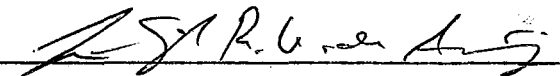


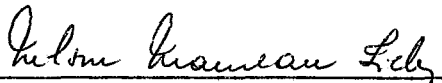
"LIMITES AO CUSTO DE BUSCA EM ÁRVORES COM
CUSTOS LIMITADOS E HEURÍSTICAS PROPORCIONAIS"

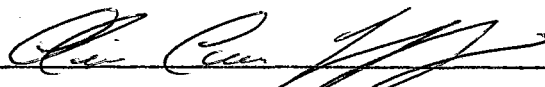
Antonio de Almeida Pinho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUI
SITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:


Prof. João Lizardo R.H. de Araújo


Prof, Nelson Maculan Filho


Prof. Clóvis Caesar Gonzaga

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL

DEZEMBRO DE 1975

a minha esposa

a meu filho

a meus pais

A G R A D E C I M E N T O S

Desejo agradecer a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho, em especial,

- ao professor João Lizardo de Araujo, pela segura e valiosa orientação;

- ao professor Clovis Caesar Gonzaga, pela ajuda e esclarecimentos em alguns pontos do trabalho;

- ao professor Nelson Maculan Filho, pelo apoio a mim concedido;

- a Suely Klajman e Maria da Conceição Marques de Almeida, pelo excelente trabalho de datilografia.

R E S U M O

O presente trabalho visa a determinação de limites superiores e inferiores à expansão de nós, numa busca usando o algoritmo A*, em árvores de custos limitados, com coeficiente de ramificação conhecido; arcos percorríveis em ambos os sentidos e solução única a menos de ciclos, tanto em função da profundidade da solução ótima, como do custo dessa solução.

Além disso são determinadas condições de validade desses limites para o caso de soluções múltiplas e é sugerida uma expressão aproximada para os limites obtidos, de mais simples manipulação.

A B S T R A C T

This work deals with search problems on trees with two-way branches and bounded costs. Assuming a unique - up to cycles - optimal solution, upper and lower bounds on the number of nodes expanded by the algorithm A^* are determined, in terms of the depth as well as of the cost of this optimal solution.

Conditions for the validity of these bounds in the case of multiple solutions are determined. Also, simpler approximate expressions for these limits are suggested.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - Caracterização do problema	3
A. O conceito de programação heurística	3
1. Objetivos da Inteligência Artificial	3
2. Métodos em Resolução de Problemas	4
B. O Algoritmo A*	9
1. Caracterização	9
2. Alguns resultados importantes	10
C. O problema Proposto	12
1. O enunciado	12
2. Restrições	13
CAPÍTULO II - Limites para a expansão de nós em função da profundidade da solução ótima	15
A. Limite superior	15
1. Construção de G_s'	15
2. Cálculo de FG_s'	21
3. Observações	24
B. Limite inferior	29
1. Construção de G_s''	30
2. Cálculo de FG_s''	34
3. Observações	37
C. Extensão de validade	40
1. Caso do limite superior	41
2. Caso do limite inferior	49
D. Uma expressão aproximada	56
1. Limite superior	57
2. Limite inferior	57
CAPÍTULO III - Limites para a expansão de nós em função do custo da solução ótima	58
A. Construção de G_s' e G_s''	58

B. Cálculo dos limites	63
C. Extensão de validade	65
D. Outra condição para a extensão de validade	73
E. Uma função aproximada	78
CAPÍTULO IV - Uma análise crítica	80
APÊNDICE I	82
APÊNDICE II	92
APÊNDICE III	102
BIBLIOGRAFIA	113

I N T R O D U Ç Ã O

Este trabalho pode ser dividido em três partes; na primeira constando apenas do capítulo I, procura-se descrever sucintamente os objetivos e métodos do ramo da computação conhecido como Programação Heurística, segundo os trabalhos de Hart, Nilsson e Raphael [1] e, posteriormente, de Nilsson [2], dando-se ênfase especial ao algoritmo A^* , descrito e formalizado principalmente nas referências [1] e [2], e por Araújo [3] e [4]; este capítulo se encerra com a definição e caracterização do problema proposto, que consiste essencialmente em obter limites superiores e inferiores à expansão de nós em uma árvore, por um algoritmo A^* , admissível e consistente.

A segunda parte, constituída pelos capítulos II e III, dedica-se a obter as expressões para os limites citados, tanto em função de profundidade k da solução ótima (capítulo II), como em função do custo $f(s)$ de tal solução (capítulo III); em ambos os casos, porém, consideram-se árvores de apenas uma solução, de forma que, completando-se o trabalho, procura-se determinar condições que as demais soluções teriam que satisfazer, a fim de que as expressões encontradas para os limites continuassem valendo. Tendo em vista, ainda, que as expressões obtidas são de difícil manipulação, esta parte é concluída, apresentando-se uma expressão aproximada para esses limites, em ambos os casos, mas de mais simples manuseio.

O trabalho é encerrado com uma análise crítica dos resultados obtidos (capítulo IV), apontando-se algumas restrições e sugerindo-se linhas de pesquisa, visando principalmente uma generalização maior dos resultados; e com um conjunto de gráficos (Apêndices I, II e III), nos quais se pode avaliar a qualidade das expressões aproximadas para os limites obtidos nos capítulos II e III.

C A P Í T U L O ICARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMAA - O conceito de Programação Heurística

1. Objetivos da Inteligência Artificial

A partir de 1960 desenvolveu-se um ramo da computação conhecido como Inteligência Artificial, cujos objetivos podem ser descritos como "construir máquinas que executam tarefas que normalmente requeiram inteligência humana" (Nilsson [2]). Descritos dessa forma, os objetivos ficam um tanto vagos; como decidir se uma tarefa requer inteligência humana? Na verdade, o que é "inteligência humana"? As implicações filosóficas e psicológicas dessa última questão fizeram com que os cientistas em computação dirigissem seus esforços em outro sentido: na construção de máquinas cujo comportamento possa ser, de alguma forma, classificado de "humano" (perceptrons, robots) e no desenvolvimento de processos que permitam aos computadores executar tarefas que, segundo consenso geral, exigem inteligência (seja isso o que for) para serem levadas a termo. Dentre essas tarefas, podemos destacar: resoluções de problemas, "compreensão" e tradução de linguagens, prova de teoremas, reconhecimento de padrões auditivos e visuais. Os algoritmos desenvolvidos, na verdade, simulam os processos mentais que levam à consecução do objetivo.

Nosso trabalho irá se restringir à primeira das ci

tadas, resolução de problemas.

2. Métodos em Resolução de Problemas

Em primeiro lugar, não é de forma alguma claro o que seja um problema. "Provavelmente ninguém produziu uma definição simples da palavra problema que captasse completamente o significado intuitivo que gostaríamos de usar" (Nilsson [2]). Na verdade, a obtenção do caminho mínimo entre dois pontos de um grafo, a determinação do melhor lance em uma configuração do jogo de xadrez, integrar uma função, são exemplos típicos e distintos de problemas passíveis de serem abordados segundo nosso enfoque.

De uma maneira geral, um problema, tal como é aqui entendido, consiste essencialmente de uma situação inicial, que, em geral, é conhecida, uma situação final, que pode ser conhecida ou não, mas que deve ser identificável de alguma forma, e um conjunto de operadores tais que quando um deles atua sobre uma situação, modifica-a de alguma forma, criando outra situação.

Nilsson [2] descreve e Banerji [7] formaliza dois processos de resolução de problemas: o de redução a subproblemas e o de transformação de estados.

a) redução a subproblemas

Consiste essencialmente em fazer atuar operadores sobre uma situação (nó) definida como inicial, e sucessivamente sobre as situações obtidas, de modo a transformar o problema dado em um problema cuja solução é conhecida e/ou decompor o problema dado em subproblemas de solução conhecida ou de mais simples solu-

ção. Na figura 1 está um exemplo, fornecido por Nilsson [2], de um problema de integração simbólica; as linhas cheias indicam quais operadores devem ser utilizados (caminho) a fim de se obter a solução: os quatro primeiros apenas transformam o problema; os subsequentes decompõem o problema já transformado em três outros de simples solução. Convenciona-se que, quando os operadores estão ligados por uma linha curva, todos devam ser utilizados.

b) transformação de estados

Também consiste em fazer atuar operadores sobre o nó inicial e, subsequente, sobre os nós que vão sendo obtidos (sucessores), até chegar a um nó (se houver algum) que represente uma situação que possa ser reconhecida como final (ou terminal). Ao contrário do caso anterior, o problema não é decomposto; apenas sua configuração vai se modificando, até ser obtida uma configuração desejada.

À medida que os operadores atuam, vai-se estruturando um grafo, em que os nós representam as situações e os arcos, os operadores; o problema se reduz a determinar a melhor seqüência de operadores (caminho ótimo) que leva do nó inicial ao final; um dos processos para resolver esse problema é a montagem, sobre o grafo, de uma árvore de busca, que pode ser sucintamente descrita pelo seguinte algoritmo: (1.1)

S₁. Abre o nó inicial

S₂. Se não houver nó aberto, não há solução

S₃. Toma um nó em aberto e fecha-o

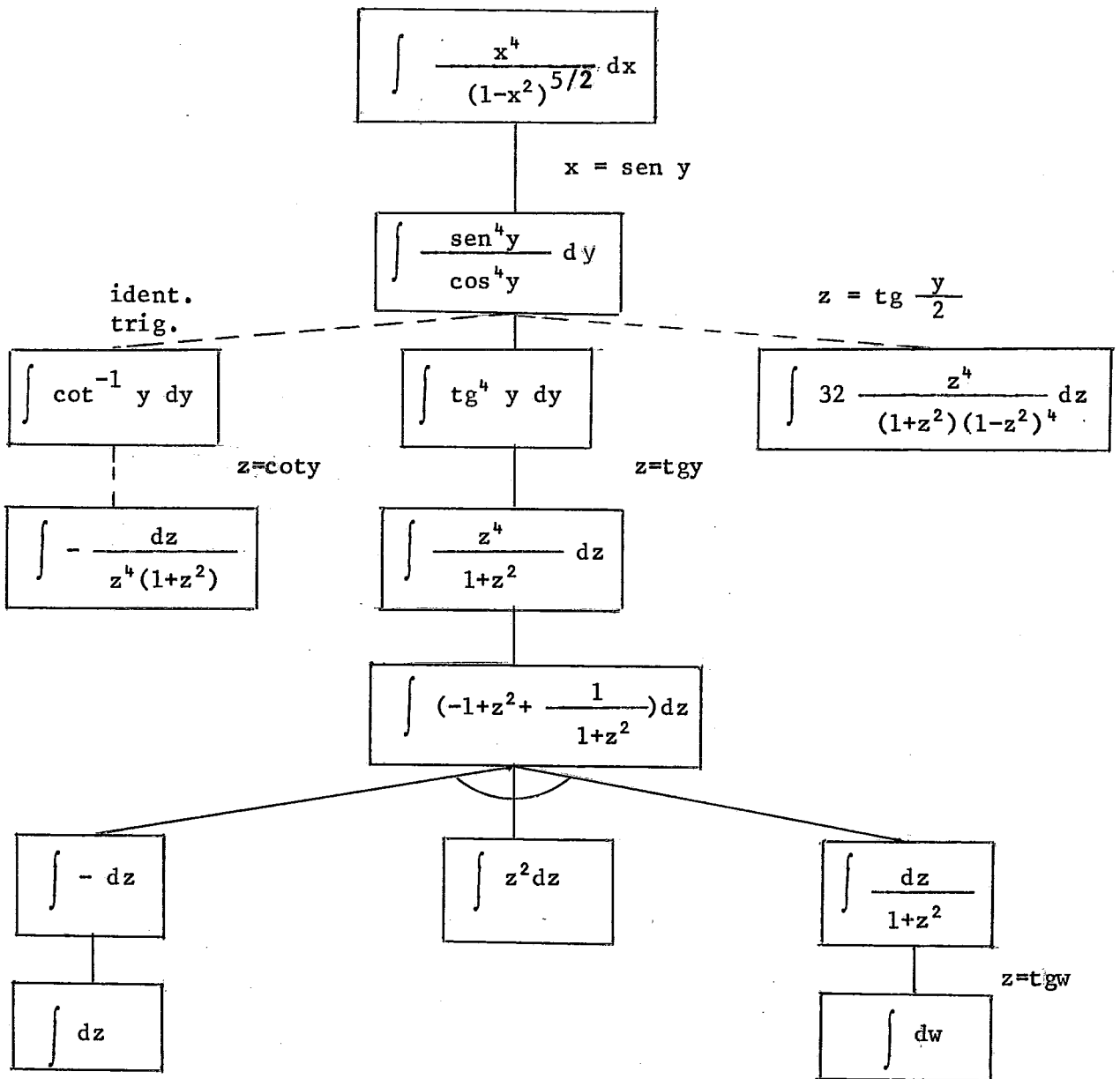


Figura 1

S_4 . Se for um terminal, obtem-se a solução e para.

S_5 . Se não, obtem-se os sucessores e coloca-os na lista de abertos

S_6 . Vai para S_2

Evidentemente, é necessário algum critério, no passo S_3 para "tomar um nó em aberto"; Nilsson [2] três critérios:

b_1 - toma-se o nó aberto mais antigo; é o método breadth-first, que produz uma árvore de busca nível a nível, isto é, o nó de um nível só é gerado depois que todos os nós do nível anterior foram gerados; é um método chamado exaustivo.

b_2 - toma-se o nó aberto mais recente; é o método depth-first, que produz uma árvore de busca pela esquerda, até um certo nível arbitrado; também é um método exaustivo.

b_3 - toma-se o nó mais promissor, entre os abertos; é o processo de busca ordenada, que levanta o problema da determinação do nó mais promissor. Nesse ponto, torna-se evidente que é necessário mais alguma informação, pertinente à natureza do problema, que permita distinguir, entre todos os nós em aberto, aquele que tem mais possibilidade de levar a uma solução; tal informação é dita "informação heurística" e seu uso permite a criação de uma função de avaliação capaz de ordenar os nós em aberto em função de suas possibilidades de atingir um nó terminal mais rapidamente. A implantação de algoritmos com essas características é o que se chama Programação Heurística.

Na figura 2 temos um exemplo, também fornecido por

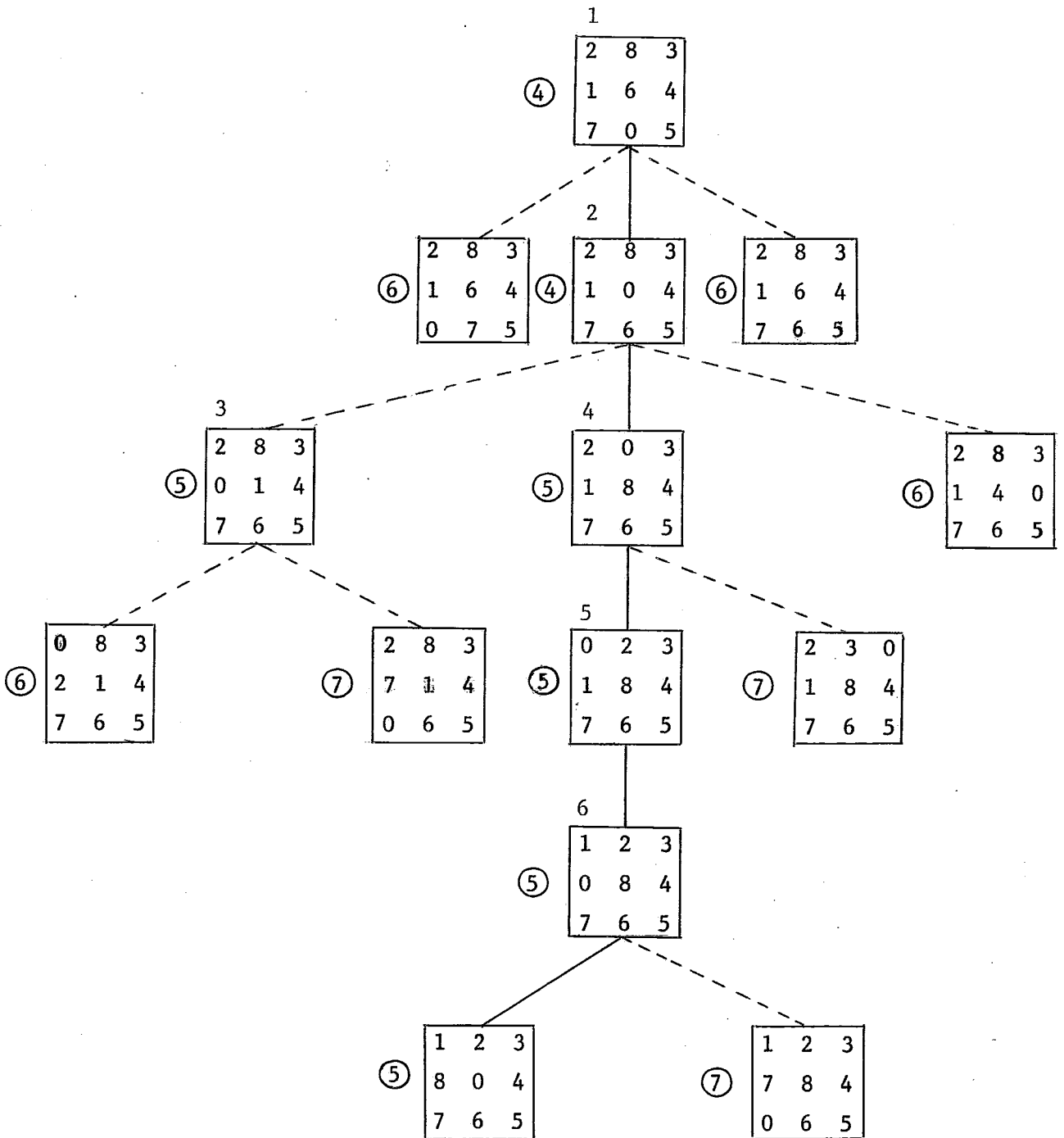


Figura 2

Nilsson [2], da resolução, através desse método, de um problema do "jogo dos 8" : obter uma seqüência de permutações da casa vazia (0) com peças adjacentes que permita passar da configuração

2	8	3			1	2	3
1	6	4	para a configuração	8	0	4	
7	0	5		7	6	5	

A função de avaliação usada foi $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \hat{h}(n)$ (1.2) onde $\hat{g}(n)$ é o comprimento do caminho (cada arco vale 1) do nó inicial ao nó n , e $\hat{h}(n)$ é o número de elementos fora do lugar, na configuração do nó n , em relação ao objetivo. Os números acima de cada nó dão a ordem de expansão, e os números inscritos num círculo, dão o valor de $\hat{f}(n)$. O caminho é fornecido pelas linhas cheias.

