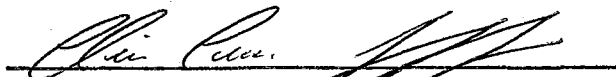


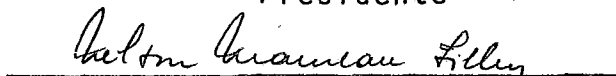
"DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DE OPERAÇÃO DE  
SISTEMAS DE GERAÇÃO HIDROTÉRMICOS"

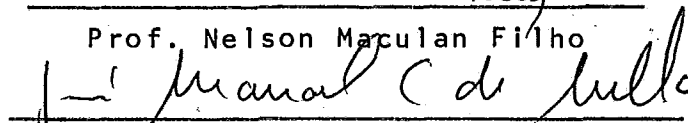
Solange Fernandes Pinheiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

  
Prof. Clovis Caesar Gonzaga  
Presidente

  
Prof. Nelson Maculan Filho

  
Prof. José Manoel Carvalho de Mello

RIO DE JANEIRO - BRASIL

DEZEMBRO DE 1975

A Euzy, Adelino e Roberto.

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Clovis Caesar Gonzaga, pela eficiente orientação tanto acadêmica quanto de tese, sem a qual não teria sido possível a realização deste trabalho.
  
- Ao Professor Ronaldo Cesar Marinho Persiano, pela colaboração e pelas várias discussões sobre o assunto da pesquisa.
  
- Ao Professor Nelson Maculan Filho, pela atenção com que sempre acompanhou meu desenvolvimento acadêmico.

RESUMO

O problema de gestão ótima de sistemas hidrotérmicos consiste em minimizar os gastos operacionais com térmicas, resultantes do consumo de combustível, de maneira a suprir a demanda, durante o período de planejamento, sujeito às restrições devidas ao tamanho dos reservatórios e aos fatores naturais.

No presente trabalho considera-se: (a) modelo composto, isto é, com um único reservatório equivalente, (b) aflúências e demandas determinísticas, (c) custo descontado, e (d) hipóteses realistas sobre os custos de geração termoelétrica. Transforma-se o problema contínuo determinístico em problema discreto, encontrando controles discretos equivalentes ao controle contínuo. Estuda-se a aplicação destes controles na construção de estratégias ótimas de operação. Apresenta-se um resultado que caracteriza os valores da água de uma estratégia ótima entre dois estágios consecutivos, utilizável na construção das curvas de valor da água de trás para diante.

ABSTRACT

The problem of economical operation of hydrothermo-electrical systems is to minimize the operational costs of thermal plants, due to fuel consumption, in order to supply the load, during the planning period, subjected to restrictions due to the size of reservoirs and due to natural factors.

This cost minimization study assumes: (a) composite system, that is, with only one equivalent reservoir ; (b) deterministic inflows and load; (c) discounted costs and (d) realistic hypothesis about the thermoelectric generation costs. The continuous deterministic problem is transformed into a discrete equivalent problem, in order to find discrete controls to substitute the continuous one. The application of those controls to find the optimal policy is studied. A result is shown which characterizes the water value on the optimal policy. Those results are useful to the backwards construction of the water value curves.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - O PROBLEMA .....	1
Seção 1 - INTRODUÇÃO .....	1
Seção 2 - O MODELO COMPOSTO .....	5
Seção 3 - ABORDAGENS DO PROBLEMA .....	7
Seção 4 - NOTAÇÃO .....	8
CAPÍTULO II - A ESTRATÉGIA ÓTIMA .....	9
Seção 1 - FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA CONTÍNUO .....	10
Seção 2 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES DE OTIMALIDADE .....	16
Seção 3 - O VALOR DA ÁGUA .....	20
Seção 4 - A ESTRATÉGIA ÓTIMA - TEOREMAS .....	22
CAPÍTULO III - OS CONTROLES DISCRETOS .....	37
Seção 1 - O PROBLEMA PSEUDO-DISCRETO .....	38
Seção 2 - OS LIMITES DE ARMAZENAMENTO .....	42
Seção 3 - OS CONTROLES DISCRETOS .....	49
CAPÍTULO IV - O TEOREMA DA VALOR DA ÁGUA .....	57
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES .....	63
BIBLIOGRAFIA .....	65

## CAPÍTULO I

### O PROBLEMA

#### Seção 1 : INTRODUÇÃO

Em virtude do crescimento dos sistemas energéticos , em dimensão e em complexidade, torna-se cada vez mais importante o planejamento racional da operação destes sistemas. O sistema brasileiro é, em sua maioria, constituído de usinas hidroelétricas e térmicas convencionais, com predominância das primeiras. A relativa abundância de recursos hídricos e a escassez de combustível resalta ainda mais a importância da obtenção de políticas ótimas de operação.

Na otimização dos custos de operação de sistemas hidrotérmicos é necessário escolher entre turbinar a água armazenada nos reservatórios, e manter uma reserva hidráulica, substituindo-a por uma geração térmica equivalente, capaz de suprir a demanda. Assim, a utilização da geração hidráulica em lugar da térmica, para atender à demanda, representa uma economia imediata, devido à redução no consumo de combustível da usina térmica. Por outro lado, é preciso garantir o suprimento nos meses vindouros, o que pode levar à utilização futura de térmicas mais caras, ou à ocorrência de deficit, devido à limitação dos recursos hídricos de um sistema desta natureza.

Interessa portanto minimizar os gastos operacionais das térmicas, resultantes do consumo de combustível, de maneira a garantir o suprimento. A solução deste problema de planejamento deve especificar a quantidade de energia a ser gerada em cada usina, para todo o período de planejamento. Os níveis de geração fornecem uma estratégia de operação do sistema.

O problema real é estocástico e contínuo no tempo, mas tem sido estudado de maneira discreta, devido à sua complexidade e à dificuldade em tratar controles contínuos. Em /5/, o problema contínuo é estudado com hipóteses restritivas. Para este problema são apresentadas em /1/ e /2/ conclusões básicas concernentes à estratégia ótima de operação do sistema. O objetivo deste trabalho é transformar o problema contínuo em problema discreto no tempo, mostrando que é possível encontrar controles discretos e equivalentes ao controle contínuo inicialmente definido. Além disso, explora-se a utilidade deste controles no que diz respeito à obtenção da estratégia ótima de geração. O problema é estocástico, mas será neste trabalho tratado de forma determinística, como primeiro passo para a resolução do problema.

No presente trabalho, o conceito de valor da água desempenha papel preponderante. Numa primeira aproximação, sabendo-se que no instante  $t$  a reserva se acha no estado  $w_t$ , o valor da água corresponde à estimativa do valor atual das economias de combustível no futuro, se o volume do reservatório fôsse acrescido no instante  $t$  de uma "unidade" /14/, /15/.



Faz-se inicialmente a modelagem do sistema, baseada em considerações feitas em /2/, estudando suas componentes, propondo certas simplificações que tornarão a abordagem mais simples, levando porém a resultados ainda significativos. O sistema modelado no capítulo II tem as características citadas em /2/. O modelo composto aqui adotado, que propõe a substituição do conjunto de reservatórios do sistema por um reservatório único cujas características são equivalentes às do sistema, tem sido largamente utilizado para tratar o problema de gestão ótima de reservatórios. A adoção deste modelo, inicialmente proposto por Little /4/, exige a resolução de um outro problema de planejamento: distribuir o total de energia a ser gerada por cada uma das usinas hidroelétricas. Este problema, proveniente da utilização do modelo composto, não será tratado neste trabalho /1/ .

Em seguida, enuncia-se o problema contínuo de planejamento da operação, e apresentam-se algumas definições e resultados de /1/,/2/. Introduce-se então a noção de valor da água, seguida de alguns resultados referentes ao mesmo.

No capítulo II são demonstrados resultados importantes que caracterizam a estratégia ótima.

No capítulo III o problema contínuo é discretizado, sendo demanda e afluência consideradas constantes por estágio. Esta abordagem permite variações na geração térmica entre estágios, fornecendo resultados bastante realistas. Neste capítulo mostra-se que o controle contínuo pode ser transformado em controles dis

cretos no tempo, contendo informações sobre o valor da água sobre a trajetória ótima.

O capítulo IV apresenta um teorema importante que caracteriza os valores da água de uma estratégia ótima entre dois estágios consecutivos, utilizável na construção das curvas de valor da água de "trás para diante". Estes resultados são úteis na construção de um algoritmo para resolver o problema de trás para diante, que seria mais eficiente do que programação dinâmica, diminuindo consideravelmente o número de cálculos efetuados. A construção deste algoritmo não será objeto deste estudo.

## Seção 2 : O MODELO COMPOSTO

Um sistema de geração hidrotérmica tem por finalidade gerar energia elétrica para atendimento de um mercado consumidor utilizando usinas de geração hidroelétricas e térmicas, ligadas às áreas de consumo por redes de transmissão. Uma usina hidroelétrica compõe-se basicamente de um reservatório para armazenamento de água e de uma estação geradora contendo turbinas e geradores elétricos.

As principais variáveis atuantes numa usina hidroelétrica são: volume de água no reservatório, fluxo afluente ao sistema e fluxo efluente da usina. Descrição mais detalhada encontra-se em /8/. Uma usina térmica gera energia elétrica por consumo de combustível, podendo ser de vários tipos tais como: a óleo, a gás, nuclear, etc. Os fatores atuantes numa térmica são: capacidade geradora e custo de operação, que dependem do tipo e das características da usina. Para o estudo do sistema de geração hidrotérmica devem ser considerados afluência, demanda, eficiência e perdas /2/.

A consideração de todos os detalhes físicos do sistema levaria à formulação de um problema demasiado complexo no que concerne à modelagem e à resolução. Assim, faz-se uma simplificação do modelo, procurando manter as principais características do sistema, obtendo resultados ainda significativos e realistas, de possível utilização num estudo mais completo.

Adota-se para o sistema o modelo composto, que se ca

racteriza pela substituição do conjunto de usinas hidroelétricas de um sistema hidrotérmico por uma só usina hidroelétrica de capacidade e características equivalentes às do sistema real, com certas aproximações. Para que o modelo seja válido, faz-se necessária uma uniformização das características das hidroelétricas, a fim de que a usina equivalente possa ser representativa do conjunto. As principais hipóteses de homogeneidade exigidas pelo modelo são: dos regimes hidrológicos presentes, da distribuição na área de consumo da demanda total e dos níveis dos reservatórios quando operados individualmente.

A equivalência de capacidade das hidroelétricas pode ser obtida de duas maneiras diferentes: por equivalência em volume de água armazenada ou por equivalência do potencial gerador /6/. No presente estudo será adotado o primeiro processo. Neste caso a transformação água-energia deve envolver todas as características próprias de cada usina. Além disso, supõe-se que a relação de transformação água-energia é independente da altura da queda da água e do rendimento das turbinas e geradores.

Um estudo completo da modelagem do problema é feito em /8/. Considerações sobre afluência, demanda, vazão, armazenamento, deficit, disponibilidade, custo de operação são feitas em /2/.

### Seção 3 : ABORDAGENS DO PROBLEMA

Os enfoques encontrados na literatura para a análise do problema diferem entre si principalmente no que concerne ao tempo, considerado como variável discreta ou contínua, à afluência, considerada como determinística ou aleatória, e à variável de decisão.

Os métodos diretos determinam diretamente a potência térmica ou hidráulica a cada instante do período. Existem estudos feitos considerando o intervalo de planejamento discretizado /4/ ou contínuo /5/, /6/.

O estudo desenvolvido em /4/ interpreta o problema hidroelétrico composto como um problema clássico de estoques. O problema é resolvido através de programação dinâmica estocástica.

Nos enfoques contínuos, o problema é resolvido graficamente. A trajetória ótima é obtida por partes /7/.

Nos métodos indiretos, a decisão é tomada com base em tabelas de valor marginal da água estocada. A operação do sistema é obtida fazendo-se acionar num certo estágio as usinas térmicas cujos custos marginais de geração são menores ou iguais ao valor da água associado ao estado do sistema naquele estágio. Este método é bastante difundido, tendo sido inclusive aplicado em vários sistemas de geração de potência, podendo-se citar como exemplo a Suécia /9/, /10/, a Noruega /12/, a França /6/, /7/ e os Estados Unidos /11/, /13/.

#### Seção 4 : NOTAÇÃO

Seguem-se algumas particularidades da notação adotada neste trabalho.

