APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES NA INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE E DECONVOLUÇÃO

Plínio Stange

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Arvind Caprihan

Arvind Caprihan
Presidente

Flávio Grynszpan

José Antonio Ortega

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
JUNHO DE 1975

AGRADECIMENTOS

Deixamos aqui registrada nossa gratidão aos colegas e professores da COPPE e do Instituto de Matemática da UFRJ e a todos que de algum modo contribuiram na elaboração deste trabalho.

Em particular, destamos o insigne mestre Ph.D. Arvind Caprihan, pela paciência, dedicação e eficiência com que nos orientou no desenvolvimento de todo o trabalho.

Agradecemos, também, aos funcionários do NCE pelo apoio recebido no processamento dos cálculos para a solução dos exemplos numéricos apresentados.

Finalmente, nosso reconhecimento ao Conselho Nacional de Pesquisas, pela concessão de uma bolsa de estudos.

RESUMO

Apresentamos o problema mal-proposto, a Inversão da Transformada de Laplace e as Deconvoluções como exemplos, cuja solução numérica conduz a um sistema mal-condicionado de equações lineares.

A solução de tais sistemas é obtida pela Decomposição em Valores Singulares (DVS).

Obtém-se assim, uma família de soluções dentre as quais seleciona-se a ótima, segundo critério aqui proposto.

No Apêndice, consta a listagem da programação em linguagem FORTRAN do problema, bem como das subrotinas utilizadas.

ABSTRACT

We present ill-posed problem giving Laplace Transform Inverse and Devonvolutions as examples, which numerical solution conduces to an ill-conditioned linear system.

Such systems' solution, we get by the Singular Value Decomposition (SVD).

Thus, we obtain a family of solutions and have to choose the optimum one by criterion here suggested.

In the Appendix there is a list of FROTRAN programs and sŏubroutines used to solve these problems.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

OBJETIVO

Estudar um método numérico particular para a solução de problemas mal-propostos. Tal método será baseado na Decomposição em Valores Singulares (DVS).

Trataremos especificamente da solução numérica para:

a) Inversão da Transformada de Laplace;

b) Deconvolução.

O problema básico pode ser formulado como:

Determinar h tal que seja uma solução da equação

$$Ah = g \tag{1}$$

onde

A é um operador dado,

g é uma função dada.

Para definirmos problema mal-proposto, definamos inicialmente problema bem-proposto:

"Um problema é bem-proposto quando tem solução única, que depende continuamente de seus dados".

Mais precisamente:

Dada a equação (1), A é um operador cujo domínio é H e cujo contradomínio é G, tais que:

$$H \subset B_1, \ G \subset B_2, \ g \in G, \ h \in H, \quad \text{onde}$$

B_1 e B_2 são espaços de Banach

i) O operador A é inversível, isto é, A leva H em G um-a-um e, se $g \in G$ então, $A^{-1}g \in H$ e $A^{-1}g$ é única;

ii) A^{-1} é limitado ou, equivalentemente, A^{-1} é contínuo, isto é, se

$$g_n \to g \quad \text{então} \quad A^{-1}g_n \to A^{-1}g \tag{2}$$

Por sua vez, um problema é mal-proposto quando não satisfaz a todas essas condições.

Como exemplo temos:

i) Transformada de Laplace:

$$Ah(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} \, h(t)dt = g(s) \tag{3}$$

ii) Integral de Convolução:

$$Ax(s) = \int_0^{t} h(t-s) \, x(s)ds = g(t) \tag{4}$$

<u>Em (3) temos</u>:

H = espaço das funções $h(t)$ seccionalmente contínuas para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial s para $t > N$.

<u>Obs.</u>: Dizemos que $h(t)$ é de ordem exponencial s se existem $M > 0$ e s_o tais que $|h(t)| < Me^{s_o t}$.

Intuitivamente, H é o espaço das funções $h(t)$ tais que a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, h(t)dt \qquad \text{converge.}$$

$B_1 = H$

G = Espaço das funções $g(s)$ onde $Re\ s > s_0$

$B_2 = G$

<u>Em (4) temos</u>:

H = Espaço das funções onde a integral

$$\int_0^{t} h(t-s)x(s)ds \qquad \text{converge,}$$

ou seja,

$$H = L_2[0,\ T]$$

onde T é um intervalo de tempo maior, onde temos interesse

$B_1 = H$

G = Espaço das funções que podem ser expressas sob a forma de uma integral de convolução.

$$G \subset L_2\ [0,\ T]\ , \quad \text{então}$$

$$B_2 = L_2[0,\ T]\ .$$

Para ambos os problemas, (3) e (4), A^{-1} não será contínuo. Isto implica que a solução é única, mas não varia continuamente com os dados.

Como ilustração, tomemos em (3):

$$h(t) = \text{sen}\ nt,\ n \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

Teremos então:

$$A(\text{sen } nt) = \frac{n}{n^2+s^2} \Longrightarrow \text{sen } nt = A^{-1}\left(\frac{n}{n^2+s^2}\right) \tag{6}$$

Mas, como $\dfrac{n}{n^2+s^2}$ é uniformemente limitada por $\dfrac{1}{n}$, $\forall\, s \in \mathbb{R}^+$, teremos

$$\lim_{n\to\infty} A^{-1}\left(\frac{n}{n^2+s^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{7}$$

Por sua vez,

$$\lim_{n\to\infty} \text{sen } nt \neq 0 \tag{8}$$

o que mostra que A^{-1} não é contínuo, caracterizando a inversão da Transformada de Laplace como problema mal-proposto.

Para a equação (4) tomemos:

$$x(s) = \text{sen } ns,\ n \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Teremos:

$$A(\text{sen } ns) = \int_0^t h(t-s)\ \text{sen } ns\ ds = g(t) \tag{10}$$

ou

$$\text{sen } ns = A^{-1}\ g(t) \tag{11}$$

Por outro lado, temos que, para $NT + T = t$

$$\int_0^T h(t-s)\text{sen } ns\ ds = \sum_{i=0}^{N} \int_{iT}^{iT+T} h(t-s)\text{sen } ns\ ds \tag{12}$$

e ainda

$$\sum_{i=0}^{N} h_i^- \int_{iT}^{iT+T} \text{sen } ns\ ds \leq \sum_{i=0}^{N} \int_{iT}^{iT+T} h(t-s)\text{sen } ns\ ds \leq \sum_{i=0}^{N} h_i^+ \int_{iT}^{iT+T} \text{sen } ns\ ds \tag{13}$$

onde

$$h_i^+ = \max_{t \in [iT,\ iT+T]} \{h(t)\} \tag{14}$$

$$h_i^- = \min_{t \in [iT,\ iT+T]} \{h(t)\} \tag{15}$$

Temos ainda que

$$\int_{iT}^{iT+T} \operatorname{sen} ns\, ds = \frac{2 \operatorname{sen}\left(niT + \frac{1}{2} nT\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} nT\right)}{n} \tag{16}$$

então

$$\lim_{n \to \infty} \int_{iT}^{iT+T} \operatorname{sen} ns\, ds = 0 \tag{17}$$

Portanto se $h(t-s)$ for limitada, teremos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{t} h(t-s) \operatorname{sen} ns\, ds = 0 \tag{18}$$

então

$$\lim_{n \to \infty} g(t) = 0 \tag{19}$$

mas

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} ns \neq 0 \tag{20}$$

Caracterizando também a Deconvolução como um problema mal-proposto.

Voltando agora, à equação (1), temos que , na prática , a função g não é conhecida em sua expressão analítica exata e o que temos é uma função $g_\delta(t)$ tal que

$$g_\delta(t) = g(t) + \delta(t) \tag{21}$$

onde $\delta(t)$ é uma perturbação (ruido) devida aos erros nas medi - ções de g, que torna o problema extremamente instável.

Temos, então, um problema do tipo:

Determinar h tal que

$$\| Ah - g_\delta \|_{B_2} = \text{mínimo} \tag{22}$$

onde

$$\| f \|_{B_2} = \left(\int_a^b f.f \, dx \right)^{1/2} \tag{23}$$

Para uma solução numérica, o problema (22) pode ser a- proximado por

$$\| \bar{A}x - b \| = \text{mínimo} \tag{24}$$

onde

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)^{1/2} \tag{25}$$

$\bar{A}$ é uma matriz real $m \times n$,

$x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Denotemos por $\hat{x}$ a solução para (24), isto é,

$$\| \bar{A}\,\hat{x} - b \| \leq \| \bar{A}\,x - b \| \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{26}$$

À primeira vista poderia parecer que

$$\hat{x} = \left(\bar{A}^T \bar{A} \right)^{-1} \bar{A}^T b \tag{27}$$

No entanto, (27) não é uma solução adequada do problema, devido à instabilidade do mesmo, ou seja, $\bar{A}$ é uma matriz mal-condicionada, onde pequenos erros nos dados podem acarretar grandes erros na solução, como veremos adiante.

A solução numérica de sistemas mal-condicionados já foi proposta de diversas maneiras, com maior ou menor sucesso, dependendo da precisão do método.

No presente trabalho, escolhemos o método da Decomposição em Valores Singulares de $\bar{A}$ (DVS), demonstrado em [1] e que consiste em:

Para toda matriz $\bar{A}$ m x n, real, podemos fazer:

$$\bar{A} = UD\,V^T \tag{28}$$

onde

$U = (u_1, \ldots, u_m)$ onde u_i são autovetores normalizados de $\bar{A}\,\bar{A}^T$, sendo U ortogonal

$V = (v_1, \ldots, v_n)$ onde v_i são autovetores normalizados de $\bar{A}^T\,\bar{A}$, sendo V ortogonal.

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \bigcirc \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \sigma_n \\ & & & & \\ & \bigcirc & & & \end{bmatrix}_{m \times n} \tag{29}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}\,,\ \lambda_i = \text{ autovalores de } \bar{A}^T\,\bar{A} \tag{30}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0 \tag{31}$$

$$\bar{A}\,\bar{A}^T u_i = \sigma_i^2\, u_i\,,\ i = 1,\ldots,m \tag{32}$$

$$\overline{A}^T \, \overline{A} \, v_i = \sigma_i^2 \, v_i, \; i = 1,\ldots,n \tag{33}$$

$$\overline{A} \, v_i = \sigma_i \, u_i, \; i = 1,\ldots,n \tag{34}$$

Exemplo de D.V.S.:

Sejam

$$\mathbf{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Fazendo $\overline{A} = U \, D \, V^T$

Teremos:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} + 1/2 & -2/\sqrt{6} + 1/2 \\ -2/\sqrt{6} + 1/2 & 2/\sqrt{6} + 1/2 \\ 2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}\,\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 11/6 & -5/6 & 8/6 \\ -5/6 & 11/6 & -8/6 \\ 8/6 & -8/6 & 8/6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}^T\,\bar{A} = \begin{bmatrix} 2,5 & -1,5 \\ -1,5 & 2,5 \end{bmatrix}$$

É simples verificar que :

i) $\lambda_1 = 2^2 = 4$

$\lambda_2 = 1$

são os autovalores de $\bar{A}^T\,\bar{A}$

ii) $\lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 0$

são os autovalores de $\bar{A}\,\bar{A}^T$

iii) u_1, u_2, u_3 são os autovetores normalizados de $\bar{A}\,\bar{A}^T$

iv) v_1, v_2 são os autovetores normalizados de $\bar{A}^T\,\bar{A}$.

v) (32), (33), (34) são também facilmente verificados.

Por outro lado, temos que:

$$\text{se} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i \tag{35}$$

isto é, decompondo x como combinação linear de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $\{v_i\}$, $i = 1,\ldots,n$, então:

$m \geq n$

$$\bar{A}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \sigma_i \, u_i \tag{36}$$

e

$$b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, u_i \tag{37}$$

onde $\{u_i\}$ $i = 1,\ldots,m$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Assim,

$$\|\bar{A}x - b\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \sigma_i \, u_i - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, u_i\|^2 \tag{38}$$

$$= \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \sigma_i \, u_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, u_i\|^2 - \|\sum_{i=n+1}^{m} \beta_i \, u_i\|^2 \tag{39}$$

$$\geq \|\sum_{i=n+1}^{m} \beta_i \, u_i\|^2 \tag{40}$$

verificando-se a igualdade se e somente se

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i} \tag{41}$$

Portanto, temos

$$\|\bar{A}\hat{x} - b\| = \text{mínimo}$$

quando

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\sigma_i} v_i \tag{42}$$

Podemos, ainda, escrever:

$$\hat{x} = \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\frac{\sigma_i}{\sigma_1}} v_i \right) \tag{43}$$

Portanto, de (31) e sabendo-se que $\bar{A}$ é mal-condicionada, σ_i são muito pequenos, sendo que

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} \text{ decresce quando i cresce.} \tag{44}$$

Logo, um pequeno erro em σ_i acarreta grandes erros em $\hat{x}$.

Temos, ainda, que a determinação de $\{\sigma_i\}$, $i=1,\ldots,n$ diretamente, a partir da definição, envolve grandes erros de arredondamento por parte do computador utilizado, como vemos no exemplo abaixo:

Seja

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Então

$$\bar{A}^T \bar{A} = \begin{bmatrix} 1+\beta^2 & 1 \\ 1 & 1+\beta^2 \end{bmatrix}$$

Logo, $\sigma_1(\bar{A}) = (2+\beta^2)^{1/2}$

$\sigma_2(\bar{A}) = |\beta|$

Se, por acaso, $\beta^2 < \varepsilon_o$ = precisão do computador, temos:

$$\bar{A}^T \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$\sigma_1(\bar{A}) = \sqrt{2}$

$\sigma_2(\bar{A}) = 0$

Surge, portanto, a necessidade de encontrarmos algum mé todo mais eficiente para determinar a D.V.S. de $\bar{A}$, do ponto de vista da minimização do erro de arredondamento introduzido pelo computador.

O método que utilizamos figura em [1] desde sua fundamentação teórica até a apresentação da subrotina SVDRS em linguagem FORTRAN IV, apresentada no Apêndice deste trabalho.

Como vimos em (42), (43) e (44), quanto menores $\sigma_i, i=1,\ldots,n$, maior erro acarretarão à solução x do sistema

$$Ax = b.$$

Teremos então que, anulando os menores valores singulares teremos soluções melhores que conservando-os todos. Resta-nos pois, saber quantos serão os valores singulares anulados e consequentemente, quantos serão considerados não nulos na determinação da solução ótima $\hat{x}$.

Designando por k_o o número de valores singulares considerados não nulos, teremos $x^{(k)}$ a solução obtida com k valores singulares não nulos. Vimos que $\hat{x}$ varia de um exemplo testado a outro, onde $\hat{x}$ foi a $x^{(k)}$ a que apresentou o menor erro relativo calculado por

$$E_k = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{x}_i^{(k)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^2} \right)^{1/2}$$

CAPÍTULO II

INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

Como vimos em (3), dada $f(t)$, sua Transformada de Laplace será:

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{45}$$

Suponhamos agora, dada $g(s)$ ou por sua expressão analítica ou por seus respectivos valores em determinados pontos de seu domínio, e precisamos determinar $f(t)$.

Temos, então, uma equação integral de 1ª espécie, já caracterizada como problema mal-proposto.

