PROJETO DE OBSERVADORES COM TOLERÂNCIA ESPECIFICADA

Isahilde Guimarães Trindade

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

Profº Shankar P. Bhattacharyya

Profº Nelson Maculan Filho

Profº Rajamani Doraiswami

ESTADO DO RIO DE JANEIRO-BRASIL
SETEMBRO DE 1976

A G R A D E C I M E N T O S

* Agradeço a meu orientador Ph.D. SHANKAR P. BHATTACHARYYA pela paciência, dedicação e encorajamento durante os meses em que trabalhamos juntos.

* Agradeço aos Professores D.Sc. NELSON MACULAN FILHO e Ph.D. RAJAMANI DORAISWAMI pelo apoio tão valioso, aos colegas da COPPE, dos Institutos de Matemática da UFRJ e da UFF pelo incentivo recebido.

* À Stavna, o meu muito obrigada pelo trabalho paciente e competente de datilografia.

RESUMO

Para o sistema linear, livre, invariante no tempo descrito por

$$\overset{o}{x}(t) = A_0\, x(t)$$
$$y(t) = C_0\, x(t)$$
$$t \geqslant 0 \qquad x(0) = x_0$$

precisamos projetar um observador descrito por

$$\overset{o}{z}(t) = N_0 z(t) + L_0\, y(t)$$

que estime $V_0 x(t)$.

Este trabalho propõem-se a:

- Determinar, analiticamente os elementos de V_0 através do conhecimento de A_0, C_0, N_0, L_0.

- Determinar analiticamente os elementos de δV, perturbação ocorrida em V_0, através do conhecimento de δA, δC, δN, δL, perturbações existentes em A_0, C_0, N_0, L_0, respectivamente.

- Determinar sob que condições será possível projetar um observador que faça com que as perturbações resultantes em V_0 fiquem situadas dentro de um hipercubo pré-determinado.

ABSTRACT

For the linear, free and time-invariant systems

$$\overset{o}{x}(t) = A_0\ x(t)$$

$$y(t) = C_0\ x(t)$$

we specify to ptoject an observer

$$\overset{o}{z}(t) = N_0 z(t) + L_0 y(t)$$

which estimates $V_0 x(t)$.

This work proposes:

- to establish analytically the elements of through the knowledge of δA, δC, δN, δL, perturbations in A_0, C_0, N_0, L_0, respectively.

- to establish under what conditions it will be possible to project an observer which makes the perturbations in V_0 remaining within a predetermined hypercube.

ÍNDICE

CAPÍTULO .I.

CAPÍTULO .II.

CAPÍTULO .III.

CAPÍTULO I

1.1 - Objetivo

O objetivo desta pesquisa é determinar condições que possibilitem o projeto de um observador dinâmico de maneira que, conhecido o intervalo de variação das perturbações que eventualmente ocorram no sistema observado ou no próprio observador que deverá ser projetado, seja possível manter as perturbações ocorridas na resposta encontrada dentro de um intervalo prefixado.

1.2 - Sumário da Tese

No restante deste capítulo encontramos a notação e terminologia usadas, uma apresentação suscinta da equação que governa o observador

$$N_0V_0 - V_0A_0 + L_0C_0 = 0 \qquad (12.1)$$

assim como, uma solução para a equação (12.1) quando A_0 matriz nxn estiver representada em forma de Jordan, N_0 matriz rxr estiver representada em forma de Jordan de um único bloco, L_0 matriz rxm e C_0 matriz m x n.

No capítulo II apresentamos os efeitos provocados pelas perturbações ocorridas no sistema e no próprio observador, sobre V_0.

No capítulo III determinamos as condições que farão com que as perturbações em V_0 mantenham-se dentro de um intervalo prefixado.

1.3 - Notação e Terminologia

Os capítulos desta tese são denotados por algarismos romanos e divididos em seções. Dentro de cada seção poderão ser encontradas definições, proposições, teoremas, corolários, observações e exemplos numéricos. Definições, proposições, teoremas, observações e exemplos são numerados consecutivamente em cada capítulo e seção, desta forma o sexto teorema ou qualquer dos acima citos da seção 4 do capítulo III, será denotado por (3.4.6). Os colorários receberão o mesmo número do teorema que lhe deu origem seguido da ordem em que este aparece, assim, o terceiro corolário do teorema 2.5.6, por exemplo, será denotado por (2.5.63). As equações serão numeradas consecutivamente em cada capítulo e seção, portanto, a oitava equação apresentada no capítulo III seção 2 será denotada por (32.8). Como temos apenas três capítulos neste trabalho a notação adotada não apresentará nenhum incoveniente.

Simbolismo Usado:

A, B, C, ... - Matrizes Constantes

$m \times n$	- Dimensão de uma matriz (m linhas e n colunas).
A'_j	- Transposto do Vetor A_j
A^{-1}	- Matriz inversa de A
$\lvert\ \rvert$	- Barras que delimitam uma matriz quando esta for representada por alguns de seus elementos ou pela lei de formação desses elementos.
vec A	- É a matriz A(m x n) escrita em forma de um vetor coluna $\begin{vmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ \vdots \\ A'_n \end{vmatrix}$ onde A_j é a j-ésima linha de A.
a_{ij}	- Elemento da matriz A que ocupa a i-ésima linha e j-ésima coluna.
δa_{ij}	- Perturbação que atua sobre o elemento a_{ij} da matriz A.
δA	- Matriz com a mesma dimensão da matriz A tal que seus elementos são os δ_{aij}.
$\otimes$	- Produto de Kronecker.
$\bar{k}$	- Conjunto formado por todos os números naturais não nulos ou iguais a k.

R_+^* - Conjunto de todos os números reais positivos não nulos.

1.4 - Noções Básicas sobre Observadores de Estado

Dado um sistema linear invariante no tempo

$$\overset{0}{x}(t) = A_0 x(t) \tag{14.1}$$

$$y(t) = C_0 x(t) \tag{14.2}$$

$$t \geqslant 0 \quad x(o) = x_0$$

onde:

A_0 - Matriz constante (n x n)

C_0 - Matriz constante (m x n)

Podemos construir um observador, segundo (1) com estrutura:

$$\overset{0}{z}(t) = N_0 z(t) + L_0 y(t) \tag{14.3}$$

$$t \geqslant 0 \quad z(o) = z_0$$

onde:

N_0 - Matriz constante (r x r)

L_0 - Matriz constante (r x m)

Se o observador é projetado para estimar V_0x, onde V_0 é matriz $r \times n$, então o erro definido por

$$e(t) \equiv z(t) - V_0x(t) \tag{14.4}$$

tem que tender para zero rapidamente, para todas as condições iniciais x_0 e z_0; para isso N_0 deverá ter seus autovalores com a parte real bem negativa.

De (14.1), (14.3), (14.4) resulta

$$\dot{e}(t) = N_0e(t) + (N_0V_0 - V_0A_0 + L_0C_0)\ x(t)$$

$$t \geqslant 0$$

que implica em

$$N_0V_0 - V_0A_0 + L_0C_0 = 0 \tag{14.5}$$

Sobre a equação (14.5), por (3), sabe-se:

a) Seja matriz $W = \begin{vmatrix} N_0 & L_0C_0 \\ 0 & A_0 \end{vmatrix}$

Se os divisores elementares de N_0 juntamente com os divisores elementares de A_0 são exatamente os divisores elementares de W então a equação (14.5) tem solução.

b) Se (a) é verdadeiro e o espectro de N_0 é disjunto do espectro de A_0 então (14.5) tem solução única.

Tendo obtido o valor de

$z(t) = V_0 x(t)$

e conhecendo o valor

$y(t) = C_0 x(t)$ por (14.2)

podemos encontrar o valor das variáveis de estado $x(t)$

$$\begin{vmatrix} y(t) \\ z(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_0 \\ V_0 \end{vmatrix} x(t)$$

$$x(t) = \begin{vmatrix} C_0 \\ V_0 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$$

Concluímos que:

O observador de estado projetado, representado pelo par (N_0, L_0), deve satisfazer as seguintes condições:

a) A existência de V_0 satisfazendo a equação (14.5).

b) O espectro de N_0 deverá ser bastante estável

c) O posto da matriz $\begin{vmatrix} C_0 \\ V_0 \end{vmatrix}$ deverá ser igual a n.

Esta última condição permite-nos estabelecer a ordem mínima do observador a ser projetado que será dada por

$$r = n - m.$$

1.4.1 - Definição

Seja A_j a j-ésima linha da matriz A (m x n). O vetor coluna (mn x 1), representado por vec A é definido como

$$\text{vec } A = \begin{vmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m' \end{vmatrix}$$

1.4.2 - Definição

Se $A = (a_{ij})\ \begin{matrix} i \in \bar{m} \\ j \in \bar{n} \end{matrix}$ é matriz (m x n) e B é matriz (s x t), a matriz produto de Kronecker $A \otimes B$ é uma matriz (ms x nt) definida como

$$A \otimes B = (a_{ij}B)\ \begin{matrix} i \in \bar{m} \\ j \in \bar{n} \end{matrix}$$

Usando as definições (1.4.1) e (1.4.2) assim como resultado encontrado em (2) podemos reescrever a equação (14.5) da seguinte maneira:

$$(N_0 \otimes I_n - I_r \otimes A_0') \text{ vec } V_0 + \text{vec } L_0C_0 = 0 \qquad (14.6)$$

Ainda por (2) sabemos que (14.6) tem solução única, qualquer que seja L_0C_0, se somente se $\beta_i - \alpha_j \neq 0 \quad i \in \bar{r}$ e $j \in \bar{n}$ onde:

β_i são os autovalores da matriz N_0, e

α_j são os autovalores da matriz A_0

Se esta condição se verifica

$(N_0 \otimes I_n - I_r \otimes A_0')$ é não singular, portanto

$$\text{vec } V_0 = -(N_0 \otimes I_n - I_r \otimes A_0')^{-1} \text{ vec } L_0C_0 \qquad (14.8)$$

<u>Exemplo</u>

Resolver a equação $N_0V_0 - V_0A_0 + L_0C_0 = 0$ no caso em que

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad N_0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$L_0 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L_0C_0 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

A_0 e N_0 tem autovalores distintos e portanto

$$\text{vec } V_0 = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{vec } V_0 = - \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e assim

$$V_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ é a única solução da equação dada.

1.5 - Solução da Equação $N_0V_0 - V_0A_0 + L_0C_0 = 0$ quando A_0 e N_0 estão em forma de Jordan

Na seção 4 do capítulo I, vimos da necessidade de resolver a equação (14.5). Como todo sistema pode ser representado por uma matriz na forma companheira, o ideal seria resolver (14.5) quando A_0 e N_0 estivessem escritas nesta forma. Entretanto, isto torna os cálculos trabalhosos, como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo:

Calcular V_0 na equação $N_0V_0 - V_0A_0 + L_0C_0 = 0$ quando:

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{vmatrix} \qquad N_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_0C_0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Os autovalores de A_0 são 2,3 e 1 e os de N_0 são -5 e -1, portanto, (14.5) tem solução única.

Substituindo A_0, N_0 e L_0C_0 em (14.6), temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -1 & -12 \end{vmatrix} \text{vec } V_0 = - \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando (14.7)

$$\text{vec } V_0 = \begin{vmatrix} \frac{-199}{224} & \frac{-69}{224} & \frac{65}{224} & \frac{-31}{224} & \frac{-13}{224} & \frac{9}{224} \\[2ex] \frac{479}{1344} & \frac{-145}{448} & \frac{-1129}{1344} & \frac{29}{448} & \frac{-43}{1344} & \frac{-59}{448} \\[2ex] \frac{-69}{1344} & \frac{65}{1344} & \frac{-45}{1344} & \frac{-13}{1344} & \frac{9}{1344} & \frac{11}{1344} \\[2ex] \frac{155}{224} & \frac{65}{224} & \frac{-45}{224} & \frac{-13}{224} & \frac{9}{224} & \frac{11}{224} \\[2ex] \frac{-145}{448} & \frac{215}{1344} & \frac{295}{448} & \frac{-43}{1344} & \frac{-59}{448} & \frac{-67}{1344} \\[2ex] \frac{65}{1344} & \frac{-15}{448} & \frac{-55}{1344} & \frac{3}{448} & \frac{11}{1344} & \frac{-37}{448} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 \\[2ex] 1 \\[2ex] 0 \\[2ex] -3 \\[2ex] 3 \\[2ex] 0 \end{vmatrix}$$

E finalmente

$$V_0 = \begin{vmatrix} \frac{23}{28} & \frac{-163}{168} & \frac{25}{168} \\ \\ \frac{-3}{28} & \frac{31}{168} & \frac{-13}{168} \end{vmatrix}$$

Sendo assim preferimos trabalhar com A_0 escrita em forma de Jordan e N_0 escrita em um único bloco de Jordan.