. Seja  $u(.) : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função com

$$t \longmapsto u(t)$$

$$\text{Define-se: } u(t^+) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} u(t+\delta)$$

. Diz-se que  $u$  é contínua à direita se e só se

$$(\forall t \in A) \quad u(t) = u(t^+)$$

. Sejam  $Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ ,  $v(.,.): Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(w, t) \longmapsto v(w, t)$$

$$\text{Define-se } v(w^-, t) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} v(w-\delta, t)$$

. Seja  $f(.) : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f$  é dita crescente se e só se

$$(\forall t_1, t_2 \in X) \quad t_1 < t_2 \longrightarrow f(t_1) \leq f(t_2)$$

$f$  é dita estritamente crescente se e só se

$$(\forall t_1, t_2 \in X) \quad t_1 < t_2 \longrightarrow f(t_1) < f(t_2)$$

As definições de função decrescente e estritamente decrescente são análogas.

## CAPÍTULO II

### A ESTRATÉGIA ÓTIMA

Neste capítulo apresenta-se formalmente um modelo do sistema em estudo, a partir do qual será enunciado o problema de planejamento de operação do sistema. Inicialmente o problema será considerado contínuo. No capítulo seguinte, o problema será considerado discreto no tempo; o controle no  $k$ -ésimo estágio será considerado como uma função contínua entre os estágios  $k$  e  $k+1$ . Posteriormente será mostrado que para cada par estado-estágio é possível associar a este controle contínuo no tempo, entre estágios, um controle independente do tempo, que conterá informações sobre o valor da água no respectivo par estado-estágio ao qual esteja associado.

Na Seção 1 deste capítulo define-se formalmente o problema contínuo de planejamento da operação. Na Seção 2 serão apresentadas algumas definições e resultados das referências /1/ e /2/. Na Seção 3 define-se valor da água e apresenta-se alguns resultados referentes ao mesmo. Na Seção 4 são demonstrados alguns teoremas relacionados com a estratégia ótima.

Seção 1 : FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA CONTÍNUO

Apresenta-se a seguir uma descrição das variáveis e restrições envolvidas no problema contínuo e a ser definido no final desta seção.

1 Sejam:

$[t_0, T]$  = período de planejamento

$W$  = volume máximo do reservatório do modelo composto

$W_T$  = volume máximo exigido no final do período de planejamento

As principais variáveis que caracterizam o sistema são:

2 Estado  $w \in \mathbb{R}^+$

Volume de água no reservatório. Um estado  $w \in \mathbb{R}$  é viável se  $w \in [0, W]$ .

3 Demanda  $d : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Para  $t \in [t_0, T)$ ,  $d(t)$  é a quantidade de energia demandada pelo mercado no instante  $t$ .

4 Afluência  $x : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$  contínua à direita.

Para  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(t)$  é o fluxo de água que chega ao reservatório no instante  $t$ .

5 Controle  $u \in \mathbb{R}^+$

Nível de potência termelétrica utilizada na produ-



ção total de energia. Um controle  $u \in \mathbb{R}$  é dito viável em  $t \in [t_0, T)$  se  $u \in [0, d(t)]$ .

6 Vertimento  $q : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Para  $t \in [t_0, T)$ ,  $q(t)$  é a vazão efluente do sistema, não utilizada para a geração de energia no instante  $t$ .

Um vertimento no instante  $t \in [t_0, T)$ ,  $q(t)$ , é dito admissível quando :

$q(t) > 0 \rightarrow \omega(t) = W$ , ou seja, só se permite vertimento se o reservatório estiver cheio.

$q(t^+) = q(t)$ , ou seja,  $q(\cdot)$  é contínua à direita

7 Estratégia  $u : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Função que associa a cada instante  $t$  do período de planejamento um controle  $u(t)$ .

8 Equação de Transição de Estado :

Dados um instante  $t_1 \in [t_0, T)$  e o estado do sistema neste instante,  $\omega(t_1) = w_1$ , o estado do sistema em qualquer instante  $t \in [t_1, T)$  é dado pelo balanço de fluxo afluyente e efluente do reservatório para cada instante entre  $t_1$  e  $t$ . Ou seja:

$$\omega(t) = w_1 + \int_{t_1}^t \{x(\tau) - d(\tau) + u(\tau) - q(\tau)\} d\tau$$

9 Trajetoária  $\omega : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$

Chama-se trajetória gerada por uma estratégia  $u(\cdot)$  e um vertimento  $q(\cdot)$  a partir de um estado inicial  $\omega(t_0) = w_0$ ,

a uma função que associa a cada instante  $t \in [t_0, T)$  o estado  $\omega(t)$  do sistema, obtido pela equação de transição (8). Para o instante final  $t=T$ ,  $\omega(T) = \lim_{t \rightarrow T} \omega(t)$ .

Uma trajetória  $\omega$  é viável se :

$$(\forall t \in [t_0, T)) , 0 \leq \omega(t) \leq W$$

10 Estratégia admissível a partir do par  $(w_0, t_0)$  :

Uma estratégia  $u(.)$  é admissível a partir de um estado inicial  $w_0$  em  $t=t_0$ , ou seja, a partir do par  $(w_0, t_0)$ , se :

- (i)  $u(.)$  contínua à direita, i.e.  $(\forall t \in [t_0, T))$ ,  $u(t) = u(t^+)$
- (ii) os controles são viáveis, i.e.  $(\forall t \in [t_0, T))$ ,  $0 \leq u(t) \leq d(t)$
- (iii)  $\exists q : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$  admissível, tal que a trajetória gerada por  $(u, q)$  a partir de  $w_0$  é viável.
- (iv) o estado final alcançado é  $\omega(T) \geq W_T$ .

11 Custo de um controle  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $u \mapsto c(u)$

Custo instantâneo associado ao nível de geração térmica (potência termoelétrica) especificado pelo controle  $u \in \mathbb{R}^+$ .

12 Custo marginal de um controle /2/  $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u \mapsto \psi(u)$

Define-se custo marginal de um controle  $u_0 \in \mathbb{R}$

como :

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(u_0) = \frac{\partial c}{\partial u^-}(u_0) \quad , \quad u_0 > 0$$

$\psi(\cdot)$  é o custo marginal associado ao nível de geração térmica  $u \in \mathbb{R}^+$ . Supõe-se que  $\psi$  é contínua à esquerda e crescente (não necessariamente estritamente crescente), com um número mero finito de descontinuidades. O custo marginal do controle  $u_0$  corresponde à derivada à esquerda do custo de geração de potência para o nível  $u_0$ .

13  $\beta > 0$  : Taxa de descontos aplicada ao capital gasto na geração do sistema

14 Custo de uma estratégia  $u(\cdot)$   $C(u)$  :

Custo total decorrente da adoção de uma estratégia de operação  $u(\cdot)$ , considerando desconto :

$$C(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T c(u(t)) e^{-\beta t} dt$$

Define-se agora o problema contínuo de planejamento a longo prazo do sistema assim modelado :

15 Problema

Conhecidos  $d(\cdot)$ ,  $x(\cdot)$ ,  $w_T$ ,  $w_0$ ,  $t_0$  e  $T$ , encontrar uma estratégia de geração admissível  $\hat{u}(\cdot)$  a partir de  $(w_0, t_0)$  de custo mínimo entre tais estratégias :

$$C(\hat{u}(\cdot)) = \min\{C(u(\cdot)) / u(\cdot) \text{ admissível a partir de } (w_0, t_0)\}$$

Uma estratégia que satisfaça a estas condições é dita ótima de operação do sistema.

16 Demonstra-se em /1/ a existência e unicidade de solução para o problema acima, com hipóteses mais gerais do que as admitidas neste trabalho.

17 Estratégia ótima  $\hat{u}_{w,t}$  a partir de  $(w,t) \in [0,W] \times [t_0,T)$  :

É uma estratégia de operação admissível que resolve o problema proposto em (15) a partir de  $(w,t)$ , onde  $w$  é o estado do sistema no instante  $t$ .

18 Serão apresentados a seguir alguns lemas, que foram demonstrados em /2/, e que relacionam o vertimento  $q(\cdot)$  e a geração  $u(\cdot)$  de uma trajetória viável  $w(\cdot)$ , mostrando que o conhecimento de  $u(\cdot)$  é suficiente para definir perfeitamente o vertimento  $q(\cdot)$ .

19 Lema 1 : /2/

Suponha-se conhecido o par  $(w_0, t_0)$ , e as funções  $q(\cdot)$  e  $u(\cdot)$  tais que :

- a trajetória  $w$  gerada por  $(u,q)$  é viável ;
- a função  $u$  é contínua à direita .

Nesse caso, a curva  $q(\cdot)$  é admissível se e só se  $(\forall t \in [t_0, T))$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega(t) < W \\ \max\{0; u(t)+x(t)-d(t)\} & \text{se } \omega(t) = W \end{cases}$$

20 Lema 2 : /2/

Seja  $u(\cdot)$  estratégia ótima a partir de  $(w_0, t_0)$  e  $q(\cdot)$  vertimento associado.

Então :

$$(\forall t \in [t_0, T)) \quad (q(t) > 0 \rightarrow u(t) = 0)$$

21 Lema 3 : /2/

Seja  $\omega(\cdot)$  uma trajetória gerada por uma estratégia ótima  $u(\cdot)$  a partir de  $(w_0, t_0)$ . Então

$$(i) \quad \omega(t) = W \rightarrow q(t) = \max\{0; x(t)-d(t)\}$$

$$(ii) \quad \omega(t) = 0 \rightarrow u(t) \geq d(t) - x(t)$$

22 Trajetoária ótima  $\hat{w}_{w,t}$  gerada por uma estratégia ótima  $\hat{u}_{w,t}$  a partir de  $(w,t)$  :

Com base nos resultados enunciados em (19), (20) e (21), a trajetória ótima gerada por uma estratégia ótima  $\hat{u}_{w,t}$  a partir de  $(w,t)$  é a trajetória gerada por  $\hat{u}_{w,t}$  e pelo vertimento  $\hat{q}(\cdot)$ , único, associado a  $\hat{u}_{w,t}$ , conforme (18).

23 Custo de uma estratégia ótima de operação  $u(\cdot)$  a partir de  $(w,t)$ 

Dado  $(w,t) \in [0,W) \times [t_0,T)$ , denota-se por  $C(w,t)$  o custo de uma estratégia ótima a partir de  $(w,t)$ .

Fica assim definido o problema contínuo. Na próxima seção serão apresentadas algumas definições e um teorema de condição necessária e suficiente de otimalidade.

## Seção 2: CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES DE OTIMALIDADE

24 Inicialmente serão apresentadas nesta seção algumas definições. Em seguida será enunciado um teorema de condições necessárias e suficientes de otimalidade de uma estratégia, o qual se encontra demonstrado em /1/. Estas condições são bastante gerais, fornecendo um método gráfico de resolução do problema.

### Definições :

25 Instante Característico  $t_i \in [t_0, T]$

Um instante  $t_i$  é dito instante característico de uma dada trajetória  $\omega(\cdot)$  se no referido instante a trajetória atinge um dos limites de armazenamento. Além disso,  $t_i$  é um instante característico se é instante inicial ou final.

Ou seja,  $t_i$  é um instante característico se uma das seguintes condições é satisfeita :

(i)  $t_i = 0$

(ii)  $t_i = T$

(iii)  $\omega(t_i) = 0$  e  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall t \in [t_i - \delta, t_i), \omega(t) > 0$ .

(iv)  $\omega(t_i) = W$  e  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall t \in [t_i - \delta, t_i), \omega(t) < W$

26 Intervalos característicos  $\Delta t_i \subseteq \mathbb{R}^+$

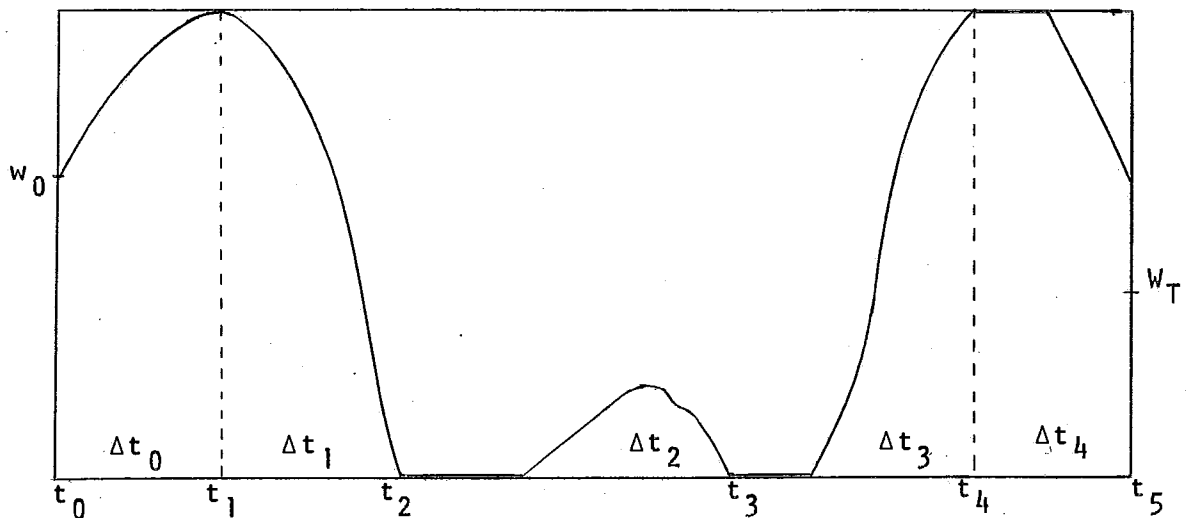
Um intervalo característico é um intervalo aberto à direita, fechado à esquerda, entre dois instantes característicos consecutivos, ou seja :

dados dois instantes característicos  $t_i, t_j$  ,

$[t_i, t_j)$  é intervalo característico se :

$\nexists t \in (t_i, t_j)$  tal que  $t$  é instante característico

Graficamente, tem-se :



Será formulado a seguir um teorema que estabelecerá condições necessárias e suficientes de otimalidade de uma estratégia, cuja demonstração se encontra em /1/.