B - O Algoritmo A^*

1. Caracterização

Em 1968, Hart, Nilsson e Raphael [1] propuseram uma base formal para a implantação de algoritmos de programação heurística, tendo a classe de algoritmos A^* , ali definida, revelado ser uma abordagem extremamente fértil, permitindo um tratamento rigoroso das noções de admissibilidade (garantia de achar uma solução ótima) e eficiência de heurística.

O algoritmo A^* consiste essencialmente na estruturação de uma árvore de busca ordenada sobre um d -grafo, (um grafo em que a cada arco i está associado um custo $c_i \leq d$) na forma se

guinte: façamos

S - conjunto de nós iniciais; (1.3)

T - conjunto de nós terminais;

$c(m,n)$ - custo da passagem de um nó m a outro n através da aplicação de um operador sobre m ; não se refere ao custo de computação, mas a um custo inerente a estrutura do problema, produzido pela aplicação do operador;

$k(m, n)$ - menor custo de m a n ;

$g(n)$ - menor custo do caminho de algum $s \in S$ a n ;

$h(n)$ - menor custo do caminho de n a algum $t \in T$;

$\hat{g}(n)$ - custo de um caminho de $s \in S$ a n ;

$\hat{h}(n)$ - uma estimativa do menor custo de n a algum $t \in T$. A "informação heurística" é que permite obter $\hat{h}(n)$; por isso essa função é dita uma função heurística;

$f(s)$ - custo da solução ótima.

O algoritmo seleciona, entre os nós em aberto, aquele cujo $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \hat{h}(n)$ é menor (conforme (1.2); $\hat{f}(n)$ é a função de avaliação), fecha-o e gera seus sucessores, até, eventualmente, fechar um nó terminal.

Um possível desempate é feito de forma arbitrária, mas sempre a favor de um nó terminal.

2. Alguns resultados importantes

O algoritmo foi formalizado por Hart, Nilsson e Raphael [1], e será útil para o presente trabalho, citamos al-

guns resultados obtidos desde então.

a) definições (1.4)

a_1 - um algoritmo de busca é admissível se sempre encontra um caminho ótimo para um nó terminal, se tal caminho existir;

a_2 - um algoritmo admissível A_2 é dito "não mais informado" que um algoritmo A_1 se, para todo n , $\hat{h}_2(n) \leq \hat{h}_1(n)$; se, para todo $n \notin T$, $\hat{h}_2(n) < \hat{h}_1(n)$, o algoritmo A_1 é dito "mais informado que A_2 ";

a_3 - um algoritmo de busca que usa uma função heurística \hat{h} é dito consistente se, para todo par (m,n) , $\hat{h}(m) \leq \hat{h}(n) + k(m,n)$;

a_4 - dois algoritmos A_1 e A_2 são equivalentes (e anotamos $A_1 \sim A_2$) se, para todo d-grafo G_s geram e expandem a mesma seqüência de nós.

b) alguns resultados (1.5)

b_1 - se, para todo n , $\hat{h}(n) \leq h(n)$, então A^* é admissível (Hart, Nilsson e Raphael [1]);

b_2 - se A^* é consistente, ao fechar um nó n qualquer, $\hat{g}(n) = g(n)$ (Hart, Nilsson e Raphael [1]);

b_3 - se, para todo n , $\hat{h}(n) \leq h(n)$, A^* só fecha nós n para os quais $\hat{f}(n) \leq f(s)$, custo da solução ótima (Hart et al [1]);

b_4 - sejam A^* e A_1 admissíveis, onde A_1 é um algoritmo qualquer e A^* é mais informado que A_1 ; então, se n não ter

minal é fechado por A^* também o será por A_1 (Araújo [4]);

b_5 - se, além das condições de b_4 tivermos A^* consistente, número de nós fechados por $A^* \leq$ número de nós fechados por A_1 (Hart et al [1]);

b_6 - sejam A^* e A_1 admissíveis, A^* consistente e A_1 qualquer algoritmo não mais informado que A^* ; então número de nós fechados por $A^* \leq$ número de nós fechados por $A_1 + E_c$, onde E_c é o número de vezes em que, até A^* terminar, houve mais de um candidato ao fechamento, com $\hat{f}(n) = f(s)$ (Hart et al [1]).

Note que a possível vantagem de A_1 sobre A^* , em termos do número de nós fechados, é devida exclusivamente ao critério de desempate de A^* ; então existe algum A^* , dentre aqueles que usam a mesma informação heurística, mas com um critério de desempate melhor, tal que o número de nós fechados por esse $A^* \leq$ número de nós fechados por A_1 . Esse resultado garante a otimalidade do A^* , isto é, entre todos os algoritmos admissíveis que usam a mesma informação heurística, um A^* é o ótimo, em termos do número de nós fechados.

C - O Problema Proposto

1. O enunciado

Em termos computacionais, as partes mais dispendiosas de algoritmos de busca são a expansão de nós (tempo) e seu armazenamento (memória); por isso, geralmente, a eficiência desse tipo de algoritmos é medida em função do número de nós expandidos

(e/ou gerados); sob esse ponto de vista, como vimos anteriormente, em (1.5) o A^* é ótimo, de forma que um problema que aparece naturalmente é a determinação de limites superiores e inferiores à expansão de nós por um A^* .

O presente trabalho procura resolver este problema, que assim pode ser enunciado: determinar limites superiores e inferiores à expansão de nós em um algoritmo A^* ,

- a) em função de profundidade da solução ótima, e
- b) em função do custo dessa solução.

Tal problema, no caso particular de custos uniformes, já foi abordado e solucionado por Araújo [3], e este trabalho, orientado pelo prof. Araújo, tem como motivação generalizar alguns resultados obtidos naquela referência.

2. Restrições

Com o sentido de levar a termo a proposição acima, faremos algumas hipóteses, em relação ao A^* , algumas restritivas, outras nem tanto:

a) consideraremos um algoritmo de busca sobre G_s , uma d -árvore; então $\hat{g}(n) = g(n)$ para todo n , e A^* é ótimo;

b) seu coeficiente de ramificação (isto é, o número de sucessores por nó) será B ; evidentemente, em casos práticos, raramente todos os nós têm o mesmo número de sucessores, mas, para o cálculo dos limites poderemos tomar um B médio, ou então um limite superior (inferior) para B ;

c) os arcos são transitáveis nos dois sentidos, e os custos de transição são C_{ij} , onde $0 < C_0 \leq C_{ij} \leq 1$; isto não é realmente uma restrição, uma vez que, em casos práticos podemos normalizar os custos, o que não altera o número de nós fechados;

d) o algoritmo A^* terá $\hat{h}(n) = \alpha h(n)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, para todo n , isto é, A^* será admissível;

e) a árvore tem apenas uma solução, na profundidade k .

O conjunto de condições acima, doravante chamado condições C1 será utilizado para o cálculo dos limites superior e inferior à expansão de nós em A^* , em função da profundidade da solução ótima; para o cálculo desses limites em função do custo dessa solução, substituiremos o item e) acima por

e') a árvore tem apenas uma solução, de custo $f(s)$.

O novo conjunto assim formado será chamado de condições C2.

C A P Í T U L O IILIMITES PARA A EXPANSÃO DE NÓS EM FUNÇÃO DA PROFUNDIDADE DA SOLUÇÃO ÓTIMAA - LIMITE SUPERIOR

O problema consiste em, dada uma árvore G_s e um A^* nas condições C_1 , conseguir um limite superior para o número de nós fechados em G_s pelo A^* ; uma forma simples de conseguir a solução, é dividir o problema em duas etapas:

a) Construir uma árvore G_s' , nas mesmas condições C_1 , tal que $FG_s' \geq FG_s$, qualquer que seja G_s , onde FG_s' é o número de nós fechados em G_s' pelo A^* , e FG_s é o número de nós fechados em G_s pelo A^* .

b) Calcular FG_s' .

Então FG_s' é um limite superior.

As duas etapas estão resolvidas a seguir.

1 - Construção de G_s'

Dada uma árvore G_s e um A^* nas condições C_1 , procuraremos mostrar que, se G_s' for idêntica a G_s , exceto pelo seguinte:

a) todos os arcos do caminho ótimo valem 1, e

b) todos os arcos fora do caminho ótimo valem c_0 , então $FGs' \geq FGs$.

Para que possamos demonstrar esse fato, necessitamos do seguinte resultado:

Teorema 1

Um A^* com $h(n) = \alpha h(n)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, fechará em uma árvore G_s nas condições C1 todo nó n tal que $f(n) < f(s)$, onde $f(s)$ é o custo da solução ótima.

Para levar a efeito a demonstração deste teorema, precisamos dos dois lemas seguintes:

Lema 1 - Nas condições C1, todo nó $n \notin \gamma_s$, com antecessor m , tem $\hat{f}(n) > \hat{f}(m)$, onde γ_s é o caminho ótimo.

Realmente, seja $c(m, n) = \lambda > 0$

Então, $\hat{g}(n) = \hat{g}(m) + \lambda$, uma vez que G_s é uma árvore; e $\hat{h}(n) = \hat{h}(m) + \lambda$, uma vez que $n \notin \gamma_s$.

Decorre imediatamente que $\hat{f}(n) = \hat{f}(m) + \lambda(1 + \alpha)$, isto é, $\hat{f}(n) > \hat{f}(m)$.

Lema 2 - Nas condições C1, todo nó n com antecessor m fechado, e tal que $\hat{f}(n) < f(s)$, será fechado pelo A^* .

Ora, como m é fechado, n é gerado; como A^* é admissível, (item d das condições C1) o nó terminal será fechado; como $\hat{f}(n) < f(s)$, por b_3 do capítulo I, (1.5), n será fechado.

Agora, estamos prontos para o teorema 1.

Suponha um nó n com $\hat{f}(n) < f(s)$. Como G_s é uma árvore

vore, existe um caminho n_k, n_{k+1}, \dots, n , onde $n_k \in \gamma_s$. Além disso, pelo Lema 1, temos

$$\hat{f}(n_k) < \hat{f}(n_{k+1}) < \dots < \hat{f}(n)$$

Como n_k é fechado (pois $n_k \in \gamma_s$), pelo Lema 2, n_{k+1} será fechado; repetindo o raciocínio, vemos que n_{k+2}, \dots, n serão fechados; e isso encerra a demonstração.

O resultado b_3 do Capítulo I nos garante que A^* só fecha nós n para os quais $\hat{f}(n) \leq f(s)$; por outro lado como sempre existe m aberto em γ_s tal que $\hat{f}(m) \leq f(s)$, um empate $\hat{f}(n) = f(s)$, $n \notin \gamma_s$ só ocorre se o nó terminal já estiver sido gerado, e o A^* dá preferência a ele; portanto se $\hat{f}(n) = f(s)$, n só será fechado se $n \in \gamma_s$. (2.1).

O teorema 2, a seguir, nos dá o resultado procurado.

Teorema 2

Seja G_s' e um A^* nas condições c_1 , exceto pelo seguinte:

- a) para todo $n \in \gamma_s$, $c(m, n) = 1$, e
- b) para todo $n \notin \gamma_s$, $c(m, n) = c_0$.

Então o número de nós fechados em G_s' pelo A^* é máximo, em relação a qualquer outra árvore G_s nas condições c_1 .

Demonstração:

Uma vez que G_s e G_s' têm o mesmo coeficiente de ramificação, podemos estabelecer uma correspondência um-a-um entre

os nós de G_s e os de $G_{s'}$, por suas posições nas árvores; e vamos demonstrar que se um nó n é fechado em G_s , então seu correspondente n' será fechado em $G_{s'}$.

Realmente, seja n fechado em G_s , com antecessor n_u em γ_s e tal que haja ℓ arcos no caminho de n_u a n . Então

$$g(n) + \alpha h(u) \leq f(s) \quad (\text{por } b_3 \text{ do capítulo I})$$

Queremos mostrar que isso implica em que o nó n' em $G_{s'}$ é fechado; para isso vamos supor que os custos de γ_s sejam c_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, cada um deles igual ou inferior a 1 e que os custos do caminho de n_u a n sejam c'_i , $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, cada um deles igual ou superior a c_0 . Então

$$g(n) = \sum_{i=1}^u c_i + \sum_{i=1}^{\ell} c'_i$$

$$h(n) = \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \sum_{i=u+1}^k c_i$$

$$f(s) = \sum_{i=1}^k c_i$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^u c_i + \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \alpha \left(\sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \sum_{i=u+1}^k c_i \right) \leq \sum_{i=1}^k c_i$$

Desenvolvendo, vem

$$\sum_{i=1}^u c_i + \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \alpha \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \alpha \sum_{i=u+1}^k c_i - \sum_{i=1}^k c_i \leq 0$$

$$(\alpha - 1) \sum_{i=u+1}^k c_i + (\alpha + 1) \sum_{i=1}^{\ell} c'_i \leq 0 \quad (2.2)$$

Por hipótese, temos

$$\ell c_o \leq \sum_{i=1}^{\ell} c'_i$$

de onde decorre

$$(1 + \alpha) \ell c_o - (1 + \alpha) \sum_{i=1}^{\ell} c'_i \leq 0 \quad (2.3)$$

Ainda por hipótese, temos

$$\sum_{i=u+1}^k c_i \leq k - u$$

de onde decorre

$$(1 - \alpha)(u - k) + (1 - \alpha) \sum_{i=u+1}^k c_i \leq 0 \quad e$$

$$(1 - \alpha)(u - k) - (\alpha - 1) \sum_{i=u+1}^k c_i \leq 0 \quad (2.4)$$

Adicionando (2.2), (2.3) e (2.4) membro a membro,

vem

$$\lambda c_0 + \alpha \lambda c_0 + u - k - \alpha u + \alpha k \leq 0$$

$$u + \lambda c_0 + (\lambda c_0 - k - u) \leq k \quad (2.5)$$

De estrutura de Gs' , temos

$$g(n') = u + \lambda c_0$$

$$h(n') = \lambda c_0 + k - u$$

$$f(s') = k$$

Então (2.5) pode ser escrita como

$$g(n') + \alpha h(n') \leq f(s')$$

Se $g(n') + \alpha h(n') < f(s')$, n' é fechado, pelo teorema 1.

Se $g(n') + \alpha h(n') = f(s')$, decorre

$$\sum_{i=u+1}^k c_i = k - u, \text{ o que implica em } c_i = 1 \text{ para todo}$$

do $i \in \{u + 1, \dots, k\}$, e

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i' = \lambda c_0, \text{ o que implica em } c_i' = c_0 \text{ para todo}$$

$i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$.

Portanto, $g(n) + \alpha h(n) = f(s)$.

Como n é fechado, o critério de desempate favorece n em confronto com algum $m \in \gamma s$. Como o critério de desempate é

o mesmo em G_s' , favorecerá n' em confronto com m' e γ_s' (m' é o correspondente a m , em G_s') e n' será fechado.

Portanto, a todo nó fechado em G_s corresponde um nó fechado em G_s' , e o número de nós fechados em G_s' é máximo em relação a qualquer árvore G_s nas condições C1.

2 - Cálculo de FG_s'

Os nós fechados em G_s' são de dois tipos: os que estão em γ_s , cujo número é $k + 1$ (uma vez que k é a profundidade da solução) e os que não estão em γ_s ; seja $FG_s'a$ seu número; então

$$FG_s' = FG_s'a + k + 1$$

a) Cálculo de $FG_s'a$

Sabemos que:

k é a profundidade de n_t (nó terminal);

B é o coeficiente de ramificação de G_s' ;

$$n \in \gamma_s \rightarrow c(m, n) = 1;$$

$$n \notin \gamma_s \rightarrow c(m, n) = c_0$$

Seja então $n \notin \gamma_s$, na profundidade ℓ , com um ancestral em γ_s , no nível i , $0 \leq i \leq k - 1$; qual o maior ℓ , tal que n seja fechado ?

Ora, como n é fechado, $f(n) < f(s)$;

$$\text{Mas } \hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \hat{h}(n) \text{ e } f(s) = k$$

Além disso, $\hat{g}(n) = g(n)$ (n é fechado), e $\hat{h}(n) = ch(n)$ (condições C1).

