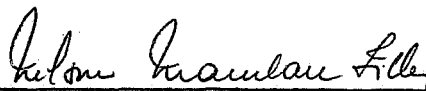


"PÓS-OTIMIZAÇÃO MULTIPARAMÉTRICA EM PROGRAMAÇÃO LINEAR"

Renato Craveiro de Souza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por :



Prof. Nelson Maculan Filho
Presidente



Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto



Prof. Fernando V. Chiyoshi

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Dezembro de 1975

Dedico esta tese aos queridos

Elaine Chaves,

Kildare, Kilvia, Kilmer e Zilene

AGRADECIMENTOS

- Particularmente e, especialmente, ao Prof. Nelson Maculan Filho lembrando que sua orientação bastante valiosa elevou-se bem além do presente trabalho.

- À COPPE, que me acolheu e me deu a oportunidade deste trabalho de pesquisa.

SINOPSE

Embora os estudos sobre programação linear paramétrica em certas direções já sejam numerosas, infelizmente poucos o tratam de uma maneira clara e completa. O escopo principal dos três primeiros capítulos será preencher esta lacuna. Quanto ao problema de programação linear multiparamétrica, o mesmo está pouco difundido e carece de maior estudo e divulgação, sendo a bibliografia sobre o assunto ainda bastante restrita.

Da mesma maneira como os três primeiros capítulos servirão para tornar o leitor apto a uma maior assimilação do 4º capítulo, este será por demais básico no que tange ao 5º, o qual estará baseado em recente trabalho [19], publicado em janeiro do corrente ano. Sendo o nosso trabalho de cunho teórico, não nos parece importante dar uma definição prática do que possa representar o parâmetro λ . Para aqueles que o julgarem importante, ver [15], página 296.

Não é nosso propósito descrever a gama completa da teoria sobre programação linear e multiparamétrica. Em lugar disso selecionaremos o que presumimos ser mais importante frente à possibilidade de aplicação a problemas ligados a programação de produção.

Todos os capítulos estarão seguidos pela solução de um exemplo numérico, o qual terá por objetivo complementar a te

oria desenvolvida e ao mesmo tempo dar oportunidade de o leitor aplicá-los a problemas práticos, constatando a versatilidade dos modelos desenvolvidos.

ABSTRACT

Although there are already a number of studies on parametric linear programming in certain directions, unfortunately a few approach it in a clear and complete way. The principal aim of the first three chapters will be to fill this gap. As for the problem of multiparametric linear programming, it is still little known, deserving deeper study and divulgation, being the bibliography about the subject very restrict.

As the first three chapters shall be used in order to increase the reader's acknowledgement towards a deeper assimilation of the 4th chapter, this one shall be mostly fundamental in relation to the 5th chapter, which shall be based on a recent work [19] published in January 1975.

Since our work is theoretical in character, it does not seem important to give a practical definition on what a λ parameter may represent, but to those who find it of importance, see [15], page 296.

It is not our purpose to describe in this work the theory's complete gama on parametric and multiparametric linear programming, unstead we shall select what we presume may be more important regarding the possibility of its application to problems related to production programming.

Each chapter shall be followed by a numerical example

and its solution, whose objective shall be to complete the developed theory and, at the same time, give the reader the opportunity of applying to practical problems, establishing the versatility of the developed models.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - PARAMETRIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO

I.1 - Introdução	1
I.2 - Conceituação do Problema	4
I.3 - Dedução Geométrica do Conjunto de Otimalidade ...	8
I.4 - Critério de Entrada de um Vetor na Base	12
I.5 - Critério de Saída de um Vetor da Base	13
I.6 - Exercício Numérico	25

CAPÍTULO II - PARAMETRIZAÇÃO DO LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES

II.1 - Introdução	29
II.2 - Conceituação do Problema	32
II.3 - Conjunto de Otimalidade	38
II.4 - Critério de Saída de um Vetor da Base	39
II.5 - Critério de Entrada de um Vetor na Base	40
II.6 - Exemplo Numérico	56

CAPÍTULO III - ALGUNS CASOS PARTICULARES

III.1 - Introdução	65
III.2 - Primeiro Caso Particular: Matriz $\alpha(t) = \text{constante}$ te (Estudo Simultâneo do 1º e 2º capítulos)	66
III.3 - Conjunto de Otimalidade da Base Fundamental	67
III.4 - Critério de Entrada e Saída de um Vetor da Base..	70
III.5 - Segundo Caso Particular: $C(t)$ e $b(t)$ são vetores constantes e $\alpha(t) = [A + tD, N]$	74
III.6 - Conjunto de Otimalidade	82

III.7 - Exemplo Numérico	84
III.8 - Extensões	93
CAPÍTULO IV - MULTIPARAMETRIZAÇÃO LINEAR DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO (MLP-OFC) E DO LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES (MLP-RHS)	
IV.1 - Introdução (MLP-RHS)	97
IV.2 - Conceituação Básica	108
IV.3 - Resolução do Método	120
IV.4 - Exemplo Numérico	127
IV.5 - Multiparametrização dos Coeficientes da Função Objetivo (MLP-OFC)	132
IV.6 - Formulação e Conceituação do Problema	132
IV.7 - Resolução do Problema MLP-OFC	142
CAPÍTULO V - PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA DAS EXTREMI- DADES (RMPLP)	
V.1 - Introdução	144
V.2 - O Problema de Programação Linear Multiparamétrico em suas Extremidades	146
V.3 - Resolução do RMPLP	152
V.4 - Exemplo Numérico	158
BIBLIOGRAFIA	173

CAPÍTULO I

PARAMETRIZAÇÃO DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO

I.1 - Introdução

Imaginemos um Problema de Programação Linear definido no $R^{+2} (R^+ \times R^+)$ e que, para efeito de raciocínio, tenha por domínio de definição a região limitada pela poligonal OEFABCO da Fig. I.1, e também a reta L_3 , que tendo vetor diretor C seja a correspondente imagem geométrica da função objetivo do problema.

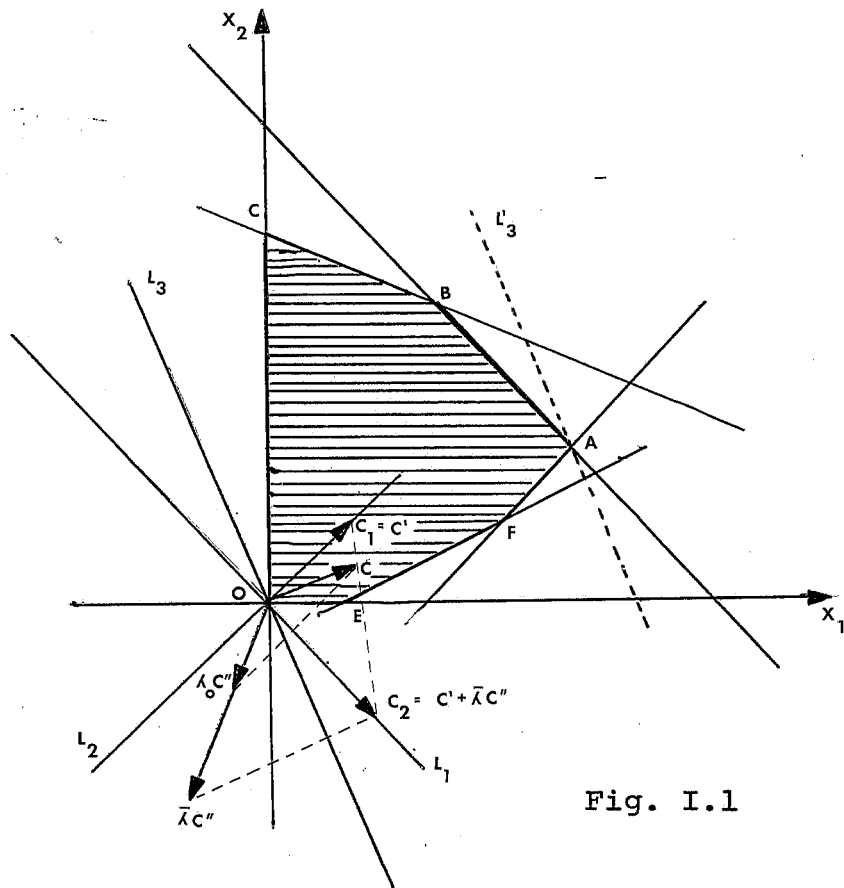


Fig. I.1

É evidente que a imagem geométrica do ponto ótimo A é obtida através de um deslocamento da reta L_3 paralelamente a

si mesma (perpendicularmente ao vetor C). Mas de tudo isso o que é mais importante é que este mesmo vértice continua ainda ótimo se substituirmos a reta L_3 por qualquer reta situada entre as retas L_1 e L_2 tendo respectivamente vetores diretores C_1 e C_2 ($L_1 // AB$, $L_2 // FA$).

Consciente do que acima foi dito, podemos agora imaginar que, quando os coeficientes da função objetivo dependem de um certo parâmetro λ , seu vetor diretor tem a forma $C = C' + \lambda C''$. Admitamos que à reta L_3 está associado o parâmetro $\lambda = \lambda_0$. Agora ao girarmos a reta L_3 em torno do ponto O , no sentido anti-horário, observamos que o vetor C fará o mesmo, o parâmetro λ assumirá continuamente diversos valores até que para $\lambda = \underline{\lambda}$ a reta L_3 coincida com a reta L_1 . De maneira semelhante, ao girarmos a reta L_3 de modo que ela venha a coincidir com a reta L_2 , o vetor C irá girar no sentido horário até que para $C = C' + \bar{\lambda} C''$ as retas L_3 e L_2 sejam coincidentes. Recordar-se que para $\lambda = \lambda_0$ o programa ótimo do problema está associado ao vértice A e ao valor ótimo da função objetivo - a reta L_3 . Variando continuamente o valor do parâmetro λ , desde $\underline{\lambda}$ até $\bar{\lambda}$ tem-se que o vetor C assume todas as posições, jamais ficando fora do ângulo formado pelos vetores diretores C_1 e C_2 das retas L_1 e L_2 respectivamente, e o ponto ótimo do problema permanece fixo, tendo por imagem geométrica o ponto A .

Decorre que, para $\lambda = \underline{\lambda}$ ($\lambda = \bar{\lambda}$) a reta L_3 deve ser paralela ao lado $AB(FH)$ do polígono de condições, portanto qualquer ponto de $AB(FA)$ é solução ótima do problema, tirando-se

assim a unicidade da solução. E ainda, o lado AB(ou FA) do polígono é a imagem do conjunto dos programas ótimos do problema.

Para $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (ou $\lambda = \bar{\lambda} - \varepsilon$), isto é, para pequenas variações de λ além de $\bar{\lambda}$ (e aquém de $\bar{\lambda}$), estaremos diante de um problema de programação linear, cujo novo programa ótimo é o vértice F (ou vértice B).

Uma conclusão que já nos salta à vista é que o domínio de definição de λ será dividido em um número finito de partes, sobre cada uma das quais (interior) está associado uma família de funções objetivo, que atinge o máximo num mesmo ponto do domínio de definição do problema.

Para espaços de maior dimensão procede-se de maneira semelhante, só que neste caso a função objetivo tem como representação geométrica um hiperplano H com vetor diretor $C' + \lambda.C''$. Vale ainda chamar a atenção que, no caso multidimensional para $\lambda = \bar{\lambda}$ o hiperplano representante da função objetivo será paralela a uma face F do conjunto convexo das condições do problema. Decorre daí que para pequenas variações de λ , $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$ não teremos necessariamente um novo vértice vizinho ao anterior, como no caso bidimensional. Complementando, concluímos que no caso multidimensional, dois vértices do conjunto convexo, associados às soluções do problema a dois intervalos vizinhos de variação do parâmetro λ , não estão sujeitos a serem vizinhos.

I.2 - Conceituação do Problema

Admitamos que nos seja possível determinar para cada um dos λ de um certo conjunto, o vetor X que maximize a forma linear

$$L = \sum_{j=1}^n (c'_j + \lambda c''_j) x_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (\text{I.2.1})$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,2,\dots,m \quad (\text{I.2.2})$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \quad (\text{I.2.3})$$

Para conceituar o problema iniciaremos com as definições que se seguem:

Definição I.1 : Uma base do programa (I.2.1)-(I.2.3) é ÓTIMA para um certo λ , se as avaliações $\Delta_j(\lambda) = z_j(\lambda) - c_j(\lambda)$ (ou $\Delta_j(\lambda) = p_j + \lambda q_j$), relativas a esta base, de todos os vetores condições calculados com o λ dado, são não negativos.

Definição I.2 : O conjunto de todos os valores λ para os quais a base é ótima, definimos como sendo o conjunto de otimalidade desta base.

Decorre das definições que, associado a cada base e xiste um conjunto de otimalidade, e que é edificante conhecer

como se modifica a solução do problema (I.2.1)-(I.2.3) com a variação do parâmetro λ .

Para tal, faremos o estudo em dois estágios que chamaremos de 1º e 2º Casos e que serão estudados isoladamente. Utilizando o método do simplex, procuraremos a solução para $\lambda = \lambda_0$, chegando a um programa ótimo após um número finito de iterações (1º Caso), ou a elaboração de uma base onde as condições de ausência de solução realizável são checadas (2º Caso).

Um destaque importante a ser lembrado é que a incompatibilidade das condições (I.2.2), (I.2.3) não apresentam interesse, pois qualquer que seja λ o problema não terá programa. Tendo-se em vista o problema que será resolvido posteriormente, e referências de natureza teóricas, introduziremos nas habituais tabelas de simplex inicialmente mais uma linha para representar os termos paramétricos; esta linha será indicada por f_λ , e a já existente faremos corresponder àquela parte da função objetivo, cujos coeficientes estão sem λ . Então no quadro do simplex as duas primeiras linhas têm o formato :

$$\begin{array}{ccccccc} f_0 & 0 & -p_1 & -p_2 & \dots\dots & -p_n \\ f_\lambda & 0 & -q_1 & q_2 & \dots\dots & q_n \end{array}$$

Admitamos que o problema proposto foi resolvido para $\lambda = \lambda_0$; portanto um quadro com a solução ótima pode ser elaborado, conforme Tabela I.1.

Tabela I.1

(Quadro geral para um problema com os coeficientes da função objetivo parametrizados)

QUADROS	VARIÁVEIS BÁSICAS	VALOR DAS VARIÁVEIS BÁSICAS	RAZÃO $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$	x_1	x_2	x_n
I	f_c	p_0		$-p_1$	$-p_2$	$-p_n$
	f_λ	q_0		$-q_1$	$-q_2$		$-q_n$
RAZÃO	$-\frac{p_j}{q_j}$						
II	y_1 y_2 \vdots y_m	b_1 b_2 \vdots b_m		a_{11}	a_{12}	a_{1n} a_{21} a_{22} a_{2n} \vdots a_{m1} a_{m2} a_{mn}

Neste quadro todas as variáveis básicas são representadas por y e as não básicas por x . O coeficiente de x_j na linha da função objetivo relativo à base corrente é exatamente $p_j + q_j \lambda$.

Se denotarmos por B a matriz básica e por C'_B, C''_B os vetores m -dimensionais, cujos componentes estão associados às

variáveis x_j básicas, teremos :

$$\begin{aligned}\Delta_j(\lambda) &= z_j(\lambda) - c_j(\lambda) = (C'_B + \lambda C''_B) B^{-1} A_j - (c'_j + \lambda c''_j) \\ &= (C'_B B^{-1} A_j - c'_j) + \lambda (C''_B B^{-1} A_j - c''_j) = p_j + \lambda q_j\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}p_j &= C'_B B^{-1} A_j - c'_j = \sum_{s=1}^m i_{c'_s} i_{x_s} - i_{c'_j} \\ q_j &= C''_B B^{-1} A_j - c''_j = \sum_{s=1}^m i_{c''_s} i_{x_{sj}} - c''_j\end{aligned}$$

onde admitimos que a base B é composta dos vetores $i_{A_1} \dots i_{A_m}$.

Como estamos diante de um problema de maximização ,
decorre do fato da solução ser ótima para $\lambda = \lambda_0$ que :

$$p_j + \lambda_0 q_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

Assim sendo, o problema tem a sua solução ótima pre
servada somente para aqueles valores de λ que satisfazem o sistema
de desigualdades ,

$$p_j + \lambda q_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \quad (\text{I.2.4})$$

Portanto,

$$p_j + \lambda q_j \geq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \lambda \leq -\frac{p_j}{q_j} & \text{desde que } q_j < 0 \\ \lambda \geq -\frac{p_j}{q_j} & \text{desde que } q_j > 0 \end{cases}$$

Observamos agora que $p_j + \lambda q_j$ compõe exatamente a
 j -ésima componente do vetor diretor do hiperplano H , imagem geo-

métrica da função objetivo (forma linear). Desejamos agora variar o parâmetro λ , conseqüentemente o vetor diretor do hiperplano H , mas de tal forma que nenhuma de suas componentes torne-se negativa. Percebe-se que essas componentes relativas à base corrente dependem linearmente de um parâmetro, ou mais precisamente, são funções contínuas.

I.3 - Dedução Geométrica do Conjunto de Otimalidade

Examinemos agora, geometricamente, uma componente

$p_j + q_j \lambda$ conforme $q_j \leq 0$, $q_j = 0$, $q_j \geq 0$.

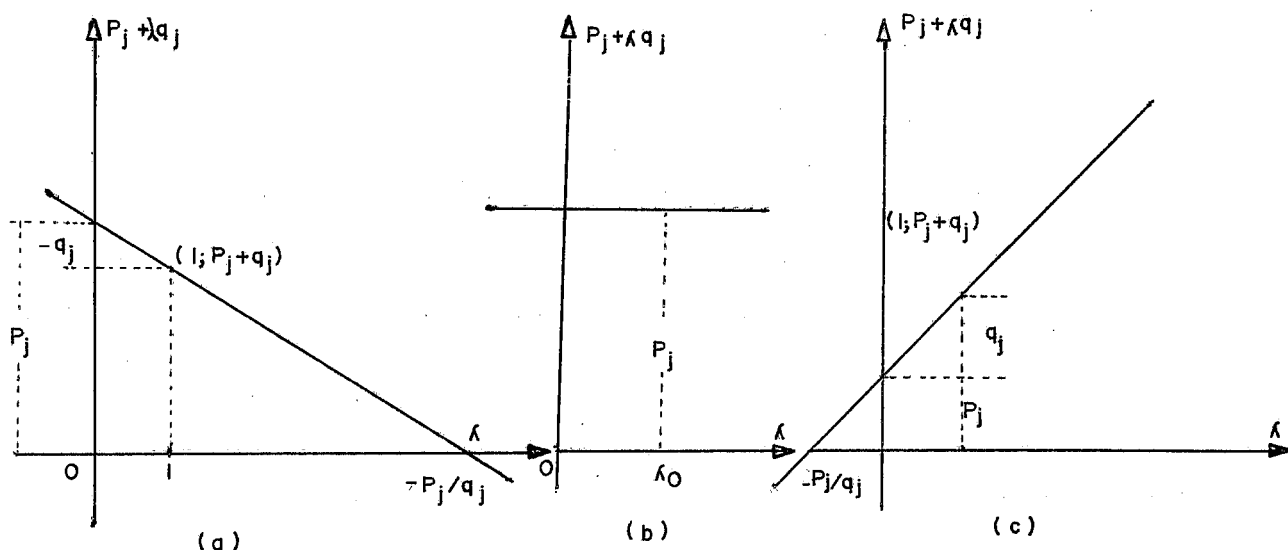


Fig. I.2

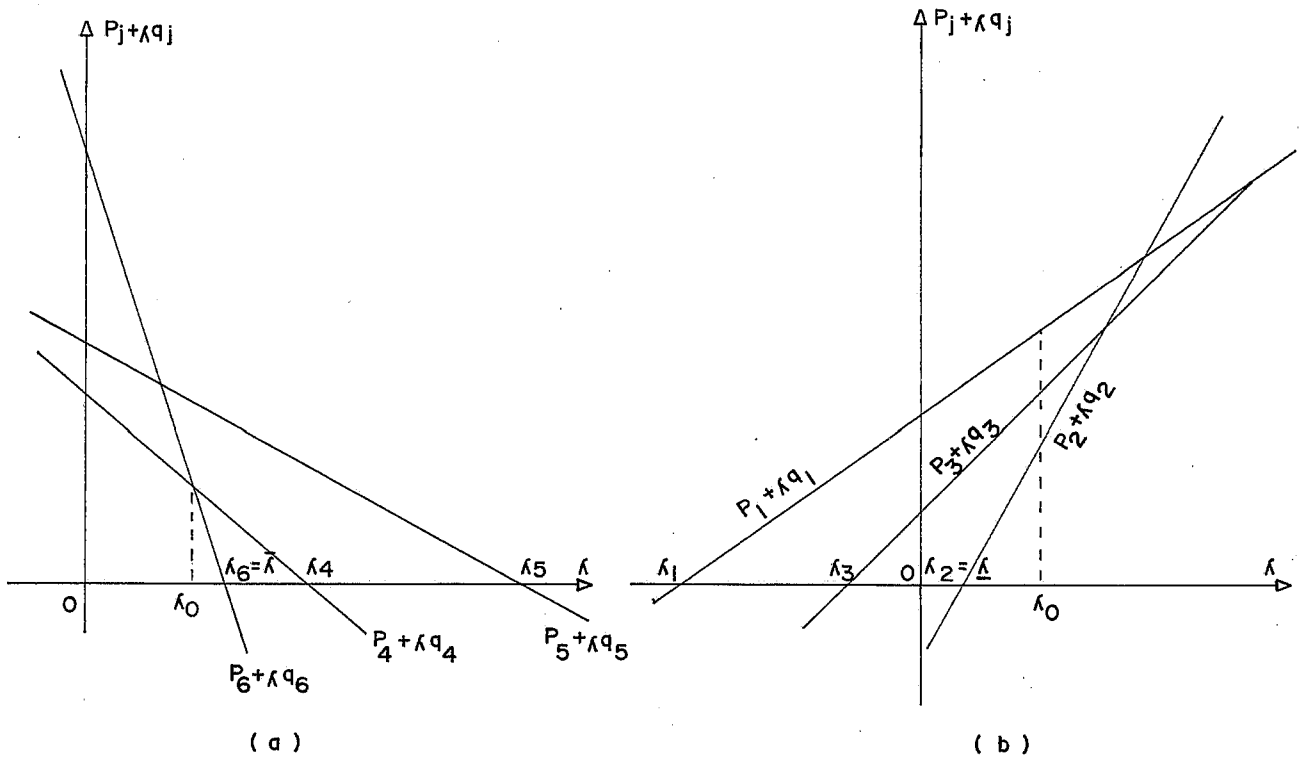


Fig. I.3

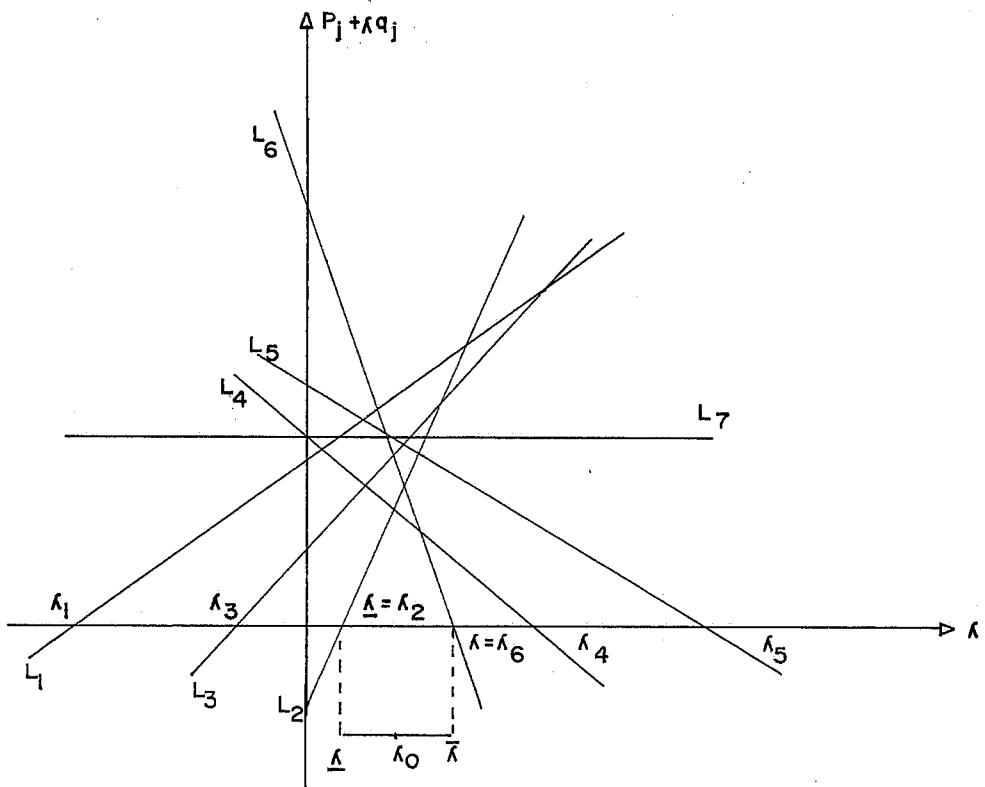


Fig. I.4

Fazendo uma análise das figuras, concluímos que na figura I.2.a (fig. I.2.c) $p_j + \lambda q_j$ é decrescente (crescente) para λ crescente (crescente) se $q_j < 0$ (se $q_j > 0$). Além disso a j -ésima componente do vetor diretor do hiperplano H (representação geométrica da função objetivo) torna-se zero para $\lambda = -p_j/q_j$ e negativa (positiva) para $\lambda > -p_j/q_j$ ($\lambda < -p_j/q_j$), o que implica em não termos mais solução ótima. Se existir somente uma variável não básica com $q_j < 0$ ($q_j > 0$), por exemplo x_6 (x_2), o máximo (mínimo) valor de λ para o qual a solução continua ótima é $\bar{\lambda} = -p_6/q_6$ ($\underline{\lambda} = -p_2/q_2$). Mas se por outro lado existirem mais variáveis não básicas com q 's negativos (positivos), por exemplo, x_4, x_5 e x_6 (x_1, x_2 e x_3) devemos então calcular $\lambda_4 = -p_4/q_4$, $\lambda_5 = -p_5/q_5$, $\lambda_6 = -p_6/q_6$ ($\lambda_1 = -p_1/q_1$, $\lambda_2 = -p_2/q_2$, $\lambda_3 = -p_3/q_3$) e tomarmos o mínimo (máximo) de λ_4, λ_5 e λ_6 ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), pois assim estaremos determinando o maior (menor) valor para o qual a solução continuará ótima. Na figura I.3.a (Fig. I.3.b) observa-se que tal mínimo (máximo) é $\bar{\lambda} = \lambda_6$ ($\underline{\lambda} = \lambda_2$).

Se agora supusermos as figuras I.3.a e I.3.b, adicionando o gráfico $p_7 + \lambda q_7$ com $q_7=0$ obtemos a figura I.4, a qual determina o conjunto de otimalidade para a solução do problema continuar ótima. É interessante constatar que se todas as x_j variáveis não básicas têm em seus coeficientes, na função objetivo, os q 's ≥ 0 (q 's ≤ 0) não há necessidade de sobrepor as figuras I.3.a e I.3.b para se obter o conjunto de otimalidade de λ para a solução permanecer ótima, pois neste caso somente existiria a figura I.3.b (I.3.a), e a mesma seria suficiente para determinar o

conjunto de otimalidade, donde se conclui que λ poderia assumir qualquer valor maior que $\underline{\lambda}$ (menor que $\bar{\lambda}$).

A partir do que foi exposto, podemos introduzir a notação :

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max_{q_j > 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) \\ -\infty \quad \text{se todos os } q_j \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.1})$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min_{q_j < 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) \\ \infty \quad \text{se todos os } q_j \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.2})$$

a qual satisfaz a equação (I.2.4).

Por definição, a base corrente $i_{A_1} \ i_{A_2} \ \dots \ i_{A_m}$ é ótima para aqueles e somente aqueles valores de λ que verificam o sistema de desigualdades (I.2.4).

Concluimos que o conjunto de otimalidade da base corrente compõe-se de todos os valores finitos de λ que verificam a condição

$$\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$$

Examinaremos agora como se modifica a solução do problema (I.2.1)-(I.2.3) para os valores de $\lambda > \bar{\lambda}$. Implícita-

mente estamos considerando $\bar{\lambda}$ finito, e além disso consideraremos somente aqueles q_j que são negativos.

I.4 - Critério de Entrada de um Vetor na Base

Admitamos que seja exatamente k o índice t.q.

$$\bar{\lambda} = \min_{q_j < 0} \left(-\frac{p_j}{q_j} \right) = -\frac{p_k}{q_k}, \quad q_k < 0 \quad (\text{I.4.1})$$

Decorre da própria definição de $\bar{\lambda}$ que

$$p_k + \bar{\lambda}q_k = p_k + q_k(-p_k/q_k) = 0$$

Se uma nova solução é desejada para $\lambda > \bar{\lambda}$, então uma variável não básica relativa a $\bar{\lambda}$ dado pelo índice de q_j em (I.4.1) deverá ser introduzida na base, desde que esta é a primeira variável com coeficiente negativo na função objetivo. Será que, ao decompor o vetor condição A_k com relação aos vetores de base, todas as componentes x_{ik} são não positivos? A resposta nos parece bastante intuitiva; no entanto, não necessariamente esse fato é verificado.

Admitamos que os x_{ik} sejam todos não positivos.

Tem-se:

$$p_k + \lambda q_k = p_k + \lambda q_k + \bar{\lambda}q_k - \bar{\lambda}q_k = (p_k + \bar{\lambda}q_k) + (\lambda - \bar{\lambda})q_k$$

$$p_k + \lambda q_k = 0 + (\lambda - \bar{\lambda})q_k < 0 \quad \text{pois por hipótese} \quad \begin{cases} \lambda > \bar{\lambda} \\ e \\ q_k < 0 \end{cases}$$

mas,

$$p_k + \lambda q_k < 0$$

$x_{ik} < 0$ para todo i constitui um critério de ausência de solução do problema pelo método primal do simplex.