Dado um sistema:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\bar{x}}(t) = \bar{A}_0\bar{x}(t) \\ &\bar{y}(t) = \bar{C}_0\bar{x}(t) \qquad\qquad (15.1) \\ &t \geqslant 0 \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{aligned}$$

onde $\bar{A}_0$ é uma matriz qualquer.

Podemos através da mudança de coordenadas $x = P\bar{x}$, P uma transformação inversível, tal que

$A_0 = P\bar{A}_0 P^{-1}$ fique em forma de Jordan e fazendo $C_0 = C_0P^{-1}$ teremos o sistema (15.1) escrito como

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{x}(t) = A_0x(t) \\ &y(t) = C_0x(t) \\ &t \geqslant 0 \qquad x(0) = x_0 \end{aligned}$$

Representaremos a matriz A_0 por seus autovalores que não serão necessàriamente distintos, em um único bloco de Jordan

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} \qquad (15.2)$$

e N_0 será também representada por seus autovalores

$$N_0 = \begin{vmatrix} n_1 & & & \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_r \end{vmatrix} \qquad (15.3)$$

$$C_0 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad L_0 = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & \ell_{1m} \\ \vdots & & & \\ \ell_{r1} & \ell_{r1} & \cdots & \ell_{rm} \end{vmatrix}$$

(15.4) (15.5)

O produto $L_0 C_0$ será representado pela matriz

$$L_0C_0 = \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s} c_{s1} & \cdots & \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s} c_{sn} \\ \vdots & & \\ \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs} c_{s1} & \cdots & \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs} c_{sn} \end{vmatrix}$$

Substituindo as matrizes acima na equação (14.6), temos:

$$\begin{vmatrix} n_1 - a_1 & & & & & & & \\ & n_1 - a_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & n_1 - a_n & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & n_r - a_1 & & \\ & & & & & & n_r - a_2 & \\ & & & & & & & n_r - a_3 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & n_r - a_n \end{vmatrix} \text{vec } V_0 = - \text{vec } L_0C_0$$

Tomando $n_i \neq a_j$ $\forall_i$ $i \in \bar{r}$ e $\forall_j$ $j \in \bar{n}$ podemos garantir a existência de uma única solução.

$$\text{vec } V_0 = - \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1-a_1} & & & & & & \\ & \frac{1}{n_1-a_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{n_1-a_n} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{n_r-a_1} & & \\ & & & & & & \frac{1}{n_r-a_2} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \frac{1}{n_r-a_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s}c_{s1} \\ \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s}c_{sn} \\ \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs}c_{s1} \\ \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs}c_{sn} \end{vmatrix}$$

E finalmente

$$V_0 = - \begin{vmatrix} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{1s}c_{s1}}{n_1-a_1} & \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{1s}c_{s2}}{n_1-a_2} & \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{1s}c_{sn}}{n_1-a_n} \\ \\ \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{rs}c_{s1}}{n_r-a_1} & \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{rs}c_{s2}}{n_r-a_2} & \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{rs}c_{sn}}{n_r-a_n} \end{vmatrix}$$

ou ainda

$$V_0 = \begin{vmatrix} \frac{-\sum_{s=1}^{m} \ell_{is}c_{sj}}{n_i-a_j} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{matrix} \tag{15.6}$$

1.5.1 - Observação

Na escolha dos autovalores, n_i $(i \in \bar{r})$ de N_0 e dos elementos ℓ_{is} $(i \in \bar{r},\ s \in \bar{m})$ de L_0, deveremos atentar para a necessidade de que o posto de V_0 seja igual a r e além disso V_0 e C_0 não poderão ter linhas dependentes.

Agora apresentaremos a solução da equação (14.5) no caso em que A_0 tem mais de um bloco de Jordan. Representemos A_0 por:

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & & \\ & a_1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_p & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & a_p \end{vmatrix} \qquad (15.7)$$

onde:

a_h $(h \in \bar{p})$ é o autovalor de A_0 de multiplicidade β_h

isto implica em

$$\sum_{h=1}^{p} \beta_h = n$$

N_0 , C_0 , L_0 serão representados como em (15.3) (15.4) e (15.5) e a equação (14.6) terá a seguinte representação:

$$\begin{vmatrix} n_1 - a_1 & & & & & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & & & & & \\ & -1 & n_1 - a_1 & & & & & & & & \\ & & & n_1 - a_2 & & & & & & & \\ & & & -1 & \ddots & & & & & & \\ & & & & -1 & n_1 - a_2 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & n_r - a_1 & & & \\ & & & & & & & -1 & \ddots & & \\ & & & & & & & & -1 & n_r - a_1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & n_r - a_n \end{vmatrix} \operatorname{vec} V_0 - \operatorname{vec} L_0 C_0 = 0$$

Se $n_i \neq a_h$ $(i \in \bar{r}$ e $h \in \bar{p})$ então (14.6) terá solução única e V_0 será igual a:

$$V_0 = \left| \; - \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \; \right| \qquad (15.8)$$

Onde:

$$i \in \bar{r}$$

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_h$$

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$$

com β_h sendo a multiplicidade do autovalor a_h, $h \in \bar{p}$ e $\beta_0 = 0$.

A observação 1.5.1 é válida também neste caso.

Exemplo:

Consideremos o sistema

$$\overset{0}{\bar{x}}(t) = \bar{A}_0\ \bar{x}(t)$$

$$y(t) = \bar{C}_0\ \bar{x}(t) \quad \text{tal que}$$

$$\bar{A}_0 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{C}_0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Usando a transformação:

$$Q = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Fazendo $A_0 = Q^{-1} \bar{A}_0 Q$ teremos:

$$A_0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_0 = \bar{C}_0 Q = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Se o observador com estrutura

$$\overset{0}{z}(t) = N_0\, z(t) + L_0\, C_0 x(t)$$

$$z(0) = z_0 \qquad t \geqslant 0$$

é projetado tal que:

$$N_0 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad L_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

N_0 e A_0 tem autovalores distintos o que garante a existência de uma única solução para a equação (14.6).

$$L_0 C_0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$\beta_0 = 0$

$\beta_1 = 3$ (multiplicidade do autovalor 2)

$\beta_2 = 2$ (multiplicidade do autovalor 2)

$\beta_3 = 1$ (multiplicidade do autovalor 0) para $0 < j \leqslant 3$ e $\mu = 1$, teremos:

$i = 1$

$$v_{11} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$v_{12} = \frac{-2}{(-5)^2} + \frac{-3}{-5} = \frac{13}{25}$$

$$v_{13} = \frac{-2}{(-5)^3} + \frac{-3}{(-5)^2} + \frac{-2}{-5}$$

$$v_{13} = \frac{37}{125}$$

$i = 2$

$$v_{21} = 0$$

$$v_{22} = 0 + \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

$$v_{23} = 0 + \frac{3}{(-4)^2} + \frac{-1}{4}$$

$$v_{23} = \frac{-1}{16}$$

Para $3 < j \leqslant 5$ e $\mu = 4$

$i = 1$

$$v_{14} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$v_{15} = \frac{-2}{(-5)^2} + \frac{-2}{-5} = \frac{8}{25}$$

$i = 2$

$$v_{24} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

$$v_{25} = \frac{2}{(-4)^2} + \frac{5}{-4} = \frac{-9}{8}$$

Para $5 < j \leqslant 6$ e $\mu = 6$

$i = 1$

$$v_{16} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

$$v_{26} = 0$$

Portanto

$$V_0 = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{25} & \frac{37}{125} & \frac{2}{5} & \frac{8}{25} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{2} & \frac{-9}{8} & 0 \end{vmatrix}$$

C A P Í T U L O .II.

Efeito das Perturbações nos Parâmetros sobre V_0

2.1 - Introdução

Neste capítulo veremos como as perturbações ocorridas nos parâmetros do sistema e do próprio observador podem afetar a resposta encontrada.

2.2 - Perturbações em A_0 e em C_0

Consideremos A_0, N_0, C_0 e L_0 como em (15.2), (15.3) (15.4), respectivamente e representemos as perturbações ocorridas em A_0 e em C_0 por

$$\delta A = \begin{vmatrix} \delta a_1 & & & \\ & \delta a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta a_n \end{vmatrix} \qquad (22.1)$$

$$\delta C = \begin{vmatrix} \delta c_{11} & \delta c_{12} ---- & \delta c_{1n} \\ \\ \delta c_{m1} & \delta c_{m1} ---- & \delta c_{mn} \end{vmatrix} \qquad (22.2)$$

onde δa_j $(j \in \bar{n})$ é a perturbação que está afetando o autovalor a_j de A_0 e δc_{sj} $(s \in \bar{m},\ j \in \bar{n})$ é a perturbação que está afetando o elemento c_{sj} de C_0. As perturbação tanto em A_0 como em C_0 poderão ser distintas ou não.

Denotemos por A a matriz A_0 somada com a matriz δA e por C a matriz C_0 somada com a matriz δC, portanto:

$$A = A_0 + \delta A \qquad (22.3)$$

$$C = C_0 + \delta C \qquad (22.4)$$

Chamemos a perturbação que ocorrerá em V_0 de δV, representada por

$$\delta V = \begin{vmatrix} \delta v_{11} & \delta v_{12} ------- & \delta v_{1n} \\ \\ \delta v_{r1} & \delta v_{r2} ------- & \delta v_{rn} \end{vmatrix} \qquad (22.5)$$

e de V a matriz V_0 somada com a matriz δV, isto é, $V = V_0 + \delta V$.

Substituindo esses novos valores na equação (14.5), teremos:

$$N_0V - VA + L_0C = 0$$

$$N_0(V_0+ \delta V) - (V_0+ \delta V)\ (A_0+ \delta A) + L_0(C_0+ \delta C) = 0$$

$$N_0V_0- V_0A + L_0C_0+ N_0\delta V - \delta V(A_0+ \delta A) - V_0\delta A + L_0\delta C = 0$$

$$N_0\delta V - \delta VA - V_0\delta A + L_0\ \delta C = 0 \qquad (22.6)$$

A equação (22.6) dar-nos-ã o valor de δV.

2.2.1 - Teorema

Se existem perturbações em A_0 e em C_0 então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{-1}{n_i - a_j - \delta a_j} \times \left(\frac{\delta a_j \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{n_i - a_j} + \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right) \right| \qquad \begin{array}{l} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{array}$$

Prova:

De (15.6) sabemos que

$$V_0 = \left| \frac{- \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{n_i - a_j} \right| \qquad \begin{array}{l} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_1 + \delta a_1 & & & \\ & a_2 + \delta a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n + \delta a_n \end{vmatrix}$$

e

$$N_0 \otimes I_n - I_r \otimes A = \begin{vmatrix} n_1 - a_1 - \delta a_1 & & & & & & \\ & n_1 - a_2 - \delta a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & n_1 - a_n - \delta a_n & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & n_r - a_1 - \delta a_1 & & \\ & & & & & & n_r - a_2 - \delta a_2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & n_r - a_n - \delta a_n \end{vmatrix}$$

$$V_0 \delta A = \begin{vmatrix} \dfrac{-\delta a_1 \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s} c_{s1}}{n_1 - a_1} & \cdots & \dfrac{-\delta a_n \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s} c_{sn}}{n_1 - a_n} \\ \dfrac{-\delta a_1 \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs} c_{s1}}{n_r - a_1} & \cdots & \dfrac{-\delta a_n \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs} c_{sn}}{n_r - a_n} \end{vmatrix}$$

$$L_0 \delta C = \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s} \delta c_{s1} & \text{-----------} & \sum_{s=1}^{m} \ell_{1s} \delta c_{sn} \\ \\ \sum_{s=1}^{m} \ell_{rs} \delta c_{s1} & \text{-----------} & \sum_{s=1}^{m} \ell_{r} \delta c_{sn} \end{vmatrix}$$

Resolvendo a equação (22.4) como foi visto em (14.7), teremos:

$$\delta V = \left| \frac{-1}{n_i - a_j - \delta a_j} \times \left(\frac{\delta a_j \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{n_i - a_j} + \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} \delta c_{sj} \right) \right|$$

$i \in \bar{r}$ e $j \in \bar{n}$

2.2.11 - Corolário

Se existem perturbações apenas em A_0 , então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{-\delta a_j \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{(n_i - a_j)^2 - \delta a_j (n_i - a_j)} \right| \qquad \begin{matrix} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{matrix}$$

2.2.12 - Corolário

Se existem perturbações apenas em C_0, então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{-\sum_{s=1}^{m} \ell_{is}\,\delta c_{sj}}{n_i - a_j} \right|_{\substack{i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n}}}$$

Podemos ver que as perturbações que ocorrem em V_0 quando perturbamos A_0 e C_0 a um só tempo diferem das perturbações ocorridas em V_0 quando perturbarmos A_0 e C_0 separadamente e depois somarmos as perturbações encontradas.

