"APROXIMAÇÕES DISCRETAS A PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO ONDE OS CONTROLES SÃO RESTRITOS PELO ESTADO"

Juan Isaac Polanco Aguilar

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

(Presidente)

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

MAIO DE 1975

À

Elizabeth e Priscila

AGRADECIMENTOS

À José Antonio Ortega, pela sua valiosa orientação acadêmica e pela paciência e dedicação com que me orientou na elaboração desta tese.

SUMÁRIO

É estudada a convergência de soluções de problemas de controle ótimo discreto para a solução de um problema de controle ótimo contínuo, no caso em que os controles são restringidos pelo estado.

A importância da substituição de um problema contínuo desse tipo por problemas discretos reside no fato de não haver um princípio de máximo contínuo para essa classe de problemas. Já para os problemas discretos associados, no caso em que o conjunto que restringe os controles for convexo, além de serem satisfeitas condições pelas funções critérios e do sistema, podemos contar com um princípio de máximo, que fornece condições necessárias de otimalidade.

ABSTRACT

The convergence of solution to discrete optimal control problems as a solution to the continuous optimal control problem when the controls are constrained by the state is considered.

The interest in the substitution of those kind of continuous problems rests in the fact that there is not a maximum principle for this class of problems. However, for associated discrete problems, if the set that restricts the controls is convex and the objective and system functions satisfy some given conditions, we have a maximum principle that gives necessary conditions for optimality.

ÍNDICE

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

§ 1. O CONCEITO DE CONTROLE ÓTIMO

Em Teoria de Controle, de maneira geral, centralizamos nossa atenção sobre um "processo", isto é, uma ação ou movimento que se dá ou existe no tempo. Junto com a noção de processo consideramos "controles" que influenciam o processo em questão. Quando desejamos fazer alguma análise, é necessário formular uma estrutura chamada "dinâmica" do processo ou uma lei que governe mudanças no "estado". Quando uma política de influência é especificada, nossa dinâmica , por definição, prove meios que uma vez baseados no conhecimento do estado x(t) do processo para tempos $t \leq t_0$, t_0 um ponto arbitrário num conjunto de tempo previamente fixado, nos permite determinar o comportamento de x(t) para $t > t_0$.

Outro elemento necessário na formulação geral de um problema de controle ótimo é um "objetivo". Isto é, nós estabelecemos uma meta a ser atingida pelo nosso processo por meio de uma política apropriada de controles aplicados. Uma questão que surge naturalmente é se exite ou não meios que influenciando o processo sejam suficientemente fortes para que se possa atingir o objetivo. Se tais meios existem, temos formulada uma estrutura de controle. Partindo de um estado arbitrário de um processo, podemos considerar o conjunto de os estados que pedem ser atingidos através de políticas determinadas.

Este conjunto é chamado "conjunto alcançável" para o processo definido relativo ao estado inicial especificado.

Em problemas de controle há geralmente um número de caminhos em que o objetivo de um processo pode ser alcançado. Dentro desse conjunto de possibilidades, passando-se a considerar restrições impostas, podemos desejar achar a melhor destas com relação a algum "critério de desempenho". Se em relação a algum critério de desempenho determinamos no conjunto de políticas para atingir um objetivo uma que é a "melhor", temos formulado um "problema de controle ótimo".

No que se segue, consideramos que a dinâmica está na forma de uma equação diferencial ordinária vetorial e que o controle cuja imagem está contida em uma "região de controle" que depende do estado, é uma função pertencente a uma certa "classe admissível" e o critério de desempenho será a integral de uma função de valores reais.

Na maioria dos casos em que se pretende resolver um problema de controle ótimo no qual deve ser minimizado o valor de um funcional em soluções de uma equação diferencial, essa resolução provém da aplicação de métodos numéricos.

Em tais casos, usualmente o problema contínuo é substituído por uma versão discreta do problema, cuja solução proporcione uma aproximação à solução do problema contínuo, e então surge a questão da convergência de aproximações desse tipo à solução do problema original.

No presente trabalho, estudaremos essa questão para uma classe de problemas onde, mais do que por conveniência há a necessidade da substituição referida acima.

Trata-se do caso em que os controles admissíveis para o problema são restringidos pelo estado. Para um problema contínuo com essa característica, não podemos contar para a sua resolução com nenhum resultado do tipo do princípio do máximo de Pontryagin. Já não é esse o caso para versões discretas de tais problemas [1,2] e conforme veremos adiante.

No capítulo II, definimos o que são os problemas de controle ótimo contínuo e discreto, assim como enunciamos os teoremas de existência para os dois tipos de problemas. Também enunciamos o Princípio do Máximo de Pontryagin para o primeiro tipo de problema porém considerando que os controles não são restringidos pelo estado e logo em seguida é exposto um Princípio de Máximo para o segundo tipo de problema.

No capítulo III, fazemos a substituição do problema de controle ótimo contínuo em que os controles são restringidos pelo estado, por versões discretas deste e mostramos que podemos obter uma solução aproximada do problema contínuo a partir da solução ótima do problema discreto.

Finalmente no capítulo IV, tiramos algumas conclusões à partir do estudo empreendido.

CAPÍTULO II

§ 1. APRESENTAÇÃO

Neste capítulo apresentamos as definições dos problemas de controle ótimo, teoremas de existência de solução ótima e Princípios de Máximo para os casos contínuo e discreto, assim como alguns exemplos de problemas de Controle Ótimo.

O Princípio de Máximo discreto aqui mostrado, se aplica no caso em que os controles são restringidos pelo estado e aparece conforme foi formulado em [1] e [2] .

Com o intuito de apresentarmos este trabalho um pouco mais completo, no ítem 4.2 do presente capítulo mostramos o Princípio de Máximo de Pontryagin para o caso contínuo conforme foi formulado em [8], porém é necessário observar que este princípio foi demonstrado em [8] somente para o caso em que os controles admissíveis para o problema não são restringidos pelo estado. Como no nosso caso estamos considerando problema de controle ótimo contínuo em que os controles admissíveis são restringidos pelo estado não podemos fazer uso do princípio mostrado em [8], dai a necessidade de substituir o problema original por uma versão discreta do problema, cuja solução proporcione uma aproximação à solução do problema contínuo surgindo consequentemente a questão da convergência de aproximações desse tipo à solução do problema original.