O oposto de $x_{ik} \leq 0$ para todo i corresponde a existir pelo menos um i tal que x_{ik} é positivo. A exploração do problema tem sequência pelo método primal do simplex. Prosseguindo, introduz-se na base o vetor A_k tal que

$$p_k + \bar{\lambda} q_k = 0$$

$$q_k < 0$$

I.5 - Critério de Saída de um Vetor da Base

A variável a deixar a base é selecionada por

$$\frac{x_{ro}}{x_{rk}} = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{io}}{x_{ik}} \quad (I.5.1)$$

Assim, o vetor A_r deixará a base. Dando sequência à solução do problema, a nova base impõe que se determine o novo conjunto de otimalidade, o qual é obtido através de (I.3.1) e (I.3.2). Denotemos por $[\underline{\lambda}^*, \bar{\lambda}^*]$.

Mostremos agora que a extremidade esquerda $\underline{\lambda}^*$ do conjunto de otimalidade da nova base é exatamente a extremidade di

reita $\bar{\lambda}$ do conjunto de otimalidade da base precedente, e além disso, $\underline{\lambda}^* \leq \bar{\lambda}^*$.

Tabela I.2

Partes importantes de duas iterações sucessivas do simplex para programação paramétrica

QUADRO	VARIÁVEIS BÁSICAS	VALORES DAS VARIÁVEIS BÁSICAS	x_j	x_k	x_r
I	$f_c + \bar{\lambda} f_\lambda$ $f_\lambda (\lambda - \bar{\lambda})$ x_r	$b_c + \bar{\lambda} b_\lambda$ $b_\lambda (\lambda - \bar{\lambda})$ b_r	$p_j + \bar{\lambda} q_j \geq 0$ $q_j (\lambda - \bar{\lambda})$ a_{rj}	$p_k + \bar{\lambda} q_k$ $q_k (\lambda - \bar{\lambda})$ $\textcircled{x_{rk}}$	0 0 1
II	$f_c + \bar{\lambda} f_\lambda$ $f_\lambda (\lambda - \bar{\lambda})$ x_k	$b_c + \bar{\lambda} b_\lambda$ $b_\lambda - q_k x_{rk}^{-1} b_r (\lambda - \bar{\lambda})$ $x_{rk}^{-1} b_r$	$p_j + \bar{\lambda} q_j \geq 0$ $(q_j - q_k x_{rk}^{-1} x_{rj}) (\lambda - \bar{\lambda})$ $x_{rk}^{-1} x_{rj}$	0 0 1	0 $-q_k x_{rk} (\lambda - \bar{\lambda})$ x_{rk}^{-1}

A tabela acima, onde foram abordadas duas iterações sucessivas do método primal do simplex, é passiva das seguintes observações:

- 1) x_j é uma variável não básica nos quadros I e II
- 2) x_k é uma variável não básica no quadro I, que entra na base no quadro II
- 3) O quadro II foi obtido do quadro I pelo pivoteamento do elemen

to x_{rk} , que por ser pivô, deve ser positivo ($x_{rk} > 0$) segundo o método primal do simplex.

- 4) O coeficiente de x_k na função objetivo é zero, isto é, $p_k + \bar{\lambda}q_k = 0$. Este fato implica que todos os elementos na primeira linha do quadro II, $(f_c + \bar{\lambda}f_\lambda)$ não muda quando efetuamos o pivoteamento.
- 5) Os coeficientes das variáveis não básicas são todos eles não negativos para $\lambda = \bar{\lambda}$, visto que $\bar{\lambda}$ é o maior valor de λ para o qual a solução continua ótima. Desta forma $p_j + \bar{\lambda}q_j \geq 0$.

Notamos agora que quando somamos as duas primeiras linhas do quadro II, tem-se os novos coeficientes $p'_j + \lambda q'_j$ da função objetivo. Portanto,

$$p'_j + \lambda q'_j = \begin{cases} p_j + \bar{\lambda}q_j + (q_j - q_k x_{rk}^{-1} x_{rj})(\lambda - \bar{\lambda}) & \text{se } j \neq k, r \\ 0 & \text{se } j = k \\ -q_k x_{rk}^{-1}(\lambda - \bar{\lambda}) & \text{se } j = r \end{cases} \quad (\text{I.5.2})$$

deve ser maior ou igual a zero para que a solução continue ótima, isto é

$$\begin{aligned} p_j + \bar{\lambda}q_j + (q_j - q_k x_{rk}^{-1} x_{rj})(\lambda - \bar{\lambda}) &\geq 0 & j \neq k, r \\ 0 + (-q_k x_{rk}^{-1})(\lambda - \bar{\lambda}) &\geq 0 & j = r \end{aligned}$$

Assim, o menor valor de λ para que as inequações (I.5.2) se verifiquem, é :

$$\underline{\lambda}^* - \bar{\lambda} = \max_j \left[\frac{-(p_j + \bar{\lambda} q_j)}{q_j + q_k x_{rk}^{-1} x_{rj}}, \frac{0}{-q_k x_{rk}^{-1}} \right] \quad (\text{I.5.3})$$

onde os denominadores das frações devem ser positivos. Note - se que a última fração entre colchetes deve ser considerada, pois

$$-q_k x_{rk}^{-1} > 0$$

haja visto:

- a) $q_k < 0$ porque x_k é a nova variável básica
- b) $x_{rk} > 0$ porque é pivô.

Resta agora calcularmos o máximo do 2º membro de (I.5.3). Como a primeira fração entre colchetes é sempre negativa, pois pela observação 5 $p_j + \bar{\lambda} q_j \geq 0$, e a segunda fração é zero, segue-se que o máximo é zero.

Assim,

$$\underline{\lambda}^* - \bar{\lambda} = 0$$

então,

$$\bar{\lambda} = \underline{\lambda}^*$$

Por outro lado, o maior valor de λ para que as inequações (I.5.2) se verifiquem é :

$$\bar{\lambda}^* - \bar{\lambda} = \min_j \left| \frac{-(p_j + \bar{\lambda} q_j)}{q_j - q_k x_{rk}^{-1} x_{rj}}, \frac{0}{-q_k x_{rk}^{-1}} \right| \quad (\text{I.5.4})$$

onde os denominadores das frações devem ser negativos. A rigor, a segunda fração não deve existir no segundo membro de (I.5.4), pois

$-q_k a_{rk}^{-1} > 0$. Assim,

$$\bar{\lambda}^* - \bar{\lambda} \geq 0$$

ou

$$\bar{\lambda}^* \geq \bar{\lambda} = \underline{\lambda}^*$$

Tem-se ainda que o coeficiente da variável x_r da função objetivo no quadro I é zero, pois x_r está na base; mas no quadro II isso já não ocorre mais, sendo seu coeficiente dado por

$$p'_r + \lambda q'_r = -q_k x_{rk}^{-1} (\lambda - \bar{\lambda})$$

Como $-q_k x_{rk}^{-1} > 0$, o conjunto de otimalidade da nova base não admite valores de $\lambda < \bar{\lambda}$, pois neste caso o r -ésimo coeficiente da função objetivo seria negativo.

Estas conclusões podem ser enunciadas sob a forma do seguinte teorema:

Teorema I.1 : Seja k o índice definido pela condição (I.4.1) e seja $\bar{\lambda} < \infty$.

- a) Se $x_{ik} \leq 0$ ($i=1,2,\dots,m$) para todo $\lambda > \bar{\lambda}$, a forma linear (I.2.1) é infinita (tende a valores ilimitados) sob o conjunto (I.2.2) e (I.2.3).
- b) Se alguns dos números x_{ik} são positivos, ao introduzirmos na base o vetor disponível A_k , segundo as regras usuais do método primal do simplex, obtêm-se uma nova base, onde a extremidade à esquerda $\underline{\lambda}^*$ do conjunto de otimalidade é $\bar{\lambda}$.

Do que acabamos de ver, concluimos que o processo para resolver o problema paramétrico para $\lambda > \bar{\lambda}$ consiste em se partindo de uma base passarmos para uma próxima (que chamaremos de vizinha) pela introdução do novo vetor na base e em se constatar que a extremidade direita do conjunto de otimalidade da base precedente constitui a extremidade esquerda do conjunto de otimalidade da nova base. A essa altura já nos encontramos curiosos para sabermos quando devemos parar o processo, mas esta conclusão já nos salta à vista, pois se estamos analisando λ crescente (decrescente) devemos parar quando, chegando a uma base (que chamaremos de última) ocorra que todos os $q's \geq 0$ ($q's \leq 0$), o que equivale dizer que o conjunto de otimalidade da última base é uma semi-reta ; ou quando, por outro lado, chegarmos a uma base onde o problema não tem solução em nenhuma parte do interior do seu respectivo conjunto de otimalidade.

O procedimento ora descrito sempre seguirá bases diferentes, desde que para isso apliquemos ao critério da escolha do vetor a entrar na base as regras do método do simplex, que permite evitar a ciclagem.

Sejam B_h e B_{h+t} duas bases obtidas no decorrer da discussão do problema, e suponhamos que elas coincidam. Admitamos que $\underline{\lambda}$ e $\bar{\lambda}$ sejam os extremos inferiores e superiores do conjunto de otimalidade de base $B \equiv B_h \equiv B_{h+t}$. E suponhamos ainda por um momento, que os conjuntos de otimalidade de B_h e B_{h+t} sejam respectivamente $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ e $[\underline{\lambda}^*, \bar{\lambda}^*]$. Decorre do teorema I.1 que

$$\bar{\lambda} \leq \underline{\lambda}^* \quad (\text{I.5.5})$$

mas como este dois conjuntos de otimalidade coincide, então

$$\underline{\lambda}^* = \underline{\lambda} \quad (\text{I.5.6})$$

Logo, de (I.5.5) e (I.5.6) vem $\underline{\lambda} \geq \bar{\lambda}$, o que corresponde a dizer que o conjunto de otimalidade da base B é constituído de um único ponto $\tilde{\lambda} = \underline{\lambda} = \bar{\lambda}$. Mas isto acarreta que $\tilde{\lambda}$ é igualmente o conjunto de otimalidade de cada base intermediária $B_{h+1} \dots B_{h+t}$.

Portanto, para esse $\tilde{\lambda}$ fixado, podemos agora concluir que o deslocamento do procedimento seguindo as bases $B_h \dots B_{h+t}$ conforme as regras do método primal do simplex que permite evitar a ciclagem, é equivalente a resolver o problema auxiliar de maximizar

$$\sum_{j=1}^n c_j'' x_j$$

sob as condições (I.2.2)-(I.2.3) e sob a restrição suplementar

$$x_j = 0 \quad \text{se } j \notin J$$

onde J é o conjunto dos índices j tal que

$$p_j^{(h)} + \tilde{\lambda} q_j^{(h)} = 0$$

o qual após aplicarmos as regras do método do primal que evita a ciclagem, tais como o método lexicográfico do simplex [11], nos leva impreterivelmente à conclusão que $B_h \neq B_{h+t}$, contrariando a hipótese. Logo não existem bases iguais, ou melhor, retornar a uma base já passada é impossível. Portanto, o procedimento terminará em um número finito de iterações.

A discussão para valores de λ decrescente, isto é, para $\lambda < \underline{\lambda}$ efetua-se de maneira análoga. A única diferença é que neste caso a relação (I.4.1) é substituída por:

$$\underline{\lambda} = \max_{q_j > 0} \left(\frac{-p_j}{q_j} \right) = - \frac{p_k}{q_k} \quad q_k > 0$$

Desta maneira concluímos o 1º CASO.

Para analisar o 2º CASO, admitamos que a resolução do problema para $\lambda = \lambda_0$ terminou pela construção de uma base, de modo que sendo

$$p_k + \lambda_0 q_k < 0$$

$$x_{ik} \leq 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots \quad (\text{I.5.7})$$

as condições (I.5.7) de ausência de solução realizável são verificados.

Decorre de (I.5.7) que q_k pode ser uma das três seguintes alternativas:

- 1) $q_k = 0$, como ilustra a figura I.5.a, as condições (I.5.7) são observadas para todo valor do parâmetro λ ;
- 2) $q_k > 0$, como evidencia a figura I.5.b as condições (I.5.7) são observadas para todo valor de

$$\lambda < \lambda_1 = - \frac{p_k}{q_k}$$

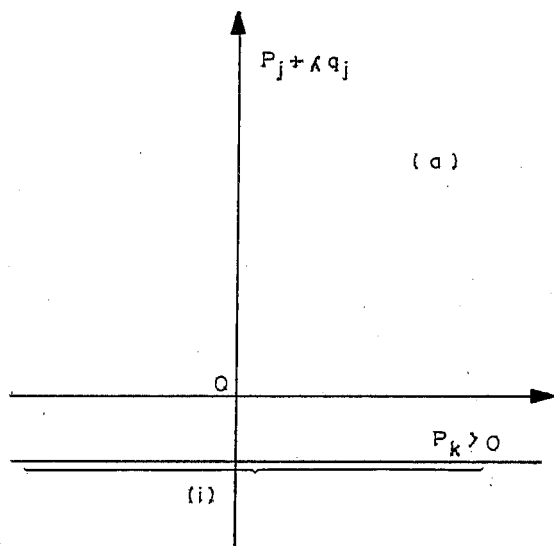
Então só tem sentido explorar a existência de solução para $\lambda \geq \lambda_1$.

- 3) $q_k < 0$, como evidencia a figura I.5.c as condições (I.5.7) são observadas para todo valor de

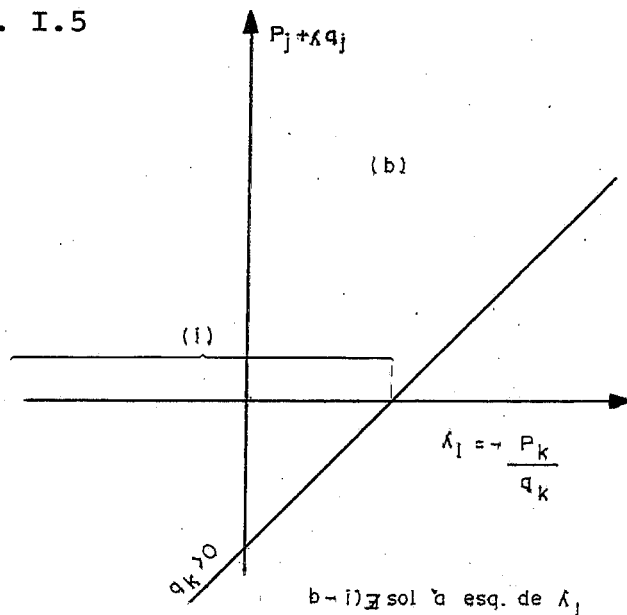
$$\lambda > \lambda_1 = -\frac{p_k}{q_k}$$

Então só tem sentido explorar a existência de solução para $\lambda \leq \lambda_1$.

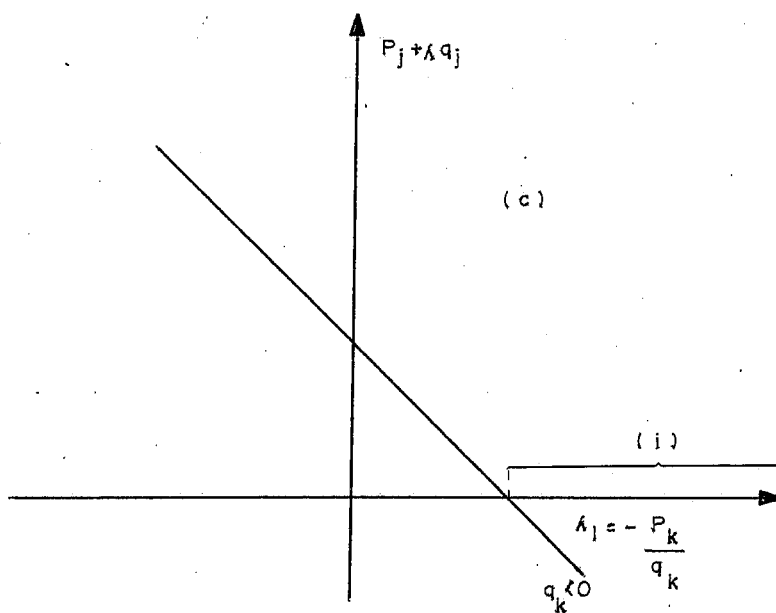
Fig. I.5



a - i) Não existe (\exists) sol.

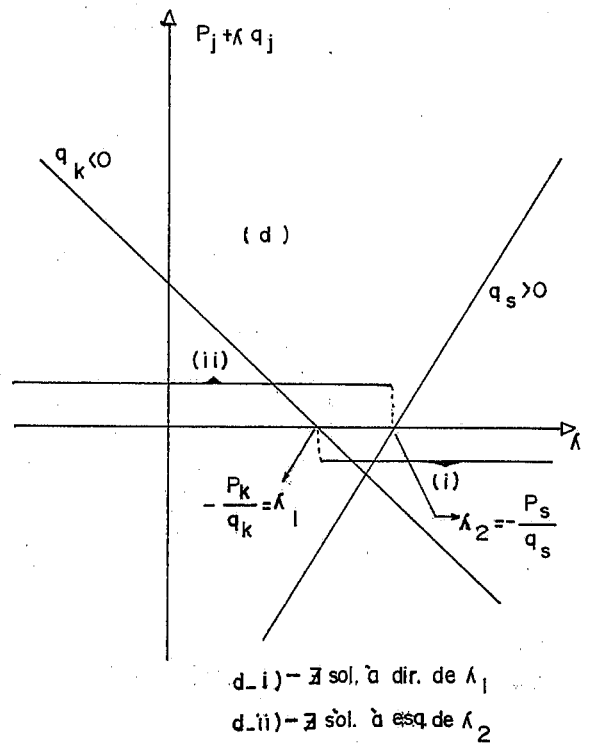
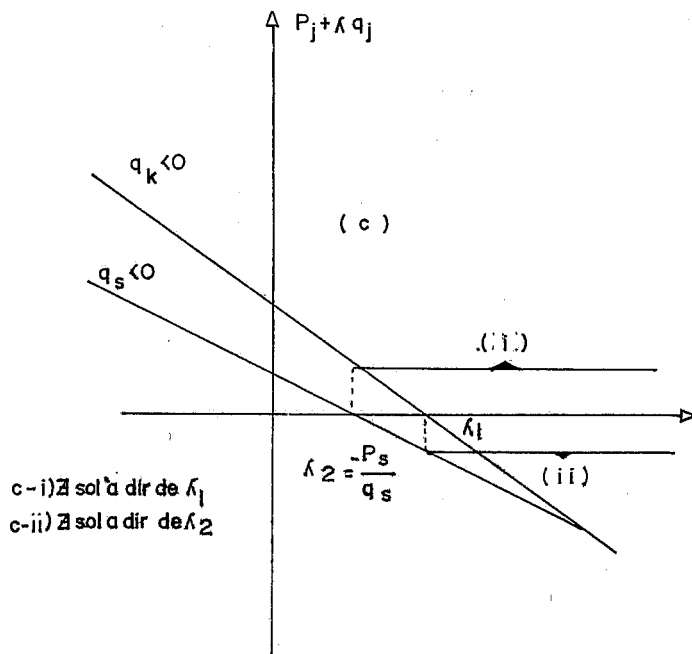
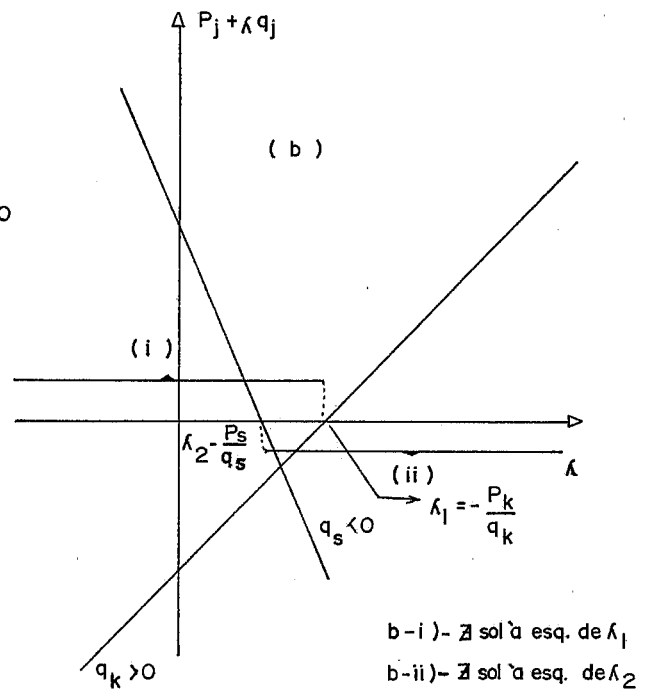
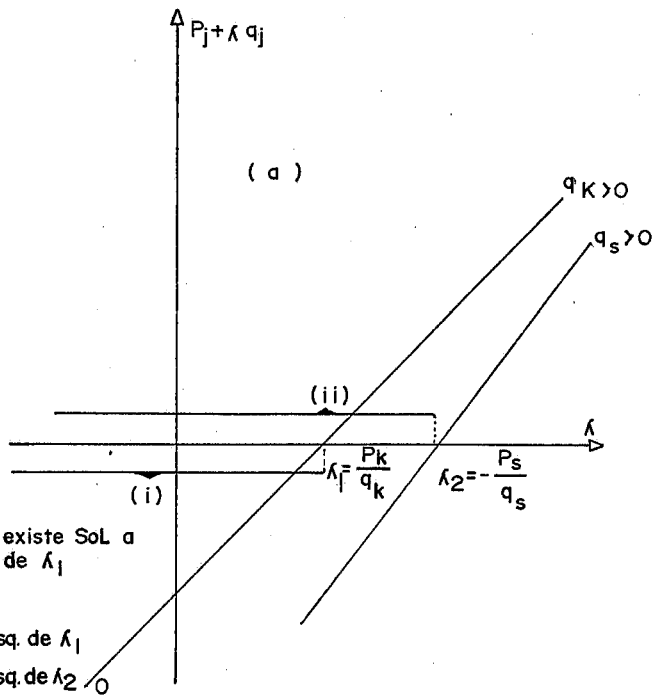


b - i) \exists sol à esq. de λ_1



c - i) \exists sol. à dir. de λ_1

Fig. I.6



Ao analisarmos a segunda (primeira) alternativa, a solução do problema tem sequência na resolução do problema para $\lambda = \lambda_1$ a qual parte da solução disponível.

Podemos então chegar a dois resultados:

- a) obtenção de uma base ótima.
- b) obtenção das condições (I.5.8)

$$p_s + \lambda_1 q_s < 0$$

$$x_{is} \leq 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots,m \quad (\text{I.5.8})$$

as quais revelam ausência de solução do problema.

Em a) , o problema tem continuidade conforme as recomendações dadas no 1º CASO. Já em b) , a análise subsequente depende essencialmente do sinal de q_s .

Se $q_k > 0$ e $q_s < 0$ ($q_k < 0$ e $q_s > 0$), a figura I.6.b (figura I.6.d) é auto-explicativa e nos mostra que o problema não tem solução. Se $q_s = 0$ é fácil ver que o problema também não tem solução.

Se $q_k > 0$ e $q_s > 0$ ($q_k < 0$ e $q_s < 0$), a figura I.6.a) (figura I.6.c) nos diz que o problema não tem solução à direita (esquerda) de λ_2 . Então o problema tem continuidade através da segunda e da terceira alternativas e permutamos λ_1 por λ_2 e k por s . Prosseguindo, chegamos à conclusão que ao cabo de um número finito de etapas, o problema (I.2.1)-(I.2.3) é irrealizável sob toda a reta, ou obtém-se novamente as condições, as

quais permitem prosseguir com o 1º CASO.

Do que acabamos de expor, podemos chamar a atenção para o que segue. De acordo com a Tabela I.2, a solução é procurada inicialmente para $\lambda = \lambda_0$. Ao fim de algumas iterações, chegamos à conclusão que devemos prosseguir com o 1º ou 2º CASO. Após constataremos que é o 1º CASO que devemos inicialmente aplicar, usamos (I.3.1) (I.3.2) para determinar o conjunto de otimalidade da base corrente. Se na linha relativa a $-p_j/q_j$ não existem casas que correspondam a $q_j < 0$ ($q_j > 0$) a base corrente é ótima para todo $\lambda \geq \lambda_0$ ($\lambda \leq \lambda_0$). Caso contrário, o índice do elemento minimal (maximal) desta linha correspondente a $q_j < 0$ ($q_j > 0$), determina o índice do vetor que vai entrar na base se estamos analisando valores crescentes de λ (valores decrescentes de λ) e o valor deste elemento minimal (maximal) coincide com a extremidade direita (esquerda) do conjunto de otimalidade da base corrente.

Se o estudo preliminar nos informa que devemos iniciar pelo 2º CASO, então neste momento devemos fazer na Tabela I.1 uma permutação temporária, isto é, devemos substituir f_c por $f_c + \lambda_1 f_\lambda$ onde $\lambda_1 = -\frac{p_k}{q_k}$ e o índice k é determinado como em (I.5.7).

Prosseguindo, devemos introduzir na base o vetor conforme o método do simplex, determinado por um dos elementos negativos da nova linha. Damos continuidade ao problema conforme as regras do 2º CASO, chegando-se a uma solução irrealizável, ou às condições que permitem prosseguir com o 1º CASO. O estudo do problema, relativamente ao 1º CASO, conclue-se em um número finito de

iterações onde construímos uma base cujo conjunto de otimalidade é uma semi-reta, ou pomos em evidência que as condições de ausência de solução são satisfeitas para todos os pontos do interior desta semi-reta.

I.6 - Exemplo Numérico

Para complementar este capítulo, daremos um exemplo numérico [3]. Maximize para $0 \leq \lambda \leq \infty$.

$$f = (4 - \lambda)x_1 + (1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda)x_2 + (2 \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \lambda)x_3 + (3 \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \lambda)x_4$$

sujeito

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 40$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 60$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4$$

Tabela I.3

Domínio de λ	QUADROS	VARIÁVEIS BÁSICAS	$\frac{x_{10}}{x_{1k}}$ $x_{1k} > 0$	x_1	x_2	x_3	x_4
$\begin{matrix} 8 \\ \vee \\ > \\ \vee \\ \omega \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$	0	f_C		-4	$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	$-3\frac{1}{2}$
		f_λ	0	1	$1/2$	$3/4$	$3/4$
		$-f_C/f_\lambda$		4	3	$3\frac{2}{3}$	$\boxed{4\frac{2}{3}}$
		y_1	100	4	3	2	0
		y_2	40	1	0	1	2
		y_3	60	2	4	1	2
$\begin{matrix} \omega \\ 4 \\ 2 \\ \vee \\ > \\ \vee \\ \omega \end{matrix}$	1			x_1	x_2	x_3	y_2
		f_C	70	$-2\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$3\frac{1}{4}$
		f_λ	-15	$5/8$	$1/2$	$3/8$	$-3/8$
		$-f_C/f_\lambda$		$\boxed{3\frac{3}{5}}$	3	$2\frac{2}{3}$	$(4\frac{2}{3})$
		y_1	100	4	3	2	0
		x_4	20	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$
		y_3	20	1	4	0	-1

(continua)

Da Tabela I.3 tiramos a Tabela I.4 .

Tabela I.4 (Resumo)

$\underline{\lambda}$	$\bar{\lambda}$	f_C	f_λ	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
0	$2\frac{2}{3}$	125	-31 $\frac{1}{4}$	20	0	10	5	0	0	0
$2\frac{2}{3}$	$3\frac{3}{5}$	115	-27 $\frac{1}{2}$	20	0	0	10	20	0	0
$3\frac{3}{5}$	$4\frac{2}{3}$	70	-15	0	0	0	20	100	0	20
$4\frac{2}{3}$	∞	0	0	0	0	0	0	100	40	60

CAPÍTULO II

PARAMETRIZAÇÃO DO LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES

(CASO $B = B' + \mu B''$)

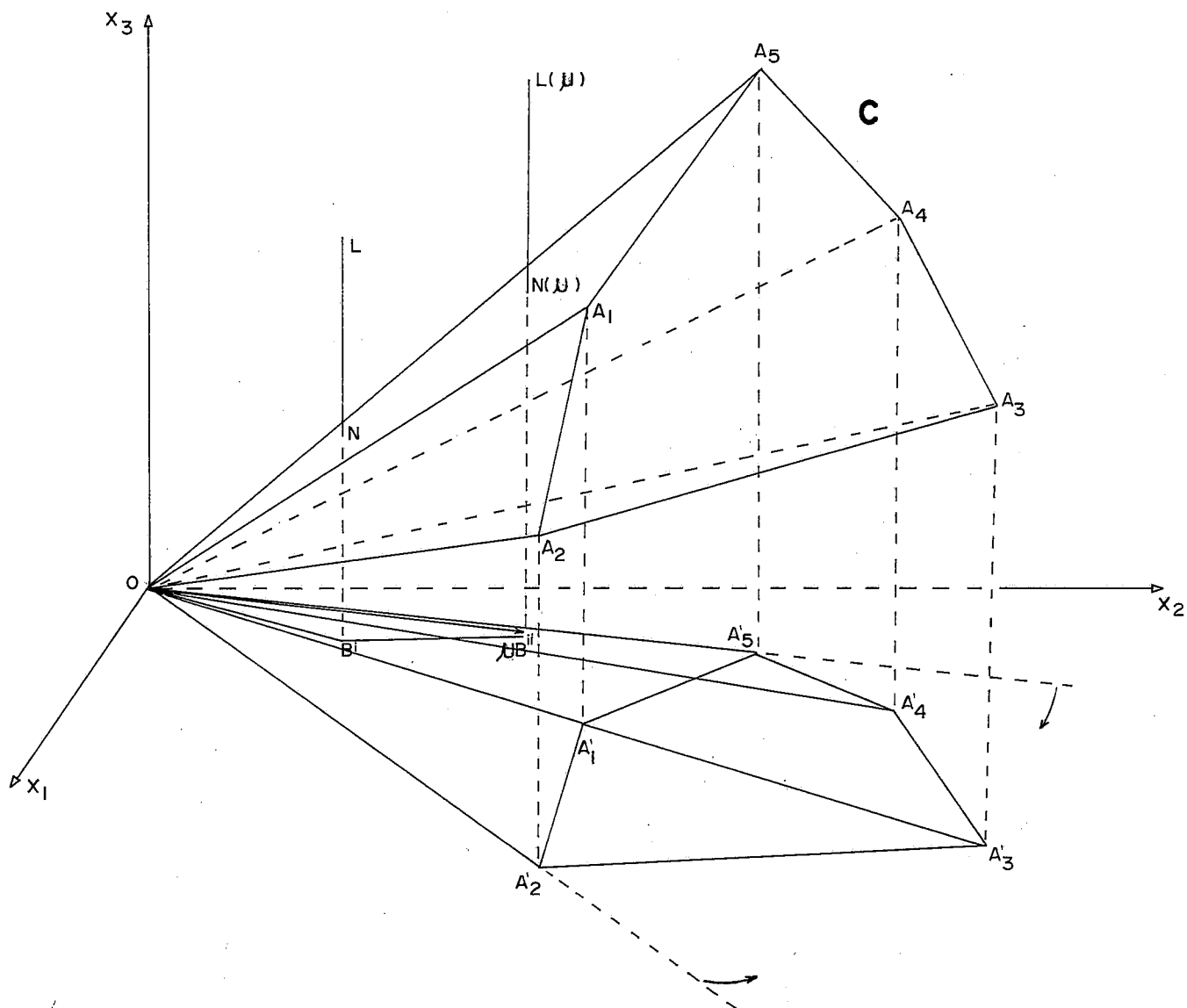
II.1 - INTRODUÇÃO

A descrição algébrica do procedimento referente a este caso será dado logo após uma interpretação geométrica dada pela Figura II.1. Aqui consideramos o caso onde $m=2$, pois para $m > 2$ perdemos completamente a compreensão geométrica das considerações, embora nos restem conclusões qualitativas.