2.3 - Perturbações em N_0 e em L_0

Consideremos A_0, N_0, C_0 e L_0 como em (15.2),(15.3), (15.4) e (15.5) respectivamente, e representemos as perturbações ocorridas em N_0 e L_0 por

$$\delta N = \begin{vmatrix} \delta n_1 & & \\ & \delta n_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta n_r \end{vmatrix} \qquad (23.1)$$

$$\delta L = \begin{vmatrix} \delta\ell_{11} & \delta\ell_{12} & \cdots & \delta\ell_{1m} \\ \\ \delta\ell_{r1} & \delta\ell_{r2} & \cdots & \delta\ell_{rm} \end{vmatrix} \qquad (23.2)$$

onde δn_i $(i \in \bar{r})$ é a perturbação que atua sobre o autovalor n_i de N_0 e $\delta\ell_{is}(i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m})$ é a perturbação que atua sobre o elemento ℓ_{is} de L_0. As perturbações tanto em N_0 como em L_0 poderão ser distintas ou não.

Denotemos por N a matriz N_0 somando com a matriz δN e por L a matriz L_0 somada com a matriz δL, portanto:

$$N = N_0 + \delta N \qquad (23.3)$$

$$L = L_0 + \delta L \qquad (23.4)$$

Chamemos a perturbação que ocorrerá em V_0 de δV, representada por

$$\delta V = \begin{vmatrix} \delta v_{11} & \delta v_{12} & \cdots & \delta v_{1n} \\ \delta v_{r1} & \delta v_{r2} & \cdots & \delta v_{rn} \end{vmatrix}$$

e de V a matriz V_0 somada com a matriz δV, isto é,

$$V = V_0 + \delta V$$

Substituindo esses valores na equação (14.5) teremos:

$$NV - VA_0 + LC_0 = 0$$

$$(N_0 + \delta N)\ (V_0+\delta V) - (\ V_0 + \delta V)\ A_0 + (L_0 + \delta L)\ C_0 = 0$$

$$N_0 V_0 - V_0 A_0 - L_0 C_0 + (N_0 + \delta N)\ \delta V - \delta V A_0 + \delta N V_0 + \delta L C_0 = 0$$

$$N \delta V - \delta V A_0 + \delta N V_0 + \delta L C_0 = 0 \qquad (23.5)$$

A equação (23.5) dar-nos-ã o valor de δV.

2.3.1 - Teorema

Se existem perturbações em N_o e em L_o então as perturbações resultantes em V_o serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{1}{n_i + \delta n_i - a_j} \times \left(\frac{\delta n_i \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{n_i - a_j} - \sum_{s=1}^{m} \delta \ell_{is} c_{sj} \right) \right|$$

$$i \in \bar{r} \quad e \quad j \in \bar{n}$$

Prova:

De (15.6) sabemos que:

$$V_0 = \left| \frac{- \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{n_i - a_j} \right| \qquad \begin{matrix} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{matrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} n_1 + \delta n_1 & & \\ & n_2 + \delta n_2 & \\ & & \ddots \\ & & & n_r + \delta n_r \end{vmatrix}$$

$$N \otimes I_n - I_r \otimes A_0 = \begin{vmatrix} n_1 + \delta n_1 - a_1 & & & & & & \\ & n_1 + \delta n_1 - a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & n_1 + \delta n_1 - a_n & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & n_r + \delta n_r - a_1 & & \\ & & & & & & n_r + \delta n_r - a_2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & n_r + \delta n_r - a_n \end{vmatrix}$$

$$\delta N L_0 = \begin{vmatrix} \dfrac{-\delta n_1 \sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{1s} c_{s1}}{n_1 - a_1} & \cdots & \dfrac{-\delta n_1 \sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{1s} c_{sn}}{n_1 - a_n} \\ \dfrac{-\delta n_r \sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{rs} c_{s1}}{n_r - a_1} & & \dfrac{-\delta n_r \sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{rs} c_{sn}}{n_r - a_n} \end{vmatrix}$$

$$\delta LC_0 = \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^{m} \delta\ell_{1s}c_{s1} & ------- & \sum_{s=1}^{m} \delta\ell_{1s}c_{sn} \\ & & \\ \sum_{s=1}^{n} \delta\ell_{rs}c_{s1} & ------- & \sum_{s=1}^{m} \delta\ell_{rs}c_{sn} \end{vmatrix}$$

Resolvendo (33.1) como foi visto em (14.8), teremos:

$$\delta V = \left| \frac{1}{n_i+\delta n_i-a_j} \times \left(\frac{\delta n_i \sum_{s=1}^{m} \ell_{is}c_{sj}}{n_i - a_j} - \sum_{s=1}^{m} \delta\ell_{is}c_{sj} \right) \right| \qquad \begin{array}{l} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{array}$$

2.3.11 - Corolário

Se existem perturbações apenas em N_0, então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{\delta n_i \sum_{s=1}^{m} \ell_{is}cs_j}{(n_i-a_j)^2+\delta n_i\,(n_i-a_j)} \right| \qquad \begin{array}{l} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{array}$$

Corolário 2.3.12

Se existem perturbações apenas em L_0, então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{-\sum_{s=1}^{m} \delta \ell_{is} c_{sj}}{n_i - a_j} \right| \quad \begin{array}{l} i \in \bar{r} \\ j \in \bar{n} \end{array}$$

Também neste caso as perturbações em V_0 advindas das perturbações ocorridas em N_0 e L_0 simultaneamente, diferem das perturbações em V_0 consequentes da soma das perturbações decorrentes de δN com as perturbações decorrentes de δL.

2.4 - Perturbações em Todos os Parâmetros

Consideremos A_0, N_0, C_0, L_0 e V_0 como em (15.2), (15.3), (15.4) e (15.5), (15.6), respectivamente, e representemos as perturbações ocorridas em A_0, N_0, C_0, L_0 e V_0 como em (22.1), (23.1), (22.2), (23.2) e (22.5), respectivamente.

Substituindo os valores encontrados em (22.3), (22.4), (23.3), (23.4) em (14.5), teremos:

$$(N_0 + \delta N)\,(V_0 + \delta V) - (V_0 + \delta V)\,(A_0 + \delta A) + (L_0 + \delta L)\,(C_0 + \delta C) = 0$$

$$(N_0 + \delta N)\,\delta V - \delta V(A_0 + \delta A) + \delta L(C_0 + \delta C) + \delta N V_0 - \delta V \delta A + L_0 \delta C = 0$$

$$N\delta V - \delta VA + \delta LC + \delta NV_0 - \delta V\delta A + L_0\delta C = 0 \qquad (24.1)$$

A equação (24.1) dar-nos-ã o valor de δV.

2.4.1 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem pertrubações, então as pertrubações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \frac{-1}{n_i - \delta n_i - a_j - \delta a_j} \times \left(\sum_{s=1}^{m} \delta \ell_{is} c_{sj} + \sum_{s=1}^{m} \delta \ell_{is}\, \delta c_{sj} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} \delta c_{sj} + \frac{\delta a_j - \delta n_i}{n_i - a_j} \times \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right) \right|$$

Prova : Anãloga as anteriores.

2.5 - Perturbações Ocorridas em V_0 quando A_0 tem mais de um Bloco de Jordam

Veremos agora as pertrubações que atuarão sobre V_0 quando A_0 estiver representado na forma (15.7).

Consideremos N_0, C_0, L_0 e V_0 como em (15.3),(15.4) (15.5) e (15.6), respectivamente e representemos as perturbações ocorridas em A_0 por

$$\delta A = \begin{vmatrix} \delta a_1 & & & \\ & \delta a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta a_n \end{vmatrix} \qquad (25.1)$$

onde:

δ_{aj} $(j \in \bar{n})$ atuará sobre o autovalor a_h $(h \in \bar{p})$ de multiplicidade β_h tal que a_h ocupa a j-ésima linha de A_0. As perturbações ocorridas em C_0, N_0,L_0 e V_0 serão representadas como em (22.2), (23.1),(23.2) e (22.5), respectivamente.

Tendo em vista todos estes fatos poderemos enunciar os seguintes resultados; que por terem provas análogas as anteriores, serão apenas enunciados.

2.5.1 - Teorema

Se existem pertrubações em A_0 e em C_0 então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| - \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\delta a_k \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} + \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} \delta c_{sk}}{(n_i - a_h - \delta a_k)^{j-k+1}} \right|$$

onde

$i \in \bar{r}$

$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + \beta_h \qquad \beta_0 = 0$

$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots \beta_{h-1} + 1$

2.5.11 - Corolário

Se existem pertrubações apenas em A_0 então as perturbações em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| - \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\delta a_k \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}}}{(n_i - a_h - \delta a_k)^{j-k+1}} \right|$$

onde:

$i \in \bar{r}$

$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_h \ , \ \beta_0 = 0$

$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$

2.5.12 - Corolário

Se existem perturbações apenas em C_0 então as perturbações em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| -\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is}\delta c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|$$

onde:

$i \in \bar{r}$

$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + \beta_h \qquad \beta_0 = 0$

$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$

2.5.2 - Teorema

Se existem pertrubações em N_0 e em L_0 então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\delta n_1 \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} - \sum_{s=1}^{m} \delta\ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h + \delta n_i)^{j-k+1}} \right|$$

onde $\quad i \in \bar{r}$

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + \beta_h \qquad \beta_0 = 0$$

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$$

2.5.21 - Corolário

Se existem perturbações apenas em N_0 então as perturbações em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c s_k}{(n_i - a_h)^{j-k+1}}}{(n_i - a_h + \delta n_i)^{j-k+1}} \right|$$

onde

$i \in \bar{r}$

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + \beta_h \qquad \beta_0 = 0$$

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$$

2.5.22 - Corolário

Se existem pertrubações apenas em L_0, então as perturbações em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| - \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \delta \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)} \right|$$

onde: $i \in \bar{r}$

$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_h \qquad \beta_0 = 0$

$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$

2.5.3 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem pertrubações, então as perturbações resultantes em V_0 serão dadas por:

$$\delta V = \left| - \sum_{k=\mu}^{j} \frac{1}{(n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k)^{j-k+1}} \left(\sum_{s=1}^{m} \delta \ell_{is} (c_{sk} + \delta c_{sk}) + \sum_{s=1}^{m} \ell_{is}\, \delta c_{sk} + (\delta a_k - \delta n_i) \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right) \right|$$

onde

$i \in \bar{r}$

$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} < j \leqslant \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + \beta_h \qquad \beta_0 = 0$

$\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$

C A P Í T U L O III

Como Projetar um Observador de Maneira que as Perturbações em V_0 Mantenham-se em um Intervalo Pré Fixado

3.1 - Introdução

Neste capítulo estudaremos as condições que nos permitirão o projeto de um observador tal que V_0 tenha as perturbações, decorrentes das perturbações nos parâmetros do sistema ou do próprio observador, dentro de um intervalo pré determinado.

3.2 - Perturbações Fixas

Dentro desta seção, veremos os casos em que as perturbações atuantes sobre os parâmetros e sobre a resposta do observador, independem do valor sobre o qual atuam.

Consideremos A_0, C_0, N_0, L_0 e V_0 como em (15.2),(15.4), (15.3), (15.5) e (15.6) e δA, δC, δN, δL e δV_0 como em (22.1), (22.2), (23.1), 23.2) e (22.5), respectivamente.

