UMA INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA PARA O PRINCÍPIO DE DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG e WOLFE

Ariolando Tavares Araruna

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:

Nelson Maculan Filho

Nelson MACULAN Filho
(Presidente)

Paulo Oswaldo B. Netto

Silvio Machado

Silvio Machado

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
NOVEMBRO DE 1975

Ao

Povo de onde vim - NORDESTE

AGRADECIMENTOS

Durante o meu ingresso paulatinamente no campo da ciência, contei com o estímulo incansável de um mestre e amigo, que foi por assim dizer, o pivô tutelar deste trabalho que a guisa de intermináveis pesquisas, proporcionaram-me a cada instante, condições de penetrar no infinito espaço científico. Não posso deixar de homenageá-lo com o perene reconhecimento, pelo que dele aprendi, pois foi quem me proporcionou força e estímulos necessários para manter uma atitude de intensa busca, estudo que se traduz neste atual trabalho.

Assim sendo, não poderei deixar de tornar público o meu reconhecimento ao dinâmico e batalhador - Professor Dr. Nelson MACULAN Filho.

À CAPES pela contribuição financeira imprescindível, tornando possível, realizar os meus estudos em tempo integral.

Aos amigos e colegas da COPPE/UFRJ e finalmente aos meus professores e funcionários da importante instituição como centro de Pós-Graduação.

APRESENTAÇÃO

O trabalho em foco retrata a utilização do Princípio de Decomposição de Dantzig - Wolfe, com o objetivo de descentralizar a produção de uma empresa, cujos setores de produção tem uma representação em blocos independentes, bem como um bloco representativo de todos os setores de produção.

A utilização é feita com uma interpretação econômica do procedimento de decomposição, seguida de um exemplo ilustrativo resolvido no capítulo três, e os resultados são utilizados nesta aplicação.

PRESENTATION

This work shows the utilization of the Principle of Decompositi- on of Dantzig - Wolfe, with the purpose of descentralizing the production of an enterprise whose sectors of production have a representation in independent Blocks, as well as a representative block of all sectors of production.

The utilization is made with an economical interpretation of de- composition procedure, followed by an illustrative example resolved in chapter 3, and the results are used in this application.

PRESENTATION

Ce travail montre l' utilisation du Principe de Decomposition de Dantzig - Wolfe a fin de descentraliser la production d' une entreprise avec secteurs de production qui ont une représentation de blocs indépendants, aussi bien que un bloc représentatif de tous les secteurs de production.

L' utilisation est faite avec une interprétation économique du procédé de décomposition suivi d' un exemple illustratif resolu dans le chapitre 3, et les résultars sont utilisés dans cette application.

Í N D I C E

1. Geração de Colunas do PPL

1.1.1. Método Simplex Revisado

Na execução de uma iteração do Simplex, muitas das informações contidas no quadro não são utilizadas. Por isto, somente os itens seguintes são necessários:

I. O custo relativo de fatores $\bar{c}_j$. E utilizando-os, calculamos $\bar{c}_s = \min \bar{c}_j$

II. Afirmo que $\bar{c}_j < 0$, isto implica que a coluna $\bar{P}_s = (\bar{a}_{1s}, \ldots, \bar{a}_{ms})$ deve entrar na base. Para isto, os valores das variáveis básicas $x_B = (b_1, \ldots, b_m)'$ serão utilizados para calcular

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{a_{is} > 0} \frac{b_i}{\bar{a}_{is}} \qquad (1)$$

e a operação pivô é processada sobre $\bar{a}_{rs}$.

Observe que somente um vetor coluna não básico do quadro corrente $\bar{P}_s$ é, requerido.

O Método Simplex Revisado, utiliza a inversa da matriz básica corrente, com o objetivo de gerar as quantidades desejadas.

O programa linear (PL) para ser resolvido é, escrito na forma

$$\min Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \qquad (2)$$

sujeito a

$$P_1 x_1 + \ldots + P_n x_n = b \qquad (3)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \; n \qquad (4)$$

onde

$$P_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})' \qquad (5)$$

é a j-ésima coluna da matriz coeficiente A. Afirmamos ainda que, esta matriz tem dimensão m e o programa é viável. Seja

$$B = [P_{j1}\ , P_{j2}\ ,\ldots, P_{jm}] \qquad (6)$$

a matriz básica para o programa e seja

$$x_B = (x_{j1}, x_{j2},\ldots, x_{jm})' \qquad (7)$$

e $$C_B = (c_{j1}, c_{j2},\ldots, c_{jm}) \qquad (8)$$

o correspondente vetor de variáveis básicas e coeficientes da função objetivo, respectivamente. Note que C_B é um vetor linha, o vetor x_B satisfaz

$$Bx_B = b \qquad (9)$$

cuja solução é

$$x_B = B^{-1}b = \bar{b} \qquad (10)$$

Afirmamos que B é uma base viável, isto é

$$x_B \geq 0 \qquad (11)$$

Definindo

$$\hat{P}_j = (a_{1j},\ldots, a_{mj}, c_j)'j = 1, \quad n \qquad (12)$$

$$\hat{P}_{n+1} = (c, 0,\ldots, 0, 1)' \qquad (13)$$

$$\hat{b} = (b_1,\ldots, b_m, 0)' \qquad (14)$$

Então, 2 ——— 3 podem ser escritas

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{P}_j\ x_j + \hat{P}_{n+1}\ (-Z) = \hat{b} \qquad (15)$$

onde $-Z$ é uma variável básica permanente

Desde que B é viável, a (m + 1) matriz

$$\hat{B} = [\hat{P}_{j1},\dots, \hat{P}_{jm}, \hat{P}_{n+1}] = \left[\begin{array}{c:c} B & 0 \\ \hdashline C_B & 1 \end{array}\right] \qquad (16)$$

é a base viável para o sistema aumentado 15. A inversa da matriz $\hat{B}$ é

$$\hat{B}^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} B^{-1} & 0 \\ \hdashline -C_B\, B^{-1} & 1 \end{array}\right] \qquad (17)$$

o que é verificado facilmente por multiplicação direta de matriz.

Definição.

O vetor linha

$$\pi = (\pi_1,\dots, \pi_m) = C_B B^{-1} \qquad (18)$$

é chamado multiplicador do Simplex associado com a base B.

Note que, se o sistema 3 se multiplicarmos a primeira equação por $\pi_1,\dots,$ a m-ésima equação por π_m, somando e subtraindo a equação Z, o coeficiente de x_j n torna $c_j - \pi P_j$. Colocando

$$c_j - \pi P_j = 0 \qquad (19)$$

j-básico, daí temos

$$\pi B = C_B \qquad (20)$$

e $\hat{B}^{-1}$ se torna

$$\hat{B}^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} B^{-1} & 0 \\ \hdashline -\pi & 1 \end{array}\right] \qquad (21)$$

Se cada coluna do sistema 15 é multiplicada por $\hat{B}^{-1}$, forma o seguinte resultado canônico:

$$\begin{cases} x_{j} \ddots & & \bar{b} \\ \quad\quad x_{jm} + \sum\limits_{j \text{ não básico}} \bar{P}_j x_j = & & \vdots \\ & & \bar{b}_m \\ -Z + \sum\limits_{j \text{ não básico}} \bar{c}_j x_j = - Z_0 \end{cases} \tag{22}$$

Desde que

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_j \\ \cdots \\ \bar{c}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j \\ \cdots \\ c_j \end{bmatrix} \tag{23}$$

então a coluna adaptada é

$$\bar{P}_j = B^{-1} P_j \tag{24}$$

e o custo relativo de fator é

$$\bar{c}_j = c_j - \pi P_j \tag{25}$$

Dada a matriz $\hat{B}^{-1}$ ou equivalentemente, dado $\bar{B}^{1}$ e o multiplicador do Simplex π, as quantidades necessárias para formar uma iteração no Simplex, $\bar{c}_j$ e $\bar{P}_j$, podem ser calculadas do problema original utilizando c_j e P_j. Afirmamos agora que $\bar{c}_j$ será calculado por 25, enquanto $\bar{P}_j$ por 24. Se os valores das variáveis básicas $\bar{b}$, onde varia no começo do ciclo, um elemento pivô $\bar{a}_{rs}$ pode ser localizado em $\bar{P}_s$ usando 1. Isto tudo, para introduzir P_s na base e retirar P_j, isto é, para gerar a inversa da nova base. Para ver isto em detalhes, considere a matriz partida.

$$\left[\begin{array}{c:c:c} & & a_{1s} \\ & & \vdots \\ \hat{P}_{j1} \dots \hat{P}_{jm}\ \hat{P}_{n+1} & \mu_1 \dots\ \mu_{m+1} & a_{rs} \\ & & \vdots \\ & & a_{ms} \\ & & c_s \end{array}\right] \tag{26}$$

onde μ_i é a i-ésima coordenada do vetor unitário de dimensão $\underline{m+1}$. Se a matriz é multiplicada por $\hat{B}^{-1}$, o resultado é

$$\left[\begin{array}{c:c:c} & & \bar{a}_{s} \\ & & \vdots \\ \mu_1 \dots\ \mu_r \dots \mu_{m+1} & \hat{B}^{-1} & \bar{a}_{rs} \\ & & \vdots \\ & & \bar{a}_{ms} \\ & & \bar{c}_s \end{array}\right] \longleftarrow \text{elemento pivô} \tag{27}$$

Agora seja a matriz acima, transformada pela operação pivoteamento sobre $\bar{a}_{rs}$ produzindo

$$[\mu_1 \dots \mu_{r-1}\ \alpha\ \mu_{m+1} \ \vdots\ \hat{B}^{-1}_{\text{Novo}}\ \vdots\ \mu_r] \tag{28}$$

onde os elementos de α não são todos nulos.

A segunda partição contém agora a desejada matriz $\hat{B}^{-1}_{\text{Nova}}$. Para observar isto compare a matriz acima com a original $\underline{26}$. As colunas da nova base são

$$\hat{B}_{\text{Nova}} = [\ \hat{P}_{j1} \dots \hat{P}_{jr.}\ ,\ \hat{P}_s,\ \hat{P}_{jr+1} \dots \hat{P}_{jm},\ \hat{P}_{n+1}\ ] \tag{29}$$

tendo reduzido a matriz unitária.

Sumário do Método Simplex Revisado

1. Linha m + 1 de $\hat{B}^{-1}$ tem a forma $\hat{B}^{-1}_{m+1} = (- \pi_1, - \pi_2, \ldots, - \pi_m, 1)$ onde π_i são os multiplicadores do Simplex. Para cada não básica variável, forma-se o custo relativo de fator $\bar{c}_j$.

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \pi_i \, a_{ij} = c_j - \pi \, P_j$$

Esta operação, frequentemente submete a coluna P_j aos preços fora.

2. Afirmamos que a coluna selecionada para ingressar na base, é para encontrar

$$\min_j \ \bar{c}_j = \bar{c}_s$$

3. Se $\bar{c}_s \geq 0$, *Pare*. E a solução básica corrente é ótima.

4. Se $\bar{c}_s < 0$, calcule a coluna transformada

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_s \\ \\ \bar{c}_s \end{bmatrix} = \hat{B}^{-1} \begin{bmatrix} P_s \\ \\ c_s \end{bmatrix}$$

5. Seja $\bar{P}_s = [\, \bar{a}_{1s} \, , \bar{a}_{2s}, \ldots, \bar{a}_{ms} \,]'$

Se todos $\bar{a}_{is} < 0$, *Pare*. O ótimo é ilimitado.

Seja $\hat{x} = [\, x_B \vdots 0 \,] + x_s [\, - \bar{P}_s \vdots \mu_s \,]$

onde μ_s é o s-ésimo vetor unitário. Então, $\hat{x}$ é uma solução viável para todo $x_s \geq 0$, cujo valor objetivo $\hat{Z} = c_B \, x_B + \bar{c}_s \, x_s$ quando $x_s \longrightarrow \infty$, então $\hat{Z} \longrightarrow - \infty$

6. De outro modo, calcule

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} = \theta$$

7. Construindo a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{c:c} \hat{B}^{-1} & \begin{array}{c} \bar{P}_s \\ \\ \bar{c}_s \end{array} \end{array}\right]$$

e transformando por pivoteamento sobre $\bar{a}_{rs}$. A primeira $\underline{m+1}$ coluna do re_
sultado contém a inversa da nova base.

Atualizar a solução básica por

$$(x_B)_i \leftarrow (x_B)_i - \theta\, \bar{a}_{is} \qquad i \neq r$$

$$(x_B)_r \leftarrow \theta$$

e retorne a 1.

Problemas de Grande Porte

2.1. Introdução

Neste capítulo, os programas lineares cujas matrizes de restrições tem estrutura de blocos diagonal ligadas por variáveis de folga serão estudados. Um programa acoplado de ambas maneiras é mostrado a seguir:

$$\max Z = c_1x_1 + \ldots + c_px_p + c_0y \qquad 1$$

$$A_1x_1 + \ldots \qquad + A_px_p + D\,y = b_0 \qquad 2$$

$$\text{sujeito a} \left\{ \begin{array}{lllll} B_1x_1 & & & + P_1y = b_1 & \\ & B_2x_2 & & + D_2y = b_2 & \\ & & \ddots & \quad\vdots & \quad 3 \\ & & B_px_p & + D_ny = b_p & \\ & & & & \\ x_i \geq 0, & i = 1, & n & e \quad y \geq 0 & \quad 4 \end{array} \right.$$

O princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe do capítulo 3 pode ser utilizado para resolver este problema. Se o problema tem somente variáveis de folga, o procedimento de Dantzig-Wolfe pode ser aplicado para o dual. Se ambas variáveis de folga e restrições estão presente, a matriz restrição é particionada entre 2 e 3 como é mostrado. Relação 3, torna-se a restrição dos subproblemas e 2, torna-se o programa principal. Desde que os subproblemas tem forma dual angular, pode ser tratado pelo princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe, que é exatamente, a teoria utilizada no desenvolvimento desta tese; assim como, com o assunto deste capítulo. Em qualquer caso, o resultado é um algorítmo de três níveis, envol -

vendo uma iteração (solucionando os subproblemas) dentro de uma iteração externa (solucionando o programa principal). Desde que a iteração interna é completamente complexa, isto é computacionalmente indesejável, especialmente porque o Dantzig-Wolfe.

— O algorítmo desta seção oferecem alternativas para resolver 1 - 4. Eles são chamados métodos de partição porque os problemas variáveis são partidos em dois subproblemas de variáveis de folga, y, e blocos variáveis, x_i. Os x_i são divididos em conjuntos dependentes e independentes para especificando as matrizes básicas com cada matriz B_i. Esta partição permite as variáveis dependentes e blocos restrições para ser eliminados do programa, gerando um problema reduzido (menor).

O adjetivo relaxação é empregado porque, eliminando as variáveis dependentes, o controle é pedido sobre as não-negativas. Estas são assim relaxadas, e a iteração define novas partições de maneira que, elas são eventualmente satisfeitas.

— Assim sendo, como já foi destacado por Geofrion, o conceito de restrição relaxada provém de um trabalho unificado, no qual os trabalhos ' deste e outros métodos podem ser compreendidos.

2.2. Relaxação

Considere o programa geral côncavo

$$\max f(x) \qquad \underline{1}$$

$$\text{sujeito a} \left\{ \begin{array}{ll} g_i(x) \geq 0, & i = 1, m \\ x \quad s & \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Problema} \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{2} \\ \underline{3} \end{array}$$

onde f e g_i são funções côncavas de um vetor X e S é um subconjunto convexo de $E^n(S \_ E^n)$. Consideremos aqui o caso em que as restrições $g_i \geq 0$ são bastantes numerosas para darem problemas. Então uma estratégia razoável de solução é relaxar algumas dessas restrições e solucionar o programa só com as restantes. Se este problema é inviável, assim também o é o original. Se é viável, e se a solução resultante satisfaz as restrições relaxadas a solução é ótima para P. Se não, obrigamos uma ou mais das restrições relaxadas e repetimos o procedimento. Relaxamente passaria a ser uma estratégia definitiva se relativamente pouco das restrições são conhecidas para terem um ponto ótimo. Isto é, verdade em programas lineares não degenerados.

— Gefrion tem formalizado esta idéia como segue. Seja M o conjunto de inteiros {1,...,n}, seja R um subconjunto de M, e seja P^R o programa

$$\max f(x) \qquad \underline{4}$$

$$\text{sujeito a} \left\{ \begin{array}{ll} g_i(x) \_ 0, & i \quad R \\ x \quad s & \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \underline{5} \\ \underline{6} \end{array}$$

Afirmamos que um conjunto inicial R pode ser encontrado tal que P^R tem um supremo finito e que todos supremos finitos são atingidos. Então, a técnica de relaxação, que permite restrições adicionados procede como segue:

1. Conj. $\overline{f} = +\infty$ e escolha um conj. inicial R tal que R está limitado superiormente por P^R.

2. Solucione P^R. Se P^n é inviável, P é inviável. De outra maneira obtenha uma solução ótima x^R.

3. Se $g_i(x^R) \geq 0$, i M - R, x^R é ótimo para o problema original P.

4. De outra maneira, seja V _ (M - R) contendo índices de pelo menos uma restrição violada, e seja

$$D = \{i \mid g_i(x^R) > 0, \quad i \quad R\}$$

5. Se $f(x^R) = \overline{f}$, substituir R por R' = R∪V e vá para 2.

6. Se $f(x^R) < \overline{f}$, substituir R por R' = R V - D substituir $\overline{f}$ por $f(x^R) \to 2$.

— Este procedimento acrescenta uma ou mais restrições violadas e se $f(x^R)$ tem decrescido, deve aquelas restrições em R que não são limitadas em x^R. Insistindo que não relação são deletadas se $f(x^R) = \overline{f}$ garante que somente um número finito de pontos do problema P^R necessitam ser resolvidos, como veremos. A prova requer dois resultados preliminares.

<u>Teorema 1</u>. Se x^R soluciona P^R e a restrição em D são deixadas fora, então x^R também resolve P^{R-D}. Consequentemente, se x^n é solução única para P^R, então ela é também solução única para P^{R-D}.