Admitiremos que já é de nosso conhecimento a interpretação geométrica do procedimento do simplex ¹⁵.

O objetivo do procedimento é encontrar N , imagem geométrica do ponto ótimo, que se encontra na interseção da reta L com o cone poliédrico C , onde suas arestas OA_i são vetores $(m+1)$ -dimensional, obtidos dos vetores condições OA'_i , pela adição da

Fig. II.1



$(m+1)$ -ésima componente, que corresponde aos coeficientes de custo c_i da função objetivo. Se agora adicionarmos o vetor $\mu B''$ ao vetor B' , tem-se que o ponto interseção da reta L com o plano $x_1 O x_2$ desloca-se provocando também um deslocamento do ponto superior N , interseção da reta L com o cone poliédrico C . Observamos agora que o ponto N da face $A_1 O A_5$ do cone C não repousa sobre uma aresta desse cone e, se μ não é um valor grande (assume um conveniente valor), então o ponto $N(\mu)$ interseção da reta $L(\mu)$ com o cone C ainda continuará na mesma face. Decorre daí que a base ótima do programa, aqui representada por OA_1 e OA_5 , não muda. Se agora aumentarmos o valor μ de tal forma que o ponto $N(\mu)$ caia sobre uma aresta do cone C , ao longo da qual a face $A_1 O A_5$ é cortada por uma de suas vizinhas, temos aí que o problema correspondente será um programa degenerado. Continuando, fazendo μ assumir valores maiores, tem-se que o ponto $N(\mu)$ se transferirá para uma face vizinha do cone C . Portanto, a base correspondente ao intervalo $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ diferirá da base anterior por um vetor condição. Dando prosseguimento a este raciocínio, conclue-se que ao variar μ , determina-se segmentos $[\mu_i, \mu_{i+1}]$, tais que para todo valor de μ considerado no interior desse intervalo temos sempre uma mesma base ótima para o problema. Para completar, observamos que μ pode variar, mas de tal forma que o vetor $B' + \mu B''$ jamais fique fora do cone formado pelos vetores extremantes OA'_2 e OA'_5 .

II.2 - CONCEITUAÇÃO DO PROBLEMA

O problema que temos agora para resolver pode ser formulado como se segue. Seja B_0 o vetor parametrizado definido por $B_0 = B' + \mu B''$, onde B' e B'' são dois vetores conhecidos e μ um escalar. Desejamos calcular para todo μ pertencente a um subconjunto da reta real, um vetor X , que seja solução do problema:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = z \text{ (Max)} \quad (\text{II.2.1})$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i + \mu b''_i \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II.2.2})$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{II.2.3})$$

O mesmo problema posto na forma matricial é: Maximize

$$Z = CX \quad (\text{II.2.1'})$$

sujeito

$$AX = B' + \mu B'' \quad (\text{II.2.2'})$$

$$x > 0$$

(II.2.3')

Inicialmente, nossa atenção é voltada a investigar se podemos aplicar os conceitos de dualidade a este problema, com objetivo de aplicarmos os conhecimentos já adquiridos no Capítulo anterior. Isto é possível e, para tal, deveríamos resolver o seu problema dual, o qual é Minimizar

$$g = (B' + \mu B'')u$$

sujeito a

$$Au \geq C$$

$$u \geq 0$$

Entretanto, por razões didáticas faremos o estudo de uma maneira direta, baseado no método dual do simplex, e a solução terá sequência através das bases dos pseudoprogramas do problema (II.2.1)-(II.2.3). Dando prosseguimento, lembramos que a base de um pseudoprograma, ou pseudobase é um sistema de m vetores condições linearmente independentes relativamente aos quais os critérios de seleção de todos os vetores condições são não negativos (não positivos), isto é, os coeficientes da função objetivo relativamente a base corrente são não negativos (não positivos).

vos) no caso de maximização (minimização), e observe que neste caso não teremos necessariamente uma base viável, mas quando isto ocorrer diremos que a pseudobase constitui uma base ótima do problema.

Definição II.1: O conjunto de otimalidade de uma pseudobase é o conjunto de todos os valores μ , tais que a pseudobase seja ótima.

A solução do problema (II.2.1)-(II.2.3) tem sequência ao determinarmos pelo método dual do simplex uma base ótima para $\mu = \mu_0$ (1º CASO), ou quando as condições de ausência de solução são postas em evidência para $\mu = \mu_0$.

Não abordaremos o caso onde a forma linear é ilimitada para $\mu = \mu_0$, pois o problema não terá solução realizável para todo μ .

De fato, se para $\mu = \mu_0$ o problema (II.2.1')-(II.2.3') não tem solução realizável, então da teoria da dualidade o dual de (II.2.1')-(II.2.3') para $\mu = \mu_0$

$$u(B' + \mu_0 B'') = g(\text{Min}) \quad (\text{II.2.4})$$

$$Au \geq C \quad (\text{II.2.5})$$

$$u \geq 0$$

(II.2.6)

não tem solução realizável. Mas μ não desempenha nenhum papel nas restrições de (II.2.5), (II.2.6), o que significa dizer que para todo μ o problema dual não é viável. Consequentemente o problema (II.2.1)-(II.2.3) não tem solução realizável.

1º Caso:

Suponhamos que o nosso problema foi resolvido para $\mu = \mu_0$ e em consequência uma base ótima, a qual é constituída pelos vetores ${}^iA_1, \dots, {}^iA_m$, foi determinada. Denotaremos tal base por iA . Com iA também queremos indicar uma matriz básica, isto é, uma matriz cujos vetores colunas são exatamente os acima citados.

Então uma solução será:

$${}^iX_0(\mu_0) = {}^iA^{-1} [B' + \mu_0 B''] \quad (\text{II.2.7})$$

$${}^iX_0(\mu_0) = {}^iA^{-1} B' + \mu_0 {}^iA^{-1} B'' \quad (\text{II.2.8})$$

Sejam ${}^iA^{-1} B' = X_0^{(1)}$ e ${}^iA^{-1} B'' = X_0^{(2)}$ soluções do

sistema (II.2.2'), quando o 2º membro do sistema (II.2.2') é substituído por $B = B'$ e $B = B''$ respectivamente (uma de cada vez para o mesmo sistema). Desta forma a equação (II.2.8) pode assim ser escrita:

$${}^i x_0(\mu_0) = x_0^{(1)} + \mu_0 x_0^{(2)} \quad (\text{II.2.9})$$

onde ${}^i x_0(\mu_0)$ é um vetor coluna de m componentes. Logo, temos m equações

$${}^i x_{0s}(\mu_0) = x_{0s}^{(1)} + \mu_0 x_{0s}^{(2)} \quad s = 1, \dots, m$$

com ${}^i x_{0s}(\mu_0) \geq 0$; $s = 1, 2, \dots, m$, pois a solução é ótima. Para facilitar a impressão datilográfica faremos a seguinte conversão

$$x_{0s}^{(1)} = b_s, \quad x_{0s}^{(2)} = a_s$$

Portanto:

$${}^i x_{0s}(\mu_0) = b_s + \mu_0 a_s$$

Se fizermos em:

$$x_{0s}^i(\mu) = b_s + \mu a_s \quad (\text{II.2.10})$$

μ variar, é claro que a solução poderá deixar de ser viável se certas precauções não forem tomadas. Ao analisar as m equações chegamos a conclusão que

$$x_{0s}^i(\mu) = b_s + \mu a_s \geq 0 \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (\text{II.2.11})$$

permanecerão não negativos se

$$\mu \geq -\frac{b_s}{a_s} \quad \text{com} \quad a_s > 0$$

$$\mu \leq -\frac{b_s}{a_s} \quad \text{com} \quad a_s < 0$$

Pode surgir ainda, que ao analisarmos $\mu > \mu_0 \geq 0$ ($\mu < \mu_0 \leq 0$) o corra que $a_s \geq 0$ ($a_s \leq 0$) para todo s , isto é, jamais conseguiremos violar a viabilidade da solução encontrada para $\mu = \mu_0$.

II.3 - CONJUNTO DE OTIMALIDADE

Definamos:

$$\underline{\mu} = \begin{cases} \max_{a_s > 0} - \frac{b_s}{a_s} \\ -\infty \text{ se todos os } a_s \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.1})$$

$$\bar{\mu} = \begin{cases} \min_{a_s < 0} - \frac{b_s}{a_s} \\ \infty \text{ se todos os } a_s \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.3.2})$$

Como o critério $\Delta_j = z_j - c_j$ dos vetores A_j não depende de μ , então uma condição necessária e suficiente para a viabilidade de uma pseudobase é que as inequações (II.2.11) sejam verificadas, o que acarreta ser a solução dada por (II.2.11) ótima para $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$. Concluimos que o conjunto de otimalidade da pseudoba se corrente, compõe-se de todos os valores finitos de μ que verifiquem a condição $\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu}$.

Passaremos agora a explorar o comportamento do problema (II.2.1)-(II.2.3) para $\mu > \bar{\mu}$ (analogamente poderíamos desenvolver o raciocínio para $\mu < \underline{\mu}$). Presume-se aqui $\bar{\mu} < \infty$, e que entre os a_s , $s = 1, 2, \dots, m$ provavelmente existirá pelo menos

um negativo. Admitamos também que a pseudobase $i_{A_1} \dots i_{A_m}$ seja uma solução ótima do problema para todo $\mu < [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$.

II.4 - CRITÉRIO DE SAÍDA DE UM VETOR DA BASE

Procuraremos agora uma variável que batizaremos de x_r , a qual se tornará zero em $\bar{\mu}$ e negativa para $\mu = \bar{\mu} + \xi$, onde ξ é positivo e arbitrariamente pequeno. Seja r o índice tal que

$$\bar{\mu} = \min_{a_s < 0} - \frac{b_s}{a_s} = \frac{-b_r}{a_r} \quad (\text{II.4.1})$$

Como

$$\begin{aligned} b_r + \mu a_r &= b_r + \bar{\mu} a_r + a_r (\mu - \bar{\mu}) = \\ &= b_r + a_r \left(- \frac{b_r}{a_r} \right) + a_r (\mu - \bar{\mu}) \end{aligned}$$

é óbvio que ao avançar μ além de $\bar{\mu}$, $i_{A_1} \dots i_{A_m}$ não mais se constitui uma pseudobase ótima, pois o valor de x_r dado acima é negativo, muito embora a possibilidade de que a mesma continue sendo uma pseudobase para o problema não tenha sido afastada.

II.5 - CRITÉRIO DE ENTRADA DE UM VETOR NA BASE

A situação em que nos encontramos agora é idêntica a do método do dual, quando uma variável básica negativa tem que ser removida da base e substituída por uma nova variável básica, mas de tal forma que tenhamos uma nova pseudobase. Vejamos como isso realmente acontece. Para tornar mais fácil a explicação, voltemos por um momento ao método dual do simplex. Chame-mos de x_k a variável que tomará o lugar de x_r .

Consequentemente, o elemento pivot da tabela usual do método dual do simplex é x_{rk} . Sabemos que após o pivoteamento o novo coeficiente da variável x_j na função objetivo é dado por

$$p'_j = p_j - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} p_k$$

e se desejamos que nossa nova pseudobase seja ótima, então o k deve ser escolhido de modo que

$$p_j - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} p_k \geq 0$$

para todo j .

Também já sabemos que se x_k substitue x_r , então o novo valor de x_k é dado por

$$x_k = \frac{b_r}{x_{rk}}$$

e isto permanece ainda verdadeiro se b_r e x_k são considerados funções de μ , de modo que

$$x_{k0}(\mu) = \frac{b_r + \mu a_r}{x_{rk}}$$

Já chamamos a atenção que $b_r + \mu a_r < 0$ para $\mu \geq \bar{\mu} + \xi$ e desejamos agora que

$$\frac{b_r + \mu a_r}{x_{rk}} > 0 \quad \text{para} \quad \mu \geq \bar{\mu} + \xi$$

isto é, que o novo valor de $x_{k0}(\mu)$ seja positivo. Obviamente para termos $x_{k0}(\mu) > 0$ é necessário que $x_{rk} < 0$. Se todos os $x_{rj} \geq 0$ então não podemos crescer μ além de $\bar{\mu}$ sem violar a viabilidade. Concluimos assim que as candidatas a entrar na base são unicamente aquelas variáveis que têm negativo os elementos na r -ésima linha da tabela usual do método dual do simplex. Analiticamente podemos traduzir tudo isto exigindo que:

$$p_j + \frac{x_{rj}}{|x_{rk}|} p_k \geq 0 \quad (\text{II.5.1})$$

para todo j . Como $p_j, p_k > 0$ (a antiga pseudobase era ótima) então $x_{rj} > 0$ não trará problemas a (II.5.1). Se $x_{rj} < 0$, então (II.5.1) pode ser escrita:

$$p_j - \frac{|x_{rj}|}{|x_{rk}|} p_k \geq 0$$

ou

$$\frac{p_k}{|x_{rk}|} \leq \frac{p_j}{|x_{rj}|}$$

para todo j tal que $x_{rj} < 0$. Isto corresponde a dizer que o índice k é determinado por

$$\frac{p_k}{|x_{rk}|} = \min_{x_{rj} < 0} \frac{p_j}{|x_{rj}|}$$

ou:

$$-\frac{z_k - c_k}{x_{rk}} = \min_{x_{rj} < 0} -\frac{z_j - c_j}{x_{rj}} \quad (\text{II.5.2})$$

Desta forma temos uma pseudobase viável para $\mu \geq \bar{\mu}$, portanto, uma solução ótima para o problema.

A Tabela II.1 é uma síntese do quadro usual do método dual do simplex, onde anexamos uma coluna, a qual foi rotulada de vetor básico (relativo a base do corrente).

Observa-se que a coluna "valores das variáveis básicas" foi transformada em duas colunas, a "b-termo" e a μ -termo". Na Tabela II.1 o quadro II foi obtido do quadro I pelo pivoteamento do elemento x_{rk} , onde os índices r e k são dados por (II.4.1) e (II.5.2) respectivamente. As transformações efetuadas já são conhecidas do método dual do simplex.

Se o pseudo programa é $X = (x_{10}(\mu) \dots x_{s0}(\mu) \dots \dots x_{n0}(\mu))$ então pelo quadro II da Tabela II.1 segue-se:

i) Para $s \neq k, r$

TABELA II.1.1

Partes fundamentais de duas iterações sucessivas do método dual
do simplex para programação paramétrica

Q U A D R O	Váriá veis Básicas	Valores das Variáveis Básicas		$\mu = - \frac{b_s}{a_s}$	x_j	x_k	Vetor Básico x_r
		b-termo	μ -termo				
I	f				P_j	P_k	$p_r = 0$
	Razão	$\frac{x_{0i}}{x_{rj}}, x_{rj} < 0$				$\frac{P_k}{x_{rk}}$	
	$x_s(\mu)$	b_s	a_s		x_{sj}	x_{sk}	0
	$x_r(\mu)$	b_r	a_r	$\bar{\mu} = - \frac{b_r}{a_r}$	x_{rj}	x_{rk}	1

				x_j	x_r	x_k
	f			$p_j - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} p_k$	$1 - \frac{1}{x_{rk}} p_k$	$p_k = 0$
	Razão					
II	$x_s(\mu)$	$b_s - \frac{b_r}{x_{rk}} x_{sk}$	$a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk}$	$x_{sj} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{sk}$	$\frac{x_{sk}}{x_{rk}}$	0
	$x_k(\mu)$	$b_r - \frac{b_r}{x_{rk}}$	$a_r - \frac{a_r}{x_{rk}}$	$\frac{x_{rj}}{x_{rk}}$	$1 - \frac{1}{x_{rk}}$	1

$$x'_{s_0}(\mu) = b'_s + \mu a'_s = (b_s + \mu a_s) - \frac{x_{sk}}{x_{rk}} (b_r + \mu a_r)$$

$$= (b_s - \frac{b_r}{x_{rk}} x_{sk}) + \mu (a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk})$$

Adicionando e subtraindo o termo $\bar{\mu}(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk})$ vem:

$$x'_{s_0}(\mu) = (b_s - \frac{b_r}{x_{rk}} x_{sk}) + \bar{\mu}(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk})$$

$$+ (\mu - \bar{\mu})(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk}) = (b_s + \bar{\mu} a_s) -$$

$$- \frac{x_{sk}}{x_{rk}} (b_r + \bar{\mu} a_r) + (\mu - \bar{\mu})(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk})$$

Por (II.4.1) $b_r + \bar{\mu} a_r = 0$, então,

$$x'_{s_0}(\mu) = x_{s_0}(\bar{\mu}) + (\mu - \bar{\mu})(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk})$$

ii) Para $s = r$

$$x'_{r0}(\mu) = \frac{b_r + \mu a_r}{x_{rk}}$$

Adicionando e subtraindo o termo $\bar{\mu} \frac{a_r}{x_{rk}}$ vem:

$$x'_{r0}(\mu) = \frac{b_r + \bar{\mu} a_r}{x_{rk}} + (\mu - \bar{\mu}) \frac{a_r}{x_{rk}}$$

De (i) e (ii), concluímos:

$$x'_{s0}(\bar{\mu}) = \begin{cases} x_{s0}(\bar{\mu}) + (\mu - \bar{\mu}) \left(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk} \right), & s \neq k, r \\ 0 & s = k \\ \frac{x_{r0}(\bar{\mu})}{x_{rk}} + (\mu - \bar{\mu}) \frac{a_r}{x_{rk}} & s = r \end{cases} \quad (\text{II.5.3})$$

A nova pseudobase é viável para $\mu = \bar{\mu}$, pois por (II.5.3) temos:

$$x'_{s_0}(\mu) = x_{s_0}(\bar{\mu}) \geq 0$$

para todo s . Recorde-se que $\bar{\mu}$ é o maior valor de μ que dá condições para que a pseudobase anterior seja viável, isto é, $x_{s_0}(\bar{\mu}) \geq 0$. É fácil ver que se o pseudograma é viável para qualquer outro valor de μ , então $\mu \geq \bar{\mu}$. De fato, suponhamos que o corra viabilidade do pseudoprograma para

$$\mu < \bar{\mu}$$

isto é

$$\mu < \bar{\mu} = - \frac{b_r}{a_r} \quad (\text{II.5.4})$$

Como $a_r < 0$ e $x_{rk} < 0$, então (II.5.4) nos dá:

$$b_r + \mu a_r > 0$$

logo,

$$x'_{r_0}(\mu) = \frac{b_r + \mu a_r}{x_{rk}} < 0$$

o que é um absurdo, pois estamos supondo que o pseudoprograma é viável. Prosseguindo, observamos que para lidar com a nova base, torna-se imprescindível que se determine o novo conjunto de

otimalidade, o qual é obtido através de (II.3.1) e (II.3.2). Denotemos esse conjunto por $[\underline{\mu}^*, \bar{\mu}^*]$. Mostraremos agora que a extremidade esquerda $\underline{\mu}^*$ do conjunto de otimalidade da nova base é precisamente a extremidade direita $\bar{\mu}$ do conjunto de otimalidade da base precedente e, além disso, $\underline{\mu}^* \leq \bar{\mu}^*$.

De (II.5.3), notamos que $x'_{s0}(\mu) \geq 0$ se

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{s0}(\bar{\mu}) + (\mu - \bar{\mu}) \left(a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk} \right) \geq 0 & s \neq k, r \\ \frac{x_{r0}(\bar{\mu})}{x_{rk}} + (\mu - \bar{\mu}) \frac{a_r}{x_{rk}} \geq 0 & s = r \end{array} \right. \quad (\text{II.5.5})$$

Portanto, o menor valor de μ para que as inequações (II.5.5) se verifiquem é

$$\underline{\mu}^* - \bar{\mu} = \max_s \left\{ \frac{-x_{s0}(\bar{\mu})}{a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk}}, \frac{0}{\frac{a_r}{x_{rk}}} \right\} \quad (\text{II.5.6})$$

onde os denominadores das frações devem ser positivos. Note que a última fração deve ser considerada, pois $a_r < 0$ e $x_{rk} < 0$.

Já chamamos atenção que $x_{s_0}(\bar{\mu}) > 0$ logo $-x_{s_0}(\bar{\mu}) < 0$,
então:

$$\frac{-x_{s_0}(\bar{\mu})}{\left[a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk} \right]} < 0$$

Como $0/(\frac{a_r}{x_{rk}}) = 0$, é fácil agora concluirmos que o máximo do 2º membro de (II.5.6) é zero. Portanto,

$$\bar{\mu} = \underline{\mu}^*$$

Por outro lado, o maior valor de μ para que as inequações (II.5.5) se verifiquem é:

$$\bar{\mu}^* - \bar{\mu} = \min_s \left\{ \frac{-x_{s_0}(\bar{\mu})}{\left[a_s - \frac{a_r}{x_{rk}} x_{sk} \right]}, \frac{0}{\frac{a_r}{x_{rk}}} \right\} \quad (\text{II.5.7})$$

onde os denominadores das frações devem ser negativos. A rigor a segunda fração não deve existir no 2º membro de (II.5.7), pois $(\frac{a_r}{x_{rk}}) > 0$. Deduz-se que o mínimo é não negativo. Assim

$$\bar{\mu}^* - \bar{\mu} \geq 0$$

ou

$$\bar{\mu}^* \geq \bar{\mu} = \underline{\mu}^*$$

Estas conclusões podem ser enunciadas sob a forma do seguinte teorema:

Teorema II.1

Seja r o índice definido pela condição (II.4.1) e seja $\bar{\mu} < \infty$:

- a) Se $x_{rj} \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$ com $\mu > \bar{\mu}$ as condições (II.2.2)-(II.2.3) do problema são incompatíveis.
- b) Se algum dos números x_{rj} ($j = 1, 2, \dots, n$) são negativos ao introduzir na base o vetor disponível iA_k segundo as regras usuais do método dual do simplex, obtem-se uma nova pseudobase onde a extremidade esquerda $\underline{\mu}^*$ do conjunto de otimalidade é $\bar{\mu}$.

Do que acabamos de analisar, concluímos que o processo para resolver o problema paramétrico para $\mu > \bar{\mu}$, consiste em se partindo de uma pseudobase passarmos a uma próxima (que a chamaremos de vizinha) pela introdução de um novo vetor na base. O processo terá sequência seguindo as bases vizinhas deste problema. Chegaremos ao fim do processo quando analisando μ crescente (decrecente) chegarmos a uma pseudobase, a qual chamaremos de última, ocorra que para todos $a_s \geq 0$ ($a_s \leq 0$), o que equivale a dizer que o conjunto de otimalidade da última pseudobase é uma semi-reta, ou quando por outro lado, chegarmos a uma pseudobase onde o problema não tem solução em nenhum ponto do interior do seu respectivo conjunto de otimalidade. Usando ao critério da escolha do vetor a entrar na base as regras que garantem a ausência de ciclo no método dual do simplex, pode-se mostrar que este procedimento chegará ao fim em um número finito de etapas, uma vez que é impossível retornar a uma pseudobase já considerada. Veja o raciocínio usado no capítulo anterior para mostrar esse fato. Desta maneira, concluímos o 1º CASO.

Para analisarmos o 2º CASO admitamos que a resolução do problema para $\mu = \mu_0$ nos leva ao seguinte impasse. Existe pelo menos um $i = r$, tal que

$$x_{r0}(\mu_0) = b_r + \mu_0 a_r < 0$$

(II.5.8) 5.8

$$x_{rj} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Decorre de (II.5.8) que a_r pode ser uma das três seguintes alternativas:

- 1º) $a_r = 0$ as condições (II.5.8) são observadas para todo valor do parâmetro μ , revelando que o problema (II.2.1)-(II.2.3) é irrealizável;
- 2º) $a_r > 0$ as condições (II.5.8) são observadas para todo valor do parâmetro $\mu < -\frac{b_r}{a_r} = \mu_1$. Só resta investigar a existência da solução do problema à direita de μ_1 , isto é, para $\mu \geq \mu_1$;
- 3º) $a_r < 0$ é fácil ver que só tem sentido explorar a existência de solução do problema à esquerda de μ_1 , isto é, para $\mu \leq \mu_1$.

Ao analisar a 2a. (3a.) alternativa, a solução do problema tem sequência pela resolução do problema para $\mu = \mu_1$, a qual parte da solução disponível. Podemos então chegar a dois resultados:

- a) obtenção de uma pseudobase ótima;
- b) obtenção das condições.

$$x_{\ell_0}(\mu_1) = b_{\ell} + \mu_1 a_{\ell} < 0 \quad (\text{II.5.9})$$

$$x_{\ell_j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Em (a) o problema tem continuidade conforme as recomendações das no 1º CASO. Já em (b) a análise subsequente deverá ser análoga às que foram dadas no capítulo precedente.

Do que acabamos de analisar podemos chamar a atenção para o que segue. A solução é inicialmente procurada para $\mu = \mu_0$ pelo método primal ou dual do simplex. Como estamos excluindo o caso onde a forma linear é infinita, então ao fim de algumas iterações chegamos a conclusão que devemos prosseguir com o 1º ou 2º CASO. Após certificarmos que é o 1º CASO que devemos inicialmente aplicar, usamos (II.3.1) e (II.3.2) para determinar o conjunto de otimalidade da pseudobase corrente. Imaginemos agora uma tabela que chamaremos de II.1', a qual nada mais é do que a tabela II.1 completa, isto é, constituída de todas as linhas e colunas. Se na coluna relativa a $-\frac{b_s}{a_s}$ as casas que correspondem a $a_s < 0$ ($a_s > 0$, no caso de μ decrescer) ficam vazias, a base corrente é ótima para $\mu \geq \mu_0$ ($\mu \leq \mu_0$). Caso contrário o índice do elemento minimal (maximal) desta coluna correspondente a $a_s < 0$ ($a_s > 0$), determina o índice do vetor que vai sair da pseudobase, se estamos analisando valores crescentes de μ (valores decrescentes de μ) e o valor deste ele

mento minimal (maximal) coincide com a extremidade direita (esquerda) do conjunto de otimalidade da pseudobase corrente. Aqui o procedimento pode terminar desde que as condições

$$x_{rj} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

sejam verificadas, ou pela ausência total dos elementos da coluna $-\frac{b_s}{a_s}$. Na 1a. hipótese nota-se que o problema é insolúvel à direita do ponto μ^* se estamos analisando valores crescentes de μ e a esquerda do ponto μ^* se μ é decrescente. Na 2a. hipótese a pseudobase é viável para a semi-reta $[\mu^*, \infty)$ se μ cresce e para a semi-reta $(-\infty, \mu^*]$ se μ decresce. As demais transformações são idênticas as efetuadas em uma etapa isolada do método dual do simplex. Se o estudo preliminar nos informa que devemos iniciar pelo 2º CASO, então neste momento devemos fazer na tabela II.1' uma permutação temporária (até que possamos continuar com o 1º CASO), isto é, devemos substituir os elementos b_s da coluna b-termo por $x_{s_0 1}(\mu) = b_s + \mu_1 a_s$ onde $\mu_1 = -\frac{b_r}{a_r}$ e o índice r é determinado como em (II.4.1). Prosseguindo, devemos introduzir na base o vetor conforme o método dual do simplex, determinado por um dos elementos negativos da nova coluna. As regras do 2º CASO são agora aplicadas chegando-se a conclusão que o problema é irrealizável, ou às condições que permitem prosseguir com o 1º CASO, o qual conclue-se em um número finito de iterações, onde construímos uma base cujo conjunto de otimalidade é uma semi-reta, ou, pomos em evidência que as condições de au

sência de solução são satisfeitas para todos os pontos do interior desta semi-reta.