Então $g(n) + \alpha h(n) < k$

Mas $g(n) = i + (\ell - i)c_0$ e $h(n) = (\ell - i)c_0 + k - i$,
pela figura 3.

Portanto, $\alpha [(\ell - i)c_0 + k - i] + i + (\ell - i)c_0 < k$.

Tirando o valor de ℓ :

$$\alpha c_0 (\ell - i) + \alpha k - \alpha i + i + \ell c_0 - i c_0 < k$$

$$\alpha c_0 \ell - \alpha c_0 i + \alpha k - \alpha i + i + \ell c_0 - i c_0 < k$$

$$\ell (\alpha c_0 + c_0) < k + \alpha c_0 i - \alpha k + \alpha i - i + i c_0$$

$$\ell [c_0 (1 + \alpha)] < i c_0 + i c_0 + k - \alpha k - i + \alpha i$$

$$\ell [c_0 (1 + \alpha)] < i c_0 (1 + \alpha) + k(1 - \alpha) - i(1 - \alpha)$$

$$\ell [c_0 (1 + \alpha)] < i c_0 (1 + \alpha) + (k - i)(1 - \alpha)$$

$$\ell < i + \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Então o valor máximo de ℓ é o maior inteiro estritamente menor (considerando bom desempate) que

$$i + \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Usando $\lfloor x \rfloor =$ maior inteiro estritamente menor que x , podemos escrever:

$$\ell = \left\lfloor i + \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor + i \quad (2.6)$$

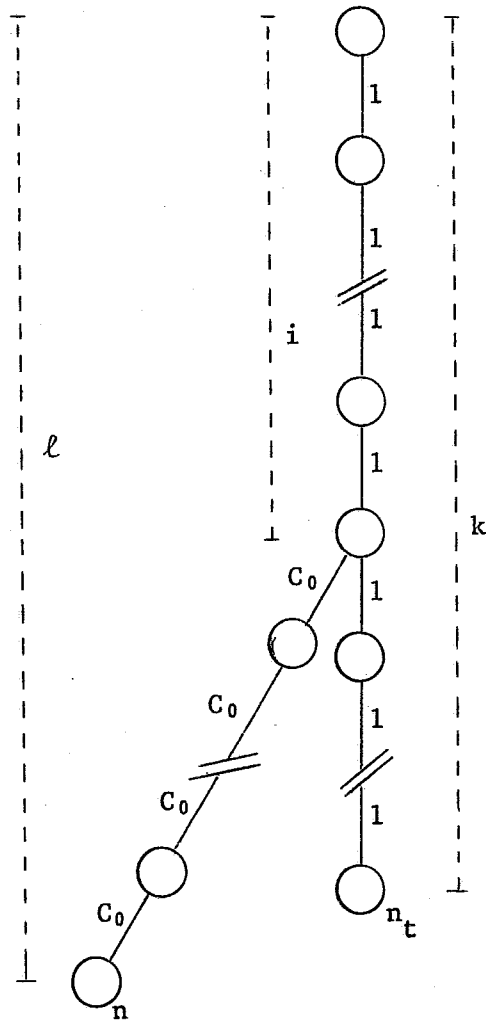


Figura 3

Portanto o número de nós, $n \notin \gamma_s$, fechados, num ramo que parta de γ_s no nível i , será:

$$(B-1) \sum_{j=0}^{k-i-1} B^j = (B-1) \left[\frac{k-i}{c_0} \sum_{j=0}^{k-i-1} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right]^{-1} B^j$$

Façamos $\left[\frac{k-i}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right] = LS(i)$; como i varia de

0 a $k-1$, temos

$$\begin{aligned} FGs'_a &= \sum_{i=0}^{k-1} (B-1) \sum_{j=0}^{LS(i)-1} B^j = \sum_{i=0}^{k-1} (B-1) \frac{B^{LS(i)} - 1}{B-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (B^{LS(i)} - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} B^{LS(i)} - k, \end{aligned}$$

Portanto

$$FGs' = \sum_{i=0}^{k-1} B^{LS(i)} - k + k + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} B^{LS(i)} + 1$$

Adotando a convenção $[0] = 0$, podemos escrever

$$FGs' = \sum_{i=0}^k B^{LS(i)} \quad (2.7), \text{ e este é o resultado procurado.}$$

3 - Observações

a) Se $1 \leq \alpha \leq \frac{k-c_0}{k+c_0}$, apenas os nós de γ_s serão fechados.

Demonstração:

É claro que

$$\left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{k-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor \geq \dots \geq \left\lfloor \frac{1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor \geq 0$$

Estes são os expoentes de B, em (2.7)

Ora,

$$\alpha \geq \frac{k - c_0}{k + c_0} \quad \rightarrow \quad \alpha k + \alpha c_0 \geq k - c_0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha k - k \geq -c_0 - \alpha c_0 \quad \rightarrow \quad k(\alpha - 1) \geq c_0(-1 - \alpha) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow k(1 - \alpha) \leq c_0(1 + \alpha) \quad \rightarrow \quad \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \leq \frac{c_0}{k} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{k}{c_0} \leq 1 \quad \rightarrow \quad \left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow LS(i) = \left\lfloor \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor = 0 \text{ para todo } i, \quad 0 \leq i \leq k$$

Portanto

$$FGs' = \sum_{i=0}^k B^{LS(i)} = k + 1$$

Como A^* é admissível, os $k + 1$ nós fechados serão os de $\tilde{\gamma}_s$, e isso encerra a demonstração.

b) É possível obter limites superiores para FGs, mais simples que em (2.7), embora mais fracos:

$$\frac{B^{LS(k-1)} (B^{kLS(k-1)} - 1)}{B^{LS(k-1)} - 1} + 1 \leq FGs' \leq \frac{B^{LS(k-1)} (B^{k(LS(k-1)+1)} - 1)}{B^{LS(k-1)+1} - 1} + 1$$

onde $LS(k-1) = \left\lfloor \frac{1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor$

Demonstração:

$$\text{Cálculo de } \left\lfloor \frac{k-j}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-j-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor,$$

isto é, da diferença entre dois expoentes consecutivos de B em (2.7):

Ora

$$\left\lfloor \frac{k-j}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor = \frac{k-j}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \lambda, \quad \text{onde } 0 < \lambda \leq 1, \quad e$$

$$\left\lfloor \frac{k-j-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor = \frac{k-j-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \delta, \quad \text{onde } 0 < \delta \leq 1$$

Então

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{k-j}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-j-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor = \\ & = \frac{k-j}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \lambda - \left(\frac{k-j-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \delta \right) = \\ & = \frac{1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} (k-j-k+j+1) - (\lambda - \delta) = \\ & = \frac{1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - (\lambda - \delta), \quad \text{onde } -1 < \lambda - \delta < 1 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left\lfloor \frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor = \frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - \phi, \text{ onde } 0 < \phi \leq 1 \quad (2.8)$$

Então pode ocorrer:

$$b_1) \quad 0 < \lambda - \delta < 1$$

Como $\frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - (\lambda - \delta)$ e $\frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - \phi$ são inteiros, sua diferença é inteira, isto é, $\phi - (\lambda - \delta)$ é inteiro; além disso, $-1 < \phi - (\lambda - \delta) < 1$; portanto $\phi - (\lambda - \delta) = 0$, isto é, $\phi = \lambda - \delta$.

De onde se conclui

$$\left\lfloor \frac{k-j}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-j-1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor$$

$$b_2) \quad -1 < \lambda - \delta \leq 0$$

Ora, sabemos que $\frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - (\lambda - \delta)$ é inteiro;

de (2.8), temos que $\frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \left\lfloor \frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor + \phi$; substituindo na expressão anterior vem que

$\left\lfloor \frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor + \phi - (\lambda - \delta)$ é inteiro, isto é, $\phi - (\lambda - \delta)$ é inteiro.

Ora,

$$0 < \phi \leq 1 \quad \rightarrow \quad 1 \geq \phi > 0$$

$$-1 < \lambda - \delta \leq 0 \quad \rightarrow \quad 1 > -(\lambda - \delta) \geq 0; \text{ adicionando}$$

membro a membro, vem

$$2 > \phi - (\lambda - \delta) > 0 \rightarrow \phi - (\lambda - \delta) = 1$$

Portanto,

$$\left[\frac{k-j}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right] - \left[\frac{k-j-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right] = \left[\frac{1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right] + 1$$

Então, a diferença entre dois expoentes consecutivos de B, em (2.7) é $LS(k-1)$ ou $LS(k-1) + 1$.

b₃) usando $LS(k-1)$

$$\begin{aligned} FGs' &= 1 + B^{LS(k-1)} + B^{2LS(k-1)} + \dots + B^{kLS(k-1)} = \\ &= \frac{B^{LS(k-1)} (B^{kLS(k-1)} - 1)}{B^{LS(k-1)} - 1} + 1 \end{aligned}$$

b₄) usando $LS(k-1) + 1$

$$\begin{aligned} FGs' &= 1 + B^{LS(k-1)} + B^{LS(k-1) + LS(k-1) + 1} + \\ &+ B^{LS(k-1) + 2(LS(k-1) + 1)} + \dots + B^{LS(k-1) + (k-1)(LS(k-1) + 1)} = \\ &= \frac{B^{LS(k-1)} (B^{k(LS(k-1) + 1)} - 1)}{B^{LS(k-1) + 1} - 1} + 1, \text{ e isso encerra a demons} \end{aligned}$$

tração.

$$c) \text{ Se } \alpha \geq \frac{1 - c_0}{1 + c_0}, \text{ então } k + 1 \leq FGs' \leq \frac{B^k - 1}{B - 1} + 1$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \frac{1 - c_0}{1 + c_0} \quad \rightarrow \quad \alpha(1 + c_0) \geq 1 - c_0 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad \alpha + \alpha c_0 \geq 1 - c_0 \quad \rightarrow \quad c_0 + c_0 \alpha \geq 1 - \alpha \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad 1 \geq \frac{1 - \alpha}{c_0 + c_0 \alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \leq 1 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad LS(k - 1) = 0 \end{aligned}$$

e a expressão obtida em b_4 se reduz a $\frac{B^k - 1}{B - 1} + 1$

Com $LS(k - 1) = 0$, a progressão geométrica do item b_3) não poderia ser aplicada; teríamos

$$1 + B^{LS(k-1)} + \dots + B^{kLS(k-1)} = k + 1; \quad \text{portanto}$$

$$k + 1 \leq FGs' \leq \frac{B^k - 1}{B - 1}, \quad \text{e isso encerra a demonstração.}$$

B - LIMITE INFERIOR

Da mesma forma que em A, tentaremos resolver o problema de encontrar um limite inferior para o número de nós fechados em G_s por um A^* , nas condições C_1 , dividindo-se em duas etapas.

a) construir uma árvore G_s'' , nas mesmas condições C_1 , com FGs'' nós fechados, tal que $FGs'' \leq FGs$, qualquer que seja G_s ; e

b) calcular FGs'' .

1. Construção de Gs''

Dada uma árvore Gs e um A^* nas condições $C1$, procuraremos mostrar que, se Gs'' for idêntica a Gs , exceto pelo seguinte:

a) todos os arcos do caminho ótimo valem c_0 , e

b) todos os arcos fora do caminho ótimo valem 1,

então $FGs'' \leq FGs$.

Teorema 3

Seja Gs'' e um A^* nas condições $C1$, exceto pelo seguinte:

a) para todo $n \in \gamma_s$, $c(m, n) = c_0$, e

b) para todo $n \notin \gamma_s$, $c(m, n) = 1$.

Então, o número de nós fechados em Gs'' pelo A^* é mínimo em relação a qualquer outra árvore Gs nas condições $C1$.

Demonstração:

Da mesma forma que no teorema 2, uma vez que Gs e Gs'' têm o mesmo coeficiente de ramificação, podemos estabelecer uma correspondência um-a-um, por suas posições nas árvores, entre os nós de Gs e os nós de Gs'' ; e vamos demonstrar que se um nó n'' é fechado em Gs'' , então seu correspondente n é fechado em Gs .

Realmente, seja n'' fechado em Gs'' , com antecessor n_u'' em γ_s'' e tal que haja l arcos no caminho de n_u'' a n'' . Então

$$g(n'') + h(n'') \leq f(s'') \quad (\text{por } b_3 \text{ do capítulo I})$$

Queremos mostrar que isso implica em que o nó n em G_s , correspondente a n'' em $G_{s''}$, é fechado; para isso vamos supor que os custos de s sejam c_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, cada um superior ou igual a c_0 e que os custos do caminho de n_u a n sejam c'_i , $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, cada um inferior ou igual a 1. Então

$$g(n) = \sum_{i=1}^u c_i + \sum_{i=1}^{\ell} c'_i$$

$$h(n) = \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \sum_{i=u+1}^k c_i$$

$$f(s) = \sum_{i=1}^k c_i$$

Pela estrutura de $G_{s''}$, a expressão

$$g(n'') + \alpha h(n'') \leq f(s'')$$

equivale a

$$uc_0 + \ell + \alpha(\ell + (k-u)c_0) \leq kc_0$$

Desenvolvendo, vem

$$uc_0 + \ell + \alpha\ell + \alpha(k-u)c_0 - kc_0 \leq 0$$

$$(1+\alpha)\ell + (1-\alpha)uc_0 + (\alpha-1)kc_0 \leq 0$$

$$(1 + \alpha)l + (1 - \alpha)(uc_0 - kc_0) \leq 0$$

$$(1 + \alpha)l - (1 - \alpha)(k - u)c_0 \leq 0 \quad (2.9)$$

Por outro lado, sabemos que

$$l \geq \sum_{i=1}^l c'_i, \text{ o que implica em}$$

$$(1 + \alpha) \sum_{i=1}^l c'_i - (1 + \alpha)l \leq 0 \quad (2.10)$$

e, ainda, que

$$(k - u)c_0 \leq \sum_{i=u+1}^k c_i, \text{ o que implica em}$$

$$(1 - \alpha)(k - u)c_0 + (\alpha - 1) \sum_{i=u+1}^k c_i \leq 0 \quad (2.11)$$

Adicionando (2.9), (2.10) e (2.11) membro a membro,

vem

$$(1 + \alpha) \sum_{i=1}^l c'_i + (\alpha - 1) \sum_{i=u+1}^k c_i \leq 0$$

Desenvolvendo, e somando e subtraindo $\sum_{i=1}^u c_i$, vem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l c'_i + \alpha \sum_{i=1}^l c'_i + \alpha \sum_{i=u+1}^k c_i - \sum_{i=u+1}^k c_i + \\ + \sum_{i=1}^u c_i - \sum_{i=1}^u c_i \leq 0 \end{aligned}$$

Levando em conta que $\sum_{i=1}^u c_i + \sum_{i=u+1}^k c_i = \sum_{i=1}^k c_i$,

vem

$$\sum_{i=1}^u c_i + \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \alpha \sum_{i=1}^{\ell} c'_i + \alpha \sum_{i=u+1}^k c_i \leq \sum_{i=1}^k c_i$$

ou seja,

$$g(n) + \alpha h(n) \leq f(s).$$

Se $g(u) + \alpha h(n) < f(s)$, n é fechado, pelo teorema 1.

Se $g(u) + \alpha h(n) = f(s)$, decorre

$$\ell = \sum_{i=1}^{\ell} c'_i, \text{ o que implica em } c'_i = 1 \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, \ell\}, \text{ e}$$

$$(k - u)c_0 = \sum_{i=u+1}^k c_i, \text{ o que implica } c_i = c_0 \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, u+1\},$$

e, portanto

$$g(n'') + \alpha h(n'') = f(s'').$$

Como n'' é fechado, o critério de desempate favorece n'' em confronto com algum m'' de $\gamma s''$. Como o critério de desempate é o mesmo em G_s , favorecerá n em confronto com $m \in \gamma s$ (correspondente de m'' , em G_s) e n será fechado.

Portanto, a todo nó fechado em G_s'' corresponde um nó fechado em G_s e o número de nós fechados em G_s'' é mínimo em relação a qualquer árvore G_s nas condições C1.

2. Cálculo de FGs''

Como no caso anterior, são em número de $k+1$ os nós de γ_s , de forma que $FGs'' = k+1 + FGs''_a$, onde FGs''_a é o número de nós fechados que não estão em γ_s .

a) Cálculo de FGs''_a

Sabemos que

k é a profundidade de n_t (nó terminal);

B é o coeficiente de ramificação em Gs'' ;

$n \in \gamma_s \rightarrow c(m, n) = c_0$;

$n \notin \gamma_s \rightarrow c(m, n) = 1$.

Seja então $n \notin \gamma_s$, na profundidade ℓ , com um ancestral em γ_s , na profundidade i , $0 \leq i \leq k-1$; qual o maior ℓ tal que n seja fechado ?

Supondo n fechado, $\hat{f}(n) < f(s)$

Mas $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \hat{h}(n)$ e $f(s) = kc_0$

Além disso, $\hat{g}(n) = g(n)$ (n é fechado), e $\hat{h}(n) = \alpha h(n)$ (condições C1); ainda, da figura 4, vem $g(n) = ic_0 + \ell - i$ e $h(n) = \ell - i + c_0(k-i)$.