<u>Prova</u> - Afirmamos que existe um vetor $\hat{X}$, satisfazendo as restrições em R - D tal que

$$f(\hat{x}) > f(x^R) \qquad \underline{7}$$

Considere pontos sobre o segmento x^R e $\hat{x}$:

$$x_\lambda = \lambda\,\hat{x} + (1 - \lambda)x^R\,, \quad c < \lambda < 1 \qquad \underline{8}$$

Desde que S é convexo e todas g_i são côncavas, x_λ S e x_λ satisfaz as restrições em R - D para todo c < λ < 1. Considere a restrição em D. Desde que g_i são côncavas,

$$g_i(x_\lambda) \geq \lambda g_i(\hat{x}) + (1 - \lambda) g_i(x^R)$$

Desde que $g_i(x^R) > 0$, i D, então para $\lambda > 0$ e suficientemente pequeno, $g_i(x_\lambda) > 0$, i D. Os pontos x_λ é consequentemente viável em P^R para tal λ. Mas, pela concavidade de f.

$$f(x_\lambda) \geq \lambda_f(\hat{x}) + (1 - \lambda) f(x^R) > f(x^R) \qquad \underline{9}$$

que contradiz o ótimo de x^R.

Para provar a única possibilidade, se $f(\hat{x}) = f(x^R)$, então 9 produz

$$f(x_\lambda) = f(x^R)$$

para todo $\lambda > 0$ e suficientemente pequeno, que contradiz a única possibilidade de x^R.

— O resultado seguinte mostra que a sequência de subproblemas máximos obtidos por relação é monótono não-crescente.

Teorema 2.

$$f(x^{R'}) \leq f(x^R) \qquad \underline{10}$$

Prova - Se R' = RμV, o teorema é obviamente certo. Pelo teorema 1,

$$f(x^{R-D}) = f(x^R) \qquad \underline{11}$$

Desde que

$$f(x^{(R-D)\mu V}) \leq f(x^{R-D}) \qquad \underline{12}$$

o teorema está provado

Note que, a concavidade de f e g_i convexidade de S permitem deixar fora as restrições não obrigatórias.

Teorema 3. O procedimento de relaxação termina depois de um número finito de problemas P^R tenham sido resolvidos, tanto como uma solução ótima para P ou com um conjunto de restrições tal que a corrente P^R é inviável.

Prova - Desde que M é finito, ele tem somente um número finito de subconjuntos diferentes. Desde que $f(x^R)$ decresce de iteração para iteração, nenhum subconjunto pode ser repetido. Desde que restrições não são canceladas (suprimidas) se $f(x^{R'}) = f(x^R)$, e pelo menos uma restrição é adicionada, f pode permanecer constante, para somente um número finito de iterações.

Relação para o método dual simplex. Não é difícil mostrar que, se o programa P é linear, então, com própria escolha de V, relaxação é equivalente para o dual simplex L em K e' s. Para mostrar isto, é conveniente escrever P na forma

$$\max cx \qquad \underline{13}$$

$$\text{sujeitos} \begin{cases} Ax = b & \underline{14} \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, n & \underline{15} \end{cases}$$

onde A é uma matriz m x n, e dim A = m.

A restrição para ser relaxadas são não-negativas 15. Deixe esta ser indexada pelos índices das suas variáveis associadas, e deixe

$$N = \{1, 2, \ldots n\} \qquad \underline{16}$$

As equações 14 serão sempre satisfeitas, isto é, o conjunto S em 3 é

$$S = \{x | A\, x = b\} \qquad \underline{17}$$

No que segue, supomos o seguinte;

<u>Afirmação 1</u>. Todas bases viáveis do dual de <u>13</u> - <u>15</u> são não-degeneradas, isto é, exatamente <u>m</u> da restrição dual é obrigatório.

<u>Teorema 4</u>. Deixe os índices das variáveis não básicas no ciclo inicial do método dual compreendendo o conjunto inicial, R, de relação. Além disso, deixe o conjunto V no passo <u>4</u> de relaxação se o índice da restrição mais violada não-negativamente. Então, no ciclo K do método dual de relaxação, o conj. índice das variáveis não-básicas no método dual é igual ao conjunto R em relação, e $x^R = x^K$, onde x^R é o vetor de valores para x no método dual.

A prova deste teorema requer três lemas.

<u>Lema 1</u>. Se R é conjunto índice de variáveis não-básicas no ciclo k do método dual, então x^K é a única solução ótima para P^R.

<u>Prova</u> - Deixe B ser a base no ciclo K no método dual. É bastante mostrar que $\pi_B = c_B B^{-1}$ é viável para o dual de P^R, com valor objetivo dual igual a $c_B x_B$, que mostrado a seguir junto com o seu dual:

P^R	Dual de P^R
$\max Z = cx$	$\min V = \pi b$
sujeito a $\begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0, \; i \quad R \end{cases}$	sujeito a $\begin{cases} \pi B = c_B \\ \pi A^i \geq c_i, \quad i \quad R \end{cases}$

onde A^i é a i-ésima coluna de A. No método simplex dual, a base B é dual viável, assim π_B satisfaz todas restrições dual e

$$V\ (\pi_B) = c_B B^{-1}\ b = c_B\ x_B \qquad \underline{18}$$

Portanto, x^K resolve P^R. Pela afirmação 1 da não degeneração dual, todas restrições dual em R são estritamente satisfeitas, assim esta solução ótima é única.

<u>Lema 2.</u> Seja R o conjunto de índices das variáveis não básicas no ciclo K do método simplex dual, e afirmamos que o algorítmo termina neste ciclo com a informação que o primal é inviável (isto é, com $\min \bar{b}_i = \bar{b}_r < 0$ e todos $a_{rj} \geq 0$). Então os subproblemas de relaxação formados por adicionar o índice f_r(o índice da r-ésima variável básica) para R é também inviável.

<u>Prova</u> - Basta produzir uma solução não limitada para o dual de P^{R+f_r}. As considerações sobre o primal-dual são

$$P^{R+f_r} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{Dual de } P^{R+f_r}$$

$$\max Z = cx \qquad\qquad\qquad\qquad \min V = \pi b$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0, \; i \quad R + f_r \end{cases} \qquad \text{sujeito a} \begin{cases} \pi A^i = c_i, \quad i \quad N - R - f_r \\ A^i \geq c_i, \quad i \quad R + f_r \end{cases}$$

Considere a solução dual

$$\pi = c_B B^{-1} + \Theta B_r^{-1} \quad , \qquad \Theta \geq 0$$

onde B_r^{-1} é linha r de B^{-1}. Desde que

$$\bar{a}_{rj} = (B^{-1} A^j)_r = B_r^{-1} A^j \begin{cases} \geq 0, & j \quad R \\ = 0, & j \quad N - R, \; j \neq f_r \\ = 1, & j = f_r \end{cases}$$

então B_r^{-1} é a solução para a restrição homogênea dual, isto é, com todos c_i substituido por zero. Portanto, π em <u>19</u> é dual viável para todo $\Theta \geq 0$, com valor objetivo

$$V(\pi) = c_B \, x_B + \Theta \bar{b}_r \qquad \underline{20}$$

Desde que $\bar{b}_r < 0$, $V(\pi) \to -\infty$ com $\Theta \to \infty$

Lema 3. Se x_s entra na base no ciclo k do método simplex dual, então $x_s > 0$ na solução básica resultante

Prova - Pela operação pivoteamento

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

Por construção, $b_r < 0$ e $\bar{a}_{rs} < 0$.

Prova do Teorema 4.

Pela escolha do conjunto inicial R, lema 1 implica que o teorema é verdadeiro para k = 1. Afirmamos que o resultado é verdadeiro para k e provaremos para k + 1 .

Ciclo K do método dual termina com uma solução ótima com 1 ou como 2 termina com a informação que o problema é inviável, ou 3 continue para o próximo ciclo. No caso 1 de acordo com o lema 1 a relaxação também termina.

Método Dual - Ciclo K

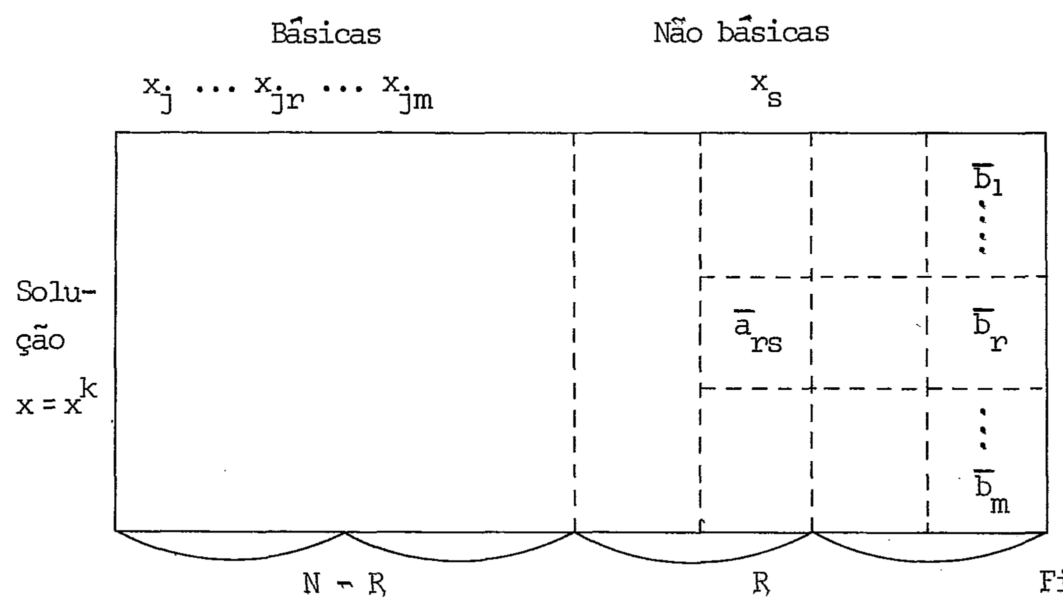


Fig. 2.1

Método Dual - Ciclo K + 1

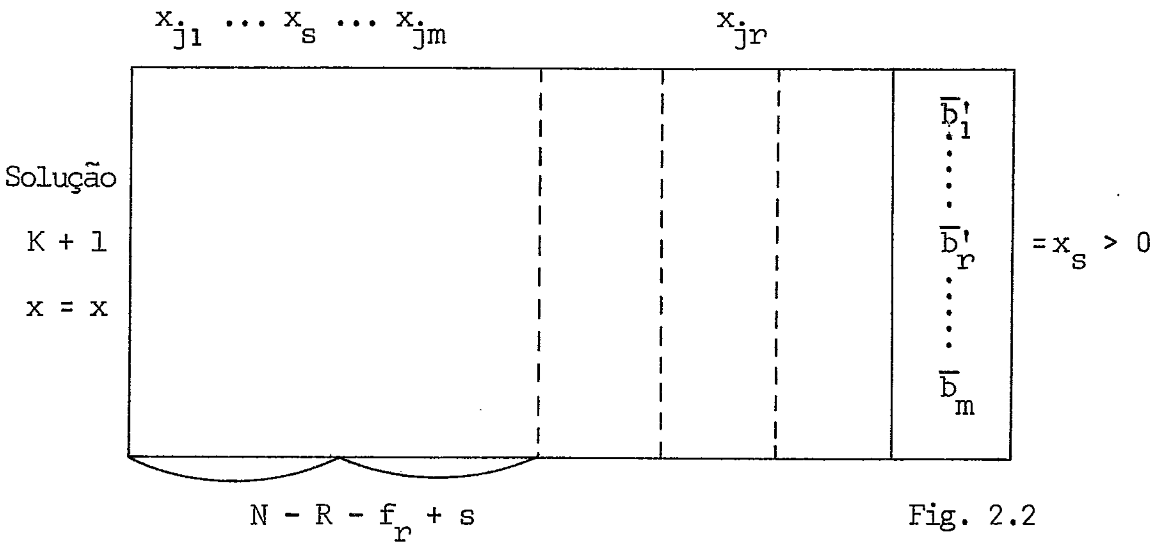


Fig. 2.2

Pelo lema 2 no caso 2 a relaxação também termina no ciclo K + 1 com um subproblema inviável. No caso 3 a situação no ciclo K e K + 1 do método dual são mostradas na figura 2. Pela hipótese de indução, R está mostrado e $x^R = x^K$. Desde que todas variáveis em R são nulas a relaxação não suprime nenhuma. Ela seleciona x_{jr}, as mais negativas variáveis em N-R e adiciona o índice j_r a R_i isto é, $R \leftarrow R + f_r$. Isto então soluciona ' P^{R+f_r}. Pelo lema 1., a solução x^{K+1} é a única solução para P^{R+f_r-s}. Pelo lema 3. x_s é positivo nesta solução, assim x^{K+1} é a solução única para P^{R+f_r}.. Desde que o dual não é degenerado, $cx^{R+f_r} < cx^R$, assim a relaxação suprime todas as variáveis possíveis através $R + f_r$. A única tal variável é x_s, assim que $R + f_r \leftarrow R + f_r - s$, e o teorema está provado.

Aspectos Computacionais. A fim de que a relaxação seja eficiente , o procedimento efetivo para identificar as restrições violadas (isto é, escolher o conjunto V) e para resolver, sucessivos problemas P^R devem es tar disponíveis. Há uma ampla liberdade permitindo a escolha de V. Uma escolha comum é o índice da restrição mais violada, como no método simplex dual. Esta escolha é frequentemente usada quando o número de restrições é grande, e quando o conjunto de funções restrições tem alguma ' estrutura especial. Então a restrição mais violada pode frequentemente ser gerada sem avaliar todas as funções restrições, resolvendo um subproblema adequado. Esta linha gerada é dual para o procedimento de geração em coluna discutido no capítulo 1. Portanto, a experiência computacional com várias táticas para dar preços as colunas em programação linear tem sido usado aqui.

2.3. Procedimento de Partição Rosen's para Problemas Angular e Dual-Angular.

2.3.1. Desenvolvimento do Algorítmo. O método de partição de Rosen resolve um par de problemas primal-dual da forma seguinte:

Problema Dual-Angular

$$\max V = \sum_{i=1}^{P} f_i' u_i + b_o' y \qquad (1)$$

$$\text{sujeito a} \left\{ {}'B_i u_i + A_i' y \leq c_i, \quad i = 1, p \right. \qquad (2)$$

Problema Angular

$$\min Z = \sum_{i=1}^{P} c_i' x_i \qquad (3)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \sum_{i=1}^{P} A_i x_i = b_o & (4) \\ B_i x_i = b_i & (5) \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, P & (6) \end{cases}$$

As matrizes A_i são $m_o \times n_i$, enquanto que B_i são $m_i \times n_i$. Esta técnica pode ser vista com uma especialização do método de Ritter's, para problemas com somente restrições acopladas ou variáveis acopladas. Assim, é um procedimento de relaxação. Isto funciona num problema angular gerando uma sequência de soluções básicas inviáveis e uma sequência correspondente de soluções básicas viáveis no dual. Mostraremos que, pela especialização deste par de problemas primal-dual, um número de simplificações ocorre. Restrições adicionais não são requeridas no problema reduzido, assim este problema nunca necessita ter mais que m_o linhas. Além disso, sucessivos problemas reduzidas podem ser solucionados eficientemente pelo método dual simplex, por caus da base ótima no ciclo i ser dual viável para o problema em 1 + 1.

Através do exposto faremos a seguinte suposição.

Suposição 1. A matriz restrição do problema angular tem dimensão completa (dim B = m).

Isto implica o seguinte resultado:

Teorema 1. Sobre a suposição 1,. cada matriz restrição B_i contém uma não singular sub-matriz, B_{ib}, de dimensão m_i.

Prova - Se dim $B_i < m_i$, então a linha correspondente do problema angular seriam dependentes (desde que elas são formadas por zeros acrescentados as linhas de B_i) contradizendo a suposição 1. Portanto, $n_i \geq m_i$, e B_i contém as B_i contém as sub-matriz desejadas.

Podemos também supor que $n_i > m_i$, desde que se $n_i = m_i$, as variáveis x_i são determinadas unicamente e podem ser eliminadas.

Um conjunto inicial de matrizes básicas B_{i1}, podem ser sempre encontradas, empregando o procedimento da fase 1 em cada bloco angular. Um ponto inicial viável pode ser usualmente determinado solucionando, um dos pares de subproblemas.

Subproblema Dual-Angular

$$\max b_i' n_i$$

$$\text{sujeito a } \left\{ B_i' n_i \leq c_i - A_i y \right. \qquad (7)$$

Subproblema Angular

$$\min c_i' x_i$$

$$\text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} B_i x_i = b_i \\ x_i \geq 0 \end{array} \right. \qquad (8)$$

No caso acima, y é um vetor para o qual as restrições de 7. são possíveis. Em todos os casos, diremos que as matrizes básicas inicial sejam escolhidas assim que as soluções básicas associadas sejam não negativas, e portanto são viáveis para o i-ésimo bloco angular. Esta condição é mantida depois disso pelo algorítmo. Como veremos no teorema 2, esta escolha garante a existência de uma sequência de operações de pivoteamento em cada bloco angular não-ótimo levando a interrelação de variáveis positivas e negativas.