II.6 - EXEMPLO NUMÉRICO

Consideremos agora o exemplo numérico: Maximize μ para $-1 \leq \lambda < \infty$.

$$b = x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + x_2 \leq 8 + 2\mu$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 7 + 7\mu$$

$$x_2 \leq 3 + \mu$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

TABELA II.2

Q U A D R O	Domínio de μ	Variáveis Básicas	Valores das Variáveis Básicas		Razão $-\frac{b_j}{a_j}$	x_1	x_2
			b-termo	μ -termo			
00		f	0	0		-1	-1
		Razão					
		y_1	8	2		2	1
		y_2	7	7		1	2
		y_3	3	2		0	1
						y_1	y_2
0	$0 \leq \mu \leq 1/2$	f	5	3		1/3	1/3
		Razão	$-\frac{z_j - c_j}{x_{3j}}, z_{3j} < 0$				1/2
					$a_j < 0$		
		x_1	3	-1	3	2/3	-1/3
		x_2	2	4		-1/3	2/3
		y_3	1	-2	0,5	1/3	-2/3

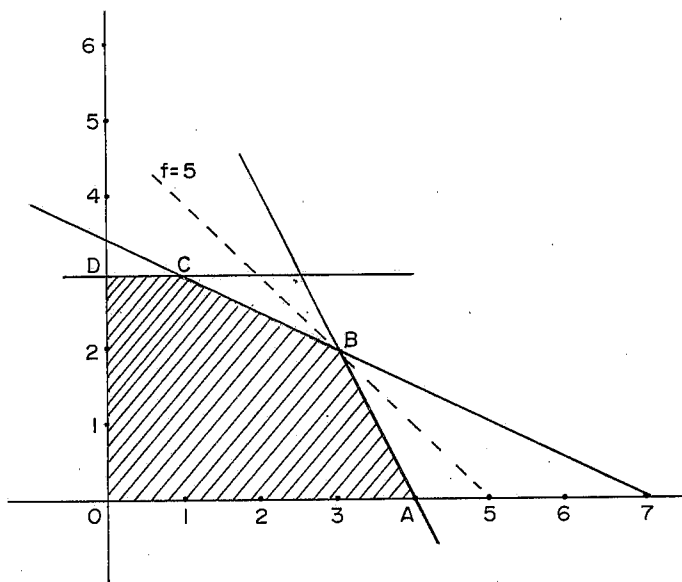
					y_1	y_3
1	$\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{3}{2}$	f	5,5	2	1/2	1/2
		Razão	$-\frac{z_j - c_j}{x_{kj}}, x_{kj} < 0$		1	1/3
		x_1	2,5	0	$a_j < 0$ \dots $(*)$	-1/2
		x_2	3	2		1
		y_2	-1,5	3		-3/2
					y_1	y_2
2	$-1/2 \leq \mu \leq 0$	f	5	3	1/3	1/3
		Razão	$-\frac{z_j - c_j}{x_{2j}}, x_{2j} < 0$		1	
		x_1	3	-1	$a_j > 0$ \dots $-0,5$	-1/3
		x_2	2	4		<u>-1/3</u> 2/3
		y_3	1	-2		1/3 -2/3

					x_2	y_2	
3	$-1 \leq \mu \leq -1/2$	f	7	7	1	1	
		Razão	$-\frac{z_j - c_j}{x_{1j}}, x_{1j} < 0$		(**)		
				$a_{.j} > 0$..j.....			
		x_1	7	7	-1	2	1
		y_1	-6	-12		-3	-6
		y_3	3	2	-1,5	1	-1

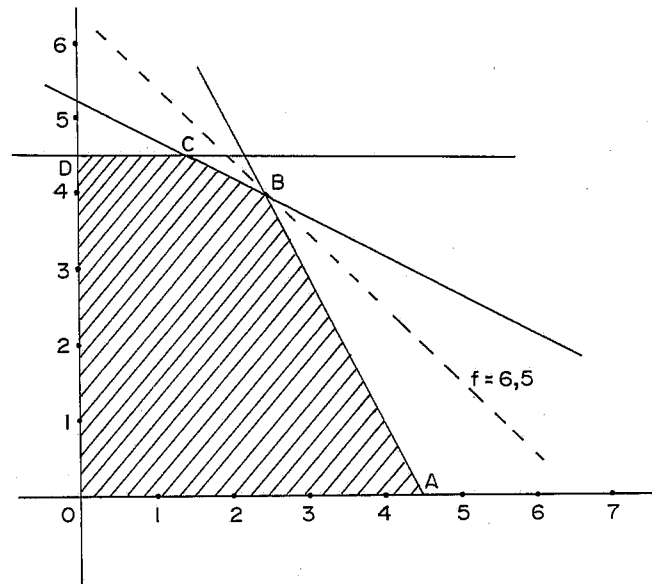
(*) Observe que este quadro está vazio (quando μ cresce), então como já chamamos atenção, isto significa dizer que o problema é viável para todo $\mu > \bar{\mu}$ onde $\bar{\mu}$ é o limite superior do conjunto de otimalidade da base anterior.

(**) Como este quadro está vazio, isto significa que não existe nenhum $x_{1j} < 0$, então o problema não tem solução para $\mu < \underline{\mu}^* = -1$.

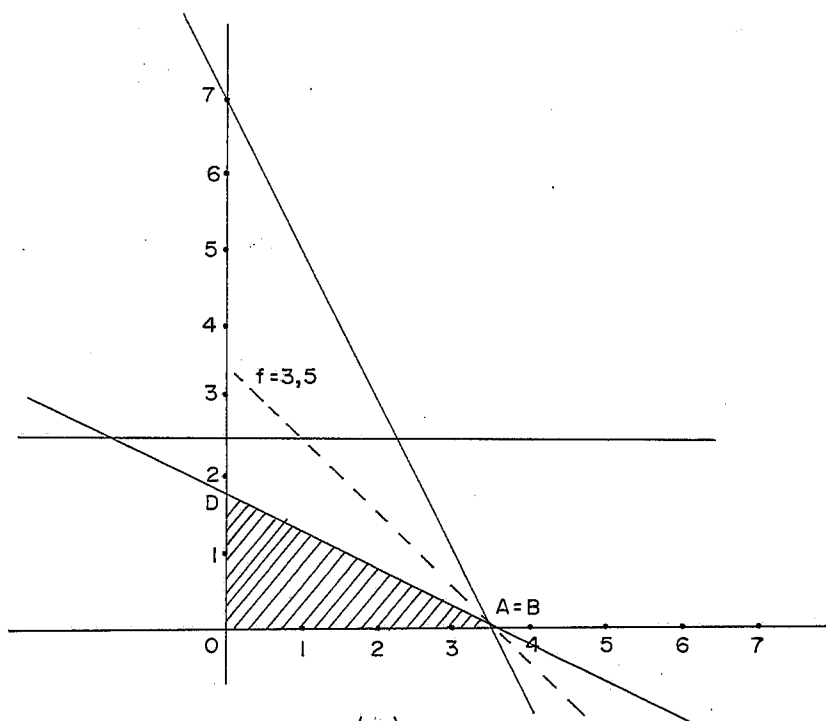
Fig. II.2



(a)



(b)



(c)

As Figuras II.2a, II.2b e II.2c nos diz como se comporta a região viável quando fazemos μ variar. Olhando para a Figura II.2c, notamos que o gráfico da reta $x_1 + 2x_2 = 7 + 7\mu$ para μ tendendo para $-1/2$ se desloca paralela a si mesma no sentido da origem. A mesma passará pelo ponto $(0,0)$ quando $\mu = -1$, isto significa dizer que neste momento nossa região viável reduziu-se a origem, e que para $\mu < -1$ não teremos mais programa.

TABELA II.3

Resumo da Tabela II.2

$\underline{\mu}$	$\bar{\mu}$	$f(\mu)$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
-1	-0,5	$7 + 7\mu$	$7 + 7\mu$	0	$-6 - 12\mu$	0	$3 + 2\mu$
-0,5	0	$5 + 3\mu$	$3 - \mu$	$2 + 4\mu$	0	0	$1 - 2\mu$
0	0,5	$5 + 3\mu$	$3 - \mu$	$2 + 4\mu$	0	0	$1 - 2\mu$
0,5	∞	$5,5 + 2\mu$	2,5	$3 + 2\mu$	0	$-1,5 + 3\mu$	0

Da Tabela II.3 podemos extrair expressões analíticas dos $x_i(\mu)$ $i = 1, \dots, 5$, ($x_i(\mu) = y_2(\mu)$ $p/i = 3, 4, 5$) e $f(\mu)$.

$$x_1(\mu) = \begin{cases} 7 + 7\mu & \text{se } -1 \leq \mu \leq -0,5 \\ 3 - \mu & \text{se } -0,5 \leq \mu \leq 0,5 \\ 2,5 & \text{se } \mu \geq 0,5 \end{cases}$$

$$x_2(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq \mu \leq -0,5 \\ 2 + 4\mu & \text{se } -0,5 \leq \mu \leq 0,5 \\ 3 + 2\mu & \text{se } \mu \geq 0,5 \end{cases}$$

$$x_3(\mu) = \begin{cases} -6 - 12\mu & \text{se } -1 \leq \mu \leq -0,5 \\ 0 & \text{se } \mu \geq -0,5 \end{cases}$$

$$x_4(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq \mu \leq 0,5 \\ -1,5 + 3\mu & \text{se } \mu \geq 0,5 \end{cases}$$

$$x_5(\mu) = \begin{cases} 3 + 2\mu & \text{se } -1 \leq \mu \leq -0,5 \\ 1 - 2\mu & \text{se } -0,5 \leq \mu \leq 0,5 \\ 0 & \text{se } \mu \geq 0,5 \end{cases}$$

$$f(\mu) = \begin{cases} 7 + 7\mu & \text{se } -1 \leq \mu \leq -0,5 \\ 5 + 3\mu & \text{se } -0,5 \leq \mu \leq 0,5 \\ 5,5 + 2\mu & \text{se } \mu \geq 0,5 \end{cases}$$

Podemos agora dar o gráfico das funções acima.

Fig. II.3

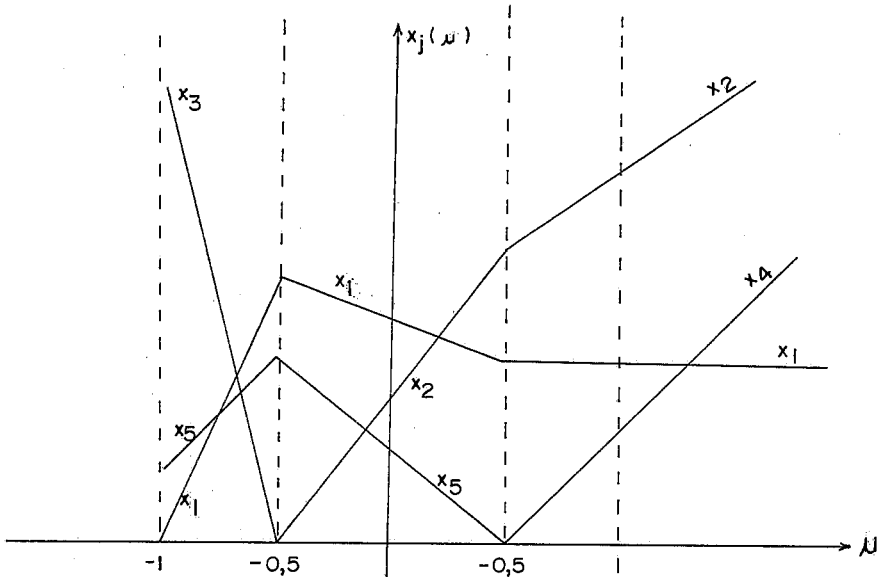
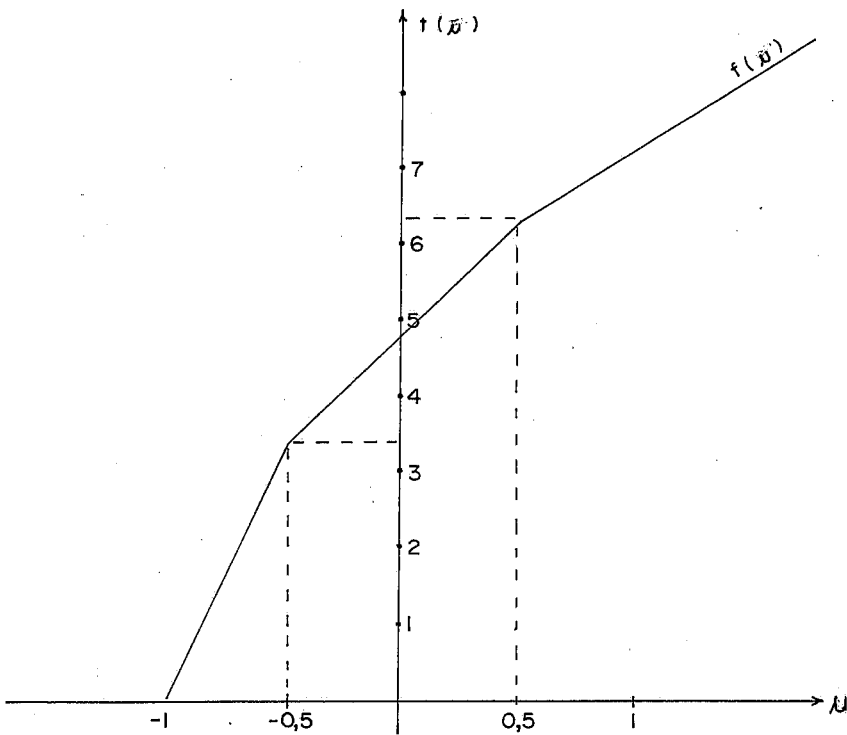


Fig. II.4



CAPÍTULO III

ALGUNS CASOS PARTICULARES

III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, lidaremos com o problema geral de programação linear paramétrica, onde os coeficientes da função objetivo, as componentes dos vetores condição e o vetor restrição dependem linearmente de um parâmetro. O problema em foco pode ser posto sob a forma: Maximize a forma linear

$$\sum_{j=1}^n (c'_j + tc''_j) x_j \quad (\text{III.1.1})$$

sob as condições:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t) x_j = b'_i + tb''_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.1.2})$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.1.3})$$

onde $\alpha(t) = [\alpha_{ij}(t)]$ é uma matriz $m \times n$, $B(t) = ((b'_1 + tb''_1) \dots (b'_m + tb''_m))^T$ um m -vetor coluna, $x = (x_1 \dots x_n)^T$ um n -vetor coluna e $c(t) = ((c'_1 + tc''_1) \dots (c'_n + tc''_n))$ um n -vetor linha.

Faremos o estudo deste capítulo abordando alguns casos particulares com o fim precípuo de obtermos as idéias práticas mais gerais que este caso fornece.

III.2 - PRIMEIRO CASO PARTICULAR: A MATRIZ $\alpha(t) \neq$ constante (ESTUDO SIMULTANEO DOS CAPITULOS I E II)

Ao fazermos o estudo do problema (III.1.1)-(III.1.3) sob a condição de que a matriz $\alpha(t)$ seja constante, isto é, $\alpha(t) = A$, constatamos que estamos estudando simultaneamente os capítulos I e II, os quais em seus aspectos mais gerais consistem em maximizar a forma linear:

$$\sum_{j=1}^n (c'_j + tc''_j) x_j \quad (\text{III.2.1})$$

sob as condições:

$$\sum_{j=1}^n A_j x_j = (B' + tB'') \quad (\text{III.2.2})$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.2.3})$$

onde $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$, $B' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)^T$ e $B'' = (b''_1, b''_2, \dots, b''_m)^T$ são vetores coluna m-dimensional.

III.3 - CONJUNTO DE OTIMALIDADE DA BASE FUNDAMENTAL

Chamamos atenção para o fato de que entendemos por base fundamental finita todo sistema linearmente independente, contendo m vetores condições do problema (III.2.1)-(III.2.3). O conjunto de otimalidade desta base será constituído de todos os valores do parâmetro t, tal que a base fundamental finita seja uma base da solução (ótima e viável) do problema.

De maneira análoga aos problemas já estudados nos capítulos anteriores, a solução do problema (III.2.1)-(III.2.3) se inicia pela resolução do mesmo para todo $t = t_0$. Esta solução inicial deve terminar por um dos três seguintes resultados:

a) Construção de uma base, solução do problema, que neste caso

admitimos como sendo composta dos vetores

$${}^iA_1 \quad {}^iA_2 \quad \dots \quad {}^iA_m$$

- b) Evidenciando a incompatibilidade das condições do problema.
- c) Evidenciando que a forma linear do problema tende para valores infinitos sobre o conjunto de seus programas.

Suponhamos que a solução preliminar findou com as condições relatadas em (a). De acordo com as notações efetuadas nos capítulos anteriores, sejam:

$$x_{i0}(t) = b_i + ta_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$p_j = \sum_{s=1}^m c'_{is} x_{isj} - c'_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$q_j = \sum_{s=1}^m c''_{is} x_{isj} - c''_j \quad j = 1, \dots, n$$

Então, de (I.2.4) e (II.2.11) concluímos que o ponto t pertence ao conjunto de otimalidade da base fundamental finita ${}^iA_1 \dots {}^iA_m$ se, e somente se, as inequações

$$x_{i0}(t) = b_i + ta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.3.1})$$

$$\Delta_j(t) = P_j + tq_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{III.3.2})$$

Em (a) exigimos que (III.3.1), (III.3.2) sejam verificadas para $t = t_0$, portanto, tal sistema de inequações lineares é compatível. Baseado em (I.3.1), (I.3.2), (II.3.1) e (II.3.2), introduziremos \underline{t}' , \underline{t}'' , \bar{t}' e \bar{t}'' definidas como se segue:

$$\underline{t}' = \begin{cases} \max_i - \frac{b_i}{a_i} & \text{para } a_i > 0 \\ -\infty & \text{se } a_i \leq 0 \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, m \quad (\text{III.3.3})$$

$$\underline{t}'' = \begin{cases} \max_j - \frac{P_j}{q_j} & \text{para } q_j > 0 \\ -\infty & \text{se } q_j \leq 0 \end{cases} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$\bar{t}' = \begin{cases} \min_i - \frac{b_i}{a_i} & \text{para } a_i < 0 \\ \infty & \text{se } a_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$\bar{t}'' = \begin{cases} \min_j - \frac{P_j}{q_j} & \text{para } q_j > 0 \\ \infty & \text{se } q_j \leq 0 \end{cases} \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (\text{III.3.4})$$

Decorre de (III.3.3), (III.3.4) que o conjunto de soluções do sistema de inequações (III.3.1)-(III.3.2) é constituído de todos os valores de t tal que

$$\underline{t} = \max(\underline{t}', \underline{t}'') \leq t \leq \min(\bar{t}', \bar{t}'') = \bar{t} \quad (\text{III.3.5})$$

III.4 - CRITÉRIO DE ENTRADA E SAÍDA DE UM VETOR DA BASE

Desejamos agora observar o comportamento do problema quando t cresce além de \bar{t} , o qual é o extremo direito do conjunto de otimalidade suposto finito. Sejam

$$\xi \leq \frac{|\bar{t}' - \bar{t}''|}{2} \quad \text{e} \quad t = \bar{t} + \epsilon$$

onde ϵ é não negativo e arbitrariamente pequeno. Tem-se que \bar{t} , \bar{t}' e \bar{t}'' estão relacionados de uma das três seguintes maneiras:

$$1^\circ) \quad \bar{t} = \bar{t}' < \bar{t}''$$

$$2^\circ) \quad \bar{t} = \bar{t}'' < \bar{t}'$$

$$3^\circ) \quad \bar{t} = \bar{t}' = \bar{t}''$$

No primeiro caso temos que para $t = \bar{t} + \epsilon$ a base fundamental $iA_1 \dots iA_m$ deixa de ser uma base. Aqui (III.3.2) continua sendo verificada, o que corresponde dizer que ainda temos uma pseudobase. Portanto, utilizamos o procedimento do Capítulo II e o problema nesta etapa tem sequência através do método dual do simplex.

No segundo caso quando $t = \bar{t} + \epsilon$ tem-se que algumas inequações de (III.3.2) são violadas, mas o sistema de inequações (III.3.1) é sempre verificado. Lançaremos mão dos conceitos adquiridos no primeiro capítulo, e o problema neste ponto tem sequência através do método primal do simplex.

No terceiro caso tem-se que para $t > \bar{t}$ a base fundamental $iA_1 \dots iA_m$ não é mais primal nem dual viável. Aqui introduzimos um problema auxiliar para darmos prosseguimento a resolução do problema. O problema auxiliar ao qual nos referimos, nada mais é do que o problema (III.2.1)-(III.2.3) quando fazemos em $B(t) = B' + tB''$; $t = \bar{t}$. Neste momento reduzimos o problema ao que foi tratado no primeiro capítulo e sua solução tem sequência através do método primal do simplex. É óbvio que a base fundamental $iA_1 \dots iA_m$ é uma base do problema auxiliar qualquer que seja o vetor de t . Portanto, partindo da base fundamental disponível após algumas iterações do método primal do simplex, concluiremos que o problema auxiliar é impossível para $t > \bar{t}$ ou teremos construído uma nova base onde o conjunto de o

timalidade é $[\underline{t}^*, \bar{t}^*]$ com $\bar{t} = \underline{t}^*$.

A primeira alternativa nos diz que o problema paramétrico é impossível para $t > \bar{t}$, pois se agora passamos a olhar o problema com $t_0 = \bar{t} + \varepsilon$ na função objetivo, temos que o mesmo é impossível, pois já o era para todo $t > \bar{t}$. Esta mesma situação prevalece se agora passamos a olhar o problema quando $B(t)$ varia.

O segundo resultado nos diz que a base fundamental é uma pseudobase do problema (III.2.1)-(III.2.3) sobre o conjunto de otimalidade $[\underline{t}^*, \bar{t}^*]$ com $\bar{t} = \underline{t}^*$. Desta maneira o problema tem continuidade através de um raciocínio análogo ao desenvolvido no Capítulo II, através do método dual do simplex, partindo-se da nova pseudobase. Constatamos assim, que a análise deste problema processa-se pela aplicação de etapas sucessivas do método primal e do método dual do simplex, desenvolvido nos Capítulos I e II. Podemos sintetizar tal procedimento como se segue: Consideraremos t crescente, isto é, t variando da esquerda para a direita. Partindo da base fundamental disponível, após aplicarmos (III.3.3), (III.3.4), chegamos a:

$$i) \quad \bar{t} = \min(\bar{t}', \bar{t}'') = \infty$$

$$ii) \quad \bar{t} = \min(\bar{t}', \bar{t}'') < \infty$$

Se ocorrer a alternativa (i) então chegamos ao fim da discussão.

Se ocorrer a alternativa (ii) então podemos ter duas possibilidades:

$$a) \quad \bar{t}' < \bar{t}''$$

$$b) \quad \bar{t}' \geq \bar{t}''$$

a) Aqui aplicamos o método dual do simplex ao problema (III.2.1)-(III.2.3) com $t = \bar{t}$ e o vetor ao sair da base (Critério de Saída) é determinado da maneira habitual, pela relação:

$$-\frac{b_r}{a_r} = \min_{a_i < 0} -\frac{b_i}{a_i} = \bar{t}^*, \quad a_r < 0 \quad (\text{III.4.1})$$

Se $x_{rj} \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$, não podemos crescer t além de \bar{t} (veja Critério de Entrada II.5.2).

b) Aqui aplicamos o método primal do simplex ao problema (III.2.1)-(III.2.3) com $t = \bar{t}$ e o vetor a entrar na base (Critério de Entrada) é determinado da maneira habitual pela relação:

$$-\frac{P_k}{q_k} = \min_{q_j < 0} -\frac{P_j}{q_j} = \bar{t}^* \quad q_k < 0 \quad (\text{III.4.2})$$

Se $x_{ik} \leq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$, não podemos crescer t além de \bar{t} (veja Critério de Saída I.5.1).

Observando as considerações feitas até aqui, e baseando-nos nos Capítulos I e II, é fácil concluir que o problema paramétrico fica totalmente analisado ao término de um número finito de etapas.

III.5 - SEGUNDO CASO PARTICULAR: $C(t)$ e $b(t)$ SÃO VETORES CONSTANTES E $\alpha(t) = [A + tD, N]$

Vejamos agora o problema (III.1.1), (III.1.3) quando consideramos constantes os vetores $C(t)$ e $b(t)$ e $\alpha(t) = [A + tD, N]$. O problema agora toma o seguinte aspecto:

$$\max z = CX \quad (\text{III.5.1})$$

sujeito a:

$$(A + tD)x = b - Ny \quad (\text{III.5.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{III.5.3})$$

onde A é uma matriz não singular $(m \times m)$, D uma matriz $(m \times m)$ satisfazendo determinadas condições, N uma matriz $m \times (n-m)$, $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ é um vetor linha das variáveis básicas e $y = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$ é o vetor das variáveis não básicas. Aqui vale ressaltar que na hipótese de existirem variáveis artificiais em (III.5.2), então as correspondentes colunas podem ser parte de A . Pretendemos agora encontrar recursos necessários para determinarmos uma região relativa a qual o parâmetro t pode variar quando a matriz básica varia para $A + tD$, sem contudo modificarmos o conjunto das variáveis básicas. Como os métodos envolvem muitos cálculos, abordaremos uma classe de problemas para tornar mais simples a resolução do problema. Portanto, exigiremos que a matriz D seja tal que $A + tD$ seja regular (uma matriz polinomial regular tem determinante independente de t , de modo que sua inversa é também uma matriz polinomial).

Logo mais obteremos uma expressão geral, para adequadas matrizes D , na qual é visível a gama de possibilidades para D . Exigiremos ainda que o rank de D seja o maior inteiro, menor ou igual a $m/2$. Vejamos o problema (III.5.1)-(III.5.3) para $t = 0$:

Se

$$Ax = b - Ny$$

então

$$A^{-1} Ax = A^{-1} b - A^{-1} Ny$$

ou

$$x = A^{-1} b - A^{-1} Ny \quad (\text{III.5.4})$$

onde $A^{-1} b = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})^T = x_0$ e $x_{i0} \geq 0$ para todo i , visto que juntamente com $y = 0$ dá uma solução ótima viável para o problema original (por hipótese).

A substituição de (III.5.4) em (III.5.1) dá:

$$z = (C_x, C_y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_x x + C_y y = C_x (A^{-1} b - A^{-1} Ny) + C_y y$$

$$z = C_x A^{-1} b + (C_y - C_x A^{-1} N) y \quad (\text{III.5.5})$$

onde $C_x = (c_1, \dots, c_m)$, $C_y = (c_{m+1}, \dots, c_n)$ e $N = \begin{bmatrix} N_{m+1}, \dots, N_n \end{bmatrix}$ e os N_j para $j = m+1, \dots, n$ são vetores colunas.

Fazendo:

$$\gamma = (\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_n) = C_y - C_x A^{-1} N$$

ou

$$(\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{m+j}, \dots, \gamma_n) = (c_{m+1}, \dots, c_{m+j}, \dots, c_n) \\ - (c_1, \dots, c_m) A^{-1} \begin{bmatrix} N_{m+1} \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\gamma_{m+j} = c_{m+j} - (c_1, \dots, c_j, \dots, c_m) A^{-1} N_{m+j}$$

como $A^{-1} N_{m+j} = X_{m+j}$ segue-se:

$$\gamma_{m+j} = c_{m+j} - C_x X_{m+j} \geq 0$$

já que a solução é ótima.

Podemos agora escrever (III.5.5) de uma maneira mais condensada

$$z = C_x A^{-1} b + \sum_{j=m+1}^n \gamma_j y_j \quad (\text{III.5.6})$$

Se A é substituído por $A + tD$ é fácil ver que

$$(A + tD)^{-1} = A^{-1} - tA^{-1} D A^{-1} \quad (\text{III.5.7})$$

desde que

$$D A^{-1} D = 0 \quad (\text{III.5.8})$$

pois

$$\left[A^{-1} + tA^{-1} D A^{-1} \right] \left[A + tD \right] = I + t^2 A^{-1} (D A^{-1} D)$$

Mas, uma solução geral para (III.5.8), é:

$$D = \begin{cases} AC & \text{então } D A^{-1} D = A C (A^{-1} A) C = AC^2 \end{cases} \quad (\text{III.5.9})$$

ou

$$D = \begin{cases} CA & \text{então } D A^{-1} D = C (A A^{-1}) CA = C^2 A \end{cases} \quad (\text{III.5.10})$$

Observa-se através de (III.5.9) e (III.5.10) que (III.5.8) é sa tisfeita se

$$C^2 = 0 \quad (\text{III.5.11})$$

Para solucionar esse novo impasse, é fácil ver que uma solução geral para (III.5.11) é

$$C = T \bar{D} T^{-1} \quad (\text{III.5.12})$$

onde T é qualquer matriz não singular $m \times m$ e

$$\bar{D} = \text{diag}(00 \dots \begin{bmatrix} 01 \\ 00 \end{bmatrix} \dots) \quad (\text{III.5.13})$$

pois $\bar{D}^2 = 0$. É, realmente, $C = T \bar{D} T^{-1}$ é uma solução geral para (III.5.11) pois

$$C^2 = (T \bar{D} T^{-1}) (T \bar{D} T^{-1}) = T \bar{D} (T^{-1} T) \bar{D} T^{-1} = T \bar{D}^2 T^{-1}$$

$$C^2 = T (\bar{D})^2 T = 0$$

já que $(\bar{D})^2 = 0$.

Em (III.5.13) podemos constatar que o rank de \bar{D} é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{m}{2}$ e, conseqüentemente, o rank de D também o é como já havíamos citado.

Denotemos $A(t) = A + tD$, então:

$$A(t)x = (A + tD)x = b - Ny \quad (\text{III.5.14})$$

Se usamos em (III.5.7) D como o dado por (III.5.9) ou (III.5.10) e (III.5.12) e (III.5.13) então (III.5.14) nos fornece:

$$x = \left[A^{-1} - tA^{-1} D A^{-1} \right] \left[b - Ny \right]$$

ou

$$x = \left[A(t) \right]^{-1} b - \left[A(t) \right]^{-1} Ny \quad (\text{III.5.15})$$

Para continuarmos com uma solução viável, (III.5.15) nos diz que devemos ter $y = 0$ e

$$\left[A(t) \right]^{-1} b \geq 0$$

$$(A^{-1} b) - tA^{-1} D(A^{-1} b) \geq 0$$

$$x_0 - tA^{-1} D x_0 \geq 0$$

ou

$$x_{i0} - t\theta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{III.5.16})$$

onde

$$A^{-1} Dx_0 = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T \quad (\text{III.5.17})$$

Se

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \min_i (x_i / \theta_i) & \text{se } \theta_i > 0 \\ \infty & \text{se } \theta_i \leq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

$$\underline{\theta} = \begin{cases} \max_i (x_i / \theta_i) & \text{se } \theta_i < 0 \\ -\infty & \text{se } \theta_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

então o domínio de t que verifica o sistema de inequações (III.5.16) é:

$$\underline{\theta} \leq t \leq \bar{\theta} \quad (\text{III.5.18})$$

III.6 - CONJUNTO DE OTIMALIDADE

Vejamos agora que condições devem ser exigidas para a solução básica continuar ótima:

De (III.5.1), (III.5.8) e (III.5.5)

$$\begin{aligned}
 z &= C_x x + C_y y = C_x \left[A(t) \right]^{-1} b - \left[A(t) \right]^{-1} N y + C_y y \\
 z &= C_x \left[A(t) \right]^{-1} b + \left[C_y + C_x (A^{-1} - t A^{-1} D A^{-1}) N \right] y \\
 z &= C_x \left[A(t) \right]^{-1} b + \left[(C_y - C_x A^{-1} N) + t (C_x A^{-1} D A^{-1} N) \right] y \\
 z &= C_x \left[A(t) \right]^{-1} b + \left[(\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_n) + t (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n) \right] y \\
 z &= C_x \left[A(t) \right]^{-1} b + \sum_{i=m+1}^n (\gamma_i + t \mu_i) y_i \quad \text{(III.6.1)}
 \end{aligned}$$

onde:

$$C_x A^{-1} D A^{-1} N = (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n)$$

Para preservarmos a otimalidade, (III.6.1) mostra que:

$$\gamma_i + t \mu_i \geq 0 \quad (i = m+1, \dots, n) \quad \text{(III.6.2)}$$

quando

$$\bar{\mu} = \begin{cases} \min_i (-\gamma_i/\mu_i) & \text{se } \mu_i < 0 \\ -\infty & \text{se } \mu_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{para todo } i$$

$$\underline{\mu} = \begin{cases} \max_i (-\gamma_i/\mu_i) & \text{se } \mu_i > 0 \\ \infty & \text{se } \mu_i \leq 0 \end{cases} \quad \text{para todo } i$$

O sistema de inequações (III.6.2) é satisfeito toda vez que

$$\underline{\mu} \leq t \leq \bar{\mu} \quad (\text{III.6.3})$$

com $\bar{\mu} \geq 0$, $\underline{\mu} \leq 0$.