3.2.1 - Teorema

Se apenas os elementos de A_0 são perturbados e $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^*_+$ $(j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}^*_+$ $(i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{\alpha_j \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - \alpha_j \, |n_i - a_j|} \tag{32.1}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

<u>Prova</u>: Usando o corolário 2.2.11 podemos escrever que para $i \in \bar{r}$ e $j \in \bar{n}$.

$$|\delta v_{ij}| = \left| \frac{-\delta a_j \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{(n_i - a_j)^2 - \delta a_j (n_i - a_j)} \right|$$

$$|\delta v_{ij}| = \frac{|\delta a_j| \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|(n_i - a_j)^2 - \delta a_j (n_i - a_j)|}$$

$$|\delta v_{ij}| \leq \frac{\alpha_j \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - \alpha_j |n_i - a_j|} \tag{32.2}$$

De (32.1) e (32.2)

$|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

eqd

3.2.2 - Teorema

Se apenas os elementos de C_0 são perturbados e $|\delta c_{sj}| \leq \theta_{sj}$, onde $\theta_{sj} \in \mathbb{R}_+^*$ $(s \in \bar{m},\ j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*(i \in \bar{r},\ j \in \bar{n})$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{\theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_j|} \tag{32.3}$$

com $\theta = \max\{\theta_{sj} \mid s \in \bar{m},\ j \in \bar{n}\}$.

Então: $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

Prova

Pelo corolário 2.2.12 podemos escrever que para $i \in \bar{r}$ e $j \in \bar{n}$

$$|\delta v_{ij}| = \frac{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} \delta c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|}$$

$$|\delta v_{ij}| \leq \frac{\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}| |\delta c_{sj}|}{|n_i - a_j|} \tag{32.4}$$

Como $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta$ para $s \in \bar{m}$, $j \in \bar{n}$ teremos:

$$\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}||\delta c_{sj}| \leqslant \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}| \theta = \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}| \qquad (32.5)$$

De (32.3), (32.4) e (32.5)

$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

cqd

3.2.3 - <u>Teorema</u>

Se apenas os elementos de N_o sofrem perturbações e $|\delta \eta_i| \leqslant \lambda_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r},\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\lambda_i \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - \lambda_i |n_i - a_j|} \qquad (32.6)$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$.

<u>Prova</u>

Pelo corolário 2.3.11 podemos escrever para $i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n}$

$$|\delta v_{ij}| = \frac{|\delta \eta_i| \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|(n_i - a_j)^2 + \delta \eta_i (n_i - a_j)|}$$

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \frac{\lambda_i \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - \lambda_i |n_i - a_j|} \qquad (32.7)$$

De (32.6) e (32.7)

$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$ cqd

3.2.4 - Teorema

Se apenas os elementos de L_0 sofrem perturbações e $|\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$, onde $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r},\ s \in \bar{m})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}|}{|n_i - a_j|} \qquad (32.8)$$

onde $\gamma = \max \{\gamma_{is} \ / \ i \in \bar{r},\ s \in \bar{m}\}$.

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

Prova

Pelo corolário 2.3.12 podemos escrever para $i \in \bar{r}$ e $j \in \bar{n}$

$$|\delta v_{ij}| = \frac{\sum_{s=1}^{m} |\delta \ell_{is}| |c_{sj}|}{| n_i - a_j|} \qquad (32.9)$$

Como $|\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma$ para $i \in \bar{r}$, $s \in \bar{m}$ teremos:

$$\sum_{s=1}^{m} |\delta \ell_{is}| |c_{sj}| \leqslant \sum_{s=1}^{m} \gamma |c_{sj}| = \gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| \qquad (32.10)$$

De (32.8), (32.9) e (32.10)

$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$ - - - - - - - - - -

3.2.5 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações têm o seguinte comportamento:

(i) $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j$

(ii) $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj}$

(iii) $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i$

(iv) $|\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$

onde: $i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n}$ e $s \in \bar{m}$.

α_j , θ_{sj} , λ_i , γ_{is} $\in$ $\mathbb{R}_+^*$

Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \geq \max \left\{ \frac{2\left(\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}| \right.}{|n_i - a_j| - \alpha_j - \lambda_i} , \right.$$

$$\left. \frac{2\,(\alpha_j + \lambda_i) \sum_{s=1}^{m} \left| \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - (\alpha_j + \lambda_i)|n_i - a_j|} \right\} \qquad (32.11)$$

onde

$$\gamma = \max \{\gamma_{is} \;/\; i \in \bar{r} \;,\; s \in \bar{m}\}$$

$$\theta = \max \{\theta_{sj} \;/\; s \in \bar{m} \;,\; j \in \bar{n}\}$$

Então

$$|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$$

<u>Prova</u>

Pelo teorema 2.4.1

$$|\delta v_{ij}| \leq \frac{\sum_{s=1}^{m} \left|\delta \ell_{is}\right| \left|c_{sj}\right|}{|n_i + \delta n_i - a_j - \delta a_j|} + \frac{\sum_{s=1}^{m} \left|\delta \ell_{is}\right| \left|\delta c_{sj}\right|}{|n_i + \delta n_i - a_j - \delta a_j|} +$$

$$+ \frac{\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|\,|\delta c_{sj}|}{|n_i + \delta n_i - a_j - \delta a_j|} + \frac{|\delta a_j - \delta n_i| \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i + \delta n_i - a_j - \delta a_j|\,|n_i - a_j|}$$

e daí

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_j| - |\delta n_i| - |\delta a_j|} +$$

$$+ \frac{\left(|\delta a_j| + |\delta n_i|\right) \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - |\delta n_i||n_i - a_j| - |\delta a_j||n_i - a_j|}$$

portanto

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_j| - \lambda_i - \alpha_j} +$$

$$+ \frac{(\alpha_j + \lambda_i) \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - (\alpha_j + \lambda_i)|n_i - a_j|} \qquad (32.12)$$

De (42.11) temos

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{2} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\theta\,\gamma + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_j| - \alpha_j - \lambda_i} \qquad (32.13)$$

e

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{2} \geqslant \frac{(\alpha_j + \lambda_i)\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|^2 - (\alpha_j + \lambda_i)|n_i - a_j|} \qquad (32.14)$$

Somando (32.13) e (32.14) e comparando com (32.12), encontramos que

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}.$$

c.q.d

O resultado que se segue é o mais importante desta seção, pois ele nos garante a existência de um observador satisfazendo as condições impostas, bastando para isto, a escolha apropriada de N_0. A escolha dos elementos de L_0 será feita com o objetivo de fazer com que o posto de V_0 seja igual a r e que V_0 e C_0 tenham linhas independentes.

3.2.6 - Teorema

Se as perturbações atuantes sobre os parâmetros e sobre V_0 são fixas será sempre possível projetar um observador, escolhendo os elementos de N_0, de maneira a garantir que as perturbações resultantes em V_0 permanecerão dentro do intervalo pré fixado.

Prova

Imponhamos que as perturbações em V_0 resultantes das perturbações nos parâmetros A_0, C_0, N_0 e L_0 variem dentro do intervalo $(-\varepsilon_{ij}\ ,\ \varepsilon_{ij})$ $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$.

Sabemos pelo teorema 3.2.5 que se

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \max \left\{ \frac{2(\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\gamma\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|)}{|n_i - a_j| - \alpha_j - \lambda_i}\ , \right.$$

$$\left. \frac{2\ (\alpha j + \lambda i) \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}|}{|n_i - a_j|^2 - (\alpha_j + \lambda_i)|n_i - a_j|} \right\} \quad \text{então}$$

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}\ ,\ \text{isto é,}\ \delta v_{ij} \in [-\varepsilon_{ij}\ ,\ \varepsilon_{ij}]$$

Portanto, podemos projetar o observador que satisfaça as condições impostas, bastando para isso escolher os autovalores n_i, de N_0, com parte real negativa e bem afastados dos autovalores de A_0.

3.3 - Perturbações Fixas nos Parâmetros e Dependentes em V_0

Nesta seção, veremos os casos em que as perturbações atuantes sobre os parâmetros independem do valor sobre o qual atuam e as perturbações resultantes em V_0 são diretamente.dependentes dos valores sobre os quais atuam.

Consideremos A_0, C_0, N_0, L_0, V_0, δA, δC, δN, δL e δV como na seção anterior.

3.3.1 - Proposição

Se apenas os elementos de A_0 sofrem perturbações e $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j$ onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r},\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\alpha_j}{|n_i - a_j| - \alpha_j} \qquad (33.1)$$

Então $\qquad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} \, |v_{ij}|$

Prova

Multiplicando os membros de (33.1) por

$$\frac{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|} \quad \text{temos:}$$

$$\varepsilon_{ij} \, \frac{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\alpha_j \left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|^2 - \alpha_j |n_i - a_j|} \qquad (33.3)$$

De (33.3) e (32.2) temos:

$$\varepsilon_{ij} \, \frac{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|} \geqslant |\delta v_{ij}| \qquad (33.4)$$

Finalmente de (33.4) e (15.6)

$$|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$$

c.q.d.

3.3.2 - Teorema

Se apenas os elementos de A_0 sofrem perturbações e se $|\delta a_j| \leq \alpha_j$ onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ $(j \in \bar{n})$. Se tomarmos os autovalores de N_0 de maneira tal que

$$|n_i| \geq \frac{\alpha_j(1+ \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j| \qquad (33.5)$$

onde $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$. Então

$$|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij} \ |v_{ij}|$$

Prova De (33.5), temos

$$|n_i| - |a_j| \geq \frac{\alpha_j(1+ \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}}$$

Como $|n_i - a_j| \geq |n_i| - |a_j|$, podemos escrever

$$\varepsilon_{ij}|n_i - a_j| \geq \alpha_j + \varepsilon_{ij}\alpha_j$$

$$\varepsilon_{ij}|n_i - a_j| - \varepsilon_{ij}\alpha_j \geq \alpha_j$$

$$\varepsilon_{ij}(|n_i - a_j| - \alpha_j) \geq \alpha_j$$

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{\alpha_j}{|n_i - a_j| - \alpha_j} \qquad (33.6)$$

De (33.6) e do teorema 3.3.1

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} \; |v_{ij}|$$

3.3.3 - Teorema

Se apenas os elementos de C_o sofrem pertrubações e $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj}$ onde $\theta_{sj} \in \mathbb{R}^*_+$ $(s \in \bar{m},\ j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}^*_+ (i \in \bar{r},\ j \in \bar{m})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}$$

onde $\theta = \max \{\theta_{sj} \;/\; s \in \bar{m},\ j \in \bar{n}\}$. Então

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} \quad |v_{ij}|$$

Prova Anãloga a do teorema 3.3.1

Os dois exemplos abaixo mostrar-nos-aõ:

- como encontrarmos os elementos de L_0 que satisfaçam o teorema 3.3.3
- que em alguns casos não nos será possível projetar um observador que siga as especificações impostas.

3.3.4 - Exemplo

Consideremos o sistema

$$\overset{0}{x}(t) = \begin{vmatrix} 6 & & & & \\ & 10 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 8 & \\ & & & & 5 \end{vmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad x(t)$$

Sobre os elementos de C_0 atuam as perturbações sujeitas a:

$\lvert\delta c_{11}\rvert \leqslant 0.0026$	$\lvert\delta c_{21}\rvert \leqslant 0.003$
$\lvert\delta c_{13}\rvert \leqslant 0.0015$	$\lvert\delta c_{22}\rvert \leqslant 0.0009$
$\lvert\delta c_{14}\rvert \leqslant 0.002$	$\lvert\delta c_{23}\rvert \leqslant 0.001$
$\lvert\delta c_{15}\rvert \leqslant 0.001$	$\lvert\delta c_{25}\rvert \leqslant 0.0028$

Nosso propósito é projetar um observador com parâmetros (N_0, L_0) de modo que as perturbações que ocorrerão em V_0 não excedam os limites abaixo fixados.

$\lvert\delta v_{11}\rvert \leqslant 0.01 \ \lvert v_{11}\rvert$	$\lvert\delta v_{21}\rvert \leqslant 0.004 \ \lvert v_{21}\rvert$	$\lvert\delta v_{31}\rvert \leqslant 0.005 \ \lvert v_{31}\rvert$
$\lvert\delta v_{12}\rvert \leqslant 0.009 \ \lvert v_{12}\rvert$	$\lvert\delta v_{22}\rvert \leqslant 0.007 \ \lvert v_{22}\rvert$	$\lvert\delta v_{32}\rvert \leqslant 0.0036 \ \lvert v_{32}\rvert$
$\lvert\delta v_{13}\rvert \leqslant 0.008 \ \lvert v_{13}\rvert$	$\lvert\delta v_{23}\rvert \leqslant 0.006 \ \lvert v_{23}\rvert$	$\lvert\delta v_{33}\rvert \leqslant 0.007 \ \lvert v_{33}\rvert$
$\lvert\delta v_{14}\rvert \leqslant 0.007 \ \lvert v_{14}\rvert$	$\lvert\delta v_{24}\rvert \leqslant 0.0084 \ \lvert v_{24}\rvert$	$\lvert\delta v_{34}\rvert \leqslant 0.0053 \ \lvert v_{34}\rvert$
$\lvert\delta v_{15}\rvert \leqslant 0.006 \ \lvert v_{15}\rvert$	$\lvert\delta v_{25}\rvert \leqslant 0.0054 \ \lvert v_{25}\rvert$	$\lvert\delta v_{35}\rvert \leqslant 0.0063 \ \lvert v_{35}\rvert$

Pelo teorema 3.3.3 precisamos determinar a classe das matrizes

$$L_0 = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \\ \ell_{31} & \ell_{32} \end{vmatrix}$$

tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \theta \; \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{\sum\limits_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}|} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ j = 1,\ldots,5 \end{array}$$

onde $\theta = \max \{\theta_{sj} \;/\; s \in \bar{m} \;,\; j \in \bar{n}\}$

no caso $\theta = 0.003$.