<u>Suposição 2</u>. A matriz básica inicial B_{i1} satisfaz

$$B_{i1}^{-1}\, b_i \geq 0, \quad i = 1, P$$

As matrizes básicas B_{i1} são utilizadas para particionar o problema angular é dual-angular como segue:

Dual-Angular

$$\max \sum_i b_i'\, n_i + b_o'\, y$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} B_{i1}'\, n_i + A_{i1}'\, y \leq c_{i1} & (9) \\ B_{i2}'\, n_i + A_{i2}'\, y \leq c_{i2} & (10) \end{cases}$$

Angular

$$\min \sum_i (c_{i1}'\, x_{i1} + c_{i2}'\, x_{i2})$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \sum\limits_i (A_{i1}\, x_{i1} + A_{i2}\, x_{i2}) = b_o & (11) \\ B_{i1}\, x_{i1} + B_{i2}\, x_{i2} = b_i & (12) \\ x_{i1} \geq 0, \quad x_{i2} \mathbin{\_} 0, \quad i = 1, P. & \end{cases}$$

Relaxando as restrições $x_{i1} \geq 0$ e usando 12. para eliminar x_{i1} através da restrição acoplada 11. leva ao problema reduzido. Solucionando 12 para x_{i1} produz

$$x_{i1} = B_{i1}^{-1} b_i - B_{i1}^{-1} B_{i2} x_{i2} \qquad (13)$$

Então o problema reduzido é

$$\min \sum_i d_i' x_{i2}$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} \sum_i M_i x_{i2} = \hat{b}_o \\ x_{i2} \geq 0 \end{cases} \qquad (14)$$

onde

$$d_i' = c_{i2}' - c_{i1} B_{i1}^{-1} B_{i2} \qquad (15)$$

$$M_i = A_{i2} - A_{i1} B_{i1}^{-1} B_{i2} \qquad (16)$$

$$\hat{b}_o = b_o - \sum_{i=1}^{P} A_{i1} B_{i1}^{-1} b_i \qquad (17)$$

Este problema tem somente m linhas. De maneira que se problema reduzido é inviável o outro também é. O problema reduzido pode ser ilimitado quando o primal não é, o qual pode ser novamente tratado adicionando a restrição

$$\sum_i e_j' x_{j2} \leq t, \qquad t \text{ positivo}$$

Seja $\{x_{i2}^o, \ i = 1, \ldots P\}$ a solução do problema reduzido. Substituindo estes vetores em 13 produz valores para os x_{i1}:

$$x_{i1}^o = B_{i1}^{-1} b_i - B_{i1}^{-1} B_{i2} x_{i2}^o, \quad i = 1, P \qquad (18)$$

De acordo com nossos resultados prévios a relaxação, a solução acima é ótima se, e somente se ela é viável.

Teorema 2. (Teste de otimalidade). Os vetores $\{x_{i1}^o, \ldots, x_{i2}^o\}$ resolve o problema angular se, e somente se

$$x_{i1}^o \geq 0 \qquad i = 1, \ldots P \qquad (19)$$

Se o teste de otimalidade não é atingido, então seguindo a estratégia de relaxamento pelo menos uma violação não-negativa é forçada enquanto que, uma não-negativa correspondente a uma variável positiva é relaxada. No problema com ambas variáveis e restrições acopladas, a operação pivoteamento não pode sempre ser processada neste intercâmbio, e restrições adicionais torna-se necessário. Desde que não haja variável acoplada no problema angular, a sequência de pivoteamento existe, a qual leva à solução desejada.

Teorema 3. (Rosen). Se, para algum i, x_{i1}^o tem componente negativa, uma sequência de operações pivoteamento pode ser efetuada no i-ésimo bloco angular, intermudando uma componente de x_{i2}, que é positiva em x_{i2}^o e a componente de x_{i1} (que é negativa em x_{i1}^o).

A prova deste teorema requer o seguinte lema:

Lema 1. Considere o sistema linear

$$Ax = b$$

onde A é uma matriz mxn, n $\geq$ m é dim(A) = m. Se este sistema tem uma solução não-negativa, ele tem uma solução básica não-negativa.

Prova do Teorema 3. Para simplificar, suprimimos o bloco subscrito i, e concentramos num bloco particular não ótimo, usando subscrito para denotar componentes particulares de x_1, x_2, etc.

Temos avaliado duas soluções ao sistema

$$B_1x_1 + B_2x_2 = b \qquad (20)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

São elas

$$\begin{array}{ccc} \text{viável} & & \text{inviável} \\ \left[\begin{array}{c} x_{B_1} \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{array}\right] & \text{e} & \left[\begin{array}{c} x_1^o \\ \cdots\cdots \\ x_2^o \end{array}\right] \end{array} \qquad (21)$$

onde

$$x_{B_1} = B_1^{-1}b \qquad (22)$$

A primeira é não-negativa, a segunda tem alguma componente em x_i^o. Todos vetores da forma

$$(1 - \Theta)\left[\begin{array}{c} x_{B_1} \\ \hline 0 \end{array}\right] + \Theta\left[\begin{array}{c} x_1^o \\ \hline x_2^o \end{array}\right] \qquad (23)$$

também satisfazendo $B_1x_1 + B_2x_2 = b$, $x_2 \geq 0$. Quando $\Theta = 0$, esta solução é viável para <u>20</u>, enquanto que para $\Theta = 1$ ela é inviável.

Seja

$$J = \{J \mid x_{1j}^o < 0\} \qquad (24)$$

O maior Θ, que mantém a solução em <u>23</u> não-negativa é limitada pelas componentes de <u>23</u> com índices $j \in J$. Tornando estas componentes iguais a zero, teremos

$$x_{B_{1j}} + \Theta(x_{1j}^o - x_{B_{1j}}) = 0, \quad j \quad J \qquad (25)$$

ou

$$\Theta_j = \frac{x_{B_{1j}}}{x_{B_{1j}} - x_{1j}^o} \qquad (26)$$

Note que $0 \leq \theta_j \leq 1$. O maior θ que mantem 23 não-negativo é

$$\theta_s = \min_{j \in J} \theta_j \qquad (27)$$

Seja

$$K = \{K \mid x^o_{2K} > 0\}.$$

Observe que K deve ser diferente do vazio, desde que se todos x^o_{2K} fosse zero, então $x = B_1^{-1} b \geq 0$, contraria a nossa hipótese que x_1^o tem componente negativa. Quando $\theta = \theta_s$, 23 satisfaz

$$B_1(x_{B_1} + \theta_s(x_1^o - x_{B_1})) + \sum_{k \in K} B_2^K(\theta_s\, x^o_{2K}) = b \qquad (28)$$

com B_2^K a K-ésima coluna de B. Por definição de θ_s, os coeficientes da s-ésima coluna de B_1, B_1^S em 28 é zero.

Desde que B foi suposta m x m e não-singular, a matriz $[\, B_1 \vdots B_2 \,]$ tem dimensão m. Deixe identificar a coluna B_1^S através 28 e examinar a dimensão do sistema resultante. Multiplicando o sistema identificado ' por B_1^{-1} produz

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} V_i^o\, e_i + \sum_{k \in K} \bar{B}_2^k\, (\theta_s\, x^o_{2k}) = B_1^{-1} b \qquad (29)$$

com V_i^o a i-ésima componente da $x_B + \theta_s(x_1^o - x_{B_1})$, e_i a i-ésima componente vetor unitário, e $\bar{B}_2^k$ a k-ésima coluna $B_1^{-1} B_2$. O sistema acima mesma dimensão de sistema 28 sem B_1^S. Além do mais pelo menos um dos vetores $\bar{B}_2^k$, $k \in K$, diz $\bar{B}_2^k$, deve ter a s-ésima componente diferente de zero. Isto é porque $j \in J$ o vetor

$$x_1^o = x_{B_1} - B_1^{-1} B_2\, x_2^o \qquad (30)$$

tem componente negativa. Desde que $S \in J$, se todas componentes de $B_1^{-1} B_2$

na linha s e coluna $k \in K$ fosse zero, então

$$x_{1s} = x_{B_{1s}} \geq 0 \qquad (31)$$

que é uma contradição. Os vetores e_i, $i = 1,\ldots, m$, $i \neq s$, e B_2^{-k} são assim independentes, assim o sistema 28 com B_1^s escolhido tem dimensão m. Desde que este sistema tem uma solução tem uma solução não-negativa, então, pelo lema 1, ele tem uma solução básica não-negativa. Qualquer uma solução não envolve B_1^s e pode incluir somente aquelas colunas B_2^k com $k \in K$, assim o teorema está provado.

Observe que o teorema precedente não garante a existência de uma simples operação pivoteamento, gerando uma nova base, $\hat{B}_{i1}$. No entanto, estas bases podem ser encontradas, solucionando o programa linear

$$\min x_{1s}$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} B_1^k x_{1k} + \sum_{k \quad K} B_2^k x_{2k} = b \\ x_{1k} \geq 0, \qquad x_{2k} \geq 0 \end{cases} \qquad (32)$$

onde o índice escolhido em 27. A base inicial para este programa é B_1 , e existe uma solução ótima com x_{1s} não-básica. Somente mais um novo umas operações pivoteamento seriam requeridas para resolver este programa. Naturalmente, um de tais programas é resolvido para cada bloco não-ótimo no qual ele requerido para reforçar as restrições violadas.

— Resolvendo o programa 32 produz-se nova matriz básica, $\hat{B}_{i1}$, para cada bloco angular não-ótimo. Estes são usados para formar um novo problema reduzido, e um novo ciclo começa. Desde que o algorítmo é novamente uma realização particular do procedimento de relaxação, a convergên -

cia finita segue sobre condições análogas àquelas dadas no teorema 2.3.2. Aqui, no entanto, não tem sido feito nenhuma previsão para obrigar as não negativas as restrições não-negativas violadas incluindo restrições adicionais como em 2.3.26 no problema reduzido. Isto poderia ser feito se necessário, e então o teorema 2.3.2 garantiria isto. Se não adicionar restrições, a suposição que cada problema reduzido não tem solução ótima alternada que garanta as condições de convergência finita.

2.3.2. Considerações Computacionais

Seleção de restrições violadas a serem forçadas. Como no método Ritter's, existem várias maneiras para escolher, que restrição violada forçada. O mesmo comentário pode ser aplicado aqui, exceto para o fato em que o problema reduzido é de tamanho constante, independente do número de não-negativas forçadas. Isto é feito forçando tantas quantas delas, quanto possível em cada iteração mais atrativa. Esta opinião é escolher, a mais implementada para solucionar o programa linear 32 com função objetivo

$$Z = \sum_{j \in J} x_{1j} \qquad (39)$$

onde J é dado em 24. Novamente, existe um tal programa para cada bloco angular.

Solucionando Problemas Reduzidos Sucessivos. Aplicando este algorítmo partição, maioria do tempo computacional provavelmente seria gasto solucionando o problema reduzido. Isto é consequentemente importante que informação da solução no ciclo K pode ser utilizada eficientemente na solução do problema no ciclo K + 1. Os resultados seguintes mostram como isto pode ser feito.

Para simplificar, consideremos primeiro um bloco problema angular

$$\min Z = c_1 x_1 + \hat{c}_2 x_2$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} \begin{matrix} m_o \\ \text{linhas} \end{matrix} & \left\{ A_1 x_1 + \hat{A}_2 x_2 = \hat{b}_o \right. \\ \begin{matrix} m_1 \\ \text{linhas} \end{matrix} & \left\{ \begin{matrix} B_1 x_1 + \hat{B}_2 x_2 = \hat{b}_1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{matrix} \right. \end{cases} \qquad (40)$$

onde B_1 é uma matriz básica de dimensão m_1. Note que qualquer programa linear pode ser escrito desta maneira, assim o algorítmo Rosen's partição é completamente geral. Usando a matriz B_1 para eliminar x_1 através das primeiras m_o linhas e através da função objetivo produz o seguinte quadro:

$$\min c_2x_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} A\,x = b_o \\ x_1 + B_2x_2 = b_1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{41}$$

O problema reduzido é obtido relaxando a restrição $x_1 \geq 0$

$$\min c_2x_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} A\,x = b_o \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{42}$$

Seja x_2^o solução deste problema e seja B_o a matriz básica associada com x_2^o. Novamente para simplificar, supomos que B_o é composto das m_o primeiras colunas de A_2:

$$B_o = [\,A_2^1, \ldots, A_2^{m_o}\,] \tag{43}$$

Seja

$$x = (y \,\vdots\, w) \tag{44}$$

com y contendo as componentes básicas de x_2^o e w as não-básicas. Colocando o problema reduzido na forma canônica em relação a y produz-se o seguinte quadro (com $x \equiv x_1$, $b \equiv b_1$):

$$\begin{cases} y + Ew = y^o \\ -Z + \bar{c}w = -Z^o \\ x + ey + Dw = b \end{cases} \tag{45}$$

Suponhamos agora que componente r do vetor

$$x^o = b - cy^o \qquad (46)$$

é negativa e que uma simples operação pivoteamento para intercambiar x_r com alguma componente de y, que é positiva em y^o, diga-se y_s. Se este pivoteamento é extendido para as m_o linhas de 45, y_s é eliminado atra - vés do problema reduzido, x_r é introduzido, e os elementos da matriz do problema reduzido muda. Seja x_r agora substituindo y_s com as s-ésimas variáveis básicas do problema reduzido e seja $\bar{B}$ a matriz básica correspondente. Mostraremos que $\bar{B}$ tem mesmo multiplicadores simplex como B_o, e é um ótimo, porém uma base inviável para o novo problema reduzido. Este resultado garante quando um número de componentes de y e x são intercambiadas. Isto implica que o novo problema reduzido pode ser solucionado eficientemente usando $\bar{B}$ como uma base inicial para o método dual simplex.

As importantes relações entre problemas reduzidos sucessivos são dadas pelo teorema seguinte, que é uma extensão do resultado anterior devido a "Gauss".

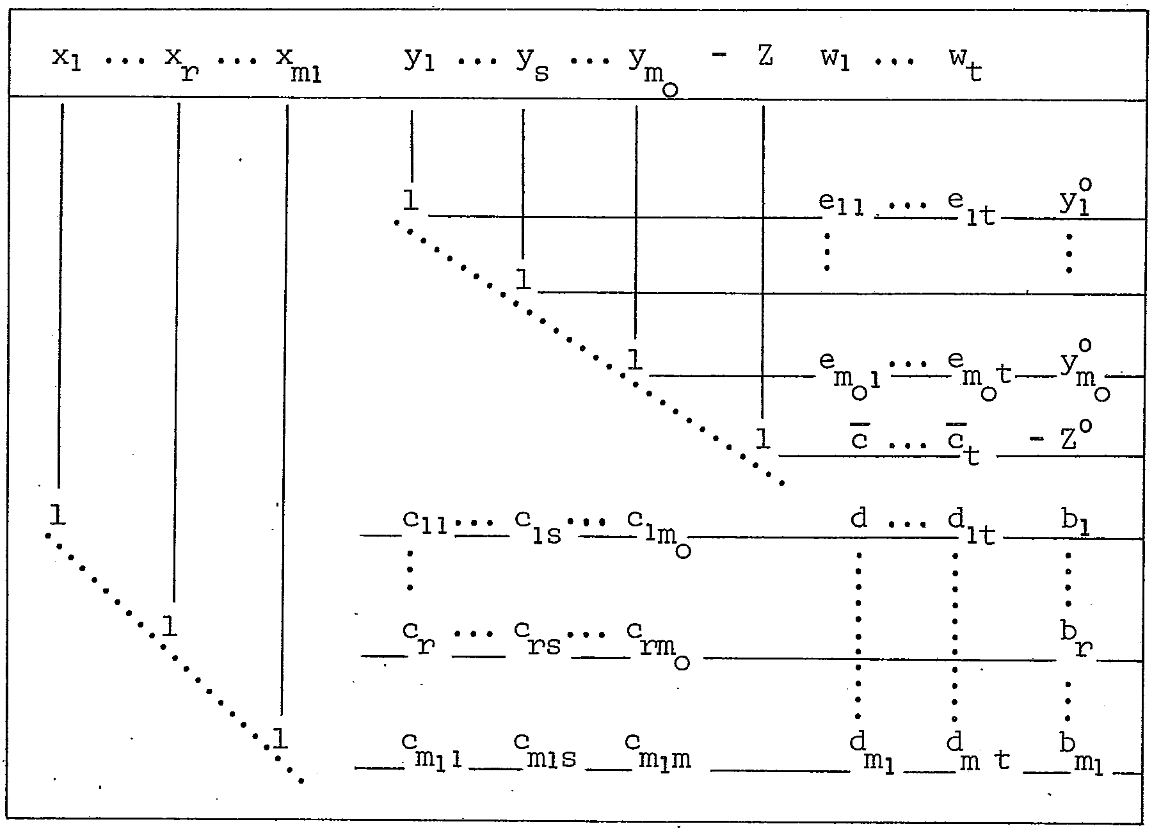
<u>Teorema 5</u>. No quadro 45, seja um número de operações pivoteamento efetuadas, intercambiando uma ou mais componentes de x com igual componente de y, todas positivas em y^o. Se $\bar{B}$ derrota a transformação pivoteal do problema reduzido prévio base ótima, B_o então

a) $\bar{B}$ tem mesmo multiplicadores simplex como B_o e estes causa todas não básicas colunas do problema reduzido novo para preço fora não negativas variáveis. Assim B é uma base ótima.

b) A solução básica associada com $\bar{B}$ tem $y_i = y_i^o$ se y_i é básica e $x_j = x_j^o$

se x_j é básica. Portanto, esta solução é inviável somente em componentes onde $x_j^o < 0$.

<u>Prova</u> - Considere a primeira operação pivô simples sobre c_{rs}, que intercambia x_r e y_s no quadro seguinte, que é uma revisão detalhada de <u>45</u>:



Note que $\bar{c}_t \geq 0 \;\; \forall_i$, desde que y^o é uma solução ótima para o problema reduzido. Depois o pivô sobre a linha $m_o + 1$ (o quadro do problema reduzido) aparece como segue:

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc|}
 & x_1 & \cdots & x_r & \cdots & x_{m_1} & y_1 & \cdots & y_s & \cdots & y_{m_o} & -Z & w_1 \cdots w_t \\
\hline
 & & & & & & 1 & & & & & & y_1^o \\
 & & & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\
c_{r_1} & -\dfrac{1}{c_{rs}} & \cdots & & & -\dfrac{c_{rs}}{c_{rs}} & \cdots & & 0 & \cdots & -\dfrac{c_{rm_o}}{c_{rs}} & \cdots & y_s^o - b_r/c_{rs} \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & 1 & & y_{m_o}^o \\
 & & & & & & & & & & & 1 & \bar{c}_1 \ldots \bar{c}_t \quad -Z
\end{array}
$$

Como indicado, x_r e y_s são intercambiados, produzindo o novo quadro de problema reduzido. Para colocar este na forma canônica relativa as variáveis básicas y ,... y_{s-1}, x_r, y_{s+1} ... y_{m_o}, - Z multiplicamos todas colunas da matriz elementar de dimensão $m_o + 1$.

$$
E_{rs} = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
-c_{r1} & -c_{r2} & \cdots & 1 & \cdots & -c_{rs} & \cdots & -c_{rm_o} & 0 \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

Desde que esta operação deixa a linha Z, imutável, o novo quadro ainda satisfaz as condições ótimas $\bar{c}_i \geq 0$. A inversa da nova base é

$$
\bar{B}^{-1} = E_{rs} B_o^{-1} \qquad (48)
$$

A matriz E_{rs} tem o vetor unitário $\mu_{m_o} + 1$ como na última linha, assim $\overline{B}^{-1}$ e B_o^{-1} têm as últimas linhas iguais. Desde que estas linhas contém os multiplicadores simplex, parte do teorema está provado para este simples pivoteamento.