27 Teorema:

Sejam  $(w_0, t_0)$  par estado-estágio;  $u$  estratégia admissível a partir de  $(w_0, t_0)$ ;  $q$  vertimento admissível a  $u$  e  $w$  estratégia gerada por  $(u, q)$ .

Uma estratégia  $u$  a partir de  $(w_0, t_0)$  é ótima se e só se existe  $p: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  contínua à direita, tal que o par  $(p, u)$  satisfaz às condições a seguir:

28 CNSO : Condições Necessárias e Suficientes de Otimalidade :

Dados  $t_1, t_2 \in [t_0, T]$ ,  $t_1 \leq t_2$

$$(i) \quad \{\omega(t)/t \in [t_1, t_2]\} \subseteq [0, W) \rightarrow p(t_1) \geq p(t_2)$$

$$\{\omega(t)/t \in [t_1, t_2]\} \subseteq (0, W] \rightarrow p(t_1) \leq p(t_2)$$

$$(ii) \quad (\forall t \in [t_0, T]) \quad p(t) \geq \psi(u(t)) e^{-\beta t}$$

$$u(t) < d(t) \rightarrow p(t) \leq \psi(u(t)^+) e^{-\beta t}$$

$$(iii) \quad (\forall t \in [t_0, T]) \quad p(t)q(t) = 0$$

$$(iv) \quad p(T)\{\omega(T) - W_T\} = 0$$

## 29

O teorema apresenta condições necessárias e suficientes de otimalidade de uma estratégia  $u(\cdot)$ , garantindo a existência de uma função  $p(\cdot)$  com as seguintes características :



- $p(\cdot)$  é crescente enquanto o reservatório não atinge o limite inferior de armazenamento e é decrescente enquanto não atinge o limite superior. Portanto,  $p(\cdot)$  é constante exceto quando os limites de armazenamento são atingidos, podendo aumentar se o superior é atingido e diminuir se o inferior é atingido.
- Para um dado instante de tempo  $t$ , o valor do custo marginal de geração térmica descontado,  $\psi(u(t))e^{-\beta t}$ , é limitado superiormente pelo valor de  $p$  no instante  $t$ . Se a geração térmica é estritamente menor do que a demanda no instante  $t$ , o valor do custo marginal à direita da geração térmica,  $\psi(u(t)^+)e^{-\beta t}$  é limitado inferiormente pelo valor de  $p$  no instante  $t$ . Em outras palavras,  $p(t)e^{-\beta t}$  deve estar entre os valores do custo marginal à esquerda e à direita de  $u(t)$ .
- $p(\cdot)$  satisfaz à seguinte condição: se num dado instante  $t$  o vertimento é não nulo, então o valor de  $p$  neste instante é nulo, e se o valor de  $p$  é não nulo, então o vertimento é nulo (complementaridade).
- $p(\cdot)$  satisfaz à condição terminal:  $p(T)\{\omega(T) - W_T\} = 0$ , ou seja,  $p$  é tal que se no instante final  $T$  a trajetória  $\omega$  atingir um estado superior a  $W_T$ , então o valor de  $p$  é nulo em  $T$ .

### Seção 3 : O VALOR DA ÁGUA

Nesta seção será introduzida a definição de valor da água e será apresentado um teorema que relaciona a curva de valor da água com as curvas  $p(\cdot)$  associadas à política ótima conforme as condições formuladas no teorema (27).

#### 30 Definição : Valor da água

Define-se valor de água no ponto  $(w_t, t) \in [0, W) \times [t_0, T)$  como o simétrico do valor da derivada à direita da função custo de uma estratégia ótima de operação a partir de  $(w_t, t)$  em relação à variável de estado  $w$ , no ponto  $(w_t, t)$ , isto é

$$31 \quad v(w_t, t) = - \frac{\partial C}{\partial w^+} (w_t, t) \quad , \quad C(w_t, t) \text{ definido em (22)}$$

Em outras palavras, o valor da água exprime o decréscimo no custo da estratégia ótima a partir de  $(w_t, t)$ , se o volume do reservatório for acrescido de uma "unidade".

32 Quando  $w_t = W$ , a derivada à direita em  $(w_t, t)$  não está definida. Para este caso o valor da água será definido com base no teorema (33) que será enunciado a seguir, e que relaciona o valor da água para a trajetória ótima num dado instante  $t$  com valores das funções  $p$  associadas por (28) à estratégia ótima a partir de  $(w_t, t)$ .

33 Teorema :

Seja  $(w, t) \in [0, W) \times [t_0, T]$ .

Seja  $u = \hat{u}_{w,t}$ , estratégia ótima a partir de  $(w, t)$  (17), e  $\omega = \hat{\omega}_{w,t}$  a trajetória ótima gerada por  $u$  a partir de  $(w, t)$  (22).

Seja  $P = \{p(.) / (p, u) \text{ satisfazendo às CNSO (28)}\}$

$$34 \text{ Então : } v(w_t, t) = \min_{p \in P} p(t)$$

O teorema acima enunciado afirma que o valor da água associado ao par  $(w, t)$ ,  $w \neq W$  é igual ao menor dentre os valores no ponto  $t$  das funções  $p$  que satisfaçam (28).

A partir das considerações feitas em (32), com base no teorema (33), define-se o valor da água no par  $(W, t)$  como sendo:

$$35 \quad v(W, t) = \min_{p \in P} p(t)$$

$P$  definido em (33) para  $w = W$ .

Cumpra observar que o valor obtido para o valor da água utilizando a definição (35) para  $w=W$  coincide com o valor obtido considerando o limite do valor da água quando o volume do reservatório tende ao volume máximo, ou seja,  $\lim_{w \rightarrow W} v(w, t) = v(W, t)$ , exceto em casos particulares /1/.

#### Seção 4 : A ESTRATÉGIA ÓTIMA - TEOREMAS

Nesta seção serão demonstrados alguns teoremas, utilizados nos capítulos subsequentes, após a discretização do problema contínuo, efetuada no capítulo seguinte. Estes teoremas relacionam a estratégia ótima  $u$  com as funções  $p$  que satisfazem com  $u$  às CNSO (28), e com o valor da água (30) associado à trajetória ótima.

Os teoremas (37) e (45) caracterizam um par  $(p,u)$  que satisfaça às CNSO (28). O teorema (45) possui um corolário importante (57) que mostra que a curva de valor da água  $v(.,t)$  é decrescente com  $w$ . O teorema (58) apresenta um resultado fundamental, relacionando uma função  $p$ , que satisfaz com  $u$  às CNSO (28), com o valor da água associado à trajetória ótima.

O primeiro teorema afirma que se o nível do reservatório não atinge o limite inferior de armazenamento num determinado intervalo  $I$ , então um par  $(p,u)$  que satisfaça às CNSO (28) tem a seguinte propriedade: em cada instante  $t \in I$  a geração termoeleétrica  $u(t)$  assume o maior valor possível a custo marginal não superior a  $p(t)$ , com a restrição de satisfação da demanda. Ou seja :

( $\forall t \in I$ )

$$u(t) = \max\{u \in \mathbb{R} / \psi(u)e^{-\beta t} \leq p(t) \text{ , } u \leq d(t)\}$$

diz-se que  $u$  é gerado pela função  $p(\cdot)$  no intervalo  $I$ , e denota-se por  $u_p(\cdot)$ . Se  $p$  é constante em  $I$ , ou seja,  $(\forall t \in I) p(t) = v$ , diz-se que  $u$  é gerado pelo valor  $v$  no intervalo  $I$ , denotando-se por  $u_v(\cdot)$ .

Nos teoremas a seguir utiliza-se a notação introduzida em (17) e (22).

### 37 Teorema :

Considere-se o problema (15).

Sejam:  $(w, \tau) \in [0, W] \times [t_0, T]$  ;  $u = \hat{u}_{w, \tau}$  ;  $\omega = \hat{\omega}_{w, \tau}$  ;

$p(\cdot)$  uma função (27) que satisfaz com  $u$  às CNSO (28) ;  
 $u_p$  (36).

Neste caso :  $t \in [\tau, T)$

$$38 \quad \omega(t) > 0 \quad \rightarrow \quad u(t) = u_p(t)$$

### Demonstração :

39 Pelas CNSO (28i) tem-se que :

$$(\forall t \in [\tau, T)) \quad p(t) \geq \psi(u(t))e^{-\beta t}$$

$$\text{Portanto : } (\forall t \in [\tau, T)) \quad u(t) \leq u_p(t)$$

40 Pelas CNSO (28ii) para  $t \in [t_0, T)$  com  $u(t) < d(t)$  tem-se :

$$\psi(u(t)^+)e^{-\beta t} \geq p(t)$$

Suponha-se por absurdo que  $(\exists \sigma \in [\tau, T))$  satisfazendo :

$$\omega(\sigma) > 0 \quad \text{e} \quad u(\sigma) < u_p(\sigma)$$

Da definição de  $u_p$  tem-se:  $u(\sigma) < d(\sigma)$

41 Pela continuidade à direita de  $u$ ,  $d$ , e  $\omega$  tem-se que

$\exists \xi > 0$ ,  $\delta > 0$ , satisfazendo

$$(\forall t \in (\sigma, \sigma + \xi)) \quad \omega(t) > 0, \quad u(t) < d(t) \quad \text{e} \quad u(t) + \delta < u_p(\sigma)$$

Da definição de  $u_p$  (36) e de (41), tem-se :

$$(\forall t \in (\sigma, \sigma + \xi)) \quad \psi(u(t) + \delta)e^{-\beta t} \leq \psi(u_p(\sigma))e^{-\beta \sigma} \leq p(\sigma)$$

Por (41) tem-se  $(\forall t \in (\sigma, \sigma + \xi)) \quad \omega(t) > 0$ .

Por (28i) tem-se  $(\forall t \in (\sigma, \sigma + \xi)) \quad p(t) \geq p(\sigma)$

Como  $\beta > 0$ , vale:  $(\forall t \in (\sigma, \sigma + \xi)) \quad e^{-\beta t} < e^{-\beta \sigma}$

Donde:  $(\forall t \in (\sigma, \sigma + \xi)) \quad \psi(u(t) + \delta)e^{-\beta t} < p(t)$ , contradizendo (40) e provando (38).

cqd

Este teorema possui um corolário importante que será demonstrado a seguir. O corolário afirma que se o nível do reservatório não atinge o limite inferior de armazenamento num determinado intervalo  $I$ , então qualquer estratégia ótima é crescente neste intervalo.

42 Corolário :

Nas condições do teorema (37), considere-se

$t_1, t_2 \in [\tau, T)$  tais que  $t_1 < t_2$  e  $(\forall t \in [t_1, t_2]) \quad \omega(t) > 0$ .

43 Então:  $u(t_2) \geq u(t_1)$

Demonstração :

É consequência do teorema (37).

De fato, considere-se  $t_1$  e  $t_2$  como em (42).

Por hipótese ( $\forall t \in [t_1, t_2]$ )  $\omega(t) > 0$

Por (37) ( $\forall t \in [t_1, t_2]$ )  $u(t) = u_p(t)$

Por (28i) tem-se que  $p$  é crescente em  $[t_1, t_2]$ . Logo,  $p(t_1) \leq p(t_2)$

Por hipótese  $u(t_1) \leq d(t_2)$ . Assim:

$$\begin{aligned}
 u(t_1) &= u_p(t_1) \\
 &= \max\{u \in \mathbb{R} / \psi(u)e^{-\beta t_1} \leq p(t_1), u \leq d(t_1)\} \\
 &\leq \max\{u \in \mathbb{R} / \psi(u)e^{-\beta t_1} \leq p(t_1), u \leq d(t_2)\} \\
 &\leq \max\{u \in \mathbb{R} / \psi(u)e^{-\beta t_2} e^{-\beta(t_1-t_2)} \leq p(t_2), u \leq d(t_2)\} \\
 &= u_p(t_2) \\
 &= u(t_2), \quad \text{por (44)}.
 \end{aligned}$$

cqd

O teorema (45) demonstrado a seguir compara estratégias ótimas partindo de estados diferentes no mesmo instante de tempo. O teorema mostra que, sob determinadas condições, à medida que o volume do reservatório decresce, a estratégia ótima cresce, bem como o valor de alguma função  $p$  que satisfaz com a estratégia ótima às CNSO (28).

