Se, depois de um número finito de iterações com o simplex revisado, tivermos

$$\pi_i \, y = \theta < 1 \qquad e \qquad \pi_i \, V_i^K \geq 1 \,,$$

para todo V_i^K , então $\pi_i\, y \geq 1$ é a inequação desejada na parte principal.

Este algoritmo de síntese poderá ser aplicado, com ligeiras modificações, para o problema de ampliação. Em |6| e |29| existem exemplos resolvidos.

Um problema de síntese como este é de tamanho grande. Porque estamos pesquisando num espaço de m dimensões e para períodos de tempo que podem ser as horas de um dia, de um mês , ou ainda para extensões maiores de tempo. Técnicas específicas, adequadas a problemas de grande porte, podem ser usadas ? O algoritmo visto páginas atrás terá várias tabelas, seja na parte principal, seja na parte auxiliar, para cálculos feitos manualmente. É interessante levá-lo para a execução computacional, onde prováveis vantagens virão.

B I B L I O G R A F I A

L I V R O S

|1| Fike, C.T.
PL/I for cientific programmers

|2| Ford, L.R. and Fulkerson, D.R.
Flows in networks

|3| Furtado, Antonio Luz
Teoria dos grafos algoritmos - 1973

|4| Gass, Saul I.
Linear Programming

|5| Goddard, L.S.
Técnicas matemáticas de investigación operacional - 1969
Tradução espanhola de Cristina Martínez Calvo e Alberto Perez de Vargas.

|6| Hu, T.C.
Integer programming and network flows - 1969

|7| Rockafellar, R. Tyrrell
Convex Analysis - 1970

|8| Simonnard, Michel
Linear Programming - 1966

A R T I G O S E S T R A N G E I R O S

|9| Bellmore, Mandell e Vemuganti, Ramakrishna
On multi-commodity maximal dynamic flows - Operations Research - Julho 1971

|10| Dantzig, G.B.
On the shortest route through a network - Man. Sci. 6, 1960

|11| Douliez, Pierre J. e Rao, M.R.
Maximal flow in a multi-terminal network with any one arc subject to a failure - Man. Sci. vol. 18, nº 1, Setembro 1971

|12| Dreyfus, Stuart E.
An appraisal of some shortest - path algorithms - Operations Research, Maio, Junho 1969 - vol. 17, nº 3.

|13| Floyd, R.W.
Algorithm 97: shortest path - Communication of ACM 5, 1962.

|14| Ford, L.R. e Fulkerson, D.R.
A suggested computation for maximal multi-commodity network flows - Man. Sci. 5, 1958.

|15| Fulkerson, D.R.

Increasing the capacity of a network, the parametric budget problem - Man. Sci. 5, Julho 1959.

|16| Gomory, R.E. e Hu, T.C.

Synthesis of a communication network - J. SIAM, Junho 1964.

|17| Gomory, R.E. e Hu, T.C.

An application of generalized linear programming to network flows - J. SIAM 10, Junho 1962.

|18| Gomory, R.E. e Hu, T.C.

Multi-terminal network flows - J. SIAM 9, 1961.

|19| Grinold, Richard C.

Calculating maximal flows in a network with positive gains.

|20| Hu, T.C.

Decomposition algorithm for shortest-paths in a network - J. ORSA 16 - Janeiro/fevereiro 1968.

|21| Hu, T.C.

Multi-commodity network flows

|22| Hu, T.C.

Revised matrix algorithms for shortest paths in a network - J.SIAM 15, Janeiro 1967.

|23| Johnson, Donald B.
A note on Dijkstra's shortest path algorithm.

|24| Jarvis, John J. e Miller, Duane D.
Maximal funnel node flow in a indirected network - Oper. Research 1971.

|25| Korsak, Andrew
An algorithm for globaly - optimal non linear cost multidimensional flows in network anal some special applications - Oper. Research, Março 1971.

|26| Minieka, Edward
Maximal lexicographic and dynamic network flows - Operations Research , Abril 1971

|27| Yen, Y. Jin
Finding the k - shortest loopless paths in a network - Man. Sci. vol. 17, nº 11, Julho 1971.