A extensão do argumento acima sobre multi-pivôs é correta. A nova forma canônica é obtida, multiplicando-se a original pela matriz elementar, cada diferindo da identidade em somente uma linha. A nova base inversa é dada por

$$B^{-1} = E_{r_k s_k} E_{r_{k-1} s_{k-1}} \ldots E_{r_1 s_1} B_o^{-1} \qquad (49)$$

Novamente, desde que todas variáveis y_i têm coeficientes zero na linha Z, esta linha não muda com a operação pivô e cada matriz elementar tem o vetor unitário $\mu_{m_o} + 1$ como na última linha. Assim $\overline{B}^{-1}$ tem os mesmos multiplicadores simplex como B_o^{-1} e é uma base ótima, assim parte a do teorema está provada.

Para provar a parte b procedemos como segue. Com $w = 0$, equação 45 tem a única solução $y = y^o$, $Z = Z^o$, $x = x^o = b - cy^o$. Depois qualquer (número) operação pivô é efetuado neste a única solução (novamente com $w = 0$), de qualquer forma o sistema é transformado. Portanto, qualquer variável introduzida na linha m_o de 45 tem o valor x_i^o na nova forma canônica, enquanto variáveis y_i tem valores y_i^o .

O Princípio de Decomposição - DANTZIG-WOLFE

3.1. Introdução

O procedimento do princípio de decomposição é eficiente quando aplicado a programas de programação linear, cuja matriz dos coeficientes tem uma estrutura angular, isto é, tem um ou mais blocos independentes e um bloco coletivo envolvendo todas as variáveis. Ele opera formando um Programa Principal equivalente, com menos linhas do que as existentes no programa original, mas com mais colunas. Este programa é resolvido sem levar em consideração todas estas colunas, gerando-as quando o Método Simplex (utilizado na resolução) necessitar, uma técnica que chamaremos de geração de colunas. O algorítmo resultante, envolve iterações entre um conjunto de subproblemas independentes, cujas funções objetivo, contém ' vários parâmetros, e o programa principal. Os subproblemas recebem um conjunto de parâmetros (multiplicadores do Simplex) através do programa principal. Os subproblemas enviam suas soluções ao programa principal , que combina estas com as soluções prévias viáveis e calcula novos multiplicadores do Simplex. Estes são novamente enviados aos subproblemas e o processo iterativo procede até que o ponto ótimo seja atingido.

O capítulo começa com breves seções sobre um teorema a ser usado frequentemente mais tarde e sobre a geração de colunas. O procedimento básico e algumas de suas variáveis são então desenvolvidas e um exemplo numérico é dado. Finalmente, uma técnica alternativa para resolver o problema principal é descrita, envolvendo aplicação do método primal-dual em programação linear.

3.2. Um Teorema sobre Combinações Convexas

O desenvolvimento do princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe, depende principalmente de duas notações. A primeira destas, gerador de colunas, é descrito na seção seguinte. A segunda é um teorema, afirmando que um ponto está contido num politopo convexo, limitado e fechado se, e somente se pode ser escrito como uma combinação convexa de pontos extremos do politopo. Esta prova requer os seguintes resultados a respeito de conjuntos convexos:

1. Seja X um conjunto convexo e y um elemento não pertencente a X. Então, existe um hiperplano, que separa y e X.
2. Se X é um conjunto convexo e compacto, então qualquer hiperplano suporte para X contém um ponto extremo de X.

Teorema 1. Seja X um conjunto compacto convexo em E^n, E(X) o conjunto dos seus pontos extremos e C[E(X)] a fronteira convexa de E(X). Então, C[E(X)] = X.

Prova.

I. Deve mostrar que $C[E(X)] \sqsubseteq X$ Escrevemos, $\forall y \; C[E(X)]$ como

$$y = \sum_i \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1 \qquad x^i \in E(X) \qquad (1)$$

Então, desde que $X^i \in X$ e X é convexo $\Longrightarrow y \quad X$.

II. Resta mostrar que $X \sqsubseteq C[E(X)]$

Seja $x^* \in X$, mas $x^* \notin C[E(X)]$. Então, x^* pode ser separado de C[E(X)] por um hiperplano, isto é, existe (c,α) tal que

$$c'\, x^* = \alpha \qquad (2)$$

$$c'\, y < \alpha \qquad \forall\, y \in C[E(X)] \qquad (3)$$

Seja $\alpha^o = \max \{c'x | x \in X\}$. O número α^o existe desde que X é compac- to. Então, (c, α^o) define o hiperplano suporte para X desde que $c'x \leq \alpha^o \quad \forall x \in X$

Como tal, ela deve conter um ponto extremo de X, x^i, assim $c'x^i = \alpha^o$ 4. Mas, isto contradiz o fato de que, todos pontos de $C[E(X)]$ satisfazem 3. desde que $\alpha^o \geq \alpha$.

3.3. Coluna Geratriz

Considere o problema de programação linear

$$\begin{cases} \min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \\ \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, n \end{cases}$$

sujeito a

onde P_j e b são vetores

Afirmamos que uma solução básica inicial viável, x_B é valiosa, com a matriz básica B e coeficientes de custo c_B. Uma tal solução, se ela' existe podemos encontrar. Os multiplicadores do Simplex associados com estas bases são $\pi = c_B B^{-1}$ e estão sempre disponíveis. Para introduzir a solução básica viável, analizamos fora todas as colunas correspondentes as variáveis não básicas com seus coeficientes de custo relativo

$$\bar{c}_j = c_j - \pi P_j$$

se

$$\min \bar{c}_j = \bar{c}_s < 0$$

então, salvo degeneração, a solução corrente pode ser melhorada, introduzindo-se x_s na base, através de um pivoteamento.

3.4. Desenvolvimento do Princípio de Decomposição

Considere um problema de programação linear, cuja matriz dos coeficientes tem P-blocos em estrutura angular com $P \geq 1$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_p \end{bmatrix}$$

Qualquer programa de programação linear, pode ser considerado para esta forma com P = 1 dividindo suas restrições em dois sub-conjuntos:

$$\min Z = cx \qquad (1)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} A_1\ X = b_1 & m_1 \quad \text{restrição} & (2) \\ \hat{A}\ \ X = b & m_2 \quad \text{restrição} & (3) \\ X \geq 0 & & (4) \end{cases}$$

Afirmamos que o politopo convexo

$$S_2 = \{x | A_2 x = b_2, \quad x \geq 0\} \qquad (5)$$

é limitado. Então, qualquer elemento de S_2 pode ser escrito como

$$X = \sum_j \lambda \ \ x^j \qquad (6)$$

onde

$$\Sigma\ \lambda_j = 1, \qquad \lambda_j \geq 0 \qquad (7)$$

e x^j é um ponto extremo de S_2.

O problema original 1 - 4 pode ser revisto como segue. Escolher através de todas as soluções de 3 - 4, aquelas que satisfazem 2 e min Z. Para executar, satisfazendo 2, substitue 6 em 2 obtendo

$$\sum_j (\hat{A}_1\ x^j)\ \lambda_j = b \qquad (8)$$

Substituindo 6 em 1 obtemos uma expressão para Z em função de λ_j:

$$\text{Definindo} \begin{cases} Z = \sum\limits_j (c\, x^j)\, \lambda_j & (9) \\ \hat{A}_1\, x^j = P_j & (10) \\ c\, x^j = f_j & (11) \end{cases}$$

relacionando 7 com 9 obtemos um problema de programação linear em λ_j.

$$\min \sum f_j\, \lambda_j \qquad (12)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \sum\limits_j P_j\, \lambda_j = b & (13) \\ \sum\limits_j \lambda_j = 1 & (14) \\ \lambda_j \geq 0 & (15) \end{cases}$$

Este programa acima, chamado de programa principal, é completamente equivalente ao original. Ele tem somente $m_1 + 1$ linhas, comparadas com $m_1 + m_2$ linhas do problema original. E o número de colunas é correspondente aos muitos pontos extremos do politopo S_2. Como afirmamos a princípio, não vamos tabular todas estas colunas, utilizaremos uma técnica de coluna-geratriz, com o objetivo de gerar colunas e introduzi-las na base obedecendo um critério de prioridade para a introdução de cada uma delas.

De uma maneira mais generalizada, vamos considerar o coeficiente de custo relativo para a variável λ_j:

$$\bar{f}_j = f_j - \pi \left[\frac{P_j}{1} \right] \qquad (16)$$

Considerando π como $\pi = (\pi_1 \quad \pi_0)$ onde π_1 corresponde a restrição 13 e o escalar π_0 a simples restrição 14. Então, usando as definições de f_j e P_j em 10 e 11 $\bar{f}_j$ pode ser escrito:

$$\bar{f}_j = (c\ \pi_1\ A_1)\, x^j - \pi_0 \qquad (17)$$

O usual critério simplex que encontra

$$\min_{j} \; \bar{f}_j = \bar{f}_s = (c - \pi_1 A_1)\, x^s - \pi_0 \qquad (18)$$

na ordem para escolher a variável λ_s, para entrar na base. Chega-se que x^j é o ponto extremo de S_2 e que $\bar{f}_j$ é linear em x^j. Então, desde que uma solução ótima de um problema de programação linear, cujo conjunto de restrições é limitado, ocorre num ponto extremo do conjunto, 18 é equivalente ao subproblema

$$\min \; (c - \pi_1 \hat{A}_1)x \qquad (19)$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} A_2 \, x \;\square\; b_2 & (20) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Para encontrar a coluna que deve entrar na base do programa principal, resolve este subproblema, obtendo uma solução x^s. Então, a coluna para entrar na base é

$$P_s = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \, x^s \\ \text{-----} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

com coeficiente de custo

$$f_s = c \, x^s \qquad (22)$$

Esta aproximação torna-se particularmente atrativa, porque se P, o número de blocos independentes na estrutura angular é, maior do que um, isto é, se o problema a ser resolvido tem a forma:

$$\min Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_p x_p \qquad (23)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_px_p = b \\ B_1x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = b_1 \\ \qquad B_2x_2 \qquad\qquad\quad = b_2 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad B_px_p = b_p \\ x_p \geq 0, \quad P > 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (24) \\ \\ (25) \end{matrix}$$

então o subproblema 19 - 20 se torna

$$\min \sum_{i=1}^{n} (c_i - \pi_1 A_1)x_i \qquad (26)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} B_ix_i = b_i \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \quad P \end{cases} \qquad (27)$$

Desde que a função objetivo 26 é aditivamente separável em x_i bem como as restrições 27 são independentes sobre x_i, este problema se reduz a P subproblemas independentes:

$$\min (c_i - \pi_1 A_i)x_i \qquad (28)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} B_ix_i = b_i \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad (29)$$

3.5. Algorítmo Decomposição

Afirmamos que uma solução básica inicial viável para o programa principal 12-15 é valiosa, com matriz básica B e multiplicador Simplex (π_1, π_0).

Passo 1. Usando o multiplicador do simplex π_1, resolvendo os subproblemas 28, 29, obtendo soluções $x_i(\pi_1)$ e valor objetivo ótimo Z_i^o.

Seja $$x(\pi_1) = (x_1(\pi_1), \ldots, x_p(\pi_1))'$$

Passo 2. Calcule o $$\min \overline{f}_j = \sum_{i=1}^{P} Z_i^o - \pi_0 \qquad (30)$$

Se $\min \overline{f}_j \geq 0$ *Pare* (31)

A solução ótima para 23-25 é $x^o = \sum_{j \text{ básico}} \lambda_j x^j$, onde x^j são os pontos extremos de S_2 correspondendo a λ_j básico.

Passo 3. Se $\min \overline{f}_j < 0$, forme a coluna

$$P = \begin{bmatrix} \Sigma A_i x_i (\pi_1) \end{bmatrix} \qquad (33)$$

façamos $P' = B^{-1} P$. Transforme o pivoteamento em P' no problema principal, teremos uma nova base λ_j, uma nova matriz B e um novo vetor (π_1, π_0). Retorne ao Passo 1.

3.6. Programa Principal Restrito

Por definição, um programa principal restrito é um programa com uma formulação mais simétrica possível, com o objetivo de solucionar problemas de programação linear. Isto, nada mais é do que o programa principal 12-15 constituído de todas as colunas que estão na base corrente e mais a coluna gerada que deve entrar na base neste estágio iterativo.

Então, o programa principal restrito é:

$$\min \; f_1 \lambda_1 + \ldots + f_m \lambda_m + f \lambda \qquad (34)$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} P_1 \lambda_1 + \ldots + P_m \lambda_m + P \lambda = b_0 & (35) \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_m + \lambda = 1 & (36) \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, m \quad \text{e} \quad \geq 0 & (37) \end{cases}$$

onde $m = m_1 + 1$, λ_i são as variáveis básicas e λ a variável introduzida neste estágio. Se a variável λ entra na base, afirmamos que ela tem um $\bar{f} < 0$. Se a base em curso é não degenerada, a variável que sobra terá $\bar{f} > 0$ e só a nova solução será ótima. Quando realmente a base em curso é degenerada, mais que uma iteração é necessária para se atingir o ótimo e o elemento pivô na coluna a ingressar é negativo. Portanto, o pequeno lucro obtido é para solucionar 34 - 37.

3.7. Alternativas Estratégicas para Decompor o Primal

Existem várias maneiras para se processar uma decomposição do primal, sendo que, cada das quais afeta a forma do programa principal restrito. Especificamente, se soluções para as restrições

$$B_i \, x_i = b_i \; . \; x_i \geq 0 \qquad (38)$$

são escritas

$$x_i = \sum_j \lambda_{ij} \, x_i^j \qquad (39)$$

onde x_i^j é ponto extremo de $B_i x_i = b_i \; . \; x_i \geq 0$, então o programa principal resultante é o seguinte:

$$\min \sum_{i,j} f_{ij} \, \lambda_{ij} \qquad (40)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \sum\limits_{i,j} P_{ij} \, \lambda_{ij} = b_o & (41) \\ \sum\limits_{j} \lambda_{ij} = 1, \; i = 1, \; P, \quad \lambda_{ij} \geq 0 & (42) \end{cases}$$

onde

$$f_{ij} = c_i \, x_i^j \qquad (43)$$

$$P_{ij} = A_i \, x_i^j \qquad (44)$$

Este programa difere do original 12-14 obtido previamente, em dois aspectos. Primeiro cada subsistema $B_i x_i = b_i \; . \; x_i \geq 0$, é, representado separadamente por um conjunto de variáveis λ_{ij}. O segundo aspecto é, a abertura computacional possível. Para ver isto, considere a solução 40—42 utilizando o método simplex com a coluna gerada. Seja B a matriz básica viável $(m_1 + P) \times (m_1 + P)$ e seja $(\Pi, \Pi_{01}, \ldots \Pi_{0p})$ os multiplicadores ' simplex para esta base, com Π associado com 41 e Π_{0i} com 42 valorizando fora a coluna associada com λ_{ij}, resulta

$$f_{ij} = (c_i - \Pi A_i)\, x_i^j - \Pi_{0i} \qquad (45)$$

O problema de encontrar min f_{ij} para um fixado i é, equivalente a resolver o i-ésimo subproblema:

$$\min\ (c_i - \Pi A_i)x_i$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} B_i\, x_i = b_i \\ x_i > 0 \end{cases}$$

Estes subproblemas são idênticos aos previamente obtidos. Seja z_i^o o valor objetivo mínimo acima. Se

$$\min_i \min_j f_{ij} = \min_i (z_i - \Pi_{0i}) \geq 0 \qquad (46)$$

a solução corrente é ótima. Se não a coluna para entrar na base é tal que

$$\min_{1 \leq i \leq P} (z_i^o - \Pi_{oi}) \qquad (47)$$

Se o mínimo ocorre para i = S e $x_s(\Pi_1)$ resolve o subproblema S, a coluna que deve entrar é dada por

$$\begin{bmatrix} A_s\, x_s\, (\Pi_1) \\ \hline \mu_s \end{bmatrix} \qquad (48)$$

onde μ_s é um vetor da coordenada "1" na s-ésima posição e "0" (zero) nas demais. Embora esta coluna entre, agora a base produz novos multiplicadores (Π_1, Π_0), similarmente, colunas terão de ser geradas através das soluções dos subproblemas dos outros subsistemas. Um destes, provavelmente ' terá custo relativo negativo usando os multiplicadores antigos. Se qualquer coluna preço, fora é negativa, usando os novos multiplicadores, ela pode ser utilizada para reduzir o objetivo. Isto é uma boa motivação para se construir um novo programa principal, com uma nova coluna de cada subsistema.