Para discretizar (45), lembremos que [3]:

$$\int_a^b y(x)dx = \int_a^b w(x)\; f(x)\; dx \approx \sum_{j=1}^{n} H_j f(a_j) \tag{46}$$

onde $w(x)$ é a <u>função peso</u>, que garante a convergência da integral de $w(x)\ f(x)$ quando $f(x)$ é um polinômio de grau arbitrário.

Para o intervalo de integração (o, ∞) a função $w(x)$ mais adequada será:

$$w(x) = e^{-x} \tag{47}$$

Para $f(x)$, devemos ter uma sequência de polinômios ortogonais a e^{-x} sobre (o, ∞). Tais polinômios são os polinômios de Laguerre de grau n, que têm a forma:

$$L_n(x) = \sum_{m=o}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n}{m} x^m \tag{48}$$

Em nosso caso como o núcleo da equação integral é justamente e^{-st}, a quadratura de Gauss-Laguerre surge naturalmente como a mais indicada para a discretização da equação.

Teremos então:

$$\int_o^\infty e^{-t}\, h(t)\, dt \simeq \sum_{k=1}^{n} w_k\, h(t_k) \tag{49}$$

e para qualquer conjunto $\{s_i\}$, temos

$$g(s_i) = \int_o^\infty e^{-s_i t} f(t) dt \simeq \sum_{i,k=1}^{n} w_k e^{t_k(1-s_i)} f(t_k)$$

onde

$\{t_k\}$, $k=1,\ldots,n$ são as raízes do polinômio de Laguerre de grau n e

$\{w_k\}$, $k = 1,\ldots,n$ são os pesos.

Em linguagem matricial, teríamos:

$$Af = g \tag{50}$$

com

$$a_{ik} = w_k\, e^{t_k(1-s_i)} \tag{51}$$

$$g_i = g(s_i) \tag{52}$$

Resolvendo (50) obtemos os valores de f em $\{t_k\}$, $k = 1,\dots,n$.

A partir desses valores, podemos obter valores intermediários por interpolação.

Por outro lado, as raízes $\{t_k\}$, $k = 1,\dots,n$ do polinômio de Laguerre e os respectivos pesos $\{w_k\}$, $k = 1,\dots,n$ podem ser obtidos a partir da matriz

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \bigcirc \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ \bigcirc & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{53}$$

onde

$$\alpha_i = 2i - 1 \tag{54}$$

$$\beta_i = -i \tag{55}$$

Demonstra-se que as raízes $\{t_k\}$, $k=1,\dots,n$ serão os autovalores de T e para os pesos $\{w_k\}$, $k = 1,\dots,n$, teremos:

$$w_k = \left(q_1^{(k)}\right)^2 \tag{56}$$

onde $q^{(k)}$ são os autovetores normalizados de T. Para os valores $\{s_i\}$ $i = 1,\dots,n$ J.N. Varah [3] sugere 20 pontos equidistantes em $(0,s_{max})$ onde $g(s_{max}) \ll g_{max}(s)$ e tomamos $s_{max} = 5$, ou ou seja

$$s_i = \frac{i}{4},\ i = 1,\dots,20. \tag{57}$$

No presente trabalho utilizamos $n = 20$, de forma que

Obtivemos:

t_1	= 0,0705	w_1	= $0,5745.10^{-23}$
t_2	= 0,3721	w_2	= $0,2933.10^{-23}$
t_3	= 0,9166	w_3	= $0,1567.10^{-19}$
t_4	= 1,7073	w_4	= $0,1155.10^{-16}$
t_5	= 2,7492	w_5	= $0,3373.10^{-14}$
t_6	= 4,0489	w_6	= $0,4768.10^{-12}$
t_7	= 5,6152	w_7	= $0,3725.10^{-10}$
t_8	= 7,4590	w_8	= $0,1758.10^{-08}$
t_9	= 9,5944	w_9	= $0,5330.10^{-07}$
t_{10}	= 12,0388	w_{10}	= $0,1086.10^{-05}$
t_{11}	= 14,8143	w_{11}	= $0,1540.10^{-04}$
t_{12}	= 17,9489	w_{12}	= $0,1557.10^{-03}$
t_{13}	= 21,4788	w_{13}	= $0,1150.10^{-02}$
t_{14}	= 25,4517	w_{14}	= $0,6203.10^{-02}$
t_{15}	= 29,9325	w_{15}	= $0,2496.10^{-01}$
t_{16}	= 35,0134	w_{16}	= $0,7483.10^{-01}$
t_{17}	= 40,8330	w_{17}	= 0,1660
t_{18}	= 47,6200	w_{18}	= 0,2667
t_{19}	= 55,8108	w_{19}	= 0,2913
t_{20}	= 66,5244	w_{20}	= 0,1687

Como os resultados obtidos só foram satisfatórios, em média, para os 10 primeiros pontos, tomamos os 10 primeiros valores de f interpolando-os para 30 pontos equidistantes entre t_1 e t_{10}, segundo o método "Spline".

Os resultados obtidos após a interpolação constam das Tabelas 1 a 4.a, onde R é o ruido imposto à função g(s).

TABELA 1

$f(t) = t\ e^{-t}$

$g(s) = 1/(s+1)^2$

$\bar{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0,5$

R=0

$s_i = \frac{5}{20} i = \frac{i}{4}$, i=1,...,20

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10} - t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos.

Valor Exato	Valores Calculados		
f(t)	k=1 f(t)	k=7(ótimo) f(t)	k=20 f(t)
$0,6573.10^{-1}$	0,1540	$0,6558.10^{-1}$	$0,6522.10^{-1}$
0,2991	0,2697	0,2993	0,3147
0,3658	0,2633	0,3654	0,3714
0,3540	0,2448	0,3539	$0,7978.10^{-1}$
0,3078	0,2318	0,3084	0,3577
0,2532	0,2163	0,2537	$0,1659.10^{1}$
0,1999	0,1989	0,1997	$0,1577.10^{1}$
0,1532	0,1824	0,1527	$-0,2696.10^{1}$
0,1156	0,1679	0,1151	$-0,8442.10^{1}$
$0,8599.10^{-1}$	0,1549	$0,8576.10^{-1}$	$-0,7555.10^{1}$
$0,6305.10^{-1}$	0,1429	$0,6313.10^{-1}$	$0,8040.10^{1}$
$0,4572.10^{-1}$	0,1317	$0,4598.10^{-1}$	$0,3408.10^{2}$
$0,3293.10^{-1}$	0,1211	$0,3328.10^{-1}$	$0,4841.10^{2}$
$0,2365.10^{-1}$	0,1114	$0,2400.10^{-1}$	$0,2749.10^{2}$
$0,1686.10^{-1}$	0,1024	$0,1717.10^{-1}$	$-0,4955.10^{2}$
$0,1188.10^{-1}$	$0,9419.10^{-1}$	$0,1211.10^{-1}$	$-0,1579.10^{3}$
$0,8349.10^{-2}$	$0,8664.10^{-1}$	$0,8491.10^{-2}$	$-0,2345.10^{3}$
$0,5892.10^{-2}$	$0,7970.10^{-1}$	$0,5939.10^{-2}$	$-0,2147.10^{3}$
$0,4150.10^{-2}$	$0,7331.10^{-1}$	$0,4113.10^{-2}$	$-0,3410.10^{2}$
$0,2831.10^{-2}$	$0,6740.10^{-1}$	$0,2731.10^{-2}$	$0,3276.10^{3}$
$0,1858.10^{-2}$	$0,6194.10^{-1}$	$0,1717.10^{-2}$	$0,7590.10^{3}$
$0,1196.10^{-2}$	$0,5691.10^{-1}$	$0,1029.10^{-2}$	$0,1123.10^{4}$
$0,8081.10^{-3}$	$0,5228.10^{-1}$	$0,6281.10^{-3}$	$0,1285.10^{4}$
$0,6563.10^{-3}$	$0,4803.10^{-1}$	$0,4725.10^{-3}$	$0,1108.10^{4}$
$0,6950.10^{-3}$	$0,4413.10^{-1}$	$0,5133.10^{-3}$	$0,4619.10^{3}$
$0,8280.10^{-3}$	$0,4056.10^{-1}$	$0,6541.10^{-3}$	$-0,7535.10^{3}$
$0,9438.10^{-3}$	$0,3726.10^{-1}$	$0,7836.10^{-3}$	$-0,2628.10^{4}$
$0,9307.10^{-3}$	$0,3421.10^{-1}$	$0,7907.10^{-3}$	$-0,5252.10^{4}$
$0,6770.10^{-3}$	$0,3181.10^{-1}$	$0,5642.10^{-3}$	$-0,8715.10^{4}$
$0,7115.10^{-4}$	$0,2872.10^{-1}$	$-0,7085.10^{-5}$	$-0,1310.10^{5}$
Erro Relativo	0,2146	$0,3644.10^{-5}$	$0,4766.10^{9}$
$\Vert\bar{A}x - b\Vert$	0,8294	0,8529	0,8529
Oscilação	0,0151	0,0357	$0,3349.10^{7}$

TABELA 1.a

$f(t) = t\,e^{-t}$

$g(s) = 1(1+s)^2$

$\bar{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0{,}5$

$s_i = \frac{5}{20} = \frac{i}{4}$, $i=1,\ldots,20$

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos.

Valor Exato	Valores Ótimos calculados		
f(t)	R=0 k=7	R=0,001 k=6	R=0,01 k=5
$0{,}6573.10^{-1}$	$0{,}6558.10^{-1}$	$0{,}6500.10^{-1}$	$0{,}6928.10^{-1}$
0,2991	0,2993	0,3002	0,2944
0,3658	0,3654	0,3631	0,3677
0,3540	0,3539	0,3523	0,3565
0,3078	0,3084	0,3097	0,3072
0,2532	0,2537	0,2566	0,2532
0,1999	0,1997	0,2027	0,2029
0,1532	0,1527	0,1549	0,1591
0,1156	0,1151	0,1161	0,1227
$0{,}8599.10^{-1}$	$0{,}8576.10^{-1}$	$0{,}8536.10^{-1}$	$0{,}9299.10^{-1}$
$0{,}6305.10^{-1}$	$0{,}6313.10^{-1}$	$0{,}6157.10^{-1}$	$0{,}6896.10^{-1}$
$0{,}4572.10^{-1}$	$0{,}4598.10^{-1}$	$0{,}4368.10^{-1}$	$0{,}4986.10^{-1}$
$0{,}3293.10^{-1}$	$0{,}3328.10^{-1}$	$0{,}3058.10^{-1}$	$0{,}3487.10^{-1}$
$0{,}2365.10^{-1}$	$0{,}2400.10^{-1}$	$0{,}2120.10^{-1}$	$0{,}2321.10^{-1}$
$0{,}1686.10^{-1}$	$0{,}1717.10^{-1}$	$0{,}1447.10^{-1}$	$0{,}1410.10^{-1}$
$0{,}1188.10^{-1}$	$0{,}1211.10^{-1}$	$0{,}9699.10^{-2}$	$0{,}7012.10^{-2}$
$0{,}8349.10^{-2}$	$0{,}8491.10^{-2}$	$0{,}6455.10^{-2}$	$0{,}1604.10^{-2}$
$0{,}5892.10^{-2}$	$0{,}5939.10^{-2}$	$0{,}4346.10^{-2}$	$-0{,}2448.10^{-2}$
$0{,}4150.10^{-2}$	$0{,}4113.10^{-2}$	$0{,}2972.10^{-2}$	$-0{,}5473.10^{-2}$
$0{,}2831.10^{-2}$	$0{,}2731.10^{-2}$	$0{,}2012.10^{-2}$	$-0{,}7742.10^{-2}$
$0{,}1858.10^{-2}$	$0{,}1717.10^{-2}$	$0{,}1382.10^{-2}$	$-0{,}9363.10^{-2}$
$0{,}1196.10^{-2}$	$0{,}1029.10^{-2}$	$0{,}1044.10^{-2}$	$-0{,}1041.10^{-1}$
$0{,}8081.10^{-3}$	$0{,}6281.10^{-3}$	$0{,}9584.10^{-3}$	$-0{,}1097.10^{-1}$
$0{,}6563.10^{-3}$	$0{,}4725.10^{-3}$	$0{,}1086.10^{-2}$	$-0{,}1111.10^{-1}$
$0{,}6950.10^{-3}$	$0{,}5133.10^{-3}$	$0{,}1378.10^{-2}$	$-0{,}1092.10^{-1}$
$0{,}8280.10^{-3}$	$0{,}6541.10^{-3}$	$0{,}1729.10^{-2}$	$-0{,}1052.10^{-1}$
$0{,}9438.10^{-3}$	$0{,}7836.10^{-3}$	$0{,}2018.10^{-2}$	$-0{,}1054.10^{-1}$
$0{,}9307.10^{-3}$	$0{,}7907.10^{-3}$	$0{,}2122.10^{-2}$	$-0{,}9643.10^{-2}$
$0{,}6770.10^{-3}$	$0{,}5642.10^{-3}$	$0{,}1919.10^{-2}$	$-0{,}9428.10^{-2}$
$0{,}7115.10^{-4}$	$-0{,}7085.10^{-5}$	$0{,}1288.10^{-2}$	$-0{,}9542.10^{-2}$
Erro Relativo	$0{,}3644.10^{-5}$	$0{,}1349.10^{-3}$	$0{,}3020.10^{-2}$
Oscilação	0,0357	0,0365	0,0319