45 Teorema :

Sejam :  $\tau \in [t_0, T)$  ;  $w_1, w_2 \in [0, W]$  ;

$$u_1 = \hat{u}_{w_1, \tau} ; \omega_1 = \hat{\omega}_{w_1, \tau} ; u_2 = \hat{u}_{w_2, \tau} ; \omega_2 = \hat{\omega}_{w_2, \tau} ;$$

$p_1$  e  $p_2$  funções tais que  $(p_1, u_1)$  e  $(p_2, u_2)$  satisficam às CNSO (28).

Nestas condições , se  $w_1 > w_2$  e  $v(w_2, \tau) > 0$  , então

46 (i)  $p_1(\tau) < p_2(\tau)$

47 (ii) existem funções  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  tais que :

(a)  $(\bar{p}_1, u_1)$  e  $(\bar{p}_2, u_2)$  satisfazem às CNSO (28)

(b)  $(\forall t \in [\tau, T]) \bar{p}_1(t) \leq \bar{p}_2(t)$

48 (iii)  $(\forall t \in [\tau, T]) u_1(t) \leq u_2(t)$

Demonstração :

(i) Prove-se inicialmente (46)

49 Afirmção :

Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são tais que  $(\forall t \in [\tau, T]) \omega_1(t) \neq \omega_2(t)$  , então (46) é satisfeita.

De fato, como  $w_1 > w_2$  e  $\omega_1(\cdot) \neq \omega_2(\cdot)$  , pela continuidade de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  tem-se que :

$$(\forall t \in [\tau, T]) \omega_1(t) > \omega_2(t)$$

Logo  $(\forall t \in [\tau, T]) \omega_1(t) > 0$  e  $\omega_1(T) > W_T$



Da condição (28 iv) ,  $p_1(T) = 0$  . De (28i),  $p_1$  é crescente em  $[\tau, T]$  e portanto  $p_1(\tau) \leq p_1(T) = 0$  .

Mas  $p_2(\tau) \geq v(w_2, \tau) > 0$  . Logo  $p_2(\tau) > p_1(\tau)$  , demonstrando (49).

50 Afirmção :

Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  têm ponto em comum, então (46) é satisfeita.

De fato :

51 Seja  $\eta = \min\{t \in [\tau, T] / \omega_1(t) = \omega_2(t)\}$  . A existência de  $\eta$  é garantida pela continuidade de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  .

Como  $\omega_1 > \omega_2$  , tem-se  $\eta \neq \tau$  .

52 Como  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são contínuas:  $(\forall t \in [\tau, \eta)) \quad 0 \leq \omega_2(t) < \omega_1(t) \leq W$ .

Pelas CNSO (28i) tem-se  $p_1$  crescente e  $p_2$  decrescente em  $[\tau, \eta)$ .

Por (33)  $p_2(\tau) \geq v(w_2, \tau) > 0$  .

53 Prove-se que  $p_2(\tau) > p_1(\tau)$ .

Suponha-se por absurdo que  $p_1(\tau) \geq p_2(\tau)$

Por (28ii) :  $(\forall t \in [\tau, \eta)) \quad p_1(t) \geq p_2(t)$

54 Assim:  $(\forall t \in [\tau, \eta))$

$$u(t_1) = u_{p_1}(t) \quad , \quad \text{por (37)}$$

$$\geq u_{p_2}(t)$$

$$\geq u_2(t) \quad , \quad \text{por (28ii)}$$

Por (19) e (52), tem-se que o vertimento  $q_2$ , associado a  $\omega_2$  é nulo em  $[\tau, \eta)$ .

O vertimento  $q_1$  associado a  $\omega_1$  é nulo em  $[\tau, \eta)$ , pois :

$$\begin{aligned} (\forall t \in [\tau, \eta)) \quad p_1(t) &\geq p_1(\tau) \\ &\geq p_2(\tau) > 0 \quad , \text{ por (52)} \end{aligned}$$

e pela CNSO (28iii) ,  $p_1(t) \cdot q_1(t) = 0$  .

Portanto a equação de transição (8) fornece :

$$\begin{aligned} \omega_1(\eta) &= \omega_1(\tau) + \int_{\tau}^{\eta} (u_1(t) + x(t) - d(t)) dt \\ &\geq \omega_1(\tau) + \int_{\tau}^{\eta} (u_2(t) + x(t) - d(t)) dt \quad , \text{ por (54)} \\ &> \omega_2(\tau) + \int_{\tau}^{\eta} (u_2(t) + x(t) - d(t)) dt \quad , \text{ por (52)} \\ &= \omega_2(\eta) \end{aligned}$$

Assim  $\omega_1(\eta) > \omega_2(\eta)$  , contradizendo a definição de  $\eta$  (51) , provando (53) , e completando a demonstração de (46).

(ii) Prove-se (47) :

Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  não têm ponto em comum, ou seja :

se  $(\forall t \in [\tau, T]) \omega_1(t) > \omega_2(t)$  , tem-se, por (46), que :

$$(\forall t \in [\tau, T]) \quad p_1(t) \leq p_2(t) .$$

Se  $(\exists \theta \in [\tau, T]) \omega_1(\theta) = \omega_2(\theta)$  , considere-se  $\eta$  definido em (51).

Por (52) e pela unicidade da solução ótima, tem-se :

$$(\forall t \in [\tau, \eta)) \quad \omega_1(t) > \omega_2(t)$$

$$(\forall t \in [\eta, T]) \quad \omega_1(t) = \omega_2(t)$$

Seja  $\sigma \in (\eta, T]$  o primeiro instante característico comum a  $\omega_1$  e  $\omega_2$  a partir de  $\eta$ .

Construa-se  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  da seguinte maneira :

$$\text{Se } \omega_1(\sigma) = W : \quad \bar{p}_1(t) = p_1(t) \quad t \in [\tau, T]$$

$$\bar{p}_2(t) = \begin{cases} p_2(t) & t \in [\tau, \sigma) \\ p_1(t) & t \in [\sigma, T] \end{cases}$$

$\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  são crescentes em  $[\tau, \sigma]$ , satisfazendo (28i).

Se  $\omega_1(\sigma) = 0$  :

$$\bar{p}_1(t) = \begin{cases} p_1(t) & t \in [\tau, \sigma) \\ p_2(t) & t \in [\sigma, T] \end{cases}$$

$$\bar{p}_2(t) = p_2(t) \quad , \quad t \in [\tau, T]$$

$\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  são decrescentes em  $[\tau, \sigma]$ , satisfazendo (28i).

Pela construção de  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  as demais condições de otimalidade são trivialmente satisfeitas, provando (47).

(iii) Prove-se finalmente (48) .

55 Suponha-se por absurdo que  $(\exists \sigma \in [\tau, T)) \quad u_1(\sigma) > u_2(\sigma)$ .

Seja  $\eta = \min \{T\} \cup \{t \in [\tau, T] / \omega_1(t) = \omega_2(t)\}$

Então :  $\sigma \in [\tau, \eta)$

Assim:  $(\forall t \in [\tau, \eta)) \quad \omega_1(t) > \omega_2(t)$

56 Por (46) tem-se:  $(\forall t \in [\tau, \eta)) \quad p_1(t) < p_2(t)$

É claro que  $u_2(\sigma) < d(\sigma)$  pois  $u_1(\sigma) \leq d(\sigma)$  e por hipótese de absurdo (55),  $u_1(\sigma) > u_2(\sigma)$

Por (28i)  $\psi(u_2(\sigma)^+)e^{-\beta\sigma} \geq p_2(\sigma)$   
 $> p_1(\sigma)$  , por (56)

Por hipótese de absurdo (55) :

$$\begin{aligned} \psi(u_1(\sigma))e^{-\beta\sigma} &\geq \psi(u_2(\sigma))e^{-\beta\sigma} \\ &> p_1(\sigma) \quad \text{contradizendo (28ii)} . \end{aligned}$$

cqd

Este teorema possui um corolário importante que garante que, fixado um instante de tempo  $t$  , a curva de valor da água  $v(., t)$  é decrecente em  $w$  , e é estritamente decrecente em  $w$  enquanto não assumir valor zero. Ou seja, à medida que o volume do reservatório aumenta, o valor da água diminui.

57 Corolário :

Fixado  $t \in [t_0, T]$ , a curva de valor da água  $v(.,t) : [0, W] \rightarrow \mathbb{R}^+$  é estritamente decrescente em pontos  $w$  com  $v(w,t) > 0$ .

Demonstração :

É consequência do teorema (45).

De fato, considere-se a notação do teorema (45).

Por (33) pode-se escolher  $p_2$  satisfazendo  $p_2(t) = v(w_2, t)$ .

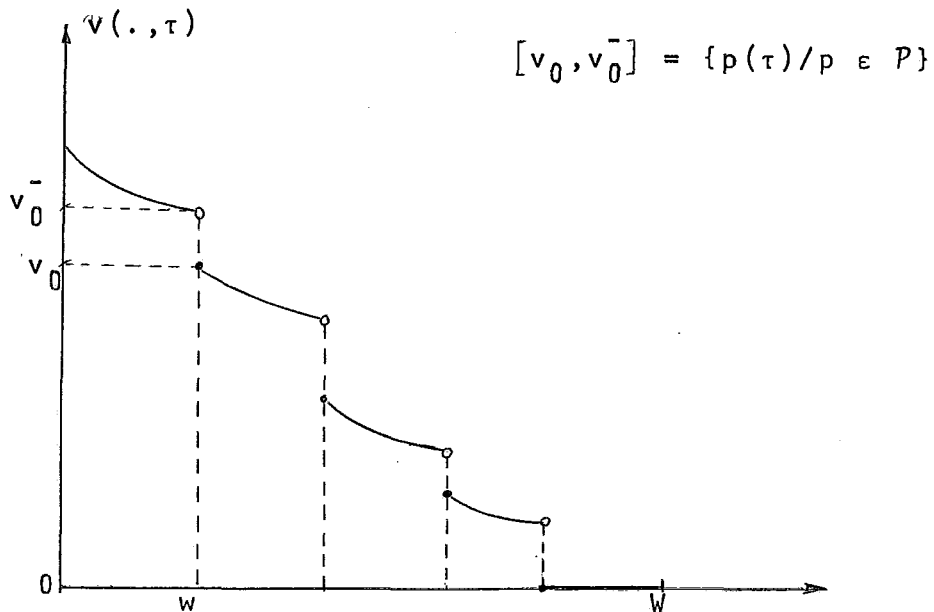
Por (33) e (46) :  $v(w_1, t) \leq p_1(t) = v(w_2, t)$

Portanto  $v(w_1, t) < v(w_2, t)$ , o que demonstra (57).

cqd

O teorema (58), demonstrado a seguir, caracteriza os valores da função  $p$  num determinado instante  $\tau$ , em função do valor da água para um dado nível. O teorema afirma que qualquer função  $p(.)$  (28) associada ao par  $(w, \tau)$  tem a seguinte propriedade: o valor de  $p$  no instante  $\tau$  é maior ou igual ao valor da água em  $(w, \tau)$ ,  $v_0$ , e menor ou igual ao valor da água à esquerda em  $(w, \tau)$ ,  $v_0^- = v(w^-, \tau)$ . Reciprocamente, a qualquer valor  $v' \in [v_0, v_0^-]$  pode ser associada uma função  $p'$  tal que  $(p', \hat{u}_{w, \tau})$  satisfaz às CNSO e seu valor no ponto  $\tau$  é  $v'$ . Assim, se  $w$  não é ponto de descontinuidade de  $v(., \tau)$  tem-se, para qualquer  $p$ ,  $p(\tau) = v_0$ . Se  $w$  é ponto de descontinuidade de  $v(., \tau)$ , para qualquer valor  $v'$  no intervalo de descontinuidade existe uma função  $p'$  tal que  $p'(\tau) = v'$ .

Este teorema pode ser obtido a partir dos resultados apresentados em /1/, mas em virtude de sua importância para o presente estudo, será aqui demonstrado separadamente.