§ 2. DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO CONTÍNUO E DISCRETO

2.1. PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO CONTÍNUO

2.1.a. Notação

Seja $A \subset E^n \times E^1$ compacto, consideramos $t \in E^1$ e $x \in E^n$. Para todo $(x,t) \in A$ seja $U(x,t)$ um subconjunto compacto de E^m. Denotaremos por

$$M = \{(x,u,t) \mid (x,t) \in A, \quad u \in U(x,t)\}$$

Seja $\bar{f} : M \to E^{n+1}$ tal que

$$\bar{f}(x,u,t) = (f^o(x,u,t), f(x,u,t)) = (f^o(x,u,t), f_1(x,u,t), \ldots, f_n(x,u,t)$$

onde

$$f : E^n \times E^m \times E^1 \to E^n \qquad e \qquad f^o : E^n \times E^m \times E^1 \to E^1$$

Consideramos o conjunto de pares $x(.)$, $u(.)$ de funções vetoriais que satisfazem as seguintes condições :

a) $x(.)$ é absolutamente contínua em $[0,T]$

b) $u(.)$ é mensurável em $[0,T]$ e pode ser escolhida em um conjunto de controles Ω

c) $(x(t),t) \in A \qquad \forall t \in [0,T]$

d) $u(t) \in U(x(t),t)$ q.t.p. em $[0,T]$

e) $f^0(x(.), u(.), .)$ é L - integrável em $[0,T]$

f) $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t),t)$ q.t.p. em $[0,T]$

g) por (a) podemos concluir que as

$f_i(x(.), u(.), .)$, $i = 1,\dots,n$ são L-integráveis em $[0,T]$

h) $(0,x(0), T,x(T) \in B \subset E^{2n+2}$ onde B é um conjunto fechado.

Um par x(.), u(.) que satisfaz a,b,c,d,e,f,g e h é dito admissível, x(.) é a trajetória e u(.) o controle do sistema.

Dado o sistema:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t),t) \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

que satisfaz as condições a, b, c, d, e, f, g e h achar entre as funções $u(.)\varepsilon\Omega$ aquela que minimiza o funcional.

$$J(x(.), u(.)) = \int_0^T f^0(x(u(\tau)), \tau), u(\tau), \tau)\, d\tau \tag{2}$$

Nota 1

No caso particular em que U(x,t) é um sub-conjunto compacto de E^m para todo $(x,t)\varepsilon$ A o problema de minimizar o funcional (2) é chamado de "problema de Pontryagin" de teoria de controle ótimo. No caso em que U(x,t) é um subconjunto não necessàriamente compacto de E^m para qualquer t,x o problema é dito de "Lagrange com restrições unilaterais".

2.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO DISCRETO

Consideremos o sistema descrito pelas equações:

(3) $$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i\ ,\ u_i) \qquad i = 0,1,\ldots,k-1$$

onde

$$x_i \in E^n,\ u_i \in E^m\ ,\ f_i : E^n \times E^m \rightarrow E^n$$

Achar uma sequência $(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ e uma correspondente trajetória $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)$ que minimize a soma

(4) $$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^o\ (x_i, u_i)\ ,\quad f_i^o : E^n \times E^m \rightarrow E^1$$

sujeitas a

$$u_i \in U_i(x_i) \subset E^m \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$x_i \in S_i = S_i' \cap S_i'' \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

onde

$$S_i' = \{x \in E^n :\ U_i(x) \neq \emptyset\} \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

$$S_i'' = \{x \in E^n :\ g_i(x) = 0\} \qquad i = 0, k$$

onde

$g_i : E^n \rightarrow E^{l_i}$ tem matrizes jacobianas com posto máximo onde calculado

$$S_i'' = E^n \qquad i = 1, \ldots, k-1$$

HIPOTESES:

Definindo

$$X_i \triangleq \{(x,u) \in E^n \times E^m : u \in U_i(x)\} \qquad i = 0, 1, \ldots , k$$

onde

$U_k(x) = E^m \quad \forall\, x \in E^n$, vamos considerar que:

(*i*) $\forall\, i = 0, 1, \ldots , k-1$ e para todo $(x_i,u_i) \in X_i$

as funções $f_i(\cdot,\cdot)$ e $f_i^o(\cdot,\cdot)$ são continuamente diferenciáveis.

Seja $b_o = (-1,0,\ldots,0) \in E^{n+1}$ e para $i = 0, 1, \ldots , k-1$

definamos

$$F_i : E^n \times E^m \longrightarrow E^{n+1}$$

$$(x_i,u_i) \longmapsto (f_i^o(x_i,u_i),\ f_i(x_i,u_i))$$

(*ii*) Para $i = 0,1,\ldots,k-1$ e para todo $x \in E^n$ os conjuntos $F_i(x,U_i(x)) \subset E^{n+1}$ são b_o - convexos, isto é, dados u' e u'' em $U_i(x)$ e $0 \leq \lambda\ x \leq 1$

$$\exists\, u(\lambda) \in U_i(x) \ \ni$$

$$f_i(x,u(\lambda)) = \lambda\, f_i(x,u') + (1-\lambda)\, f_i(x,u'')$$

$$f_i^o(x,u(\lambda)) \leq \lambda\, f_i^o(x,u') + (1-\lambda)\, f_i^o(x,u'')$$

Se $U_i\,(x)$ é vazio, então $F_i(x,U_i(x))$ é também vazio, logo direcionalmente convexo. No que se segue entretanto, a existência de controles ótimos garante que $U_i(\hat{x}_i)$ não sejam vazios.

(*iii*) Finalmente, $\forall i = 0, 1, \ldots, k-1$ os conjuntos X_i são convexos.

§ 3. TEOREMAS DE EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO CONTINUO E DISCRETO

3.1 TEOREMA DE EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO CONTINUO

Para o problema definido em 2.1.a. podemos enunciar o seguinte:

<u>TEOREMA</u> (teorema de existência para problemas de Pontryagin) Seja A compacto $E^n \times E^1$ e para todo $(x,t) \varepsilon A$ seja $U(x,t)$ um subconjunto compacto de E^m.

Sejam

$$M = \{(x,u,t) \mid (x,t) \varepsilon A,\ u \varepsilon U(x,t)\}$$

e seja

$$\bar{f} : M \to E^{n+1}$$

tal que:

$$\bar{f}(x,u,t) = (f^o(x,u,t),\ f(x,u,t) = (f^o(x,u,t), f_1(x,u,t), \ldots, f_n(x,u,t))$$

é uma função vetorial contínua em M. Seja U(x,t) uma função semicontinua superiormente $\forall$ (x,t) ε A e para todo (x,t) ε A consideremos que:

$$\tilde{Q}(t,x) = \{\tilde{z}=(z^o,\ z);\ z^o \geq f_o(t,x,u),\ z = f(t,x,u),\ u \ \varepsilon\ U(t,x)\} \subset E^{n+1}$$

é um subconjunto convexo e seja ainda, B um conjunto fachado de E^{n+2}.

Então, o funcional (2) tem um mínimo absoluto em qualquer classe Ω não vazia de pares admissíveis u(.), x(.) .

Demonstração: ver [8]

3.2 TEOREMA DE EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO DISCRETO

Para o problema definido em 2.2. podemos enunciar o seguinte:

TEOREMA: Se são satisfeitas as hipóteses (*i*), (*ii*) e (*iii*) de 2.2 existe uma sequência $(\hat{u}_o, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ e uma trajetória correspondente $(\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)$ que minimiza a soma

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^o\ (x_i, u_i), \quad f_i^o : E^n \times E^m \rightarrow E^1$$

Demonstração: Para demonstrar o teorema, transformaremos o problema em um problema de programação matemática da forma:

(a) Encontrar um vetor $\hat{z} \in E^n$ satisfazendo

(b) $\hat{z} \in \Omega$

(c) $r(\hat{z}) = 0$ tal que

$f(\hat{z}) \leq f(z)$ $\forall z \in E^n$ satisfazendo (b) e (c) onde

$f : E^n \to E^1$, $r: E^n \to E^m$ são funções continuamente diferenciáveis e Ω é um subconjunto de E^n.

TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA EM UM DA FORMA (a) ACIMA:

$$\forall i = 0, 1, \ldots, k-1 \quad \text{seja} \quad V_i = (v_i^o, v_i) \in E^{n+1}$$

onde

$$v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n) \in E^n$$

Então a equação:

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i) \qquad i = 0, \ldots, k \text{ é equivalente a}$$

$$x_{i+1} - x_i = v_i \quad \text{com} \quad v_i \in f_i(x_i, U_i(x_i)) \quad i = 0, \ldots, k-1$$

Seja

$$z = ((x_o, u_o), \ldots, (x_k, u_k), V_o, \ldots, V_{k-1}) \in E^{2n(k+1)+k(n+1)}$$

podemos então definir:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i^o$$

$$r\,(z) = \begin{bmatrix} x_i - x_o - v_o \\ \vdots \\ x_k - x_{k-1} - v_{k-1} \\ g_o(x_o) \\ g_k(x_k) \end{bmatrix} = 0$$

$\Omega = \{ z = ((x_o,u_o),\ldots,(x_k,u_k),\ V_o,\ldots,V_{k-1}) : (x_i,u_i) \in X_i$ e

$V_i \in F_i(x_i, U_i(x_i)),\ i = 0, \ldots, k-1\}$

<u>OBSERVAÇÃO</u>: $\forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1$

$z \in \Omega \Longrightarrow v_i^o = f_i^o\ (x_i,u_i)$ para algum $(x_i,u_i) \in X_i$

Então:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i^o = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^o\ (x_i,u_i) \qquad \text{se} \quad z \in \Omega$$

Como r é continuo

$r^{-1}(\{0\})$ é um conjunto fechado.

Se supozermos que X_i é compacto, então, $\forall x_i \in E^n$, $U_i(x_i)$ também o será, logo como $F_i(.,.)$ é contínua $F_i(x_i, U_i(x_i))$ é compacto. Isso garante que Ω seja compacto.

Mas então:

$r^{-1}(\{0\}) \cap \Omega$ é compacto, e como f é continua, existe um $\hat{z}$ nesse conjunto no qual f atingirá um valor máximo.

§ 4. PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO E PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE PONTRYAGIN

4.1 - PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO

Para o problema definido em 2.2. se são satisfeitas as hipóteses ali mencionadas, é válido o seguinte:

<u>TEOREMA</u>: Se $(\hat{u}_o, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ é uma sequência de controles ótimos e $(\hat{x}_o, x_1, \ldots, \hat{x}_k)$ uma trajetória ótima para o problema, então existem vetores :

$$p_o, \ldots, p_k \in E^n;\ \mu_o \in E^{\ell o};\ \mu_k \in E^{\ell k}$$

e um escalar $p^o \leq 0$ nem todos nulos, tais que:

$$\left\langle p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial\ (x,u)}\right]^T, (\delta x_i, \delta u_i)\right\rangle + \left\langle p_{i+1}, \frac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial\ (x,u)} (\delta x_i, \delta u_i)\right\rangle +$$

$$+ \langle p_{i+1}, \delta x_i \rangle - \langle p_i, \delta x_i \rangle \leq 0$$

$$\forall\ (\delta x_i, \delta u_i) \in \overline{RC}\ ((\hat{x}_i, u_i), X_i)^*, \quad i = 0, \ldots, k-1$$

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x} \right]^T \mu_k$$

$$p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} \right] \mu_o$$

Finalmente, para $i = 0, \ldots, k - 1$ o Hamiltoneano

$$H: E^n \times E^m \times E^n \times E^1 \times \{0,1,\ldots,k-1\} \longrightarrow E^1$$

$$(x, u, p, p^o, i) \longmapsto p^o f_i^o(x,u) + \langle p, f_i(x,u) \rangle$$

Satisfaz a condição de máximo:

$$H(\hat{x}_i, \hat{u}_i, p_{i+1}, p_o, i) \geq H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^o, i) \quad \forall u_i \in U_i(\hat{x}_i)$$

Esta última relação é conhecida como "princípio do máximo".

Demonstração ver [1] pag. 19

*vide apendice

COROLÁRIO 1

Suponhamos que todas as hipóteses do teorema acima enunciado são satisfeitas, com :

$$X_i = \{(x_i,u_i) : R_i(x_i,u_i) \leq 0\}$$

$$U_i(x_i) = \{u_i : R_i(x_i,u_i) \leq 0 \}$$

para $\quad i = 0,1,\ldots,k - 1$

onde cada função $R_i : E^n \times E^m \longrightarrow E^{q_i}$ é continuamente diferenciável e os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes, isto é:

$$\{ \nabla R_i^j (\hat{x}_i,\hat{u}_i) : j \in I_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\} \qquad i = 0,1,\ldots,k-1$$

é um conjunto linearmente independente, onde:

$$I_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) = \{j : R_i^j (\hat{x}_i,\hat{u}_i) = 0,\ i \leq j \leq q_i\} \quad i = 0,1,\ldots,k-1$$

Então existem vetores:

$$p_o,\ldots,p_k \in E^n \ ; \ \mu_o \in E^{\ell o} \ ; \ \mu_k \in E^{\ell k} \ ; \ \lambda_o \in E^{q_o},\ldots,\lambda_{k-1} \in E^{q_{k-1}}$$

e um escalar $p^o \leq 0$ nem todos nulos tais que:

$$\lambda_i \leq 0 \qquad\qquad i = 0, 1, \dots , k - 1$$

$$p_i - p_{i+1} = p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i$$

$$p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i = 0$$

$$< \lambda_i, R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) > = 0$$

para $\quad i = 0, 1, \dots , k - 1$

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k \qquad p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$$

e finalmente, para $i = 0, 1, \dots , k - 1$.

Hamiltoneano:

$$H : E^n \times E^m \times E^n \times E^1 \times \{0, \dots , -1\} \longrightarrow E^1$$

$$(x,u,p,p^o,i) \longmapsto p^o f_i^o(x,u) + <p,f_i(x,u)>$$

satisfaz a condição do máximo:

$$H(\hat{x}_i,\hat{u}_i,p_{i+1},p_o,i) \geq H(\hat{x}_i,\hat{u}_i,p_{i+1},p^o,i)$$

$$\forall\, u_i \in U_i(\hat{x}_i)$$

Demonstração ver [1] pág. 47

COROLÁRIO 2:

Se as funções $R_i^j(.,.)$, $i = 0,1, \ldots, k-1$; $j = 1, \ldots, q_i$ são convexas vale o corolário 1 enunciado anteriormente.

NOTA: Apresentamos em seguida um princípio do máximo devido a Pontryagin para problemas contínuos onde no entanto o estado em que o sistema se encontra num dado instante não restringe os controle admissíveis.