Substituindo em $\hat{f}(n) < f(s)$, vem:

$$ic_0 + \ell - i + \alpha [\ell - i + c_0(k-i)] < kc_0$$

$$ic_0 + \ell - i + \alpha\ell - \alpha i + \alpha c_0(k-i) < kc_0$$

$$\ell + \alpha\ell < kc_0 - ic_0 + i + \alpha i - \alpha c_0(k-i)$$

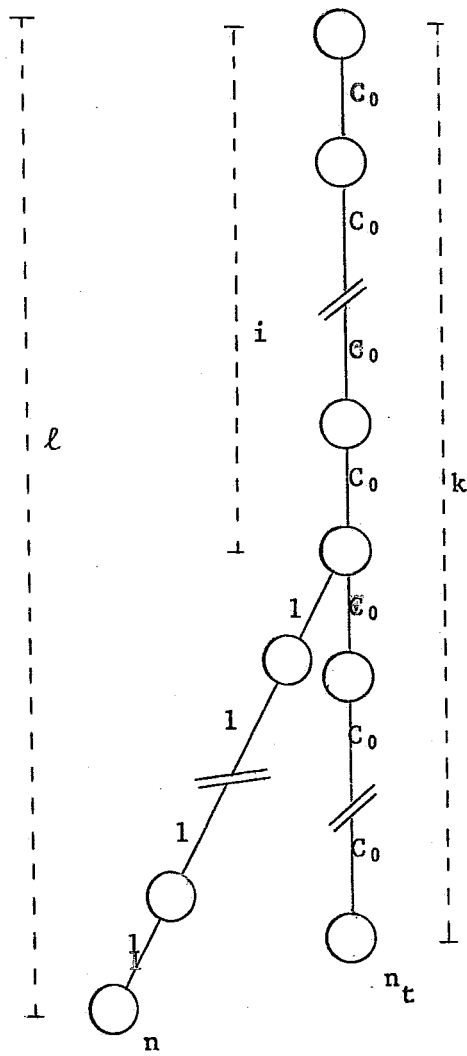


Figura 4

$$\ell(1+\alpha) < i + \alpha i + c_o [k - i - \alpha(k-i)]$$

$$\ell(1+\alpha) < i(1+\alpha) + c_o(k-i)(1-\alpha)$$

$$\ell < i + c_o(k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Então

$$\ell = \lfloor i + c_o(k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = \lfloor c_o(k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor + i \quad (2.12)$$

Portanto, o número de nós fechados $\notin \gamma_s$, num ramo que parta de γ_s no nível i , é

$$(B-1) \sum_{j=0}^{\ell-i-1} B^j = (B-1) \sum_{j=0}^{\lfloor c_o(k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor - 1} B^j$$

Façamos $\lfloor c_o(k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = LI(i)$; como i varia de 0 a $k-1$, temos

$$\begin{aligned} FGs''_a &= \sum_{i=0}^{k-1} (B-1) \sum_{j=0}^{LI(i)-1} B^j = \sum_{i=0}^{k-1} (B-1) \frac{B^{LI(i)} - 1}{B - 1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} B^{LI(i)} - k \end{aligned}$$

Portanto,

$$FGs'' = \sum_{i=0}^{k-1} B^{LI(i)} - k + k + 1 = \sum_{i=0}^k B^{LI(i)} \quad (2.13), \text{ se } \lfloor 0 \rfloor = 0,$$

e esse é o resultado procurado.

3. Observações

- a) quando $c_0 = 1$, os limites superior e inferior se confundem

$$LI(i) = \lfloor (k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = LS(i) \text{ para todo } i$$

- b) se $\alpha \geq \frac{c_0 k - 1}{c_0 k + 1}$, serão fechados apenas nós $n \in \gamma_s$, em G_s'' .

Demonstração:

É claro que

$$\lfloor k c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor \geq \lfloor (k-1) c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor > \dots > \lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor \geq 0$$

Estes são os expoentes de B, em (2.13)

Ora

$$\alpha \geq \frac{c_0 k - 1}{c_0 k + 1} \rightarrow \alpha c_0 k + \alpha \geq c_0 k - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha c_0 k - c_0 k \geq -\alpha - 1 \rightarrow c_0 k (\alpha - 1) \geq -\alpha - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow c_0 k (1 - \alpha) \leq 1 + \alpha \rightarrow c_0 k \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \leq 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lfloor c_0 k \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = 0 \rightarrow LI(i) = 0 \text{ para todo } i$$

Então.

$$FGs'' = \sum_{i=0}^k B^{LI}(i) = k + 1$$

c) A diferença entre dois expoentes de B, consecutivos, em (2.13), é 0 ou 1.

Demonstração:

Sejam dois expoentes de B, consecutivos:

$$\lfloor c_0(k-j) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = c_0(k-j) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \lambda, \text{ onde } 0 < \lambda \leq 1, \text{ e}$$

$$\lfloor c_0(k-j-1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = c_0(k-j-1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \delta, \text{ onde } 0 < \delta < 1;$$

então

$$\begin{aligned} & \lfloor c_0(k-j) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor - \lfloor c_0(k-j-1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = \\ & = c_0(k-j) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - c_0(k-j-1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - (\lambda - \delta) = \\ & = c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - (\lambda - \delta), \text{ onde } -1 < \lambda - \delta < 1 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \tau, \text{ onde } 0 < \tau \leq 1 \quad (2.14)$$

Pode ocorrer:

$$c_1) \quad 0 < \lambda - \delta < 1$$

Então, como $c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - (\lambda - \delta)$ e $c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \tau$ são inteiros, sua diferença é inteira, isto é, $\tau - (\lambda - \delta)$ é inteiro; além disso, $-1 < \tau - (\lambda - \delta) < 1$, o que implica em $\tau - (\lambda - \delta) = 0$ e $\tau = \lambda - \delta$.

$$\text{Conclui-se } c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \tau = c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - (\lambda - \delta) \text{ e, por}$$

$$\text{tanto, } \lfloor c_0(k-j) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor - \lfloor c_0(k-j-1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = \lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor$$

$$c_2) \quad -1 < \lambda - \delta \leq 0$$

$$\text{Ora, sabemos que } c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - (\lambda - \delta) \text{ é inteiro; e}$$

$$\text{de (2.14) temos que } c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor + \tau; \text{ substituindo na}$$

$$\text{expressão anterior, vem que } \lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor + \tau - (\lambda - \delta) \text{ é inteiro,}$$

isto é, $\tau - (\lambda - \delta)$ é inteiro.

Além disso,

$$0 < \tau \leq 1$$

$$1 \geq \tau > 0$$

→

$$\rightarrow 2 > \tau - (\lambda - \delta) > 0 \rightarrow$$

$$-1 < \lambda - \delta \leq 0$$

$$1 > -(\lambda - \delta) \geq 0$$

$$\rightarrow \tau - (\lambda - \delta) = 1$$

$$\rightarrow \tau = (\lambda - \delta) + 1$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lfloor c_0(k-j) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor - \lfloor c_0(k-j-1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor &= \\ &= \lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Ora, decorre que se $0 < c_0 \leq 1$ temos que $\lfloor c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor = 0$, e isso encerra a demonstração.

C - EXTENSÃO DE VALIDADE

Os limites desenvolvidos nos itens anteriores, referem-se apenas a árvores com uma única solução, no nível k ; a presença de outras soluções poderia afetar o número de nós fechados em G_s' e G_s'' , de forma que as expressões encontradas para os limites perdessem sua validade; nosso propósito, neste item C, é encontrar condições que outras soluções teriam que satisfazer, de modo que tais expressões continuassem valendo.

Nosso enfoque será no sentido de encontrar condições para as novas soluções, tais que elas não influam no fechamento ou não de um nó, tendo em vista a solução do nível k .

Teorema 4

Seja G_s uma árvore nas condições C_1 , com um nó terminal θ , e G_s' uma árvore idêntica a G_s , exceto pelo fato de que

possui outro nó τ , com $f(\theta) \leq f(\tau)$ ⁽¹⁾. Então, se $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado em G_s' , o conjunto de nós fechados em G_s é igual ao de nós fechados em G_s' .

Demonstração:

Ora, $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) + \hat{h}(n)$, onde $\hat{h}(n) = \alpha h(n)$ e $h(n) = \min \{k(n, \tau), k(n, \theta)\}$. Da hipótese do teorema vem $h(n) = k(n, \theta)$ para todo n fechado em G_s' , de onde decorre $\hat{f}_{G_s}(n) = \hat{f}_{G_s'}(n)$ ⁽²⁾ para todo n fechado em G_s' , o que implica na conclusão do teorema.

Então, dada uma árvore G_s' , com duas soluções θ e τ , qual a profundidade mínima em que poderia estar a solução τ não preferida, de forma que $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado?

Evidentemente, temos que examinar separadamente os casos do limite superior e inferior, uma vez que as árvores são diferentes.

1. Caso do Limite Superior

Teorema 5

Seja G_s' nas condições C1, mas tal que $c(m, n) = 1$ para todo $n \in \gamma_s$, e $c(m, n) = c_0$ para todo $n \notin \gamma_s$, com duas soluções θ e τ , onde θ é a solução ótima, na profundidade k e τ é outra na profundidade r .

(1) $f(\theta) = k(n_0, \theta)$ e $f(\tau) = k(n_0, \tau)$, onde n_0 é o nó inicial

(2) $\hat{f}_{G_s}(n) = \hat{f}(n)$ na árvore G_s ; e

$\hat{f}_{G_s'}(n) = \hat{f}(n)$ na árvore G_s' .

Então, se

$$r \geq \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor,$$

teremos $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado.

Demonstração:

Sejam:

$$S_i = \{n \in G_s \mid \text{existe caminho de } n_i \text{ a } n \text{ não interceptando } \gamma_s\}$$

i = nível de γ_s de onde parte o ramo em que está n

u = nível de γ_s de onde parte o ramo em que está τ

ℓ = profundidade de n .

Consideremos três casos:

a) $i \neq n$

$$\begin{aligned} \text{Da figura 5, } k(n, \tau) &= (\ell - i)c_0 + |u - i| + \\ &+ (r - u)c_0 \end{aligned}$$

$$k(n, \theta) = (\ell - i)c_0 + k - i$$

$$\text{então } k(n, \tau) - k(n, \theta) = |u - i| + (r - u)c_0 - k + i \quad (2.15)$$

a₁) $u > i$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = u - i + (r - u)c_0 - k + i$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = u + (r - u)c_0 - k$$

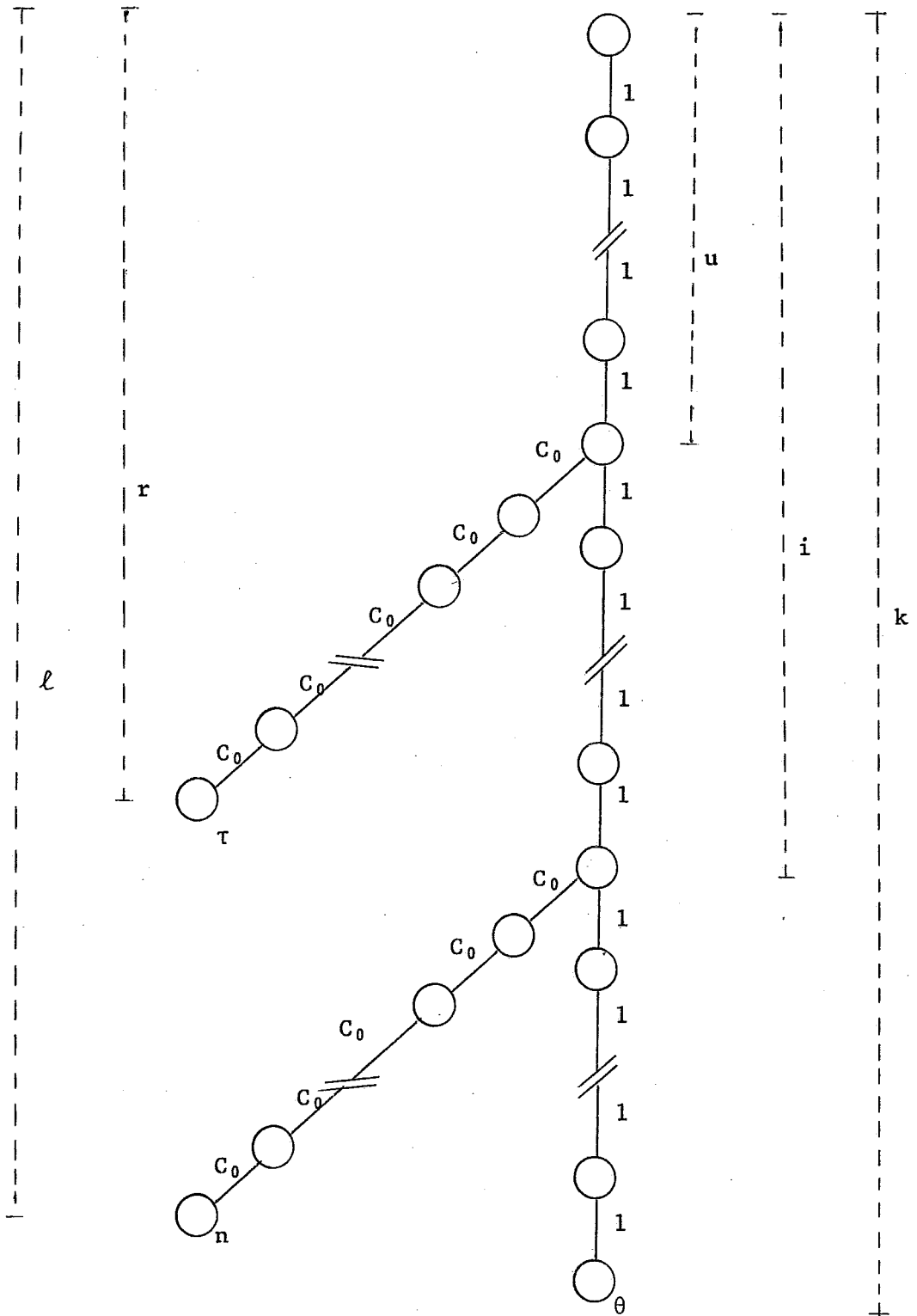


Figura 5

Por hipótese, $f(\tau) \geq f(\theta)$; mas $f(\tau) = u + (r - u)c_0$
e $f(\theta) = k$; portanto

$$u + (r - u)c_0 \geq k$$

$$u + (r - u)c_0 - k \geq 0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) \geq 0$$

$$k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$$

a₂) $u < i$

Então, (2.15) ficará:

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = i - u + (r - u)c_0 - k + i$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = 2i + (r - u)c_0 - k - u$$

Mas $2i + (r - u)c_0 - k - u > 2u + (r - u)c_0 - k - u$,
pois $i > u$; então $k(n, \tau) - k(n, \theta) > u + (r - u)c_0 - k \geq 0$;
logo $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$

Portanto, se $i \neq u$, não há restrições para r , desde que $f(\tau) \geq f(\theta)$, o conjunto dos nós fechados será o mesmo em G_s e $G_{s'}$, nas condições C1.

b) $i = u$, mas $n \notin S_u^*$, onde

$$S_u^* = \{\text{nós acessíveis de } n_1^u \text{ sem passar por } n_u\}, \text{ e}$$

$$\gamma_u^\tau = (n_u = n_0^u, n_1^u, \dots, n_{r-u}^u = \tau) = \text{caminho ótimo,}$$

de n_u a τ

Da figura 6: $k(n, \tau) = (\ell - i)c_0 + (r - i)c_0$

$$k(n, \theta) = (\ell - i)c_0 + k - i$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = (r - i)c_0 - k + i$$

Mas $f(\tau) = i + (r - i)c_0$ e $f(\theta) = k$

Como, por hipótese, $f(\tau) \geq f(\theta)$, temos

$$i + (r - i)c_0 \geq k$$

$$(r - i)c_0 - k + i \geq 0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) \geq 0$$

$$k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$$

Portanto, ainda nesse caso, não há restrições para r ; desde que $f(\tau) \geq f(\theta)$, o conjunto de nós fechados será o mesmo em G_s e G_s' , nas condições C1.

c) $i = u$, mas $n \in S_u^*$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $n \in \gamma_u^T$.

Da figura 7: $k(n, \tau) = (r - \ell)c_0$

$$k(n, \theta) = (\ell - i)c_0 + k - i$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = (r - \ell)c_0 - (\ell - i)c_0 - k + i$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = rc_0 + (i - 2\ell)c_0 - k + i$$

Em que condições $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$?