Agora (III.5.18) e (III.6.3) nos diz que a solução básica continua ótima e viável para

$$\max(\underline{\mu}, \underline{\theta}) \leq t \leq \min(\bar{\mu}, \bar{\theta}) \quad (\text{III.6.4})$$

Retornando agora às equações (III.5.15), (III.5.7) e (III.5.17),

temos que a solução paramétrica do problema é $x_0 - t\theta$ e, por sua vez, (III.6.1), (III.5.7) e (III.5.17), nos diz que o valor máximo associado a z é $z = z_0 - tC_x \theta$, onde z é o valor do problema original.

III.7 - EXEMPLO NUMÉRICO

Vejamos agora um exemplo numérico:

Maximize $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Como de praxe, adicionamos as variáveis não negativas x_4, x_5 e x_6 à 1a., 2a. e 3a. inequação, respectivamente.

Partindo do quadro 0, temos após algumas iterações o quadro ótimo 00, segundo a Tabela que se segue:

TABELA III.1

QUADRO	BASE	C_i	P_0	3	2	5	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0	P_4	0	430	1	2	1	1	0	0
	P_5	0	460	3	0	2	0	1	0
	P_6	0	420	1	4	0	0	0	1
	$Z_j - C_j$			-3	-2	-5	0	0	0
00	P_2	2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0
	P_3	5	230	3/2	0	1	0	1/2	0
	P_6	0	20	2	0	0	-2	1	1
	$Z_j - C_j$			4	0	0	1	2	0

Da Tabela III.1, tiramos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_x = (2 \quad 5 \quad 0) \quad C_y = (3 \quad 0 \quad 0)$$

$$\gamma = (\gamma_1 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5) = (-4, -1, -2)$$

Programa Ótimo

$$X = (0 \quad 100 \quad 230 \quad 0 \quad 0 \quad 20)^T$$

$$x_0 = 1350$$

Tomemos:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriz T foi tomada de tal forma que a matriz D tenha dois vetores nulos. Portanto,

$$D = (T \bar{D} \bar{T}^{-1}) A =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\theta = (\theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_6)^T$ é dada por $A^{-1} D (x_2 \quad x_3 \quad x_6)^T$ então, tem-se:

$$\theta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Decorre daí que:

$$I) \quad \bar{\theta} = \min_{\theta_i < 0} (x_3/\theta_3, x_6/\theta_6) = \min(230/400, 20/1200) = 1/60$$

$$II) \quad \underline{\theta} = -\infty \text{ pois } \theta_i \geq 0 \text{ para } i = 2, 3 \text{ e } 6$$

Assim

$$-\infty < \theta \leq 1/60$$

É fácil ver que

$$\mu = C_x A^{-1} D A^{-1} N = (\mu_1, \mu_4, \mu_5) = (-5, 10, -5)$$

portanto,

$$III) \quad \bar{\mu} = \min_{\mu_i < 0} (-\gamma_1/\mu_1, -\gamma_5/\mu_5) = \min(-4/-5, -2/-5) = 2/5$$

$$\text{IV) } \underline{\mu} = \max_{\mu_i > 0} (-\gamma_4 / \mu_4) = \max (-1/10) = -1/10$$

Assim

$$-1/10 \leq \mu \leq 2/5$$

Como devemos ter $\max(\underline{\mu}, \underline{\theta}) \leq t \leq \min(\bar{\mu}, \bar{\theta})$ então decorre (I) -

(IV) que o domínio de t para que $(x_2, x_3 \text{ e } x_6)$ continue uma solução ótima viável é

$$-1/10 \leq t \leq 1/60$$

Temos assim que o programa ótimo é

$$x = (0, 100, 230 - 400.t, 0, 0, 20 - 1200.t)^T$$

$$z = 1350 - 2000 t$$

Para $t = -1/10$ o problema transforma-se.

Maximize $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ sujeito a:

$$x_1 + 8/5 x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 - 4/5 x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 14/5 x_2 \leq 420$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Cuja região viável é dada na Figura III.1.

Para $t = 1/60$ o problema resume-se em:

Maximize $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ sujeito a:

$$x_1 + 31/15 x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 2/15 x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 21/5 x_2 \leq 420$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

cuja região viável é dada na Figura III.2.

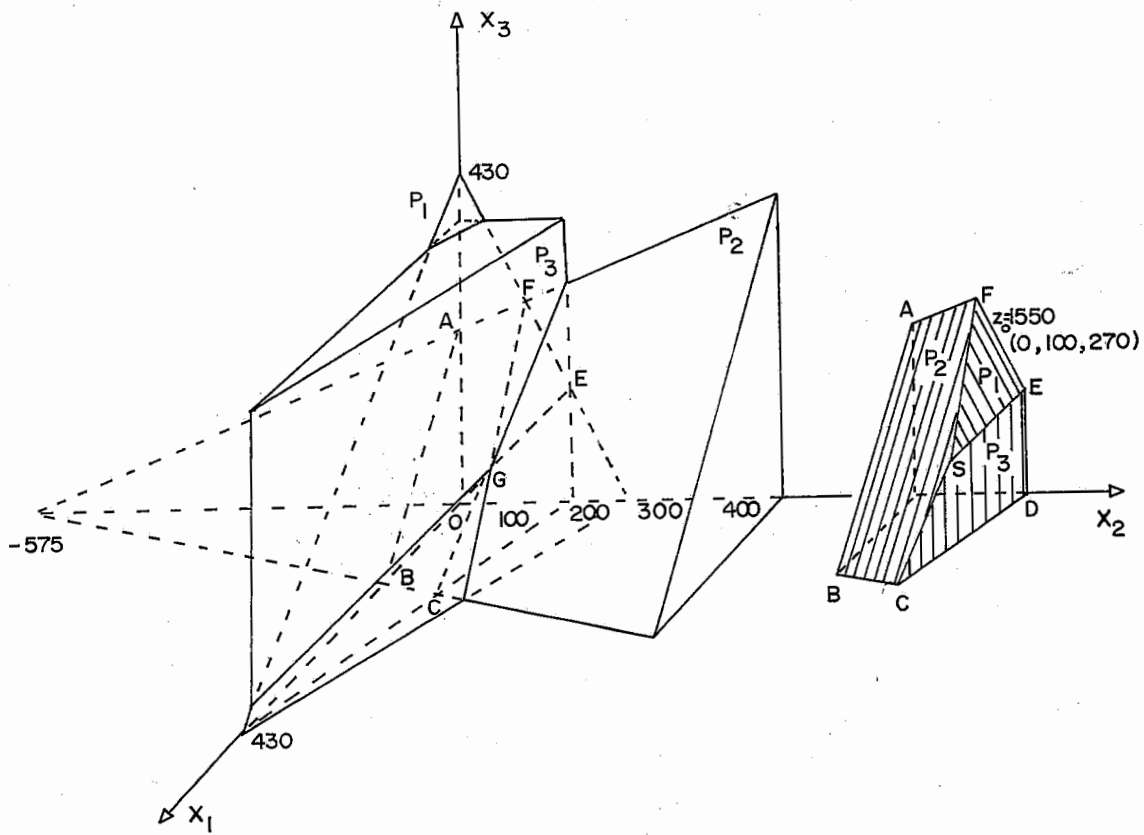


Fig. III.1

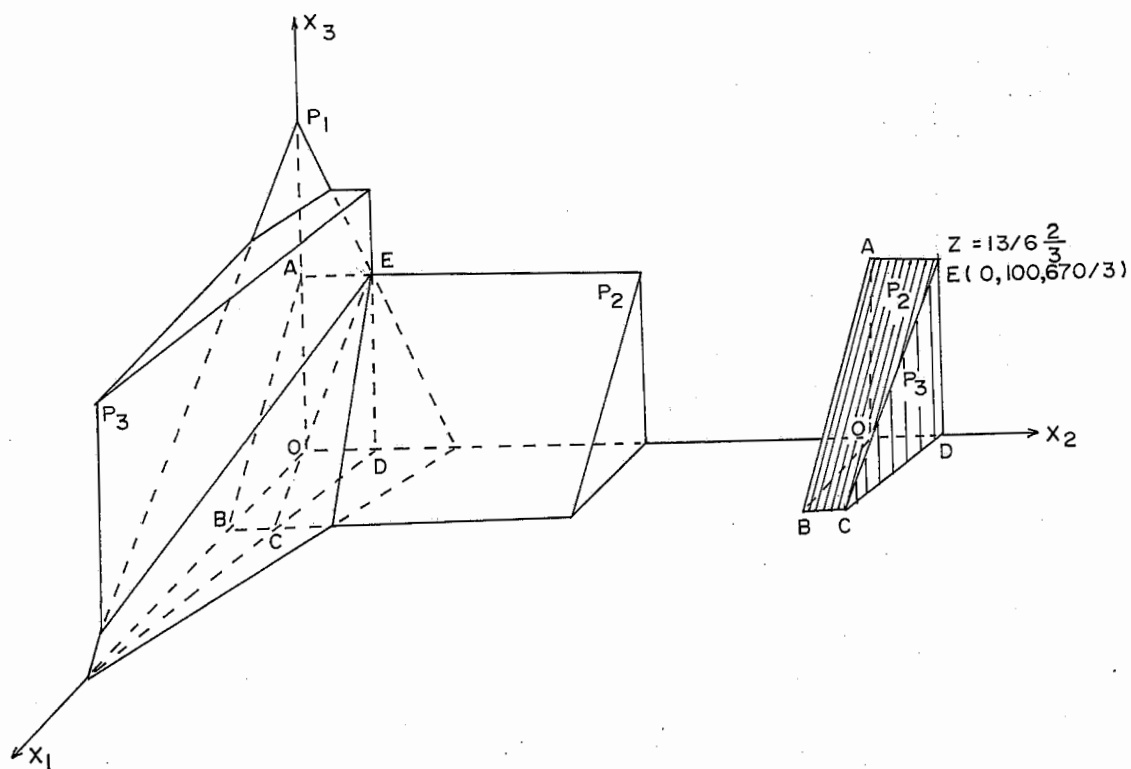


Fig. III.2

Olhando para as Figuras III.1 e III.2 é fácil concluir, geometricamente que, quando t varia em $[-1/10, 1/60]$ o ponto ótimo não muda.

III.8 - EXTENSÕES

la.) Embora não seja muito importante, mais uma imediata extensão para o caso onde A é mantido fixo e N varia para $N+tM$, pode ser agora realizada. Para $y = 0$ temos que $x = x_0$ é uma solução viável qualquer que seja o valor de t . Observe agora que a equação (III.6.1) transforma-se em

$$\begin{aligned} Z &= C_x A^{-1} b + (C_y - C_x A^{-1} N - t C_x A^{-1} M) y \\ &= C_x A^{-1} b + \sum_{i=m+1}^n (\gamma_i - t \eta_i) x_i \end{aligned}$$

onde $C_x A^{-1} M = \eta = (\eta_{m+1}, \dots, \eta_n)$, acarretando que t possa assumir qualquer valor que satisfaça as inequações

$$\gamma_i - t \eta_i \geq 0 \quad (i = m+1, \dots, n).$$

2a.) Se agora efetuamos simultaneamente mudanças em A e N, isto é, se A e N variam para $A + tD$ e $N + tM$, respectivamente, então podem surgir termos de segundo grau em t. Quando A e N variam a equação (III.5.15) toma o seguinte formato

$$x = (A + tD)^{-1} b - (A + tD)^{-1} (N + tM)y$$

ou

$$x = A^{-1} (I - tDA)^{-1} b - A^{-1} (I - tDA)^{-1} (N + tM)y$$

(III.8.1)

onde D é dado por (III.5.9) ou (III.5.10). Para evitarmos os termos t^2 é necessário tomar M tal que

$$DA^{-1} M = 0 \quad (III.8.2)$$

pois

$$x = (A^{-1} - tA^{-1}DA^{-1})b - (A^{-1} - tA^{-1}DA^{-1})(N + tM)y$$

$$x = A^{-1} (I - tDA)^{-1} b + \left[-A^{-1} N - tA^{-1} M + \right. \\ \left. + tA^{-1}DA^{-1}N + t^2A^{-1}DA^{-1}M \right] y$$

com $DA^{-1}M = 0$

$$x = A^{-1}(I - tDA^{-1})b + \left[-A^{-1}N + \right. \\ \left. + t(A^{-1}DA^{-1}N - A^{-1}M) \right] y$$

fazendo $P = A^{-1}DA^{-1}N - A^{-1}M$

$$x = A^{-1}(I - tDA^{-1})b - \left[A^{-1}N - tP \right] y \quad (\text{III.8.3})$$

De (III.8.3) conclui-se que os θ_i dados por (III.5.17) não mudaram, portanto $\bar{\theta}$, $\underline{\theta}$ são os mesmos.

Por outro lado,

$$z = C_x x + C_y y = C_x A^{-1}(I - tDA^{-1})b \\ - (A^{-1}N - tP)y + C_y y$$

$$z = C_x \left[A^{-1}(I - tDA^{-1})b - C_x^{-1}A^{-1}N + tC_x P + C_y \right] y$$

$$z = C_x \left[A^{-1} (I - tDA^{-1})b \right] + \left[(C_y - C_x A^{-1} N) + tC_x P \right] y$$

(III.8.4)

Fazendo

$$C_x D = \mu = (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n)$$

$$C_y - C_x A^{-1} N = \gamma = (\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_n)$$

temos que

$$z = A^{-1} (I - tDA^{-1})b + \left[\gamma + t\mu \right] y$$

ou

$$z = A^{-1} (I - tDA^{-1})b + \sum_{i=m+1}^n (\gamma_i + t\mu_i)x_i \quad (\text{III.8.5})$$

Para concluir a análise do problema, prossegue-se como o fizemos anteriormente, através de (III.6.2)-(III.6.4).

3a.) De maneira completamente análoga, podemos fazer A e C_x variar. Se C_x é substituído por $C_x + t\bar{d}$ e \bar{d} satisfaz $\bar{d}A^{-1}B = 0$, é óbvio que não existirá em (III.6.1) termos do segundo grau em t . Mais uma vez, as considerações subsequentes repetem-se.

CAPÍTULO IV

MULTIPARAMETRIZAÇÃO LINEAR DOS COEFICIENTES DA FUNÇÃO

OBJETIVO (MLP-OFC) E DO LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES (MLP-RHS)

IV.1 - Introdução (MLP-RHS)

Neste capítulo abordaremos os casos onde os coeficientes da função objetivo e os termos constantes das restrições variam segundo os parâmetros $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ os quais constituem o vetor paramétrico μ . Neste caso diremos que estamos lidando com problemas de programação linear multiparamétrico do lado direito (MLP-RHS) e problemas de programação linear multiparamétrica relativo aos coeficientes da função objetivo (MLP-OFC) respectivamente.

O MLP-RHS pode ser posto em resumo como se segue:

Maximize

$$Z = C^T x \quad (\text{IV.1.1})$$

sujeito a

$$Ax = B' + B''\mu \quad (\text{IV.1.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{IV.1.3})$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ ($m \leq n$) de rank m , $x = (x_1 \dots x_n)^T$, $C, 0$ pertencem a E^n e $B' \in E^m$ são vetores colunas, $\mu = (\mu_1 \dots \mu_s)^T$ é um vetor paramétrico variável, $B'' = (b''_{ik})$ é uma matriz $(m \times s)$. Os elementos A, B', B'' e C são constantes.

Visando uma melhor compreensão da tabela do simplex,

escreveremos o sistema (IV.1.1), (IV.1.2) sob a forma

$$z + {}^{\rho}C^T x - {}^{\rho}P^T \mu = z^{(\rho)} \quad (\text{IV.1.4})$$

$${}^{\rho}Ax - {}^{\rho}B''\mu = {}^{\rho}B' \quad (\text{IV.1.5})$$

onde o índice $\rho = |j_1 \dots j_m|$, $j \in J$ são m-uplas, constituído dos subscritos das variáveis básicas, $I = \{i \text{ t.q. } i=1, \dots, m\}$ e $J = \{j \text{ tal que } j=1, \dots, n\}$. Denotemos por ${}^{\rho}B$ uma base ótima para o problema MLP-RHS e R_{ρ} sua correspondente região viável, tal que para todo $\mu \in R_{\rho}$ a base ${}^{\rho}B$ é ótima.

Ao iniciar a pesquisa da região viável $R_0 (\rho=0)$, temos que $z^0 = 0$ e ${}^0p^T = 0$. Se a solução básica é ótima (primal e dual viável) ${}^0p^T \geq 0$ e temos ainda:

$${}^0\bar{B}(\mu) = {}^0B' + {}^0B''\mu \geq 0 \quad (\text{IV.1.6})$$

$${}^0\bar{B}(\mu) = ({}^0b_1(\mu) \dots {}^0b_m(\mu))^T \quad (\text{IV.1.7})$$

Portanto, o sistema de inequações (IV.1.6) nos dá no μ -espaço a região viável R_0 tal que para todo $\mu \in R_0$ a base 0B é ótima. Decorre daí que, ao variar as bases, automaticamente geramos as regiões viáveis R_i . Para melhor compreensão do problema, tomaremos inicialmente $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ para podermos observar geometricamente as regiões viáveis no μ -plano. Para tal, vejamos a solução do seguinte exemplo numérico:

Maximize para todo $0 \leq \mu_1 \leq \infty$, $0 \leq \mu_2 \leq \infty$

$$Z = 2x_1 + x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq \mu_1$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1 - \mu_2$$

$$4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Após adicionarmos as variáveis escalares x_3, x_4 e x_5 temos o problema no formato (IV.1.4)-(IV.1.5) obtendo assim o quadro 0 da tabela IV.1. Daí, ignorando as colunas μ_1 e μ_2 , isto é, para $\mu_1=0$ e $\mu_2=0$, geramos logo na primeira iteração o quadro 1, consequentemente a primeira solução ótima.

Do quadro 1, segue-se que a solução básica em termos dos μ 's é :

$$x_1(\mu) = 0 + \mu_1 + 0\mu_2$$

$$x_4(\mu) = 1 - 2\mu_1 - 1\mu_2 \quad (\text{IV.1.8})$$

$$x_5(\mu) = 4 - 4\mu_1 + 0\mu_2$$

A região viável R_0 é uma consequência do imperativo de exigirmos que $x_1 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$ para continuarmos com uma solução viável, portanto R_0 é determinado por :

Tabela IV.1

GERAÇÃO DAS SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA LINEAR MULTIPARAMÉTRICO

QUADRO	VARIÁVEIS BÁSICAS	x_1	x_2	-B''		B'
				μ_1	μ_2	
0	x_3	1	1	-1	0	0
	x_4	2	-1	0	1	1
	x_6	4	1	0	0	4
	Z	-2	-1	0	0	0
		x_3	x_2			
1	x_1	1	1	-1	0	0
	x_4	-2	-3	2	1	1
	x_5	-4	-3	4	0	4
	Z	2	1	2	0	0
		x_3	x_4			
2	x_1	1/3	1/3	-1/3	1/3	1/3
	x_2	2/3	-1/3	-2/3	-1/3	-1/3
	x_5	-2	-1	2	-1	3
	Z	$1\frac{1}{3}$	1/3	$1\frac{1}{3}$	-1/3	1/3
		x_3	x_5			
3	x_1	-1/3	1/3	1/3	0	$1\frac{1}{3}$
	x_2	$1\frac{1}{3}$	-1/3	$-1\frac{1}{3}$	0	$-1\frac{1}{3}$
	x_4	2	-1	-2	1	-3
	Z	2/3	1/3	2/3	0	1 1/3
		x_1	x_5			
4	x_3	-3	-1	-1	0	-4
	x_2	4	1	0	0	4
	x_4	6	1	0	1	5
	Z	2	1	0	0	4

$$R_0 : \begin{cases} -\mu_1 \leq 0 & \text{(IV.1.9)} \\ 2\mu_1 + \mu_2 \leq 1 & \text{(IV.1.10)} \\ 4\mu_1 \leq 4 & \text{(IV.1.11)} \\ \mu_1 \geq 0, \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Temos também que ρ_0 é dado por $\rho_0 = (1,4,5)$. É fácil ver que a região viável R_0 é limitada por (IV.1.10) e $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$, já que as restrições (IV.1.10) e (IV.1.11) são redundantes. Agora as possíveis regiões candidatas a serem regiões viáveis vizinhas a R_0 serão aquelas que tenham $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ satisfazendo

$$\mu_1 < 0$$

ou

$$\mu_2 < 0$$

ou

$$2\mu_1 + \mu_2 > 1$$

Como desde o início o problema estabeleceu que

$\mu_1 \geq 0$ e $\mu_2 \geq 0$, então só resta uma candidata, no caso a região R_1 que tem em comum com R_0 os pontos no μ -plano tais que $2\mu_1 + \mu_2 = 1$.

Vejamos como determinar R_1 . Devemos gerar uma nova solução e para tal a linha da matriz $-B''$ que originou a equação $2\mu_1 + \mu_2 = 1$ caracteriza a linha onde devemos selecionar um pivô negativo. Uma vez determinada a linha, neste caso a linha de x_4 , este pivô deve estar ligado às variáveis não básicas, isto é,

se encontrar na parte de 0A correspondendo às variáveis não básicas. Se todos os elementos de 0A são não negativos nesta linha relativamente às variáveis não básicas, então não existe solução para os pontos da região do outro lado de $2\mu_1 + \mu_2 = 1$.

Aqui existem (-2) e (-3) os quais constituem os candidatos a pivô. Usamos o critério de entrada do método dual e determinamos o

$$\min\left\{ \frac{2}{-(-2)}, \frac{1}{-(-3)} \right\}$$

Determinamos assim que -3 é o pivô, portanto entra x_2 na base. Usando as transformações habituais, obtemos através do pivoteamento, o quadro 2. Daí tiramos que a nova solução básica é ótima para

$$x_1(\mu) = 1/3 + 1/3\mu_1 - 1/3\mu_2 \geq 0$$

$$x_2(\mu) = -1/3 + 2/3\mu_1 + 1/3\mu_2 \geq 0$$

$$x_5(\mu) = 3 - 2\mu_1 + \mu_2 \geq 0$$

A região R_1 é então determinada por :

$$R_1 : \begin{cases} -1/3\mu_1 + 1/3\mu_2 \leq 1/3 & \text{(IV.1.12)} \\ -2/3\mu_1 - 1/3\mu_2 \leq -1/3 & \text{(IV.1.13)} \\ 2\mu_1 - \mu_2 \leq 3 & \text{(IV.1.14)} \\ \mu_1 \geq 0 \quad \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Temos também que ρ_1 é dado por :

$$\rho_1 = (1, 2, 5)$$

Examinando a linha de x_1 no quadro 2 da Tabela IV.1 observamos que são não negativos os elementos nas colunas das variáveis não básicas; portanto não existe região viável do outro lado de $-1/3\mu_1 + 1/3\mu_2 = 1/3$.

O outro lado de (IV.1.13) é a região R_1 , a qual já foi considerada. Só restam os pontos do outro lado de (IV.1.14). Observe-se que esta análise constitui o CRITÉRIO DE SAÍDA,; portanto, x_5 deixará a base. Como já chamamos a atenção aqui, usamos o CRITÉRIO DE ENTRADA do método dual

$$\min\left\{ \frac{1\frac{1}{3}}{-(-2)}, \frac{1\frac{1}{3}}{-(-1)} \right\}$$

o qual diz que -1 é o pivô e que x_4 entra na base.

Após o pivoteamento, temos gerado o quadro 3. A solução básica desta tabela é ótima para os pontos de R_2 dados por

$$R_2 = \begin{cases} 1/3\mu_1 \leq 1\frac{1}{3} \\ -1\frac{1}{3}\mu_1 \leq -1\frac{1}{3} \\ -2\mu_1 + \mu_2 \leq -3 \\ \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, chegaremos à região viável R_3 , o qual é dado por :

$$R_3 \begin{cases} \mu_1 \geq 4 \\ 0 \leq 4 \\ \mu_2 \leq 5 \end{cases} \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0$$

Notamos agora que não podemos mais gerar novas regiões viáveis, pois do outro lado de $\mu_1=4$ é a região R_3 , $0 \leq 4$ é redundante e $\mu_2 \geq 5$ não é viável.

Temos assim determinada $K = R_i$ ($i=0,1,2,3$), a qual é dada geometricamente pela figura IV.1.

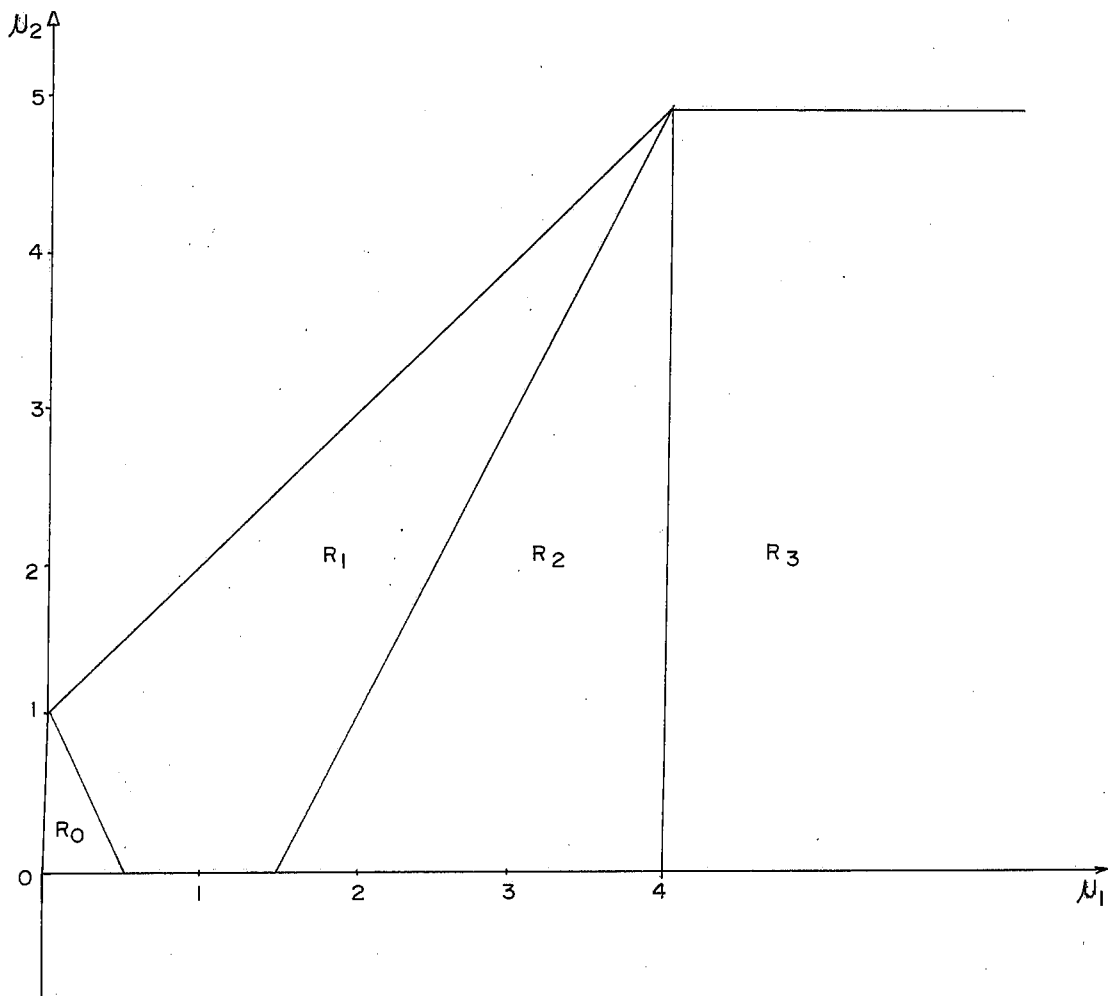


Fig. IV.1

Interpretação Geométrica da Função Objetivo como Função de μ :

Temos agora duas funções X_1 e X_2 que relacionam x_1 e x_2 com μ_1 e μ_2 do seguinte modo:

$$x_1 = X_1(\mu_1, \mu_2) \quad ; \quad x_2 = X_2(\mu_1, \mu_2) \quad (\text{IV.1.15})$$

Geometricamente pode se considerar que as equações (IV.1.15) definem aplicações, que faz corresponder a um ponto (μ_1, μ_2) do plano $\mu_1 \mu_2$ o ponto imagem (x_1, x_2) do plano $x_1 x_2$.

Um conjunto K do plano $\mu_1 \mu_2$ é aplicado em outro conjunto T do plano $x_1 x_2$, como se representa na Figura IV.2.

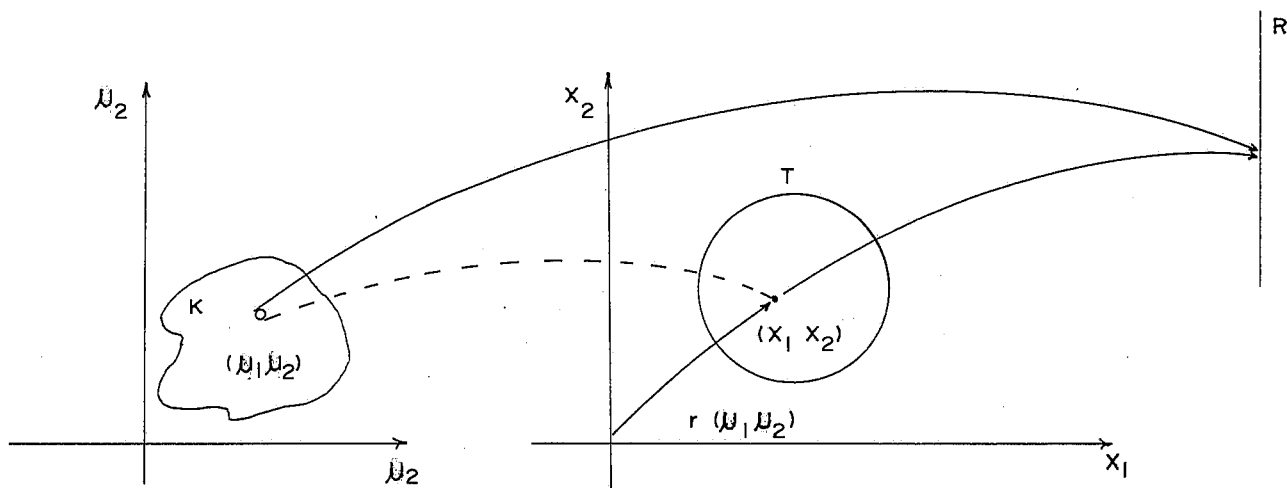


Figura IV.2

Aqui o vetor r depende de μ_1 e μ_2 e pode considerar-se como função vetorial definida pela equação :

$$r(\mu_1, \mu_2) = X_1(\mu_1, \mu_2) \vec{i} + X_2(\mu_1, \mu_2) \vec{j} \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \in K$$

$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

Não é necessário muito esforço para concluirmos que se a função objetivo é dada ($Z = 2x_1 + x_2$) em termos de μ_1 e μ_2 por :

$$Z = z[X_1(\mu_1, \mu_2), X_2(\mu_1, \mu_2)] = f(\mu_1, \mu_2) =$$

$$= \begin{cases} 2\mu_1 & \text{em } R_0 \\ \frac{1}{3}(1+4\mu_1-\mu_2) & \text{em } R_1 \\ \frac{2}{3}(2+\mu_1) & \text{em } R_2 \\ 4 & \text{em } R_3 \end{cases}$$

Agora a figura IV.3 dá o gráfico da função objetivo como função dos parâmetros μ_1 e μ_2 .