### 58 Teorema

Sejam:  $(w, \tau)$  par estado-estágio,  $w \in (0, W]$ ,  $\tau \in [t_0, T)$  ;

$$u = \hat{u}_{w, \tau} ; P = \{p(\cdot)/(p, u) \text{ satisfaz às CNSO (28)}\} \quad (28)$$

$$v = v(w, \tau) , v^- = (w^-, \tau) .$$

Neste caso:  $\{p(\tau)/p \in P\} = [v, v^-]$

Demonstração :

59 ( $\subseteq$ )

Seja  $p \in P$ , com  $p(\tau) = v$ .

Como  $w > 0$ , tem-se por (45i):  $(\forall w' \in [0, w)) p(\tau) \leq v(w', \tau)$

Então:  $p(\tau) \leq v^-$

60 ( $\supseteq$ )

Se  $v = v^-$ , por (33), (58) é evidentemente verdadeira.

Resta analisar o caso  $v^- > v$ . Provar (58) equivale a provar que

$(\forall v_0 \in [v, v^-]) (\exists p_0 \in P) p_0(\tau) = v_0$ .

Sejam:  $\omega = \hat{\omega}_{w, \tau}$ , e  $p$  tal que  $(p, u)$  satisfaz às CNSO, com  $p(\tau) = v$ .

61 Seja  $t_1 = \min \{t \in [\tau, T] / \omega(t) = 0\} \cup \{T\}$

62 Afirmção :  $(\exists p^* \in P) p^*(\tau) = v^-$

Sejam  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}$  e  $\bar{w}$  definidos em  $[\tau, T]$ :

$$\bar{p}(t) = \begin{cases} \max\{v^-, p(t)\} & t < t_1 \\ p(t) & t \geq t_1 \end{cases}$$

$$\bar{u}(t) = u_{\bar{p}}(t)$$

$$\bar{w}(t) = w + \int_{\tau}^t (\bar{u}(\eta) + x(\eta) - d(\eta)) d\eta$$

Prove-se que:  $(\forall t \in [\tau, t_1)) \bar{u}(t) = u(t)$ , e que portanto  $\bar{p} \in P$ .

Como  $(\forall t \in [\tau, t_1)) \omega(t) > 0$ , tem-se por (37):  $(\forall t \in [\tau, t_1)) u(t) = u_p(t)$ .

Assim:  $(\forall t \in [\tau, t_1)) \bar{u}(t) \geq u(t)$

63 Suponha-se por absurdo que:  $(\exists \eta \in [\tau, t_1)) \bar{u}(\eta) > u(\eta)$

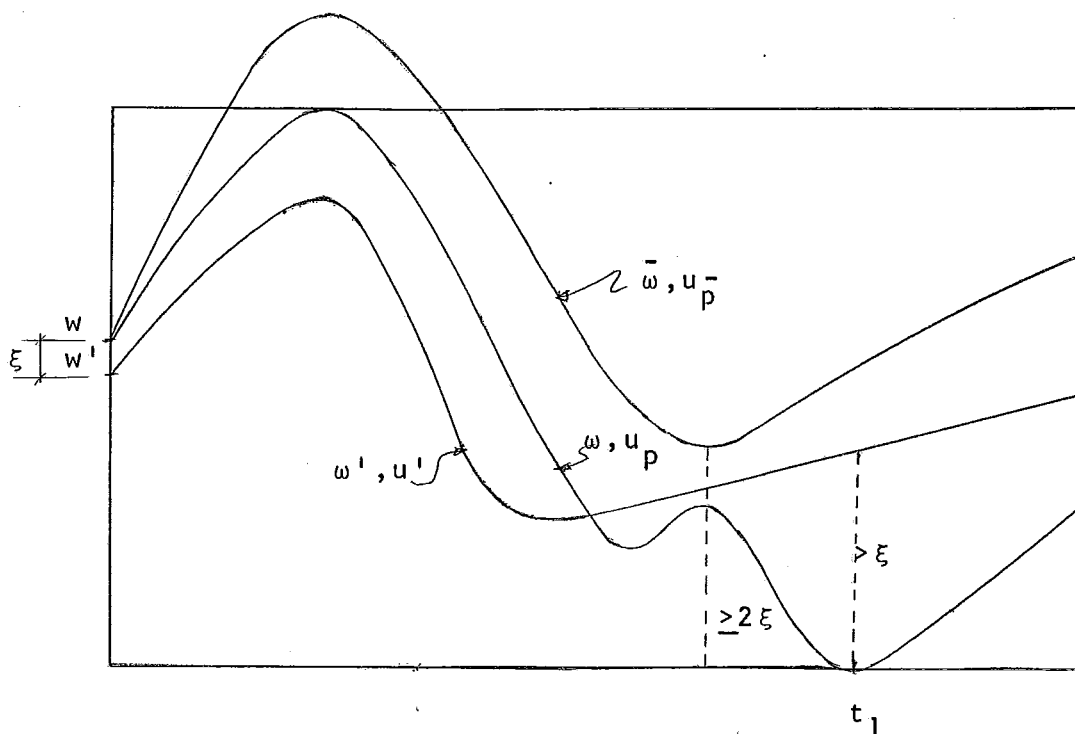
Pela continuidade à direita de  $\bar{u}$  e  $u$ :

$(\exists \text{ intervalo } I \subseteq [\tau, t_1)) (\forall t \in I) \bar{u}(t) > u(t)$

Por (8):  $(\forall t \in [\tau, t_1]) \bar{\omega}(t) \geq \omega(t)$  e  $\bar{\omega}(t_1) > \omega(t_1)$ .

Portanto:  $(\exists \xi > 0) (\forall t \in [\tau, t_1]) \bar{\omega}(t) > 2\xi$  e  $\bar{\omega}(t_1) - \omega(t_1) > 2\xi$

Sejam:  $w' = w - \xi$ ;  $u' = \hat{u}_{w', \tau}$ ;  $\omega' = \hat{\omega}_{w', \tau}$  e  $p'$  tal que  $(p', u')$  satisfaz às CNSO com  $p'(\tau) = v(w', \tau) = v'$ .





64 Como  $w' < w$ , pela unicidade da trajetória ótima, tem-se :

$$(\forall t \in [\tau, t_1]) \quad \omega'(t) \leq \omega(t)$$

Seja  $t_2 = \min\{t \in [\tau, t_1] / \omega'(t) = 0\} \cup \{T\}$

65 Afirmação :  $(\forall t \in [\tau, t_2]) \quad u'(t) \geq \bar{u}(t)$

De fato, como  $p'(\tau) \geq v^-$ , pelo teorema (37), tem-se :

$$(\forall t \in [\tau, t_2]) \quad u'(t) = u_{p'}(t) \geq u_{v^-}(t)$$

Por (45iii) tem-se:  $(\forall t \in [\tau, t_2]) \quad u'(t) \geq u(t)$

Logo,  $(\forall t \in [\tau, t_2]) \quad u'(t) \geq \max\{u_{v^-}(t), u(t)\} = \bar{u}(t)$ , provando (65).

Como  $p'(\tau) \geq v^- > v \geq 0$  e  $p'$  crescente em  $[\tau, t_2)$  tem-se pelas CNSO (28iii):  $(\forall t \in [\tau, t_2]) \quad q'(t) = 0$ .

Da equação de transição (8) tem-se:  $(\forall \eta \in [\tau, t_2])$

$$\omega'(\eta) = w - \xi + \int_{\tau}^{\eta} (u'(t) + x(t) - d(t) - q'(t)) dt$$

$$\geq w + \int_{\tau}^{\eta} (\bar{u}(t) + x(t) - d(t)) dt - \xi, \text{ por (65)}$$

$$= \bar{\omega}(\eta) - \xi$$

Pela continuidade de  $\omega'$  e  $\bar{\omega}$  tem-se :  $\omega'(t_2) \geq \bar{\omega}(t_2) - \xi > \omega(t_2)$  contradizendo (64), e provando (62).

Seja  $\sigma$  o primeiro instante característico de  $\omega$  em  $(\tau, T]$ .

Para  $v_0 \in (v, v^-)$ , basta definir  $p_0$  em  $[\tau, T]$  da seguinte maneira :

$$\text{se } \omega(\sigma) = W \quad p_0(t) = \begin{cases} v_0 & t < \sigma \\ p^*(t) & t \geq \sigma \end{cases}$$

$$\text{se } \omega(\sigma) = 0 \quad p_0(t) = \begin{cases} v_0 & t < \sigma \\ p(t) & t \geq \sigma \end{cases}$$

Da definição de  $p_0$  decorre imediatamente que  $(p_0, u)$  satisfaz trivialmente às condições (28i), (28iii) e (28iv). Resta verificar a condição (28ii).

Como  $v_0 \in [v, v^-]$  tem-se :  $(\forall t \in [\tau, t_1]) u_{v^-}(t) \geq u_{v_0}(t) \geq u_v(t)$ .

Por (62) tem-se :  $(\forall t \in [\tau, t_1]) u_{v^-}(t) = u_v(t) = u(t)$ .

Assim:  $(\forall t \in [\tau, t_1]) u_{v_0}(t) = u_v(t) = u(t)$ , provando que

(28ii) é satisfeita em  $[\tau, t_1)$ . No intervalo  $[t_1, T]$

(28ii) é trivialmente satisfeita, pois  $\sigma \leq t_1$ .

cqd

### CAPÍTULO III

#### OS CONTROLES DISCRETOS

Uma das técnicas empregadas para resolver o problema enunciado no capítulo II (15) é a discretização do tempo em estágios. Este é um procedimento adotado na prática, onde, para o caso determinístico, conhece-se no princípio de cada mês uma previsão para a demanda e a afluência durante o referido mês, assumindo-se que durante este mês demanda e afluência permanecerão constantes. Considera-se portanto, daqui por diante, afluência e demanda constantes entre dois estágios consecutivos. Segundo essa abordagem pode haver modificação na geração térmica durante um mês, o que fornece resultados mais realistas do que uma discretização que levasse em conta somente a geração total durante cada período. Em outras palavras, o problema que se propõe estudar é contínuo, mas com características de problema discreto, devido à constância da demanda e afluência durante cada período.

Inicialmente o controle no  $k$ -ésimo estágio será considerado como função contínua definida entre os estágios  $k$  e  $k+1$ . A este controle contínuo no tempo associar-se-á um controle independente do tempo, que permitirá considerar o problema como discreto no tempo. A partir do controle discreto será possível gerar o controle contínuo inicial.

## Seção 1 : O PROBLEMA PSEUDO-DISCRETO

Nesta seção discretiza-se o tempo em  $N+1$  estágios, considerando-se o problema contínuo definido em 11.15 como um problema pseudo-discreto, visto que o controle inicialmente definido para cada estágio será uma função contínua entre estágios.

Sejam:  $[t_0, T)$  ,  $W$  ,  $W_T$  , definidos em 11.1 .

Sejam:  $K = \{0, 1, \dots, N\}$  ,  $K^* = \{0, 1, \dots, N-1\}$

As principais variáveis que caracterizam o sistema são :

1 Estado no estágio  $k \in K$  :  $w_k$

Volume do reservatório no instante  $t_k$  , correspondente ao estágio  $k$  . Um estado  $w_k \in \mathbb{R}^+$  é viável se  $0 \leq w_k \leq W$  .

2 Afluência no estágio  $k \in K^*$  :  $x_k$

A afluência será considerada constante por estágios, isto é:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1}))$   $x(t) = x_k$  .

3 Demanda no estágio  $k \in K^*$  :  $d_k$

A demanda será considerada constante por estágios , ou seja:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1}))$   $d(t) = d_k$  .

4 Controle no estágio  $k \in K^*$  :  $u_k$

Seja  $u_k : [t_k, t_{k+1}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  contínua à direita.

Um controle no estágio  $k \in K^*$  é uma função  $u_k \in U^k$  onde  $U^k = \{u : [t_k, t_{k+1}) \rightarrow \mathbb{R}^+ / u \text{ contínua à direita}\}$

Um controle  $u_k$  é viável no estágio  $k \in K^*$  se :  
 $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})), 0 \leq u_k(t) \leq d_k$  ..

5 Estratégia :  $(u_0, \dots, u_k, \dots, u_{N-1})$

Sequência de controles  $(u_i)_{i \in K^*}$ ,  $u_i$  controle no estágio  $i \in K^*$ .

6 Estratégia contínua resultante de uma estratégia  $(u_0, \dots, u_{N-1})$  :  $u$

Função definida por :

$$u : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad i \in K^* \quad \mapsto \quad u_{i-1}(t)$$

7 Equação de transição de estado

Dados o estágio  $k \in K^*$  e o estado do sistema neste estágio,  $w_k$ , o estado do sistema no estágio  $k+1$  é dado por :

$$w_{k+1} = w_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{u_k(t) + x_k - d_k - q(t)\} dt ,$$

ou seja:

$$w_{k+1} = w_k + (x_k - d_k)(t_{k+1} - t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u_k(t) - q(t)) dt ,$$

onde  $q$  , definido em 11.6 , é vertimento admissível.