Exatamente quanto $rc_0 + (i - 2\ell)c_0 - k + i \geq 0$

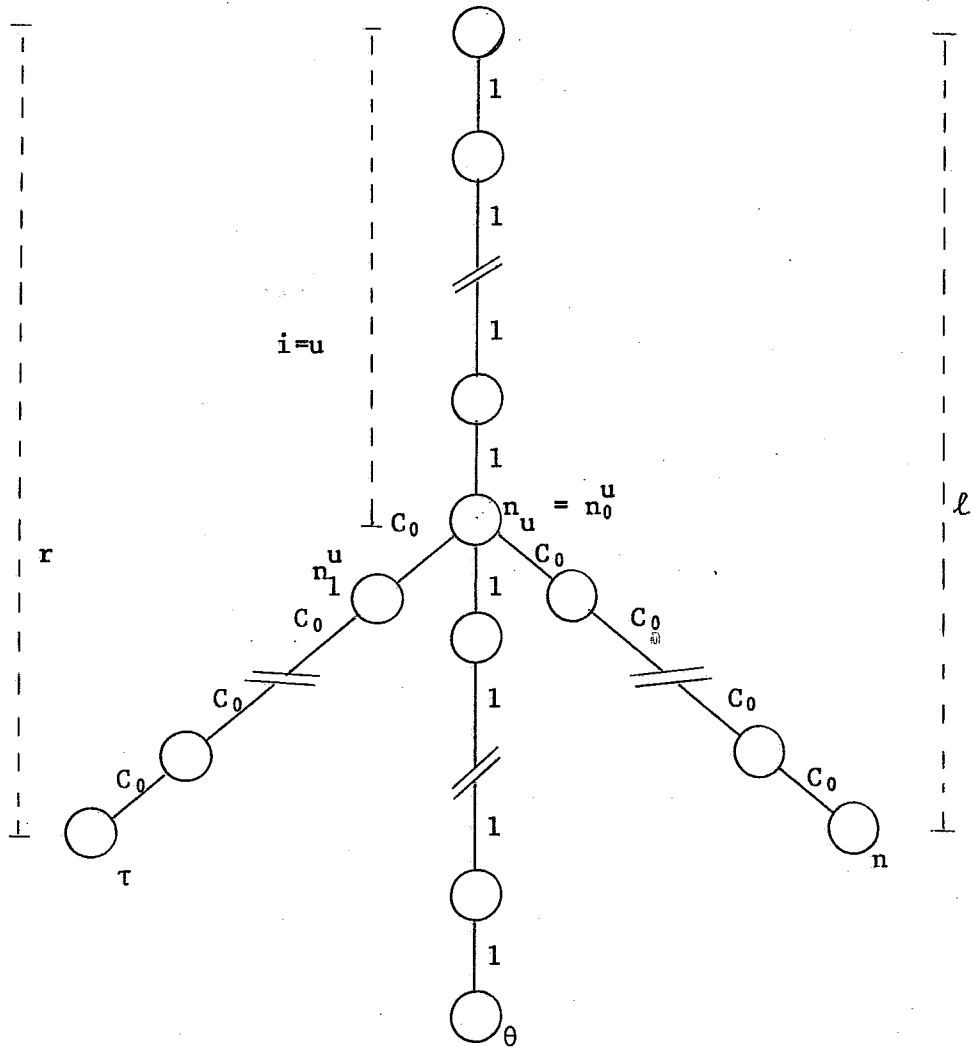


Figura 6

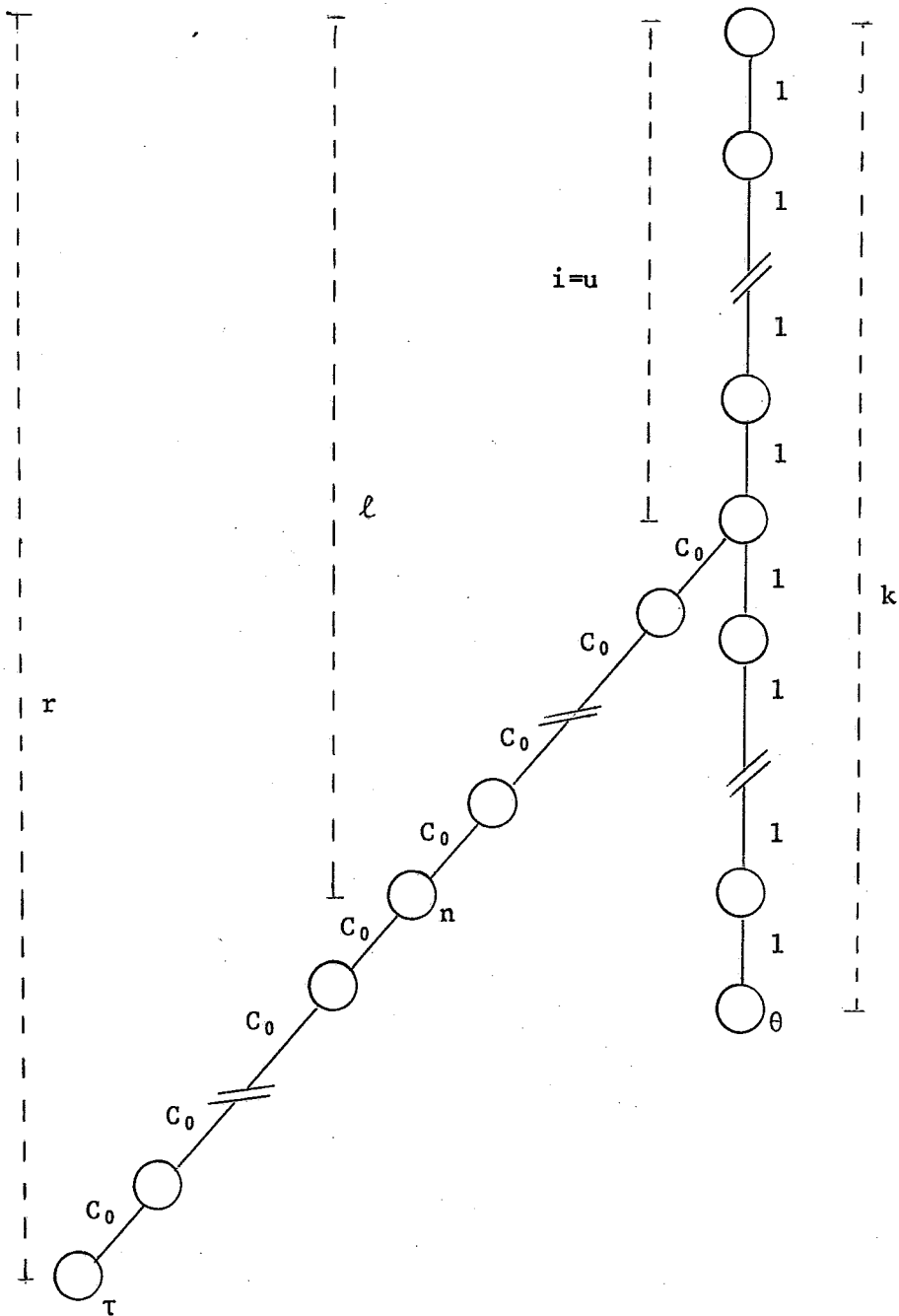


Figura 7

Desenvolvendo, vem:

$$rc_0 \geq k - i - (i - 2\ell)c_0$$

$$r \geq \frac{k - i}{c_0} - i + 2\ell$$

$$\text{Mas, uma vez que por (2.6), } \ell_{\max} = \left\lfloor \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor +$$

i para que n seja fechado, temos

$$r \geq \frac{k - i}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor + i$$

$$r \geq \frac{c_0 - 1}{c_0} i + \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor$$

$$\text{A função } j(i) = \frac{c_0 - 1}{c_0} i + \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k - i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor$$

é uma reta e $i \in \{0, 1, \dots, k\}$; seu máximo será dado por um de extremos:

$$j(0) = \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor$$

$$j(k) = k$$

$$\text{Como } \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor \geq k, \text{ o valor de } i \text{ que}$$

maximiza r é $i = 0$

$$\text{Portanto, se } r \geq \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor, \text{ teremos}$$

$k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$, e o conjunto de nós fechados em G_s é igual ao conjunto de nós fechados em G_s' .

Resumindo, se qualquer outra solução τ estiver em uma profundidade $r \geq \frac{k}{c_0} + 2 \left\lfloor \frac{k}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor$, as expressões para o limite superior de nós fechados, desenvolvidos no item A, continuam valendo.

2. Caso do Limite Inferior

Teorema 6

Seja G_s^n nas condições C1, mas tal que $c(m,n) = c_0$ para todo $n \in \gamma_s$ e $c(m,n) = 1$ para todo $n \notin \gamma_s$, com duas soluções, θ e τ , onde θ é a solução ótima, na profundidade k , e τ é a solução preferida, na profundidade r .

Então, se

$$r \geq \max \left\{ k, kc_0 + 2 \left\lfloor kc_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor \right\}$$

teremos $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo nó n fechado.

Demonstração:

Sejam S_i , i , u e ℓ definidos como no teorema anterior, da mesma forma; consideraremos três casos:

a) $i \neq u$

$$\text{Da figura 8: } k(n, \tau) = \ell - i + |u - i| c_0 + r - u$$

$$k(n, \theta) = \ell - i + (k - i) c_0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = |u - i| c_0 + r - u - (k - i) c_0 \quad (2.17)$$

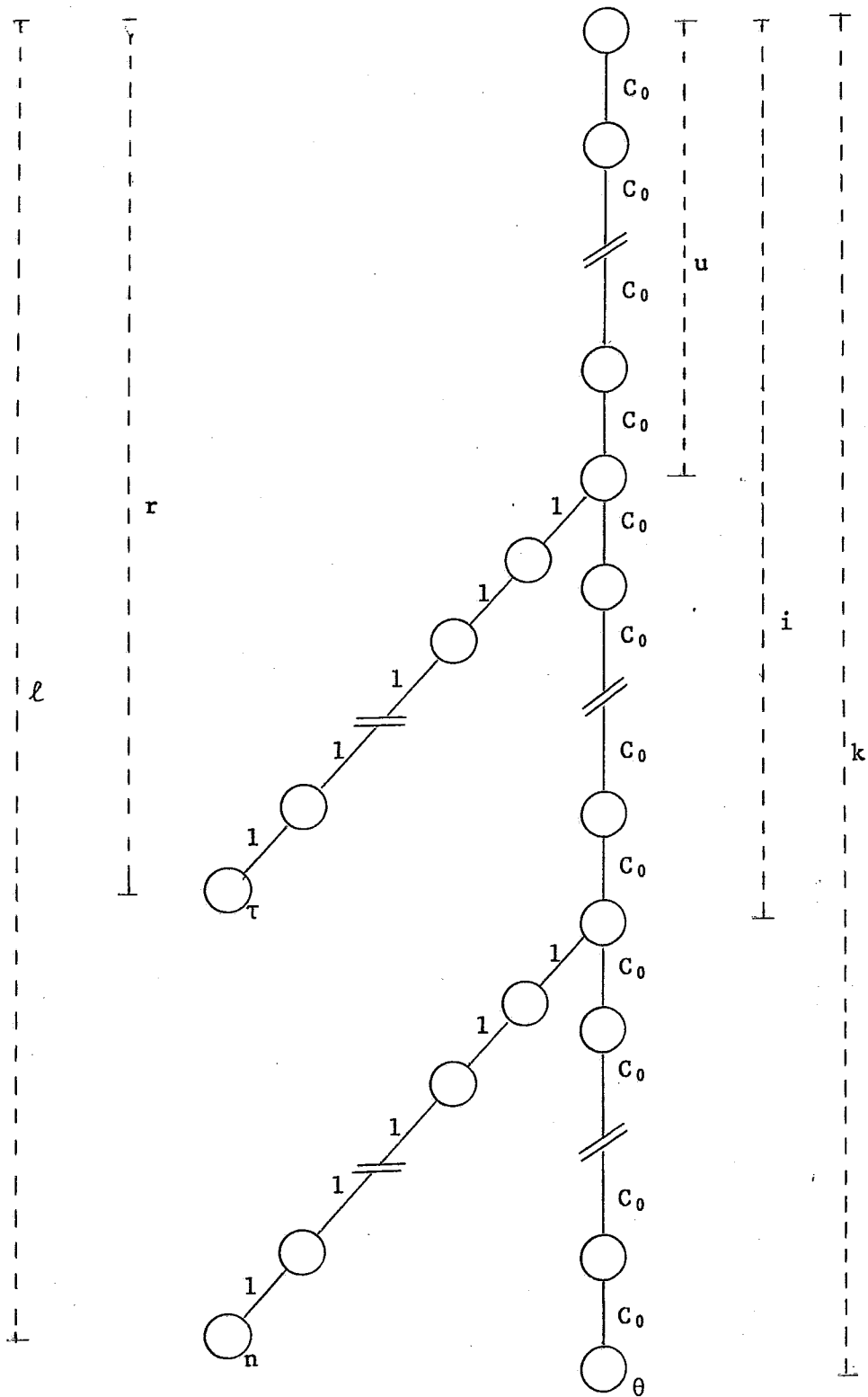


Figura 8

$a_1) \quad u > i$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = uc_0 - ic_0 + r - u - kc_0 + ic_0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = uc_0 + r - u - kc_0$$

Mas por hipótese, $f(\tau) \geq f(\theta)$ e $f(\tau) = uc_0 + r - u$

$$\text{e } f(\theta) = kc_0$$

Portanto

$$uc_0 + r - u \geq kc_0$$

$$uc_0 + r - u - kc_0 \geq 0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) \geq 0$$

$$k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$$

$a_2) \quad u < i$

Então (2.17) ficará:

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = ic_0 - uc_0 + r - u - kc_0 + ic_0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = 2ic_0 - uc_0 + r - u - kc_0$$

Mas

$$2ic_0 - uc_0 + r - u - kc_0 > 2uc_0 - uc_0 + r - u - kc_0,$$

pois $i > u$

Então

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) > uc_0 + r - u - kc_0 \geq 0$$

Logo $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$

Portanto, se $i \neq u$, não há restrições para r ; des-

de que $f(\tau) \geq f(\theta)$, o conjunto de nós fechados será o mesmo em Gs' e Gs'' , nas condições C1.

b) $i = u$, mas $n \notin S_u^*$, onde S_u^* é definido da mesma forma que no teorema anterior.

$$\text{Da figura 9: } k(n, \tau) = \ell - i + r - i = \ell + r - 2i$$

$$k(n, \theta) = \ell - i + (k - i)c_0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = r - i + ic_0 - kc_0$$

$$\text{Mas } f(\tau) \geq f(\theta), \text{ onde } f(\tau) = ic_0 + r - i \text{ e } f(\theta) = kc_0$$

Então

$$ic_0 + r - i \geq kc_0$$

$$ic_0 + r - i - kc_0 \geq 0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) \geq 0$$

$$k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$$

Também nesse caso, há restrições para r ; se $f(\tau) \geq f(\theta)$ o conjunto de nós fechado é o mesmo em Gs e Gs'' nas condições C1.

c) $i = u$, mas $n \in S_u^*$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $n \in \gamma_u^\tau$

$$\text{Da figura 10: } k(n, \tau) = r - \ell$$

$$k(n, \theta) = \ell - i + (k - i)c_0$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = r - 2\ell + i - (k - i)c_0$$