Para cada valor i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, teremos um sistema de inequações:

Para i = 1

$$\begin{cases} 0.01 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|\ell_{11} + \ell_{12}|} \\[2ex] 0.009 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|3\ell_{11} - \ell_{12}|} \\[2ex] 0.008 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|2\ell_{11} + \ell_{12}|} \\[2ex] 0.007 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|\ell_{11}|} \\[2ex] 0.006 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|\ell_{11} - \ell_{12}|} \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} 3.\bar{3}\ |\ell_{11} + \ell_{12}| \geqslant |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 3\ |3\ell_{11} - \ell_{12}| \geqslant |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 2.\bar{6}\ |2\ell_{11} + \ell_{12}| \geqslant |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 2.\bar{3}\ |\ell_{11}| \geqslant |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 2\ |\ell_{11} - \ell_{12}| \geqslant |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \end{cases}$$

Satisfazendo as desigualdades acima teremos as famílias:

$$\mathcal{L}_1^1 = \{(\ell_{11}, \ell_{12}) \ /\ \ell_{12} > 0 \text{ e } \ell_{11} > 2\ell_{12}\}$$

$$\mathcal{L}_1^2 = \{(\ell_{11}, \ell_{12}) \ /\ \ell_{11} < 0,\ \ell_{12} \geqslant 0 \text{ e } |\ell_{11}| > 3\ \ell_{12}\}$$

$$\mathcal{L}_1^3 = \{(\ell_{11}, \ell_{12}) \ /\ \ell_{11} > 0,\ \ell_{12} < 0 \text{ e } \ell_{11} \geqslant 3|\ell_{12}|\}$$

Para i = 2

$$\begin{cases} 0.004 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{21}| + |\ell_{22}|}{|\ell_{21} + \ell_{22}|} \\ 0.007 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{21}| + |\ell_{22}|}{|3\ell_{21} - \ell_{22}|} \\ 0.006 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{21}| + |\ell_{22}|}{|2\ell_{21} + \ell_{22}|} \\ 0.0084 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{21}| + |\ell_{22}|}{|\ell_{21}|} \\ 0.0054 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{21}| + |\ell_{22}|}{|\ell_{11} - \ell_{12}|} \end{cases}$$

ou ainda

$$1.\bar{3}\ |\ell_{21} + \ell_{22}| \geqslant |\ell_{21}| + |\ell_{22}|$$

$$2.3\ |3\ell_{21} - \ell_{22}| \geqslant |\ell_{21}| + |\ell_{22}|$$

$$2|2\ell_{21} - \ell_{22}| \geqslant |\ell_{21}| + |\ell_{22}|$$

$$2.8\ |\ell_{21}| \geqslant |\ell_{21}| + |\ell_{22}|$$

$$1.8\ |\ell_{21} - \ell_{22}| \geqslant |\ell_{21}| + |\ell_{22}|$$

Satisfazendo as desigualdades acima teremos as famí lias:

$$\mathcal{L}_2^1 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \ /\ \ell_{21}, \ell_{22} > 0, \ell_{21} \geqslant 4\ell_{22}\}$$
$$\mathcal{L}_2^2 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \ /\ \ell_{21} < 0, \ell_{22} > 0, |\ell_{21} > 7\ell_{22}|\}$$
$$\mathcal{L}_2^3 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \ /\ \ell_{21} > 0, \ell_{22} < 0, \ell_{21} < 8|\ell_{22}|\}$$
$$\mathcal{L}_2^4 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \ /\ \ell_{21} < 0, \ell_{22} < 0, |\ell_{21}| > 4|\ell_{21}|\}$$

Para i=3

$$\begin{cases} 0.005 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{31}| + |\ell_{32}|}{|\ell_{31} + \ell_{32}|} \\[2ex] 0.0036 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{31}| + |\ell_{32}|}{|3\ell_{31} - \ell_{32}|} \\[2ex] 0.007 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{31}| + |\ell_{32}|}{|2\ell_{31} + \ell_{32}|} \\[2ex] 0.0053 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{31}| + |\ell_{32}|}{|\ell_{31}|} \\[2ex] 0.0063 \geqslant 0.003 \dfrac{|\ell_{31}| + |\ell_{32}|}{|\ell_{31} - \ell_{32}|} \end{cases}$$

Ou seja

$1.\bar{6}$	$\lvert \ell_{31} + \ell_{32} \rvert$	$\geq \lvert \ell_{31} \rvert + \lvert \ell_{32} \rvert$
1.2	$\lvert 3\ell_{31} - \ell_{32} \rvert$	$\geq \lvert \ell_{31} \rvert + \lvert \ell_{32} \rvert$
$2.\bar{3}$	$\lvert 2\ell_{31} + \ell_{32} \rvert$	$\geq \lvert \ell_{31} \rvert + \lvert \ell_{32} \rvert$
$1.7\bar{6}$	$\lvert \ell_{31} \rvert$	$\geq \lvert \ell_{31} \rvert + \lvert \ell_{32} \rvert$
2.1	$\lvert \ell_{31} - \ell_{32} \rvert$	$\geq \lvert \ell_{31} \rvert + \lvert \ell_{32} \rvert$

Satisfazendo as desigualdades acima encontramos as famílias:

$$\mathcal{L}_3^1 = \{(\ell_{31}, \ell_{32}) / \ell_{31} \geq 0, \ell_{32} > 0, \ell_{31} > 3\ell_{32}\}$$
$$\mathcal{L}_3^2 = \{(\ell_{31}, \ell_{32}) / \ell_{31} < 0, \ell_{32} < 0 |\ell_{31}| > 3|\ell_{32}|\}$$
$$\mathcal{L}_3^3 = \{(\ell_{31}, \ell_{32}) / \ell_{31} \geq 0, \ell_{32} < 0 \quad \ell_{31} > 5|\ell_{32}|\}$$

Poderemos agora projetar um observador escolhendo os elementos de L_0, entre os elementos das famílias acima, e para autovalores de N_0 números complexos com a parte real negativa. Logicamente ao escolhermos tais elementos levaremos em conta que rank $V_0 = 3$ e que V_0 e C_0 não terão linhas dependentes.

3.3.5 - Exemplo:

Consideremos o sistema:

$$\overset{0}{x}(t) = \begin{vmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 7 & \\ & & & 8 \end{vmatrix} \; x(t)$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \; x(t)$$

As perturbações que atuam sobre os elementos de C_0

$|\delta c_{12}| \leqslant 0.002$ $\qquad$ $|\delta c_{21}| \leqslant 0.004$

$|\delta c_{13}| \leqslant 0.001$ $\qquad$ $|\delta c_{22}| \leqslant 0.0028$

$|\delta c_{14}| \leqslant 0.003$ $\qquad$ $|\delta c_{24}| \leqslant 0.001$

Nosso propósito é projetar um observador com parâmetros (N_0, L_0) de modo que, as perturbações que ocorrerão em V_0 não excedam os limites abaixo fixados:

$|\delta v_{11}| \leqslant 0.008 \; |v_{11}|$ $\qquad$ $|\delta v_{21}| \leqslant 0.003 \; |v_{21}|$

$|\delta v_{12}| \leqslant 0.007 \; |v_{12}|$ $\qquad$ $|\delta v_{22}| \leqslant 0.004 \; |v_{22}|$

$|\delta v_{13}| \leqslant 0.002 \; |v_{13}|$ $\qquad$ $|\delta v_{23}| \leqslant 0.009 \; |v_{23}|$

$|\delta v_{14}| \leqslant 0.005 \; |v_{14}|$ $\qquad$ $|\delta v_{24}| \leqslant 0.01 \; |v_{24}|$

Precisamos determinar a classe das matrizes

$$L_0=\begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{vmatrix}$$ que satisfazem o teorema 3.3.3

No caso $\theta = 0.004$.

Para i = 1, teremos o sistema de inequações

$$\begin{cases} 0.008 \geq 0.004 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|\ell_{12}|} \\[2ex] 0.007 \geq 0.004 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|2\ell_{11} - 3\ell_{12}|} \\[2ex] 0.002 \geq 0.004 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|-\ell_{11}|} \\[2ex] 0.003 \geq 0.004 \dfrac{|\ell_{11}| + |\ell_{12}|}{|2\ell_{11} - \ell_{12}|} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2\,|\ell_{12}| \geq |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 1.75\,|2\ell_{11} - 3\ell_{12}| \geq |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 0.5\,|-\ell_{11}| \geq |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \\ 0.75\,|2\ell_{11} - \ell_{12}| \geq |\ell_{11}| + |\ell_{12}| \end{cases}$$

Não será possível projetar um observador capaz de obedecer as especificações impostas, pois não existem valores para ℓ_{11} e ℓ_{12} capazes de satisfazer

$$0.5\,|-\ell_{11}| \geq |\ell_{11}| + |\ell_{12}|\,.$$

3.3.6 - Proposição

Se apenas os elementos de N_0 sofrem perturbações e $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\lambda_i}{|n_i - a_j| - \lambda_i}\ .\ \text{Então}\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}|v_{ij}|\ .$$

Prova: Análoga a do teorema 3.3.1

3.3.7 - Teorema

Se apenas os elementos de N_0 sofrem perturbações e $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r})$. Se tomarmos os autovalores do observador de maneira tal que:

$$|n_i| \geqslant \frac{\lambda_i(1+\varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j|,\ \text{onde}\qquad \varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$$

$(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$. Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}|v_{ij}|$.

Prova: Análoga a do teorema 3.3.5

3.3.8 - Teorema

Se apenas os elementos de L_0 sofrem perturbações e

$|\delta\ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$ onde

$\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^* (i \in \bar{r}, s \in \bar{m})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^* \; (i \in \bar{r}, j \in \bar{n})$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}|}{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}, \text{ onde } \quad \gamma = \max \; \{\gamma_{is} \mid i \in \bar{r}, s \in \bar{m}\}$$

Então $\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} \, |v_{ij}|$

<u>Prova</u> Análoga a do teorema 3.3.1

3.3.9 - <u>Exemplo</u>

Consideremos o sistema visto no exemplo 3.3.5. Agora os elementos de C_0 não sofrem perturbações, Nosso propósito é projetar um observador de parâmetros (N_0, L_0), de modo que as perturbações que ocorrerão em V_0 mantenham-se dentro dos limites pré estabelecidos no exemplo anterior, supondo que os elementos de L_0 são afetados por perturbações tais que:

$$|\delta\ell_{11}| \leqslant 0.002 \qquad |\delta\ell_{21}| \leqslant 0.05$$

$$|\delta\ell_{12}| \leqslant 0.008 \qquad |\delta\ell_{22}| \leqslant 0.03$$

Pelo teorema 3.3.8 precisamos determinar a classe das matrizes $L_0 = \begin{vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{vmatrix}$ tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \gamma \frac{\sum_{s=1}^{m} |c_{sj}|}{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

onde

$$\gamma = \max\{\gamma_{is} \;/\; i \in \bar{r},\ s \in \bar{m}\}$$

No caso $\gamma = 0.05$

Para cada valor de i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, teremos um sistema de inequações:

Para i = 1 teremos:

$$\begin{cases} 0.008 \geqslant 0.05 \dfrac{1}{|\ell_{12}|} \\[2ex] 0.007 \geqslant 0.05 \dfrac{5}{|2\ell_{11} - 3\ell_{12}|} \\[2ex] 0.002 \geqslant 0.05 \dfrac{1}{|-\ell_{11}|} \\[2ex] 0.003 \geqslant 0.05 \dfrac{3}{|2\ell_{11} - \ell_{12}|} \end{cases}$$

ou

$$|\ell_{12}| \geqslant 6.25$$

$$|2\ell_{11} - 3\ell_{12}| \geqslant 35.8$$

$$|-\ell_{11}| \geq 25$$
$$|2\ell_{11} - \ell_{12}| \geq 50$$

$$\mathcal{L}_1 = \{(\ell_{11}, \ell_{12}) \ / \ |\ell_{12}| \geq 7 , 2|\ell_{11}| \geq 3|\ell_{21}| + 50\}$$

é o conjunto solução para o sistema acima.