TABELA 2

$f(t) = t$

$g(s) = 1/s^2$

$\bar{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0,5$

R=0

$s_i = \frac{5}{20}i = \frac{i}{4}, \ i=1,\dots,20$

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos

Valor Exato	Valores Calculados		
f(t)	k=1 f(t)	k=11(ótimo) f(t)	k=20 f(t)
$0,7053.10^{-1}$	$0,2310.10^{1}$	$0,7048.10^{-1}$	$0,7045.10^{-1}$
0,4832	$0,4047.10^{1}$	0,4832	0,4891
0,8959	$0,3951.10^{1}$	0,8954	0,8989
$0,1308.10^{1}$	$0,3673.10^{1}$	$0,1310.10^{1}$	$0,1202.10^{1}$
$0,1721.10^{1}$	$0,3478.10^{1}$	$0,1722.10^{1}$	$0,1736.10^{1}$
$0,2134.10^{1}$	$0,3245.10^{1}$	$0,2129.10^{1}$	$0,2668.10^{1}$
$0,2546.10^{1}$	$0,2984.10^{1}$	$0,2538.10^{1}$	$0,3080.10^{1}$
$0,2959.10^{1}$	$0,2737.10^{1}$	$0,2961.10^{1}$	$0,1903.10^{1}$
$0,3372.10^{1}$	$0,2519.10^{1}$	$0,3393.10^{1}$	0,1485
$0,3784.10^{1}$	$0,2324.10^{1}$	$0,3816.10^{1}$	0,8561
$0,4197.10^{1}$	$0,2145.10^{1}$	$0,4208.10^{1}$	$0,7058.10^{1}$
$0,4610.10^{1}$	$0,1976.10^{1}$	$0,4572.10^{1}$	$0,1720.10^{2}$
$0,5022.10^{1}$	$0,1818.10^{1}$	$0,4938.10^{1}$	$0,2310.10^{2}$
$0,5435.10^{1}$	$0,1671.10^{1}$	$0,5336.10^{1}$	$0,1608.10^{2}$
$0,5848.10^{1}$	$0,1536.10^{1}$	$0,5798.10^{1}$	$-0,1159.10^{2}$
$0,6261.10^{1}$	$0,1413.10^{1}$	$0,6314.10^{1}$	$-0,5102.10^{2}$
$0,6673.10^{1}$	$0,1299.10^{1}$	$0,6843.10^{1}$	$-0,7929.10^{2}$
$0,7086.10^{1}$	$0,1195.10^{1}$	$0,7342.10^{1}$	$-0,7292.10^{2}$
$0,7499.10^{1}$	$0,1099.10^{1}$	$0,7767.10^{1}$	$-0,8643.10^{1}$
$0,7911.10^{1}$	$0,1011.10^{1}$	$0,8094.10^{1}$	$0,1212.10^{3}$
$0,8324.10^{1}$	0,9293	$0,8346.10^{1}$	$0,2770.10^{3}$
$0,8737.10^{1}$	0,8538	$0,8558.10^{1}$	$0,4104.10^{3}$
$0,9149.10^{1}$	0,7844	$0,8763.10^{1}$	$0,4730.10^{3}$
$0,9562.10^{1}$	0,7206	$0,8996.10^{1}$	$0,4164.10^{3}$
$0,9975.10^{1}$	0,6621	$0,9288.10^{1}$	$0,1943.10^{3}$
$0,1038.10^{2}$	0,6085	$0,9658.10^{1}$	$-0,2284.10^{3}$
$0,1080.10^{2}$	0,5590	$0,1012.10^{2}$	$-0,8839.10^{3}$
$0,1121.10^{2}$	0,5133	$0,1070.10^{2}$	$-0,1804.10^{4}$
$0,1162.10^{2}$	0,4708	$0,1140.10^{2}$	$-0,3020.10^{4}$
$0,1203.10^{2}$	0,4309	$0,1225.10^{2}$	$-0,4565.10^{4}$
Erro Relativo	0,8066	$0,1716.10^{-2}$	$0,2360.10^{5}$
$\lVert\bar{A}x - b\rVert$	$0,1592.10^{2}$	$0,1658.10^{2}$	$0,1658.10^{2}$
Oscilações	3,4025	0,1030	$0,4179.10^{6}$

TABELA 2.a

$f(t) = t$

$g(s) = 1/s^2$

$\bar{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0,5$

$R=0$

$s_i = \frac{5}{20} i = \frac{i}{4}$, $i = 1,\dots,20$

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos.

Valor Exato	Valores Ótimos Calculados		
f(t)	R=0 k=11	R=0,001 k=9	R=0,01 k=5
$0,7053.10^{-1}$	$0,7048.10^{-1}$	$0,6368.10^{-1}$	$0,1432.10^{1}$
0,4832	0,4832	0,4834	$-0,1560.10^{1}$
0,8959	0,8954	0,8351	$0,3821.10^{1}$
$0,1308.10^{1}$	$0,1310.10^{1}$	$0,1414.10^{1}$	$0,4321.10^{1}$
$0,1721.10^{1}$	$0,1722.10^{1}$	$0,1910.10^{1}$	$0,1229.10^{1}$
$0,2134.10^{1}$	$0,2129.10^{1}$	$0,2007.10^{1}$	-0,8376
$0,2546.10^{1}$	$0,2538.10^{1}$	$0,2044.10^{1}$	$-0,1352.10^{1}$
$0,2959.10^{1}$	$0,2961.10^{1}$	$0,2490.10^{1}$	-0,7099
$0,3372.10^{1}$	$0,3393.10^{1}$	$0,3407.10^{1}$	0,7231
$0,3784.10^{1}$	$0,3816.10^{1}$	$0,4465.10^{1}$	$0,2609.10^{1}$
$0,4197.10^{1}$	$0,4208.10^{1}$	$0,5318.10^{1}$	$0,4615.10^{1}$
$0,4610.10^{1}$	$0,4572.10^{1}$	$0,5778.10^{1}$	$0,6513.10^{1}$
$0,5022.10^{1}$	$0,4938.10^{1}$	$0,5881.10^{1}$	$0,8229.10^{1}$
$0,5435.10^{1}$	$0,5336.10^{1}$	$0,5685.10^{1}$	$0,9702.10^{1}$
$0,5848.10^{1}$	$0,5798.10^{1}$	$0,5247.10^{1}$	$0,1087.10^{2}$
$0,6261.10^{1}$	$0,6314.10^{1}$	$0,4701.10^{1}$	$0,1173.10^{2}$
$0,6673.10^{1}$	$0,6843.10^{1}$	$0,4237.10^{1}$	$0,1232.10^{2}$
$0,7086.10^{1}$	$0,7342.10^{1}$	$0,4051.10^{1}$	$0,1267.10^{2}$
$0,7499.10^{1}$	$0,7767.10^{1}$	$0,4337.10^{1}$	$0,1282.10^{2}$
$0,7911.10^{1}$	$0,8094.10^{1}$	$0,5212.10^{1}$	$0,1281.10^{2}$
$0,8324.10^{1}$	$0,8346.10^{1}$	$0,6566.10^{1}$	$0,1265.10^{2}$
$0,8737.10^{1}$	$0,8558.10^{1}$	$0,8247.10^{1}$	$0,1237.10^{2}$
$0,9149.10^{1}$	$0,8763.10^{1}$	$0,1010.10^{2}$	$0,1198.10^{2}$
$0,9562.10^{1}$	$0,8996.10^{1}$	$0,1197.10^{2}$	$0,1151.10^{2}$
$0,9975.10^{1}$	$0,9288.10^{1}$	$0,1373.10^{2}$	$0,1099.10^{2}$
$0,1038.10^{2}$	$0,9658.10^{1}$	$0,1527.10^{2}$	$0,1042.10^{2}$
$0,1080.10^{2}$	$0,1012.10^{2}$	$0,1653.10^{2}$	$0,9850.10^{1}$
$0,1121.10^{2}$	$0,1070.10^{2}$	$0,1744.10^{2}$	$0,9287.10^{1}$
$0,1162.10^{2}$	$0,1140.10^{2}$	$0,1791.10^{2}$	$0,8761.10^{1}$
$0,1203.10^{2}$	$0,1225.10^{2}$	$0,1788.10^{2}$	$0,8296.10^{1}$
Erro Relativo	$0,1716.10^{-2}$	0,1572	0,2325
Oscilações	0,1030	2,8461	$0,1131.10^{3}$

TABELA 3

$f(t) = t$

$g(1) = 1/s^2$

$\overline{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0,5$

$R=0$

$s_i = \frac{5}{20} = \frac{i}{4}, \; i=1,\ldots,20$

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos

Valor Exato	Valores Calculados		
f(t)	k=1 f(t)	k=10 (otimo) f(t)	k=20 f(t)
$0,1000.10^1$	$0,8122$	$0,1011.10^1$	$0,1000.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1422.10^1$	$0,9999$	$0,9972$
$0,1000.10^1$	$0,1388.10^1$	$0,1000.10^1$	$0,9985$
$0,1000.10^1$	$0,1291.10^1$	$0,1000.10^1$	$0,1048.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1222.10^1$	$0,9998$	$0,0032$
$0,1000.10^1$	$0,1140.10^1$	$0,9996$	$0,7541$
$0,1000.10^1$	$0,1049.10^1$	$0,9998$	$0,7534$
$0,1000.10^1$	$0,9620$	$0,1000.10^1$	$0,1482.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,8855$	$0,1002.10^1$	$0,2479.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,8170$	$0,1001.10^1$	$0,2350.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,7539$	$0,9992$	$-0,2943$
$0,1000.10^1$	$0,6945$	$0,9941$	$-0,4748.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,6390$	$0,9901$	$-0,7281.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,5875$	$0,9904$	$-0,3927.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,5401$	$0,9983$	$0,8842.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,4966$	$0,1012.10^1$	$0,2699.10^2$
$0,1000.10^1$	$0,4568$	$0,1026.10^1$	$0,4012.10^2$
$0,1000.10^1$	$0,4220$	$0,1035.10^1$	$0,3760.10^2$
$0,1000.10^1$	$0,3865$	$0,1033.10^1$	$0,8847.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,3554$	$0,1017.10^1$	$-0,4964.10^2$
$0,1000.10^1$	$0,3266$	$0,9904$	$-0,1200.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,3001$	$0,9593$	$-0,1804.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,2757$	$0,9290$	$-0,2092.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,2533$	$0,9503$	$-0,1843.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,2327$	$0,8933$	$-0,8507.10^2$
$0,1000.10^1$	$0,2138$	$0,8966$	$0,1045.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,1965$	$0,9180$	$0,3988.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,1804$	$0,9606$	$0,8123.10^3$
$0,1000.10^1$	$0,1654$	$0,1027.10^1$	$0,1359.10^4$
$0,1000.10^1$	$0,1514$	$0,1121.10^1$	$0,2053.10^4$
Erro Relativo	$0,2959$	$0,2173.10^{-2}$	$0,2342.10^6$
$\|\overline{A}x - b\|$	$4,4651$	$4,4784$	$4,4784$
Oscilação	$0,4203$	$0,3114.10^{-2}$	$0,8465.10^5$

TABELA 3.a

$f(t) = 1$

$g(s) = 1/s$

$\bar{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0,5$
$R=0$

$s_i = \frac{5}{20}i = \frac{i}{4}$, $i = 1,\ldots,20$

$f_i = g(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos.

Valor Exato	Valores Ótimos Calculados		
f(t)	R=0 k=10	R=0,001 k=8	R=0,01 k=5
$0,1000.10^1$	$0,1000.10^1$	$0,1007.10^1$	$0,1076.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9999	0,9933	0,8868
$0,1000.10^1$	$0,1000.10^1$	$0,1046.10^1$	$0,1126.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1000.10^1$	0,9690	$0,1155.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9998	0,8904	$0,1009.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9996	0,9701	0,8830
$0,1000.10^1$	0,9998	$0,1116.10^1$	0,8169
$0,1000.10^1$	$0,1000.10^1$	$0,1184.10^1$	0,8139
$0,1000.10^1$	$0,1002.10^1$	$0,1133.10^1$	0,8639
$0,1000.10^1$	$0,1001.10^1$	$0,1020.10^1$	0,9441
$0,1000.10^1$	0,9992	0,9084	$0,1031.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9941	0,8330	$0,1110.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9901	0,7949	$0,1176.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9904	0,7918	$0,1228.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9983	0,8208	$0,1263.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1012.10^1$	0,8755	$0,1280.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1026.10^1$	0,9463	$0,1281.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1035.10^1$	$0,1023.10^1$	$0,1270.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1033.10^1$	$0,1096.10^1$	$0,1247.10^1$
$0,1000.10^1$	$0,1017.10^1$	$0,1159.10^1$	$0,1216.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9904	$0,1209.10^1$	$0,1177.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9593	$0,1249.10^1$	$0,1131.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9290	$0,1277.10^1$	$0,1081.10^1$
$0,1000.10^1$	0,9053	$0,1296.10^1$	$0,1027.10^1$
$0,1000.10^1$	0,8933	$0,1305.10^1$	0,9717
$0,1000.10^1$	0,8966	$0,1303.10^1$	0,9148
$0,1000.10^1$	0,9180	$0,1288.10^1$	0,8586
$0,1000.10^1$	0,9606	$0,1258.10^1$	0,8047
$0,1000.10^1$	$0,1027.10^1$	$0,1211.10^1$	0,7545
$0,1000.10^1$	$0,1121.10^1$	$0,1147.10^1$	0,7095
Erro Relativo	$0,2174.10^{-2}$	$0,3206.10^{-1}$	$0,3116.10^{-1}$
Oscilação	$0,3114.10^{-2}$	$0,8297.10^{-1}$	0,2733

TABELA 4

$f(t) = (\text{sen } 2t)/2$

$g(s) = 1/s^2+2^2)$

$\overline{g}(s_i) = (s_i)(1+r_iR)$

$|r_i| \leq 0,5$

$R=0$

$s_i = \frac{5}{20} = \frac{i}{4}, \ i=1,\dots,20$

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos.

Valor Exato	Valores Calculados		
f(t)	k=1	k=11(ótimo)	k=20
$0,7030.10^{-1}$	$0,8793.10^{-1}$	$0,7040.10^{-1}$	$0,7051.10^{-1}$
0,4082	0,1540	0,4082	0,4112
0,4881	0,1503	0,4890	0,4922
0,2380	0,1397	0,2284	0,1731
-0,1462	0,1323	-0,1488	-0,1504
-0,3863	0,1234	-0,3801	-0,1214
-0,4202	0,1135	-0,4076	-0,1164
-0,2258	0,1041	-0,2238	-0,6399
0,1126	$0,9586.10^{-1}$	$0,9056.10^{-1}$	$-0,1365.10^{1}$
0,4077	$0,8845.10^{-1}$	0,3689	$-0,1156.10^{1}$
0,4703	$0,8162.10^{-1}$	0,4434	$0,1124.10^{1}$
0,2510	$0,7519.10^{-1}$	0,2675	$0,4990.10^{1}$
$-0,9741.10^{-1}$	$0,6918.10^{-1}$	$-0,3044.10^{-1}$	$0,7606.10^{1}$
-0,4066	$0,6360.10^{-1}$	-0,3085	$0,5954.10^{1}$
-0,5161	$0,5847.10^{-1}$	-0,4310	$-0,2701.10^{1}$
-0,4013	$0,5377.10^{-1}$	-0,3723	$-0,1624.10^{2}$
-0,1524	$0,4946.10^{-1}$	-0,1999	$-0,2845.10^{2}$
0,1370	$0,4550.10^{-1}$	$0,1621.10^{-1}$	$-0,3300.10^{2}$
0,3731	$0,4185.10^{-1}$	0,2058	$-0,2355.10^{2}$
0,4892	$0,3847.10^{-1}$	0,3177	$0,3104.10^{1}$
0,4989	$0,3536.10^{-1}$	0,3581	$0,4070.10^{2}$
0,4309	$0,3249.10^{-1}$	0,3437	$0,8125.10^{2}$
0,3140	$0,2984.10^{-1}$	0,2911	$0,1167.10^{3}$
0,1769	$0,2742.10^{-1}$	0,2171	$0,1391.10^{3}$
$0,4466.10^{-1}$	$0,2519.10^{-1}$	0,1358	$0,1409.10^{3}$
$-0,7632.10^{-1}$	$0,2315.10^{-1}$	$0,4812.10^{-1}$	$0,1166.10^{3}$
-0,1854	$0,2127.10^{-1}$	$-0,4920.10^{-1}$	$0,6160.10^{2}$
-0,2819	$0,1953.10^{-1}$	-0,1593	$-0,2890.10^{2}$
-0,3653	$0,1791.10^{-1}$	-0,2856	$-0,1596.10^{3}$
-0,4349	$0,1639.10^{-1}$	-0,4312	$-0,3351.10^{3}$
Erro Relativo	0,9899	0,0575	$0,6536.10^{5}$
$\|\overline{A}x - b\|$	0,4795	0,4298	0,4220
Oscilação	$0,4927.10^{-2}$	0,5313	$0,7918.10^{4}$

TABELA 4.a

$f(t) = (\text{sen } 2t)/2$

$g(s) = s(s^2+2^2)$

$\bar{g}(s_i) = g(s_i)(1+r_i R)$

$|r_i| \leq 0{,}5$

R=0

$s_i = \frac{5}{20}i = \frac{i}{4}$, $i = 1,\ldots,20$

$f_i = f(i\Delta T)$

$\Delta T = (t_{10}-t_1)/30$

k = nº de valores singulares não nulos.