8 Estratêgia admissível a partir de  $(w_0, t_0)$  :

Uma estratégia  $(u_0, \dots, u_{N-1})$  é admissível a partir de  $(w_0, t_0)$  quando a estratégia contínua resultante (6) for admissível.

9 Custo de um controle  $u_k$  :  $c_k$

Função contínua definida por :

$$c_k : U^k \rightarrow R^+$$

$$u_k \mapsto c_k(u_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} c(u_k(t)) e^{-\beta t} dt$$

onde  $c(u_k(t))$  é o custo instantâneo associado ao nível de geração  $u_k(t)$  , especificado pelo controle  $u_k$  no instante  $t$  .

10 Custo de uma estratégia  $(u_0, \dots, u_{N-1})$  a partir de  $(w_0, t_0)$ :  $C(u)$

Custo total decorrente da adoção de uma estratégia de operação  $u = (u_0, \dots, u_{N-1})$ , considerando desconto:

$$C(u) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(u_i)$$

As demais definições são análogas às apresentadas no capítulo II para a definição do problema contínuo.

11 Problema :

Conhecidos:  $t_0, w_0, W, W_T, k \in K^*, d_k, x_k$ , encontrar uma estratégia de operação admissível  $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N-1})$  a partir de  $(w_0, t_0)$ , de custo mínimo entre tais estratégias. Isto é :

$$C(\hat{u}) = \min \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} c_k(u_k) / (u_0, \dots, u_{N-1}) \text{ admissível a partir de } (w_0, t_0) \right\}$$

12 Denota-se por  $C(w_k, k)$  o custo de uma estratégia ótima a partir de  $(w_k, k)$ .

Fica desta forma definido o problema pseudo-discreto. A construção de um problema realmente discreto equivalente a (11) necessita da substituição dos controles  $u_k$ , que são funções, por constantes a partir das quais os  $u_k$  possam ser construídos. O restante do capítulo mostrará como estes controles podem ser construídos a partir do conceito de valor da água.

## Seção 2 : OS LIMITES DE ARMAZENAMENTO

O problema formulado em (11) não é discreto no tempo, visto que o controle  $u_k$  é uma função do tempo. Interessa agora redefinir o controle, obtendo novos controles que possam substituir o controle contínuo  $u_k$ , que sejam independentes do tempo, caracterizando perfeitamente o estado do sistema de estágio para estágio. As maiores dificuldades aparecem quando os limites de armazenamento são atingidos no interior do intervalo entre estágios. Na presente seção serão demonstrados teoremas referentes a estes casos. O teorema (17) estuda o caso em que o limite superior de armazenamento é atingido. O teorema (20) refere-se ao limite inferior de armazenamento. Estes resultados serão utilizados na seção 3 para a obtenção dos controles discretos acima mencionados.

Primeiramente será apresentado um lema que garante que o limite superior de armazenamento só pode ser atingido entre estágios consecutivos se a afluência for maior do que a demanda entre estágios. Nestas condições mostra-se no teorema (17) que a geração térmica é nula entre os dois estágios.

### 13 Lema :

Sejam:  $(w, k)$  par estado-estágio,  $k \in K^*$ ;  $\omega = \hat{\omega}_{w, k}$ ;  $d_k$  e  $x_k$  respectivamente demanda e afluência no estágio  $k$ .

- 14 Se  $w < W$  e existe  $\sigma \in (t_k, t_{k+1})$  tal que  $\omega(\sigma) = W$ , então :  $x_k > d_k$ .



Demonstração :

Sejam:  $u = \hat{u}_{w,k}$  e  $q$  vertimento admissível associado a  $u$ .

Suponha-se por absurdo que  $x_k \leq d_k$ .

15 Pelos lemas 11.19 e 11.20, tem-se :

$$(\forall t \in [t_k, t_{k+1}]) \quad q(t) \leq \max\{0; x_k - d_k\} = 0$$

Sejam:  $\eta = \min\{t \in [t_k, t_{k+1}] / \omega(t) = W\}$

$$\theta = \max\{t \in [t_k, t_{k+1}] / \omega(t) \leq w, t \leq \eta\}$$

Como  $\omega$  é contínua,  $\eta$  e  $\theta$  estão bem definidos e como  $w_k < W$  tem-se que  $\eta \neq \theta$ .

16 Como  $(\forall t \in (\theta, \eta)) \quad \omega(t) > 0$ , tem-se pelo corolário 11.42 que  $u$  é crescente em  $(\theta, \eta)$ .

Pela equação de transição 11.8 e por (15) tem-se

$$\int_{\theta}^{\eta} (u(t) + x_k - d_k) dt = \omega(\eta) - \omega(\theta) \geq W - w > 0$$

Então  $(\exists \tau \in (\theta, \eta)) \quad u(\tau) + x_k - d_k > 0$

Por (16),  $u(\eta) \geq u(\tau) > d_k - x_k$

Como  $u$  é contínua à direita 11.10,

$$(\exists \delta \in (0, t_{k+1} - \eta)) \quad (\forall t \in (\eta, \eta + \delta)) \quad u(t) > d_k - x_k$$

Por 11.8 e (15) :

$$\begin{aligned} \omega(\eta + \delta) &= \omega(\eta) + \int_{\eta}^{\eta + \delta} (u(t) + x_k - d_k) dt \\ &> \omega(\eta) \\ &= W \end{aligned}$$

o que é absurdo, completando a demonstração.

cqd

17 Teorema

Nas condições do lema (13) :

$$(i) \quad (\forall t \in [\sigma, t_{k+1}]) \quad \omega(t) = W$$

$$(ii) \quad (\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \quad u(t) = 0$$

Demonstração :

Dos lemas 11.19 e (13) tem-se :  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \quad u(t) + x_k - d_k - q(t) \geq 0$

18 Pela equação de transição 11.8 , tem-se que  $\omega$  é crescente em  $[t_k, t_{k+1})$  . Logo,  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \quad \omega(t) \geq w > 0$  .

$$(i) \text{ Logo, } (\forall t \in [\sigma, t_{k+1})) \quad W \geq \omega(t) \geq \omega(\sigma) = W$$

Pela continuidade de  $\omega$  ,  $\omega(t_{k+1}) = W$  , provando (17i).

(ii) Pelos lemas 11.21 e (13), tem-se :

$$(\forall t \in [\sigma, t_{k+1})) \quad q(t) = \max\{0, x_k - d_k\} = x_k - d_k > 0$$

Do lema 11.20 tem-se  $(\forall t \in [\sigma, t_{k+1})) \quad u(t) = 0$

Resta examinar o intervalo  $[t_k, \sigma)$ .

Por (18)  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \quad \omega(t) > 0$  . Por 11.42  $u$  é crescente em  $[t_k, t_{k+1})$ . Assim:  $(\forall t \in [t_k, \sigma]) \quad u(t) \leq u(\sigma) = 0$ , o que completa a demonstração.

cqd

19 Corolário :

Sejam :  $(w, k)$  par estado estágio,  $k \in K^*$  ;  $u = \hat{u}_{w, k}$  ;  $\omega = \hat{\omega}_{w, k}$  ;  
 $x_k$  e  $d_k$  como em (13).

Então:  $(\forall \tau \in [t_k, t_{k+1}])$

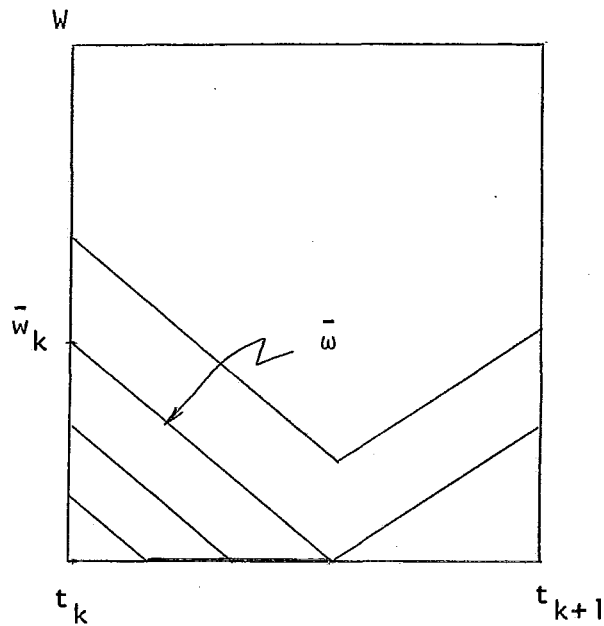
$$\omega(\tau) = \min\{W ; \int_{t_k}^{\tau} (u(t) + x_k - d_k) dt\}$$

Demonstração :

É consequência imediata do lema 11.19 e do teorema (171).

cqd

Considera-se a seguir o caso em que o limite inferior de armazenamento é atingido. O resultado básico para este caso será enunciado e demonstrado no teorema (20), que caracteriza as trajetórias que atingem o limite inferior de armazenamento entre estágios consecutivos. Para um dado estágio  $k$  conclui-se que existe um estado  $\bar{w}_k$  com a seguinte propriedade: trajetórias ótimas partindo de  $w_k > \bar{w}_k$  não atingem o limite inferior de armazenamento até o estágio  $k+1$  ; qualquer trajetória ótima a partir de  $w_k < \bar{w}_k$  atinge o limite inferior e coincide parcialmente com a que parte de  $\bar{w}_k$  . Mostra-se que as trajetórias ótimas comportam-se como na figura da página seguinte:



20 Teorema :

Considere-se um estágio  $k \in K^*$  .

Defina-se :

$$21 \quad W^k = \{ \omega(\cdot) / \omega = \tilde{\omega}_{w, t_k}, w \in [0, W] \text{ e } 0 \in \{ \omega(t) / t \in [t_k, t_{k+1}] \} \}$$

conjunto de estratégias ótimas a partir do estágio  $k$  , que atingem o limite inferior de armazenamento entre os estágios  $k$  e  $k+1$  .

Se  $W^k \neq \emptyset$  , defina-se :

$$22 \quad \bar{w}_k = \sup \{ \omega(t_k) / \omega \in W^k \}$$

As seguintes afirmações são verdadeiras :

$$23 \quad (i) \quad \bar{w}_k = \max \{ \omega(t_k) / \omega \in W^k \}$$

Ou seja: a trajetória ótima a partir de  $(\bar{w}_k, k)$  atinge o limite inferior de armazenamento.

24 (ii) Seja  $\bar{w} \in W^k$ , com  $\bar{w}_k = \bar{w}(t_k)$

Então existe  $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$  satisfazendo :

$$(a) \quad \bar{w}(\tau) = 0$$

$$(b) \quad (\forall w \leq \bar{w}_k) \quad (\forall t \in [\tau, T]) \quad \hat{w}_{w,k}(t) = \bar{w}(t)$$

Demonstração :

Sejam  $\bar{w}_k$  definido em (22),  $\bar{u}$  estratégia ótima a partir de  $(\bar{w}_k, k)$ ,  $\bar{w}$  trajetória ótima gerada por  $\bar{u}$  a partir de  $(\bar{w}_k, k)$ , e  $\bar{q}$  vertimento admissível associado a  $\bar{w}$ .

(i) Para provar (23), basta mostrar que  $\bar{w} \in W^k$ .

Suponha-se por absurdo que  $\bar{w} \notin W^k$ .

Então:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1}]) \quad \bar{w}(t) > 0$ .

25 Como  $\bar{w}$  é contínua,  $(\exists \xi > 0) \quad (\forall t \in [t_k, t_{k+1}]) \quad \bar{w}(t) > 2\xi$

Por definição de  $\bar{w}_k$  :

$$(\exists w \in (\bar{w}_k - \xi, \bar{w}_k)) \quad \hat{w}_{w,k} \in W^k$$

Logo:  $(\exists \sigma \in [t_k, t_{k+1}]) \quad \hat{w}_{w,k}(\sigma) = 0$

Pelos teoremas (17) e 11.45:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1}]) \quad \hat{u}_{w,k}(t) \geq \bar{u}(t)$

Como  $w < \bar{w}_k$  tem-se :

$(\forall t \in [t_k, t_{k+1}]) \quad q(t) \leq \bar{q}(t)$ , onde  $q$  é o vertimento associado a  $\hat{w}_{w,k}$ .

Pela equação de transição 11.8 :

$$\begin{aligned} \bar{w}(\sigma) - \hat{w}_{w,k}(\sigma) &= \bar{w} - w + \int_{t_k}^{\sigma} (\bar{u}(t) - \hat{u}_{w,k}(t)) dt - \int_{t_k}^{\sigma} (\bar{q}(t) - q(t)) dt \\ &\leq \bar{w} - w \\ &\leq \xi \end{aligned}$$

Como  $\hat{w}_{w,k}(\sigma) = 0$  tem-se  $\bar{w}(\sigma) \leq \xi$ , contradizendo (25) e provando (23).