Para i = 2 teremos o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} 0.003 \geq 0.05 \dfrac{1}{|\ell_{22}|} \\ 0.004 \geq 0.05 \dfrac{5}{|2\ell_{21} - 3\ell_{22}|} \\ 0.009 \geq 0.05 \dfrac{1}{|-\ell_{21}|} \\ 0.01 \geq 0.05 \dfrac{3}{|2\ell_{21} - \ell_{12}|} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} |\ell_{22}| \geq 16.\bar{6} \\ |2\ell_{21} - 3\ell_{22}| \geq 62.5 \\ |-\ell_{21}| \geq 5.\bar{5} \\ |2\ell_{21} - \ell_{12}| \geq 15 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \ / \ |\ell_{22}| \geq 17, \ 2|\ell_{21}| \geq 62,5 + 3|\ell_{22}|\}$$

Escolheremos os elementos de L_0 entre os elementos de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, de maneira tal, que o posto de V_0 seja igual a 2 e V_0 e C_0 não tenham linhas dependentes.

3.3.10 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações tem o seguinte comportamento:

$$\text{(i)} \quad |\delta a_j| \leqslant \alpha_j$$
$$\text{(ii)} \quad |\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj}$$
$$\text{(iii)} \quad |\delta n_i| \leqslant \lambda_i$$
$$\text{(iv)} \quad |\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$$

onde:

$$i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n} \quad \text{e} \quad s \in \bar{m}.$$

α_j, θ_{sj}, λ_i, γ_{is}

Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \quad \max \left\{ \frac{|2n_i - a_j| \Big|_\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\gamma\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{\left| \sum_{s=1}^{m} {}_{is}c_{sj} \right| \left(|n_i - a_j| - \alpha_j - \lambda_i \right)} \right. ,$$

$$\left. , \frac{2(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)} \right\} \quad (33.7)$$

onde:

$$\gamma = \max \{ \gamma_{is} \; / \; i \in \bar{r} \, , \, s \in \bar{m} \}$$

$$\theta = \max \{ \theta_{sj} \; / \; s \in \bar{m} \, , \, j \in \bar{m} \}$$

Então:

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} \, |v_{ij}|$$

<u>Prova</u>: De (43.7), temos:

$$\frac{\varepsilon_{ij} \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{2|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\left[\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\gamma\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}| \right.}{|n_i - a_j| - \alpha_j - \lambda_i} \quad (33.8)$$

e

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{2(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)} \qquad (33.9)$$

Multiplicando os membros de (33.9) por

$\dfrac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|}$, teremos:

$$\frac{\varepsilon_{ij} \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{2|n_i - a_j|} \geqslant \frac{(\alpha_j + \lambda_i) \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - (\alpha_j + \lambda_i) \, |n_i - a_j|}$$

Somando membro a membro as desigualdades (33.8) e (33.10), segue:

$$\frac{\varepsilon_{ij}\left|\sum_{s=1}^{m}\ell_{is}\ c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\gamma\sum_{s=1}^{m}|\ell_{is}c_{sj}| + m\gamma\theta + \theta\sum_{s=1}^{m}|\ell_{is}|}{|n_i - a_j| - \alpha_j - \lambda_i} + \frac{(\alpha_j + \lambda_i)\left|\sum_{s=1}^{m}\ell_{is}c_{sj}\right|}{|n_i-a_j|^2 - (\alpha_j+\lambda_i)|n_i-a_j|} \tag{33.11}$$

De (33.11) e (32.12)

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}\ |v_{ij}|$$

3.3.11 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações, perturbações estas que têm o comportamento descrito no teorema anterior. Se tomarmos os autovalores do N_0 de maneira tal que:

$$|n_i| \geqslant \max\left\{\frac{(\alpha_j + \lambda_i)\ (2 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j|\ ,\ 5\ (\alpha_j + \lambda_i) + |a_j|\right\} \tag{33.12}$$

e os elementos ℓ_{is} de L_0 de maneira que

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{4} \geqslant \frac{\gamma\sum_{s=1}^{m}|c_{sj}| + m\gamma\theta + \theta\sum_{s=1}^{m}|\ell_{is}|}{\left|\sum_{s=1}^{m}\ell_{is}c_{sj}\right|} \tag{33.13}$$

onde $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^* \quad (i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$.

Então

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}\ |v_{ij}|$$

<u>Prova</u>: De (33.12) podemos escrever

$$|n_i| - |a_j| \geqslant \frac{(\alpha_j + \lambda_i)\ (2 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}}$$

Como: $|n_i - a_j| \geqslant |n_i| - |a_j| \qquad (33.14)$

segue,

$$|n_i - a_j| \geqslant \frac{(\alpha_j + \lambda_i)(2 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}}$$

$$|n_i - a_j|\ \varepsilon_{ij} \geqslant 2(\alpha_j + \lambda_i) + \varepsilon_{ij}\ (\alpha_j + \lambda_i)$$

$$\Big[|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)\Big]\ \varepsilon_{ij} \geqslant 2(\alpha_j + \lambda_i)$$

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{2(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)} \qquad (33.15)$$

Ainda de (33.12)

$|n_i| - |a_j| \geqslant 5(\alpha_j + \lambda_i)$ e de (33.14)

$$|n_i - a_j| \geqslant 4(\alpha_j + \lambda_i) + (\alpha_j + \lambda_i)$$

$$|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i) \geqslant 4(\alpha_j + \alpha_i)$$

$$1 \geqslant \frac{4(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)}$$

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{2(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)} \qquad (33.16)$$

Como
$$\frac{2(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)} \geqslant \frac{\alpha_j + \lambda_i}{|n_i - a_j|}$$

e portanto,

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{(\alpha_j + \lambda_i)}{|n_i - a_j|} \qquad (33.17)$$

Multiplicando os membros de (33.17) por $\frac{\varepsilon_{ij}}{2}$, teremos

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{4} \geqslant \frac{\varepsilon_{ij}(\alpha_j + \lambda_i)}{2|n_i - a_j|} \qquad (33.18)$$

e subtraindo ambos os termos de (33.18) de

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{2}$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{2} - \frac{\varepsilon_{ij}(\alpha_j + \lambda_i)}{2|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\varepsilon_{ij}}{2} - \frac{\varepsilon_{ij}}{4}$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{2} - \frac{\varepsilon_{ij}(\alpha_j + \lambda_i)}{2\,|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\varepsilon_{ij}}{4} \qquad (33.19)$$

De (33.19) e (33.13) podemos escrever:

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{2} - \frac{\varepsilon_{ij}\,(\alpha_j + \lambda_i)}{2|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}\,|n_i - a_j| - \varepsilon_{ij}\,(\alpha_j + \lambda_i)}{2\,|n_i - a_j|} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}$$

E finalmente

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{2|n_i - a_j| \left[\gamma \sum_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|\right]}{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right| \left[|n_i - a_j| - (\alpha_j + \lambda_i)\right]} \quad (33.20)$$

De (33.15) , (33.20) e o teorema 3.3.10

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}\,|y_{ij}|$$

c.q.d.

3.3.12 - Exemplo

Consideremos o sistema

$$\overset{0}{x}(t) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{vmatrix} \; x(t)$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} x(t)$$

Sobre os parâmetros A_o, C_o, L_o e N_o atuam perturbações sijeitas a

$|\delta a_1| \leq 0.006$ $\quad$ $|\delta a_3| \leq 0.02$

$|\delta a_2| \leq 0.007$ $\quad$ $|\delta a_4| \leq 0.003$

$|\delta c_{11}| \leq 0.008$ $\quad$ $|\delta c_{21}| \leq 0.0016$

$|\delta c_{12}| \leq 0.006$ $\quad$ $|\delta c_{22}| \leq 0.002$

$|\delta c_{13}| \leq 0.0029$ $\quad$ $|\delta c_{23}| \leq 0.003$

$|\delta c_{14}| \leq 0.0038$ $\quad$ $|\delta c_{24}| \leq 0.0026$

$|\delta \ell_{11}| \leq 0.018$ $\quad$ $|\delta \ell_{21}| \leq 0.007$

$|\delta \ell_{12}| \leq 0.003$ $\quad$ $|\delta \ell_{22}| \leq 0.006$

$|\delta n_1| \leq 0.009$ $\quad$ $|\delta n_2| \leq 0.01$

Desejamos um observador que sofrendo as perturbações acima permita encontrar V_0 de maneira que as perturbações neste fiquem sujeitas a:

$|\delta v_{11}| \leq 0.009 \; |v_{11}|$ $\quad$ $|\delta v_{21}| \leq 0.028 \; |v_{21}|$

$|\delta v_{12}| \leq 0.03 \; |v_{12}|$ $\quad$ $|\delta v_{22}| \leq 0.014 \; |v_{22}|$

$|\delta v_{13}| \leq 0.02 \; |v_{13}|$ $\quad$ $|\delta v_{23}| \leq 0.025 \; |v_{23}|$

$|\delta v_{14}| \leq 0.019 \; |v_{14}|$ $\quad$ $|\delta v_{24}| \leq 0.026 \; |v_{24}|$

Pelo teorema 3.3.11 precisamos encontrar os autovalores de N_o tais que:

$$|n_i| \geqslant \frac{(\alpha_j + \lambda_i)\ (2 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j| \quad e \quad |n_i| \geqslant 5(\alpha_j + \lambda_i) + |a_j|$$

Para i = 1 teremos:

$$\begin{cases} |n_1| \geqslant \dfrac{0.015 \times 2.009}{0.009} + 1 \\[2ex] |n_1| \geqslant \dfrac{0.016 \times 2.03}{0.03} + 1 \\[2ex] |n_1| \geqslant \dfrac{0.029 \times 2.02}{0.02} + 4 \\[2ex] |n_1| \geqslant \dfrac{0.012 \times 2.019}{0.019} + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |n_1| \geqslant 4{,}3 \\ |n_1| \geqslant 2{,}1 \\ |n_1| \geqslant 6{,}9 \\ |n_1| \geqslant 3{,}3 \end{cases}$$

Como para $i = 1$ e $j = 1, \ldots, 4$

$$2 + \varepsilon_{ij} \geqslant 5\ \varepsilon_{ij}$$

tomando $|n_1|$ satisfazendo o sistema acima estamos também satisfazendo

$$|n_i| \geqslant 5(\alpha_j + \lambda_i) + |a_j| \qquad \begin{array}{l} i = 1 \\ j = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

Basta escolher para n_1 um valor negativo menor do que -7.

Agora vamos encontrar os valores de ℓ_{is} (i = 1, s = 1,2) tais que:

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{4} \geqslant \frac{\gamma \sum\limits_{s=1}^{m} |c_{sj}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum\limits_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{\left| \sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}$$

Neste exemplo: $\gamma = 0.018$

$\theta = 0.008$

$m = 2$

Para i = 1 temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{0.018 \times 2 + 2 \times 0.018 \times 0.008 + 0.008\,(|\ell_{11} + \ell_{12}|)}{|\ell_{11} + \ell_{12}|} \leqslant 0.00225 \\[2ex] \dfrac{0.018 \times 3 + 2 \times 0.018 \times 0.008 + 0.008\,(|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|2\ell_{11} - \ell_{12}|} \leqslant 0.0075 \\[2ex] \dfrac{0.018 \times 2 + 2 \times 0.018 \times 0.008 + 0.008\,(|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|-\ell_{11} + \ell_{12}|} \leqslant 0.005 \\[2ex] \dfrac{0.018 \times 4 + 2 \times 0.018 \times 0.008 + 0.008\,(|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|\ell_{11} + 3\ell_{12}|} \leqslant 0.00075 \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} \dfrac{0.036288}{|\ell_{11}+\ell_{12}|} + \dfrac{0.008\ (|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|\ell_{11} + \ell_{12}|} \leqslant 0.00225 \\[2ex] \dfrac{0.054288}{|2\ell_{11}-\ell_{12}|} + \dfrac{0.008\ (|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|2\ell_{11} - \ell_{12}|} \leqslant 0.0075 \\[2ex] \dfrac{0.036288}{|-\ell_{11}+\ell_{12}|} + \dfrac{0.008\ (|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|-\ell_{11} + \ell_{12}|} \leqslant 0.005 \\[2ex] \dfrac{0.072288}{|\ell_{11}+3\ell_{12}|} \quad \dfrac{0.008\ (|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|\ell_{11} + 3\ell_{12}|} \leqslant 0.00075 \end{cases}$$

Satisfazendo o sistema acima teremos as famílias:

$$\mathcal{L}_1^1 = \{(\ell_{11}, \ell_{12}) \;/\; \ell_{12} \geqslant 0 \qquad \ell_{11} - 3\ell_{12} \geqslant 8\}$$

$$\mathcal{L}_1^2 = \{(\ell_{11}, \ell_{12}) \;/\; \ell_{11} \geqslant 0 \qquad \ell_{12} \leqslant 0 \;\text{ e }\; \ell_{11} + 3\ell_{12} \geqslant 8\}$$

Para i = 2 teremos:

$$\begin{cases} |n_2| \geqslant \dfrac{0.016 \times 2{,}028}{0.028} + 1 \\[2ex] |n_2| \geqslant \dfrac{0.017 \times 2{,}014}{0.014} + 1 \\[2ex] |n_2| \geqslant \dfrac{0.03 \times 2.025}{0.025} + 4 \\[2ex] |n_2| \geqslant \dfrac{0.013 \times 2{,}026}{0.026} + 2 \end{cases}$$

$|n_2| \geqslant 2{,}16$

$|n_2| \geqslant 3{,}45$

$|n_2| \geqslant 6{,}43$

$|n_2| \geqslant 3{,}28$

Como para $i = 2$ e $j = 1, \ldots, 4$

$2 + \varepsilon_{ij} \geqslant 5\, \varepsilon_{ij}$

Tomando $|n_2|$ satisfazendo o sistema acima estamos também satisfazendo:

$$|n_2| \geqslant 5(\alpha_j + \lambda_i) + |a_j| \qquad \begin{array}{l} i = 2 \\ j = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

Basta escolher para n um valor negativo menor do que -7.