4.2 - PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE PONTRYAGIN

TEOREMA:

Se são satisfeitas as condições a, b, ... , f para o problema 2.1 e

$U(x,t) = U(t) \quad \forall (x,t) \in A$

$x(0) = x_o$

$g(x(t)) = 0$ onde $g(.)$ é continuamente diferenciável com matrizes jacobianas com posto máximo onde calculado, então:

Se $\hat{u}(.)$ é um controle ótimo para o problema e $\hat{x}(\cdot)$ a trajetória correspondente, existem um escalar $p^o \leq 0$ e uma <u>trajetória adjunta</u> $p : [0,T] \longrightarrow E^n$ com $(p^o, p(t)) \neq 0$ tais que

$$\frac{d}{dt} p(t) = - p^o \left[\frac{\partial f^o(\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x}\right]^T - \left[\frac{\partial f(\hat{x}(t),\hat{u}(t))}{\partial x}\right] p(t) \quad \text{q.t.p. em}$$

$[0,T]$

$$p(T) = \left[\frac{\partial g(\hat{x}(T))}{\partial x}\right]^T \Psi \qquad \text{para algum } \Psi \in E^m \quad \text{e}$$

$$\forall u \in U(t) \qquad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad [0,T]$$

$$H(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t),\ p(t),\ p_o,\ t) \geq H(\hat{x}(t),\ u,\ p(t),\ p_o,\ t)$$

onde

$$H : E^n \times E^m \times E^n \times E^1 \times [0,T] \longrightarrow E^1$$

$$(x,u,p,p^o,t) \longmapsto p^o\ f^o(x,u) + \langle p, f(x,u)\rangle$$

é o hamiltoneano associado ao problema.

Demonstração: ver [15] pg. 274

§ 5. Daremos a seguir exemplos de problemas cuja formulação matemática apresenta a característica em estado, ou seja, os controles serem restritos pelo estado.

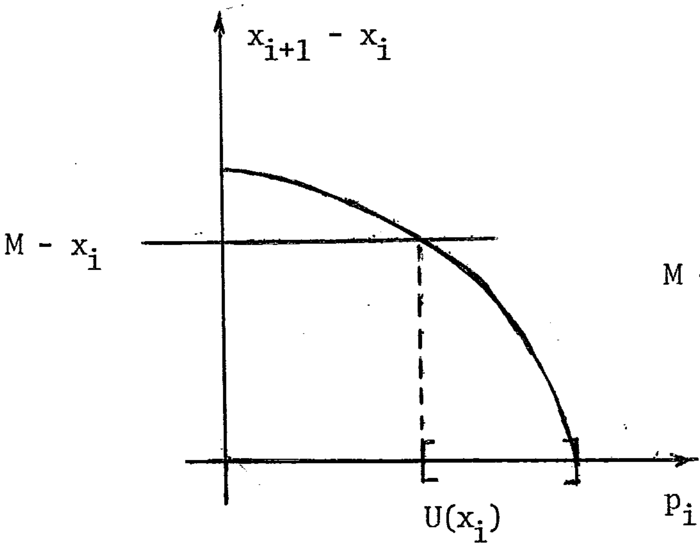
EXEMPLO 1

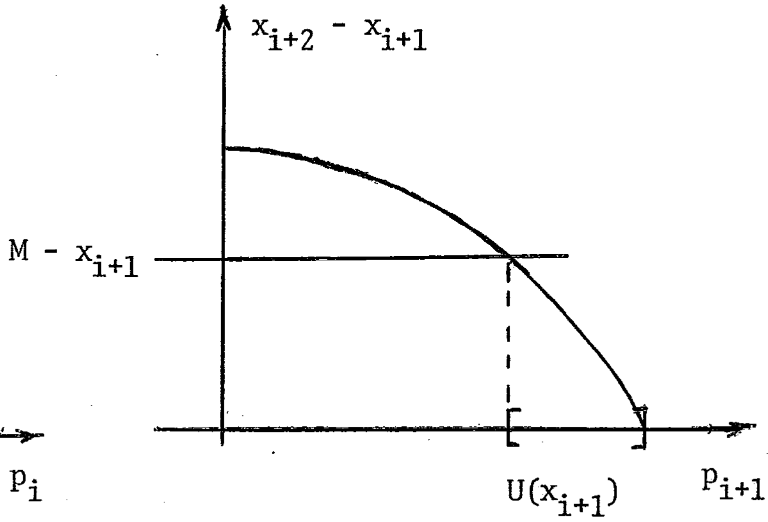
Consideremos uma área residencial constituída de M lotes de terreno. Anualmente os lotes são colocados a venda a um preço determinado, com a condição de que a qualidade das residências será mantida em todos os lotes a serem vendidos posteriormente. Consideremos ainda que o dono do terreno quer maximizar os seus lucros ao cabo de N anos de venda de lotes.

O problema que se coloca então é o de eleger a cada ano os preços pelos quais os lotes serão vendidos, preços esses que proporcionarão o maior retorno. Um fator importante na questão, é que à medida que novas residências vão sendo construídas, o comprador se sente mais seguro em pagar um preço maior pelo lote. Dito de outra forma, quanto mais lotes já vendidos (supõe-se que as residências são construídas até o final de cada ano), maior número de compradores estarão dispostos a pagar um preço mais elevado pelos lotes.

Esse fator pode ser representado esquematicamente como se segue:

Se $x_{i+1} > x_i$, onde x_i expressa o número de lotes vendidos, o comportamento dos compradores evolui na forma esboçada graficamente como se segue:





Onde p_i é o preço pelo qual os lotes serão colocados a venda no ano i + 1. Observe-se que se no intervalo $[i, i+1]$ forem vendidos lotes, e portanto construidas mais $x_{i+1} - x_i$ residencias, a um mesmo preço serão vendidos um maior número de lotes. Formalizando o problema, temos:

$$x_{i+1} - x_i = f(x_i, p_i) \qquad x_o = \Theta_o$$

$$p_i \quad \varepsilon \quad U(x_i)$$

e queremos maximizar:

$$\sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)\, p_i \quad = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, p_i)\, p_i \quad = \sum_{i=0}^{N-1} f^o(x_i, p_i)$$

onde por Θ_o representamos o número de residências já existentes na área ao se iniciar o plano de vendas.

Podemos supor em princípio, para melhor compreensão do problema, que a função f é obtida através de uma pesquisa de mercado, que determinaria quantas pessoas $(x_{i+1} - x_i)$ estariam dispostas a comprar lotes ao preço p_i, se já tivessem sido construídas x_i residências.

Esta é uma boa oportunidade de se ressaltar a importância da restrição $p_i \in U(x_i)$ ser incorporada ao problema.

A meta principal desse estudo é o de encontrar condições necessárias de otimalidade para problemas desse tipo (em particular, aqui se almeja condições necessárias de otimalidade para problemas contínuos desse tipo)..

Sendo assim, quanto mais informações puderem ser levadas em consideração nas ditas condições, mais elementos elas nos fornecerão para a resolução do problema.