Observa-se da figura IV.3 (próxima página) que o conjunto dos pares (μ_1, μ_2) tais que $f(\mu_1, \mu_2)$ é uma certa constante k (curvas de nível) são retas paralelas em cada R_i ($i=0,1,2,3$) e em K são segmentos de retas que se unem. Veja na figura IV.3 a curva de nível a_1, a_2, a_3 .

Acreditamos que o exposto até aqui nos serve de acervo para uma descrição de um método geral, pois em problemas de maior dimensão a interpretação geométrica nos foge da mão.

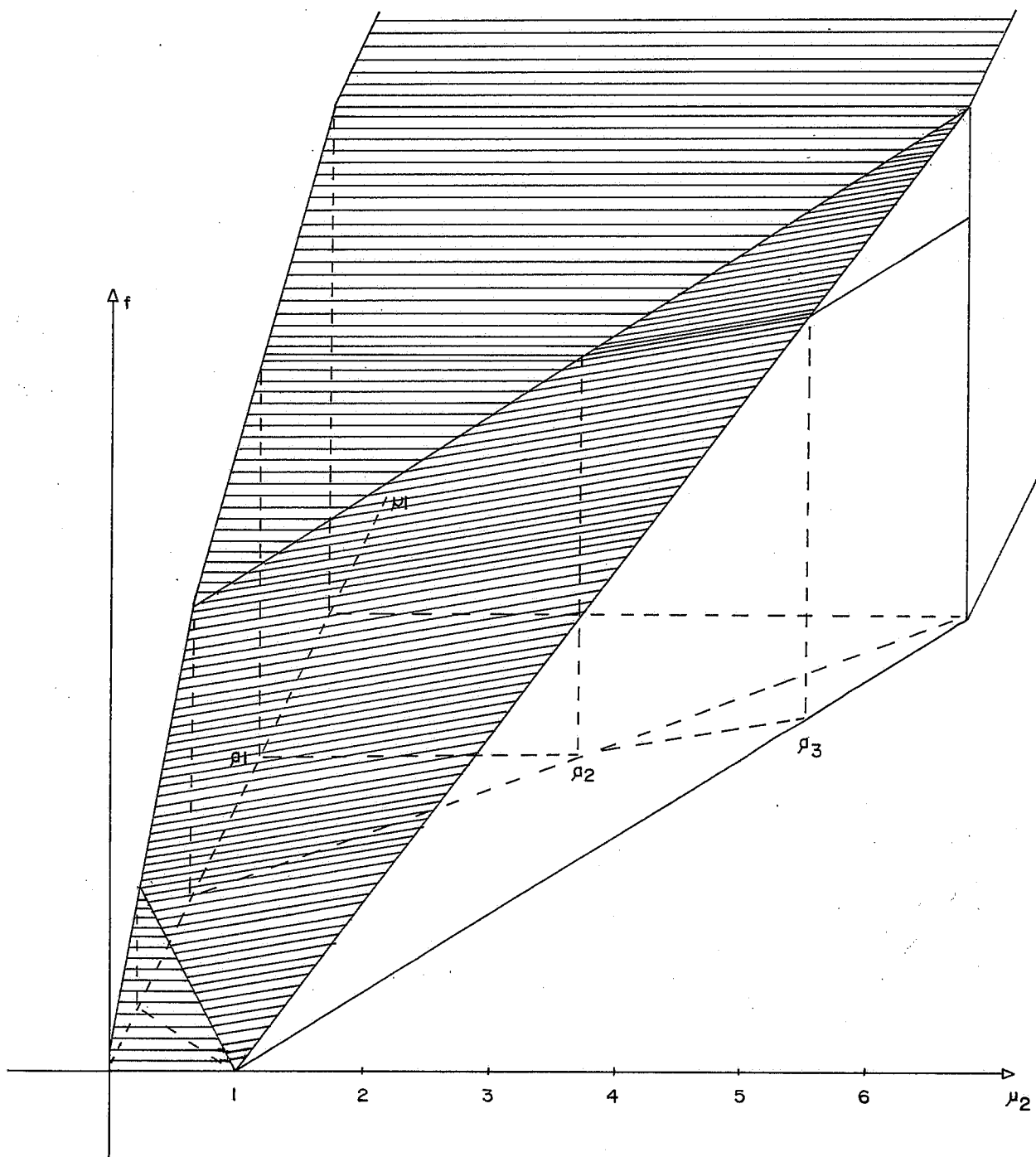


Fig. IV.3

IV.2 - Conceituação Básica

Voltando a considerar as equações (IV.1.1)-(IV.1.3) tem-se que delas originaram-se as equações (IV.1.4) e (IV.1.5), as quais passaremos a escrever:

$$z + \rho_C^T x - \rho_P^T \mu = z(\rho) \quad (\text{IV.2.1})$$

$$\rho_A x - \rho_B'' \mu = \rho_B' \quad (\text{IV.2.2})$$

Analisando como os quadros da Tabela IV.1 foram determinados, chega-se à conclusão que :

$$\rho_A = \rho_B^{-1} \rho_A, \quad \rho_B'' = \rho_B^{-1} \rho_B'', \quad \rho_B' = \rho_B^{-1} \rho_B'$$

$$\rho_C^T = C_B^T \rho_A - C^T, \quad \rho_P^T = C_B^T \rho_B'', \quad z(\rho) = C_B^T \rho_B'$$

$$C_B^T = (C_{j_1}, \dots, C_{j_m}) ; \quad |j_1, \dots, j_m| = \rho$$

$$\text{e } \rho_B^{-1} \text{ é a inversa de } \rho_B.$$

Para distinguir as diferentes bases, usaremos $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k \dots$ e os elementos correspondentes serão denotados por $B_k, B_k^{-1}, k_A, k_B'', k_B', J_1^{(k)}, J_2^{(k)}, R_k$ etc.

Também para representar o máximo valor da função objetivo como função de μ sobre a região R_k , usaremos $z_{\max}^{(k)}(\mu)$ e quando quisermos sobre todo o K usaremos $z_{\max}(\mu)$.

Como necessitamos de uma ferramenta para desenvolver

o método que pretendemos apresentar, faremos uma pausa no mesmo para introduzir as definições e teoremas básicos.

Definição IV.1 - Dizemos que o vetor paramétrico μ é viável se o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) tem uma solução finita relativamente a μ . Denotemos por K o conjunto de valores μ para os quais o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) tem solução viável.

Teorema IV.1 - Se ao fixarmos $\mu = \mu_0 \in V^S$, o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) tem um ótimo finito; então para todo $\mu \in V^S$ o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) terá solução finita ou não terá solução viável.

Prova : Antes de entrar na demonstração propriamente dita, vale recordar que ao compararmos em uma tablea do problema dual, tem-se que os valores das variáveis básicas do primal aparecem na primeira linha da tabela do dual com o sinal menos. Portanto, se temos viabilidade no primal, então temos que a correspondente solução do dual é ótima (não necessariamente viável).

A prova deste teorema resume-se em provar que o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) não tem soluções ilimitadas em K .

O problema dual de (IV.1.1)-(IV.1.3) é minimizar

$$w = u^T \bar{B}(\mu) \quad (\text{IV.2.3})$$

sujeito a

$$A^T u \geq C \quad (\text{IV.2.4})$$

Se existe $\mu = \mu_0$ tal que a solução ótima de (IV.1.

1)-(IV.1.3) seja finita, então (IV.2.3)-(IV.2.4) tem uma solução viável μ_0 . Como A e C são constantes e independentes de μ , então a solução u_0 é viável para todo $\mu \in V^S$. Por outro lado, novamente pela dualidade, tem-se que o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) não possui soluções ilimitadas qualquer que seja $\mu \in V^S$, visto que $u^T \cdot \bar{B}(\mu)$ é uma cota superior para a função objetivo do problema (IV.1.1)-(IV.1.3) e consequentemente para todo $\mu \in K$.

Definição IV.2 - Dizemos que a base ${}^p B$ é uma base ótima se e somente se existe $\mu \in K$ tal que ${}^p B$ é ótima (primal e dual viável) relativamente a μ .

Teorema IV.2 - A região K é um conjunto convexo.

Demonstração: Sejam $\bar{\bar{B}}(\mu)$ o conjunto de todos os vetores viáveis $\bar{B}(\mu) = B' + B''\mu$ e K o conjunto de vetores paramétricos viáveis.

Recordemos que $\mu \in K$ se e somente se $\bar{B}(\mu) \in \bar{\bar{B}}(\mu)$.

Em particular, se nós tomamos $\mu^* = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ onde $0 \leq p \leq 1$ e μ_1 e μ_2 pertencem a K , então :

$$\begin{aligned} B^* &= \bar{B}(\mu^*) = B' + B''[p\mu_1 + (1-p)\mu_2] \\ &= \bar{B}(\mu^*) = B' + pB''\mu_1 + (1-p)B''\mu_2 + pB' - pB' \\ &= pB' + pB''\mu_1 + (1-p)B''\mu_2 + B' - pB' \\ &= p(B' + B''\mu_1) + (1-p)B' + (1-p)B''\mu_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p\bar{B}(\mu_1) + (1-p)(B' + B\mu_2) \\
 &= p\bar{B}(\mu_1) + (1-p)\bar{B}(\mu_2)
 \end{aligned}$$

mas $B^* \in \bar{B}(\mu)$ pela convexidade de $\bar{B}(\mu)$. Então $\mu^* \in K$, assim K é convexo.

Seja pB uma base ótima no sentido da definição IV.

2. Como a solução dual não depende de μ , ela permanece viável para todo $\mu \in V^S$ e consequentemente não precisamos nos preocupar com a otimalidade da solução primal. Limitaremos em determinar aqueles valores tais que a base pB permaneça primal viável, e para tal exigiremos que :

$${}^pB^{-1} \bar{B}(\mu) \geq 0$$

ou

$${}^pB^{-1}(B' + B''\mu) \geq 0$$

isto é:

$$-{}^pB''\mu \leq {}^pB' \quad (\text{IV.2.5})$$

É fácil ver que a condição (IV.2.5) determina um poliedro convexo R_p tal que todo $\mu \in R_p$ a base pB é ótima e para $\mu \in K - R_p$ a base pB é primal inviável.

Definição IV.3 - f é uma função côncava se $-f$ é uma função convexa, isto é:

$$f(px_1 + (1-p)x_2) \geq pf(x_1) + (1-p)f(x_2)$$

$$0 \leq p \leq 1$$

Teorema IV.3 - A função $Z_{\max}(\mu)$ definida sobre K é uma função côncava e contínua.

Sejam $\mu_1, \mu_2 \in K$ e $x(\mu_1), x(\mu_2)$ soluções do problema (IV.1.1)-(IV.1.3).

Para

$$\mu^* = p\mu_1 + (1-p)\mu_2 \quad 0 \leq p \leq 1$$

é fácil ver que

$$x = px(\mu_1) + (1-p)x(\mu_2)$$

é uma solução viável. De fato, como:

$$p(1-p) \geq 0$$

$$x(\mu_1), x(\mu_2) \geq 0$$

tem-se que $x \geq 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} Ax &= A[px(\mu_1) + (1-p)x(\mu_2)] \\ &= p(B' + B''\mu_1) + (1-p)(B' + B''\mu_2) \\ &= pB' + pB''\mu_1 + B' + B''\mu_2 - pB' - pB''\mu_2 \\ &= B' + B''[p\mu_1 + \mu_2 - p\mu_2] \\ &= B' + B''[p\mu_1 + (1-p)\mu_2] = B' + B''\mu^* \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$Z_{\max}(\mu^*) \geq C^T x = C^T [px(\mu_1) + (1-p)x(\mu_2)]$$

$$= pC^T x(\mu_1) + (1-p)C^T x(\mu_2)$$

$$Z_{\max}(\mu^*) \geq pZ_{\max}(\mu_1) + (1-p)Z_{\max}(\mu_2) \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Mostremos agora que $Z_{\max}(\mu)$ é contínua. Para todo $\mu \in R_\rho$, $Z_{\max}^{(\rho)}(\mu)$ é obviamente contínua. Isto é válido para toda base ótima de índice ρ .

Resta-nos estudar a continuidade da função em um ponto $\bar{\mu}$ tal que nos permita passar de uma base B_k a uma base B_{k+1} . Admitamos que relativamente à base B_k exista $\mu = \bar{\mu}$ tal que

$$k_{\bar{B}_r}(\mu) = 0$$

onde r é fixo, $1 \leq r \leq m$.

Se existir $k_{a_{rj}} < 0$ para pelo menos um $j \in J_2^{(k)}$, é possível passar de B_k para uma base B_{k+1} por um passe do algoritmo do simplex dual. Admita que B_{k+1} seja uma base ótima. Aqui para $\mu = \bar{\mu}$ a teoria ordinária aplicado a um problema de programação linear à outra solução ótima, tal que $k_{\bar{B}}(\bar{\mu}) = k+1_{\bar{B}}(\bar{\mu})$ e $Z_{\max}^{(k)}(\bar{\mu}) = Z_{\max}^{(k+1)}(\bar{\mu})$, o que completa a demonstração do teorema.

Definição IV.4 - Sejam B_1 e B_2 duas bases com índices ρ_1 e ρ_2 respectivamente. Estas duas bases são ditas bases vizinhas, se e somente se

(1) existe $\mu^* \in K$ tal que B_1 e B_2 são ambas bases ótimas para

(IV.1.1)-(IV.1.3) para μ^* ;

(2) é possível passar de B_1 para B_2 (e vice-versa) por um passe do algoritmo do simplex dual.

Chamamos a atenção para o caso em que exista uma dual degenerescência em B_1 ; como é fácil ver, esta degenerescência não depende de μ . Suponhamos que ela ocorra para $j=s$, $s \in J_2^{(1)}$. Se existir no mínimo um $i \in I$ tal que $^1a_{is} > 0$, é possível passar para outra base ótima, digamos B_3 , por um passo do algoritmo do simplex primal. Aqui a base B_3 não é olhada como uma base vizinha de B_1 no sentido da definição IV.4.

Definição IV.5 - Sejam B_1 e B_2 duas bases e R_1 e R_2 suas respectivas regiões viáveis (relativamente a μ) determinadas univocamente por (IV.2.5). Então, as regiões R_1 e R_2 são ditas vizinhas se e somente se B_1 e B_2 o são.

Notamos como consequência da demonstração da continuidade de $Z_{\max}(\mu)$ que

$$R_1 \cap R_2 \neq \emptyset .$$

Teorema IV.4 - Se R_1 e R_2 são duas regiões vizinhas relativas às bases B_1 e B_2 , então elas estão em semi-espacos opostos de V^S .

Demonstração : Aqui chamamos a atenção para as equações (IV.1.4)-

(IV.1.5) pois as mesmas relativamente às bases B_1 e B_2 dão o formato da tabela do simplex. Admita que a ordenação das linhas nas tabelas correspondentes a cada base dada é a mesma, no sentido de que é possível passar de uma para outra sem reordená-las.

Após determinarmos na tabela do simplex de índice ρ_1 o elemento pivô $^1a_{rk}$, usamo-lo para gerar a base B_2 . Já é de nosso conhecimento que :

- i) o pivô $^1a_{rk} < 0$
- ii) a r -ésima linha da tabela do simplex de índice ρ_2 nada mais é do que a r -ésima linha da tabela do simplex de índice ρ_2 dividido pelo pivô $^1a_{rk}$.

Portanto (i) e (ii) implicam

$$\frac{^1\bar{B}_r(\mu)}{^1a_{rk}} = ^2\bar{B}_r(\mu) \quad \text{para todo } \mu \in V^S$$

e por (i) os dois termos devem ter sinais opostos. Assim,

$$^1\bar{B}_r(\mu) \geq 0 \quad \text{para } \mu \in R_1 \quad (^2\bar{B}_r(\mu) \leq 0 \quad \forall \mu \in R_1)$$

e

$$^2\bar{B}_r(\mu) \geq 0 \quad \text{para } \mu \in R_2 \quad (^1\bar{B}_r(\mu) \leq 0 \quad \forall \mu \in R_2)$$

o que demonstra o teorema.

Definição IV.6 - A região R_ρ é dita ter uma vizinha ao longo da i -ésima face se é possível passar para essa vizinha pela exclusão da i -ésima variável da base.

Note que os elementos da i -ésima linha de $-k_B''$ podem ser olhados como o vetor diretor de um hiperplano representando a i -ésima face de R_k , isto é $-k_{b''_{i1}\mu_1} - \dots - k_{b''_{is}\mu_s} = k_{b''_i}$. Aqui implicitamente estamos admitindo que a numeração das variáveis básicas em (IV.1.5) é a mesma das linhas em (IV.1.5). Decorre da definição IV.4 e dos conhecimentos adquiridos no capítulo II que para passarmos de uma base B_k a uma base B_{k+1} é necessário que exista $\mu_0 \in R_\rho$ tal que $k_{\bar{B}}(\mu_0) = k_{B'} + k_{B''}\mu_0 = 0$ e simultaneamente exista pelo menos um elemento negativo na i -ésima linha de k_A .

Portanto a região R_ρ terá uma vizinha ao longo da i -ésima face ($i \in I$) se :

- (1') existe $\mu_0 \in R_\rho$ tal que ${}^p B_i(\mu_0) = 0$;
- (2') $k_{a_{ij}} < 0$ para pelo menos um $j \in J_2^{(\rho)}$.

De posse das notações, teoremas e definições estabelecidos até aqui, retomaremos agora à solução do método para o problema MLP-RHS e para tal procuraremos estabelecer uma relação entre os nós de um subgrafo conexo (unidirecional) G_0 de um grafo (unidirecional) $G(S, \sigma)$ e o problema MLP-RHS. Esta relação será estabelecida ao exigirmos que o conjunto dos nós S e o conjunto de arcos σ sejam gerados pelo problema MLP-RHS.

Definição IV.7 - O grafo $G = (S, \sigma)$ é dito ser gerado por um dado problema MLP-RHS, se e somente se :

- 1) O conjunto de nós S é um subconjunto de m -uplos $\rho = |j_1, \dots, j_m|$ de inteiros j_i , $1 \leq j_i \leq n$, $i=1, \dots, m$ tal que $\rho \in S$ se e somente se ρ^B é uma base ótima para o problema (IV.1.1)-(IV.1.3) ;
- 2) Para $\rho_1, \rho_2 \in S$ o índice $\rho_2 \in \sigma(\rho_1)$ (e ao mesmo tempo $\rho_1 \in \sigma(\rho_2)$) , se e somente se as bases B_1 e B_2 são vizinhas. Os nós ρ_1 e ρ_2 são ditos vizinhos.

Um comentário que podemos fazer a respeito da definição IV.7 é que a mesma determina uma correspondência unívoca entre o nó $\rho \in S$ e a base ótima ρ^B , e designa por $\sigma(\rho)$ o conjunto de todos os nós que são vizinhos a ρ .

Definição IV.8 - Diremos que os nós $\rho_1, \rho_2 \in S$ tem distância Δ , $0 < \Delta \leq m$ entre eles, se os elementos de ρ_1 difere dos elementos de ρ_2 por Δ elementos.

Teorema IV.5 - Sejam $\mu_1, \mu_2 \in K$ dois arbitrários vetores paramétricos viáveis, e admitamos $\rho_1 \in S$ seja dado de tal forma que $\mu_1 \in R_1$. Então existe um caminho $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ no grafo $G=(S, \sigma)$ tal que $\mu_2 \in R_k$.

Demonstração : Nós demonstraremos este teorema transformando-o em um problema de programação linear paramétrico. Para tal, expressa-

mos o segmento de reta unindo μ_1 a μ_2 na forma paramétrica por :

$$\mu(t) = \mu_1 + t(\mu_2 - \mu_1) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Obviamente, $\mu(t) \in K$ para todo $t \in [0,1]$, pois K é um conjunto convexo (teorema IV.2). Substituindo-se em (IV.1.1)-(IV.1.3) μ por $\mu(t)$ nós realmente obtemos um problema paramétrico com parâmetro escalar t . Usando o procedimento paramétrico dado no capítulo II para $0 \leq t \leq 1$, tem-se uma sequência de bases ótimas, e paralelamente um caminho associado $\{\rho_1 \dots \rho_k\}$ no grafo G , o que conclui a demonstração. Decorre deste teorema que podemos associar um grafo conexo para um dado problema MLP-RHS.

Como podemos perceber, o grafo $G=(S,\sigma)$ não é necessariamente conexo, o que nos traz dificuldades, mas isto é devido ter havido uma dual degenerescência. Já chamamos a atenção que se em B_1 existe uma dual degenerescência, é possível passar de B_1 para outra base ótima B_2 em um passo do algoritmo do simplex primal, mas aqui B_3 não é considerada vizinha de B_1 e assim B_3 não é vizinho de B_1 , e é possível mostrar que R_1 e R_2 sobrepõem-se. Para contornar as dificuldades decorrentes deste fato só nos resta restringir os vetores paramétricos viáveis àquelas regiões viáveis R_i que cobrem K sem se sobreporem. Para conseguirmos tal objetivo (veja teoremas IV.4 e IV.5; definições IV.4, IV.5 e IV.8) se faz necessário escolher uma arbitrária componente $G_0(S_0, \sigma_0)$ do grafo $G(S, \sigma)$ o qual evidentemente cobre K como desejamos, isto é :

$$\bigcup_{\rho \in S_0} R_\rho = K \quad (\text{IV.2.6})$$

Observe que a região viável R_3 relativo à base B_3 obtida através de um passo do primal, está contido em K ($R_3 \subset K$), pois R_3 é alguma das R_ρ quando ρ varia em S_0 . Seguindo as diretrizes expostas, conclui-se que ao determinarmos uma base ótima B para o problema (IV.1.1)-(IV.1.3), temos automaticamente determinado um nó $\rho \in S_0$, e com este nó uma componente G_0 de G é unicamente determinada. Portanto, se determinamos todos os nós ρ de S_0 , (IV.2.6) nos diz que obtemos uma cobertura para K , conseqüentemente todos os μ viáveis do problema MLP-RHS, ou mais precisamente todas as regiões viáveis R_ρ (que não se sobrepõem). É óbvio que se não existe degenerescência, tem-se $G=G_0$.

Em resumo, para resolvermos o problema MLP-RHS, devemos seguir as seguintes diretrizes:

- 1) Construa uma região $K \subset V^S$ de vetores paramétricos μ tal que o problema MLP-RHS estabelecido em (IV.1.1)-(IV.1.3) tenha
 - a) soluções ótimas finitas para todo $\mu \in K$;
 - b) soluções inviáveis para $\mu \in (V^S - K)$

É claro que K só estará determinado após a conclusão do item que se segue.

- 2) Determine todas as regiões viáveis não vazias R_i tal que:

$$\text{a) } \bigcup_{\rho \in S_0} R_\rho = K$$

b) para todo $\rho \in S_0$ a base ${}^\rho B$ é uma base ótima para (IV.1.1)-(IV.1.3).

3) Construa as funções ${}^\rho \bar{B}(\mu)$ e $z_{\max}^{(\rho)}(\mu)$ definidos sobre R_ρ e consequentemente as funções $x(\mu)$ e $z_{\max}(\mu)$ definido sobre K .

IV.3 - Resolução do Método

Nesta seção lançaremos mão de um algoritmo, o qual nos permitirá determinar todos os nós $\rho \in S_0$ de um grafo conexo.

Ele está descrito e Provado em [] (MANAS, J. e NE-
DOMA, J., "Finding All Vertices of a Convex Polyhedron", Numeriche
Math., Vol. 12 (1968), pp. 226-229) e nos referimos a ele como o
Algoritmo. Daremos agora os detalhes de como manipulá-lo para re-
solver o problema MLP-RHS.

O algoritmo requer que as seguintes hipóteses sejam
satisfeitas:

- 1) O grafo seja finito e conexo ;
- 2) Exista um procedimento que determine o nó inicial ρ_0 ;
- 3) Exista um procedimento que determine todos os nós que são vizi-
nhos a um nó dado.

Aos procedimentos citados em (2) e (3) chamaremos de fase 1 e fase 2, respectivamente.

O algoritmo pode ser narrado como segue.

Passo A : Compute o nó $\rho_0 \in S_0$

Passo B : Construa os conjuntos (listas)

$$V_0 = \{\rho_0\} \quad W_0 = \{\sigma(\rho_0)\}$$

Passo C : Admita que no k-ésimo passo de O Algoritmo, são determinados o nó ρ_{k-1} e as listas V_{k-1}, W_{k-1} .

Passo C1: Se $W_{k-1} = \emptyset$, então $V_{k-1} = S_0$ e o procedimento chega fim.

Passo C2: Se $W_{k-1} \neq \emptyset$, seleccionamos um nó $\rho_k \in W_{k-1}$ a uma distância Δ de ρ_{k-1} tanto menor quanto possível.

Especificamente: se $M_k = W_{k-1} \cap \sigma(\rho_{k-1}) \neq \emptyset$, seleccionamos $\rho_k \in M_k$.

Passo C3: Construa as listas

$$V_k = V_{k-1} \cup \{\rho_k\}, \quad W_k = W_{k-1} \cup \sigma(\rho_k) - V_k$$

e retorne ao passo C1.

Do que já foi exposto, concluímos que o grafo G gerado pelo problema MLP-RHS dado, é realmente finito e conexo, o que nos assegura que a primeira hipótese para o manuseio de O Algoritmo é satisfeito. Quanto à fase 1, que computa o nó inicial $\rho_0 \in S_0$, constata-se no decorrer da descrição do mesmo, que as hi

pôteses necessárias ao uso de O Algoritmo são satisfeitas. Veja - mos:

Fase 1 : 1*) Determine uma solução viável (x_0, μ_0) para o sistema

$$Ax - B''\mu = B' \quad (\text{IV.3.1})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{IV.3.2})$$

onde os elementos μ são livres.

Se não existe solução para (IV.3.1)-(IV.3.2), então $K = \emptyset$.

2*) Suponha que exista uma solução viável (x_0, μ_0) para (IV.3.1)-(IV.3.2).

Então, colocar $\mu = \mu_0$ no problema inicial (IV.1.1)-(IV.1.3) e resolver

$$\text{Maximize } Z = C^T x \quad (\text{IV.3.3})$$

sujeito a

$$Ax = B' + B''\mu_0, \quad x \geq 0 \quad (\text{IV.3.4})$$

Se o problema (IV.3.3)-(IV.3.4) não tem solução finita, então o teorema IV.1 nos assegura que $K = \emptyset$. Se este problema tem solução finita, ele está de acordo com a definição IV.2, portanto existe uma base ótima B_0 para o problema (IV.3.3)-(IV.3.4), a qual é simultaneamente uma base ótima para o problema (IV.1.1) - (IV.1.3).

Segue-se que $\mu_0 \in R_0$, $R_0 \neq \emptyset$, $R_0 \subset K$ e assim,

$K \neq \emptyset$. Portanto, o nó inicial $\rho_0 \in S_0$ é determinado.

A fase 2 se caracteriza por determinar os vizinhos de um dado nó. Vejamos sua descrição.

Fase 2 : Supõe-se que no k -ésimo passo, O Algoritmo gerou as listas V_{k-1} e W_{k-1} . A lista V_{k-1} designa todas as bases ótimas ou nós $\rho_0 \dots \rho_{k-1}$, tal que para cada um deles temos a tabela do simplex dada por (IV.2.1)-(IV.2.2). Daí é fácil determinar as condições que delimitam a região R_ρ e as expressões das funções ${}^\rho \bar{B}(\mu)$ e $z_{\text{maz}}^{(\rho)}(\mu)$ definidas sobre R_ρ .

Para darmos andamento é necessário que fique bem caracterizado o que venha a ser V_{k-1} e W_{k-1} . Com V_{k-1} queremos designar aqueles nós que já conhecemos seus vizinhos. Os nós vizinhos dos nós de V_{k-1} estão no próprio V_{k-1} , pois um é vizinho do outro, e reciprocamente; o restante estará em W_{k-1} na hipótese de $W_{k-1} \neq \emptyset$.

Com W_{k-1} queremos designar aqueles nós cujos vizinhos não foram ainda explorados. Como ainda não os conhecemos, é provável que ao determiná-los exista alguns que já foram listados. Prosseguindo, de acordo com o passo C1, supõe-se $W_{k-1} \neq \emptyset$.

Depois de selecionar $\rho_k \in W_{k-1}$ (com distância Δ de ρ_{k-1} a menor possível), passamos da base B_{k-1} para B_k e obtemos a tabela do simplex dada por (IV.2.1)-(IV.2.2) relativo a ρ_k .

Observação : Fica a cargo do leitor estabelecer relações conclusivas entre a resolução do exercício numérico desenvolvido na primeira seção deste capítulo e as diversas fases deste método.

Quando calculamos $\sigma(\rho_k)$, o ρ_k já não mais pertencerá ao rol daqueles, cujos vizinhos são desconhecidos e ao mesmo tempo geramos outros nós cujos vizinhos provavelmente ainda não conhecemos. Chamamos de Q_k os nós de $\sigma(\rho_k)$ que não foram listados em W_{k-1} ou em V_{k-1} , ou mais precisamente, denotamos por Q_k o conjunto dos nós a serem adicionados a W_{k-1} para gerar W_k . Como agora os vizinhos de ρ_k já são conhecidos, ele não poderá pertencer a W_k , então $W_k = W_{k-1} \cup Q_k - \{\rho_k\}$.