Valor Exato	Valores Ótimos Calculados		
f(t)	R=0 k=11	R=0,001 k=7	R=0,01 k=7
$0{,}7030.10^{-1}$	$0{,}7040.10^{-1}$	$0{,}7557.10^{-1}$	$0{,}7687.10^{-1}$
0,4082	0,4082	0,4054	0,4054
0,4881	0,4890	0,5253	0,5337
0,2308	0,2284	0,1842	0,1692
-0,1462	-0,1488	-0,2451	-0,2785
-0,3863	-0,3801	-0,3419	-0,3474
-0,4202	-0,4076	-0,2057	-0,1645
-0,2258	-0,2238	$-0{,}4819.10^{-1}$	$0{,}1686.10^{-1}$
0,1126	$0{,}9056.10^{-1}$	$0{,}3666.10^{-1}$	$0{,}9023.10^{-1}$
0,4077	0,3689	$0{,}6907.10^{-1}$	$0{,}9210.10^{-1}$
0,4703	0,4434	$0{,}7391.10^{-1}$	$0{,}6469.10^{-1}$
0,2510	0,2675	$0{,}6770.10^{-1}$	$0{,}3467.10^{-1}$
$-0{,}9741.10^{-1}$	$-0{,}3044.10^{-1}$	$0{,}5487.10^{-1}$	$0{,}6328.10^{-2}$
-0,4066	-0,3085	$0{,}3888.10^{-1}$	$-0{,}1782.10^{-1}$
-0,5161	-0,4310	$0{,}2311.10^{-1}$	$-0{,}3537.10^{-1}$
-0,4013	-0,3723	$0{,}9272.10^{-2}$	$-0{,}4579.10^{-1}$
-0,1524	-0,1999	$-0{,}2342.10^{-2}$	$-0{,}5018.10^{-1}$
0,1370	$0{,}1621.10^{-1}$	$-0{,}1148.10^{-1}$	$-0{,}4969.10^{-1}$
0,3731	0,2058	$-0{,}1790.10^{-1}$	$-0{,}4545.10^{-1}$
0,4892	0,3177	$-0{,}2150.10^{-1}$	$-0{,}3848.10^{-1}$
0,4989	0,3581	$-0{,}2272.10^{-1}$	$-0{,}2947.10^{-1}$
0,4309	0,3437	$-0{,}2205.10^{-1}$	$-0{,}1904.10^{-1}$
0,3140	0,2911	$-0{,}2000.10^{-1}$	$-0{,}7797.10^{-2}$
0,1769	0,2171	$-0{,}1709.10^{-1}$	$0{,}3643.10^{-2}$
$0{,}4466.10^{-1}$	0,1358	$-0{,}1379.10^{-1}$	$0{,}1465.10^{-1}$
$-0{,}7632.10^{-1}$	$0{,}4812.10^{-1}$	$-0{,}1049.10^{-1}$	$0{,}2451.10^{-1}$
-0,1854	$-0{,}4920.10^{-1}$	$-0{,}7503.10^{-2}$	$0{,}3248.10^{-1}$
-0,2819	-0,1593	$-0{,}5172.10^{-2}$	$0{,}3785.10^{-1}$
-0,3653	-0,2856	$-0{,}3832.10^{-2}$	$0{,}3985.10^{-1}$
-0,4349	-0,4312	$-0{,}3816.10^{-2}$	$0{,}3777.10^{-1}$
Erro Relativo	0,0575	0,7754	0,7874
Oscilação	0,5313	0,4388	0,5148

Conclusões a respeito da Inversão da Transformada de Laplace

i) O erro relativo para a solução ótima é muito menor do que para as obtidas com $k = 1$ e $k = 20$.

ii) O erro relativo aumenta gradativamente, com os ruidos impostos para $g(s)$, mesmo nas soluções ótimas aí obtidas.

iii) $\|\bar{A}x - b\|$ mantém-se praticamente constante, pouco influindo na escolha da solução ótima.

iv) As oscilações nas soluções são crescentes, aumentando pouco a pouco até certo k para, repentinamente, crescerem rapidamente, sendo que a oscilação relativa está ainda próxima da unidade na solução ótima.

v) Para $k = 20$ as oscilações são tão acentuadas que, mesmo para funções essencialmente positivas, surgem valores negativos em diversos pontos.

vi) Os ruidos impostos a $g(s)$ afetam muito as soluções, aumentando-lhes as oscilações e diminuindo o número de pontos onde a solução obtida se aproxima da exata.

vii) A solução ótima só se aproxima bem da exata nos primeiros dos 30 pontos equidistantes em que foi subdividido o intervalo $[t_1, t_{10}]$. Este número de pontos, porém, varia de função para função, como se vê dos exemplos resolvidos, ficando ainda aberta a questão da determinação exata de até em quantos pontos podemos confiar na solução obtida. Grosseiramente, pode-se dizer que até a metade do intervalo $[t_1, t_{20}]$ podemos confiar na solução ó tima obtida.

viii) O presente método não se mostrou eficiente para funções oscilantes tais como sen x, cos x, etc, como se vê nas Tabelas 4 e 4.a. Fica novamente aberta a questão da adaptação do método para esse caso.

CAPÍTULO III

DECONVOLUÇÕES

Dadas $x(s)$, $h(t-s)$ a função $g(t)$ definida por

$$g(t) = \int_0^t h(t-s)\ x(s)ds \qquad , \ h(t-s)=x(s)=0, 1<0 \tag{58}$$

é o que chamamos convolução.

O problema inverso, ou seja, dadas $g(t)$ e $x(s)$, determinar $h(t-s)$, ou dadas $g(t)$ e $h(t-s)$, determinar $x(s)$, chamamos deconvolução.

Trata-se, pois, de uma equação integral de Volterra de 1ª espécie, onde

$$h(t-s) = 0 \quad \text{para} \quad s > t \tag{59}$$

Em nosso exemplo, consideramos a resolução numérica da equação

$$g(t) = \int_0^t h(t-s)\ x(s)ds \tag{60}$$

dadas $g(t)$ e $x(s)$, quer por suas expressões analíticas, quer por seus respectivos valores em pontos que se constituem numa partição de $[0,t]$.

Supondo conhecidas as expressões analíticas de $g(t)$ e $x(s)$, tomemos o intervalo de integração na forma $[0, N\Delta T]$, isto é, divididos em N subintervalos iguais, cujos pontos serão

$$\{0,\ \Delta T,\ \ldots\ ,\ N\Delta T\}$$

Teremos, para o 1º intervalo $[0,\ \Delta T]$ a equação

$$g_1 = \int_0^{\Delta T} h(\Delta T - s)\ x(s)ds \tag{61}$$

Com as abreviações:

$$h_i = h(i\Delta T) \tag{62}$$

$$x_j = x(j\Delta T) \tag{63}$$

$$g_i = g(i\Delta T) \tag{64}$$

teremos, para $[0,\ i\Delta T]$, $i=1,\ldots,\ N\Delta T$

$$g_i = \int_0^{i\Delta T} h(i\Delta T-s)\ x(s)ds \tag{65}$$

e para $[j\Delta T,\ j\Delta T + \Delta T]$

$$g_j = \int_{j\Delta T}^{j\Delta T+\Delta T} h(i\Delta T - s)\ x(s)ds \tag{66}$$

onde

i = nº de subintervalos da partição de $[0,\ t]$

j = índice de pontos da partição de $[0,\ t]$, inclusive os extremos.

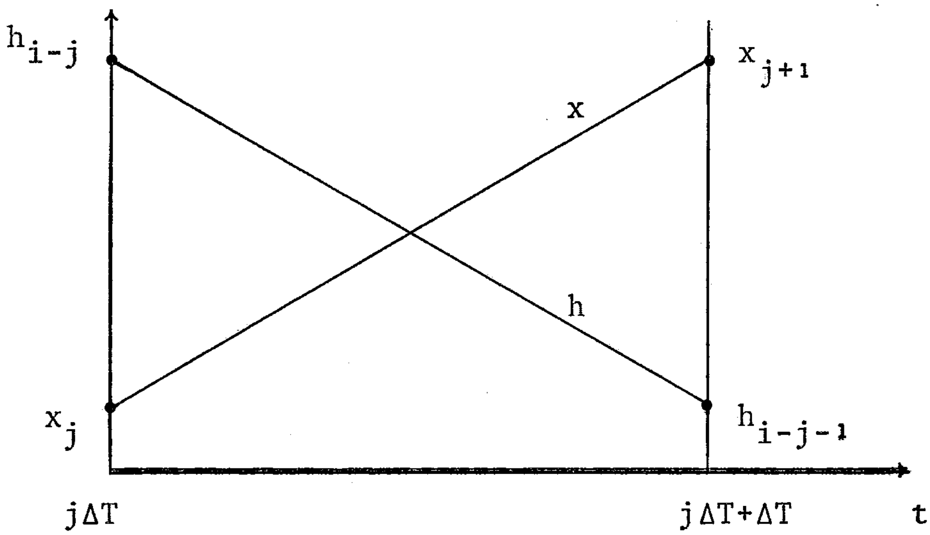
Procedendo a uma mudança de variável

$$q = s - j\Delta T \tag{67}$$

teremos

$$g_j = \int_0^{\Delta T} h(i\Delta T - j\Delta T - q)\ x\ (q + j\Delta T)dq \tag{68}$$

Suponhamos, agora, x e h lineares por intervalo



Escrevendo as equações destas retas sob a forma

$$h = a_1 t + b_1$$

$$x = a_2 t + b_2$$

teremos

$$h(t) = \frac{h_{i-j-1} - h_{i-j}}{\Delta T}(t) + h_{i-j} \tag{69}$$

$$x(t) = \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta T}(t) + x_j \tag{70}$$

e então

$$g_j = \frac{\Delta T}{6}(2x_{j+1}h_{i-j-1} + x_j h_{i-j-1} + x_{i+1}h_{i-j} + 2x_j h_{i-j}) \tag{71}$$

Para

$$i = 1$$

$$j = 0$$

teremos em (71)

$$g_j = \frac{\Delta T}{6}(2x_1 h_0 + x_0 h_0 + x_1 h_1 + 2x_0 h_1) \tag{72}$$

Para

$i = 2$

$j = 0$ e $= 1$

teremos em (71)

$$g_j = \frac{\Delta T}{6}(2x_1h_1 + x_0h_1 + x_1h_2 + 2x_0h_2 + 2x_2h_0 + \\ + x_1h_0 + x_2h_1 + 2x_1h_1) \qquad (73)$$

Continuando neste raciocínio, podemos escrever as expressões subsequentes para $i=1,\dots,n$, e $j=0,i-1$.

Em linguagem matricial teremos a equação

$$\frac{\Delta T}{6} X \underline{h} = g \qquad (74)$$

onde: X é a matriz $n \times n+1$ tal que

$$X_{i,1} = 2x_i + x_{i-1}, \quad i = 1,\dots,n \qquad (75)$$

$$X_{i,i+1} = x_2 + 2x_1, \quad i = 1,\dots,n \qquad (76)$$

$$X_{i,j} = x_k + 4x_{k-1} + x_{k-2} \qquad (77)$$

$i = 2,\dots,n$

$j = 2,\dots,i$

$k = i-j+2$

$\underline{h}$ = matriz coluna $n+1 \times 1$, tal que

$\underline{h}_i = h(i\Delta T), \quad i=1,\dots,n+1$

g_i = matriz coluna $n \times 1$ tal que

$g_i = g(i\Delta T), \quad i=1,\dots,n.$

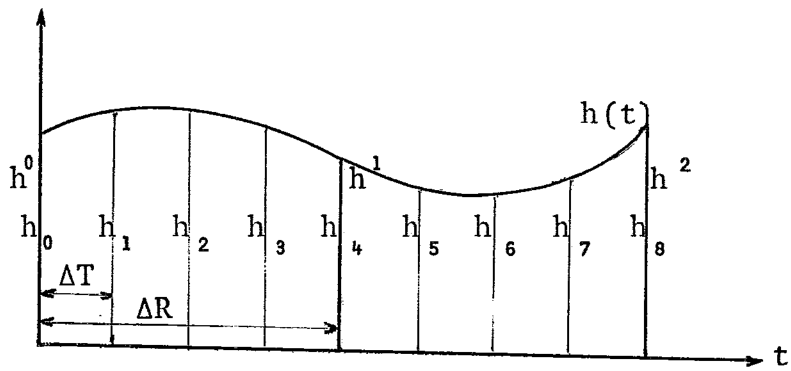
Teremos, portanto, um sistema de n equações a $n + 1$ variáveis, que pode ser melhorado diminuindo-se de n para m o número de pontos onde se quer determinar h.

Para isso, tomemos

$$I = \frac{\Delta R}{\Delta T} \quad , \quad I \in \mathbb{N} \tag{78}$$

e façamos

$$N = IM \tag{79}$$



tal que

$$h^k = h(k\Delta R) \quad , \quad k = 0,\ldots,M \tag{80}$$

e

$$h_i = h(i\Delta T) \quad , \quad i = 0,\ldots,N \tag{81}$$

então

$$h_i = \frac{\ell h^{k+1} + (I-\ell) h^k}{I} \quad , \quad \ell = 0,\ldots,I \tag{82}$$

Exemplo:

Seja X uma matriz 8 x 9 , e I = 4 teremos H 9 x 3 tal que

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 2/4 & 2/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 2/4 & 2/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teremos, então (74) transformada para

$$\frac{\Delta T}{6} XH\bar{h} = g \tag{83}$$

onde $\bar{h}$ é tal que $\underline{h} = H\bar{h}$.

Assim (83) nos fornece os valores da função $h(t)$ em $M+1$ pontos equidistantes, inclusive os extremos.

Dados

$$g(t) = \left[\frac{t^2}{(1-a)^2} - \frac{4t}{(1-a)^3} + \frac{6}{(1-a)^4}\right] e^{-at} - \left[\frac{2t}{(1-a)^3} + \frac{6}{(1-a)^4}\right] e^{-t}$$

$$\bar{g}(t_i) = g(t_i)(1-r_i R) \quad ;$$

$$x(t) = t^2 \, e^{-at}$$

com $|r_i| \leq 0,5, \; i = 0,\ldots,n$

$a = 2$

obteremos

$$h(t) = t \, e^{-t}$$

cujos resultados numéricos constam das tabelas 5, 6, 7 e 8, obtidos quando

N = nº de subintervalos ΔT da partição do intervalo de integração;

ΔR = amplitude dos subintervalos em cujos extremos foi calculada h;

NA = $(N/I) + 1$ = nº de pontos cujas ordenadas h^i foram calculadas;

k = nº ótimo de valores singulares não nulos.