<u>EXEMPLO 2</u> : ver [23]

Consideremos uma economia que produza um só produto, vinho por exemplo. Há dois fatores de produção, capital e trabalho. Se $K(t)$ e $L(t)$ são respectivamente o estoque de capital e o trabalho usado no tempo $t \in (0,T]$, então a taxa de produção $Q(t)$ no tempo t é dado pela função de produção:

$$Q(t) = F(K(t), L(t)).$$

Parte da produção é alocada para consumo, sendo $C(t)$ a taxa de consumo, e o restante $I(t)$ para investir em bens de capital. Assim,

$$Q(t) = C(t) + I(t) = (1 - S(t))\, Q(t) + S(t)\, Q(t)$$

onde

$$S(t) = \frac{I(t)}{Q(t)}$$

é à fração da produção que é poupada e investida.

Suponhamos que o estoque de capital se deprecia exponencialmente como tempo na razão $\delta > 0$. Então a taxa de crescimento líquido do capital é dado pela equação:

$$(1) \quad \dot{K}(t) = \frac{d}{dt} K(t) = -\delta K(t) + S(t)\, Q(t)$$

Além disso, a força de trabalho cresce à taxa constante $\beta > 0$.

Assim,

$$(2) \quad \dot{L}(t) = \beta\, L(t)$$

Admitamos também que a função F de produção tenha o seguinte comportamento:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda\, F(K,L) \qquad \forall \lambda > 0$$

Se definirmos as variáveis per capita,

$$q = \frac{Q}{L} \quad , \quad c = \frac{C}{L} \quad , \quad k = \frac{K}{L}$$

e tomarmos

$$\bar{f}(k) = F(K,1)$$

então temos

$$F(K,L) = L\,F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L\ \bar{f}(k)$$

Usando essas definições e as equações (1) e (2), é fácil ver que k(t) satisfaz a equação diferencial:

$$\dot{k}(t) = S(t)\ f(k(t)) - \mu\, k(t)$$

onde

$$\mu = (\delta + \beta)$$

Se bem que em cada período todo o produto possa ser endereçado ao consumo, há um limite máximo para a poupança a ser investida, limite esse que é função da intensidade de capital naquele instante. Isto é,

$$S(t) \in [0,\ g(k(t))] \ , \quad S(\cdot) \quad \text{continua por parte.}$$

onde

$$g : E^{+} \longrightarrow (0,1)$$

Suponhamos finalmente que iniciando com uma intensidade de capital $k(0) = k_o$, se deseje maximizar o consumo, no intervalo $[0,T]$, isto é,

$$\int_o^T C(t)\, dt = \int_o^T (1 - S(t))\, f(k(t))\, dt$$

onde

$$T < \infty$$

Colocando na forma de um problema de controle ótimo, temos:

Dado o sistema

$$\dot{k}(t) = \frac{d}{dt} k(t) = S(t)\, f(k(t)) - \mu\, k(t)$$

$k(0) = k_o$, $k(t) \varepsilon E$, $S(t) \varepsilon [0,1]$, $S(\cdot)$ continua por partes

Encontrar, se possível, uma função $\hat{S}(.)$ com trajetória $\hat{k}(.)$ correspondente, que maximize

$$\int_o^T (1 - S(t))\; f\,(k(t))\, dt$$

CAPÍTULO III

§ 1. APRESENTAÇÃO

Neste capítulo são apresentados os problemas de controle ótimo contínuo e discreto objetos de nosso estudo, definições necessárias para as demonstrações, resultados que garantem a convergência de funções construídas a partir de soluções de versões discretas do problema original para uma solução deste. Apresentamos também teoremas que justificam a substituição do problema de controle ótimo contínuo por versões discretas deste.

§ 2. APRESENTAÇÃO DOS PROBLEMAS E DEFINIÇÕES

O nosso interesse central está dirigido ao problema de controle ótimo contínuo que consiste em determinar, entre as funções $u(.) \varepsilon$ L_2 $[0,T]$ que satisfazem: $u(t) \varepsilon U(x(u(t),t))$ em $[0,T]$ onde $x(u(t),t)$ é uma solução da equação diferencial $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t),t)$ em $x(0) = x_o$ associada a $u(.)$, aquela que minimiza o funcional:

$$J(x(u(.),\cdot), u(\cdot)) = \int_o^T f^o(x(u(\tau),\tau), u(\tau),) \, d\tau \quad .$$

Chamaremos esse problema de problema P, e as funções que satisfazem as condições acima serão ditas viáveis para o problema P.

A esse problema podemos associar uma classe de problemas que denotaremos P_m definidos como se segue: Dado $m \in \mathbb{Z}^+$, determinar entre as funções $u(\cdot) \in L_2\,[0,T]$ que satisfazem: $u(t) \in B_{1/m}\, U(x(u(t),t)$(*) onde $x(u(\cdot),\cdot)$ é uma solução de equação diferencial $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)$ com $x(0) = x_o$ associada a $u(.)$, aquela que minimiza o funcional:

$$J(x(u(\cdot),\cdot),\ u(t)) = \int_o^T f^o\ (x(u(\tau),\tau)),\ u(\tau),\tau\ )\ d\tau\ .$$

As funções que satisfazem as condições acima serão ditas viáveis para o problema P_m.

Fazendo no intervalo $[0,T]$ a partição:

$$t_{n_o} = 0 < t_{n_1} < \ldots . < t_{n_i} < \ldots . < t_{n_{n-1}} < t_{n_n} = T$$

onde

$$t_{n_i} = t_{n_{i-1}} + T/n,\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n - 1$$

e tomando $\tau_n = T/n$, podemos definir o seguinte problema discreto P_m^n :

(*) $B_\beta\, U(x)$ representa aqui uma bola fechada de raio β de $U(x)$

Dado $m \in \mathbb{Z}^{+}$, determinar entre as sequências

$u_n=(u_{n_o}, u_{n_1}, \ldots, u_{n_{n-1}})$ que satisfazem:

$$u_{n_i} \in B_{1/m}\ U(x_{n_i}(u_{n_i}))$$

onde $x_n(u_n)$ é uma solução da equação a diferenças finitas

$$x_{n_{i+1}} = x_{n_i} + f(x_{n_i}, u_{n_i}, t_{n_i})\,\tau_n \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

com $x_{n_o} = x_o$ associada a u_n, aquela que minimiza o funcional

$$J_n\ (x_n(u_n), u_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f^o(x_{n_i}, u_{n_i}, t_{n_i})\,\tau_n, \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

As funções que satisfazem as condições acima serão ditas viáveis para o problema P_m^n .

DEFINIÇÃO

Chamaremos de controle extendido em $[0,T]$, de ordem n uma função $u_n(\cdot)$ constante por partes construída a partir de uma sequência viável para um problema do tipo P_m^n como se segue:

$$u_n(t) = u_{n_i} \quad \text{quando} \quad t \in \left[t_{n_i}, t_{n_{i+1}}\right), \quad i = 0,1,\dots,n-1$$

Abreviadamente diremos um controle extendido $u_n(\cdot)$

DEFINIÇÃO:

Ordem crítica de discretização, denotada n(m) é o menor número inteiro positivo $\geq$ m para o qual exista uma sequência $u_n = (u_{n_o}, u_{n_1}, \dots, u_{n_{n-1}})$ viável para $P_m^{n(m)}$, que se usada para construir um controle extendido, proporciona uma função viável para P_m.