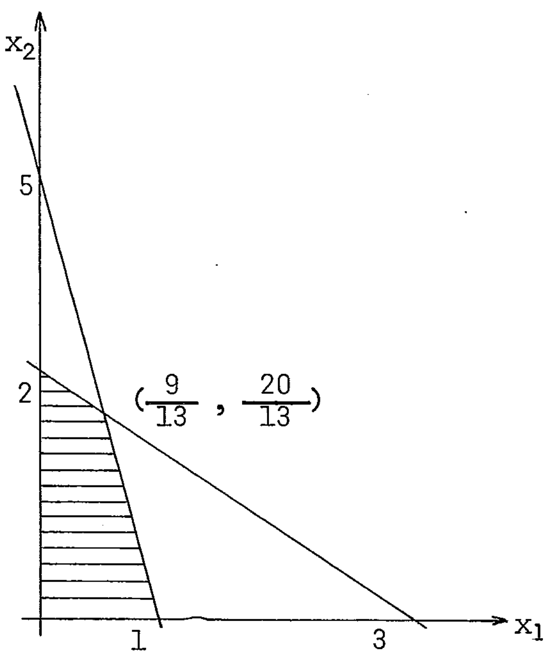
3.8. Exemplo Numérico do Princípio Decomposição

Para ilustrar o princípio decomposição, considere o problema:

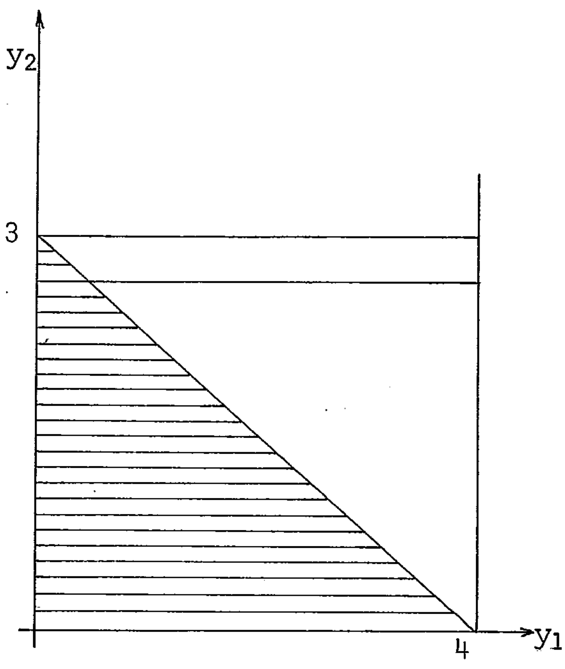
$$\min z = -x_1 - 8x_2 - 5y_1 - 6y_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \boxed{x_1 + 10x_2 + 5y_1 + 2y_2} \leq 21 \\ \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + x_2 \end{array}} \begin{array}{l} \leq 6 \\ \leq 5 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{l} 3y_1 + 4y_2 \\ y_1 \\ \quad\quad y_2 \end{array}} \begin{array}{l} \leq 12 \\ \leq 4 \\ \leq 3 \end{array} \\ x_1, y_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

Este problema tem uma restrição coletiva envolvendo todas as variáveis e dois blocos de restrições independentes. A seguir apresentaremos as regiões viáveis correspondentes aos blocos.



Conjunto S_1



Conjunto S_2

Este problema pode ser decomposto em dois subproblemas, cada um conduzindo para um diferente número de restrições convexas, $\sum_j \lambda_{ij} = 1$ no programa principal. Para fazer uso inteiramente das restrições do programa principal, duas restrições convexas serão incluídas. Seja x e y soluções viáveis para os blocos 1 e 2 respectivamente e escrevemos

$$x = \sum_i \alpha_i x^i \quad , \quad y = \sum_i \beta_i y^i$$

com x^i e y^i pontos extremos destes blocos. A restrição coletiva e a função objetivo são escritas em notação vetorial como:

$$z = c_1x + c_2y$$

$$a_1x + a_2y + S = 21$$

onde $c_1 = (-1, -8)$, $c_2 = (-5, -6)$, $a_1 = (1, 10)$, $a_2 = (5, 2)$ e $S > 0$ variável de folga.

O programa principal, então se torna:

$$\min z = \sum_i (c_1x^i)\alpha_i + (c_2y^i)\beta_i$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} \sum (a_1x^i)\alpha_i + (a_2y^i)\beta_i + S = 21 \\ \sum_i \alpha_i = 1 \\ \sum_i \beta_i = 1 \\ \alpha_i \ , \ \beta_i \geq 0 \end{cases}$$

Uma solução inicial básica pode ser obtida escolhendo

$$x^1 = y^1 = (0, 0), \quad \alpha_1 = \beta_1 = 1, \quad S = 21$$

Portanto, o quadro inicial do simplex revisado é o seguinte:

	1	S	α_1	β_1
-z	0	0	0	0
S	21	1		
α_1	1		1	
β_1	1			1

Primeira Iteração

Os multiplicadores do simplex para o programa principal estão contidos na parte superior do quadro e são todos nulos. Portanto o primeiro conjunto de subproblemas é:

$\min z_1 = c_1 x = -x_1 - 8x_2$

sujeito a $x \in S_1$

$\min z_2 = c_2 y = 5y_1 - 6y_2$

sujeito a $y \in S_2$

com solução ótima obtida por inspeção:

$x^2 = (0, 2)$

$z_1^o = -16$

$y^2 = (4, 0)$

$z_2^o = -20$

Os custos mínimos relativos de fatores são

$$\min \bar{f}_x = z_1^o - \Pi_{o1} = -16$$

$$\min \bar{f}_y = z_2^o - \Pi_{o1} = -20$$

Associar com o programa principal cada coluna juntamente com a solução dos subproblemas.

As colunas correspondentes à solução corrente são

$$\begin{bmatrix} c_1x^2 \\ a_1x^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} c_2y^2 \\ a_2y^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O programa principal restrito é agora formado utilizando o programa principal base mais estas novas colunas:

$$\min \quad -16\,\alpha_2 - 20\,\beta_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} 8\,\alpha_2 + 20\,\beta_2 + S = 21 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \alpha_i\,,\quad \beta_i \geq 0 \end{cases}$$

Este programa é resolvido, utilizando-se o método simplex revisado, produzindo a seguinte sequência de quadros:

	1	S	α_1	β_1	β_2
$-z$	0	0	0	0	-20
S	21	1			20
α_1	1		1		0
β_1	1			1	1

Para minimizar, a coluna correspondente a β_2 deve entrar na base

	1				α_2
$-z$	20	0	0	20	-16
S	1	1		-20	20
α_1	1		1		1
β_2	1			1	0

Agora se deve introduzir a coluna correspondente a α_2

	1			
$-z$	$\frac{416}{20}$	$\frac{16}{20}$	0	4
α_2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\underline{0}$	-1
α_1	$\frac{19}{20}$	$-\frac{1}{20}$	1	1
β_2	1	$\underline{0}$	$\underline{0}$	1

A nova solução do problema primal é

$$x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 = \frac{19}{20}(0, 0) + \frac{1}{20}(0, 2)$$

$$y = \beta_2 y^2 \qquad = 1 \, . \, (4, 0)$$

com valor objetivo

$$z = -\frac{416}{20}$$

Segunda Iteração

Os novos multiplicadores do simplex são encontrados na primeira linha do último quadro, isto é:

$$(\Pi, \Pi_{o1}, \Pi_{o2}) = \left(-\frac{16}{20}, 0, -4\right)$$

Estes valores são utilizados para formar novos subproblemas

$$z_1 = (c_1 - \Pi a_1)x = \left[(-1, -8) + \frac{16}{20}(1, 10)\right]x = -\frac{4}{20}x_1 + 0x_2$$

$$z_2 = (c_2 - \Pi a_2)y = \left[(-5, -6) + \frac{16}{20}(5, 2)\right]y = -y_1 - \frac{88}{20}y_2$$

Minimizar estes subsistemas para as regiões viáveis S_1 e S_2. Encontrando por inspeção a seguinte solução:

$$x^3 = (1, 0) \qquad \text{e} \qquad y^3 = (4, 0)$$

$$z_1^o = -\frac{4}{20} \qquad\qquad z_2^o = -4$$

com custos mínimos relativo de fatores

$$\min \bar{f}_x = z_1^o - \Pi_{o1} = -\frac{4}{20} - 0 = -\frac{4}{20}$$

$$\min \bar{f}_y = z_2^o - \Pi_{o2} = -4 + 4 = 0$$

e a coluna associada

$$\begin{bmatrix} c_1x^3 \\ a_1x^3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} c_2y^3 \\ a_2y^3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O novo programa principal (novamente) é constituído do anterior mais estas novas colunas:

$$\min \quad -16\,\alpha_2 - 20\,\beta_2 - \alpha_3 - 18\,\beta_3$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} 20\,\alpha_2 + 20\,\beta_2 + \alpha_3 + 6\,\beta_3 = 21 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ \alpha_i \, , \quad \beta_i > 0 \end{cases}$$

Agora este programa principal é resolvido, juntando-se ao último quadro da primeira iteração, a coluna obtida se multiplicando β^{-1} pelos coeficientes da nova variável a ser introduzida na base, isto é, α_3

$$\beta^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{20} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta^{-1}\alpha_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{20} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{19}{20} \\ 0 \end{bmatrix}$$

	1				α_3
$-z$	$\frac{416}{20}$	$\frac{16}{20}$	0	4	$-\frac{4}{20}$
α_2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	-1	$\frac{1}{20}$
α_1	$\frac{19}{20}$	$-\frac{1}{20}$	1	1	$\frac{19}{20}$
β_2	1	0	0	1	0

Efetuando o pivoteamento, teremos:

	1			
$-z$	$\frac{420}{20}$	$\frac{300}{380}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{80}{19}$
α_2	0	$\frac{1}{19}$	$-\frac{1}{19}$	$-\frac{20}{19}$
α_3	1	$-\frac{1}{19}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{20}{19}$
β_2	1	0	0	1

A solução corrente para o problema primal é

$$\begin{cases} x = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0 \, . \, (0,\ 2) + 1 \, . \, (1,\ 0) \\ y = \beta_2 y^2 \qquad\qquad\quad = 1 \, . \, (4,\ 0) \end{cases}$$

com o valor objetivo

$$z = -\frac{420}{20}$$

Terceira Iteração

Os novos multiplicadores do simplex são

$$(\Pi, \Pi_{o1}, \Pi_{o2}) = - (\frac{300}{380}, \frac{4}{19}, \frac{80}{19})$$

e os subsistemas

$$z_1 = [(-1, -8) + \frac{300}{380} (1, 10)] x = - \frac{80}{380} x_1 - \frac{40}{380} x_2$$

$$z_2 = [(-5, -6) + \frac{300}{380} (5, 2)] y = - \frac{400}{380} y_1 - \frac{16800}{3800} y^2$$

com solução ótima dos subproblemas

$$x^4 = (0, 2) \qquad \text{e} \qquad y^4 = (4, 0)$$

$$z_1^o = - \frac{80}{380} \qquad\qquad z_2^o = - \frac{1600}{380}$$

com custos mínimos relativo de fatores

$$\min \bar{f}_x = z_1^o - \Pi_{o1} = - \frac{80}{380} + \frac{4}{19} = 0$$

$$\min \bar{f}_y = z_2^o - \Pi_{o2} = - \frac{1600}{380} + \frac{80}{19} = 0$$

Desde que são não-negativos, a solução corrente do primal é ótima, isto é, o ótimo está na iteração anterior.

4.1. Decomposição - Princípio para Descentralização e Economia Externa

Dantzig e Wolfe, têm desenvolvido uma técnica computacional, chamada o método decomposição, o qual em muitos casos permite a solução de programas lineares de grande porte.

A este método decomposição pode ser dado uma interpretação econômica. Esta técnica parte com decomposição primária, tornando assim um instrumento de análise econômica.

O princípio decomposição indica caminho para descentralizar a economia, tomando decisões por divisões dentro da firma. O método inclue nas suas operações um coordenado mecanismo, o qual prevê a decisão descentralizar através do trabalho em propósito.

Este mecanismo utiliza com seus instrumentos uma generalizada interpretação de preço - abrigo da teoria de dualidade de programação linear.

A parte do processo de decomposição que descentraliza decisão ao trabalho em andamento, oferece uma aproximação máxima necessária para o problema que se levanta fora da presença da economia externa e deseconomia.

Para descentralizar decisões, não automaticamente, produz-se um ótimo sobre os resultados justos, porque desta espécie de fenômeno - o fato que a subdivisão da firma ou a indústria ou a economia não pode tomar prestações de contas dos benefícios conferidos ou os custos impostos por suas atividades sobre outras subdivisões.

O princípio de decomposição, então, pode somente trabalhar para manter controle sobre esta economia externa ou problemas de deseconomia. A seguir discutiremos como isto é mantido.

Devemos sempre ser cuidadoso no sentido de não exagerar o grau de autonomia da decisão divisional, tomada no processo de decomposição.

A administração central não existe para conhecer tudo acima a interna tecnologia das divisões. Mas, na análise final a produção decisões são feitas e aplicadas pelo plano central.

Num certo estágio das operações uma decisão central, embora baseada sob propostos planos divisional, deve impor diretamente sobre as decisões, como veremos. Isto se processa baseado nos teoremas básicos de procedimento de decomposição. Ele então, para descrever os fatores da teoria de dualidade utilizada nos diversos estágios, cuja interpretação é considerada de interesse para o nosso trabalho. Finalmente, uma interpretação econômica do processo de decomposição é dado ao longo do desenvolvimento com observadas somas sobre suas implicações para planejar e controlar detalhes fora direção central na presença de economia externa e deseconomia.

Esta discussão é igualmente aplicável para problemas de <u>Otimização de Grande Porte</u>, bem como a firmas que desejam descentralizar as suas decisões, delegando-as as suas divisões e também a organismos governamentais, que procuram organizar as atividades a fim de empreender no setor privado da economia, tendo em vista a consistência com o bem-estar comum da coletividade.

4.1.1. Ilustração - Estrutura Decomposição

Vamos considerar uma companhia com duas subdivisões de manufaturas Divisão 1 é capaz de produzir um bem ou outro, ou ambos, cuja produção é representada por x_1 e x_2. Similarmente, os três bens da divisão 2, são denotadas por y_1, y_2 e y_3. Ambas as divisões fazem uso da mesma quantidade recurso para insumo, cujo abastecimento é limitado à quantidade C_1. Por exemplo C_1 pode representar a quantidade de capital disponível à companhia. Divisão 1 (produtos) é também limitada pela capacidade C_2 e C_3 de seus próprios recursos, onde C_2 e C_3 representam dois mecanismos especializados, que não são necessários a outra divisão. Analogamente, Divisão 2 tem uma limitada capacidade C_4.

Este problema pode facilmente ser escrito em termos de programação linear assim:

P - representa o lucro total da companhia

P_j - representa o lucro por unidade de produto j

a_{ij} - representa a soma de insumo i requerido para produzir uma unidade de produto j, onde P_j e a_{ij} são constantes.

Então, nosso problema tem a formulação:

$$\text{Max } P = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3y_1 + P_4y_2 + P_5y_3$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}y_1 + a_{14}y_2 + a_{15}y_3 \leq C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq C_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq C_3 \\ a_{43}y_1 + a_{44}y_2 + a_{45}y_3 \leq C_4 \\ x_i\,,\ y_j \geq 0\,,\quad i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 3 \end{cases}$$

Note a especial característica estrutural deste programa. Restrição contém somente variável x e outra contém somente variável y.

Em termos gerais, este gênero de estrutura pode ser descrito na forma semântica na tabela 1, onde cada A's representa uma multiplicidade de restrições.

O algorítmo decomposição é aplicável para qualquer programa, que pode ser escrito nesta forma.

4.1.2. Esboço do Procedimento

Decomposição:

As divisões da companhia, podem ajudar a entender o inteiro procedimento decomposição. A idéia básica é verificar simplesmente a viabilidade com o processo seguinte. A alta administração solicita a cada divisão da companhia calcular e submeter um ótimo plano de produção isolado. De uma só vez os resultados das divisões são encaminhados à administração central para modificá-los e adaptá-los aos propósitos da companhia. Por sucessivas reformulações deste plano divisional sobre a base de lucro marginal, cujas cifras são recalculadas em cada estágio, pelas divisões e encaminhadas à administração central com o objetivo de obter um plano de produção ótimo à companhia.

É esta a solução do problema (programa original) a qual tem que ser encontrada por subdivisões.

TABELA 1

Função Objetivo:	P				
Restrição Coletiva:	A				$\leq k$
Restrição - Divisão a:	A_a				$\leq k_a$
Restrição - Divisão b:		A_b			$\leq k_b$
....			...		....
....			...		....
Restrição - Divisão n:				A_n	$\leq k_n$

Porque os planos da divisão são designados a prestar contas dos cál culos das interdivisionais iterações num estágio intermediário, através do ponto de vista da companhia, eles não serão ótimos como um todo. Em particular, se a produção de algum produto pela Divisão k impõe algum peso sobre a outra Divisão por usar esta linha de produção da companhia recurso escasso ou por mudança da função custo relativo a outra operação da companhia; os cálculos divisão k's do ponto de vista da companhia é, provável para fazer a produção deste ítem, porque os custos de outras divisões não entrarão nesta contabilidade. Isto é, o clássico problema de deseconomia externa. Analogamente, se uma divisão k's produz economia externa isto é, se aumentar nesta produção, cresce a possibilidade de lucro das outras divisões, divisão k pode não produzir suficiente deste produto para maximizar os lucros da firma.

Isto então, é o básico problema de descentralizar tomada de decisões: para introduzir divisões para aumentar estas atividades, que produzem economia externa e para decrescer aquelas, que produzem deseconomia externa.

O procedimento decomposição, então procede como segue:

1. Cada divisão submete à companhia um plano baseado sobre uma unidade de lucro, figurando para cada atividade, a qual tem que ser designada pela companhia.

2. A companhia calcula o peso que tal plano impõe a todas as outras divisões.

3. A companhia então, narra a divisão que sua unidade retorno sobre produto j, não está distante da unidade lucro original, P_j.

4. A divisão submete novos planos, com o objetivo de melhorar a sua função, antes do interesse total da companhia, recalculados em termos da cifra do lucro líquido revisado.

5. O processo inteiro é repetido com tempo necessário a atingir um ótimo. Desde que existe somente um número finito de opções a ser experimentado e desde que cada passo no procedimento é designado para crescer os lucros da companhia, este cálculo é garantido para atingir uma solução ótima, depois de um número finito de tais passos.