Comparando os resultados obtidos para $N = 64$ e $N = 128$ no mesmo intervalo de integração, isto é, subdividindo cada subintervalo em dois, temos:

QUADRO 1

	N = 64	I = 2	ΔT=0,1	N = 128	I = 4	ΔT=0,05
R	Erro Relat.	$\|\|A\hat{x} - b\|\|$	k	Erro Relat.	$\|\|A\hat{x} - b\|\|$	k
0	0,01484	$0,2847.10^{-5}$	33	0,00816	$0,2146.10^{-5}$	33
0,001	0,02355	$0,6932.10^{-4}$	26	0,02059	$0,1245.10^{-3}$	24
0,01	0,04525	$0,7881.10^{-3}$	14	0,04763	$0,1278.10^{-2}$	15
0,1	0,11428	$0,8277.10^{-2}$	9	0,13573	$0,1319.10^{-1}$	9

QUADRO 2

	N = 64	I = 4	ΔT=0,1	N = 128	I = 8	ΔT=0,05
R	Erro Relat.	$\|\|A\hat{x} - b\|\|$	k	Erro Relat.	$\|\|Ax - b\|\|$	k
0	0,03324	$0,3898.10^{-4}$	17	0,03460	$0,4135.10^{-4}$	17
0,001	0,03411	$0,8589.10^{-4}$	17	0,03528	$0,1329.10^{-3}$	17
0,01	0,05750	$0,7841.10^{-3}$	14	0,04021	$0,1282.10^{-2}$	15
0,1	0,14398	$0,8278.10^{-2}$	9	0,10642	$0,1318.10^{-1}$	9

TABELA 5

Valor Exato	Valores Ótimos Obtidos para N = 64; I = 4; ΔR = 0,4			
h(t)	R=0 h(t)	R=0,001 h(t)	R=0,01 h(t)	R=0,1 h(t)
0,	$0,1519.10^{-1}$	$0,1556.10^{-1}$	$0,2364.10^{-1}$	$0,7206.10^{-1}$
0,2681	0,2883	0,2880	0,2800	0,2542
0,3594	0,3641	0,3648	0,3764	0,3912
0,3614	0,3663	0,3659	0,3577	0,4216
0,3230	0,3231	0,3246	0,3405	0,3591
0,2706	0,2711	0,2704	0,2630	0,2758
0,2177	0,2168	0,2171	0,2165	0,2088
0,1702	0,1697	0,1695	0,1744	0,1670
0,1304	0,1296	0,1304	0,1274	0,1454
$0,9836.10^{-1}$	$0,9781.10^{-1}$	$0,9631.10^{-1}$	$0,9639.10^{-1}$	0,1144
$0,7326.10^{-1}$	$0,7269.10^{-1}$	$0,7522.10^{-1}$	$0,8170.10^{-1}$	$0,6628.10^{-1}$
$0,5402.10^{-1}$	$0,5363.10^{-1}$	$0,5066.10^{-1}$	$0,4189.10^{-1}$	$0,4059.10^{-1}$
$0,3950.10^{-1}$	$0,3915.10^{-1}$	$0,4152.10^{-1}$	$0,4448.10^{-1}$	$0,4830.10^{-1}$
$0,2868.10^{-1}$	$0,2844.10^{-1}$	$0,2734.10^{-1}$	$0,3472.10^{-1}$	$0,4376.10^{-1}$
$0,2070.10^{-1}$	$0,2051.10^{-1}$	$0,2068.10^{-1}$	$0,7514.10^{-2}$	$0,1369.10^{-1}$
$0,1487.10^{-1}$	$0,1474.10^{-1}$	$0,1521.10^{-1}$	$0,2855.10^{-1}$	$-0,2569.10^{-2}$
$0,1063.10^{-1}$	$0,1049.10^{-1}$	$0,7693.10^{-2}$	$0,6024.10^{-2}$	$-0,6248.10^{-3}$

TABELA 6

Valor Exato	Valores Ótimos Obtidos para N = 128; I = 8; ΔR = 0,4			
h(t)	R=0 h(t)	R=0,001 h(t)	R=0.01 h(t)	R=0,1 h(t)
0,	$0,1967.10^{-1}$	$0,2003.10^{-1}$	$0,1846.10^{-1}$	$0,6109.10^{-1}$
0,2681	0,2857	0,2853	0,2875	0,2593
0,3594	0,3648	0,3658	0,3677	0,4056
0,3614	0,3656	0,3645	0,3634	0,3968
0,3230	0,3234	0,3254	0,3337	0,3203
0,2706	0,2709	0,2689	0,2606	0,2894
0,2177	0,2170	0,2194	0,2303	0,2577
0,1702	0,1697	0,1680	0,1646	0,1726
0,1304	0,1296	0,1309	0,1310	0,1064
$0,9836.10^{-1}$	$0,9781.10^{-1}$	$0,9633.10^{-1}$	$0,9439.10^{-1}$	0,1065
$0,7326.10^{-1}$	$0,7273.10^{-1}$	$0,7461.10^{-1}$	$0,8048.10^{-1}$	0,1042
$0,5402.10^{-1}$	$0,5363.10^{-1}$	$0,5239.10^{-1}$	$0,5159.10^{-1}$	$0,5672.10^{-1}$
$0,3950.10^{-1}$	$0,3918.10^{-1}$	$0,3973.10^{-1}$	$0,3503.10^{-1}$	$0,1883.10^{-1}$
$0,2868.10^{-1}$	$0,2845.10^{-1}$	$0,2812.10^{-1}$	$0,3381.10^{-1}$	$0,2561.10^{-1}$
$0,2070.10^{-1}$	$0,2052.10^{-1}$	$0,2081.10^{-1}$	$0,1593.10^{-1}$	$0,3448.10^{-1}$
$0,1487.10^{-1}$	$0,1474.10^{-1}$	$0,1459.10^{-1}$	$0,1931.10^{-1}$	$0,1598.10^{-1}$
$0,1063.10^{-1}$	$0,1051.10^{-1}$	$0,9503.10^{-2}$	$0,3164.10^{-2}$	$0,1192.10^{-2}$

TABELA 7

Valor Exato	Valores Ótimos Obtidos para N = 128; I = 4; ΔR = 0,2			
h(t)	R=0 h(t)	R=0,001 h(t)	R=0,01 h(t)	R=0,1 h(t)
0,	$0,1829.10^{-2}$	$0,7209.10^{-2}$	$0,2737.10^{-1}$	$0,5373.10^{-1}$
0,1637	0,1712	0,1646	0,1504	0,1649
0,2681	0,2706	0,2791	0,2754	0,2567
0,3292	0,3327	0,3240	0,3454	0,3396
0,3594	0,3609	0,3678	0,3621	0,3939
0,3678	0,3694	0,3687	0,3609	0,4099
0,3614	0,3621	0,3571	0,3628	0,3926
0,3452	0,3458	0,3515	0,3568	0,3583
0,3230	0,3232	0,3223	0,3299	0,3248
0,2975	0,2976	0,2965	0,2925	0,3021
0,2706	0,2706	0,2723	0,2645	0,2889
0,2437	0,2437	0,2401	0,2475	0,2758
0,2177	0,2175	0,2210	0,2271	0,2531
0,1931	0,1929	0,1953	0,1970	0,2175
0,1702	0,1700	0,1649	0,1670	0,1748
0,1493	0,1491	0,1510	0,1464	0,1362
0,1304	0,1302	0,1323	0,1308	0,1113
0,1134	0,1133	0,1105	0,1129	0,1028
$0,9836.10^{-1}$	$0,9821.10^{-1}$	$0,9863.10^{-1}$	$0,9555.10^{-1}$	0,1051
$0,8500.10^{-1}$	$0,8486.10^{-1}$	$0,8518.10^{-1}$	$0,8557.10^{-1}$	0,1076
$0,7326.10^{-1}$	$0,7313.10^{-1}$	$0,7362.10^{-1}$	$0,7996.10^{-1}$	0,1013
$0,6298.10^{-1}$	$0,6286.10^{-1}$	$0,6448.10^{-1}$	$0,6889.10^{-1}$	$0,8348.10^{-1}$
$0,5402.10^{-1}$	$0,5391.10^{-1}$	$0,5218.10^{-1}$	$0,5164.10^{-1}$	$0,5847.10^{-1}$
$0,4623.10^{-1}$	$0,4614.10^{-1}$	$0,4527.10^{-1}$	$0,3899.10^{-1}$	$0,3501.10^{-1}$
$0,3950.10^{-1}$	$0,3942.10^{-1}$	$0,4113.10^{-1}$	$0,3704.10^{-1}$	$0,2090.10^{-1}$
$0,3368.10^{-1}$	$0,3361.10^{-1}$	$0,3298.10^{-1}$	$0,3780.10^{-1}$	$0,1882.10^{-1}$
$0,2868.10^{-1}$	$0,2862.10^{-1}$	$0,2768.10^{-1}$	$0,3159.10^{-1}$	$0,2524.10^{-1}$
$0,2438.10^{-1}$	$0,2433.10^{-1}$	$0,2579.10^{-1}$	$0,2182.10^{-1}$	$0,3270.10^{-1}$
$0,2070.10^{-1}$	$0,2066.10^{-1}$	$0,2027.10^{-1}$	$0,1835.10^{-1}$	$0,3418.10^{-1}$
$0,1755.10^{-1}$	$0,1751.10^{-1}$	$0,1637.10^{-1}$	$0,2033.10^{-1}$	$0,2704.10^{-1}$
$0,1487.10^{-1}$	$0,1483.10^{-1}$	$0,1730.10^{-1}$	$0,1695.10^{-1}$	$0,1460.10^{-1}$
$0,1258.10^{-1}$	$0,1255.10^{-1}$	$0,9777.10^{-2}$	$0,6531.10^{-2}$	$0,4067.10^{-2}$
$0,1063.10^{-1}$	$0,1060.10^{-1}$	$0,9728.10^{-3}$	$0,5025.10^{-3}$	$0,2562.10^{-3}$

TABELA 8

Valor Exato	Valores Ótimos Obtidos para N = 64; I = 2; ΔR = 0,2			
h(t)	R=0 h(t)	R=0,001 h(t)	R=0,01 h(t)	R=0,1 h(t)
0,	$-0,8817.10^{-2}$	$-0,4388.10^{-3}$	$0,3068.10^{-1}$	$0,6128.10^{-1}$
0,1637	0,1764	0,1663	0,1500	0,1712
0,2681	0,2690	0,2810	0,2699	0,2503
0,3292	0,3345	0,3253	0,3443	0,3263
0,3594	0,3604	0,3636	0,3676	0,3844
0,3678	0,3702	0,3723	0,3653	0,4147
0,3614	0,3619	0,3614	0,3606	0,4156
0,3452	0,3461	0,3415	0,3535	0,3933
0,3230	0,3231	0,3311	0,3338	0,3575
0,2973	0,2978	0,2973	0,3014	0,3169
0,2706	0,2705	0,2626	0,2673	0,2773
0,2437	0,2437	0,2523	0,2390	0,2413
0,2177	0,2175	0,2152	0,2159	0,2105
0,1931	0,1929	0,1885	0,1946	0,1859
0,1702	0,1700	0,1751	0,1738	0,1681
0,1493	0,1491	0,1472	0,1523	0,1555
0,1304	0,1302	0,1314	0,1294	0,1449
0,1134	0,1132	0,1131	0,1088	0,1317
$0,9836.10^{-1}$	$0,9818.10^{-1}$	$0,9544.10^{-1}$	$0,9630.10^{-1}$	0,1132
$0,8500.10^{-1}$	$0,8484.10^{-1}$	$0,8645.10^{-1}$	$0,9051.10^{-1}$	$0,9036.10^{-1}$
$0,7326.10^{-1}$	$0,7310.10^{-1}$	$0,7654.10^{-1}$	$0,8112.10^{-1}$	$0,6753.10^{-1}$
$0,6298.10^{-1}$	$0,6284.10^{-1}$	$0,6169.10^{-1}$	$0,6229.10^{-1}$	$0,5056.10^{-1}$
$0,5402.10^{-1}$	$0,5389.10^{-1}$	$0,4814.10^{-1}$	$0,4344.10^{-1}$	$0,4300.10^{-1}$
$0,4623.10^{-1}$	$0,4612.10^{-1}$	$0,5090.10^{-1}$	$0,3846.10^{-1}$	$0,4379.10^{-1}$
$0,3950.10^{-1}$	$0,3940.10^{-1}$	$0,4022.10^{-1}$	$0,4530.10^{-1}$	$0,4767.10^{-1}$
$0,3368.10^{-1}$	$0,3360.10^{-1}$	$0,3018.10^{-1}$	$0,4619.10^{-1}$	$0,4822.10^{-1}$
$0,2868.10^{-1}$	$0,2861.10^{-1}$	$0,3307.10^{-1}$	$0,3153.10^{-1}$	$0,4166.10^{-1}$
$0,2438.10^{-1}$	$0,2432.10^{-1}$	$0,2089.10^{-1}$	$0,1437.10^{-1}$	$0,2886.10^{-1}$
$0,2070.10^{-1}$	$0,2065.10^{-1}$	$0,2100.10^{-1}$	$0,1264.10^{-1}$	$0,1452.10^{-1}$
$0,1755.10^{-1}$	$0,1751.10^{-1}$	$0,1896.10^{-1}$	$0,2276.10^{-1}$	$0,3902.10^{-2}$
$0,1487.10^{-1}$	$0,1483.10^{-1}$	$0,1330.10^{-1}$	$0,2425.10^{-1}$	$-0,6267.10^{-3}$
$0,1258.10^{-1}$	$0,1254.10^{-1}$	$0,1458.10^{-1}$	$0,1117.10^{-1}$	$-0,7536.10^{-3}$
$0,1063.10^{-1}$	$0,1060.10^{-1}$	$0,2820.10^{-2}$	$0,1188.10^{-2}$	$-0,9182.10^{-4}$

Conclusões a Respeito das Deconvoluções.

i) Ao determinarmos os valores de $h(t)$ em 33 pontos ($\Delta R = 0{,}2$) a precisão foi maior que para 17 pontos ($\Delta R = 0{,}4$), com menor erro relativo e menor valor para $\|\bar{A}x - b\|$. As oscilações, no entanto, foram ligeiramente maiores naquele caso.

ii) Ao determinarmos os valores de $h(t)$ em 65 e 129 pontos ($\Delta R = 0{,}1$ e $\Delta R = 0{,}05$, respectivamente), obtivemos oscilações tão acentuadas, que anularam qualquer interesse pelas soluções obtidas.

iii) As soluções apresentam boa estabilidade, mesmo com ruidos impostos a $g(t)$ e $x(s)$. Verificaram-se erros maiores apenas nos extremos do intervalo de integração, com aproximações muito boas no interior do mesmo.

iv) À medida que crescem os ruidos impostos a $g(t)$ e $x(s)$, crescem também as oscilações das soluções, principalmente daquelas obtidas com maior número de valores singulares. Assim, para $R = 0$, temos $\hat{x} = x^{(n)}$, obtida considerando não nulos todos os n valores singulares. Já para $R = 0{,}1$, temos $\hat{x} = x^{(k)}$, $k \neq n$, conforme se vê dos Quadros 1 e 2.