A existência de tal número será garantida mais adiante pelo Lema 2.

§ 3. CONVERGÊNCIA DE APROXIMAÇÕES

TEOREMA 1:

Se as condições:

a) As funções $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ e $f^o(\cdot,\cdot,\cdot)$ são uniformemente continuas em $[0,T]$; $f^o(\cdot,\cdot,\cdot)$ é contínua na primeira variável e uniformemente contínua na segunda.

b) $\exists\, A_i \in E^1$, $i = 1,2,\dots, 11$ tais que

$$|| \ f(x,u,t) \ || \leqq A_1 \ || \ x \ || + A_2 \ || \ u \ ||^2 + A_3$$

$$|| \ f(x',u',t) - f(x'',u'',t) || \leqq A_4 || \ x' - x'' \ || +$$

$$+ \ A_5 \ (|| \ u' \ || + || \ u'' \ ||) \ || \ u' - u'' \ || + A_6 \ || \ u' - u'' \ ||^2$$

$$|| \ f^o(x,u,t) \ || \leqq A_7 \ || \ x \ || + A_8 \ || \ u \ ||^2 + A_9$$

$$|| \ f^o(x,u',t) - f^o(x,u'',t) \ || \leqq A_{10} \ (|| \ u' \ || + || \ u'' \ ||)$$

$$|| \ u' - u'' \ || + A_{11} \ || \ u' - u'' \ ||^2$$

c) $U : E^n \rightarrow \mathcal{P}(E^m)$ é semicontínua superiormente, os conjuntos $U(x) \subset B$ são convexos e compactos, onde B é uma bola fechada em E^m.

São satisfeitas, então:

(i) A equação diferencial do problema P tem solução única e absolutamente contínua

$$\forall u(\cdot) \in L_2 [0,T] \} \ u(t) \in B \text{ se } t \in [0,T]$$

Além disso, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se:

$$|| u'(\cdot) - u''(\cdot) ||_{L_2 [0,T]} < \delta (\varepsilon) \quad ,$$

então

$$|| x(u'(\cdot),\cdot) - x(u''(\cdot),\cdot) ||_{C [0,T]} < \varepsilon$$

(*ii*)

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta' (\varepsilon) > 0$$

tal que se

$$|| u'(\cdot) - u''(.) ||_{L_2 [0,T]} < \delta' (\varepsilon) \quad ,$$

então

$$|| J(x(u'(.),\cdot), u'(.)) - J(x(u''(.),\cdot), u''(.)) || < \varepsilon$$

Prova: [4] , pág. 20

A substituição de problemas de controle ótimo contínuo em que os controles são restringidos pelo estado, por versões discretas deste, com a finalidade de obter uma solução aproximada constituída a partir da solução ótima no problema discreto, ficará justificada pelos teoremas 2 e 3 que se seguem:

<u>TEOREMA 2</u>:

Admitamos satisfeitas todas as hipóteses do TEOREMA 1, e seja $\bar{u}(\cdot)$ uma solução ótima de P e $\bar{x}(\cdot) \triangleq x(\bar{u}(\cdot),\cdot)$ a trajetória associada.

Definamos:

$$\bar{J} = \inf \{J(x(u(\cdot),\cdot),\ u(\cdot) \mid u(\cdot) \text{ é viável para } P\}$$

Seja também $\bar{u}_n$ uma sequência ótima de P^n_m e $\bar{x}_n \triangleq x_n(\bar{u}_n)$ a trajetória associada. Definamos analogamente:

$$\bar{J}^n_m = \inf\{J^n(x_n(u_n),\ u_n) \mid u_n \text{ é uma sequência viável para } P^n_m\},$$

cuja existência fica garantida pelas hipóteses do teorema 1.

Então:

$$\bar{J}^{n(m)}_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \bar{J}$$

Para que seja possível demonstrar o Teorema, necessitamos algumas definições e resultados preliminares.

DEFINIÇÃO

$$\bar{J}_m \triangleq \inf\{J(x(u(\cdot),\cdot) \mid u(\cdot) \text{ é viável para } P_m\}$$

$$\bar{J}^*_m \triangleq \inf\{J(x(u_n(\cdot),\cdot),\ u_n(\cdot)) \mid u_n(\cdot) \text{ é uma função extendida}$$

viável para $P_m\}$.

OBSERVAÇÃO:

As hipóteses do teorema 1 garantem a existência desses ínfimos.

LEMA 1:

$\forall\, m \in \mathbb{Z}^+$, $\exists\, \bar{\bar{u}}(\cdot)$ contínua (que evidentemente depende de m), tal que:

$$\bar{\bar{u}}(t) \in B_{1/2m}\ U(\bar{\bar{x}}(t)) \quad \text{em} \quad [0,T], \text{ onde } \bar{\bar{x}}(\cdot) = x(\bar{\bar{u}}(.),\cdot)$$

Prova:

Pela semicontinuidade superior de $U(\cdot)$,

$$\exists\, \delta > 0 \ \ni\ \| x(t) - \bar{x}(t) \| < \delta$$

$$\Longrightarrow U(\bar{x}(t)) \subset B_{1/4m}\ U(x(t))$$

mas, pelo teorema 1,

$$\exists\, \alpha > 0 \ \ni \ || u(t) - \bar{u}(t) || < \alpha \Rightarrow || x(u(t),t) - \bar{x}(t) || < \delta$$

então, para funções $u(\cdot) \ \ni$

$$|| u(t) - \bar{u}(t) || < \text{mim} \{ \alpha \ , \ 1/4m \},$$

teremos:

$$U(\bar{x}(t)) \subset B_{1/4m} \ U(x(u(t),t))$$

Como

$$\bar{u}(t) \ \varepsilon \ U(\bar{x}(t)) \quad \text{em} \quad [0,T],$$

$$u(t) \ \varepsilon \ B_{1/4m} \ U(\bar{x}(t)) \subset B_{1/2m} \ U(x(u(t),t))$$

Na verdade, pelo fato do conjunto das funções contínuas ser den-so em $L_2 \ [0,T]$, existem funções contínuas $u(\cdot)$ tais que:

$$|| u(t) - \bar{u}(t) || < \min \ \{ \alpha \ , \ 1/4m \} \text{ em } [0,T].$$

Seja $\bar{\bar{u}}(\cdot)$ uma tal função, e $\bar{\bar{x}}(\cdot) \triangleq x(\bar{\bar{u}}(\cdot),\cdot)$ C.Q.D.

LEMA 2:

$\forall m \ \varepsilon \ \mathbb{Z}^{+}$, o conjunto dos controles extendidos viáveis para P_m não é vazio.

Prova:

Dado um $m \in \mathbb{Z}^+$ arbitrário, seja $\bar{\bar{u}}(\cdot)$ uma função contínua que satisfaz a condição do Lema 1.