As famílias que satisfazem (33.13) quando $i = 2$ e $s = 1,2$ são:

$$\mathcal{L}_2^1 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \;/\; \ell_{22} \geqslant 0 \quad e \quad \ell_{21} \geqslant 2\ell_{22}\}$$

$$\mathcal{L}_2^2 = \{(\ell_{21}, \ell_{22}) \;/\; \ell_{21} \geqslant 0,\ \ell_{22} \leqslant 0,\ \ell_{21} > 3|\ell_{22}|\}$$

Portanto, se projetarmos um observador de parâmetros (N_0, L_0) cujos elementos tem o comportamento acima descrito, teremos as perturbações em V_0 dentro das especificações previstas.

Nem sempre será possível, perturbando todos os parâmetros, projetar um observador que mantenha as perturbações em V_0 dentro de limites pré fixados . Poderemos ver isto no exemplo 3.3.5, se todos os parâmetros fossem perturbados mantendo-se as perturba ções em C_o e V_o como lá descritas, teríamos:

$$0.002 \geqslant \frac{0.004\ (|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|-\ell_{11}|} + \frac{1{,}008\,\gamma}{|-\ell_{11}|}$$

e como já foi visto, não existem números ℓ_{11} e ℓ_{12} que satisfaçam

$$0.002 \geqslant \frac{0.004\ (|\ell_{11}| + |\ell_{12}|)}{|-\ell_{11}|}$$ e como

$\frac{1{,}008\,\gamma}{|-\ell_{11}|}$ é um número positivo, esta impossibilidade continua válida.

3.4 - Perturbações Dependentes

Nesta seção, veremos os casos em que as perturbações atuantes sobre os parâmetros e sobre V_0 dependem dos valores sobre os quais atuam.

Consideremos A_0, C_0, N_0, L_0, V_0, δA, δC, δN, δL e δV como na seção 4.2. As provas serão omitidas, pois, são análogas as provas vistas nas duas seções anteriores.

3.4.1 - Proposição

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de A_0 e são tais que $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j \; |a_j|$, onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ $(j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^* (i \in \bar{r}\;,\; j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\alpha_j \; |a_j|}{|n_i - a_j| - \alpha_j |a_j|}$$

Então $\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|.$

3.4.2 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de A_0 e são tais que $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j |a_j|$, onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^* (j \in \bar{n})$.Se tomarmos os autovalores de N_0 de maneira tal, que

$$|n_i| \geqslant \frac{\alpha_j |a_j| (1 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j| \qquad (i \in \bar{r}\;,\; j \in \bar{n}),$$

onde $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$. Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$.

3.4.3 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de C_0 e são tais que $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj} |c_{sj}|$ $(s \in \bar{m}\;,\; j \in \bar{n})$, onde $\theta_{sj} \in \mathbb{R}_+^*$ .. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\;,\; j \in \bar{n})$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}|}{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|} , \qquad \theta = \max\{\theta_{sj} \mid s \in \bar{m},\ j \in \bar{n}\}.$$

Então $$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|.$$

3.4.4 - Proposição

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de N_0 e são tais que $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i |n_i|$, $(i \in \bar{r})$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que:

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\lambda_i |n_i|}{|n_i - a_j| - \lambda_i |n_i|} .$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$.

3.4.5 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de N_0, e são tais que $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i |n_i|$ $(i \in \bar{r})$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$. Se tomarmos os autovalores de N_0 de maneira tal, que

$$|n_i| \geqslant \frac{\lambda_i |n_i| \ (1 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j| \quad (i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n}).$$

onde $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$. Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$.

3.4.6 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de L_0 e são tais que $|\delta\ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}|\ell_{is}|$ $(i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m})$, onde $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{r})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}c_{sj}|}{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is}c_{sj} \right|}\ , \quad \gamma = \max\{\gamma_{is}\ / i \in \bar{r},\ s \in \bar{m}\}.$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}|v_{ij}|$.

3.4.7 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações tem o comportamento abaixo:

(i) $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j|a_j|$ $(j \in \bar{n})$

(ii) $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj}|c_{sj}|$ $(s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n})$

(iii) $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i|n_i|$ $(i \in \bar{r})$

(iv) $|\delta\ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}|\ell_{is}|$

onde $\alpha_j,\ \theta_{sj},\ \lambda_i,\ \gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$

Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \max \left\{ \frac{2|n_i - a_j| \left[(\gamma + \theta + \gamma\theta) \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}| \right]}{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right| (|n_i - a_j| - \alpha_j |a_j| - \lambda_i |n_i|)} \right. ,$$

$$\left. , \quad \frac{2(\alpha_j \, |a_j| + \lambda_i \, |n_i|)}{|n_i - a_j| - \alpha_j |a_j| - \lambda_i |n_i|} \right\}$$

onde:

$$\gamma = \max\{\gamma_{is} \; / \; i \in \bar{r}, \quad s \in \bar{m}\}$$

$$\theta = \max\{\theta_{sj} \; / \; s \in \bar{m}, \quad j \in \bar{n}\}$$

Então $\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$.

3.4.8 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações, perturbações estas que têm o comportamento descrito no teorema anterior. Se tomarmos os autovalores so N_0 de maneira tal, que

$$|n_i| \geqslant \max \left\{ \frac{(\alpha_j |a_j| + \lambda_i |n_i|)(2 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j|, \; 5(\alpha_j |a_j| + \lambda_i |n_i|) + |a_j| \right\}$$

e os elementos ℓ_{is} de L_0 de maneira que:

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{4} \geqslant \frac{(\gamma + \theta + \gamma\theta) \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}|}{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|} \quad \text{onde} \quad \varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_{+}^{*} \; (i \in \bar{r}, \; j \in \bar{n}).$$

Então $|\delta v_{ij}| \quad \varepsilon_{ij}|v_{ij}|$

3.4.9 - Exemplo

Consideremos o sistema

$$\overset{0}{x}(t) = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 4 & \\ & & & 2 \end{vmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} x(t)$$

Sobre os parâmetros A_0, C_0, L_0 e N_0 atuam perturbações dependentes sujeitas a:

$|\delta a_1| \leqslant 0.006 \qquad |a_1| = 0.006$

$|\delta a_2| \leqslant 0.007 \qquad |a_2| = 0.007$

$|\delta a_3| \leqslant 0.0005 \qquad |a_3| = 0.02$

$|\delta a_4| \leqslant 0.0015 \qquad |a_4| = 0.003$

$|\delta c_{11}| \leqslant 0.008 \qquad |c_{11}| = 0.008 \qquad |\delta c_{21}| \leqslant 0.005 \qquad |c_{21}| = 0.005$

$|\delta c_{12}| \leqslant 0.006 \qquad |c_{12}| = 0.012 \qquad |\delta c_{22}| \leqslant 0.002 \qquad |c_{22}| = 0.002$

$|\delta c_{13}| \leqslant 0.008 \qquad |c_{13}| = 0.008 \qquad |\delta c_{23}| \leqslant 0.003 \qquad |c_{23}| = 0.003$

$|\delta c_{14}| \leqslant 0.004 \qquad |c_{14}| = 0.004 \qquad |\delta c_{24}| \leqslant 0.001 \qquad |c_{24}| = 0.003$

$|\delta\ell_{11}| \leqslant 0.018 \quad |\ell_{11}|$ $\qquad$ $|\delta\ell_{21}| \leqslant 0.007 \quad |\ell_{21}|$

$|\delta\ell_{12}| \leqslant 0.003 \quad |\ell_{12}|$ $\qquad$ $|\delta\ell_{22}| \leqslant 0.006 \quad |\ell_{22}|$

$|\delta n_1| \quad 0.009 \quad |n_1|$

$|\delta n_2| \quad 0.01 \quad |n_1|$

Desejamos projetar um observador que sofrendo as perturbações acima permita encontrar V_0 de maneira que as perturbações neste fiquem como as descritas no exemplo 3.3.12.

Pelo teorema 3.4.8 precisamos encontrar autovalores de N_0 tais que:

$$|n_i| \geqslant \frac{(\alpha_j |a_j| + \lambda_i |n_i|)(2 + \varepsilon_{ij})}{\varepsilon_{ij}} + |a_j|$$

e

$$|n_i| \geqslant 5(\alpha_j \; |a_j| + \lambda_i |n_i|) + |a_j|$$

Para i = 1

$$|n_1| \geqslant \frac{(0.006 + 0.009|n_1|) \times 2.009}{0.009} + 1$$

$$|n_1| \geqslant \frac{(0.007 + 0.009 \; |n_1|) \times 2.03}{0.03} + 1$$

$$|n_1| \geqslant \frac{(0.02 + 0.009 \; |n_1|) \times 2.02}{0.02} + 4$$

$$|n_1| \geqslant \frac{(0.003 + 0.009 \; |n_1|) \times 2.019}{0.019} + 2$$

$$\begin{cases} 0.009\ |n_1| \geqslant 0.021054 + 0.018081\ |n_1| \\ 0.03\ |n_1| \geqslant 0.04421 + 0.01827\ |n_1| \\ 0.02\ |n_1| \geqslant 0.1204 + 0.01818\ |n_1| \\ 0.019\ |n_1| \geqslant 0.044057 + 0.018171\ |n_1| \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\ 0.009081\ |n_1| \geqslant 0.021054 \\ 0.01173\ |n_1| \geqslant 0.04421 \\ 0.00182\ |n_1| \geqslant 0.1204 \\ 0.00029\ |n_1| \geqslant 0.044057 \end{cases} \qquad (34.1)$$

Não será possível obedecer as restrições impostas, desde que não existe valor para n_1 que satisfaça (34.1).

3.5 - Perturbações Dependentes nos Parâmetros e Fixas em V_0

Nesta seção, estudaremos os casos em que as perturbações atuantes sobre os parâmetros dependem dos valores sobre os quais atuam e as perturbações resultantes em V_0 independem de seus elementos.

Consideremos A_0, C_0, N_0, L_0, V_0, δA, δC, δN, δL e δV como na seção 3.2. As provas serão omitidas, pois, são análogas as provas vistas nas duas primeiras seções.