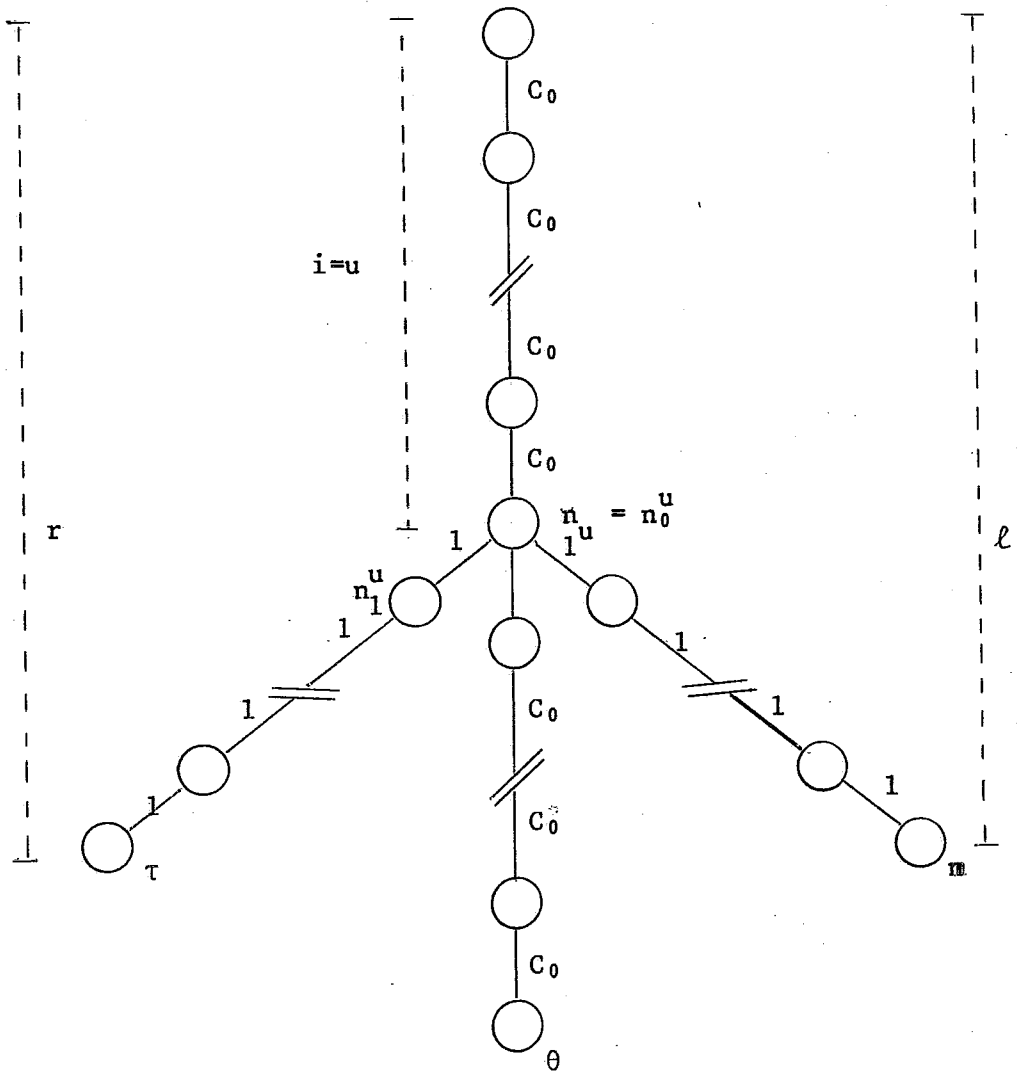


Figura 9

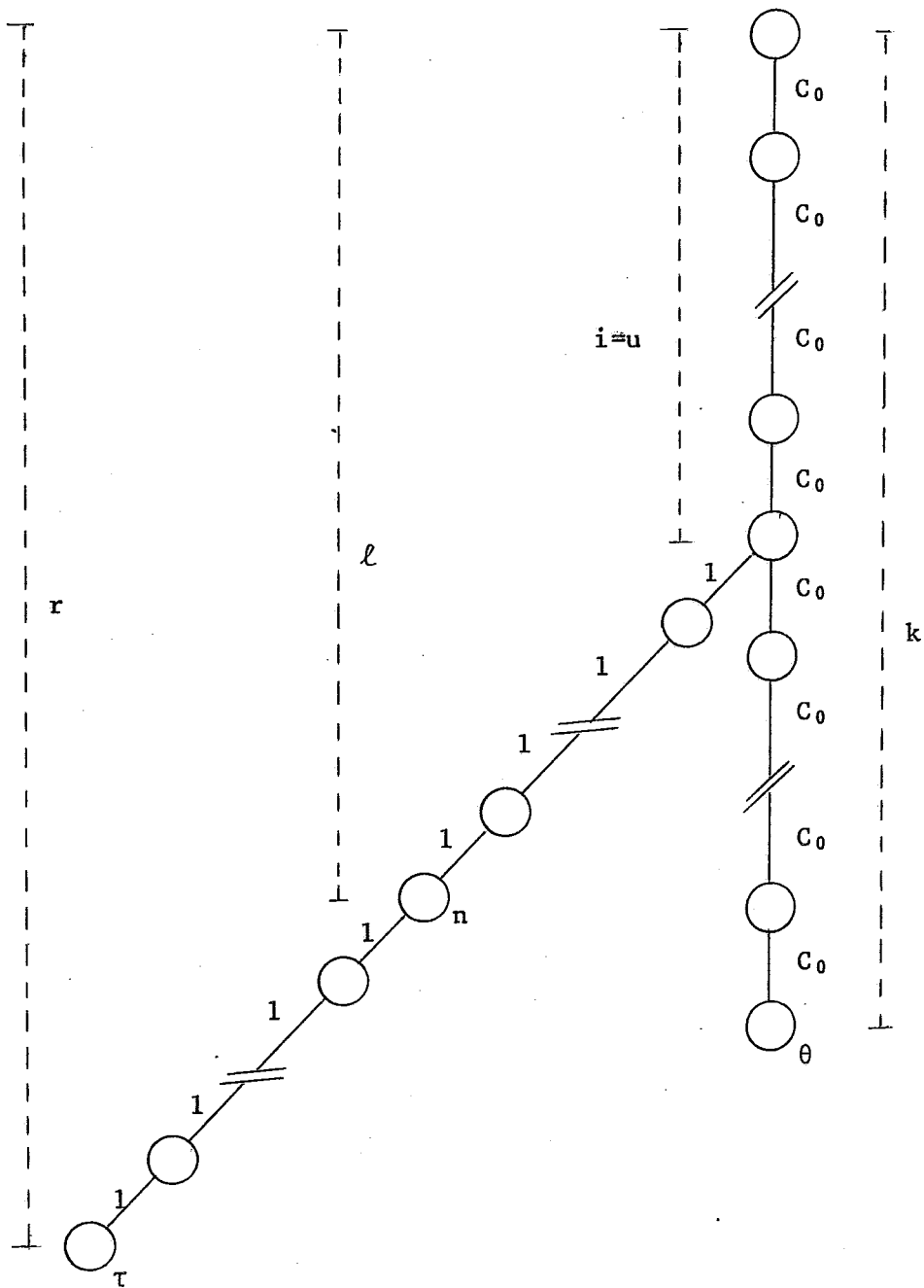


Figura 10

Em que condições $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$?

Exatamente quando $r - 2\ell + i - (k - i)c_0 \geq 0$

Desenvolvendo, vem:

$$r \geq (k - i)c_0 - 2\ell - i \quad (1)$$

Mas, uma vez que por (2.12) $\ell_{\max} = \lfloor c_0(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rfloor +$

i , temos

$$r \geq (k - i)c_0 + 2 \lfloor c_0(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rfloor + i$$

$$r \geq kc_0 + (1 - c_0)i + 2 \lfloor c_0(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rfloor$$

A função $j(i) = kc_0 + (1 - c_0)i + 2 \lfloor c_0(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rfloor$

é uma reta, e $i \in \{0, 1, \dots, k\}$; seu máximo será dado por um de seus extremos

$$j(0) = kc_0 + 2 \lfloor kc_0 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rfloor$$

$$j(k) = k$$

Então, se $r \geq \max \{ k, kc_0 + 2 \lfloor kc_0 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rfloor \}$, te-

(1) Observe que, se $c_0 = 1$, vem $r \geq k - 2i + 2\ell$, que é idêntico

ao resultado obtido no item c do teorema anterior, $r \geq \frac{k - i}{c_0} - i + 2\ell$

remos $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ e o conjunto de nós fechados em G_s é igual ao conjunto de nós fechados em G_s'' .

Resumindo, se qualquer outra solução τ estiver em uma profundidade

$$r \geq \max \left\{ k, kc_0 + 2 \left\lfloor kc_0 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor \right\}$$

as expressões para o limite inferior de nós fechados, desenvolvidas no item B, continuam valendo.

D - UMA EXPRESSÃO APROXIMADA

No item A deste capítulo, obtivemos, para limite superior do número de nós fechados, a expressão

$$FG_s' = \sum_{i=0}^k B \left\lfloor \frac{k-i}{c_0} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor \quad (2.16)$$

e, para limite inferior, a expressão

$$FG_s'' = \sum_{i=0}^k B \left\lfloor (k-i)c_0 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor \quad (2.17)$$

Tais expressões não são de simples manipulação, em virtude principalmente das funções $\lfloor \]$ e $\lceil \]$. Sugerimos, abaixo, para o cálculo de tais limites, expressões de mais fácil manuseio, embora de resultado aproximado:

1. Limite Superior

Se retirarmos a função $[\]$ da expressão (2.16) vem

$$FGs' \approx \sum_{i=0}^{k-1} B \frac{k-i-1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1$$

$$\text{Fazendo } \rho = B \frac{1}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \text{ vem}$$

$$FGs' \approx \sum_{i=0}^k \rho^{k-i-1} + 1 = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} + 1$$

2. Limite Inferior

Procedendo analogamente em relação a expressão (2.17),

vem

$$FGs'' \approx \sum_{i=0}^{k-1} B (k-i-1) c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1$$

$$\text{Fazendo } \rho = B c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \text{ temos}$$

$$FGs'' \approx \sum_{i=0}^{k-1} \rho^{k-i-1} + 1 = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} + 1$$

A qualidade das duas expressões aproximadas obtidas pode ser avaliada pelos gráficos do Apêndice 1.

C A P Í T U L O I I I

LIMITES PARA A EXPANSÃO DE NÓS EM FUNÇÃO DO CUSTO DA
SOLUÇÃO ÓTIMA

Analogamente ao caso anterior, o problema consiste em dada uma árvore G_s e um A^* nas condições C_2 , encontrar um limite superior e um limite inferior ao número de nós fechados em G_s pelo A^* ; uma solução simples:

a) construir árvores G_s' e G_s'' , nas condições C_2 , tais que $FG_s' \geq FG_s$ e $FG_s'' \leq FG_s$, qualquer que seja G_s , nas condições C_2 ; e

b) calcular FG_s' e FG_s'' .

As duas etapas são resolvidas a seguir.

A - CONSTRUÇÃO DE G_s' e G_s''

Procuraremos mostrar que, se G_s' for uma árvore idêntica a G_s , exceto pelo fato de que todos os seus custos de transição são iguais a c_0 , então $FG_s' \geq FG_s$, e, que se G_s'' for idêntica a G_s , exceto pelo fato de que todos os seus custos de transição são unitários, então $FG_s'' \leq FG_s$.

Teorema 7

Seja G_s nas condições C_2 . Façamos G_s' uma árvore,

com $f(s') \geq f(s)$ e tal que exista uma correspondência um-a-um entre seus nós e os de G_s (isto é, para todo $n \in G_s$, existe $n' \in G_{s'}$ e vice-versa), e tal que todo custo de transição em $G_{s'}$ seja menor ou igual ao seu correspondente em G_s .

Então A fechará em $G_{s'}$ pelo menos o mesmo número de nós que em G_s .

Demonstração:

- i) seja n_k o nó de γ_s ao nível k ⁽¹⁾; então $g(n_k) \geq g(n'_k)$, onde n'_k é o nó de $\gamma_{s'}$ no nível k .

É claro, pois $g(n_k) = \sum_{i=1}^k c_i$, onde os c_i são os custos dos arcos de s ; e $g(n'_k) = \sum_{i=1}^k c'_i$

Como, por hipótese, $c_1 \geq c'_1$ para todo i , temos $g(n_k) \geq g(n'_k)$.

- ii) se n é fechado em G_s , seu correspondente n' será fechado em $G_{s'}$. Se n é fechado em G_s , (por b_3 , capítulo I), temos $\hat{f}(n) \leq f(s)$. Por outro lado:

$$\hat{f}(n) = g(n) + \alpha h(n)$$

$$f(n') = g(n') + \alpha h(n')$$

(1) Deve-se notar que se número de nós de $\gamma_s \leq$ número de nós de $\gamma_{s'}$, $n'_k \in \gamma_{s'}$ não implica em $n_k \in \gamma_s$; a recíproca, no entanto, é verdadeira.

Sejam n_k e n'_k os antecessores de n e n' em γ_s e $\gamma_{s'}$ respectivamente; então

$$\hat{f}(n) = g(n_k) + k(n_k, n) + \alpha k(n_k, n) + \alpha [f(s) - g(n_k)]$$

$$\hat{f}(n') = g(n'_k) + k(n'_k, n) + \alpha k(n'_k, n') + \alpha [f(s') - g(n'_k)]$$

$$\hat{f}(n) = g(n_k)(1 - \alpha) + k(n_k, n)(1 + \alpha) + \alpha f(s) \quad (3.1)$$

$$\hat{f}(n') = g(n'_k)(1 - \alpha) + k(n'_k, n)(1 + \alpha) + \alpha f(s') \quad (3.2)$$

Ora, sabemos que $\hat{f}(n) \leq f(s)$. Substituindo em (3.1), vem:

$$f(s) \geq g(n_k)(1 - \alpha) + k(n_k, n)(1 + \alpha) + \alpha f(s)$$

$$f(s)(1 - \alpha) \geq g(n_k)(1 - \alpha) + k(n_k, n)(1 + \alpha)$$

$$f(s) \geq g(n_k) + k(n_k, n) \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (1) \quad (3.3)$$

Sabemos, ainda que

$$g(n_k) \geq g(n'_k) \text{ e } k(n_k, n) \geq k(n'_k, n'), \text{ o que im-}$$

plica em

$$k(n_k, n) \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \geq k(n'_k, n) \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

Somando essas desigualdades a (3.3), membro a membro vem

(1) Supondo $0 \leq \alpha < 1$; no caso de $\alpha = 1$, apenas os nós do caminho ótimo serão fechados, e o teorema é trivialmente verdadeiro, uma vez que número de nós de $\gamma_s \leq$ número de nós de $\gamma_{s'}$.

$$f(s) + g(n_k) + k(n_k, n) \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \geq g(n'_k) \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + \\ + g(n_k) + k(n_k, n) \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

$$f(s) \geq g(n'_k) + k(n'_k, n') \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

Por outro lado (hipótese do teorema), temos $f(s') \geq f(s)$;
então

$$f(s') \geq g(n'_k) + k(n'_k, n') \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

$$f(s')(1 - \alpha) \geq g(n'_k)(1 - \alpha) + k(n'_k, n')(1 + \alpha)$$

$$f(s') \geq g(n'_k)(1 - \alpha) + k(n'_k, n')(1 + \alpha) + \alpha f(s')$$

Tendo em vista (3.2), vem

$$\hat{f}(n') \leq f(s').$$

Se $\hat{f}(n') < f(s')$, então, pelo teorema 1, n' é fechado.

Se $\hat{f}(n') = f(s')$, vem

$$f(s') = g(n') + \alpha h(n')$$

Mas, $g(n') + \alpha h(n') \leq g(n) + \alpha h(n)$, pela estrutura das árvores (por hipótese, cada custo de transição em Gs' é menor ou igual ao seu correspondente em Gs).

Portanto,

$$f(s') \leq \hat{f}(n), \quad (\text{pois } \hat{f}(n) = g(n) + \alpha h(n))$$

Mas, ainda por hipótese

$$f(s') \geq f(s), \text{ de onde decorre } f(s) \geq \hat{f}(n)$$

No entanto, como n é fechado, $\hat{f}(n) \leq f(s)$ (por b_3 do capítulo I).

$$\text{Portanto } \hat{f}(n) = f(s).$$

Então o critério de desempate favorece n em confronto com algum $m \in \gamma_s$. Como o critério de desempate é o mesmo em Gs' , favorecerá n' em confronto com $m' \in \gamma_{s'}$ (onde m' é o correspondente a m em Gs'), e n' será fechado.

Então, para todo nó n fechado em Gs , existe um nó n' (seu correspondente) fechado em Gs' ; portanto A^* fecha em Gs' pelo menos o mesmo número de nós que em Gs .

Corolário 1

Seja Gs' uma árvore nas condições C2, mas com custos de transição c_0 e custo de solução $f(s')$. Então o número de nós fechados em Gs' pelo A^* é máximo, em relação a qualquer outra árvore Gs , nas condições C2 e custo de solução $f(s) \leq f(s')$.

Demonstração:

Uma vez que $c_i \geq c_0$ para todo c_i em Gs , o resultado acima é evidente, pelo teorema anterior.

Este corolário 1 nos dá a forma de Gs' .

Corolário 2

Seja Gs'' uma árvore nas condições C2, mas com custos de transição unitários e custo de solução $f(s'')$. Então o número de nós fechados em Gs pelo A^* é mínimo, em relação a qualquer outra árvore Gs , nas condições C2 e custo de solução $f(s) \geq f(s'')$.

Demonstração:

Como $c_i \leq 1$ para todo c_i em Gs , o resultado é verdadeiro, tendo em vista o teorema 7.

Este corolário 2 nos dá a forma de Gs'' .

B - CÁLCULO DOS LIMITESTeorema 8

Seja Gs uma árvore nas condições C2; então:

i) um limite superior para o número de nós fechados em Gs pelo A^* é

$$FGs' = \sum_{i=0}^k B \left\lfloor (k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor \quad \text{onde } k = \left\lfloor \frac{f(s)}{c_0} \right\rfloor + 1$$

ii) um limite inferior para o número de nós fechados em Gs pelo A^* é

$$FGs'' = \sum_{i=0}^k B \left\lfloor (k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right\rfloor \quad \text{onde } k = \lceil f(s) \rceil$$

(isto é, k é o maior inteiro menor ou igual a $f(s)$).

Demonstração:

i) segundo o corolário 1 do teorema 7, um limite superior para o número de nós fechados em G_s seria o número de nós fechados em $G_{s'}$, como descrita naquele corolário, isto é, com custos de transição c_0 e custo da solução ótima $f(s') \geq f(s)$; como estamos interessados num limite superior o mais baixo possível, fazemos $f(s')$ o menor possível dentro da limitação $f(s') \geq f(s)$. Por outro lado, temos uma expressão que nos permite calcular o número de nós fechados em $G_{s'}$ em termos da profundidade k da solução; como todos os arcos de $\gamma_{s'}$ são iguais a c_0 , $f(s') = kc_0$ e $k = \frac{f(s')}{c_0}$ e este número é inteiro; então se $\frac{f(s)}{c_0}$ for inteiro, podemos fazer $f(s') = f(s)$, e, portanto $k = \frac{f(s)}{c_0}$; se, no entanto, $\frac{f(s)}{c_0}$ não for inteiro, podemos fazer $f(s')$ igual ao valor mais próximo e, superior a $f(s)$, de forma que $\frac{f(s')}{c_0}$ seja inteiro. Isso equivale a uma árvore com o menor k possível, dentro dos limites do teorema; nesse segundo caso, $k = \lfloor \frac{f(s)}{c_0} \rfloor + 1$. Deve-se notar que essa expressão inclui o primeiro caso ($\frac{f(s)}{c_0}$ é inteiro).

Resta calcular o número de nós fechados dessa árvore, com solução na profundidade k , custos de transição c_0 e coeficiente de ramificação B . No item 3a) do capítulo II, temos que

$$FG_{s'} = \sum_{i=0}^k B \cdot \lfloor (k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \rfloor, \text{ se } c_0 = 1$$

Na verdade é esse resultado que procuramos, pois o valor dos custos de transição é irrelevante, se são todos iguais.

Então:

$$FGs' = \sum_{i=0}^k B \left[(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right] \quad \text{onde } k = \left\lfloor \frac{f(s)}{c_0} \right\rfloor + 1$$

ii) novamente, necessitamos apenas obter a profundidade k da solução em Gs'' , conforme descrita no corolário 2 do teorema 7, uma vez que o número de nós fechados será dado pela expressão anterior, já que os custos são todos iguais.