A nova listagem dos nós cujos vizinhos já são conhecidos vai ser agora acrescida do nó ρ_k para constituir o V_k ; logo, $V_k = V_{k-1} \cup \{\rho_k\}$.

Resta-nos finalmente como construir o Q_k para encerrarmos a fase 2. O Q_k será determinado no decorrer das seguintes etapas:

1") Seja $P_k \subset I$ o conjunto de linhas em (IV.2.2) relativas a ρ_k (ou o conjunto de índices das faces de R_k) tal que a condição (2') é satisfeita.

2") A partir do sistema

$$\xi_i = k_{b_i} - \sum_{j=1}^S (-k_{b_{ij}}) \mu_j \quad i=1, \dots, m \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\xi_i \geq 0$$

(o qual é obtido de (IV.2.5) pela adição de variáveis escalares ξ_i) determina-se sucessivamente o $\min_{i \in P_k} \xi_i$ sujeito a (IV.3.5), isto é, queremos simplesmente conhecer aqueles $i \in P_k$ tais que os ξ_i tenham um mínimo nulo, num mesmo ponto μ^* .

Assim determinamos aqueles $i \in P_k$ que satisfazem (1'). O método de determinar o mínimo ξ_i está descrito com detalhes em [20].

- 3") Seja $\bar{P}_k \subset P_k$ o conjunto de $i \in I$ tal que as condições (1') e (2') são simultaneamente satisfeitas.
- 4") Através das regras do dual simplex determinamos os possíveis pivôs para todo $i \in \bar{P}_k$.
- 5") Sem realmente executarmos as transformações para a obtenção das tabelas do simplex dual, determinamos sucessivamente os índices das bases ótimas vizinhas, isto é, $\sigma(\rho_k)$, usando os elementos pivôs determinados em (4").
- 6") Retiramos de $\sigma(\rho_k)$ todos os nós já listados em W_{k-1} ou em V_{k-1} . O restante de $\sigma(\rho_k)$ é exatamente o Q_k .

Podemos agora resumir o método, descrito como se segue: Através de (1*) e (2*), determinamos a base B_0 ; portanto, o nó inicial $\rho_0 \in S_0$ é encontrado e concluímos a fase 1. A fase 2 se inicia com a tabela ótima do simplex para ρ_0 .

Utilizamos a parte de 0A relativamente às variáveis

veis não básicas da tabela e daí selecionamos aquelas linhas que têm pelo menos um elemento negativo (l'). Os índices destas linhas constituirão o conjunto P_0 . Destas linhas determinamos aquelas cuja variável escalar ξ_i correspondente é igual a zero (isto é, minimizamos ξ_i para $i \in P_0$). Com isto determinamos o subconjunto \bar{P}_0 de P_0 , o qual indica as faces de R_0 que possuem vizinhas. Para cada $i \in \bar{P}_0$ usamos as regras do simplex dual para determinar a variável que entra na base e consequentemente obtemos os nós que são vizinhos de ρ_0 .

Em seguida construímos as listas $V_0 = \{\rho_0\}$, $W_0 = \sigma(\rho_0) = Q_0$. Prossequindo escolhemos $\rho_k \in W_0$ com distância Δ entre ρ_k e ρ_0 igual a um. Admitamos que o escolhido foi $\rho_1 \in W_0$, portanto passamos de B_0 para B_1 e o procedimento se repete determinando-se \bar{P}_1 e consequentemente $\sigma(\rho_1)$.

Para gerar W_1 construímos Q_1 , o qual representa todos os nós de $\sigma(\rho_1)$ que não se encontram em nenhuma das listas V_0 e W_0 . Daí geramos $V_1 = \{\rho_0, \rho_1\}$. Repetimos o processo até que para um determinado k , $W_k = \emptyset$, isto é, $V_k = S_0$.

IV.4 - Exemplo Numérico

Lançamos mão do exercício numérico dado na primeira seção para exemplificarmos o método construído. Considere o problema:

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 + x_2$$

sujeito a :

$$x_1 + x_2 \leq \mu_1$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1 - \mu_2$$

$$4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Vamos aplicar o método passo a passo.

Fase 1: Depois de adicionar as variáveis escalares x_3, x_4 e x_5 , construímos a tabela inicial (Quadro 0 da Tabela IV.1).

1) Determine-se em seguida uma solução (x_0, μ_0) para o sistema:

$$x_1 + x_2 + x_3 - \mu_1 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 + \mu_2 = 1$$

$$4x_1 + x_2 + x_5 = 4$$

É fácil ver que $(x_0, \mu_0) = (0, 0, 0, 1, 4, 0, 0)^T$ é uma solução viável para o sistema acima.

2) Uma vez determinado (x_0, μ_0) , pomos $\mu = \mu_0$ (neste caso $\mu_0 = (0, 0)^T$) no problema proposto e resolvemos:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$4x_1 + x_2 + x_5 = 4$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 5.$$

O máximo deste problema está dado no Quadro 1 da Tabela IV.1. Assim existe uma base B_0 para o problema. Ao terminar a fase 1 temos determinado $\rho_0 = (1, 4, 5)$. A região R_0 correspondente à base B_0 está determinada em (IV.1.9)-(IV.1.11) ; $x_1(\mu)$, $x_4(\mu)$ e $x_5(\mu)$ em (IV.1.8) e $z_{\max}^0(\mu) = 2\mu_1$.

Fase 2 :

1") O Quadro 1 da Tabela IV.1 nos diz que a segunda e a terceira linha satisfazem à condição (2'), portanto $P_0 = \{2, 3\}$.

2") Devemos checar se existem $\xi_2 = \xi_3 = 0$ para um determinado μ^* tal que

$$1 - 2\mu_1^* - \mu_2^* = 0$$

$$4 - 4\mu_1^* + 0\mu_2^* = 0$$

É fácil ver que com $\mu^* = (1, -1)$ temos $\xi_2 = \xi_3 = 0$, isto é, $\min \xi_i = 0 \quad i=2,3, \dots$

3") Portanto $\bar{P}_0 = (2, 3)$

4") Determinemos agora os pivôs.

Voltando ao Quadro 1 da Tabela IV.1, temos que para determinar o pivô, devemos determinar

$$\min \left\{ \frac{2}{-(-2)}, \frac{1}{-(-3)} \right\} \quad \text{ou} \quad \min \left\{ \frac{2}{-(-4)}, \frac{1}{-(-3)} \right\}$$

No primeiro caso temos que o pivô é -3 , portanto entra x_2 na base e sai x_4 . No segundo caso temos que o pivô é -3 , portanto entra x_2 e sai x_5 .

5") Assim os nós vizinhos de ρ_0 são :

$$\sigma(\rho_0) = \{\rho_1, \rho_2\} \quad \text{onde} \quad \rho_1 = (1, 2, 5) \quad \text{e} \quad \rho_2 = (1, 2, 4)$$

6") Então $V_0 = \{\rho_0\}$, $W_0 = \sigma(\rho_0) = \{\rho_1, \rho_2\} = Q_0$

Agora escolhemos $\rho_1 \in W_0$ (com $\Delta=1$) e passamos para o Quadro 2 da Tabela IV.1.

1") Voltamos novamente à fase 2. Do Quadro 2 observamos que a segunda e a terceira linhas satisfazem à condição 2'; portanto,

$$P_1 = \{2, 3\}$$

2") Devemos checar se existem $\xi_2 = \xi_3 = 0$ para um determinado μ^* tal que

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \mu_1^* + \frac{1}{3} \mu_2^* = 0$$

$$3 - 2\mu_1^* + \mu_2^* = 0$$

É fácil ver que com $\mu^* = (+1, -1)$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, isto é, $\min \xi_i = 0$ $i=(2,3)$.

3") Portanto $\bar{P}_1 = \{2,3\}$

4") Determinamos agora os pivôs.

Voltando ao Quadro 2 da Tabela IV.1, temos que para determinar o pivô devemos determinar

$$\min \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{-(-2)} , \frac{\frac{1}{3}}{-(-1)} \right\} \quad \text{ou} \quad \min \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{-(-\frac{1}{3})} \right\}$$

No primeiro caso temos que o pivô é -1 , portanto entra x_4 e sai x_5 da base. No segundo caso temos que o pivô é $-1/3$, portanto entra x_4 e sai x_2 da base.

5") Consequentemente os nós vizinhos de $\rho_1, \sigma(\rho_1) = \{\rho_0, \rho_2\}$ onde $\rho_2 = (1, 2, 4)$

6") Temos assim que $V_1 = \{\rho_0, \rho_1\}$, $Q_1 = \{\rho_2\}$ e $W_1 = \{\rho_2\}$

De uma maneira mais resumida, escolhemos $\rho_2 \in W_1$ ($\Delta=1$) e depois de aplicarmos as regras dos simplex chegamos ao Quadro 3 da Tabela IV.1 .

Em seguida determinamos:

$$P_2 = \{1, 2, 3\} \quad , \quad \bar{P}_2 = \{1, 3\} \quad \text{e daí determinamos que}$$

$$\sigma(\rho_2) = \{\rho_1, \rho_3\} \quad V_1 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\} \quad Q_2 = \{\rho_3\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{\rho_3\}$$

Escolhendo $\rho_3 \in W_3$ e após o pivoteamento, obtemos o Quadro 4 da Tabela IV.1. Decorre daí que $\sigma(\rho_3) = \{\rho_2\}$,
 $Q_2 = \emptyset$, $W_3 = \emptyset$, $V_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\} = S_0$ e o problema termina.

IV.5 - Multiparametrização dos Coeficientes da Função Objetivo (MLP-OFC)

Consideraremos nesta seção o problema de programação linear no qual os coeficientes da função objetivo que constituem as componentes do vetor custo são funções de um conjunto de parâmetros. Este tipo de problema é rotulado como (MLP-OFC) sendo um problema de programação linear multiparamétrico dos coeficientes da função objetivo.

Os conceitos necessários para a resolução deste problema (MLP-OFC) terão como alicerce os já desenvolvidos para o problema MLP.RHS, com pequenas adaptações. Portanto, as definições e teoremas que se tornarem praticamente meras repetições, serão omitidos.

IV.6 - Formulação e Conceituação do Problema

O problema MLP-OFC pode ser posto como:

$$\text{Maximizar} \quad w = (C' + C''\lambda)^T x \quad (\text{IV.6.1})$$

sujeito a

$$Ax = b \quad (\text{IV.6.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{IV.6.3})$$

onde: $\lambda \in V^S$ é um vetor paramétrico ;

A - uma matriz constante do rank m ;

C'' - matriz constante $(n,s) \in V^m$;

C' $\in V^n$ são vetores constantes.

Da equação (IV.6.1), tiramos:

$$w = C'^T x + \lambda^T C''^T x$$

a qual ainda pode ser escrita como:

$$w = z + \lambda^T y$$

onde:

$$z = C'^T x$$

$$y = C''^T x$$

Isto nos diz que o problema (IV.6.1)-(IV.6.3) pode ser escrito de uma forma equivalente, como :

Maximize

$$w = \lambda^T y + z \quad (\text{IV.6.4})$$

sujeito a

$$Ax = b \quad (\text{IV.6.5})$$

$$y - C''^T x = 0 \quad (\text{IV.6.6})$$

$$z - C'^T x = 0 \quad (\text{IV.6.7})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{IV.6.8})$$

onde:

$y \in V^s$ é um vetor variável ;

z é uma variável escalar .

A variável x deve ser sempre não negativa, mas o mesmo não é exigido de y , haja visto ela ser uma variável livre. Assim, y sempre estará na base passando aos subscritos das variáveis básicas x_i a responsabilidade de caracterizar a base. Denotaremos o índice da base ótima como na seção IV.1, isto é ,
 $\rho = |j_1 \dots j_m|$.

Agora, pré-multiplicando a equação (IV.6.5) pela inversa ρ_B^{-1} , obtemos :

$$\rho_B^{-1} Ax = B^{-1} b$$

ou

$$\rho_{Ax} = \rho_b \quad (\text{IV.6.9})$$

Somando membro a membro as equações

$$z - C'^T x = 0$$

$$C'_B{}^T (\rho_{Ax}) = C'_B{}^T (\rho_b)$$

obtemos:

$$z + \rho_{C'}^T x = z(\rho)$$

onde

$$\rho_{C'}^T = C'_B{}^T \rho_A - C'^T \quad (\text{IV.6.10})$$

e

$$z(\rho) = C'_B{}^T \rho_b$$

Adicionando membro a membro as equações:

$$y - C''^T x = 0$$

$$C_B''^T (\rho_A x) = C_B''^T (\rho_b)$$

temos:

$$y - \rho C''^T x = \rho q$$

onde

$$\rho C''^T = C_B''^T \rho_A - C''^T \quad (\text{IV.6.11})$$

$$\rho q = C_B''^T \rho_b$$

Chamamos a atenção que C_B' e C_B'' são respectivamente as partes de C' e C'' que correspondem às variáveis básicas em ρ_B e que T indicará sempre a transposta da matriz correspondente.

Podemos agora, através de ρ_B , escrever o sistema (IV.6.5)-(IV.6.8) na forma :

$$\rho_A x = \rho_b \quad (\text{IV.6.12})$$

$$y + \rho C''^T x = \rho q \quad (\text{IV.6.13})$$

$$z + \rho C'^T x = z^{(\rho)} \quad (\text{IV.6.14})$$

$$y \geq \underline{z} \quad , \quad x \geq 0 \quad (\text{IV.6.15})$$

Como é fácil ver (a solução primal), a viabilidade da solução não depende de λ . Segue-se de (IV.6.13) e (IV.6.14) que para $\lambda = \lambda_0$ podemos escrever :

$$\rho_w = -(\rho C' + \rho C''\lambda_0)^T x + \lambda_0^T \rho q + z(\rho) \quad (\text{IV.6.16})$$

Tentemos encontrar uma expressão mais condensada para determinar a (dual viabilidade) otimalidade. Como de costume, dizemos que uma base do problema (IV.6.1)-(IV.6.3) é ótima para $\lambda = \lambda_0$ se o vetor avaliação $(\rho C(\lambda_0))^T$ for não negativo, ou mais precisamente, se todas as suas componentes $z_j(\lambda_0) - C_j(\lambda_0) \geq 0$ para $j=1, \dots, n$. Com este objetivo, temos:

$$\begin{aligned} (C(\lambda_0))^T &= ((w_1(\lambda_0) - C_1(\lambda_0)) \dots (w_n(\lambda_0) - C_n(\lambda_0))) \\ &= (w_1(\lambda_0) \dots w_n(\lambda_0)) - (C_1(\lambda_0) \dots C_n(\lambda_0)) \end{aligned}$$

onde $C_j(\lambda_0)$ é o j -ésimo coeficiente da função objetivo. Assim,

$$\begin{aligned} (C(\lambda_0))^T &= ([C_B(\lambda_0)]^T \rho_B^{-1} A_1 \dots [C_B(\lambda_0)]^T \rho_B^{-1} A_n) - \\ &- ((C'_1 + \lambda_0^T C''_1{}^T) \dots (C'_n - \lambda_0^T C''_n{}^T)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C(\lambda_0))^T &= [C_B(\lambda_0)]^T \rho_B^{-1} [A_1 \dots A_n] - (C'_1 \dots C'_n) - \\ &- \lambda_0^T (C''_1{}^T \dots C''_n{}^T) \end{aligned}$$

onde $C_B(\lambda_0)$ é a parte de $C' + C''\lambda_0$ que corresponde às variáveis básicas em ρ_B . Então,

$$\begin{aligned} (C(\lambda_0))^T &= (C'_B + C''_B \lambda_0)^T \rho_B^{-1} A - (C'^T + \lambda_0^T C''^T) \\ &= (C'^T_B + \lambda_0^T C''^T_B) \rho_A - C'^T - \lambda_0^T C''^T \end{aligned}$$

$$= (C'^T \rho_A - C'^T) + \lambda_0^T (C_B''^T \rho_A - C''^T)$$

que por (IV.6.10) e (IV.6.11) nos dá :

$$(C(\lambda_0))^T = \rho_{C'}^T + \lambda_0^T \rho_{C''}^T = (\rho_{C'} + \rho_{C''} \lambda_0)^T$$

ou, de modo mais geral :

$$\rho_C(\lambda) = \rho_{C'} + \rho_{C''} \lambda \dots \quad (\text{IV.6.17})$$

Assim, para manter a dual viabilidade, devemos exigir:

$$\rho_C(\lambda) = \rho_{C'} + \rho_{C''} \lambda \geq 0$$

ou

$$-\rho_{C''} \lambda \leq \rho_{C'} \quad (\text{IV.6.18})$$

e (IV.6.18) descreve a região R_ρ no λ -espaço para a qual a solução do problema é ótima.

Admita que já definimos implicitamente vetor paramétrico viável de maneira análoga à que foi dada para o problema MLP-RHS . Tomando por base a definição IV.2, podemos dizer que a base ρ_B é uma base ótima para o problema MLP-OFC se e somente se $R_\rho \neq \emptyset$. Indicaremos por K a união de todas as regiões viáveis R_ρ que não se sobreponham.

Teorema IV-1' - O problema MLP-OFC ou tem solução viável para todo $\lambda \in V^S$ ou não tem solução viável.

A demonstração é óbvia, pois se existe uma solução

viável, então como a viabilidade não depende de λ , segue-se que o problema é viável para todo $\lambda \in V^S$; caso contrário, não existe nenhuma solução viável.

Teorema IV.2' - K é um poliedro convexo em V^S .

Demonstração : Destacando de (IV.6.17) a sua j -ésima equação, temos

$${}^pC_j(\lambda) = {}^pC_j' + {}^pC_j''\lambda \quad (\text{IV.6.19})$$

Desde que cada ${}^pC_j'(\lambda)$ é uma função linear não homogênea de $(\lambda_1 \dots \lambda_s)$, cada inequação ${}^pC_j(\lambda) \geq 0$ é uma inequação linear não homogênea, representando um semi-espço fechado no espaço dos parâmetros V^S . Portanto, quando λ satisfaz simultaneamente ${}^pC_j(\lambda) \geq 0$ para todo $j \in I$, temos R_p . Assim, a região R_p é a interseção de um número finito de semi-espços fechados, consequentemente um conjunto convexo. Em seguida é fácil concluir que K é um poliedro convexo.

Analogamente ao teorema IV.3, temos :

Teorema IV.3' - A função $z_{\max}(\lambda)$ definida sobre K é uma função (contínua) convexa.

Demonstração : Sejam $C(\lambda) = (C' + C''\lambda)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e $\lambda^* = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$.

Denotemos por :

x_1 uma solução ótima correspondente a λ_1

x_2 uma solução ótima correspondente a λ_2

x^* uma solução ótima correspondente a λ^*

Então:

$$\begin{aligned} z_{\max}(\lambda^*) &= C(\lambda^*)x^* = [C' + C''(p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2)]x^* \\ &= [C' + pC''\lambda_1 + (1-p)C''\lambda_2 + pC' - pC']x^* \\ &= [p(C' + C''\lambda_1) + (1-p)(C' + C''\lambda_2)]x^* \\ &= pC(\lambda_1)x^* + (1-p)C(\lambda_2)x^* \end{aligned}$$

Como $C(\lambda_1)x^* \leq C(\lambda_1)x_1 = z_{\max}(\lambda_1)$ e $C(\lambda_2)x^* \leq C(\lambda_2)x_2 = z_{\max}(\lambda_2)$

temos :

$$z_{\max}(\lambda^*) \leq pC(\lambda_1)x_1 + (1-p)C(\lambda_2)x_2$$

ou

$$z_{\max}(\lambda^*) \leq p z_{\max}(\lambda_1) + (1-p)z_{\max}(\lambda_2)$$

Definição IV.1' - Sejam B_1 e B_2 duas bases ótimas com índices ρ_1 e ρ_2 respectivamente. Estas duas bases são ditas serem ótimas se e somente se:

- 1) existir $\lambda^* \in K$ tal que B_1 e B_2 sejam ambas bases ótimas para λ^* ;

2) for possível passar de B_1 para B_2 (e vice-versa) por um passo do algoritmo do simplex primal.

As definições (IV.4), (IV.7) e (IV.8) repetem-se quase que integralmente e as admitiremos definidas.

Teorema IV.4' - As duas regiões viáveis R_1 e R_2 estão em semi-espacos opostos.

Demonstração : Consideremos a j -ésima equação de (IV.6.17), isto é, ${}^{\rho}C_j(\lambda) = {}^{\rho}C_j' + {}^{\rho}C_j''\lambda$ (IV.6.19). Sejam B_1 e B_2 as bases ótimas relativas a R_1 e R_2 respectivamente. Após tomarmos as mesmas precauções a respeito da ordenação das colunas, seja ${}^1a_{jk}$ o elemento pivô da tabela do simplex de índice ρ_1 usado para gerar a base B_2 .

Por hipótese, ${}^1a_{jk} > 0$. O j -ésimo coeficiente da função objetivo da tabela do simplex de índice ρ_2 é obtido dividindo-se o k -ésimo coeficiente da função objetivo da tabela do simplex de índice ρ_1 por $-{}^1a_{jk}$. Isto implica que :

$${}^2C_j(\lambda) = -\frac{1}{{}^1a_{jk}} {}^1C_k(\lambda) \text{ para todo } \lambda \in V^s$$

e como ${}^1a_{jk} > 0$, os dois termos têm sinais opostos. Mas aqui o ${}^2C_j(\lambda)$ vai ser o novo k -ésimo coeficiente da função objetivo, já que estamos admitindo que a j -ésima posição na tabela do simplex pertence às primeiras m -posições dos vetores A_j básicos. O con-

junto J dos subscritos pode sempre ser renumerado de maneira que $J_2^{(\rho)} = \{ 1 \dots n-m \}$. Então podemos dizer :

$${}^2C_k(\lambda) = \frac{-1}{l_{a_{jk}}} {}^1C_k(\lambda) \quad \text{para todo } \lambda \in V^S$$

Assim,

$${}^1C_k(\lambda) \geq 0 \quad \text{para } \lambda \in R_1$$

e

$${}^2C_k(\lambda) \geq 0 \quad \text{para } \lambda \in R_2$$

o que conclui a demonstração.

O teorema IV.5 permanece válido. Uma definição análoga a (IV.8) se faz aqui necessária.

Definição IV.2' - O conjunto R definido por (IV.6.18) tem um vizinho ao longo da j -ésima face, $j \in J_2^{(\rho)}$, se é possível passar para esse vizinho pela introdução nas base da j -ésima variável não básica, isto é, se as seguintes condições são satisfeitas:

$\hat{1}'$) Existir $\lambda_0 \in R_\rho$ tal que ${}^\rho C_j(\lambda_0) = 0$;

$\hat{2}'$) $l_{a_{ij}} > 0$ para ao menos um $i \in I$.

IV.7 - Resolução do Problema MLP-OFC

Como já conhecemos os detalhes do método, resta-nos simplesmente resolver o problema MLP.OFC, o que faremos em seguida. Recorremos novamente ao O Algoritmo para determinar todos os nós do grafo $G_0 = (S_0, \sigma_0)$. Usando agora o bom senso através dos conhecimentos adquiridos nas seções anteriores, determinamos as bases viáveis, bem como todos os nós que são vizinhos de um dado nó. Esta etapa é obtida utilizando a Fase 2. Vejamos agora como adaptar a Fase 1 a este problema:

Fase 1 :

(1*) Determine uma solução viável (u_0, λ_0) para o sistema

$$A^T u - C^T \lambda \geq C' \quad (\text{IV.7.1})$$

onde $u \in V^m$ e $\lambda \in V^s$ são vetores variáveis. Se o sistema (IV.7.1) não tem solução, então não existirá solução dual viável para o problema MLP.OFC, isto é, $K = \emptyset$.

(2*) Ponha λ_0 obtido em (IV.7.1) em (IV.6.1)-(IV.6.3) e resolva-o, isto é,

$$\text{Maximize } w = C^T(\lambda_0)x \quad (\text{IV.7.2})$$

sujeito a

$$Ax = b \quad x \geq 0 \quad (\text{IV.7.3})$$

A pesquisa da solução para o problema MLP-OFC fica diretamente dependendo da existência de uma solução viável para

(IV.7.2)-(IV.7.3). Se tal solução for encontrada, também existirá uma base ótima B_0 para o MLP-OFC. Associado à base B_0 temos $R_0 \neq \emptyset$, pois $\lambda_0 \in R_0$, e consequentemente um nó $\rho_0 \in S_0 \subseteq S$.

A construção do conjunto Q_k é feita de maneira análoga ao desenvolvido na seção IV.3 e para tal partimos do sistema:

$$\xi = \rho_{C'}^N - (-\rho_{C''}^N)\lambda$$

$$\xi \geq 0$$

onde $\xi \in V^{n-m}$, e com $\rho_{C''}^N$ e $\rho_{C'}^N$ queremos indicar respectivamente as partes $\rho_{C''}$ e $\rho_{C'}$ que correspondem às variáveis não básicas, já que as partes correspondentes às variáveis básicas são nulas. A solução do problema tem sequência segundo o esquema delineado na seção IV.3.

CAPÍTULO V

PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA DAS EXTREMIDADES (RMPLP)

V.1 - Introdução

Neste capítulo consideraremos o problema de programação linear, no qual variam as extremidades do quadro usual do simplex, isto é, as componentes do vetor custo $C^T(\lambda)$, $(Z(\lambda) = C^T(\lambda)x)$, e as componentes do vetor $b(\lambda)$, $(Ax = b(\lambda), x \geq 0)$ são funções lineares de um conjunto de parâmetros.

Vamos nos referir a tal problema através da nomenclatura original RMPLP [19] .

Partindo-se de um sistema real, ao pretendermos estabelecer um modelo linear para tal sistema, revela-se por demais importante o conhecimento da mútua influência entre o sistema dado e seus vizinhos, os quais originam-se por mudanças dos elementos b_i do vetor b .

Limitar-nos-emos aos casos onde tal variação possa, de modo geral, ser expressa na forma $b(\lambda)$ onde $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_s)^T$ e λ_k , $k=1 \dots s$ são parâmetros. Pode suceder, ao analisarmos o próprio sistema ou seus vizinhos decorrentes da variação de $b(\lambda)$, que os coeficientes da função objetivo sejam afetados pela variação de λ . Traduziremos essa influência de λ no vetor custo pe

la expressão $C(\lambda)$. Se esse raciocínio descrito através de b for transferido para os coeficientes da função objetivo, admitiremos então que essa variação possa ser indicada de uma forma geral por $C(v)$, onde $v = (v_1 \dots v_s)^T$ é um vetor paramétrico.

De maneira análoga ao 1º caso, essa variação acarreta mudanças no vetor b , as quais vamos caracterizar escrevendo $b(v)$. Sintetizando, podemos dizer que essa influência pode ser traduzida de maneira mais concreta escrevendo as funções $C(v, \lambda)$ e $b(v, \lambda)$ as quais dependem dos vetores paramétricos v e λ , que por sua vez tomados um em relação ao outro, podem ser dependentes ou independentes.

Admitiremos aqui que os parâmetros v e λ são mutuamente dependentes, isto é, que $v = f(\lambda)$. Decorre daí que o RMPLP pode ser olhado como dependente unicamente do vetor paramétrico λ , o que faremos no decorrer deste capítulo.

V.2 - O Problema de Programação Linear Multiparamétrica em suas Extremidades

Consideremos então o RMPLP o qual pode ser posto como se segue:

$$\text{maximize} \quad Z(\lambda) = (C' + C''\lambda)^T x \quad (\text{V.2.1})$$

sujeito a

$$Ax = B' + B''\lambda \quad (\text{V.2.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{V.2.3})$$

onde C'' , B'' e A são respectivamente matrizes constantes $(n \times s)$, $(m \times s)$ e $(m \times n)$. As demais notações são análogas às do capítulo IV. Como é fácil concluir, o problema ora proposto é uma generalização dos problemas (IV.1.1)-(IV.1.3) e (IV.6.1)-(IV.6.3) tratados no capítulo anterior, pois teremos o 1º ou o 2º problema, caso sejam nulas as matrizes B'' ou C'' .

A experiência adquirida no decorrer do capítulo precedente nos faz antever que a solução do RMPLP resume-se em determinar uma região $K^* \subset V^s$ tal que o problema (V.2.1)-(V.2.3) tenha uma solução ótima finita relativamente a x , se e somente se $\lambda \in K^*$.

Se voltarmos ao capítulo anterior e observarmos as equações (IV.2.5) e (IV.6.18), elas nos dão as limitações de λ para que uma solução sendo ótima para um certo λ' continue ótima. Imbuídos desse propósito, admitamos que exista λ' tal que para

$\lambda = \lambda'$ o problema (V.2.1)-(V.2.3) tenha uma solução ótima finita $\rho_b(\lambda')$.

Paralelamente a essa hipótese, temos a base ótima B_ρ . Como já citamos, a base B_ρ continuará ótima para todo $\lambda \in V^S$ satisfazendo (IV.2.5) e (IV.6.18), isto é, a primal

$$\rho_b(\lambda) \geq 0 \quad (\text{V.2.4})$$

e a dual

$$\rho_c(\lambda) \geq 0 \quad (\text{V.2.5})$$

condição de viabilidade, ou mais precisamente

$$-\rho_{B''}\lambda \leq \rho_{B'} \quad (\text{V.2.6})$$

$$-\rho_{C''}\lambda \leq \rho_{C'} \quad (\text{V.2.7})$$

Como já estamos familiarizados com as equações (V.2.6) e (V.2.7), elas definem respectivamente regiões R_ρ e R'_ρ , tais que as soluções correspondentes relativas a B_ρ permanecem viáveis se e somente se $\lambda \in R_\rho$ é dual viável, se e somente se $\lambda \in R'_\rho$.

Daí, surge:

Teorema V.1 - Admita que exista uma solução ótima para o problema (V.2.1)-(V.2.3) e que B_ρ seja a correspondente base ótima. Seja $R_\rho^* \subset V^S$ uma região tal que a base B_ρ é ótima se e somente se $\lambda \in R_\rho^*$. Então a região R_ρ^* é definida por:

$$R_\rho^* = R_\rho \cap R'_\rho \quad (\text{V.2.8})$$

Isto é equivalente a (V.2.6) - (V.2.7). A região K^* é a união de

R_{ρ}^* quando ρ percorre o conjunto de índices de bases ótimas.