4.1.3. Preços Dual - Provisórios

Podemos designar valores ótimos das variáveis estruturais do problema dual por $V_1, \ldots, V_m$, e os valores ótimos das variáveis de folga por $L_1, \ldots, L_n$. De forma que, para uma ótima solução básica do problema produção, os valores destas variáveis podem ser interpretados como segue:

V_i - lucro marginal, preço do insumo i

L_j - custo de oportunidade, envolvido na produção de uma unidade do produto j.

De forma que, V_i narra à companhia como seus lucros cresceriam com seus investimentos no insumo i onde cresce por uma unidade, tal que $V_i = \partial P/\partial C_i$, onde P representa lucro total e C_i representa a valiosa capacidade do insumo i. Analogamente, L_j narra como muitos lucros da companhia seriam reduzidos se ela determinasse a produção de uma unidade de mais um bem, que não está na sua linha de produção.

Isto é, para salientar que a interpretação usual destas variáveis é confinada a uma ótima solução básica do problema primal e dual. Não obstante, elas denotam que, análoga cifra, que anunciará preço dual provisório, pode ser determinada para qualquer solução básica viável para correspondência do problema primal se a solução é ótima ou não. Nesta secção, descreveremos os resultados simplesmente, com provas feitas posteriormente, onde especificaremos também um método de cálculo de nosso preço dual provisório.

Seja nosso preço dual provisório designado por $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$; $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Na solução ótima eles se tornam o preço dual (proteção) e (dual folga). Oportunamente, a cifra de custo será conhecida em análi se de programação linear. Os Π_i, os quais representam os valores preços dual provisórios dos escassos insumos da companhia, são chamados multiplicadores simplex e os Δ_j, que são os custos provisórios de oportunidade da produção são chamados avaliadores simplex.

Mais especificamente, temos os seguintes resultados:

1. Π_i é o lucro marginal de insumo i, tal que $\Pi_i = \partial P/\partial C_i$. Por mais que esta derivada represente a adição do lucro P, que seria ganho por incrementar a soma de insumo i, quando o recurso é usado na maneira prescrita pela corrente solução básica viável, isto é, quando aquele recurso não é utilizado otimamente.

2. Os Δ_j representam as perdas oportunas ocorridas com a introdução na produção do bem, menos lucro correntemente utilizado nas bases, ou alternativamente, se ele é negativo, $-\Delta_k$ pode representar o ganho líquido obtido pela introdução de uma unidade do produto k na produção, se k é mais lucrativo, que qualquer tópico correntemente na base. Para qualquer tópico r correntemente na base, isto é, qualquer produto r, o qual é produzido em nossa solução viável, temos naturalmente $\Delta_r = 0$.

3. Portanto, os valores ótimos destas variáveis dual, as quais são todas não negativas, o provisório valor dual, o Δ_j pode ser negativo, zero ou positivo. Analogamente, os Π_i podem ser negativos.

Para o presente propósito a possibilidade de Π_i e Δ_j negativo é, somente a diferença entre os multiplicadores simplex e avaliadores.

4. Em particular, vemos que por introduzir item k, para o qual $-\Delta_k > 0$, podemos obter uma melhor (mais lucrativa) solução básica viável.

Além disso, teremos chegado a uma solução ótima, se, e somente se todo $\Delta_j > 0$ (tal que a introdução de qualquer item na linha de produção através da base corrente, envolva a não negativa oportunidade de perda).

4.1.4. Conceitos para o procedimento Decomposição

O procedimento decomposição é conveniente na discussão seguinte para utilização de uma terminologia emprestada e adaptar ao presente propósito através de uma linguagem apropriada de produção. A ilustração foi mostrada num pequeno programa problema, formulado no princípio.

Uma restrição tal como 1 na qual os produtos de várias divisões são envolvidos, será chamada de restrição coletiva, a restrição 2, que envolve somente produtos de uma simples divisão, será chamada de restrição divisional. Uma solução para a divisão k programa problema é uma solução ótima ao programa sub-problema constituído pela restrição divisional e função objetiva divisional convenientemente escolhida. Para simplificar nossa discussão, vamos considerar exclusivamente, dois casos divisional e denotaremos estas soluções por X_q^+ e Y_r^+ para as divisões 1 e 2 respectivamente onde X_q^+ e Y_r^+ são ambos vetores solução expressando as magnitudes dos produtos de cada um dos dois bens produzidos pela divisão 1 e cada um dos três produtos excluídos pela divisão 2.

Desde que as divisões podem submeter um número finito de proposta solução divisional, X_1^+ , X_2^+ ,..., X^+_q e Y_1^+ ,..., Y_r^+. Os recursos coletivas. Coeficientes lucro divisional, são os coeficientes das funções objetivo dos problemas divisionais. Algumas ou todas cifras destes lucros, são recalculadas em cada ciclo.

O programa executivo é um programa aparentemente artificial, incumbido pela administração da companhia a determinar os valores apropriados aos divisionais coeficientes lucros no corrente estágio dos cálculos.

Os cálculos do programa executivo consistem dos valores designados por cada programa divisional na solução do problema inteiro.

4.1.5. O Programa Executivo

Suponhamos que $X_1^*,\ldots,X_q^*$ e $Y_1^*,\ldots,Y_r^*$ são as propostas soluções divisionais enviadas em tempo ao ofício de prestação de contas coletiva. Onde, se a divisão 1 é envolvida na produção de n_1 itens, então X_q^* é o vetor $(X_{1q},\ldots,X_{n1q})$ onde X_{kq} representa a produção do bem - k da divisão 1, e é a recomendada q-ésima solução proposta. Y_r^* é para ser interpretado similarmente. Observe que, onde os X_{iq} e Y_{jr} não são variáveis, eles representam números específicos calculados pelas divisões nas q-ésima soluções iterativas dos programas divisionais e transmitido por eles à prestação de contas coletivas.

Quando se tem em mãos os valores da q-ésima solução proposta através da divisão 1 ou os valores da r-ésima solução proposta através da divisão 2, a prestação de conta coletiva toma estes e os correspondentes para prévia solução proposta e forma as seguintes cifras para cada produto X_i e Y_j, usando $\mu_1,\ldots,\mu_q$ e $\nu_1,\ldots,\nu_r$:

$$\begin{cases} X_{iq}^a = \mu_1\, x_{i1} + \mu_2\, x_{i2} + \ldots + \mu_q\, x_{iq} \\ \\ Y_{jr}^a = \nu_1\, y_{j1} + \nu_2\, y_{j2} + \ldots + \nu_r\, y_{jr} \end{cases} \qquad (4)$$

onde μ_q e ν_r são requeridos a satisfazer

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_q = 1 \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = 1 \\ \mu_q > 0 \\ \quad \text{e} \\ \nu_r > 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Estes valores X^a_{iq} e Y^a_{jr} são então utilizados pela prestação de contas coletiva como as variáveis do programa executivo, o qual agora pode ser descrito:

O Programa Executivo tem três componentes: uma função objetivo, a qual é baseada na função objetivo do programa original, restrição que corresponde a restrição coletiva e restrições sobre os não conhecidos valores 5.

Duas características do programa executivo serão notadas:

a. A restrição divisional não aparece no programa executivo.

b. Observando as expressões 4 às variáveis X^a_{iq} e Y^a_{jr} do programa executivo, concluímos que ele consiste de dois tipos de elementos: os não conhecidos valores μ_q e ν_r e as constantes dadas tal como X_{iq} e Y_{jr}, as quais são obtidas através das propostas soluções divisionais.

Segue que, as únicas variáveis verdadeiras são os valores μ_q e ν_r. O programa executivo é reescrito como um simples problema de programação linear envolvendo somente estas variáveis. Além disso, em qualquer estágio intermediário nos cálculos, o objetivo do programa executivo é a determinação de uma aproximação viável e básica de valor μ_q e ν_r associados a cada programa divisional proposto.

Estes novos valores são designados para produzir uma maior cifra de lucro a companhia, do que os retornos correspondentes aos cálculos precedentes do programa executivo.

Um exemplo da construção de um programa executivo fará estes pontos claros.

— Suponha que a função objetivo e a restrição coletiva são respectivamente:

$$\begin{cases} P = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 Y_1 + P_4 Y_2 + P_5 Y_3 \\ a_{11} X_1 + a_{12} x_2 + a_{13} Y_1 + a_{14} Y_2 + a_{15} Y_3 < C_1 \end{cases}$$

reescrevendo

$$\begin{cases} P = x_1 + 2X_2 + 3Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \\ 4X_1 + X_2 + 2Y_1 - 5Y_2 + Y_3 < C_1 \end{cases} \qquad (6)$$

Além disso, suponha que três soluções tem que ser proposta pela divisão 1 e duas soluções propostas pela divisão 2 como segue.

$$\left\{ \begin{array}{lll} & \underline{\text{Soluções Propostas Divisão 1}} & \\ X_{11} = 7 & X_{12} = 2 & X_{13} = 6 \\ X_{21} = 4 & X_{22} = 0 & X_{23} = 5 \\ & \underline{\text{Soluções Propostas Divisão 2}} & \\ Y_{11} = 0 & & Y_{12} = 0 \\ Y_{21} = 12 & & Y_{22} = 0 \\ Y_{31} = 0 & & Y_{32} = 9 \end{array} \right. \qquad (7)$$

Substituindo estes valores em $\underline{4}$, teremos

$$\begin{cases} X_1^a = 7\,\mu_1 + 2\,\mu_2 + 6\,\mu_3 \\ X_2^a = 4\,\mu_1 + 0\,\mu_2 + 5\,\mu_3 \\ Y_1^a = 0\,\nu_1 + 0\,\nu_2 \\ Y_2^a = 12\,\nu_1 + 0\,\nu_2 \\ Y_3^a = 0\,\nu_1 + 9\,\nu_2 \end{cases} \qquad (8)$$

Agora nosso programa é:

$$\text{Max } P = P_1 X_1^a + P_2 X_2^a + P_3 Y_1^a + P_4 Y_2^a + P_5 Y_3^a$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} a_{11} X_1^a + a_{12} X_2^a + a_{13} Y_1^a + a_{14} Y_2^a + a_{15} Y_3^a < C_1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \\ \nu_1 + \nu_2 = 1 \\ \mu_q > 0 \\ \quad \text{e} \\ \nu_r > 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores dos P_i e a_{1i} através de 6 e os valores dos X_i^a e Y_j^a através de 8, teremos:

$$\text{Max } P = 15\mu_1 + 2\mu_2 + 16\mu_3 + 12\nu_1 + 18\nu_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} 32\mu_1 + 8\mu_2 + 29\mu_3 - 60\nu_1 + 9\nu_2 < C_1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \\ \nu_1 + \nu_2 = 1 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0 \\ \quad \text{e} \\ \nu_1, \nu_2 > 0 \end{cases}$$

que representa o programa executivo na forma final.

E à medida que se propõe uma nova solução divisional, o número de variáveis no programa executivo cresce. Além disso a divisão submete uma nova proposta solução, onde outra importante variável é adicionada ao programa executivo e se calcula os recursos da prestação de contas coletiva. Portanto, quando a divisão 1 envia ao programa X^*_{q+1} para o ofício de prestação de contas da companhia, então μ_{q+1} será adicionada ao conjunto de variáveis do programa executivo.

4.1.6. Descrição do Procedimento Decomposição

Afirmamos agora que, para este estágio divisão 1, tem submetido q-1 e divisão 2 r-1 proposta solução e a prestação de conta coletiva tem agora recebido a q-ésima e r-ésima proposta solução.

Usando o método do simplex revisado por um pivoteamento, calcular uma melhor solução viável para o problema executivo. Além disso, a proposta deste cálculo é para determinar o preço dual provisório (multiplicador simplex) $\Pi = (\Pi_1, \ldots, \Pi_m, \bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2)$ para cada um dos recursos coletivos. Os dois últimos preços dual Π_1 e Π_2, correspondem respectivamente às restrições $\Sigma\mu_i = 1$ e $\Sigma\nu_j = 1$.

Agora utilizando estes preços dual provisório, as unidades de lucro divisional revisadas, são então calculadas para estas q-ésima e r-ésima propostas solução divisional, de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{cases} R_{qi} = P_i - (\Pi_1 a_{1i} + \Pi_2 a_{2i} + \ldots + \Pi_m a_{mi}) \\ S_{rj} = P_j - (\Pi_1 a_{1j} + \Pi_2 a_{2j} + \ldots + \Pi_m a_{mj}) \end{cases} \qquad (9)$$

Estas cifras de lucro divisional revisado, são para ser utilizados como os coeficientes das funções objetivo divisional nos cálculos da próxima iteração.

$$\begin{cases} R_q = \Sigma R_{qi} X_i \\ S_r = \Sigma S_{rj} Y_j \end{cases} \qquad (10)$$

Podemos observar que, os últimos dois valores $\overline{\Pi}_1$ e $\overline{\Pi}_2$ não influenciam a determinação da cifra de lucro revisado.

Estas cifras de lucros divisional revisado são entregues às divisões 1 e 2, que então calculam a solução ótima para o programa linear ' divisional, o qual é da função objetivo 10 com as restrições divisionais.

As soluções propostas aos programas divisionais para a próxima iteração são X_{q+1} e Y_{r+1}. Depois estas serão encaminhadas à prestação de contas coletiva, que calcula o peso médio da nova solução 4 a ser utilizada nos cálculos do próximo programa executivo.

Agora podemos descrever o <u>teste de otimalidade</u>. É neste estágio que os últimos dois preços $\overline{\Pi}_1$ e $\overline{\Pi}_2$ são utilizados. Para este propósito, a total cifra de lucro revisado contribui para as duas divisões, R_q e S_r dadas por 10 serão comparadas com $\overline{\Pi}_1$ e $\overline{\Pi}_2$ respectivamente. Assim, se cada $R_q > \overline{\Pi}_1$ ou $S_r > \overline{\Pi}_2$ ou ambos, então a nova proposta solução divisional, melhora o lucro da companhia. Neste caso, o procedimento decomposição introduz uma destas soluções no programa executivo e uma outra iteração é processada, obtendo assim uma nova solução ótima. Por outro lado, se $R_q = \Pi_1$ e $S_r = \Pi_2$, então uma solução ótima para o problema executivo tem de ser encontrada. E os valores μ_i e ν_j determinados pelos cálculos do programa executivo representam o ótimo.

A solução ótima para nosso original programa problema é dada pelos níveis de produção X_i e Y_j, os quais são obtidos pela averiguação da proposta solução divisional indicada:

$$\begin{cases} X_i = \mu_1^* X_{i1} + \mu_2^* X_{i2} + \ldots + \mu_q^* X_{iq}^* \\ Y_j = \nu_1^* Y_{j1} + \nu_2^* Y_{j2} + \ldots + \nu_r^* Y_{jr}^* \end{cases}$$

Isto então, é a essencia do Procedimento Decomposição.

4.1.7. Programa Executivo - Interpretação

Permite examinar a próxima função objetivo artificial revisada, a qual é designada para divisão 1 pela administração central. Em cada estágio, antes que maximize $\Sigma\, P_i X_i$, a primeira divisão é informada para maximizar a função objetivo revisada, isto é:

max $\Sigma\, R_{qi}\, X_i = \Sigma_j (P_j - \Sigma_i\, \Pi_i a_{ij}) X_j$, a qual substitue a função objetivo inicial - $\Sigma_j\, P_j\, X_j$.

Esta função lucro revisada, difere da original 1, pela soma $- \Sigma_i \Sigma_j \Pi_i a_{ij} X_j$.

A significativa economia desta expressão reside na seguinte interpretação:

X_j - Quantidade do produto j.

a_{ij} - Soma de insumo i necessário para produzir uma unidade do produto j.

Π_i - Lucro marginal da firma, quando aumenta de uma unidade a utilização do insumo coletivo i.

Portanto, $\Sigma_i\, \Pi_i\, a_{ij}\, X_j$ é o valor total de todos os insumos destinados à produção do produto j e $-\Sigma_i\, \Sigma_j\, \Pi_i\, a_{ij}\, X_j$ é o custo de oportunidade para a firma de todos recursos usados pela divisão 1 na produção de todos estes produtos. Em síntese, em cada iteração a divisão é levada para maximizar não seu próprio lucro, mas preferivelmente uma cifra líquida, $\Sigma\, R_{qi}\, X_i$, a qual subtrai através da cifra de lucro os valores do resto dos insumo escassos da firma que a divisão usa.

Portanto a divisão é forçada a pagar uma penalidade pela deseconomia externa, que seus produtos impõe sobre o restante da firma. Isto seria adicionado no caso onde um Π_k negativo suceder (indicando que nesta iteração um insumo k envolve a inutilidade para o resto da firma), $-\Pi_k a_{kj} X_j$ será positivo e que a divisão recebe uma gratificação para produzir acima deste incomodo recurso. Vemos então, como o procedimento decomposição prova com cada cifra de lucro líquido, as quais são designadas à economia externa para compensar a deseconomia causada por estas atividades.

Será informado que em nossos dois casos divisionais contem $\underline{m + 2}$ restrições no programa executivo.

As m - primeiras restrições destes casos correspondem ao m - insumo (recurso escasso da companhia) para cujo uso há competição das duas divisões da companhia. Correspondentemente a este m - recurso escasso, existem os $\underline{m}$ multiplidadores simplex $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$. Na adição existem duas restrições $\Sigma\mu_i = 1$, e $\Sigma\nu_j = 1$, as quais são associadas com os multiplicadores $\overline{\Pi}_1$ e $\overline{\Pi}_2$. Estas restrições servem para requerer a seleção dos valores X_{iq}^a e Y_{jr}^a variáveis $\underline{4}$ para serem usados no programa principal e são soluções divisionais propostas verdadeiras. Para ver o que isto implica, suponha as restrições $\Sigma\mu_i = 1$, onde se reescreve por $\Sigma\mu_i \geq 1$. Isto significa que os X_{iq}^a utilizados na solução corrente do programa executivo poderiam exceder um valor em média da solução divisional previamente proposta para divisão 1. $\overline{\Pi}_1$ pode, agora ser interpretado como o lucro marginal de uma unidade aumentada na capacidade, associado com a restrição correspondente $\Sigma\mu_i = 1$.