Definamos:

$$\bar{\bar{u}}_n(t) = \bar{\bar{u}}(t_{n_i}), \quad t \in [t_{n_i}, t_{n_{i+1}})$$

para $\quad i = 0, 1, \ldots, n-1$

e sejam

$$\bar{\bar{x}}(.) = x(\bar{\bar{u}}(.),\cdot)$$

$$\bar{\bar{x}}_n(.) = x(\bar{\bar{u}}_n(.),\cdot)$$

e

$$\bar{\bar{x}}_n = (\bar{\bar{x}}_{n_o}, \ldots, \bar{\bar{x}}_{n_n}) \triangleq x_n(\bar{\bar{u}}_n)$$

onde

$$\bar{\bar{u}}_n = (\bar{\bar{u}}_n(t_{n_o}), \ldots, \bar{\bar{u}}_n(t_{n_n}))$$

Como

$$||\bar{\bar{x}}_n(t_{n_i}) - \bar{\bar{x}}_{n_i}|| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \ *,$$

e

$$||\bar{\bar{u}}_n(t) - \bar{\bar{u}}(t)|| \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

logo, pelo teorema 1,

---

* ver ref. [4] pág. 22

$$\| \bar{\bar{x}}_n(t) - \bar{\bar{x}}(t) \| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \text{ em } [0,T] \quad ,$$

então

$$\| \bar{\bar{x}}_{n_i} - \bar{\bar{x}}(t_{n_i}) \| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

e pela semicontinuidade superior de $U(.)$,

$$\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni \quad \forall n \geq N_1$$

$$U(\bar{\bar{x}}(t_{n_i}) \subset B_{1/2m}(\bar{\bar{x}}_{n_i}),$$

ou

$$B_{1/2m} \; U(\bar{\bar{x}}(t_{n_i})) \subset B_{1/m}(\bar{\bar{x}}_{n_i}) \; .$$

Mas, pelo Lema 1, sabemos que:

$$\bar{\bar{u}}_n \, (t_{n_i}) \;\; \varepsilon \;\; B_{1/2m} \;\; U(\bar{\bar{x}}(t_{n_i})$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{\bar{u}}(t_{n_i}) \;\; \varepsilon \;\; B_{1/m} \, (\bar{\bar{x}}_{n_i})$$

e a sequência $\bar{\bar{u}}_n$ é viável para P_m^n . Consequentemente $\bar{u}_n(.)$ definida acima é um controle extendido.

Para garantir que $\bar{\bar{u}}_n(.)$ é viável para P_m, lembremos que

$$|| \bar{\bar{x}}_n(t) - \bar{\bar{x}}(t) || \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \Longrightarrow$$

pela semicontinuidade superior de U(.) que $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n \geq N_2$

$$U(\bar{\bar{x}}(t)) \subset B_{1/3m} \; (\bar{\bar{x}}_n(t))$$

Mas, pelo Lema 1, sabemos que:

$$\bar{\bar{u}}(t) \in B_{1/2m} \; U(\bar{\bar{x}}(t)) \subset B_{5/6m} \, U(\bar{\bar{x}}_n(t)).$$

Como

$$|| \bar{\bar{u}}_n(t) - \bar{\bar{u}}(t) || \xrightarrow{n \to \infty} 0, \; \exists N_3 \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n \geq N_3$$

$$|| \bar{\bar{u}}_n(t) - \bar{\bar{u}}(t) || < 1/6m .$$

Isto implica que

$$\forall n \geqslant \max \; \{N_2, N_3\}$$

$$\bar{\bar{u}}_n(t) \in B_{1/m} \; U(\bar{\bar{x}}_n(t)).$$

Assim, finalmente,

$$\forall n \geq \max \{N_1, N_2, N_3\} \qquad \bar{\bar{u}}_n(.) \text{ é viável para } P_m .$$

C.Q.D.

<u>LEMA 3</u> : $$\bar{J}^*_m \xrightarrow[m \to \infty]{} \bar{J}$$

<u>Prova</u>: $\forall \varepsilon > 0$, pelo teorema 1, $\exists \delta > 0 \ni$

$$|| u(.) - \bar{u}(.) || < \delta \implies$$

$$|| J(x(u(.),.), u(.)) - J(\bar{x}(.) , \bar{u}(.)) || < \varepsilon$$

Tomando para u(.) uma função contínua $\bar{\bar{u}}(.)$ (e chamando $\bar{\bar{x}}(.) = x(\bar{\bar{u}}(.),.))$, que sabemos existir pela densidade do conjunto das funções contínuas em L_2 $[0,T]$, e $n \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande para que :

$$|| \bar{\bar{u}}_n(t) - \bar{\bar{u}}(t) || < \delta$$

e

$$\bar{\bar{u}}_n(t) \in B_{1/m}\, U(\bar{\bar{x}}_n(t)) \quad \text{em} \quad [0,T] ,$$

o que é possível pelo Lema 2 (do qual tomamos a notação aqui empregada), temos que

$$|| J(\bar{\bar{x}}(.) , \bar{\bar{u}}(.)) - J(\bar{x}(.), \bar{u}(.)) || < \varepsilon/2$$

e

$$|| J(\bar{\bar{x}}(.), \bar{\bar{u}}(.)) - J(\bar{\bar{x}}_n(.), \bar{\bar{u}}_n(.)) || < \varepsilon/2 ,$$

logo

$$|| J(\bar{x}(.), \bar{u}(.)) - J(\bar{\bar{x}}_n(.), \bar{\bar{u}}_n(.)) || < \varepsilon$$

ou seja

$$J(\bar{\bar{x}}_n(.), \bar{\bar{u}}_n(.)) \leq J(\bar{x}(.), \bar{u}(.)) + \varepsilon$$

$$\therefore \quad \bar{J}_m \leq \bar{J}^*_m \leq \bar{J} + \varepsilon$$

levando ao limite, concluimos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \bar{J} \leq \lim_{m\to\infty} \bar{J}^*_m \leq \bar{J} + \varepsilon \qquad \text{C.Q.D.}$$

<u>LEMA 4</u> $\quad || \bar{J}^*_m - \bar{J}^{n(m)}_n || \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

<u>Prova:</u> [4] , pág. 23

Com isso completamos a demonstração do Teorema 2.

<u>TEOREMA 3:</u>

Se o funcional $J(.,.)$ satisfaz certas condições de regularidade (vide [5]), então:

$$\lim_{m\to\infty} \bar{u}_{n(m)}(.) = \bar{u}(.)$$

onde $\bar{u}_{n(m)}(.)$ é o controle extendido construído a partir da solução ótima para o problema $P^{n(m)}_m$.