<u>Quanto ao Critério para a Escolha da Solução Ótima.</u>

Como vemos, a DVS da matriz $\bar{A}m \times n$, $m \geq n$, nos fornece uma família de n soluções distintas para o problema (1). Surge, portanto, a pergunta: qual delas é ótima?

Tal questão continua aberta, pois não chegamos a estabelecer um critério único e definitivo para escolher a solução ótima.

J.M. Varah sugere em [3], que

$$\|\tilde{x}^{(k)} - x\| \leq \frac{K_2 \eta_1}{\sigma_k} + \left[\sum_{k+1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad (84)$$

onde $\tilde{x}^{(k)}$ = solução ótima calculada

k = nº de valores singulares considerados não nulos na obtenção de $\tilde{x}^{(k)}$

η_1 = nível de arredondamento da máquina

k_2 = 10 n

σ_i = valores singulares de $\bar{A}$, tais que $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_N \geq 0$.

β_i = coordenadas do vetor $\beta = U^T b$.

desde que tenhamos $\sigma_k > 2 r_5 \eta_1$, sendo r_5 um número pequeno que depende da aritmética utilizada pela máquina.

Infelizmente não conseguimos utilizar este critério no presente trabalho.

Quanto ao erro relativo, não terá grande sentido, pois em casos práticos não podemos determiná-lo.

Surge, então, o critério baseado nas oscilações da solução, calculadas por

$$\text{Osc.} = \sum_{i=1}^{n}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right)^2 \tag{85}$$

Notamos que as oscilações variam, de uma solução para outra, não sendo também a solução ótima aquela cujas oscilações são mínimas.

Por outro lado, temos que a solução ótima ocorre imediatamente antes de as oscilações começarem a crescer rapidamente.

Sugerimos, assim, o critério:

$$\text{Se } \mathrm{Osc}(k) \ll \mathrm{Osc}(k+1) \text{ então } x^{(k)} \simeq \hat{x} \tag{86}$$

onde $\hat{x}$ é a solução ótima.

$$\text{Dizemos} \quad x^{(k)} \simeq \hat{x} \tag{87}$$

pois na verdade, $x^{(k)}$, $x^{(k-1)}$ e, às vezes, $x^{(k-2)}$ estão muito próximos entre si, bem como de $\hat{x}$, ficando a nosso critério a seleção de $\hat{x}$ dentre elas, especialmente se dispusermos de alguma informação adicional a respeito da solução esperada.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÃO

Apresentamos o Método da Decomposição em Valores Singulares (DVS) de uma matriz real $m \times n$, $m \geq n$, para a solução de sistemas mal-condicionados de equações lineares.

A seguir, utilizamos a DVS para a resolução de dois problemas mal-propostos, a saber: Inversão da Transformada de Laplace e Deconvoluções.

No primeiro caso, as soluções ótimas só apresentam boa aproximação nos primeiros pontos equidistantes em que subdividimos o intervalo $[t_1, t_{20}]$.

Deixamos, aqui, a indagação de quantos são esses pontos.

Vimos, ainda, que para funções oscilantes, o método não se mostrou eficiente, ficando também a indagação de como adaptá-lo a esse caso.

Para as Deconvoluções, o método se mostrou satisfatório, com erros maiores só nos extremos do intervalo de integração, apesar de havermos utilizado aproximações lineares para as funções dadas, ficando a sugestão da pesquisa de alguma outra melhor aproximação para tais funções.

Em ambos os problemas, fica aberta a questão da determinação de um critério universal para a escolha da solução ótima dentre todas as obtidas.

Trata-se, portanto, de um tema que, além de sua grande utilidade prática, apresenta ainda vasto campo para pesquisas posteriores.

Notamos, ainda, que ambos os problemas aqui mencionados surgem frequentemente na prática, como por exemplo:

i) muitas equações ordinárias e algumas equações integrais envolvendo f(t) que aparecem em Física-Matemática, métodos matemáticos aplicados à Biologia, Química, Estatística, etc são reduzidas a simples equações algébricas em g(s), bem como equações diferenciais parciais se transformam em equações diferenciais ordinárias, onde g(s) é a Transformada de Laplace de f(t). Para obter f(t), basta inverter a Transformada de Laplace para g(s).

ii) muitos sistemas , na Engenharia, podem ser representados por uma convolução $g(t) = \int_0^t h(t-s)x(s)ds$ onde x(s) é a entrada, g(t) a saída, h(t-s) o comportamento do sistema .

Exemplos:

1) na Biologia, o fluxo de sangue através do pulmão;

2) na Sismiologia, a propagação de um abalo sísmico;

3) na Spectometria, uma câmara fotográfica.

Surgem, então, dois tipos de problemas representados por Deconvoluções:

a) Identificação do sistema, conhecidas a entrada e a saída

b) Correção para medida de desvio, conhecidos o sistema e a saída.

APÊNDICE

PROGRAMAÇÃO EM LINGUAGEM FORTRAN

Decomposição em Valores Singulares

Para fins de computação, o método descrito consta da subrotina SVDRS [1] em linguagem FORTRAN IV.

Descrição da Subrotina SVDRS

Chama as subrotinas H12 e QRBD.

Obs.: A subrotina QRBD, por sua vez, chama as subrotinas G1, G2 e DIFF.

Finalidade:

Dada uma matriz Am x n e uma matriz Bm x nb, esta subrotina calcula os valores singulares de A e quantidades auxiliares e solução do problema matricial de mínimos quadrados

$$AX \simeq B \tag{88}$$

Se denotarmos a DVS de A por

$$A = USV^T$$

a subrotina calcula S, V e $G = U^T B$.

Para a solução final do problema, o usuário deverá antes determinar quais os menores valores singulares que deverão ser anulados.

Seja S^+ a matriz diagonal obtida a partir de S e invertendo os valores singulares significativos e anulando os outros.

Então, a solução X para o problema será dada por

$$X = VP, \; P = S^+G \tag{89}$$

tanto podemos ter $m \geq n$ como $m < n$.

Notemos ainda que, se $B = I$ então X será a pseudoinversa de A.

<u>Entrada</u>:

As matrizes A e B e seus parâmetros dimensionais.

<u>Saída</u>:

As matrizes V, $G = U^TB$ e os elementos da diagonal de S estão na saída, nas áreas A(,), B(,) e S( ) respectivamente, da memória, o que implica na destruição de A e B durante a computação.

<u>Uso</u>:

DIMENSION A(MDA, n_1), {B(MDB; n_2) ou B(m_1)}, S(n_3)

CALL SVDRS (A, MDA, M, N, B, MDB, NB, S)

Os parâmetros de dimensionamento devem satisfazer:

$MDA \geq \max\{M,N\}$

$n_1 \geq N$

$MDB \geq N$

$n_2 \geq NB$

$m_1 \geq M$

$n_3 \geq 3*N$

Os parâmetros da subrotina são definidos por:

A(,), MDA, M, N:

O arranjo A(,) é duplamente indexado com o 1º parâmetro igual a MDA; inicialmente contém a matriz M x NA com A(I, J) = a_{ij}, contendo, na saída, a matriz V, N x N , com A(I, J) = v_{ij}. Tanto $M \geq N$, como $M < N$ são permitidos.

Obs.: Deve-se tomar cuidado ao dimensionar A, pois se $M \neq N$, na entrada A será não quadrada, mas na saída será quadrada.

B(,), MDB, NB:

NB denota o nº de colunas de B

Se NB = 0, o arranjo B( ) não será considerado na subrotina.

Se $NB \geq 2$, o arranjo B será duplamente indexado com o 1º parâmetro igual a MDB.

Se NB = 1, então B será usado como um vetor de dimensão M, isto é, com um único índice M.

Neste último caso, o valor de MDB é arbitrário mas deve ser inteiro e aceitável pelo computador, digamos MDB = 1.

Os elementos contidos no arranjo B são, inicialmente:

$$B(I, J) = b_{IJ}, \quad I = 1,\dots, M \qquad J = 1,\dots,NB$$

ou

$$B(I) = b_I, \quad I = 1,\dots,M$$

ao final:

$B(I, J) = b_{IJ}$, $I = 1,\ldots, M$

$J = 1,\ldots,NB$

ou

$B(I) = b_I$, $I = 1,\ldots,M$

S( ):

O arranjo S( ) é usado como 3*N casas de memória como espaço temporário para a computação. No final, as primeiras N casas conterão os valores singulares de A em ordem decrescente :

$$S(1) \geq S(2) \geq \ldots \geq S(N) \geq 0$$

Mensagem de erro:

Se não ocorrer convergência na subrotina QRBD, então a subrotina SVDRS imprimirá:

"CONVERGENCE FAILURE IN QR BIDIAGONAL SVD ROUTINE" e executa o comando STOP.

I) Discretização de Gauss-Laguerre.

i) Construção da matriz T(I,J), de (53)

ii) Determinação dos autovalores e autovetores D normalizados de T(I,J), pela subrotina EIGENJ(T,B, N,N1)

onde

T = matriz cujos autovalores se quer calcular, destruida na computação, sendo que, na saída, os autovalores de A estão em ordem de crescente na diagonal principal de T

B = matriz dos autovetores normalizados de A

N = ordem da matriz A

N1 = ordem com que A foi dimensionada.

Portanto, T(I,I) serão abscissas e B(I,1) serão os pesos para a discretização.

II) Matriz A(I,J) que Substitui a Integral por um Sistema de Equações Lineares.

Basta fazermos

A(I,J)=W(J)*EXP(T(I,I)*(1-SS(I))) segundo (51)

onde

W(J) = B(I,1)

SS(I) = I/4.

III) DVS de A:

Basta chamar a subrotina SVDRS

CALL SVDRS(A,N,N,N,G,N,1,S)

IV) Determinação dos Valores de X:

i) Segundo (89) , construimos S^+ chamando-a D(I,J), contendo na diagonal 1/S(I) e zerando os demais elementos.

ii) Para obter P, usamos a subrotina GMPRD

CALL GMPRD(D,G,P,N,1)

iii) Para obter X, usamos a mesma subrotina

CALL GMPRD(A,P,X,N,N,1)

iv) Como exemplo de interpolação, utilizamos a subrotina RECOV para interpolar os valores de f em pontos equidistantes já que na quadratura de Gauss-Laguerre os pontos estão mais concentrados próximo à origem, ficando mais espaçados entre si à medida que nos afastamos dela. Com o comando

CALL RECOV(X,TI,N,M,XJ)

interpolamos os valores calculados em M pontos equidistantes

V) <u>Análise do Erro</u>:

Tanto para os valores calculados originalmente, quanto para os interpolados, determinamos:

i) erro relativo

ii) norma do vetor AX - B

iii) oscilações do vetor X por meio da expressão

$$osc_i = \sum_{i=1}^{n} \left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right)$$

<u>Discretização Para as Deconvoluções</u>

Neste caso, para a matriz X, que chamamos X1, zeramos X1(N,N+1).

A seguir, construimos a 1ª coluna da forma

X1(J,1) = 2*XX(J+1)+XX(J)

onde

XX são os valores da função x nos pontos {1,...,N+1}.

A seguir, os termos da 1ª diagonal superior à principal, todos iguais, da forma

X1(J,J+1) = XX(2)+2.*XX(1)

Finalmente, os demais elementos não nulos da forma

X1(I,J) = XX(I-J+2)+4.*XX(J-J+1)+XX(I-J)

Para a matriz H, da forma

$$H = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} I/I \\ (I-1)/I \\ \vdots \\ (I-\ell)/I \\ \vdots \\ 1/I \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/I \\ \vdots \\ \ell/I \\ \vdots \\ (I-1)/I \end{matrix} & \bigcirc \\ \bigcirc & \boxed{\begin{matrix} I/I \\ (I-1)/I \\ \vdots \\ (I-\ell)/I \\ \vdots \\ 1/I \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/I \\ \vdots \\ \ell/I \\ \vdots \\ (I-1)/I \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad (90)$$

Notamos que os blocos $\boxed{}$ e $\boxed{}$ se repetem.

Inicialmente zeramos H(I,J).

A seguir

$$H(I,1) * FLOAT(II-I+1)/II$$

onde $II = \Delta R/\Delta T$

$I = 1,\ldots,II$

$$H(I,2) = FLOAT(I-1)/II$$

Para repetir os blocos tomamos

$$H((J-1)*II+I,J) = H(I,1)$$

e

$$H((J-1)*II+I,J+1) = H(I,2)$$

Finalmente,

$$H(N+1,N+1) = 1$$

A seguir, temos

$$AX = X1*H$$

que é a matriz que representa o sistema de equações lineares que substitui a equação integral.