Desde que $\overline{\Pi}_1$ deve ser interpretado como lucro marginal por deixar os μ_i's adicionados acima ao total maior que 1. Como temos visto, isto é equivalente ao aumento dos produtos pela divisão $\underline{1}$, além da importância média previamente proposta pelo programa. Como resultado, esta divisão deve usar mais recurso da companhia. Em outras palavras ,

$\overline{\Pi}_1$ pode ser considerado o lucro marginal relativo da transferência de mesmo recurso da companhia para divisão 1, e $\overline{\Pi}_2$ é a cifra (de lucro marginal) correspondente a divisão 2.

Sempre que a divisão completa os cálculos de outro sub-ótimo, baseada na função objetivo revisada, ela terá determinado uma nova proposta solução divisional $X_q = (X_{1q}, X_{2q}, \ldots, X_{n1q})$. Esta solução proposta deve ser comparada em lucratividade para a companhia com as soluções dos programas, os quais as divisões possuem previamente preparados. Para este propósito, será lembrado que, a cifra lucro divisão revisada é:

$$R_q(X_q) = \Sigma_j(P_j - \Sigma_i \, \Pi_i \, a_{ij})X_{jq},$$

que é produzida pelo programa proposto, R_q é comparado com os valores de $\overline{\Pi}_1$, isto é, os multiplicadores simplex associados com a restrição $\Sigma\mu_i = 1$ do programa principal. Se $R_q = \overline{\Pi}_1$ (e as condições correspondentes são satisfeitas para cada divisão) a solução corrente do programa executivo é considerada ótima, tendo em vista que, se $R_q > \overline{\Pi}_1$, um novo programa executivo melhorado pode ser obtido, tomando o mais recente X_q, calculado no programa divisional. Mas, veremos nesta seção que, a cifra de lucro revisado $R_q(X_q)$ é uma medida da contribuição ao lucro líquido que a nova solução divisão 1's propõe à companhia, onde $\overline{\Pi}_1$ é também uma medida da contribuição de lucro oferecida pela solução divisional previamente proposta. Desde que, a comparação de R_q com $\overline{\Pi}_1$ é simplesmente um exame do lucro líquido da solução nova proposta X_q em relação aos lucros, os quais são oferecidos pela importância em média ótima da solução divisional previamente proposta. Se R_q exceder $\overline{\Pi}_1$, o potencial líquido ganho através da introdução de nova solução, é, maior que o marginal produzido $\overline{\Pi}_1$, da designação de recurso adicional a divisão 1, para ser utilizado em acordo com a solução prévia. Isto equivale a dizer que a nova solução oferece um lucro marginal mais alto do que o anterior e neste caso a companhia ganhará pela utilização de alguns recursos, que não estavam sendo utilizados até então pela solução prévia e alocação não acentuada dos produtos padrão descritos pela nova solução.

4.1.8. <u>Descentralização e o Valor Ótimo (em média) do Programa</u>

Uma vez que o estágio final do cálculo é reencontrado, um conjunto ótimo de valores $\mu_s{}^o$ e $\nu_t{}^o$ é calculado com o auxílio do programa executivo. A substituição destes valores ótimos em <u>4</u>, produz uma solução divisional em média ótima. E estas decisões ótimas constituem a solução que é mais lucrativa à companhia como um todo.

A nova divisão dá ênfase à administração para narrar a companhia que valores dela são para ser utilizados, isto é, que combinação proposta destes, a companhia deseja para produção.

Não existe motivação mecânica administrativa, que conduza a divisão para chegar a uma combinação de produtos por suas próprias determinações. Neste ponto, a descentralização permitida pela decomposição apresenta saídas viáveis. Para entender a natureza da situação, podemos examinar o lucro do problema graficamente.

A figura 1 representa a região viável de uma das divisões. Agora como é normal em programação linear, observamos ao longo os extremos 0, A, B, C, D e E para um programa em um dos quais está o ótimo, através do ponto de vista da divisão. Porém, não existe razão pela qual a solução ótima para a companhia ocorreria num extremo da região viável da divisão. Em geral, os pontos para os quais ocorrem as soluções ótimas das companhias não são pontos extremos (tal como S) sobre o limite da região viável da divisão. Isto porque um valor em média de algumas divisões propostas é requerido nesta solução. No caso presente, o ponto S, é um valor em média das soluções representadas pelos pontos D e C.

Cada revisão da cifra de lucro da divisão pelo programa principal produz uma mudança na mesma linha de lucro do diagrama. Por exemplo ;

assim que o ponto ótimo da divisão é C, em algum estágio dos cálculos a revisada função lucro pode ser representada pelos pontos da linha paralela na figura 1.

Cálculos subsequentes traçarão esta mesma curva lucro acima. Em particular, se a solução ótima descansa num ponto interior da região viável limitada, tal como S então a linha lucro deve ser paralela ao segmento limitado CD, o qual contém S. Isto deve ser estabelecido através da nossa observação prévia, que qualquer divisão proposta, propõe X_p, que é examinado e no final da solução deve produzir a mesma cifra de lucro revisado $R_q\ (X_p) = \overline{\Pi}_1$. Neste caso, conhecido diagrama, e desde que S é obtido como um valor em média das soluções em C e D , a solução nestes pontos (C e D) deve produzir uma cifra de lucro revisado igual a Π_1, isto é, C e D devem estar sobre a mesma curva lucro - $\overline{\Pi}\overline{\Pi}'$.

Isto narra diretamente, porque o sistema preço não pode ser imposto sobre as divisões de uma maneira arbitrária para produzir para a companhia, solução ótima em S. Qualquer ponto sobre o segmento limitado ' CD, incluindo C, S e D, deve ser igualmente lucrativo através do ponto de vista da divisão. De fato, desde que S não é um extremo da região viável, o conjunto de preços fixados não pode fazer S o ponto mais lucrativo para a produção da divisão. Para considerar qualquer linha reta de mesmo preço (tal como PP') através de S, a qual não vai atravessar também ponto C e D. Tanto C ou D deve estar sobre PP', isto é, com o conjunto de preços, que produz linha lucro PP' tanto C ou D deve ser mais lucrativo do que S.

Podemos conjecturar que, esta dificuldade é, em parte, uma consequência da linearidade de nosso problema. Se o limite do conjunto viável de soluções da divisão (convexo) fosse todo curvo, isto é, se diminuisse o retorno (diminuindo a razão técnica marginal de substituição) este problema, algumas vezes, desapareceria. Isto está ilustrado na figura 2, na qual a região viável é convexa e seu limite é curvo. Se o ponto ótimo é qualquer ponto, tal como S, sobre o limite existirá sempre uma mesma linha de lucro TT', que é tangente ao limite da região viável no ponto ótimo S, que pode consequentemente ser utilizado para determinar preços apropriados para orientação de atividades divisionais.

"S" é a causa para a combinação produtos, que é mais lucrativa para a divisão tanto quanto para a companhia e assim com os preços correspondendo a TT', a divisão tem uma certa autonomia para tomar decisão produto.

Toda esta discussão tem assumido que qualquer ponto interior da região viável do divisional nível de atividade é também viável à companhia. Isto não é uma condição necessária, pois a restrição coletiva pode limitar as soluções para uma sub-região da região viável divisional. Afirmamos que a força limitação levanta-se em dois caminhos, que veremos a seguir:

1. o abastecimento de algum recurso coletivo pode ser insuficiente para permitir qualquer divisão de produzir algum dos produtos, o qual não está incluído nas próprias restrições, isto é, alguma combinação de produtos para as divisões viáveis, que podem requerer mais de um recurso coletivo do que é disponível.

2. ainda que um recurso coletivo fosse usado por uma divisão única (só) poderia ser suficiente, mas aí o processo solução alocaria em tal, uma distribuição insuficiente para uma ou mais divisões, im-

plicando então, uma produção menor do que a divisional região viável inteira para a companhia como um todo.

Um caso linear simples é mostrado na figura 3, que é uma reprodução da região viável da figura 1 com duas restrições adicionadas representando os recursos coletivos limitados. Pares de valores X_1 e X_2 que caem levemente dentro da área extrema pertencentes ao conjunto de soluções ótima da companhia. A solução ótima pode ser, como consequência, uma combinação linear de dois pontos extremos da divisão, neste caso B e D. Por exemplo, com a restrição coletiva conhecida pela linha pontilhada na figura 3, a solução ótima pode ser o ponto V. Mas observe, que este ponto está no interior da região viável da divisão! No caso prévio, onde a solução ótima fosse no ponto C ou S figura 1, o ótimo coletivo correspondente, à divisão ótima, embora no ponto S, Não é um único. No presente caso, isto é, quando a solução está no ponto S figura 1, o sistema de preço não garantirá que a divisão automaticamente atingirá este ponto. Esta observação é mais forte para o caso onde o ponto ótimo para a companhia, não é um divisional ótimo simultaneamente, isto é, quando o ponto ótimo corresponde à companhia está no interior da região viável divisional. A divisão terá então que ser instruída sobre outros valores para assegurar à divisão pontos extremos tal como B e D na figura 3, ou para ser imparcial, narrar o valor ótimo de X_1 e X_2 no ponto V. Esta observação tem um papel importante sobre decisão descentralizada e o conceito de transferência de preço. Assunto este, que não será abordado nesta tese.

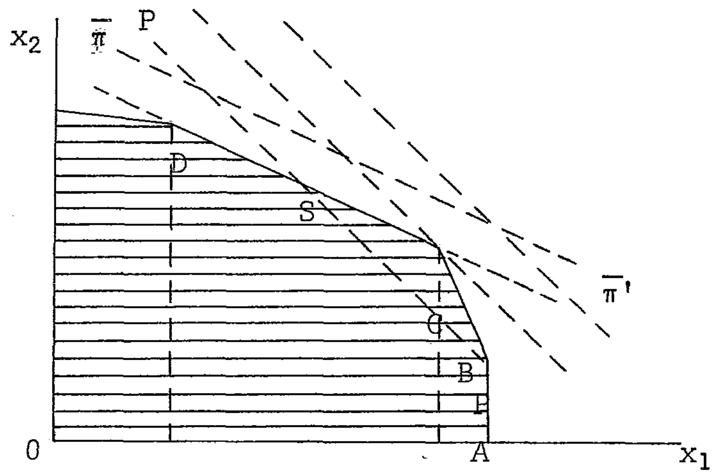


Fig. 1

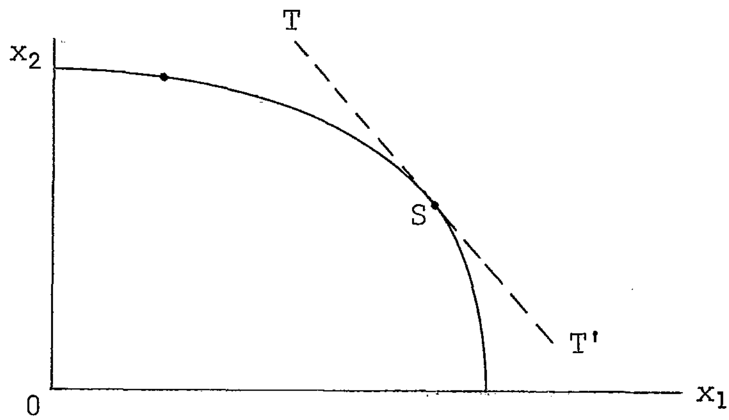


Fig. 2

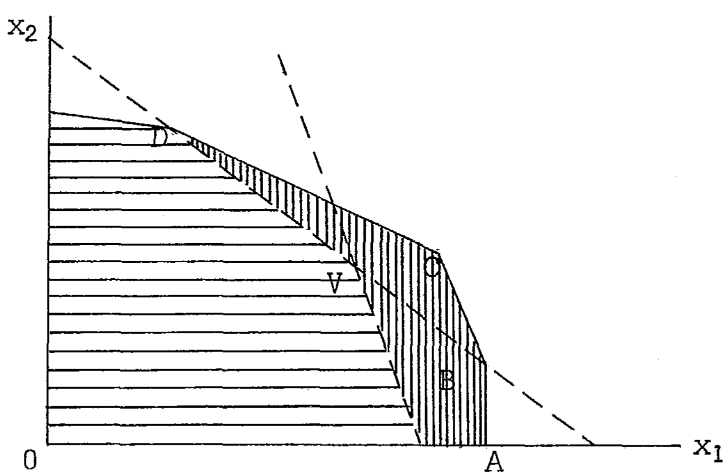


Fig. 3

4.1.9. Conclusão e Comentário

Com o exemplo, podemos observar que o Algorítmo de Decomposição constitue um mecanismo de decisão para uma descentralização, coordenando apenas a organização econômica.

Em primeiro lugar, ele oferece uma sistemática aproximada para planejar problemas resultantes da presença de economia externa e deseconomia (ou, em termos mais globais, a divergência entre custo privado e benefício social) e a consequente limitação, que caracteriza decisão sub-ótima, feita independentemente por subdivisões das unidades econômicas em questão.

Esta análise reafirma que o caminho para produzir quantidade com externalidade é, para modificar o sistema preço, propondo negócios no caso da economia externa e impondo penalidades sobre a produção de deseconomia externa.

O Preço Dual Provisório, apenas prevê a primeira medida eficaz, pela qual estas penalidades e negócios podem ser calculados e impostos, e o Algorítmo de Decomposição oferece um método para determinar quando o programa divisional está apropriadamente coordenado para produzir uma solução, que é ótima para a unidade econômica como um todo.

4.1.10. Derivação dos Teoremas de Preços Dual Provisórios

Diante da derivação dos teoremas sobre preços dual provisórios, é conveniente apresentar algum modelo preliminar, em particular, obter expressões para os valores de nossas variáveis primal e para mudar estes valores quando outros itens são introduzidos na base.

Suponhamos ser dado o seguinte programa de Programação Linear, que é considerado para incluir variáveis de folga entre as variáveis X_j, tal que todas as equações são restrições da estrutura.

$$\text{Max } P = P_1 X_1 + \dots + P_{m+n} X_{m+n} \qquad (1)$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} a_{11} X_1 + \dots + a_{1m+n} X_{m+n} = C_1 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + \dots + a_{m\,m+n} X_{m+n} = C_m \\ X_j > 0 \\ j = 1 \dots m + n \end{cases} \qquad (2)$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade que, na solução experimental, as variáveis básicas são $X_1, \dots, X_m$. Portanto, temos

$$X_1 > 0 \dots X_m > 0 \qquad \text{e} \qquad X_{m+1} = \dots = X_{m+n} = 0$$

A partir de então, os termos com zero são eliminados e 2 se reduz a

$$\begin{cases} a_{11} X_1 + \dots + a_{1m} X_m = C_1 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + \dots + a_{mm} X_m = C_m \end{cases}$$

Usando a notação matricial, teremos:

$$AX = C \qquad X = A^{-1} C \qquad \text{onde}$$

A - matriz quadrada m x m

X - vetor coluna de dimensão m

C - vetor coluna com m elementos

Agora suponhamos que fosse para aumentar a produção de uma unidade do bem k, cujo nível inicial de produção é nulo, isto é, X_k é variável não básica neste estágio. Com recursos limitados, seria então necessário uma redução no nível de produção do bem i (neste estágio ' básico), digo, $X_i \longrightarrow X_i - \Delta X_i$ $(\Delta X_i > 0)$.

Neste caso, a equação 2 se reduz a:

$$\begin{cases} a_{11}\ (X_1 - \Delta X_1) + \dots + a_{1m}(X_m - \Delta X_m) + a_{1k} = C_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ (X_1 - \Delta X_1) + \dots + a_{mm}(X_m - \Delta X_m) + a_{mk} = C_m \end{cases}$$

ou em termos matriciais, escrevendo A_k para representar o vetor coeficiente da k-ésima coluna em 2, resulta $A(X - \Delta X) + A_k = C$, de forma que, subtraindo de 3, obtemos uma expressão para X, isto é:

$$\begin{array}{rl} A\ (X - \Delta X) + A_k & = C \\ - AX & = -C \\ \hline \Delta X & = A^{-1}A_k \end{array} \qquad (4)$$

Igualmente, um modelo preliminar, permite escrever o vetor linha $\overline{P}$ dos m primeiros coeficientes da função objetivo 1, isto é, $\overline{P} = |P_1, \dots, P_m|$. E estes permitem definir os preços dual provisórios como o vetor linha $\Pi = |\Pi_1, \dots, \Pi_m|$, que é dado por $\Pi = \overline{P}\ A^{-1}$ 5. Esta expressão é a definição dos multiplicadores do simplex, que chamamos de preços dual provisórios. Resta mostrar que estes Π_i tem as propriedades requeridas de preço dual. Isto será demonstrado com o auxílio dos teoremas seguintes, cuja implicação para dualidade, somente torna claro na discussão, que acompanha sua derivação.

Teorema 1. Para qualquer bem k, que não está na base corrente, a mudança no resultado do lucro $\underline{\Delta_k}$, através da introdução de uma unidade do produto k na solução básica, é dada por

$$\Delta_k = - \Pi A_k + P_k, \quad \text{isto é} \quad \Pi A_k + \Delta_k = P_k$$

Prova - Através da função objetivo 1 (que representa lucro), a variação no lucro Δ_k, resultante da introdução de uma unidade do bem k e a consequente mudança $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ na produção é dado por:

$$\Delta_k = - P_1 \; \Delta X_1 - P_2 \; \Delta X_2 - \ldots - P_m \; \Delta X_m + P_k$$

em notação matricial teremos:

$$\Delta_k = - P \; \Delta X + P_k$$

Por outro lado, por 4 e 5, temos que

$$\Delta X = A^{-1} \; A_k$$

e

$$\Pi = \overline{P} \; A^{-1}$$

Então, $\Delta_k = - \overline{P} \; A^{-1} A_k + P_k = - \Pi A_k + P_k$

Portanto, $\Delta_k = - \Pi A_k + P_k$

Teorema 2. Para qualquer bem j na base corrente temos $\Pi A_j = P_j$.