Como os custos são unitário, $k = f(s'')$ e sabemos que $f(s'') \leq f(s)$. Se $f(s)$ for inteiro, podemos fazer $f(s'') = f(s)$; se não, podemos fazer $f(s'')$ igual ao inteiro mais próximo e menor que $f(s)$. Então $k = \lceil f(s) \rceil$ (isto é, k igual ao maior inteiro menor ou igual a $f(s)$) abrange os dois casos.

Portanto:

$$FGs'' = \sum_{i=0}^k B \left[(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right] \quad \text{onde } k = \lceil f(s) \rceil$$

Essas expressões concordam com os resultados obtidos por Araujo [3], embora sejam um pouco mais gerais, pois naquela referência foram usados apenas custos unitários.

C - EXTENSÃO DE VALIDADE

Também nesse caso, de árvore com o mesmo $f(s)$, re-

ferimo-nos apenas a árvore com solução única; e podemos examinar que condições outras soluções teriam que satisfazer, no caso de árvores com mais de uma solução, para que os resultados obtidos em B continuem valendo.

Suponha então uma árvore G_s , nas condições C2, com uma solução ótima θ , de custo $f(s)$ e outra solução, não preferida, τ , isto é, $f(\tau) \geq f(\theta)$; o teorema 4 nos garante que se $k(n, \theta) \leq k(n, \tau)$ para todo n fechado em G_s , então a presença da nova solução em n da afetará o conjunto de nós fechados em G_s , isto é, o número de nós fechados em G_s seria o mesmo se G_s tivesse apenas a solução θ .

Nosso problema consiste, então, em achar o custo $f(\tau)$ mínimo da nova solução, de forma que as condições desenvolvidas no item anterior continuem valendo; em outras palavras, qual $f(\tau)$ mínimo tal que $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado em G_s ?

Teorema 9

Seja G_s uma árvore nas condições C2, mas com todos os custos de transição iguais a c_i , e com duas soluções θ e τ , onde θ é a preferida, com $f(\theta) = f(s)$. Então, se $f(\tau) \geq 3f(\theta)$, temos $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado.

Demonstração:

Da mesma forma que no teorema 5, sejam $S_i = \{n \in G_s \mid \text{existe caminho de } n_i \text{ a } n \text{ interceptando } \gamma_s\}$

n_i - nó de γ_s de onde parte o ramo onde está n

n_u - nó de γ_s de onde parte o ramo onde está τ

Consideremos três casos:

a) $n_i \neq n_u$

Da figura 11:

$$k(n, \tau) = g(n) - g(n_i) + |g(n_u) - g(n_i)| + f(\tau) - g(n_u)$$

$$k(n, \theta) = g(n) - g(n_i) + f(\theta) - g(n_i)$$

$$\begin{aligned} k(n, \tau) - k(n, \theta) &= |g(n_u) - g(n_i)| + f(\tau) - \\ &\quad - f(\theta) + g(n_i) - g(n_u) \end{aligned}$$

a₁) $g(n_u) > g(n_i)$

$$\begin{aligned} k(n, \tau) - k(n, \theta) &= g(n_u) - g(n_i) + f(\tau) - \\ &\quad - f(\theta) + g(n_i) - g(n_u) \end{aligned}$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = f(\tau) - f(\theta) \geq 0$$

Então $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$

a₂) $g(n_u) < g(n_i)$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = 2g(n_i) - 2g(n_u) + f(\tau) - f(\theta)$$

como $g(n_i) > g(n_u)$, vem

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) > 2g(n_u) - 2g(n_u) + f(\tau) - f(\theta)$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) > f(\tau) - f(\theta) > 0$$

Então $k(n, \tau) > k(n, \theta)$

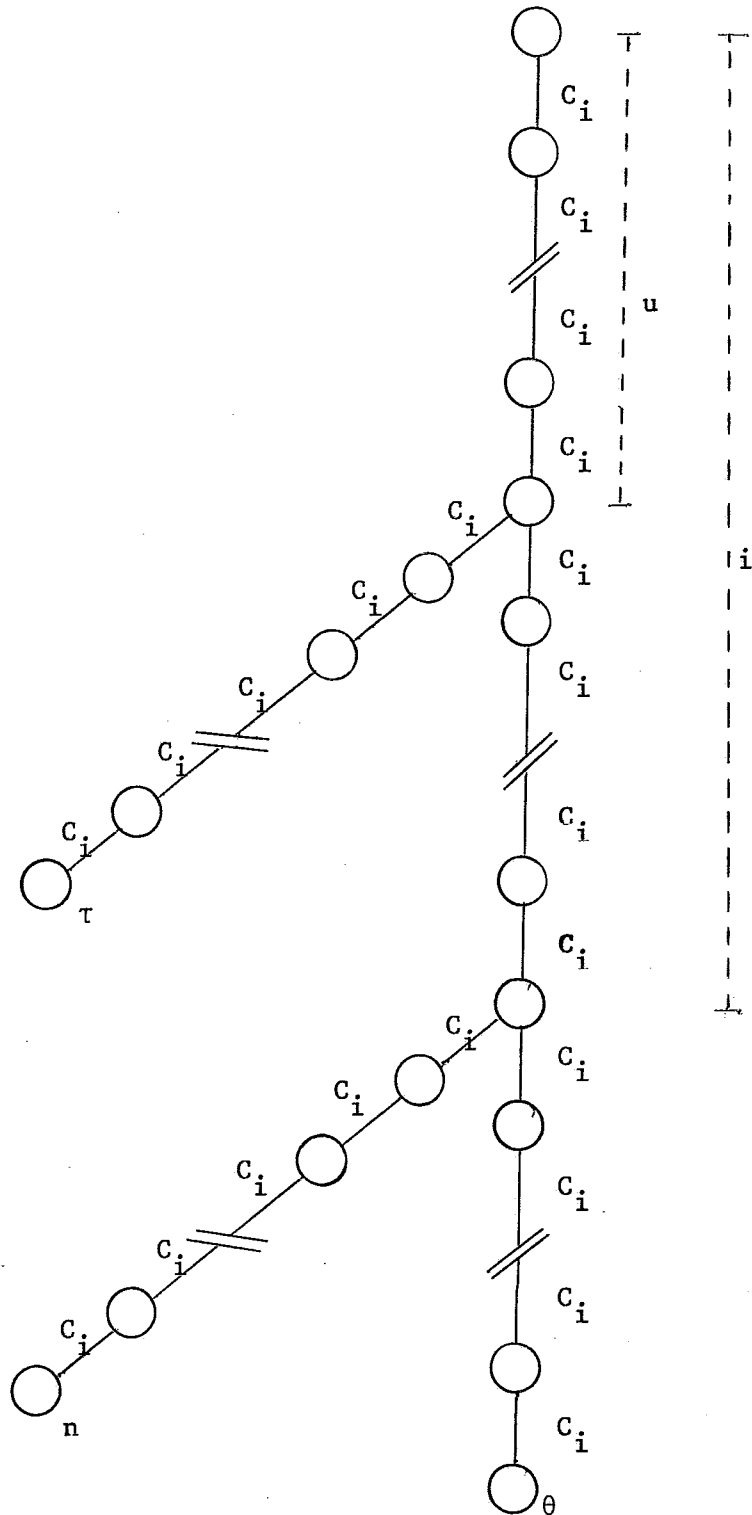


Figura 11

De forma que, nesse caso, não há restrições; se τ é a solução não preferida, $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado em G_s , para o qual $n_i \neq n_u$.

b) $n_i = n_u$, mas $n \notin S_u^*$, onde

$$S_u^* = \{\text{nós acessíveis de } n_1 \text{ sem passar por } n_u\} \text{ e}$$

$$\gamma_u^\tau = \{n_u = n_o^u, n_1^u, \dots, \tau\} = \text{caminho ótimo de } n_u \text{ a } \tau$$

Da figura 12:

$$k(n, \tau) = g(n) - g(n_i) + f(\tau) - g(n_i)$$

$$k(n, \theta) = g(n) - g(n_i) + f(\theta) - g(n_i)$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = f(\tau) - f(\theta) \geq 0$$

$$k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$$

Ainda nesse caso não há restrições; se τ é a solução não preferida, $k(n, \theta) \geq k(n, \tau)$ para todo n fechado em G_s para o qual $n_i = n_u$ e $n \notin S_u^*$

c) $n_i = n_u$, mas $n \in S_u^*$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $n \in \gamma_u^\tau$

Da figura 13:

$$k(n, \tau) = f(\tau) - g(n)$$

$$k(n, \theta) = g(n) - g(n_i) + f(\theta) - g(n_i)$$

$$k(n, \tau) - k(n, \theta) = f(\tau) - f(\theta) + 2g(n_i) - 2g(n)$$

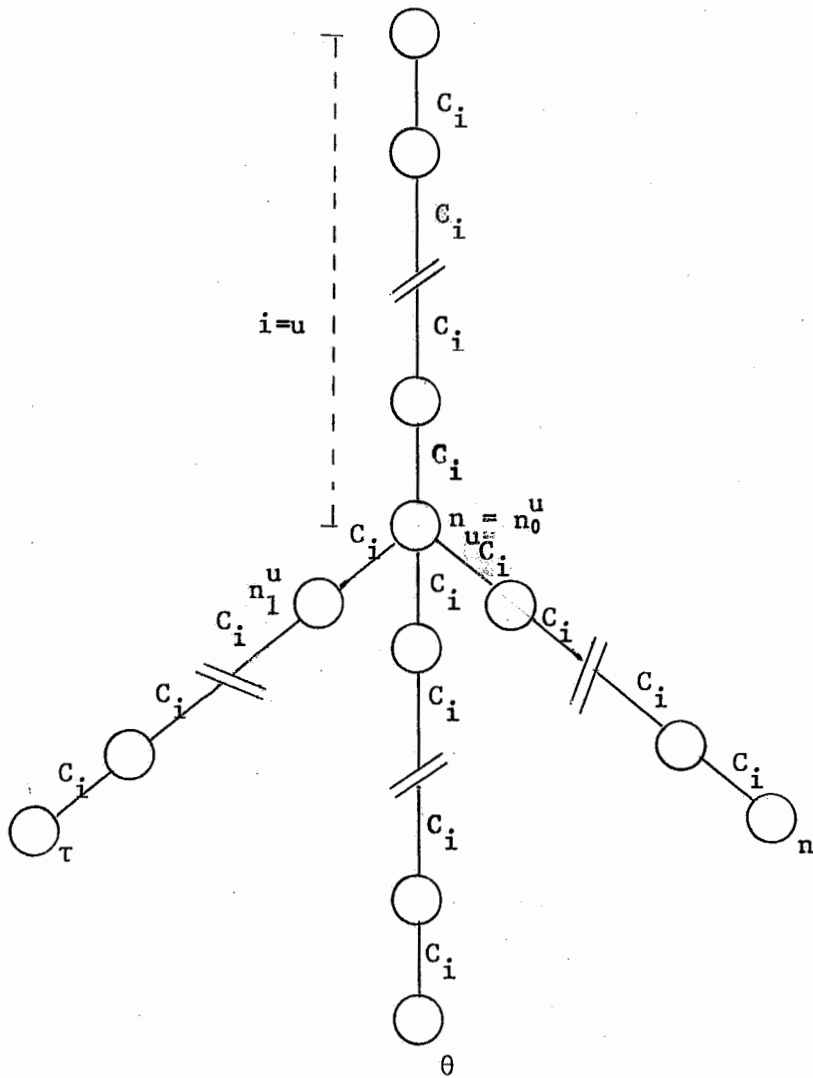


Figura 12

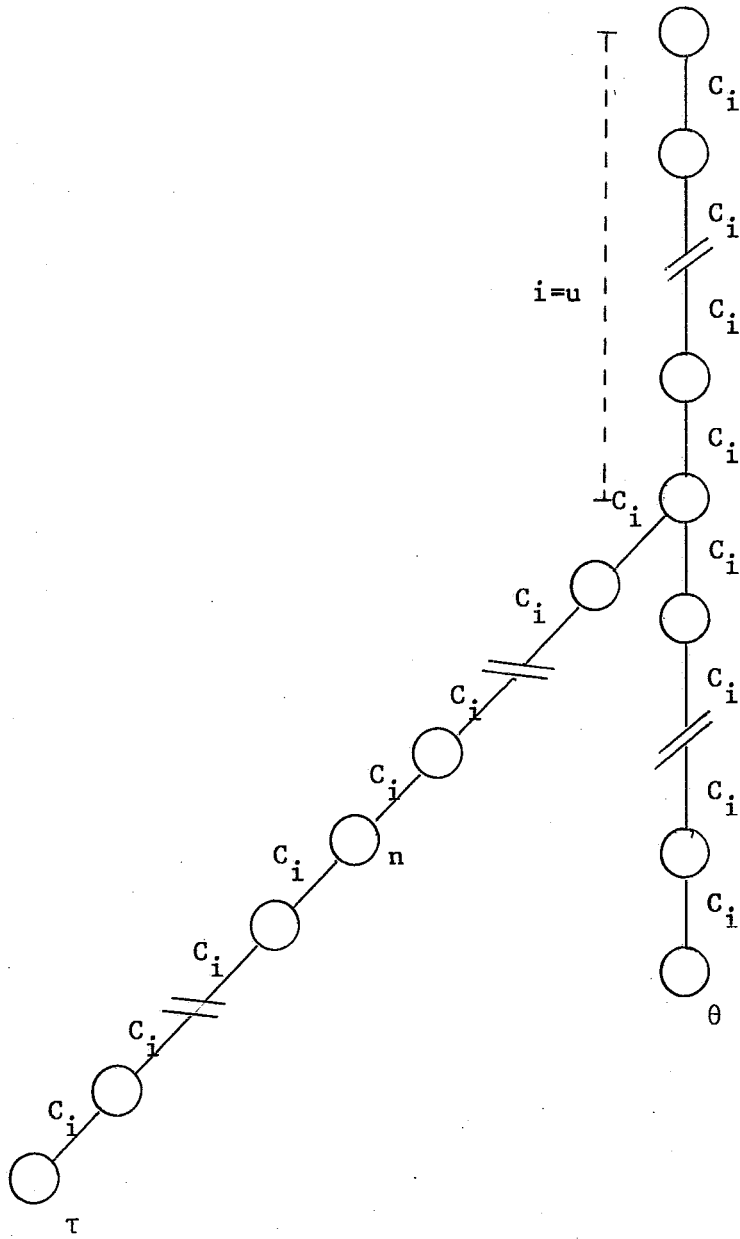


Figura 13

Em que condições $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$?

Exatamente quando

$$f(\tau) - f(\theta) + 2g(n_i) - 2g(n) \geq 0$$

$$f(\tau) \geq f(\theta) + 2g(n) - 2g(n_i)$$

Mas, uma vez que $g_{\max}(n) = f(\theta)$ para que n seja fechado, vem

$$f(\tau) \geq f(\theta) + 2f(\theta) - 2g(n_i)$$

$$f(\tau) \geq 3f(\theta) - 2g(n_i)$$

É evidente que a função $j(i) = 3f(\theta) - 2g(n_i)$ tem um máximo em $g(n_i) = 0$, e isso acontece quando $i = 0$, isto é, quando as soluções τ e θ tem como único ancestral comum o nó inicial.

Portanto, se $f(\tau) \geq 3f(\theta)$, temos $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$, e a presença da solução τ em nada afetará o conjunto de nós fechados.

É interessante verificar que o valor da função $j(i) = 3f(\theta) - 2g(n_i)$ é mínimo quando $g(n_i) = f(\theta)$, e, nesse caso, $f(\tau) \geq f(\theta)$, mas θ é ancestral de τ , isto é, se para o algoritmo fechar τ for necessário antes fechar θ , então, também não há restrições; a presença de τ em nada afetará o conjunto de nós fechados.

Para concluir, notemos que a condição $f(\tau) \geq 3f(\theta)$ não depende dos custos de transição, de forma que se aplica tanto ao caso do limite superior como ao do limite inferior de nós fechados.

Esse resultado concorda com Araujo [3], embora nessa referência novamente tenha sido usado custos unitários, de onde $f(\theta) = k$.

D - OUTRA CONDIÇÃO PARA A EXTENSÃO DE VALIDADE

Sugerimos aqui outra condição, em certas ocasiões mais apertada que a do item anterior, para que os limites obtidos em B continuem valendo, nos casos de solução múltipla.

Teorema 10

Seja G_s uma árvore nas condições C2, mas com todos os custos de transição iguais a c_i , e com duas soluções, θ e τ , onde θ é a preferida, isto é, $f(\theta) \leq f(\tau)$.

Então, se τ é tal que

$$f(\tau) \geq f(\theta) \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} + \frac{1 - \alpha}{\alpha},$$

A^* fechará em G_s o mesmo conjunto de nós que fecharia se usássemos apenas a solução θ .

Lema 1

Nas condições do teorema 9, e para $0 \leq \alpha < 1$,

$$f(\tau) \geq f(\theta) \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \text{ implica em } \frac{f(\theta) - \alpha f(\tau)}{1 - \alpha} \leq \frac{f(\theta)(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

Demonstração:

Para $\alpha = 0$ o resultado é verdadeiro, independente de τ ;

Para $\alpha = 1$, apenas os nós da solução ótima serão fechados e o teorema 10 é verificado trivialmente.