Após a DVS calculamos ainda

i) $\|AX-G\|$

ii) Erro relativo

iii) Oscilação de X, considerados I valores singulares não nulos

iv) Oscilação relativa.

```
      SUBROUTINE GMPRD(A,B,R,N,M,L)
      DIMENSION A(1),B(1),R(1)
      IR=0
      IK=-M
      DO 10 K=1,L
      IK=IK+M
      DO 10 J=1,N
      IR=IR+1
      JI=J-N
      IB=IK
      R(IR)=0
      DO 10 I=1,M
      JI=JI+N
      IB=IB+1
   10 R(IR)=R(IR)+A(JI)*B(IB)
      RETURN
      END


      FUNCTION DIFF(X,Y)
      DIFF=X-Y
      RETURN
      END


      SUBROUTINE G2 (COS,SIN,X,Y)
      XR=COS*X+SIN*Y
      Y=-SIN*X+COS*Y
      X=XR
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE H12 (MODE,LPIVOT,L1,M,U,IUE,UP,C,ICE,ICV,NCV)
      DIMENSION U(IUE,M),C(1)
      DOUBLE PRECISION SM,B
      ONE=1.
      IF (0.GE.LPIVOT.OR.LPIVOT.GE.L1.OR.L1.GT.M) RETURN
      CL=ABS(U(1,LPIVOT))
      IF (MODE.EQ.2) GO TO 60
      DO 10 J=L1,M
10    CL=AMAX1(ABS(U(1,J)),CL)
      IF (CL) 130,130,20
20    CLINV=ONE/CL
      SM=(DBLE(U(1,LPIVOT))*CLINV)**2
      DO 30 J=L1,M
30    SM=SM+(DBLE(U(1,J))*CLINV)**2
      SM1=SM
      CL=CL*SQRT(SM1)
      IF (U(1,LPIVOT)) 50,50,40
40    CL=-CL
50    UP=U(1,LPIVOT)-CL
      U(1,LPIVOT)=CL
      GO TO 70
60    IF (CL) 130,130,70
70    IF (NCV.LE.0) RETURN
      B=DBLE(UP)*U(1,LPIVOT)
      IF (B) 80,130,130
80    B=ONE/B
      I2=1-ICV+ICE*(LPIVOT-1)
      INCR=ICE*(L1-LPIVOT)
      DO 120 J=1,NCV
      I2=I2+ICV
      I3=I2+INCR
      I4=I3
      SM=C(I2)*DBLE(UP)
      DO 90 I=L1,M
      SM=SM+C(I3)*DBLE(U(1,I))
90    I3=I3+ICE
      IF (SM) 100,120,100
100   SM=SM*B
      C(I2)=C(I2)+SM*DBLE(UP)
      DO 110 I=L1,M
```

```
      C(I4)=C(I4)+SM*DBLE(U(1,I))
110   I4=I4+ICE
120   CCNTINUE
130   RETURN
      END


      SUBROUTINE G1 (A,B,COS,SIN,SIG)
      ZERO=0.
      CNE=1.
      IF (ABS(A).LE.ABS(B)) GO TO 10
      XR=B/A
      YR=SQRT(ONE+XR**2)
      CCS=SIGN(CNE/YR,A)
      SIN=CCS*XR
      SIG=ABS(A)*YR
      RETURN
10    IF (B) 20,30,20
20    XR=A/B
      YR=SQRT(ONE+XR**2)
      SIN=SIGN(CNE/YR,B)
      CCS=SIN*XR
      SIG=ABS(B)*YR
      RETURN
30    SIG=ZERC
      CCS=ZERC
      SIN=ONE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE QRBD (IPASS,Q,E,NN,V,MDV,NRV,C,MDC,NCC)
      LOGICAL WNTV,HAVERS,FAIL
      DIMENSION Q(NN),E(NN),V(MDV,NN),C(MDC,NCC)
      ZERO=0.
      ONE=1.
      TWO=2.
      N=NN
      IPASS=1
      IF (N.LE.0) RETURN
      N10=10*N
      WNTV=NRV.GT.0
      HAVERS=NCC.GT.0
      FAIL=.FALSE.
      NQRS=0
      E(1)=ZERO
      DNORM=ZERO
      DO 10 J=1,N
10    DNORM=AMAX1(ABS(Q(J))+ABS(E(J)),DNORM)
      DO 200 KK=1,N
      K=N+1-KK
20    IF(K.EQ.1) GO TO 50
      IF(DIFF(DNORM+Q(K),DNORM)) 50,25,50
25    CS=ZERO
      SN=-ONE
      DO 40 II=2,K
      I=K+1-II
      F=-SN*E(I+1)
      E(I+1)=CS*E(I+1)
      CALL G1 (Q(I),F,CS,SN,Q(I))
      IF (.NOT.WNTV) GO TO 40
      DO 30 J=1,NRV
30    CALL G2 (CS,SN,V(J,I),V(J,K))
40    CONTINUE
50    DO 60 LL=1,K
      L=K+1-LL
      IF(DIFF(DNORM+E(L),DNORM)) 55,100,55
55    IF(DIFF(DNORM+Q(L-1),DNORM)) 60,70,60
60    CONTINUE
      GO TO 100
70    CS=ZERO
```

```
      SN=-ONE
      DC 90 I=L,K
      F=-SN*E(I)
      E(I)=CS*E(I)
      IF(DIFF(DNORM+F,DNCRM)) 75,100,75
75    CALL G1 (Q(I),F,CS,SN,Q(I))
      IF (.NOT.HAVERS) GC TC 90
      DC 80 J=1,NCC
80    CALL G2 (CS,SN,C(I,J),C(L-1,J))
90    CCNTINUE
100   Z=Q(K)
      IF (L.EQ.K) GO TO 170
      X=Q(L)
      Y=Q(K-1)
      G=E(K-1)
      H=E(K)
      F=((Y-Z)*(Y+Z)+(G-H)*(G+H))/(TWO*H*Y)
      G=SQRT(CNE+F**2)
      IF (F.LT.ZERO) GO TO 110
      T=F+G
      GC TO 120
110   T=F-G
120   F=((X-Z)*(X+Z)+H*(Y/T-H))/X
      CS=CNE
      SN=ONE
      LP1=L+1
      DC 160 I=LP1,K
      G=E(I)
      Y=Q(I)
      H=SN*G
      G=CS*G
      CALL G1 (F,H,CS,SN,E(I-1))
      F=X*CS+G*SN
      G=-X*SN+G*CS
      H=Y*SN
      Y=Y*CS
      IF (.NOT.WNTV) GO TO 140
      DC 130 J=1,NRV
130   CALL G2 (CS,SN,V(J,I-1),V(J,I))
140   CALL G1 (F,H,CS,SN,Q(I-1))
```

```
      F=CS*G+SN*Y
      X=-SN*G+CS*Y
      IF (.NOT.HAVERS) GO TO 160
      DO 150 J=1,NCC
150   CALL G2 (CS,SN,C(I-1,J),C(I,J))
160   CONTINUE
      E(K)=F
      E(L)=ZERO
      Q(K)=X
      NQRS=NQRS+1
      IF (NQRS.LE.N10) GO TO 20
      FAIL=.TRUE.
170   IF (Z.GE.ZERO) GO TO 190
      Q(K)=-Z
      IF (.NOT.WNTV) GO TO 190
      DO 180 J=1,NRV
180   V(J,K)=-V(J,K)
190   CONTINUE
200   CONTINUE
      IF (N.EQ.1) RETURN
      DO 210 I=2,N
      IF (Q(I).GT.Q(I-1)) GO TO 220
210   CONTINUE
      IF (FAIL) IPASS=2
      RETURN
220   DO 270 I=2,N
      T=Q(I-1)
      DO 230 J=I,N
      IF (T.GE.Q(J)) GO TO 230
      T=Q(J)
      K=J
230   CONTINUE
      IF (K.EQ.I-1) GO TO 270
      Q(K)=Q(I-1)
      Q(I-1)=T
      IF (.NOT.HAVERS) GO TO 250
      DO 240 J=1,NCC
      T=C(I-1,J)
      C(I-1,J)=C(K,J)
240   C(K,J)=T
```

```
250   IF (.NOT.WNTV) GO TC 270
      DC 260 J=1,NRV
      T=V(J,I-1)
      V(J,I-1)=V(J,K)
260   V(J,K)=T
270   CCNTINUE
      IF (FAIL) IPASS=2
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SVDRS(A,MDA,MM,NN,B,MDB,NB,S)
      DIMENSION A(MDA,NN),B(MDB,NB),S(NN,3)
      ZERO=0.
      ONE=1.
      N=NN
      IF(N.LE.0.OR.MM.LE.0) RETURN
      J=N
10    CONTINUE
      DO 20 I=1,MM
      IF(A(I,J)) 50,20,50
20    CONTINUE
      IF(J.EQ.N) GO TO 40
      DO 30 I=1,MM
30    A(I,J)=A(I,N)
40    CONTINUE
      A(1,N)=J
      N=N-1
50    CONTINUE
      J=J-1
      IF (J.GE.1) GO TO 10
      NS=0
      IF(N.EQ.0) GO TO 240
      I=1
      M=MM
60    IF (I.GT.N.OR.I.GE.M) GO TO 150
      IF (A(I,I)) 90,70,90
70    DO 80 J=1,N
      IF (A(I,J)) 90,80,90
80    CONTINUE
      GO TO 100
90    I=I+1
      GO TO 60
100   IF(NB.LE.0) GO TO 115
      DO 110 J=1,NB
      T=B(I,J)
      B(I,J)=B(M,J)
110   B(M,J)=T
115   DO 120 J=1,N
120   A(I,J)=A(M,J)
      IF(M.GT.N) GO TO 140
```

```
      DC 130 J=1,N
130   A(M,J)=ZERC
140   CCNTINUE
      M=M-1
      GC TC 60
150   CCNTINUE
      L=MINC(M,N)
      DC 17C J=1,L
      IF (J.GE.M) GO TO 160
      CALL H12(1,J,J+1,M,A(1,J),1,T,A(1,J+1),1,MDA,N-J)
      CALL H12 (2,J,J+1,M,A(1,J),1,T,B,1,MDB,NB)
160   IF(J.GE.N-1) GO TO 17C
      CALL H12 (1,J+1,J+2,N,A(J,1),MDA,S(J,3),A(J+1,1),MDA,1,M-J)
170   CCNTINUE
      IF (N.EQ.1) GO TO 19C
      DC 180 J=2,N
      S(J,1)=A(J,J)
18C   S(J,2)=A(J-1,J)
19C   S(1,1)=A(1,1)
      NS=N
      IF (M.GE.N) GC TO 200
      NS=M+1
      S(NS,1)=ZERO
      S(NS,2)=A(M,M+1)
200   CONTINUE
      DC 23C K=1,N
      I=N+1-K
      IF (I.GE.N-1) GO TO 21C
      CALL H12 (2,I+1,I+2,N,A(I,1),MDA,S(I,3),A(1,I+1),1,MDA,N-I)
21C   DC 22C J=1,N
220   A(I,J)=ZERO
230   A(I,I)=CNE
      CALL QRBD (IPASS,S(1,1),S(1,2),NS,A,MDA,N,B,MDB,NB)
      GO TO (24C,31C), IPASS
240   CCNTINUE
      IF (NS.GE.N) GO TO 26C
      NSP1=NS+1
      DC 25C J=NSP1,N
250   S(J,1)=ZERO
260   CCNTINUE
```

```
      IF (N.EQ.NN) RETURN
      NP1=N+1
      DC 28C J=NP1,NN
      S(J,1)=A(1,J)
      DC 27C I=1,N
270   A(I,J)=ZERC
280   CCNTINUE
      DC 300 K=NP1,NN
      I=S(K,1)
      S(K,1)=ZERC
      DC 29C J=1,NN
      A(K,J)=A(I,J)
290   A(I,J)=ZERC
      A(I,K)=CNE
300   CCNTINUE
      RETURN
310   WRITE(6,320)
      STCP
320   FORMAT (49H CONVERGENCE FAILURE IN QR BIDIAGONAL SVD ROUTINE)
      END


      SUBROUTINE PSEUDO (IX,IY,YFL)
      IY=5*IX+1
      IY=MOD(IY,4096)
      YFL=IY/4095.
      IX=IY
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RECOV(Y,H,N,M,X)
      DIMENSION AU(100),B(100),C(100)
      DIMENSION Y(1),H(1),X(1)
C     AU(N),BU(N),C(N)
      N2=N-2
      M1=M-1
      N1=N-1
C     ESTIMACAO DA PRIMEIRA E ULTIMA DERIVADA DO POLINOMIO
C     B E A DERIVADA PRIMEIRA DO POLINOMIO
      H12=H(1)-H(2)
      H13=H(1)-H(3)
      H14=H(1)-H(4)
      B(1)=Y(1)*(1./H12+1./H13+1./H14)+Y(2)*H13*H14/(-H12*(H13-H12)*(H14
     *-H12))+Y(3)*H12*H14/(-H13*(H12-H13)*(H14-H13))+Y(4)*H12*H13/(-H14*
     *(H12-H14)*(H13-H14))
      H12=H(N)-H(N-1)
      H13=H(N)-H(N-2)
      H14=H(N)-H(N-3)
      B(N)=Y(N)*(1./H12+1./H13+1./H14)+Y(N-1)*H13*H14/((H14-H12)*(H13-H1
     *2)*(-H12))+Y(N-2)*H14*H12/(-H13*(H14-H13)*(H12-H13))+Y(N-3)*H13*H1
     *2/(-H14*(H12-H14)*(H13-H14))
      AB=H(2)-H(1)
      DO 11 I=2,N1
      AA=H(I+1)-H(I)
      C(I)=3.*((Y(I+1)-Y(I))*AB/AA+(Y(I)-Y(I-1))*AA/AB)
   11 AB=AA
      C(2)=C(2)-B(1)*(H(3)-H(2))
      C(N1)=C(N1)-B(N)*(H(N-1)-H(N-2))
      AA=2.*(H(3)-H(1))
      DO 12 J=2,N2
      C(J)=C(J)/AA
      AB=H(J)-H(J-1)
      AC=H(J+2)-H(J+1)
      AU(J)=AB/AA
      AA=2.*(H(J+2)-H(J))-AC*AU(J)
   12 C(J+1)=C(J+1)-AC*C(J)
      B(N1)=C(N-1)/AA
      DO 13 J=2,N2
      JJ=N-J
      B(JJ)=C(JJ)-AU(JJ)*B(JJ+1)
```

```
13 CCNTINUE
   G=(H(N)-H(1))/M1
   I=0
   DC 15 J=2,N
   IJ=IFIX((H(J)-H(1))/G)
16 IF(I.GT.IJ) GC TO 15
   HH=H(J)-H(J-1)
   AA=Y(J)-Y(J-1)-B(J-1)*HH
   AB=HH*(B(J)-B(J-1))
   A2=(3.*AA-AB)/(HH*HH)
   A3=(AB-2.*AA)/(HH*HH*HH)
   AA=G*FLOAT(I)-H(J-1)+H(1)
   I=I+1
   X(I)=A3*AA*AA*AA+A2*AA*AA+B(J-1)*AA+Y(J-1)
   IF(I.EQ.M) GO TO 17
   GC TO 16
15 CCNTINUE
17 CONTINUE
   RETURN
   END
```

```
      SUBROLTINE EIGENJ(A,B,N,N1)
      DIMENSICN A(N1,N1),B(N1,N1)
      ANORM=0.0
      DC 1CC I=1,N
      DC 101 J=1,N
      IF (I-J) 2,1,2
1     B(I,J)=1.0
      GC TC 101
2     B(I,J)=C.C
      ANORM=ANORM+A(I,J)*A(I,J)
101   CONTINUE
1CO   CONTINUE
      ANORM=SQRT(ANORM)
      FNORM=ANORM*1.0E-09/FLOAT(N)
      THR=ANORM
23    THR=THR/FLCAT(N)
3     IND=0
      DC 102 I=2,N
      I1=I-1
      DO 1C3 J=1,I1
      IF (ABS(A(J,I))-THR) 103,4,4
4     IND=1
      AL=-A(J,I)
      AM=(A(J,J)-A(I,I))/2.0
      AO=AL/SQRT(AL*AL+AM*AM)
      IF (AM) 5,6,6
5     AC=-AC
6     SINX=AO/SQRT(2.0*(1.C+SQRT(1.0-AO*AC)))
      SINX2=SINX*SINX
      COSX=SQRT(1.0-SINX2)
      COSX2=COSX*COSX
      DC 104 K=1,N