3.5.1 - Teorema

Se apenas os elementos de A_0 sofrem perturbações e

$|\delta a_j| \leq \alpha_j \, |a_j|$ $(j \in \bar{n})$, onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^* (i \in \bar{r}, j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{\alpha_j |a_j| \left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_j|^2 - \alpha_j |a_j| |n_i - a_j|}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

3.5.2 - Teorema

Se apenas os elementos de C_0 sofrem perturbações e $|\delta c_{sj}| \leq \theta_{sj} |c_{sj}|$ $(s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n})$, onde $\theta_{sj} \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{\theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}|}{|n_i - a_j|} \ , \quad \theta = \max \{\theta_{sj} \ / \ s \in \bar{m},\ j \in \bar{n}\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

3.5.3 - Teorema

Se apenas os elementos de N_0 sofrem perturbações e $|\delta n_i| \leq \lambda_i |n_i|$ $(i \in \bar{r})$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^* (i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\lambda_i \; |n_i| \left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}\right|}{|n_i - a_j|^2 - \lambda_i |n_i| \; |n_i - a_j|}$$

Então $\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

3.5.4 - Teorema

Se apenas os elementos de L_0 sofrem perturbações e $|\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma_{is} |\ell_{is}|$ $(i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m})$, onde $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r},\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\gamma \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sj}|}{|n_i - a_j|} .$$

Então $\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

3.5.5 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações têm o comportamento abaixo:

(i) $\quad |\delta a_j| \leqslant \alpha_j \; |a_j| \qquad (j \in \bar{n})$

(ii) $\quad |\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj} |c_{sj}| \qquad (s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n})$

(iii) $\quad |\delta n_i| \leqslant \lambda_i \; |n_i| \qquad (i \in \bar{r})$

(iv) $\quad |\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma_{is} |\ell_{is}| \qquad (i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m})$

onde:

$$\alpha_j\ ,\ \theta_{sj},\ \lambda_i\ ,\ \gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*.$$ Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \max_i \left\{ \frac{2(\gamma+\theta+\gamma\theta)\sum_{s=1}^{m}|\ell_{is}c_{sj}|}{|n_i-a_j| - \alpha_j|a_j| - \lambda_i|n_i|}\ ,\ \frac{2(\alpha_j|a_j|+\lambda_i|n_i|)\left|\sum_{s=1}^{m}\ell_{is}c_{sj}\right|}{|n_i-a_j|^2 - (\alpha_j|a_j| + \lambda_i|n_i|)|n_i-a_j|} \right\}$$

onde:

$$\gamma = \max\{\gamma_{is}\ /\ i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m}\}$$
$$\theta = \max\{\theta_{sj}\ /\ s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n}\}.$$

Então $\quad |\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

Nas seções seguintes repetiremos o estudo para o caso em que A_0 está representada em forma de Jordan com mais de um bloco. Como os resultados tem provas análogas as provas dos teoremas das duas primeiras seções deste capítulo, enunciaremos apenas os teoremas.

Consideremos A_0, N_0, C_0, L_0, V_0 como em (15.7), (15.3), (15.4) (15.5) e (15.8), respectivamente e δA, δN, δC, δL, δV como em (25.1), (23.1), (22.2), (23.2), (22.5). De agora em diante j variará no intervalo $(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1}\ ,\ \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + \beta_h)$ onde, β_h é igual a multiplicidade do autovalor a_h e $\beta_0 = 0$

e $\mu = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{h-1} + 1$.

3.6 - Perturbações Fixas

3.6.1 - Teorema

Se apenas os elementos de A_0 são perturbados e $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j$, onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*(j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*(i \in \bar{r}, j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left|\displaystyle\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}\right|}{|n_i - a_j|^{j-k+1}}}{|n_i - a_h - \delta_{ak}|^{j-k+1}}$$

3.6.2 - Teorema

Se apenas os elementos de C_0 são perturbados e $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj}$, onde $\theta_{sj} \in \mathbb{R}_+^*(s \in \bar{m}, j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*(i \in \bar{r}, j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \theta \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

onde:

$$\theta = \max\{\theta_{sj} \;/\; s \in \bar{m}, j \in \bar{n}\}.$$

Então $\qquad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$.

3.6.3 - Teorema

Se apenas os elementos de N_0 são perturbados e $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*(i \in \bar{r})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*(i \in \bar{r}, j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\lambda_i \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left|\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}\right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}}{|n_i - a_h - \delta n_i|^{j-k+1}}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

3.6.4 - Teorema

Se apenas os elementos de L_0 são perturbados e $|\delta\ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$, onde $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}, s \in \bar{m})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i \in \bar{r}, s \in \bar{m})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \gamma \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |c_{sk}|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

3.6.5 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações têm o comportamento abaixo descrito:

(i) $|\delta a_j| \leq \alpha_j$

(ii) $|\delta c_{sj}| \leq \theta_{sj}$

(iii) $|\delta n_i| \leq \lambda_i$

(iv) $|\delta \ell_{is}| \leq \gamma_{is}$

onde: $i \in \bar{r}$, $s \in \bar{m}$, $j \in \bar{n}$

α_j , θ_{sj} , λ_i , $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$

Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \max \left\{ 2 \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |c_{sk}| + m\,\gamma\,\theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} , \right.$$

$$\left. , \; 2 \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_j + \lambda_i}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}} \right\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

3.7 - <u>Perturbações Fixas nos Parâmetros e Dependentes em V_0</u>

3.7.1 - <u>Teorema</u>

Se apenas os elementos de A_0 sofrem perturbações e e $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j$, onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ $(j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r},\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{1}{\left| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}}{|n_i - a_h - \delta a_k|^{j-k+1}}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.7.2 - Teorema

Se apenas os elementos de C_o sofrem perturbações e $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj}$, onde $\theta_{sj} \in \mathbb{R}_+^*$ $(s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\theta}{\left| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sj}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

$$\theta = \max\{\theta_{sj} / \ s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n}\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} \ |v_{ij}|$

3.7.3 - Teorema

Se apenas os elementos de N_0 sofrem perturbações e $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{1}{\left| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\lambda_i \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}}{|n_i - a_h + \delta n_i|^{j-k+1}}$$

Então

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$$

3.7.4 - Teorema

Se apenas os elementos de L_0 sofrem perturbações e $|\delta\ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$, $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$ ($i \in \bar{r}$, $s \in \bar{m}$). Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$($i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n}$) são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\gamma}{\left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |c_{sj}|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

$$\gamma = \max \{\gamma_{is} \ / \ i \in \bar{r} , s \in \bar{m}\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.7.5 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações têm o comportamento abaixo:

(i) $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j$

(ii) $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta s_j$

(iii) $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i$

(iv) $|\delta\ell_{is}| \leqslant \gamma_{is}$

onde: $i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n}$, $s \in \bar{m}$

$\alpha_j\ ,\ \theta_{sj}\ ,\ \gamma_{is}\ ,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$

Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \max\left\{ \frac{2}{\left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\bar{\gamma} \sum_{s=1}^{m} |c_{sk}| + m\gamma\ \theta + \theta \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is}|}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} \right.$$

$$, \frac{2}{\left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k + \lambda_i}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} \times$$

$$\left. \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}} \right\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}\ |v_{ij}|$

3.8 - Perturbações Dependentes nos Parâmetros e em V_0

3.8.1 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de A_0 e são tais que $|\delta a_j| \leq \alpha_j |a_j|$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$ $(j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$

$(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{1}{\left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} {}_{is}c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k\ |a_h| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}}{|n_i - a_h - \delta a_k|^{j-k+1}}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.8.2 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de C_0 e são tais que $|\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{sj} |c_{sj}|$, $\theta_{sj} \in \mathbb{R}_+^*$ $(s \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \frac{\theta}{\left| \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sk}|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

$$\theta = \max \{\theta s_j \ /\ s \in \bar{m},\ j \in \bar{n}\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.8.3 - Teorema

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de N_0 e são tais que $|\delta n_i| \leq \lambda_i \; |n_i|$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\,,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{1}{\left| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\lambda_i |ni| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{\,j-k+1}}}{|n_i - a_h + \delta n_i|^{j-k+1}}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.8.4 - <u>Teorema</u>

Se as perturbações atuam somente sobre os elementos de L_0 e são tais que $|\delta \ell_{is}| \leq \gamma_{is} |\ell_{is}|$, $\gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r},\ s \in \bar{m})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\,,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \frac{\gamma}{\left| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sk}|}{|\,n_i - a_h|^{\,j-k+1}}$$

$$\gamma = \max \{\gamma_{is} \; / \; i \in \bar{r}\;,\ s \in \bar{m}\}.$$

Então $\delta |v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.8.5 - <u>Teorema</u>

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações tem o comportamente abaixo

$$\begin{array}{lllll} \text{(i)} & |\delta a_j| \leqslant \alpha_j |a_j| & (j \in \bar{n}) & & \\ \text{(ii)} & |\delta c_{sj}| \leqslant \theta_{is} |c_{sj}| & (s \in \bar{m}\ ,\ j \in \bar{n}) & & (3.8.1) \\ \text{(iii)} & |\delta n_i| \leqslant \lambda_i |n_i| & (i \in \bar{r}) & & \\ \text{(iv)} & |\delta \ell_{is}| \leqslant \gamma_{is} |\ell_{is}| & (i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m}) & & \end{array}$$

onde

$$\alpha_j \ , \ \theta_{is} \ , \ \lambda_i \ , \ \gamma_{is} \in \mathbb{R}_+^*$$

Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \max \left\{ \frac{2}{\left| \sum \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{(\gamma + \theta\gamma + \theta) \sum\limits_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sk}|}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} \right. ,$$

$$\frac{2}{\left| \sum\limits_{k=\mu}^{j} \dfrac{\sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}}{(n_i - a_h)^{j-k+1}} \right|} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k |a_h| + \lambda_i |n_i|}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum\limits_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

Entaõ $\quad |\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij} |v_{ij}|$

3.9 - Perturbações Dependentes nos Parâmetros e Fixas em V_0

3.9.1 - Teorema

Se apenas os elementos de A_0 sofrem perturbações e $|\delta a_j| \leqslant \alpha_j |a_j|$ $(j \in \bar{n})$, onde $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ $(i \in \bar{r}$, $j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k \, |a_h| \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left|\displaystyle\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}\right|}{|n_i - a_h|^{\,j-k+1}}}{|n_i - a_h - \delta a_k|}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

3.9.2 - Teorema

Se apenas os elementos de C_0 sofrem perturbações e $|\delta c_{sj}|$ $\theta_{sj} |c_{sj}|$ $(s \in \bar{m}$, $j \in \bar{n})$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são $(i \in \bar{r}, j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \theta \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sk}|}{|n_i - a_h|^{\,j-k+1}}$$

$$\theta = \max \{\theta_{sj} \;/\; j \in \bar{n} \;,\; s \in \bar{m}\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$

3.9.3 - Teorema

Se apenas os elementos de N_o sofrem perturbações e $|\delta n_i| \leqslant \lambda_i |n_i|$ $(i \in \bar{r})$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geqslant \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\lambda_i \; |n_i| \; \displaystyle\sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left|\displaystyle\sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk}\right|}{|n_i - a_j|^{j-k+1}}}{|n_i - a_h + \delta n_i|^{j-k+1}}$$

Então

$$|\delta v_{ij}| \leqslant \varepsilon_{ij}$$

3.9.4 - Teorema

Se apenas os elementos de L_0 sofrem perturbações e $|\delta\ell_{is}| \leq \gamma_{is}|\ell_{is}|$ $(i \in \bar{r}\ ,\ s \in \bar{m})$. Se $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{R}_+^*$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \gamma \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sk}|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}}$$

$$\gamma = \text{máx}\ \{\gamma_{is}\ /\ s \in \bar{m}\ ,\ i \in \bar{r}\}$$

Então $|\delta v_{ij}|$ ε_{ij}

3.9.5 - Teorema

Se todos os parâmetros sofrem perturbações e estas perturbações tem o comportamento mencionado em (4.8.1). Se ε_{ij} $(i \in \bar{r}\ ,\ j \in \bar{n})$ são tais que

$$\varepsilon_{ij} \geq \max \left\{ 2 \sum_{k=\mu}^{j} \frac{(\gamma+\gamma\theta+\theta) \sum_{s=1}^{m} |\ell_{is} c_{sk}|}{|n_i - a_h + \delta n_i - \delta a_k|^{j-k+1}} , \right.$$

$$\left. 2 \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\alpha_k\ |a_h| + \lambda_i\ |n_i|}{|n_i - a_h + \delta n_i + \delta a_k|^{j-k+1}} \times \sum_{k=\mu}^{j} \frac{\left| \sum_{s=1}^{m} \ell_{is} c_{sk} \right|}{|n_i - a_h|^{j-k+1}} \right\}$$

Então $|\delta v_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$

B I B L I O G R A F I A

{ 1 } - D.G. Luenberger - An Introduction to Observes - IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-16 nº 6 - Dec'1971.

{ 2 } - H. Neudecker - A Note on Kronecker Matrix Products and Matrix Equation Systems - Siam J. Appl. Math. Vol. 17 - nº 3 - May'1969.

{ 3 } - W. Murray Wonham - Linear Multivariable Control. A Geometric Approach. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems - pp. 21.