(ii) Por (23),  $\bar{w} \in W^k$

Logo  $(\exists \tau \in [t_k, t_{k+1}]) \bar{w}(\tau) = 0$

Seja  $w \in [0, \bar{w}_k]$

Pela unicidade da trajetória ótima, e pela continuidade de  $\hat{w}_{w,k}$  e  $\bar{w}$  tem-se :

$(\forall t \in [\tau, T]) \hat{w}_{w,k}(t) = \bar{w}(t)$ , completando a demonstração.

cqd

### Seção 3 : OS CONTROLES DISCRETOS

O objetivo desta seção é provar que ao problema enunciado em (11) pode ser associado um problema discreto no tempo através de uma redefinição do controle. Para tanto, é necessário definir controles que substituam o controle contínuo  $u_k(\cdot)$ , definido em (4), e que caracterizem perfeitamente o estado do sistema num dado estágio, a partir do estado no estágio anterior, bem como o custo desta transição.

Considere-se o par estado-estágio  $(w_k, k)$ , o valor da água associado  $v_k = v(w_k, k)$ , definido em 11.31 e 35, e  $\bar{w}_k$  definido em (22). Quer-se provar que  $(v_k, \bar{w}_k, \bar{v}_k)$  caracteriza o estado  $w_{k+1}$  do sistema no estágio  $k+1$ , a partir de  $(w_k, k)$ , determinando o trecho da estratégia ótima, partindo de  $(w_k, k)$ , entre os estágios  $k$  e  $k+1$ , e por conseguinte o custo da transição.

#### Construção da Estratégia Ótima Conhecido o Controle $(v_k, \bar{w}_k, \bar{v}_k)$ :

Para a obtenção da estratégia ótima será considerado inicialmente o caso  $w_k = \bar{w}_k$ . Em seguida serão considerados separadamente os casos  $w_k > \bar{w}_k$  e  $w_k < \bar{w}_k$ . Demonstra-se inicialmente um teorema para o caso em que  $w_k = \bar{w}_k$ , que afirma que o trecho de estratégia ótima a partir de  $(\bar{w}_k, k)$  é gerado pelo valor da água em  $(\bar{w}_k, k)$ . No teorema (29) apresenta-se resultado análogo para o caso  $w_k > \bar{w}_k$ .

26 Teorema :

Sejam:  $k \in K^*$  estágio,  $\bar{w} < W$  e  $\bar{v}$  definidos em (24) ;

$$\bar{u} = \hat{u}_{\bar{w},k} ; \bar{v} = v(\bar{w},k)$$

Então:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) = u_{\bar{v}}(t)$

Demonstração :

Seja  $\bar{p}$  tal que  $(\bar{p}, \bar{u})$  satisfaz às CNSO 11.28, com  $\bar{p}(t_k) = \bar{v}$

Se  $(\exists \eta \in [t_k, t_{k+1})) \bar{w}(\eta) = W$ , tem-se de (17) que:

$(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) = 0$ . Pelas CNSO 11.28,

$$\bar{v} \leq \psi(\bar{u}(t_k)^+) e^{-\beta t_k} = 0.$$

Se  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{w}(t) < W$  e  $\bar{v} = 0$ , tem-se pelas CNSO

11.28i que:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{p}(t) \leq \bar{p}(t_k) = \bar{v} = 0$ . Pelas

CNSO 11.28ii  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) = 0$ .

Resta examinar o caso  $\bar{v} > 0$ .

Como  $\bar{w}$  não atinge o limite superior de armazenamento em  $[t_k, t_{k+1})$ ,

tem-se que  $\bar{p}$  é decrescente em  $[t_k, t_{k+1})$ .

Pelas CNSO 11.28iii:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \psi(\bar{u}(t)) e^{-\beta t} \leq \bar{p}(t)$   
 $\leq \bar{p}(t_k) = \bar{v}$

Então:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) \leq u_{\bar{v}}(t)$

Resta provar que  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) \geq u_{\bar{v}}(t)$



27 Afirmação :  $(\forall w' \in (\bar{w}, W)) (\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) \geq u_{v'}(t)$ , onde  $v' = v(w', k)$ .

Sejam:  $w' \in (\bar{w}, W)$ ;  $u' = \hat{u}_{w', k}$ ;  $\omega' = \hat{\omega}_{w', k}$ ;  $p'$  tal que  $(p', u')$  satisfaz às CNSO 11.28 com  $p'(t_k) = v'$ ,  $v' = v(w', k)$ .

Como  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \omega'(t) > 0$ , tem-se por 11.28i que  $p'$  é crescente em  $[t_k, t_{k+1})$ . Assim,  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) p'(t) \geq v'$ .

Por 11.37 tem-se:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) u'(t) = u_{p'}(t) \geq u_{v'}(t)$ .

Por 11.45iii tem-se:  $(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) \geq u'(t)$ , provando (27).

28 Afirmação :  $(\forall v < \bar{v}) (\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) \geq u_v(t)$

De fato, como  $v(., k)$  é a derivada à direita da função  $C(., k)$  convexa contínua, tem-se que  $v(., k)$  é contínua à direita /3/.

Por 11.57,  $v(., k)$  é decrescente. Então

$$(\forall \xi > 0) (\exists \delta > 0) (\forall w \in (\bar{w}, \bar{w} + \delta)) v(\bar{w}, k) - v(w, k) < \xi$$

Tomando  $v = \bar{v} - \xi$ , tem-se:

$$(\forall v < \bar{v}) (\exists w' \in (\bar{w}, W)) v' > v, \text{ onde } v' = v(w', k)$$

Por (27):  $(\forall v < \bar{v}) (\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(t) \geq u_{v'}(t)$ , provando (28).

Finalmente, suponha-se por absurdo que:  $(\exists \tau \in [t_k, t_{k+1})) \bar{u}(\tau) < u_{\bar{v}}(\tau)$

Como  $\bar{u}$  é contínua à direita  $(\exists \eta \in (0, t_{k+1} - \tau)) \bar{u}(\tau + \eta) < u_{\bar{v}}(\tau)$

$$\begin{aligned}
\text{Assim: } \bar{u}(\tau+\eta) &< \max\{u \in \mathbb{R} / \psi(u)e^{-\beta\tau} \leq \bar{v}, u \leq d_k\} \\
&= \max\{u \in \mathbb{R} / \psi(u)e^{-\beta(\tau+\eta)} \leq \bar{v} e^{-\beta\eta}, u \leq d_k\} \\
&= u_v(\tau+\eta), \text{ onde } v = \bar{v} e^{-\beta\eta} < \bar{v}, \text{ contradizendo (28).}
\end{aligned}$$

cqd

29 Teorema :

Sejam:  $(w, k)$  par estado-estágio,  $w \in (\bar{w}_k, W)$  ;

$$u = \hat{u}_{w, k} ; \omega = \hat{\omega}_{w, k} ; v_k = v(w, k).$$

Então:  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $u(t) = u_v(t)$ .

Demonstração :

Se existe  $\sigma \in (t_k, t_{k+1})$ , tal que  $\omega(\sigma) = W$ , então, pelo teorema (17) tem-se  $u(\cdot) \equiv 0$ . Assim  $p(\cdot) = 0$  satisfaz com  $u$  às CNSO.

Caso contrário ( $\forall t \in (t_k, t_{k+1})$ )  $\omega(t) \in (0, W)$ .

Por 11.33,  $p(\cdot) \equiv v_k$  satisfaz com  $u$  às CNSO.

Como  $w > \bar{w}_k$ , tem-se por 11.37 :

$$(\forall t \in [t_k, t_{k+1})) \quad u(t) = u_v(t).$$

cqd

Finalmente considera-se o caso  $w < \bar{w}_k$ . Demonstra-se no teorema (30) que a geração ótima é o mínimo entre a diferença entre demanda e afluência para o estágio considerado e a gera -

ção determinada pelo valor da água no par  $(w, k)$ , ou seja :

$$\hat{u}_{w,k}(\cdot) = \min\{u_v(\cdot), d_k - x_k\}.$$

30 Teorema :

Sejam:  $(w, k)$  par estado-estágio,  $w \in (0, \bar{w}_k)$  ;  $u = \hat{u}_{w,k}$  ;  
 $\omega = \hat{\omega}_{w,k}$  ;  $v = v(w, k)$  ;  $\bar{\omega}$  definido em (24) e  
 $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$  tal que  $\bar{\omega}(\tau) = 0$  .

Então : Para  $t \in [t_k, t_{k+1})$  tem-se

31  $u(t) = \bar{u}(t)$  ,  $t \geq \tau$

32  $u(t) = \min\{u_v(t), d_k - x_k\}$  ,  $t < \tau$  .

Demonstração :

(31) é consequência imediata do teorema (20).

Resta examinar o intervalo  $[t_k, \tau)$ .

33 Por (17)  $(\forall t \in [t_k, \tau]) \omega(t) < W$  . Logo:  $(\forall t \in [t_k, \tau])$   
 $q(t) = 0$

34 Afirmção : para  $\mu_1, \mu_2 \in [t_k, t_{k+1}]$  ,  $\mu_1 < \mu_2$  ,  $\omega(\mu_2) = 0$  ,  
 tem-se :  $u(\mu_1) \leq d_k - x_k$

Suponha-se por absurdo que  $u(\mu_1) > d_k - x_k$

Pela continuidade à direita de  $u$  ,  $(\exists \sigma \in (\mu_1, \mu_2))$

$(\forall t \in [\mu_1, \sigma]) u(t) > d_k - x_k$  .

Pela equação de transição 11.8 e por (33) :  $\omega(\sigma) > 0$  .

Seja  $\theta = \min\{t \in [\sigma, \tau] / \omega(t)=0\}$

Pela definição de  $\theta$  tem-se  $\sigma < \theta$  e  $(\forall t \in [\sigma, \theta)) \omega(t) > 0$ .

Por 11.42,  $u$  é crescente em  $[\sigma, \theta)$ . Logo, o integrando da equação de transição 11.8 é não negativo.

Portanto:  $\omega(\theta) \geq \omega(\sigma) > 0$  , o que contradiz a definição de  $\theta$ , provando (34).

35 Seja  $\eta = \min\{t \in [t_k, t_{k+1}] / \omega(t) = 0\}$

Por 11.37, tem-se :  $(\forall t \in [t_k, \eta)) u(t) = u_v(t)$ .

(34) e (35) provam (32) no intervalo  $[t_k, \eta)$ .

Finalmente, examine-se o intervalo  $[\eta, \tau)$ .

36 Afirmção :  $(\forall t \in [\eta, \tau)) u(t) = d_k^{-x_k}$

Por (33) e (34) ,  $(\forall t \in [\eta, \tau)) u(t) \leq d_k^{-x_k}$  e  $q(t) = 0$

Assim, o integrando da equação de transição 11.8 é não positivo em  $[\eta, \tau)$ . Logo,  $\omega$  é decrescente em  $[\eta, \tau)$ .

37 Então:  $(\forall t \in [\eta, \tau)) 0 \leq \omega(t) \leq \omega(\eta) = 0$

Por 11.8 e por (33):  $(\forall t \in [\eta, \tau)) u(t) = d_k^{-x_k}$  , provando (36)..

38 Afirmação :  $(\forall t \in [\eta, \tau)) \quad u_v(t) \geq d_k^{-x_k}$

Seja  $p$  tal que  $(p, u)$  satisfaz às CNS0, com  $p(t_k) = v$ .

Por (37) e II.28i,  $p$  é decrescente em  $[t_k, \tau)$ .

Por II.28ii :  $\psi(u(\eta))e^{-\beta\eta} \leq p(\eta) \leq p(t_k) = v$ .

Assim:  $u(\eta) \leq u_v(\eta)$ . Como  $u_v$  é crescente, por (36), tem-se  $(\forall t \in [\eta, \tau)) \quad u_v(t) \geq d_k^{-x_k}$ , provando (38).

Por (34), (35), (36) e (38) fica provado que :

$$u(.) = \min\{u_v(.), d_k^{-x_k}\} .$$

cqd

### Determinação do Custo de Transição e Estado Final

Os teoremas (26), (29) e (30) provam que, para cada par estado-estágio  $(w_k, k)$ , o trecho de estratégia ótima a partir de  $(w_k, k)$  entre os estágios  $k$  e  $k+1$ ,  $\hat{u}_k(\cdot)$ , pode ser obtido a partir do controle discreto  $(v_k, \bar{w}_k, \bar{v}_k)$ , que substitui perfeitamente o controle contínuo.