Demonstração :

$$\text{Se } \lambda \in R_{\rho}^* = R_{\rho} \cap R'_{\rho} \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in R_{\rho} \iff \begin{matrix} \rho B'' \lambda \leq \rho B' \\ e \end{matrix} \\ \lambda \in R'_{\rho} \iff \begin{matrix} -\rho C'' \lambda \leq \rho C' \end{matrix} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} \text{a base } B_{\rho} \\ \text{é ótima} \end{array}$$

Demonstraremos a segunda parte do teorema:

Se $\lambda \in K^*$, então $\lambda \in R_{\rho}^*$ para algum índice ρ , logo $\lambda \in \bigcup_{\rho} R_{\rho}^*$ e consequentemente

$$K^* \subset \bigcup_{\rho} R_{\rho}^* \quad (\text{V.2.9})$$

Se $\lambda \in \bigcup_{\rho} R_{\rho}^*$, então $\lambda \in R_{\rho}^*$ para algum índice ρ . Como todo $\lambda \in R_{\rho}^*$ também pertence a K^* , então $\lambda \in K^*$ e consequentemente

$$K^* \supset \bigcup_{\rho} R_{\rho}^* \quad (\text{V.2.10})$$

Decorre de (V.2.9) e (V.2.10) que

$$K = \bigcup_{\rho} R_{\rho}^*$$

Teorema V.2 - A região K é um conjunto convexo.

Demonstração :

Sejam:

x_1 a solução ótima correspondente a λ_1 ;

x_2 a solução ótima correspondente a λ_2 ,

de modo que

$$Ax_1 = B' + B''\lambda_1 \quad (V.2.11)$$

$$Ax_2 = B' + B''\lambda_2 \quad (V.2.12)$$

onde λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$, são dois vetores paramétricos genéricos (fixos) pertencentes a K^* .

O problema dual de (V.2.1)-(V.2.3) é minimizar

$$(i) \quad u = (B' + B''\lambda)^T w$$

sujeito a

$$(ii) \quad A^T w \geq C' + C''\lambda$$

Sejam:

w_1 solução do problema (i)-(ii) relativo a λ_1 ;

w_2 solução do problema (i)-(ii) relativo a λ_2 ,

de modo que

$$A^T w_1 \geq (C' + C''\lambda_1) \quad (V.2.13)$$

$$A^T w_2 \geq (C' + C''\lambda_2) \quad (V.2.14)$$

Agora consideremos :

$$\lambda_t = t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2$$

$$x_t = tx_1 + (1-t)x_2 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$w_t = tw_1 + (1-t)w_2$$

De (V.2.2)-(V.2.3), temos :

$$Ax_t = tAx_1 + (1-t)Ax_2$$

Por (V.2.11)-(V.2.12), vem :

$$Ax_t = t(B' + B''\lambda_1) + (1-t)(B' + B''\lambda_2)$$

$$Ax^t = B' + B''(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)$$

$$Ax^t = B' + B''\lambda_t \quad (V.2.15)$$

Por outro lado, (ii) nos dá :

$$\begin{aligned} A^T w_t &= A^T (tw_1 + (1-t)w_2) \\ &= tA^T w_1 + (1-t)A^T w_2 \end{aligned}$$

Mas por (V.2.13)-(V.2.14) vem:

$$A^T w_t \geq t(C' + C''\lambda_1) + (1-t)(C' + C''\lambda_2)$$

isto é,

$$A^T w_t \geq C' + C''\lambda_t \quad (V.2.16)$$

Portanto, para $\lambda = \lambda_t$ (V.2.15) e (V.2.16) nos dizem através da teoria da dualidade que o problema (V.2.1)-(V.2.3) tem uma solução ótima, o que equivale a dizer que $\lambda_t \in K^*$, o que conclui a demonstração.

Decorre do capítulo passado que :

$$\begin{aligned}
 z_{\max}^{(\rho)}(\lambda) &= C_B^T(\lambda) \rho_B^{-1} b(\lambda) \\
 &= (C_B' + C_B''\lambda)^T (\rho_B^{-1} B' + \rho_B^{-1} B''\lambda) \\
 &= (C_B' + C_B''\lambda)^T (\rho_B' + \rho_B''\lambda) \\
 &= C_B'^T \rho_B' + C_B'^T \rho_B''\lambda + \lambda^T C_B''^T \rho_B' + \lambda^T C_B''^T \rho_B''\lambda \\
 z_{\max}^{(\rho)}(\lambda) &= z_{\max}^{(\rho)} + C_B'^T \rho_B''\lambda + \lambda^T C_B''^T \rho_B' + \lambda^T C_B''^T \rho_B''\lambda \quad (\text{IV.2.17})
 \end{aligned}$$

onde C_B'' é a parte de C'' que no quadro usual do simplex corresponde aos coeficientes da função objetivo, relativos aos vetores básicos.

Teorema V.3 - Seja $z_{\max}(\lambda) : K^* \subset V^S \rightarrow \mathbb{R}$ a função objetivo definida sobre K^* e tomando valores na reta. Então a função $z_{\max}(\lambda)$, definida para todo $\lambda \in K^*$ é contínua.

Demonstração : Obviamente para toda base ótima de índice ρ tem-se que $z_{\max}^{(\rho)}(\lambda)$ é contínua para todo $\lambda \in R_\rho^*$. Evidentemente os pontos mais prováveis onde poderiam ocorrer uma descontinuidade seriam justamente aqueles que satisfazem as condições (1') e (2') da seção (IV.2) e as condições (1̂') e (2̂') da seção (IV.4). A demonstração prossegue de maneira análoga à executada nas citadas seções. Portanto, ao passarmos da base B_k para uma primal (ou uma dual) vizinha B_{k+1} , o valor ótimo de $z_{\max}(\lambda)$ não muda, observada a

hipótese de $R_{k+1}^* \neq \emptyset$.

V.3 - Resolução do RMPLP

A resolução deste problema será totalmente estruturada sobre a técnica desenvolvida no capítulo IV. O desenrolar da solução será dividido em duas fases, 1ª e 2ª, sendo a primeira dividida em duas partes, para maior clareza.

A primeira fase terá a incumbência de determinar λ_0 tal que o problema (V.2.1)-(V.2.3) tenha uma solução ótima relativamente a x . Os conceitos que se fizerem aqui necessários sobre a Teoria dos Grafos são os mesmos desenvolvidos no capítulo anterior. Determinada a solução inicial, temos automaticamente associado à base B_0 um nó inicial $\rho_0 \in S_0$. A segunda fase lançará inicialmente mão do nó inicial ρ_0 determinado na primeira fase e daí determinará sucessivamente todos os nós $\rho \in S_0$ tais que :

$$1) \bigcup_{\rho \in S_0} R_{\rho}^* = K^*$$

2) Duas regiões R_{ρ}^* não se sobreponham.

Observamos que para existir uma solução ótima é imprescindível que exista pelo menos uma solução viável; portanto nada nos adiantará se tomarmos $\lambda = \lambda'$ e em consequência termos

$Y = \{x : Ax = B' + B''\lambda', x \geq 0\} = \emptyset$. Assim, a primeira fase terá a in

cubência de determinar um $Y \neq \emptyset$ para iniciarmos o processo. Resta à segunda parte da primeira fase encontrar o λ_0 . Vejamos o procedimento:

1ª Fase - 1ª Parte

(1") Omita o vetor paramétrico λ em $C(\lambda)$, isto é

$$C(\lambda) \equiv C' \rightarrow z(\lambda) = C'^T x \quad (V.3.1)$$

(2") Determine uma solução viável (x_0, λ') para o sistema

$$Ax - B''\lambda = B', \quad x \geq 0 \quad (V.3.2)$$

Se não existe (x_0, λ') , então $K^* = \emptyset$. Pare

1ª Fase - 2ª Parte

(3") Admita que exista uma solução (x_0, λ') para (V.3.2). Então ponha $\lambda = \lambda'$ em (V.2.1)-(V.2.3) e resolva

$$\max_{x \in Y} (C' + C''\lambda')^T x \quad (V.3.3)$$

Decorre da maneira como λ' foi encontrado que (V.3.3), ou mais precisamente o problema (V.2.1)-(V.2.3) restrito a $x \in Y$, tem uma solução primal viável. Infelizmente a viabilidade da solução dual não pode ser a priori garantida. Se para $\lambda = \lambda'$, o problema (V.3.3) tem também solução dual viável, então ir para a 2ª fase.

(4") Admita que para $\lambda = \lambda'$ não exista a solução dual viável para (V.2.1)-(V.2.3). Ignore λ em $C(\lambda)$ como em (1"), e mude

de base por um passe do simplex dual como foi feito no capítulo anterior.

(5") Tendo determinado uma vizinha (primal) em (4") (consequência da mudança de base e resolução de (V.2.6)), determine $R_\rho^* = R_\rho \cap R'_\rho$ resolvendo (V.2.7) e (V.2.8). Se $R_\rho^* \neq \emptyset$ ir para a 2ª fase.

(6") Se $R_\rho \cap R'_\rho = \emptyset$ retorne ao passo (4"). Se $R_\rho \cap R'_\rho = \emptyset$ para todo ρ , que se consegue dentro da estrutura do algoritmo usado no problema MPL-RHS do capítulo anterior, então $K^* = \emptyset$. Pare.

2ª Fase :

Admita que ao concluir o k-ésimo passo, sejam conhecidos ρ_{k-1} , V_{k-1} e $R_{k-1}^* = R_{k-1} \cap R'_{k-1} \neq \emptyset$. Observe que já sabemos do capítulo IV que a região R_ρ tem uma vizinha ao longo de seu i-ésimo hiperplano suporte se e somente se:

(1') existir $\lambda^* R_\rho$ tal que $\rho b_i(\lambda^*) = 0$;

(2') $\rho a_{ij} < 0$ para ao menos um $j \notin \rho$

De maneira análoga, a região R'_ρ tem uma vizinha ao longo de seu j-ésimo hiperplano suporte se e somente se

(1') existir $\lambda^* R'_\rho$ tal que $\Delta C_j(\lambda^*) = 0$;

(2') $\rho a_{ij} > 0$ para ao menos um $i \in I$, $I = \{1 \dots m\}$ ($j \notin \rho$).

($\hat{1}$ ") Na tabela do simplex relativo à base ótima de índice ρ_{k-1} , seleccionemos as linhas e colunas que satisfazem respectivamente as condições (2') e ($\hat{2}$ ') e agrupemo-las nos correspondentes conjuntos $P_{k-1} = \{t: {}^{k-1}a_{tj} < 0, t \in I\}$ e

$$P'_{k-1} = \{t: {}^{k-1}a_{it} > 0, t \notin \rho\}.$$

$$\text{Denotemos } P_{k-1}^* = P_{k-1} \cup P'_{k-1}.$$

($\hat{2}$ ") A partir do sistema

$$-{}^{k-1}C''\lambda + \xi^1 = {}^{k-1}C', \quad \text{i.e.} \quad -\sum_{u=1}^S c''_{tu}\lambda_u + \xi_t = {}^{k-1}\Delta c'_t, \quad t \in \rho$$

..... (V.3.4)

$$-{}^{k-1}B''\lambda + \xi^2 = {}^{k-1}B', \quad \text{i.e.} \quad -\sum_{u=1}^S b''_{tu}\lambda_u + \xi_t = {}^{k-1}b'_t, \quad t \in I$$

..... (V.3.5)

$$\xi^1 \geq 0, \quad \xi^2 \geq 0 \quad \text{(V.3.6)}$$

o qual é obtido de (V.2.6) e (V.2.7) pela adição de variáveis escalares ξ_t . Determina-se sucessivamente o

$$\min_{t \in P_{k-1}^*} \xi_t$$

sujeito a (V.3.4)-(V.3.6). O $\min_{t \in P_{k-1}^*} \xi_t$ em (V.3.4) e o

$\min_{t \in P'_{k-1}} \xi_t$ em (V.3.5) são assim determinados. Desta maneira nós

determinamos o $i = t \in I$ ou $j = t \notin \rho$ para os quais as condições (1') ou ($\hat{1}$ ') são respectivamente satisfeitas.

- (3'') Seja \underline{P}_{k-1} ou \underline{P}'_{k-1} o conjunto de todos $t \in \underline{P}_{k-1}$ ou $t \in \underline{P}'_{k-1}$ ($\underline{P}_{k-1} \subset \underline{P}_{k-1}$, $\underline{P}'_{k-1} \subset \underline{P}'_{k-1}$) tais que a condição (1') ou (1'') são respectivamente satisfeitas.
- (4'') Através das regras do simplex dual ou primal, determine os possíveis pivôs para todo $t \in \underline{P}_{k-1}$ ou $t \in \underline{P}'_{k-1}$, respectivamente.
- (5'') Sem realmente executar as transformações para obtenção das tabelas do simplex dual ou primal, determine sucessivamente os índices das bases ótimas vizinhas, isto é, $\sigma(\rho_{k-1})$ usando os elementos pivôs determinados em (4''), e construa V_k e W_k como no capítulo IV.
- (6'') Escolha $\rho_k \in W_k$ e faça o correspondente pivoteamento da tabela do simplex por um passo do dual ou primal, obtendo uma nova tabela do simplex que chamaremos sua "vizinha", pois ainda não sabemos se $R_k^* \neq \emptyset$.
O processo se repete a partir do passo (1'') com ρ_k em lugar de ρ_{k-1} .
- (7'') Se $R_k^* \neq \emptyset$, então ρ_k é realmente vizinho de ρ_{k-1} . Retorne a (3'') com $k+1$ em lugar de k .
- (8'') Se $R_k^* = \emptyset$, denote por ρ'_k o correspondente índice da base e introduza as listas

$$V' = \{\rho_k'\} \text{ e } W_k' = W_k - \{\rho_k'\}.$$

Em V' serão agrupados todos os nós tal que sua correspondente região $R_k^* = \emptyset$. Portanto com V' queremos denotar o conjunto dos nós os quais já foram testados como não sendo índices de base ótima. Retorne a (6'') com um $\rho_k \in W_k'$.

(8'') O processo se repete até que, para alguma base de índice ρ_t , W_t ou W_t' seja vazio. Logo, $V_t = S_0$. Pare.

V.4 - Exemplo Numérico

Para tornar mais clara a teoria desenvolvida, consideremos o seguinte problema:

$$\text{Maximize } z(\lambda) = (4+9\lambda_1+5\lambda_2)x_1 + (1-11\lambda_1-5\lambda_2)x_2 \quad (\text{V.4.1})$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 5 + 11\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{V.4.2})$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Preliminarmente transformamos o sistema (V.4.2) em um conjunto de equações adicionando as variáveis escalares não negativas x_3 e x_4 e uma variável artificial p , associada a um coeficiente de custo grande M , para obter o sistema (V.4.3):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + p - 11\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 2 \end{aligned} \quad (\text{V.4.3})$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\dots,4, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ livres}$$

com a correspondente função objetivo :

$$z(\lambda) = c_1(\lambda)x_1 + c_2(\lambda)x_2 + c_3(\lambda)x_3 + Mp + c_4(\lambda)x_4 \quad (\text{V.4.4})$$

onde

$$c_1(\lambda) = 4 + 9\lambda_1 + 5\lambda_2, \quad c_2(\lambda) = 1 - 11\lambda_1 - 5\lambda_2, \quad c_j(\lambda) = 0$$

Para todo λ tal que $j > 2$. É fácil ver através da tabela V.1 que a solução viável (x_0, λ') existe, já que p foi eliminado da base e é dada por $(0, 4/3, 0, 0, 0, -1/3, 0)^T$ onde

$$x_0 = (0, 4/3, 0, 0, 0)^T \quad \text{e} \quad \lambda' = (-1/3, 0)^T.$$

Tabela V.1

Determinação de uma Solução Viável

QUADRO		1	2	3	P	4	λ_1	λ_2	
I	P	1	1	-1	1	0	-11	4	5
	4	2	(1)	0	0	1	-2	2	2
	-P	-1	-1	1	0	0	11	-4	-5
II	P	-1	0	-1	1	-1	(-9)	2	3
	2	2	1	0	0	1	-2	2	2
	-P	1	0	1	0	1	9	-2	-3
III	λ_1	1/9	0	1/9		1/9	1	-2/9	-1/3
	2	20/9	1	2/9		11/9	0	14/9	4/3

Omitimos a linha $-p$ do quadro III pois todos os seus elementos são nulos, já que a variável artificial foi eliminada da base.

1ª Fase - 2ª parte

Ao iniciar a segunda parte, transformamos (V.4.3) em

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + p &= b_1(\lambda) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= b_2(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{V.4.5})$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, 4, \quad p > 0$$

onde $b_1(\lambda) = 5 + 11\lambda_1 - 4\lambda_2$ e $b_2(\lambda) = 2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2$

Tem-se que para $\lambda = \lambda'$,

$$b_1(\lambda') = b_2(\lambda') = 4/3$$

$$C_1(\lambda') = 1$$

$$C_2(\lambda') = 14/3 \quad e$$

$$j(\lambda') = 0 \quad j > 2$$

Agora a resolução do problema (V.4.4)-(V.4.5) com $\lambda = \lambda'$ é dada pela tabela V.2 .

Tabela V.2

Tabela inicial para $\lambda = \lambda' = (-1/3, 0)^T$

QUADRO		1	2	3	-B''		B'	B(λ')
					λ_1	λ_2		
I	P	1	1	-1	-11	4	5	4/3
	4	2	(1)	0	-2	2	2	4/3
	-P	-1	-1	1	11	-4	-5	-4/3
II		1	4	3	-B''		B'	B(λ')
	P	-1	-1	(-1)	-9	2	3	0
	2	2	1	0	-2	2	2	4/3
	-P	1	1	1	9	-2	-3	0
III		1	4	-	-B''			B(λ')
	2	2	1	-	-2	2	2	4/3
	3	1	1	-	9	-2	-3	0

Para maior compreensão da tabela V.3 e o que se segue, escreveremos (V.4.4)-(V.4.5) na forma matricial, isto é :

$$\max z(\lambda) = \left[(4, 1, 0, M, 0) + (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 9 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, P, x_4 \end{bmatrix}^T$$

(V.4.6)

$$= \left[C'^T + \lambda^T \cdot C''^T \right] \cdot x^T$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ p \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad x^T \geq 0 \quad \dots (V.4.7)$$

$$A \cdot x = B' + B'' \cdot \lambda$$

Portanto a tabela V.3 nos dá uma solução ótima para o problema (V.4.6)-(V.4.7) quando $\lambda = \lambda'$.

Tabela V.3

Solução Ótima para $\lambda' = \lambda_0 = (-1/3, 0)^T$

ρ_0	1	4	$-0_{B''}$	B'	$0_{B(\lambda_0)}$
2	2	1	-2	2	4/3
3	(1)	1	9	-3	0
$0_{\Delta c_j}(\lambda_0)$	25/3	14/3	-28/3	28/3	56/9
$0_{\Delta c_j^I}$	$-2 = 0_{\Delta c_1^I}$	$1 = 0_{\Delta c_4^I}$	$\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$	$2 = z_{\max}^0$	$4/3 = C_B^{T0} B(\lambda_0)$
$0_{\Delta c_{1j}''}$	$-31 = 0_{\Delta c_{11}''}$	$-11 = 0_{\Delta c_{14}''}$	$\begin{bmatrix} 22 \\ -22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{44}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$
$0_{\Delta c_{2j}''}$	$-15 = 0_{\Delta c_{21}''}$	$-5 = 0_{\Delta c_{24}''}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{44}{3} \\ -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$

e

As regiões R_0 e R'_0 são definidas respectivamente por

$$R'_0 : - {}^0C''_{\lambda} \leq {}^0C' \quad (V.4.8)$$

$$R_0 : - {}^0B''_{\lambda} \leq {}^0B' \quad (V.4.9)$$

Cálculo de R'_0 :

Como a variável artificial foi eliminada da base, omi tiremos o vetor artificial na matriz 0A e consequentemente M em C' .

Assim;

$${}^0C'^T = C_B'^T {}^0A - C'^T = (1,0) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - (4,1,0,0) = (-2,0,0,1) \quad \dots (V.1.10)$$

onde:

$${}^0A = B_0^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$${}^0C''^T = C_B''^T {}^0A - C''^T = \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -11 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 0 & 0 & -11 \\ -15 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \dots (V.4.11)$$

Segue-se de (V.4.8), (V.4.10) e (V.4.11) que R'_0 é

dado por :

$$- \begin{bmatrix} -31 & -15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -11 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

isto é :

$$R'_0 : \begin{cases} 31\lambda_1 + 15\lambda_2 \leq -2 \\ 11\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 1 \end{cases}$$

Cálculo de R_0 :

Podemos observar diretamente das duas primeiras linhas da tabela V.3 que R_0 é dado por :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} , \text{ isto é:}$$

$$R_0 : \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \\ 9\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq -3 \end{cases}$$

É fácil ver que $\lambda_0 \in R_0$, $\lambda_0 \in R'_0$, portanto ,
 $R_0^* = R_0 \cap R'_0 \neq \emptyset$. Segue-se que $\rho_0 = \{2,3\}$.

Decorre também da tabela V.3 e (V.2.17) que:

$$z_{\max}^{(0)}(\lambda) = 2 - \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -22 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 & -22 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$z_{\max}^{(0)}(\lambda) = 2 - 22\lambda_1^2 + 10\lambda_2^2 + 12\lambda_1 \cdot \lambda_2 - 20\lambda_1 - 12\lambda_2 \quad (\text{V.4.12})$$

$$\lambda \in R_0^*$$

2ª Fase :

Observando a tabela V.3, constatamos que não existe nenhum elemento ${}^0a_{ij} \in {}^0A$, correspondentes aos vetores não básicos ($j=1,4$), satisfazendo a condição $2'$, o que implica em afirmarmos que $P_0 = \emptyset$.

Já o mesmo não ocorre com a condição $\hat{2}'$, a qual é satisfeita para os ${}^0a_{ij} \in {}^0A$, $j=1,4$. Mas isto significa dizer que pode existir regiões vizinhas a R'_0 ao longo dos hiperplanos suportes

$$31\lambda_1 + 15\lambda_2 = -2 \quad (\text{V.4.13})$$

$$11\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \quad (\text{V.4.14})$$

Portanto, $P'_0 = \{1,4\}$. Para determinar \underline{P}'_0 devemos verificar se os hiperplanos suportes definidos por (V.4.13) e (V.4.14) possuem regiões vizinhas. Para tal devemos resolver (de acordo com (V.3.4)-(V.3.6) o problema auxiliar:

$$\min_{t \in P'_0} \xi_t \quad P'_0 = \{1, 4\}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} R_0 \quad & -\lambda_1 + \lambda_2 + \xi_3 = 1 \\ & -9\lambda_1 + 2\lambda_2 - \xi_2 + P_1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'_0 \quad & -31\lambda_1 - 15\lambda_2 - \xi_1 + P_2 = 2 \\ & 11\lambda_1 + 5\lambda_2 + \xi_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\xi_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 4 \quad , \quad P_i \geq 0 \quad i=1, 2 .$$

A resolução deste problema auxiliar nos diz através da tabela V.4 que ξ_4 permanecerá na base, já que devemos ter $\xi_i \geq 0$.

Assim, o $\min \xi_4 = 361/197$ e $\min \xi_1 = 0$.

Isto implica que exista somente uma região vizinha ao longo do hiperplano (V.4.13). Logo, $\underline{P'_0} = \{1\}$.

Tabela V.4

QUADROS		λ_1	$-\lambda_1$	λ_2	$-\lambda_2$	ξ_2	ξ_1	
I	ξ_3	-1	1	1	-1	0	0	1
	P_1	-9	9	2	-2	-1	0	3
	P_2	-31	(31)	-15	15	0	-1	2
	ξ_4	11	-11	5	-5	0	0	1
		-40	40	-13	13	-1	-1	5
II	ξ_3	0	-	46/31	-46/31	0	1/31	29/31
	P_1	0	-	(197/31)	-197/31	-1	9/31	75/31
	$-\lambda_1$	-1	-	-15/31	15/31	0	-1/31	2/31
	ξ_4	0	-	-10/31	10/31	0	-11/31	53/31
		0	-	197/31	-197/31	-1	9/31	75/31
III	ξ_3	0	-	-	0	46/197	-7/197	73/31
	λ_2	0	-	-	-1	-31/197	9/197	75/31
	$-\lambda_1$	-1	-	-	0	-15/197	-2/197	49/197
	ξ_4	0	-	-	0	-10/197	-67/197	361/197

Como $\underline{P}_0' = \{1\}$, temos por $\hat{4}''$ que o elemento pivô na coluna 1 do quadro III da tabela V.2 é determinado por :

$$\min\{^0b_1(\lambda^*)/a_{11} \ , \ ^0b_2(\lambda^*)/a_{21}\} = \min\{73/197, 0\} = 0$$

onde

$$\lambda^* = (-49/197 \ , \ 75/197)^T$$

$$\begin{bmatrix} ^0b_1(\lambda^*) \\ ^0b_2(\lambda^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49/197 \\ 75/197 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 146/197 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segue-se daí que $\rho_1 = \{1, 2\}$, $V_0 = \{\rho_0\}$ e $W_0 = \{\rho_1\}$. Após o pivoteamento, temos que o quadro I da tabela V.5 nos dá a solução ótima.

Tabela V.5
Soluções Ótimas

QUADRO	ρ_1	3	4	$-^1B''$		$^1B'$
I	2	(-2)	-1	-20	6	8
	1	1	1	9	-2	-3
	$^1\Delta c'_j$	2	3	16	-2	-4
	$^1\Delta c''_{1j}$	31	20	301	-84	-115
	$^1\Delta c''_{2j}$	15	10	145	-40	-55
II	ρ_2	2	4	$-^2B''$		$^2B'$
	3	-1/2	1/2	10	-3	-4
	1	1/2	1/2	-1	1	1
	$^2\Delta c'_j$	1	2	-4	4	4
	$^2\Delta c''_{1j}$	31/2	9/2	-9	9	9
	$^2\Delta c''_{2j}$	15/2	5/2	-5	5	5

Decorre também do quadro I da tabela V.5 que :

$$R_1 : -10\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 4$$

$$9\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq -3$$

$$R_1' : -31\lambda_1 - 15\lambda_2 \leq 2$$

$$20\lambda_1 - 10\lambda_2 \leq 3$$

e

$$z_{\max}^{(1)}(\lambda) = -4 - [16 \ -2] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + [\lambda_1 \ \lambda_2] \begin{bmatrix} -115 \\ -55 \end{bmatrix} - [\lambda_1 \ \lambda_2] \begin{bmatrix} 301 & -84 \\ 145 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

e

$$z_{\max}^{(1)}(\lambda) = -4 - 301\lambda_1^2 + 40\lambda_2^2 - 61\lambda_1\lambda_2 - 131\lambda_1 - 53\lambda_2, \quad \lambda \in R_1^*$$

Resolvendo o problema auxiliar, chega-se que :

$\rho_2 = \{1, 3\}$, $V_1 = \{\rho_0, \rho_1\}$ e $W_1 = \{\rho_2\}$. Após o pivoteamento, chegamos ao quadro II que nos dá :

$$R_2 : 10\lambda_1 - \lambda_2 \leq -4$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$$

$$R_2' : 31\lambda_1 - 15\lambda_2 \leq 2$$

$$-9\lambda_1 - 5\lambda_2 \leq 4$$

e

$$z_{\max}^{(2)}(\lambda) = 4 - [-4 \ 4] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + [\lambda_1 \ \lambda_2] \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} - [\lambda_1 \ \lambda_2] \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

e

$$z_{\max}^{(2)}(\lambda) = 4 + 9\lambda_1^2 - 5\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 13\lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda \in R_2^*$$

Executando os mesmos cálculos auxiliares, de maneira análoga como fizemos para ρ_0 , chega-se que

$$V_2 = \{\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2\} \ , \ W_2 = \emptyset$$

e que conclui a solução do problema.

BIBLIOGRAFIA

- |1| C.M. Shetty, "On Analysis of the Solution to a Linear Programming Problem", Operational Research Quarterly, Vol.12, Nº 2, pp. 89-104 (1961).

- |2| C. Van de Panne, "Linear Programming and Related Techniques pp. 104-125, North-Holland/American Elsevier.

- |3| C. Cornele, V. Panne, "Methods for Linear and Quadratic Programming", North-Holland/American Elsevier (1975).

- |4| Edgar Simons, "A Note on Parametric Linear Programming", Management Science, Vol. 8, Nº 3, pp. 355-358 (1962).

- |5| E. Goldstein et D. Youdine, "Problèmes Particuliers de la Programmation Linéaire", Editions de Moscou (1973).

- |6| G. Cullmann, "Recherche Operationnelle", pp. 176-181.

- |7| Hamdy A. Taha, "Operations Research - An Introduction" , pp. 286-303, Cap. 9.

- |8| J.E. Kelley Jr., "Operation Research", Vol. 7, pp. 327-334 (1959).

- | 9 | James T. Godfrey, W. Allen Spivey and George B. Stillwagon, "Production and Market Planning with Parametric Programming" Operations Research - "House", pp. 124-140.
- | 10 | Leopold B. Willener, "On Parametric Linear Programming", SIAM J. Appl. Math., Vol. 15, No 5, September/1967.
- | 11 | M. Simonnard, "Programacion Lineal", Paraninfo - Madrid/1972.
- | 12 | M. Sakarovitch, "Notes on Linear Programming", Cap. VII, pp. 155-171.
- | 13 | Marcel Courtillot, "On Varying all the Parameters in a Linear Programming Problem and Sequential Solution of a Linear Programming Problem", Operations Research, Vol. 10, pp. 471-475 (1962).
- | 14 | S. Barnett, "A Simple Class of Parametric Linear Programming Problems", Operations Research, Vol. 16, pp. 1160-1165 (1968).
- | 15 | Saul I. Gass, "Programacion Lineal", C.E.C.S.A. - 1972.
- | 16 | Thomas Saaty and Saul Gass, "Parametric Objective Function" (Part I), "J. Opns. Rec. Soc. Am. 2, pp. 316-317 (1954).
- | 17 | Thomas Saaty and Saul Gass, "Parametric Objective Generalization" (Part II) - Journal of the Operation Research Society of

America, Vol. 3, pp. 395-401.

- |18| Thomas Gal and Josef Nedoma, "Multiparametric Linear Programming", Management Science, Vol. 18, Nº 7, pp. 406-423 (1972).

- |19| Thomas Gal, "Rim Multiparametric Linear Programming" , Management Science, Vol. 21, Nº 5, pp. 567-577- Janeiro/1975.

- |20| Thomas Gal, "Betriebliche Entscheidungen und Parametrische Programmierung", Walter de Gruyter Verlag, Berlin and New York, 1973.

- |21| Walter W. Garvin, "Introduction to Linear Programming", Cap. 15, pp. 220-231.