Prova - Por definição $\Pi = \overline{P} \; A^{-1}$

$$\Pi A = \overline{P} \; A^{-1} A \quad \therefore \quad \Pi A = \overline{P} \; .$$

Portanto $\Pi A_j = P_j$.

Teorema 3. - $\Pi C = P$

Prova - Por definição $\Pi = \bar{P}\,A^{-1}$

$$\Pi C = \bar{P}\,A^{-1}C$$

mas por 3 e 1 temos respectivamente

$$AX = C$$

e

$$P = P_1X_1 + \ldots + P_mX_m = PX$$

Então,

$$\Pi C = \bar{P}A^{-1}AX = \bar{P}X = P$$

Portanto, $\Pi C = P$.

O conjunto desses três teoremas, constituem o modelo do resulta do dualidade:

I - O teorema 1, assegura os lucros contribuídos pela introdução de uma unidade de produto k, isto é: Δ_k é o custo de oportunidade e não de produção daquele ítem.

II - Equação 6 do teorema 1 pode ser escrita como $a_{1k}\Pi_1 + \ldots + a_{mk}\,\Pi_m + \Delta_k = P_k$, que será reorganizada com a k-ésima restrição do problema dual, de forma que Π_i e Δ_j satisfaçam estas restrições, com Δ_j assumindo o papel de variável de folga e Π_i como variável dual (provisório).

III - A equação do teorema 3, também pode ser escrita 7 $P = C_1\,\Pi_1 + \ldots + C_m\,\Pi_m$, a qual garante todo lucro da firma, para estes preços dual relativamente elevados de insumo escasso.

IV - Comparando o teorema 2, com o teorema 1, isto é, $\Delta_j = \Pi A_j + P_j$ com $\Pi A_j = P_j$ teremos como resultado $\Delta_j = 0 \;\; \forall_j$ na base.

V - Nossa interpretação do Π_i, como cifra de lucro marginal, pode ser justificada com as derivadas parciais da expressão do teorema 3 em relação a C, ou da equação 7, através da qual concluímos por diferenciação direta que $\Pi_i = \frac{\partial P}{\partial C_i}$. Portanto, Π_i é realmente o lucro marginal do insumo i.

IV - Outro teorema básico da teoria de dualidade pode ser escrito como:

8 $\quad Q_j \; \Delta_j = 0$

9 $\quad \Pi_i \; \mu_i = 0$

onde os μ_i representam as variáveis de folga do problema primal e os Q_j as básicas. A primeira destas equações estabelece que qualquer ítem, que produza ($Q_j > 0$) deve ter uma perda de oportunidade nula, isto é, $\Delta_j = 0$. A segunda equação estabelece a condição de que, qualquer insumo que não foi totalmente utilizado ($\mu_i > 0$) deve ter o lucro marginal igual a zero, isto é, $\Pi_i = 0$. A relação 8, garante através de IV acima que, para qualquer $X_j = Q_j$ na base (isto é, $X_j > 0$), $\Delta_j = 0$, e para qualquer outro X, digo X_k, temos $X_k = 0$, desde que X_k não está na base. A relação 9 garantirá também para nossas variáveis dual provisórias.

Para ver isto, podemos observar que os coeficientes de qualquer variável de folga μ_i, na função objetivo P é nulo. Isto é, supõe-se que o excesso de produção para obter mais lucro não representa perda para a firma. Para mostrar que 9 é satisfeita, observe se $X_i = \mu_i$ está na base, de forma que $\mu_i > 0$, então pelo teorema 2, $\Pi A_i = P = 0$, para nossa variável de folga, como acabamos de observar. Mas, para uma tal variável de folga, A_i é o vetor unitário (00...010...00) com

1 na i-ésima posição e zero nas demais. A partir de então, devemos ter $\Pi A_i = \Pi_i$ com o exposto acima, isto é, $\Pi A_i = 0$. Isto é, $\mu_i > 0$, devemos ter $\Pi_i = 0$. Portanto 9 está satisfeita.

4.1.11. Problema Ilustrativo

$$\text{Max } P = x_1 + 8x_2 + 5y_1 + 6y_2$$

$$\text{sujeito a} \left\{ \begin{array}{lll} \boxed{x_1 + 10x_2 + 5y_1 + 2y_2} & \leq & 21 \\ \boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + x_2 \end{array}} & \begin{array}{l} \leq \\ \leq \end{array} & \begin{array}{r} 6 \\ 5 \end{array} \\ \qquad\qquad\quad \boxed{\begin{array}{lr} 3y_1 + 4y_2 & \\ y_1 & \\ & y_2 \end{array}} & \begin{array}{l} \leq \\ \leq \\ \leq \end{array} & \begin{array}{r} 12 \\ 4 \\ 3 \end{array} \\ x_i, y_i \geq 0, \quad i = 1, 2 & & \end{array} \right.$$

Este problema tem uma óbvia estrutura de decomposição, envolvendo uma restrição coletiva e dois blocos independentes de restrições. De forma que, todas as soluções básicas viáveis para os subproblemas divisionais podem ser facilmente obtidas. A seguir, apresentaremos todas as soluções básicas.

Primeira Iteração:

Vamos considerar as divisões propostas X_1^* e Y_1^* como as primeiras tentativas. A contabilidade da companhia, então, computará as cifras de lucros associadas e recurso coletivo usado, mostrado nos cálculos 4 através de 8 acima. Desde que nas soluções propostas $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0$, neste estágio do procedimento iterativo as médias serão:

$$X_{11}^a = 0 \cdot \mu_1 \qquad\qquad Y_{11}^a = 0 \cdot \nu_1$$

$$X_{21}^a = 0 \cdot \mu_1 \qquad\qquad Y_{21}^a = 0 \cdot \nu_1$$

As variáveis de folga X_{31}, X_{41}, Y_{31} e Y_{41} e sua transformação em média pesadas podem ser negligenciadas, desde que elas pertençam somente à divisões e não entrem no programa executivo.

Vamos estabelecer a função objetiva do nosso programa executivo:

$$P = P_1 X_{11}^a + P_2 X_{21}^a + P_3 Y_{11}^a + P_4 Y_{21}^a$$

$$P = 1 \, . \, (0 \, . \, \mu_1) + 8 \, . \, (0 \, . \, \mu_1) + 5 \, . \, (0 \, . \, \nu_1) + 6.(0.\nu_1)$$

Isto é

$$(**) \quad \begin{cases} P = 0 \, . \, \mu_1 + 0 \, . \, \nu_1 \\ 1 \, . \, (0 \, . \, \mu_1) + 10 \, . \, (0 \, . \, \mu_1) + 5 \, . \, (0 \, . \, \nu_1) + 2 \, . \, (0 \, . \, \nu_1) + \omega = 21 \\ \mu_1 = 1 \\ \nu_1 = 1 \end{cases}$$

O exposto acima constitue o nosso primeiro programa executivo.

Este problema é tão simples que sua solução e a solução para seu dual podem ser obtidas por inspeção.

A solução para nosso presente programa executivo é:

Lucro da Companhia = $P = 0$

$$\mu_1 = \nu_1 = 1$$

$$\omega = 21$$

onde ω é a variável de folga introduzida e $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ e $\Pi_2 = 0$.

Claramente, a solução associada ao problema coletivo (*) é viável. Ela consiste de 100% de X_1^* (isto é, $\mu_1 = 1$) e 100% de Y_1^* (isto é, $\nu_1 = 1$), fazendo $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0$, o lucro é zero.

Se avaliarmos outra qualquer solução para o problema divisional na função lucro de (*) imediatamente se ve que a solução corrente não é ótima. Isto será indicado explicitamente no curso do próximo passo de algorítmo de decomposição.

Por usar o preço dual $\Pi = 0$, calculamos a unidade de lucro revisado das atividades divisionais como em 9.

$$R_{11} = 1 - (1)\Pi = 1 \qquad S_{11} = 5 - (5)\Pi = 5$$

$$R_{12} = 8 - (10)\Pi = 8 \qquad S_{12} = 6 - (2)\Pi = 6$$

Note que, desde que $\Pi = 0$, não existe mudança na cifra de lucro divisional neste estágio.

Divisão 1

$$\text{Max } R_1 = R_{11}x_1 + R_{12}x_2 = x_1 + 8x_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Divisão 2

$$\text{Max } S_1 = S_{11}y_1 + S_{12}y_2 = 5y_1 + 6y_2$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \leq 12 \\ y_1 \leq 4 \\ y_2 \leq 3 \end{cases}$$

A solução destes subsistemas já foram obtidas com o uso do simplex revisado no capítulo 3, a qual atinge um ótimo em

$$x_4^* = (0, 2, 0, 0) \qquad \text{e} \qquad y_4^* = (4, 0, 0, 0)$$

Segunda Iteração:

Desde que nossa solução divisional inicial x_1^* e y_1^* somadas não constituem uma solução ótima para a companhia, uma das duas novas soluções divisionais proposta, deve também ser utilizada nos próximos cálculos. Podemos selecionar x_4^* da divisão 1 para incorporá-lo no programa executivo, desde que ele satisfaça nosso critério lucro marginal, $R_1 > \Pi_1$, isto é

$$R_1 = 0\, R_{11} + 2\, R_{12} = 16 > \overline{\Pi}_1 = 0$$

Usando o procedimento descrito na primeira iteração a contribuição dos x_4^* nos novos cálculos determina o programa provisório para lucro coletivo bem como os recursos coletivos requeridos.

Portanto, a nova variável μ_4 (corresponde a x_4^*) agora entra no prévio programa executivo com o seguinte vetor de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, o segundo programa executivo se torna:

$$\text{Max } (0 \,.\, \mu_1 + 16\mu_4 + 0 \,.\, \nu_1)$$

$$\text{sujeito a } (***) \begin{cases} 0 \,.\, \mu_1 + 20\mu_4 + 0 \,.\, \nu_1 + \omega = 21 \\ \mu_1 + \mu_4 = 1 \\ \nu_1 = 1 \end{cases}$$

A partir de então, uma nova e mais lucrativa solução pode ser determinada por (***) . E os valores diferentes de zero das variáveis primal são:

Lucro Companhia = P = 16, $\mu_4 = 1$, $\nu_1 = 1$ e $\omega = 1$ e os valores da variáveis dual se tornam − $\Pi = 0$, $\overline{\Pi}_1 = 16$, $\overline{\Pi}_2 = 0$.

Uma vez que $\Pi = 0$, a nova cifra de lucro para a atividade divisional continua inalterada e o programa divisional proposto resta x_4^* e y_4^*. Isto produz nossa primeira solução básica.

Lucro Companhia = 0, $\omega = 21$, $\mu_1 = 1$, $\nu_1 = 1$

$\mu_4 = \nu_4 = \Pi = \Pi_1 = \Pi_2 = 0$, $\Delta_{14} = -16$, $\Delta_{24} = -20$ onde Δ_{14} e Δ_{24} são respectivamente, a primeira e segunda divisão, variável de folga dual, correspondendo respectivamente a μ_4 e ν_4.

Escolhendo a coluna pivô na ordem, na qual elas são apresentadas pelas divisões, nosso elemento pivô na matriz precedente é escolhido -1 na coluna 2.

A próxima matriz do simplex é então

		μ_4	ν_4
Lucro	16	-16	20
ω	1	20	-20
μ_4	1	1	0
ν_1	1	0	-1
		$-\Pi_1 =$	$-\Delta_{24} =$

Que produzem nossa segunda solução básica

Lucro = 16, $\omega = 1$, $\mu_4 = 1$, $\nu_1 = 1$

$\overline{\Pi}_1 = 16$, $\Delta_{24} = -20$ e o restante das variáveis tem valor zero.

Nosso terceiro pivoteamento da um passo ao correspondente programa executivo (***) , tomando como elemento pivô -20 na última coluna, saindo ω e entrando ν_4. Então, obtemos a matriz.

lucro	17	4	-1
ν_4	$\frac{1}{20}$	1	$\frac{6}{18}$
μ_4	1	1	0
ν_1	$\frac{19}{20}$	-1	$\frac{1}{18}$
		$-\Pi_1 =$	$-\Pi =$

Isto finalmente, da solução corrente ao nosso programa executivo:

Lucro companhia = 17, $\nu_4 = \frac{1}{20}$, $\mu_4 = 1$

$\nu_1 = \frac{19}{20}$, $\bar{\Pi}_1 = -4$ e $\Pi = 1$

Observámos que esta não é uma solução ótima para nosso programa (****), desde que o segundo elemento na primeira linha da matriz é positivo, isto é, a solução dual $\bar{\Pi}_1 = -4$ não é viável, pois, representa uma produção marginal negativa.

Por outro lado, para nosso propósito não existe necessidade de se fazer um quinto pivoteamento nos cálculos do programa executivo, porque o lucro da companhia tem crescido já além de que era na segunda iteração.

De maneira que, tendo ido tão longe quanto necessário, na solução do nosso corrente programa executivo, vamos retomar agora a discussão do procedimento de decomposição.

Uma vez que a nossa solução corrente envolve $\Pi = 1$, a nossa cifra de lucro para as atividades divisionais se torna:

$R_{31} = 1 - (1)\Pi = 0$ $\qquad$ $S_{31} = 5 - (5)\Pi = 0$

$R_{32} = 8 - (10)\Pi = -2$ $\qquad$ $S_{32} = 6 - (2)\Pi = 4$

Com estas novas cifras de lucro, outros cálculos utilizando o simplex, mostram que nova solução da divisão 1 do programa é x_1^* ou x_3^*. Arbitrariamente, vamos escolher x_3^* para introduzi-lo no programa executivo.

Quarta Iteração:

Observamos que, desde que

$x_3^* = (1, 0, 0, 0)$ por (*) temos então

$R_3 = 1\ R_{31} + 0\ R_{32} = 0 > \overline{\Pi}_1 = -4.$

Por isto, x_3^* contribue para o lucro coletivo nesta iteração. O coeficiente da nova variável, μ_3 na função lucro (que é obtido na iteração 2) será 1 bem como na restrição coletiva 1.

Com estes resultados o novo programa executivo se torna:

$$\text{Max } 1\ \mu_3 + 16\ \mu_4 + 0\ \nu_1 + 18\ \nu_4$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 1\ \mu_3 + 20\ \mu_4 + 0\ \nu_1 + 6\ \nu_4 \leq 21 \\ \mu_3 + \mu_4 = 1 \\ \nu_1 + \nu_4 = 1 \end{cases}$$

A nova solução para este programa executivo (encontrada na 2ª iteração do exemplo numérico no capítulo 3) é dada por

Lucro companhia $= \dfrac{420}{20}$

$\mu_3 = 1, \quad \mu_4 = 0, \quad \nu_4 = 1$

$\Pi = \dfrac{300}{380}, \qquad \Pi_1 = \dfrac{4}{19}, \qquad \Pi_2 = \dfrac{80}{19}$

E a nova unidade de cifra de lucro se torna

$R_{41} = 1 - (1)\Pi = \dfrac{80}{380} \qquad S_{41} = 5 - (5)\Pi = \dfrac{400}{380}$

$R_{42} = 8 - (10)\Pi = \dfrac{40}{380} \qquad S_{42} = 6 - (2)\Pi = \dfrac{1680}{380}$

A solução ótima x_3^* e y_4^* do programa divisional e a contribuição divisional para o lucro correspondente à proposta divisional são:

$$R_4 = \frac{80}{380} \cdot 1 + \frac{40}{380} \cdot 0 = \frac{80}{380} = \frac{4}{19} = \overline{\Pi}_1$$

$$S_4 = \frac{400}{380} \cdot 4 + \frac{1680}{380} \cdot 0 = \frac{1600}{380} = \frac{80}{19} = \overline{\Pi}_2$$

Portanto, a contribuição de lucro marginal líquido de outro programa divisional proposto é agora zero e outra iteração não melhora a solução.

Portanto, estamos no ótimo!!!

BIBLIOGRAFIA

1. GALE, David - The Theory of Linear Economic Models - New York - Mc Graw-Hill, 1960 - xxii + 330p.
2. GASS, Saul L. - Programación Linear - Método y Aplicationes - Mexico, Espana, Argentina, Chile - Compania Editorial Continental S.A. -Mc Graw-Hill - c 1969 - 397p.
3. HADLEY, G. - Linear Programming - Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company - c 1962 - vii + xii + 514p.
4. KIM, Chaiho - Introduction to Linear Programming - New York - Holt Renepart and Winston, Inc. - c 1971 - viii + xviii + 527p.
5. KOOPMANS, Tjalling C. - Three Essays on The State of Economic Science - New York - Mc Graw-Hill, 1957 - xi + 231p.
6. LASDON, Leon S. - Optmization Thery for Large Systems - Londom, The Mc Millan Co. - c 1970 - xi + 523p.
7. MANAGEMENT, Science - Journal of The Institute of Management Sciences - Maryland, 1965 - V. 11 - nº 2.
8. RUDIN, Walter - Princípios de Análise Matemática - Brasil - Ao Licro Técnico S. A. - c 1971 - xiv + 289p.
9. SIMONNARD, Michel - JEWELL, William S. - Linear Programming - Engliwood Cliffs, N. J. - Prentice-Hall, Inc. - c 1966 - Paris, Dunond - c 1962 - viii + xiii + 347p - Apendice.
10. SPIVEY, W. Allen - THRALL, Robert M. - Linear Optimization - New York - Holt Rinehart and Winston - c 1970 - vii + xii + 374p - Apendice.
11. TCHENG, Tse-Hao - Sheduling of a Large Forestry - Cutting Problem by Linear Programming Decomposition - Agosto 1966 - Tese em Facsimile - Ann Arbor, Michigam, Xerox Universal Microfilms, 1975 - vi + 222p.

12. WAGNEN, Harvery M. - Principles of Operations Research With Aplications to Managerial Decisions - Englewood Cliffs, N. J. - Prendice Hall Internatio nal, c 1969 - xxii + 937p. - Ilustração - Apendice.