      IF (K-J) 7,10,7
7     IF (K-I) 8,10,8
8     AT=A(K,J)
      A(K,J)=AT*COSX-A(K,I)*SINX
      A(K,I)=AT*SINX+A(K,I)*COSX
10    BT=B(K,J)
      B(K,J)=BT*COSX-B(K,I)*SINX
      B(K,I)=BT*SINX+B(K,I)*COSX
```

```
104    CCNTINUE
       XT=2.0*A(J,I)*SINX*COSX
       AT=A(J,J)
       BT=A(I,I)
       A(J,J)=AT*COSX2+BT*SINX2-XT
       A(I,I)=AT*SINX2+BT*COSX2+XT
       A(J,I)=(AT-BT)*SINX*COSX+A(J,I)*(COSX2-SINX2)
       A(I,J)=A(J,I)
       DC 105 K=1,N
       A(J,K)=A(K,J)
       A(I,K)=A(K,I)
105    CCNTINUE
103    CONTINUE
102    CCNTINUE
       IF (IND) 20,20,3
20     IF (THR-FNORM) 25,25,23
25     DC 11C I=2,N
       J=I
29     IF (A(J-1,J-1)-A(J,J)) 30,110,110
30     AT=A(J-1,J-1)
       A(J-1,J-1)=A(J,J)
       A(J,J)=AT
       DC 111 K=1,N
       AT=B(K,J-1)
       B(K,J-1)=B(K,J)
       B(K,J)=AT
111    CCNTINUE
       J=J-1
       IF (J-1) 110,110,29
110    CCNTINUE
       RETURN
       END
```

```
      DIMENSICN T(20,20),R(20,20),W(20),S(60),G(20),A(20,20),D(20,20),
     1E(20),X(2C),P(20),F(20),SS(20),Y(20),AY(20,20),AB(20,20),GA(20),
     2X1(20),ER(20),ERF(20),GS(20),AK(20,20),XI(30),TI(20),XJ(30),
     1D2F(20),D2FP(20),F1(20),X2(20)
      N=20
      L=5
      R1=1./100.
      M=30
      DO12I=1,N
      DC 12 J=1,N
      IF(I-J)15,16,12
16    T(I,J)=2*I-1
      GCTC 12
15    IF(I-J+1)17,18,12
18    T(I,J)=-I
      T(J,I)=T(I,J)
      GCTO 12
17    T(I,J)=0.
      T(J,I)=T(I,J)
12    CONTINUE
      CALL EIGENJ (T,R,20,20)
      DC 5 I=1,N
5     F(I)=T(I,I)
      DC 3 I=1,N/2
      TI(I)=T(N+1-I,N+1-I)
3     F1(I)=F(N+1-I)
      WRITE(L,6)(I,F(N+1-I),I=1,N)
6     FORMAT(1CX,'VALOR DE F(',I2,')= ',E15.7)
      CALL RECOV(F1,TI,N/2,M,XI)
      WRITE(L,6C)M
6C    FORMAT(//,10X,'VALCR EXATC DE F EM',I3,' PONTCS EQUIDISTANTES'//)
      WRITE(L,501)(XI(I),I=1,M)
      WRITE(L,28)
28    FORMAT(//,10X,'PESOS CORRESPONDENTES AO NUCLEO DA EQUACAO'//)
      DC 30 J=1,N
      W(J)=R(1,J)**2
30    WRITE(L,21)W(J)
21    FORMAT(E15.7)
      DC 32 I=1,N
      SS(I)=FLCAT(I)/4.
```

```
      WRITE(L,25)SS(I)
25    FORMAT(//,10X,'SS(I) =',E15.7)
      G(I)=1./(SS(I)**2)
      GA(I)=G(I)
      DO 32 J=1,N
      A(I,J)=W(J)*EXP(T(J,J)*(1.-SS(I)))
      AB(I,J)=A(I,J)
      AK(I,J)=A(I,J)
32    AY(I,J)=A(I,J)
      IX=123
      DO 26 I=1,N
      CALL PSEUDO (IX,IY,YFL)
26    Y(I)=G(I)*(1.+(YFL-0.5)*R1)
      WRITE(L,41)
41    FORMAT(//,10X,'VALORES DE G NOS PONTOS S(I)'//)
      WRITE(L,40)(G(I),I=1,N)
40    FORMAT(E15.7)
      CALL SVDRS(A,N,N,N,G,N,1,S)
      WRITE(L,111)
111   FORMAT(//10X,'MATRIZ G=U*B,PARA A EQUACAO P=D+G',//)
      WRITE(L,501)(G(I),I=1,N)
      WRITE(L,121)
121   FORMAT(//10X,'VALORES SINGULARES DA MATRIZ A',//)
      WRITE(L,501)(S(I),I=1,N)
C     DETERMINACAO DO NUMERO OTIMO DE VALORES SINGULARES A SEREM MANTIDOS
      DO 400 I=1,N
      DO 400 J=1,N
400   D(I,J)=0.
      DO 402 I=1,N
      D(I,I)=1./S(I)
      CALL GMPRD (D,G,P,N,N,1)
      CALL GMPRD (A,P,X,N,N,1)
      DO 490 J=1,N
490   X2(J)=X(N+1-J)
      WRITE(L,502)I
502   FORMAT(//,10X,'VALORES  DA FUNCAO PARA OS',I3,'MAIORES VAL SING'/)
      WRITE(L,501)(X2(J),J=1,N/2)
501   FORMAT(E15.7)
      CALL RECOV(X2,TI,N/2,M,XJ)
      WRITE(L,160)M,I
```

```
160   FCRMAT(//,1CX,'VALCR CALCULADO DE F EM',I3,' PCNTCS EQUIDISTANTES,
     1 PARA OS ',I3,' MAIORES VAL. SING.'//)
      WRITE(L,5C1)(XJ(K),K=1,M)
      EJ=C.
      EF=0.
      DC 170 J=1,M
      EJ=EJ+(XI(J)-XJ(J))**2
170   EF=EF+(XI(J)**2)
      EFJ=EJ/EF
      C2F(I)=0.
      DC 171 IC=2,M-1
171   D2F(I)=D2F(I)+(XJ(ID+1)-2.*XJ(ID)+XJ(IC-1))**2
      WRITE(L,172)D2F(I)
172   FCRMAT(//,10X,'OSCILACAO DOS VALORES CALCULADOS PARA F',E15.7,//)
      IF(I-1)161,161,162
162   QD2=D2F(I)/D2F(I-1)
      WRITE(L,174)QD2
174   FCRMAT(//10X,'RELACAO ENTRE ESTA OSCILACAO E A ANTERIOR',E15.7//)
161   WRITE(L,180)EFJ
180   FCRMAT(//,10X,'ERRC RELATIVC PARA CS VALCRES EQUICISTANTES',E15.7)
      CALL GMPRD(AB,X,X1,N,N,1)
      EA=0.
      ERRF=0.
      ERR=0.
      DO 550 K=1,N/2
      ER(K)=(F(N+1-K)-X2(K))**2
      ERR=ERR+ER(K)
      ERF(K)=(F(N+1-K))**2
      ERRF=ERRF+ERF(K)
      E(K)=X1(N+1-K)-GA(K)
550   EA=EA+(E(K)**2)
      ERL=SQRT(EA)
      ER2=ERR/ERRF
      WRITE(L,560)ERL,ER2
560   FCRMAT(//,10X,'NCRMA DO VETOR  AX - Y  = ',E15.7,//,10X,'ERRO RELA
     1TIVO = ',E15.7,//)
402   CCNTINUE
      CALL SVDRS(AY,N,N,N,Y,N,1,S)
      DC 6CC I=1,N
      DC 600 J=1,N
```

```
600    D(I,J)=0.
       DC 602 I=1,N
       D(I,I)=1./S(I)
       CALL GMPRD(D,Y,P,N,N,1)
       CALL GMPRD(AY,P,X,N,N,1)
       DC 590 J=1,N
590    X2(J)=X(N+1-J)
       WRITE(L,610)I,R1
610    FCRMAT(10X,'VALCRES DA FUNCAO F NCS PONTOS T(I), CONSIDERADCS OS',
      1I3,'PRIMEIROS VALORES SINGULARES, COM A PERTURBACAO',F7.4,//)
       WRITE(L,501)(X2(J),J=1,N/2)
       CALL RECOV(X2,TI,N/2,M,XJ)
       WRITE(L,173)M,R1,I
173    FCRMAT(//,10X,'VALCRES CALCULADOS DE F EM',I3,' PONTOS EQUIDISTANT
      1ES, CCM A PERTURBACAO',E15.7,' PARA OS',I3,' MAIORES VAL.SING.'//)
       WRITE(L,501)(XJ(K),K=1,M)
       EJP=0.
       EFP=0.
       DC 175 KI=1,M
       EJP=EJP+(XI(KI)-XJ(KI))**2
175    EFP=EFP+(XI(KI))**2
       EFJP=EJP/EFP
       D2FP(I)=0.
       DC 176 ID=2,M-1
176    D2FP(I)=D2FP(I)+(XJ(ID+1)-2.*XJ(ID)+XJ(ID-1))**2
       WRITE(L,177)R1,D2FP(I)
177    FCRMAT(//,10X,'OSCILACAC DCS VALORES CALCULADCS PARA F, COM A PERT
      1URBACAC DE ',E15.7,'SERA DE',E15.7,//)
       IF(I-1)183,183,184
184    QD2F=D2FP(I)/D2FP(I-1)
       WRITE(L,174)QD2F
183    WRITE(L,185)EFJP
185    FCRMAT(//,10X,'ERRC RELATIVO PARA OS VALORES EQUIDISTANTES COM PER
      1TURBACAO',E15.7//)
602    CCNTINUE
       CALL EXIT
       END
```

```
      DIMENSION X1(128,129),H1(129),H2(129),Y(33),G(128),X(33),P(33)
     1,XX(129),H(129,33),S(99),AX(128,33),G1(128),X2(128,129),OSC(33),
     1AX1(128,33),XP(128),G2(128)
      II=4
      N=128
      DE=0.05
      R=1./10.
      L=5
      NI=N/II
      A=2.
      IX=123
      NA=NI+1
      N1=N+1
      DO 10 I=1,N+1
10    XX(I)=((DE*(I-1))**2)*EXP(-A*DE*(I-1))
      DO 102 I=1,N+1
      CALL PSEUDO(IX,IY,IFL)
102   XX(I)=(1.+(YFL-0.5)*R)*XX(I)
      WRITE(L,12)
12    FORMAT(//10X,'VALORES DA FUNCAO (T**2)*EXP(-2*T)'//)
      WRITE(L,110)(XX(I),I=1,N1)
      DO 15 I=1,N
15    G(I)=(((DE*I)**2)/((1.-A)**2)-(4*DE*I)/((1.-A)**3)+6./((1.-A)**4))
     1*EXP(-A*DE*I)-((2.*DE*I)/((1.-A)**3)+6./((1.-A)**4))*EXP(-DE*I)
      DO 101 I=1,N
      CALL PSEUDO (IX,IY,YFL)
      G(I)=(1.+(YFL-0.5)*R)*G(I)
101   G2(I)=G(I)
      WRITE(L,220)R
220   FORMAT(////10X,'VALORES OBTIDOS COM G E X AFETADOS DA PERTURBACAO'
     1,F10.8////)
      DO 16 I=1,NI+1
16    Y(I)=(II*DE*(I-1.))*EXP(-II*DE*(I-1.))
      WRITE(L,80)
80    FORMAT(//,10X,'VALOR EXATO DA FUNCAO',//)
      WRITE(L,110)(Y(I),I=1,NI+1)
      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,N+1
20    X1(I,J)=0.
      DO 25 I=2,N
```

```
      DC 25 J=2,I
      IJ=I-J+2
25    X1(I,J)=XX(IJ+1)+4.*XX(IJ)+XX(IJ-1)
      DC 27 I=1,N
27    X1(I,I+1)=XX(2)+2.*XX(1)
      DC 28 I=1,N
28    X1(I,1)=2.*XX(I+1)+XX(I)
      DC 26 I=1,N
      DC 26 J=1,N+1
26    X2(I,J)=(DE/6.)*X1(I,J)
      DC 3C I=1,N+1
      DC 30 J=1,NA
30    H(I,J)=0.
      DC 35 I=1,II
      H(I,1)=FLCAT(II-I+1)/II
35    H(I,2)=FLCAT(I-1)/II
      DC 41 J=2,NI
      DC 41 I=1,II
      H((J-1)*II+I,J)=H(I,1)
41    H((J-1)*II+I,J+1)=H(I,2)
      H(N+1,NI+1)=1.
      DC 125 I=1,N
      DC 125 J=1,NA
      AX(I,J)=C.
      DC 126 K=1,N1
126   AX(I,J)=AX(I,J)+X2(I,K)*H(K,J)
125   CCNTINUE
      DC 127 I=1,N
      G1(I)=0.
      DC 127 K=1,NA
127   G1(I)=G1(I)+AX(I,K)*Y(K)
      WRITE(L,29)
29    FCRMAT(//10X,'VALCRES EXATOS DE G',30X,'VALORES DE G APOS A DISCRE
     UTIZACAO'//)
      DC 50 I=1,N
50    WRITE(L,31)G(I),G1(I)
31    FCRMAT(15X,E15.7,3CX,E15.7)
      DC 55 I=1,N
      DC 55 J=1,NA
55    AX1(I,J)=AX(I,J)
```

```
      CALL SVDRS(AX,N,N,NA,G,N,1,S)
      WRITE(L,300)
300   FCRMAT(//,10X,'VALORES SINGULARES',//)
      WRITE(L,110)(S(I),I=1,NA)
110   FCRMAT(30X,E15.7)
      DC 400 I=1,NA
400   P(I)=C.
      DC 410 I=1,NA
      DC 411 J=1,I
411   P(J)=G(J)/S(J)
      DC 412 J=1,NA
      X(J)=0.
      DC 412 K=1,NA
412   X(J)=X(J)+AX(J,K)*P(K)
      WRITE(L,100)NA,I
100   FCRMAT(//,10X,'VALCR DA FUNCAO EM',I4,'PONTOS EQUIDISTANTES, CONSI
     1DERADOS OS'I3,'MAIORES VALORES SINGULARES'//)
      WRITE(L,110)(X(J),J=1,NA)
      CALL GMPRD(AX1,X,XP,N,NA,1)
      XN=0.
      DC 111J=1,N
      XP(J)=(XP(J)-G2(J))**2
111   XN=XN+XP(J)
      XNO=SQRT(XN)
      WRITE(L,112)XNO
112   FCRMAT(//10X,'NCRMA DC VETCR  AX - G ',E15.7//)
      ERS=0.
      ERR=0.
      DC 113 J=1,NA
      ERS=ERS+((Y(J)-X(J))**2)
113   ERR=ERR+(Y(J)**2)
      ER=SQRT(ERS/ERR)
      WRITE(L,114)ER
114   FCRMAT(//10X,'ERRO RELATIVO',E15.7//)
      OSC(I)=0.
      DC 500 J=2,NA-1
500   OSC(I)=OSC(I)+(X(J+1)-2.*X(J)+X(J-1))**2
      IF(I-2) 501,501,502
502   QOSC=OSC(I)/OSC(I-1)
      WRITE(L,503)QOSC
```

```
503   FCRMAT(//10X,'RAZAC ENTRE ESTA OSCILACAO E A ANTERIOR',E15.7//)
501   WRITE(L,504)I,OSC(I)
504   FORMAT(//1CX,'OSCILACAC DE X CONSIDERADCS',I3,'VALCRES SINGULARES'
     1,E15.7//)
410   CONTINUE
```

REFERÊNCIAS

[1] Charles L. Lawson e Richar J. Hanson
Solving Least Square Problem
Prentice-Hall-Series in Automatic Computation

[2] G.H. Golub e C. Reinsch
Singular Value Decomposition and Least Square Solutions
Numer. Math. 14 (1970), pp. 403-420.

[3] J.M. Varah
On the Numerical Solution of Ill-Conditioned Linear Systems with Applications to Ill-Posed Problems.
Siam J. Numer. Math. Vol. 10, nº 2, April 1973.

[4] Burt W. Rust e Walter Burrus
Mathematical Programing and the Numerical Solution of Linear Equations.
American Elsevier Publishing Company, Inc.