Conhecido o trecho  $\hat{u}_k(\cdot)$  da estratégia ótima entre os estágios  $k$  e  $k+1$ , determinado pelo controle discreto  $(v_k, \bar{w}_k, \bar{v}_k)$ , obtém-se imediatamente o custo de transição 11.14:

$$c_k(\hat{u}_k(\cdot)) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} c(\hat{u}_k(t)) e^{-\beta t} dt$$

O estado no estágio  $k+1$ ,  $w_{k+1}$  é determinado imediatamente a partir de (19):

$$w_{k+1} = \min\{W ; w_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\hat{u}_k(t) + x_k - d_k) dt\} .$$

## CAPÍTULO IV

### O TEOREMA DE VALOR DA ÁGUA

Em termos práticos interessa resolver o problema enunciado em III.11, isto é, encontrar uma estratégia admissível  $u$  a partir de um estado inicial  $w_0$  que seja a de custo mínimo entre as estratégias admissíveis.

Mostrou-se no capítulo III, seção 3, que o problema enunciado em III.14 pode ser associado a um problema discreto, substituindo o controle  $u_k(\cdot)$  pelo controle  $(v_k, \bar{w}_k, \bar{v}_k)$ , no estágio  $k$ .

Suponham-se conhecidos os valores da água para um determinado estágio  $k+1$ . Procura-se resolver o problema de trás para diante, ou seja, procura-se determinar, caso existam, os níveis  $w$  no estágio  $k$ , e correspondentes valores da água, tais que a trajetória ótima partindo de cada um desses pontos passa por  $(w_{k+1}, k+1)$ . Caso não exista trajetória viável, detectar esta não existência.

O problema acima proposto é análogo ao problema de programação dinâmica de "trás para diante". A programação dinâmica é utilizada para encontrar a estratégia ótima a partir de qualquer par estado-estágio, e em particular a partir de  $(w_0, t_0)$ , resolvendo portanto o problema III.11. Demonstra-se neste capítulo

um teorema cujos resultados podem ser utilizados na construção direta das curvas de valor da água de "trás para diante", permitindo a construção de um algoritmo mais eficiente do que o de programação dinâmica, devido à eliminação das tentativas feitas por este processo.

### Seção 1 : O TEOREMA DO VALOR DA ÁGUA

Nesta seção será enunciado um teorema que caracteriza os valores da água de uma trajetória ótima, entre dois estágios consecutivos. O teorema afirma que existe uma trajetória ótima passando pelos pares  $(w_k, k)$  e  $(w_{k+1}, k+1)$  se e só se o valor da água no par  $(w_k, k)$  pode ser expresso em função do valor da água no par  $(w_{k+1}, k+1)$  e da "amplitude" da descontinuidade da curva de valor da água em  $(w_{k+1}, k+1)$ , se existir.

#### 1 Teorema

Sejam:  $(w_k, k)$  par estado-estágio,  $w_k \in [0, W]$  ;  $\omega = \hat{\omega}_{w_k, k}$  ;  
 $v_k = v(w_k, k)$  ;  $\bar{\omega}$  definido em III.30 ;  $\bar{v}_k = v(\bar{\omega}(t_k), k)$  ;  
 $w \in (0, W]$  ;  $v_{k+1} = v(w, k+1)$  ;  $v_{k+1}^- = v(w^-, k+1)$  e  
 $\Delta = t_{k+1} - t_k$



(i) Para  $w \in (\bar{\omega}(t_{k+1}), W)$

$$2 \quad \omega(t_{k+1}) = w \iff v_k \in [v_{k+1}, \min\{v_{k+1}^-, v_{k+1} e^{\beta\Delta}\}]$$

(ii) Para  $w = W$

$$3 \quad \omega(t_{k+1}) = w \iff v_k \in [0, \min\{v_{k+1}^-, v_{k+1} e^{\beta\Delta}\}]$$

(iii) Para  $w = \bar{\omega}(t_{k+1})$

$$\omega(t_{k+1}) = w \iff v_k \in [v_{k+1}, \psi(d_k - x_k) e^{-\beta t_k}]$$

5 (iv)  $\omega(t_{k+1}) \geq \bar{\omega}(t_{k+1})$  , ou seja, não existe trajetória ótima iniciando em  $w_k$  no estágio  $k$  e passando por  $w < \bar{\omega}(t_{k+1})$  no estágio  $k+1$  .

Demonstração :

Sejam:  $u = \hat{u}_{w_k, k}$  e  $p$  tal que  $(p, u)$  satisfaz às CNSO II.28

com  $p(t_k) = v_k$  .

6 Afirmção :

Se  $\omega(t_{k+1}) \in [\bar{\omega}(t_{k+1}), W)$  , tem-se  $v_k \geq v_{k+1}$  .

De fato, como  $\omega(t_{k+1}) < W$  , tem-se, por III.20 e II.28I, que  $p$  é decrescente em  $[t_k, t_{k+1}]$  .

Por 11.33,  $v_{k+1} \leq p(t_{k+1}) \leq p(t_k) = v_k$ , provando (6).

### 7 Afirmção :

Se  $\omega(t_{k+1}) \in (\bar{\omega}(t_{k+1}), W]$ , tem-se  $v_k \leq \min\{v_{k+1}^-, v_{k+1} e^{\beta\Delta}\}$

De fato, como  $\omega(t_{k+1}) > \bar{\omega}(t_{k+1})$ , por 11.28i tem-se que  $p$  é crescente em  $[t_k, t_{k+1}]$ . Assim, por 11.33, tem-se:

$v_k \leq p(t_k) \leq p(t_{k+1})$ . Pelo teorema 11.60 :  $p(t_{k+1}) \in [v_{k+1}^-, v_{k+1}^-]$ .

Portanto  $v_k \leq v_{k+1}^-$ .

Resta provar que:  $v_k \leq v_{k+1} e^{\beta\Delta}$

Se  $v_k \geq v_{k+1}$ , existe  $t_0 \in [t_k, t_{k+1})$  tal que  $\psi(u(t_0))e^{-\beta t_0} = v_k$ , pois caso contrário  $v_{k+1}$  geraria  $u$  entre  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , contradizendo 11.33.

Como  $w_k > \bar{\omega}(t_k)$ , tem-se por 11.44 que  $u$  é crescente em  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Logo,  $u(t_0) \leq u(t_{k+1})$ .

Assim:  $v_k = \psi(u(t_0))e^{-\beta t_0}$

$$\leq \psi(u(t_{k+1}))e^{-\beta t_k}$$

$$\leq \psi(u(t_{k+1}))e^{-\beta t_{k+1}} e^{\beta\Delta}$$

$$\leq v_{k+1} e^{\beta\Delta} \quad (\text{CNSO 11.28ii}) \quad , \quad \text{provando (7)}.$$

(i) ( $\longrightarrow$ )

Decorre imediatamente de (6) e de (7) que:

$$v_k \in [v_{k+1}, \min\{v_{k+1}^-, v_{k+1} e^{\beta\Delta}\}]$$

( $\longleftarrow$ )

Decorre imediatamente do seguinte fato :

$$p(t_{k+1}) \in [v_{k+1}, v_{k+1}^-] \quad (\text{teorema II.60})$$

(ii) ( $\longrightarrow$ )Como  $v_k \geq 0$ , decorre imediatamente de (7) que :

$$v_k \in [0, \min\{v_{k+1}^-, v_{k+1} e^{\beta\Delta}\}]$$

( $\longleftarrow$ )

É consequência imediata do teorema II.60, como em (i).

(iii) ( $\longrightarrow$ )Decorre imediatamente de (6) que  $v_k \geq v_{k+1}$ .Resta provar que  $v_k \leq \psi(d_k - x_k) e^{-\beta t_k}$ .Seja  $\bar{p}$  tal que  $(\bar{p}, \hat{u}_{\bar{w}_k, k})$  satisfaz às CNSO II.28 com  $\bar{p}(t_{k+1}) = v_{k+1}$ .Se  $v_k > v_{k+1}$ , pelo teorema III.42, tem-se :

$$(\exists t_0 \in (t_k, t_{k+1})) (\forall t \in [t_k, t_0]) \hat{u}_{0, k}(t) = d_k - x_k$$

Como  $v(\cdot, k)$  é decrescente, tem-se  $v_k \leq v(0, k)$ .

Pelas CNSO e Por II.33, tem-se :

$$v(0,k) \leq \psi(\hat{u}_{0,k}(t_k)^+) e^{-\beta t_k} = \psi(d_k - x_k) e^{-\beta t_k}, \text{ o que completa a demonstração de (iii).}$$

(←)

Decorre imediatamente do teorema II.60 e do teorema III.28.

(iv) É consequência imediata do teorema II.28.

### CONCLUSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho podem ser utilizados na construção direta das curvas de valor da água de "trás para diante" para cada estágio, permitindo a construção de um algoritmo mais eficiente do que o de Programação Dinâmica, devido à eliminação das tentativas feitas por este processo. Além disso, o conhecimento do formato das curvas de valor da água em cada estágio possibilita a construção de uma discretização baseada nas descontinuidades destas curvas, ao invés de uma discretização fixada a priori.

O problema foi aqui abordado deterministicamente (afluência e demanda determinísticas). Entretanto, as conclusões aqui obtidas abrem caminho para a obtenção de resultados utilizáveis em problemas estocásticos.

Neste trabalho foram estudados os casos em que o reservatório atinge os limites de armazenamento. Os resultados aqui apresentados mostram o comportamento do sistema nestes casos. As maiores dificuldades foram encontradas no estudo do limite inferior. No caso de discretização em estágios, os problemas que surgem no tratamento do limite inferior podem ser contornados em termos práticos, com aproximação razoável, permitindo-se que o limite inferior seja violado unicamente entre dois estágios consecutivos. Isto corresponderia a um atraso no tempo de entrada de termicas entre dois estágios consecutivos. O custo real da estratégia

ótima seria então subestimado, sendo que o erro assim introduzido não seria considerável em relação ao custo total da estratégia. Feita esta aproximação, o controle  $(v_k, \bar{w}_k, \bar{v}_k)$  reduz-se ao valor da água  $v_k$ , ou seja, bastaria conhecer o valor da água em cada par estado-estágio para obter o custo de transição e o estado final "aproximado".

BIBLIOGRAFIA

1. R.C. MARINHO PERSIANO , "Condições de Otimalidade para Problema de Operação Ótima de Sistemas de Geração Hidrotérmicos", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ (a ser apresentada).
2. M.H. TORRES DE ARAUJO, "Condições Necessárias de Otimalidade para Sistemas de Geração Hidrotérmicos", Tese de Mestrado , COPPE/UFRJ (Dezembro/1974).
3. ROCKAFELLAR, "Convex Analysis", Princeton University Press, 1970.
4. J.D.C. LITTLE, "The Use of Storage Water in a Hydroelectric System", Journal of the Operations Research Society of America, 3, 187-197 (1955).
5. T.C. KOOPMANS, "Water Storage Policy in a Simplified Hydroelectric System ", First International Conference on Operational Research, 193-227 (1957). Do livro: Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans, Springer- Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
6. P. GUILLAUMIN e M.L. ARABEYDE, "Modèle de Gestion d'un Ensemble Hydraulique et Thermique avec Aléas de Consommation et de Disponibilité des Groups (Modèle GRETA)", Power Systems Computations Conference III (Junho/1969).

7. P. GUILLAUMIN, "Otimização de Produção Hidroelétrica" (Ciclo de Conferências), PUC/RJ, (Outubro/1974).
8. W. MENDES LIMA, "Algoritmo para a Resolução do Problema de Operação de Sistemas Hidrotermoelétricos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ (a ser apresentada).
9. S. STAGE e Y. LARSSON, "Incremental Cost of Water Power", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", 361-365 (Agosto/1961).
10. J. LINDQVIST, "Operation of a Hydrothermal Electric System: A Multistage Decision Process", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems (Abril/1962).
11. N.V. ARVANITIDIS e J. ROSING  
"Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 319-327 (Fevereiro/1970).  
"Optimal Operation of Multireservoir Systems Using a Composite Representation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 327-335 (Fevereiro/1970).
12. V. HVEDING, "Digital Simulation Techniques in the Planning of Large Mixed-Supply (Hydrothermal) Power Systems", Symposium on Prospects for the Development of Hydroelectric Schemes



and for their Incorporation in Future Energy Supply Systems (Outubro/1970).

13. R.N. BRUDENELL e J.H. GILBREATH, "Economic Complementary Operation of Hydro Storage and Steam Power in the Integrated TVA System", IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems 136-156 (Junho/1959).
14. "Planejamento Ótimo Econômico de Operação do Sistema Hidrotérmico de Furnas Centrais Elétricas S.A.", Departamento de Planejamento Energético de Furnas Centrais Elétricas S.A., nota DPE.0.79 (Maio/1972).
15. S.S.BRITO, "Modelos de Otimização Econômica do Planejamento de Operação de Furnas", Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo de Estudos de Produção Hidráulica, SP (Abril/1972).