Seria o caso por exemplo em que $f^{o}(.,.,.)$ fosse convexa na primeira variável e uniformemente convexa na segunda e:

$$f(x(t), u(t), t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t).$$

Prova: [4], pág. 24

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

Note-se que para efeito de utilização real dos resultados apresentados no trabalho, é necessário determinar, para um dado $m \in \mathbb{Z}^+$, a ordem crítica de discretização $n(m)$, ou pelo menos uma estimativa superior, já que as teses dos teoremas 2 e 3 podem ser extendidas a problemas P_m^n com $n \geq n(m)$. É interessante investigar a velocidade de convergência da solução dos problemas discretos para a solução do problema original para determinar a ordem de aproximação obtida. Tudo isso, no entanto para ser tratado, deve levar em conta os dados específicos do problema de controle ótimo original.

GLOSSÁRIO E SÍMBOLOS

I. Convenções Gerais

1. E^n - denota o espaço euclidiano das n - uplas ordenadas de números reais. Se x é um vetor de E^n então escrevemos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Quando uma n - upla é um vetor de E^n, muitas vezes o tratamos como um vetor coluna em multiplicações matriciais.

2. E^1 - conjunto dos números reais.

3. Como norma de um vetor em E^n usamos a aplicação

$$\| \cdot \| : E^n \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

4. Como produto interno de dois vetores E^n usamos a aplicação:

$$< , > : E^n \times E^n \longrightarrow E^1$$
$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

5. $g(.)$ - denota uma função, com o ponto localizado no lugar de variável.

6. $g(x)$ - denota o valor de $g(.)$ no ponto x.

II. Símbolos e Abreviações

$A \subset B$ = A é subconjunto de B

$A \times B$ = Produto carteziano de A por B

$x \varepsilon A$ = x pertence a A

$\overline{A}$ = aderência ou fecho do conjunto A

$\ni$ = tal que

$\forall$ = para todo

$\exists$ = existe um

$f: A \to B$ = f é uma função de A em B que associa a cada $x \varepsilon A$ um elemento $f(x) \varepsilon B$

$x \mapsto f(x)$

$S_n \to p$ = a sequência $\{S_n\}$ converge para p

$\Longrightarrow$ = implica em

A^T = matriz transposta

$\triangleq$ = por definição

$\mathcal{P}(A)$ = conjunto das partes de A

$||u(.)||_{L_2 [0,T]}$ = norma de um vetor u em L_2 $[0,T]$

q.t.p. = quase em toda parte

III. Símbolos com significação especial:

X = conjunto de estados

U = conjunto de controles

x_i = estado do sistema no instante i

$x_{t_{n_i}}$ = estado do sistema no instante t_{n_i}

u_i = controle do sistema no instante i

$u_{t_{n_i}}$ = controle do sistema no instante t_{n_i}

APÊNDICE

<u>DEFINIÇÃO 1</u> - Seja $U(t,x) \subset E^m$, diz-se que o conjunto $U(t,x)$ é uma função semicontinua superiormente em t, x com respeito a inclusão se para qualquer t_o,x_o e $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta\ (\varepsilon,\ t_o, x_o) > 0 \ni U(t,x)$ esta contida em uma vizinhança de raio ε de $U(t_o,x_o)$ quando

$$[t - t_o] < \delta \text{ e } [x - x_o] < \delta \ .$$

<u>DEFINIÇÃO 2</u> - Um cone $C \in E^n$ é um conjunto tal que, se $x \in C$, $\alpha \in E$, $\alpha \geq 0$, $\alpha x \in C$

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - <u>O cone radial ao conjunto no ponto $\hat{z} \in \Omega$, de</u>notado por $RC(\hat{z}, \Omega)$ é o conjunto de todos os vetores z para os quais existe um $\varepsilon > 0$, tal que:

$$(\hat{z} + \alpha\ \delta z) \in \Omega \qquad \forall \alpha \in [0, \varepsilon]$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] = Ortega, J.A, - "Um Princípio do Máximo Discreto para Modêlos Econômicos de Produção", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro,Brasil 1973

[2] = Ortega, J.A., e Jeake, R.J., - "Discrete Máximum Principle with State Constrained Control", submetido ao SIAM J. Control.

[3] = Athaus, M., e Falb, P.L., - "Optimal Control", McGraw-Hill, Inc. 1966 .

[4] = Budak, B.M., Berkovich, E.N. and Solov'eva, E.N., - "Difference Approximations in Optimal Control Problems", SIAM J. Control, vol. 7, nº 1,Feb. 1969.

[5] = Levitin, E.S., and Polyak, B.T., - "Methods for Minimization in the Presence of Constrains", Comput. Math. and Math. Phys., nº 6, 1966,pp.787-823.

[6] = Cullum, J., - "Discrete Approximations to Continuos Optimal Control Problems", SIAM J. Control, vol. 7, nº 1, Feb. 1969.

[7] = Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkredilze, R.V., and Miskchenko, E.F., - "The Matematical Theory of Optimal Processes", Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

[8] = Cesari, L., - "Existence Theorems for Optimal Solutions in Pontryagin and Lagrange Problems", SIAM J. Control, ser. A, vol. 3, nº 3, 1966.

[9] = Cesari, L., - "An existence Theorem in Problems of Optimal Control", SIAM J. Control, ser. A, vol. 3, nº 1, 1965, pp. 7 - 22.

[10] = Hermes, H., - "On The Closure and Convexity of Attainable sets in finite and infinite dimensions" - SIAM J. Control, vol.5, nº3, 1967, pp.409-417.

[11] = Felippov, A.F., - "On Certain Questions in the Theory of Optimal Control" SIAM J. Control, ser. A, vol. 1, nº 1, 1962, pp. 76-84

[12] = Roxin, E., - "The existence of Optimal Controls" - Michigan Math. J., 9 (1962), pp. 109-119.

[13] = Dunford, N., and Schwartz, J., - "Linear Operations" - vol. 1, Interscience, New York, 1964.

[14] = Neustadt, L.W., - "The existence of Optimal Controls in the abscence convexity conditions" - J. Math. Anal. Appl,, 7(1963), pp. 110-117.

[15] = Canon, Cullon & Polak., - "Theory of Optimal Control and Mathematic Programming" - New York, 1970.

[16] = Halkin, H., - "Optimal Control for Systems Descraibed by Difference Equations. , Advances in Control Systems: Theory and Applications" Academic Press, New York, 1964. pp. 173-196.

[17] = Halkin, H., - "A Maximum Principle of the Pontryagin type for Systems Descrebid by Non Linear Difference Equations" - SIAM J. Control, 4(1966) pp. 90-111.

[18] = Holzman, J.M., - "On the Maximum Principle for Non Linear Discrete-Time Systems" - IEEE Trans. on Automatic Control., vol.AC-11., nº 2, pp.273-274, 1966.

[19] = Hermes, H., Lasalle, J.P., - "Funcional Analysis and Optimal Control (Academic Press), 1969.

[20] = Dunford, N., Schwartz, J.T., - "Linear Operator", Part 1., (Wiley Interscience), 1971.

[21] = Taylor, A. E., - "Introduction to Functional Analysis" - (John Wiley), 1958.

[22] = Fleming, W.H., - "Funciones de Diversas Variables" - Compania Editorial Continental, S.A., 1969.,

[23] = Varaiya, P.P., - "Notes on Optimization", Van Nonstrand Reinhold Company, N.Y., 1972.