T R A B A L H O S   B R A S I L E I R O S

|28| Pacca, Henrique Loureiro Luna e Carvalho, Osvaldo Sergio Farhat Algoritmo Berge para cálculo de distâncias mínimas e rotas de nó para nó em uma rede. - CECOM - UFMG - 1974.

|29| Charifker, Israel
Ampliação a custo mínimo de uma rede existente para satisfazer a requisitos de fluxo simultâneos ou não simultâneos - Tese de Mestrado - COPPE/UFRJ - 1972.

|30| Sá, Graciano
Uma variante "Out-of-kilter" do método primal de Balinski para o problema do transporte - IPEA

C O M E N T Á R I O D E A R T I G O S

Os livros, artigos estrangeiros e trabalhos brasileiros listados são um ligeiro apanhado de matérias publicadas no terreno geral de Teoria de Redes, Grafos, Programação Linear, etc. A bibliografia existente é muito vasta e diversificada. Nos casos estudados predominam enfoques teóricos. A obtenção de resultados, na forma de algoritmos programados em linguagem computacional, de problemas resolvidos numericamente, de exemplos reais de engenharia, ligados a empresas, a fábricas ou às sociedades é escassa. Alguns exemplos vão a seguir. Na leitura de "Finding the k - shortest loopless paths in a network" de Jin Y. Yen, Man. Sci. vol. 17, Julho de 1971, é feita a apresentação de um algoritmo para achar os k - caminhos sem ciclos que tenham os menores comprimentos de um nó para outro nó em uma rede. A importância do novo algoritmo é que seu limite superior de computação cresce linearmente com o valor de K. Daí sua eficiência quando comparado com os algoritmos propostos por Bock, Kantner e Haynes, Pollack, Clark, Krikorian e Rausan, Sakarovitch e outros. Não usa arcos capacitados. Estuda distância de nó a nó.

O trabalho analisa os algoritmos conhecidos de k - caminhos mais curtos, em termos de esforço computacional e capacidade de memória que eles requerem. No artigo de Stuart E.Drey fus "An appraisal of some shortest-path algorithms", Operations Research, Maio-Junho 1969, vol. 17, cinco, problemas de caminho mínimo são estudados:

a) Determinar o menor caminho entre dois nós especificados de uma rede.

b) Determinar o menor caminho entre todos os pares de nós da rede.

c) Idem, para o segundo, terceiro, quarto, etc. caminhos mais curtos.

d) Determinar o caminho mais rápido através de uma rede com tempos de percurso dependendo do "tempo de partida".

e) Determinar o caminho mais curto visitando nós especificados.

Pierre J. Douliez e M.R. Rao em "Maximal flow in a multi-terminal network with any one arc subject to a failure", Man. Sci. vol. 18, setembro de 1971, estudam uma rede multi-terminal. Essa rede consiste de vários nós de demanda ligados a uma fonte comum através de vários nós intermediários. Os requisitos para os nós de demanda são funções não decrescentes no tempo. Pode-se encontrar o tempo máximo para o qual as demandas possam ser satisfeitas. Dois métodos são dados para resolver o problema quando as ca pacidades de arco são especificadas. O mesmo problema é considerado quando um arco genérico pode falhar, isto é, pode assumir uma capacidade mais baixa. O trabalho de Henrique Pacca Loureiro Luna e Osvaldo Sérgio Farhat de Carvalho, Programa Berge, CECOM-UFMG, permite determinar a distância mínima entre um nó i e um nó j quaisquer. Pesquisa a rota a seguir para ir do nó i ao nó j . Pesquisa também a mesma situação para todos os pares de nós da rede. Como o problema é de determinar distâncias e rotas, não se fala de arcos capacitados (o problema não é de fluxos). Apresentam um programa (algoritmo) em PL/I que resolve o problema proposto. Importante a clareza na definição de objetivos, método para resolver o problema, entrada de dados e saída da resposta.

A P E N D I C E

RELAÇÃO ENTRE PROGRAMAÇÃO LINEAR E FLUXO EM REDES

Todo problema de fluxo em redes pode ser formulado como um problema de programação linear. Seja a rede da figura A.1.

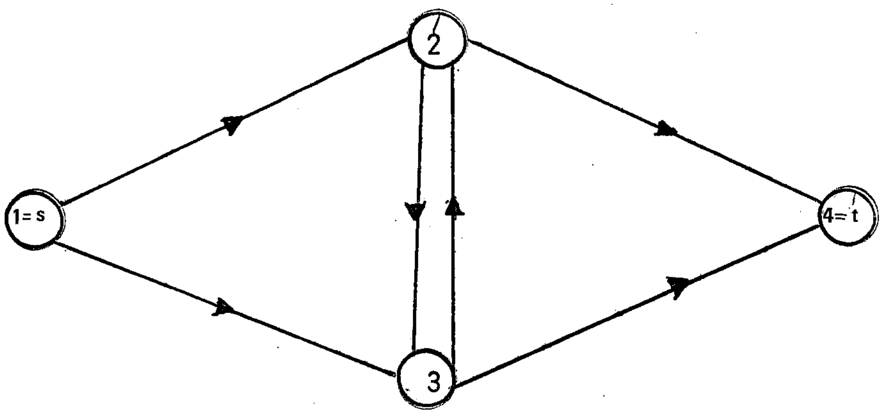


Figura A.1.

Temos seis variáveis $x_{s_2}, x_{s_3}, \ldots, x_{3_t}$, os fluxos nos arcos.

O problema de fluxo máximo pode ser tratado como um problema de programação linear:

$$\max \quad z = cx$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{aligned} Ax &= 0 \\ A'x &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$x = (v, x_{s_2}, x_{s_3}, x_{2_3}, x_{3_2}, x_{2_t}, x_{3_t})$$

$$c = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

A é uma matriz n x (m + 1)

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A' é a uma matriz m x (m + 1)

$$b = (b_{s_2}, b_{s_3}, b_{2_3}, b_{3_2}, b_{2_t}, b_{3_t})$$

m - número de arcos

n - número de nós

A estrutura de A é interessante. Cada coluna de A tem duas entradas não nulas, +1 e -1, e pela sua estrutura, a matriz A de n linhas é de posto n-1. Fisicamente, cada linha de A corresponde a equação de conservação de fluxo em cada nó. Outra propriedade de A é que cada subdeterminante de A é igual a +1, -1, -1, ou zero. A isto chamamos a propriedade totalmente unimodular, que garante uma solução ótima inteira se o vetor b é totalmente inteiro.

Num programa linear as variáveis associadas com algumas colunas da matriz de restrições são chamadas variáveis não básicas ou variáveis independentes, porque seus valores podem ser tomados arbitrariamente. Os valores das variáveis básicas são então determinados univocamente pelas variáveis não básicas. Se nós arbitrarmos os fluxos nos arcos numa rede sem restrições de capacidade, então as equações de conservação de fluxo podem não ser satisfeitas para cada nó. Portanto, entre todos os arcos incidentes em um nó, o fluxo de arco em um arco não pode ser arbitrado, mas é determinado pela equação de conservação. Se nós considerarmos todos os arcos cujos fluxos são determinados de modo único pelo resto dos fluxos dos arcos, então todos estes arcos formarão uma árvore geradora. Vejamos. Entre todos os fluxos de arcos incidentes em um nó, um fluxo de arco deve ser determinado através do resto dos fluxos dos outros arcos, a fim de satisfazer a equação de conservação de fluxo. Desde que há n-1 equações de conservação de fluxo independentes, então há n-1 de tais arcos. Estes n-1 arcos não podem formar ciclos porque não se pode adicionar flu xo no ciclo sem violar a equação de conservação de fluxo. Isto contradiz que os fluxos destes $n-1$ arcos sejam determinados de modo único. Portanto, para uma rede sem capacidades de arco, os fluxos nos arcos em uma árvore geradora são as variáveis básicas.

Considere uma rede sem capacidade de arcos, ou seja, queremos apenas que $Ax = 0$ e $x \geq 0$. Seja conhecido o custo de transportar uma unidade de fluxo ao longo de cada arco, custo esse associado a cada arco. Se queremos transportar uma dada quantidade de fluxo em uma rede, de um nó origem para um nó destino, com custo mínimo, então é claro que transportaremos todo o fluxo ao longo de um caminho simples, o caminho de custo mínimo. Desde que um caminho da origem para o destino geralmente contém menos do que $n-1$ arcos, o número das variáveis básicas não nulas é menor que $n-1$. Isto significa que o problema tem uma solução básica ótima que é altamente degenerada. Para uma rede com restrições de capacidade, temos que adicionar a equação $A'x \leq b$ ao conjunto das equações. Introduziremos m variáveis de folga. Teremos $n-1+m$ equações independentes. E agora, tentando transportar uma dada quantidade de fluxo da origem para o destino, a custo mínimo, podemos não conseguir usar apenas um único caminho. Mas o número de variáveis básicas não nulas é sempre menor que $n-1+m$, o que significa que também é um problema degenerado.