Para $0 < \alpha < 1$, temos,

$$f(\tau) \geq f(\theta) \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} + \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

$$f(\tau)(1 + \alpha)\alpha \geq f(\theta)(3 - \alpha)\alpha + (1 - \alpha)(1 + \alpha)$$

$$f(\theta)(3 - \alpha)\alpha - f(\tau)(1 + \alpha)\alpha \leq -(1 - \alpha)^2 < 0$$

$$f(\theta)(3\alpha - \alpha^2) - f(\tau)\alpha(1 + \alpha) < 0$$

$$f(\theta)(1 + \alpha - 1 + 2\alpha - \alpha^2) - f(\tau)\alpha(1 + \alpha) < 0$$

$$f(\theta) [(1 + \alpha) - (1 - \alpha)^2] - f(\tau)\alpha(1 + \alpha) < 0$$

$$f(\theta)(1 + \alpha) - f(\tau)\alpha(1 + \alpha) - f(\theta)(1 - \alpha)(1 - \alpha) < 0$$

$$\frac{f(\theta)(1 + \alpha) - f(\tau)\alpha(1 + \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} < \frac{f(\theta)(1 - \alpha)(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)(1 - \alpha)}$$

$$\frac{f(\theta) - f(\tau)}{1 - \alpha} < \frac{f(\theta)(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

Tendo em vista este lema, podemos enunciar o teorema 10 de outra forma: se τ é tal que

$$\frac{f(\theta) - \alpha f(\alpha)}{1 - \alpha} \leq \frac{f(\theta)(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

então cada nó n fechado usando $\hat{h}(n) = \alpha h(n)$ (onde $h(n)$ é o custo do menor caminho até uma solução, θ ou τ) será fechado se usarmos

$h(n) = \alpha [f(\theta) + g(n) - 2g(n_i)]$, onde $n \in S_i$ e, portanto, $f(\theta) + g(n) - 2g(n_i)$ é o custo do caminho de n a θ ; (vide nomenclatura do teorema 9).

Para prová-lo, como no teorema 9, suporemos três casos:

a) $n_i \neq n_u$

Pelo teorema 9, $f(\tau) \geq f(\theta)$ implica em $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ e a presença de τ não afeta o fechamento de n .

b) $n_i = n_u$, mas $n \notin S_u^*$

Novamente, pelo teorema 9, $f(\tau) \geq f(\theta)$ implica em $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ e a presença de τ não afeta o fechamento de n .

c) $n_i = n_u$ e $n \in S_u^*$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $n \in \gamma_u^\tau$

Da figura 13:

$$k(n, \tau) = f(\tau) - g(n)$$

$$k(n, \theta) = f(\theta) + g(n) - 2g(n_i)$$

Demostremos a parte "se"; temos que mostrar que

$g(n) + \alpha k(n, \tau) \leq f(\theta)$ implica em $g(n) + \alpha k(n, \theta) \leq f(\theta)$, isto é, todo nó n que for fechado usando-se a solução τ será fechado se for usada a solução θ .

Realmente, supondo

$$g(n) + \alpha k(n, \tau) \leq f(\theta), \quad \text{temos}$$

$$g(n) + \alpha [f(\tau) - g(n)] \leq f(\theta)$$

$$g(n) \leq f(\theta) - \alpha [f(\tau) - g(n)]$$

$$g(n) \leq f(\theta) - \alpha f(\tau) + \alpha g(n)$$

$$g(n)(1 - \alpha) \leq f(\theta) - \alpha f(\tau)$$

$$g(n) \leq \frac{f(\theta) - \alpha f(\tau)}{1 - \alpha}$$

Admitindo-se a hipótese como verdadeira, vem

$$g(n) \leq \frac{f(\theta) - \alpha f(\tau)}{1 - \alpha} \leq \frac{f(\theta)(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

Então

$$g(n) \leq \frac{f(\theta)(1 - \alpha)}{1 + \alpha}$$

$$g(n) \leq \frac{f(\theta)(1 - \alpha) + 2g(n_u)}{1 + \alpha}$$

$$g(n)(1 + \alpha) \leq f(\theta)(1 - \alpha) + 2g(n_u)$$

$$g(n) \leq f(\theta) - \alpha g(n) + 2g(n_u)$$

$$g(n) < f(\theta) - \alpha [f(\theta) + g(n) - 2g(n_u)]$$

$$\text{Mas } f(\theta) + g(n) - 2g(n_u) = k(n, \theta)$$

Então

$$g(n) + \alpha k(n, \theta) \leq f(\theta)$$

Para provar que nenhum outro nó é fechado se usarmos $\hat{h}(n) = \alpha k(n, \theta)$, notemos que, desde que $h(n) \leq k(n, \theta)$, por definição $\hat{f}(n) = g(n) + \alpha h(n) \leq g(n) + \alpha k(n, \theta)$.

Por outro lado, $g(n) + \alpha k(n, \theta) \leq f(\theta)$ implica em $\hat{f}(n) \leq f(\theta)$ e o nó n é fechado (a menos critério de desempate). Isso encerra a demonstração.

Corolário

Seja G_s uma árvore nas condições C2, com custos quaisquer de transição e solução ótima θ . Se toda solução τ não preferida satisfazer

$$f(\tau) \geq \min \left\{ 3f(\theta), \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} f(\theta) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right\}$$

então A fechará em G_s o mesmo conjunto de nós que fecharia caso τ não existisse.

Demonstração:

Foi demonstrado que para árvores de custo c_i (uniforme) a condição é satisfeita se $f(\tau) \geq 3f(\theta)$ ou se $f(\tau) \geq \frac{33 - \alpha}{1 + \alpha} f(\theta) + \frac{1 - \alpha}{\alpha}$, isto é se

$$f(\tau) \geq \min \left\{ 3f(\theta), \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha} f(\theta) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right\}$$

Ora, já demostramos que, se uma árvore tem custos c_0 , A^* fechará pelo menos os mesmos nós que em outra árvore idên-

tica, mas de custos quaisquer. Façamos $c_i = c_0$; se a condição em $f(\tau)$ é válida para árvores com custos c_0 e esta tem fechado pelo menos o mesmo conjunto de nós que em qualquer outra nas mesmas condições, então é válida para essa outra.

E - UMA FUNÇÃO APROXIMADA

No item B deste capítulo obtivemos a expressão

$$FGs = \sum_{i=0}^k B \left[(k - i) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right]$$

tal que nos fornece um limite superior para o número de nós fechados, se $k = \left\lfloor \frac{f(s)}{c_0} \right\rfloor + 1$, e um limite inferior para o número de nós fechados, se $k = \lceil f(s) \rceil$.

No sentido de simplificar a expressão acima, retomemos a função $\left[\quad \right]$, então

$$FGs \approx \sum_{i=0}^{k-1} B (k - i - 1) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} + 1$$

$$\text{Façamos } \rho = B \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}; \text{ então}$$

$$FGs \approx \sum_{i=0}^{k-1} \rho^{k - i - 1} + 1 = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}$$

Então teremos as novas expressões para os limites:

$$FGs' = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} + 1, \text{ onde } \rho = B^{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \text{ e } k = \left\lfloor \frac{f(s)}{c_0} \right\rfloor + 1$$

$$FGs'' = \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} + 1, \text{ onde } \rho = B^{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \text{ e } k = \lfloor f(s) \rfloor .$$

A qualidade dessas expressões aproximadas pode ser avaliada pelos gráficos do Apêndice 2.

C A P Í T U L O I VUMA ANÁLISE CRÍTICA

Neste último capítulo, gostaria de indicar alguns pontos do trabalho, possíveis de modificação, de forma a tornar mais gerais os resultados obtidos, ou, ainda, de sugerir linhas de pesquisa nesse sentido.

Um das mais fortes restrições neste trabalho é a de que ele se refere a árvores; coloca-se naturalmente o problema de obter limites superiores e inferiores ao número de nós fechados por um A^* percorrendo um grafo. Os resultados a serem obtidos devem, claramente, incluir os do presente trabalho como casos particulares.

No teorema 4 foi demonstrado que se uma árvore possui dois nós terminais θ e τ , e o A^* é tal que fecha todo nó n para o qual $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$, então o conjunto de nós fechados seria o mesmo caso τ não existisse. Essa é a condição para as novas soluções que permite estender a validade dos limites encontrados para o caso de solução única, para o caso de solução múltiplas.

Nesse ponto, o prof. Araujo sugere uma condição mais apertada: se, para todo nó n tal que $g(n) + \alpha k(n, \theta) > f(s)$ tivermos $g(n) + \alpha h(n) > f(s)$ (onde $h(n) = \min \{k(n, \theta), k(n, \tau)\}$), então o conjunto de nós fechados pelo A^* seria o mesmo caso τ não

existisse.

Ainda no item de extensão de validade, foram procuradas condições para as novas soluções tais que elas não afetassem o fechamento de um nó, afim de que os limites encontrados continuassem valendo; e a condição encontrada foi a do teorema 4: $k(n, \tau) \geq k(n, \theta)$ para todo n fechado. Mas é possível abordar o problema por um novo ângulo: encontrar condições (ou provar que não existem) para as novas soluções, tais que, mesmo afetando o conjunto de nós fechados, mantivesse sua cardinalidade dentro dos limites estabelecidos. Nesse sentido não foi feita nenhuma tentativa.

A P Ê N D I C E I

A seguir são apresentados vários gráficos, construídos pelo plotter da IBM-1130 do NCE da UFRJ, em escala semi-log, para as expressões obtidas para os limites superior e inferior dos nós fechados. Neste apêndice I, nos limitaremos a árvores de busca com solução no nível k .

No eixo vertical está representado o número de nós fechados (em log de base 10), e no horizontal, o valor de α variando continuamente de 0 a 1. As curvas em degrau representam as funções exatas

$$FGs = \sum_{i=0}^k B \left\lfloor \frac{k-i}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor \quad (\text{curva superior}), \quad e$$

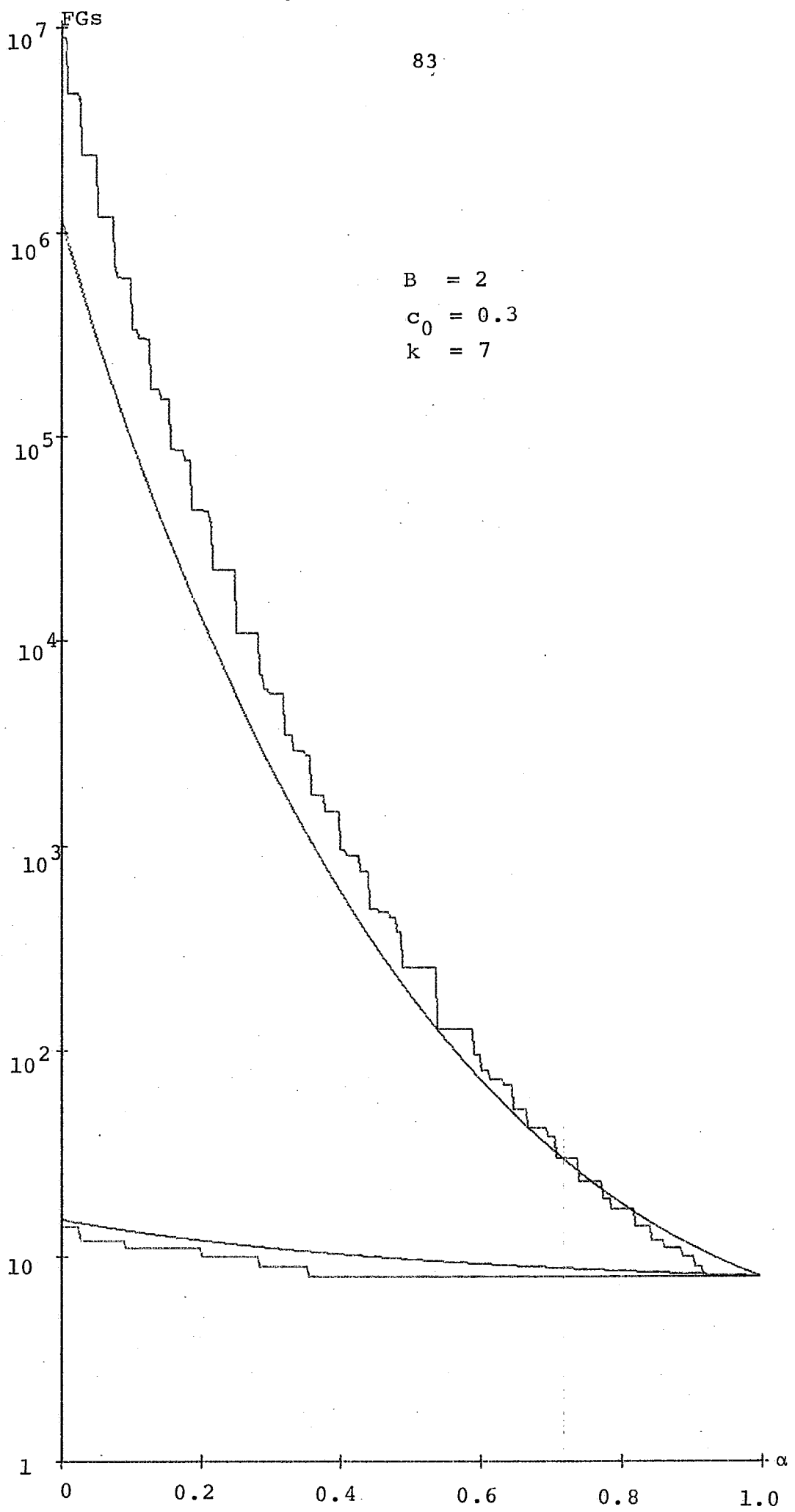
$$Fgs = \sum_{i=0}^k B \left\lfloor (k-i) c_0 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right\rfloor \quad (\text{curva inferior})$$

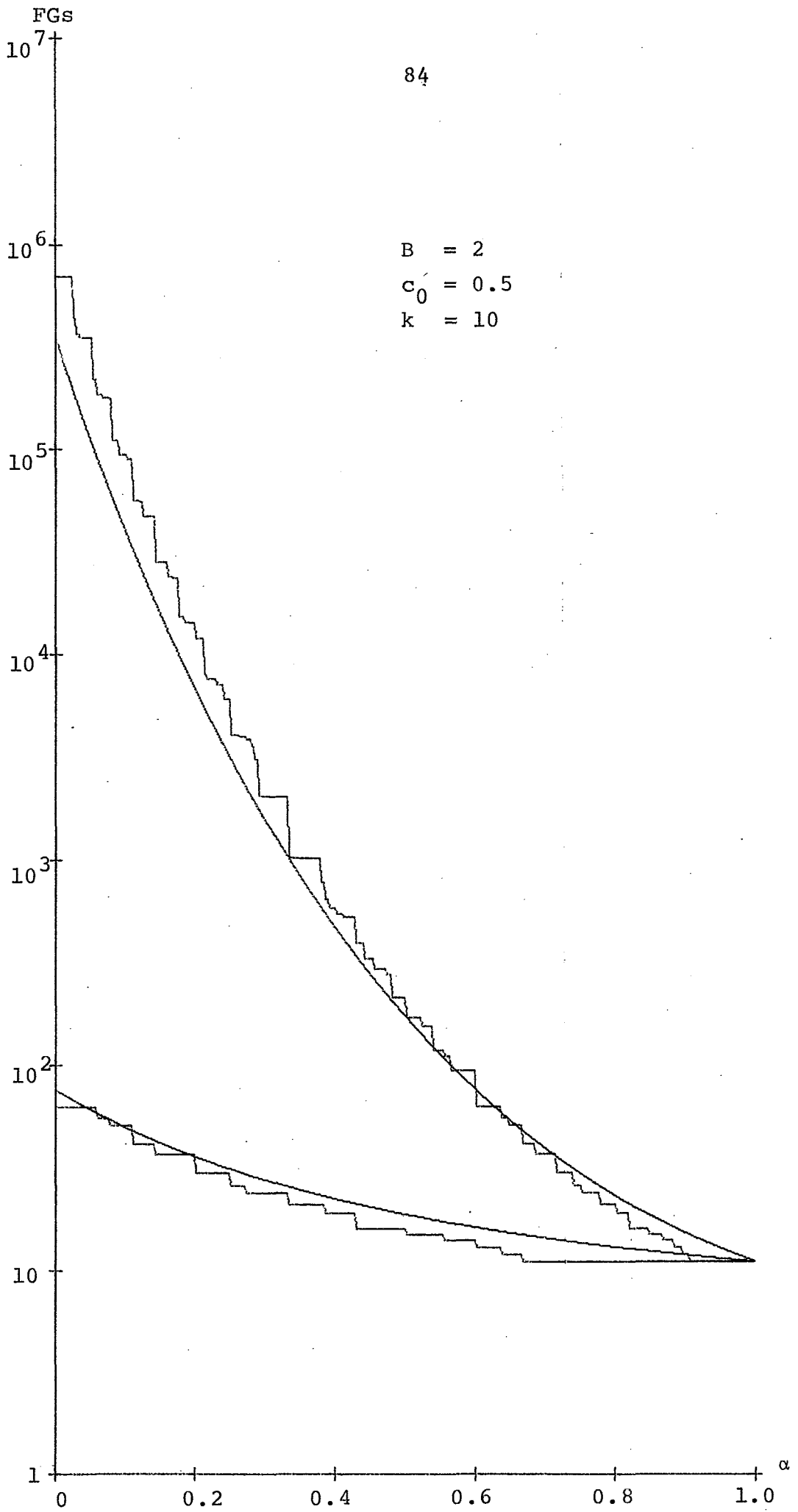
As curvas contínuas representam as expressões aproximadas $FGs \approx \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}$, onde

$$\rho = B \frac{k}{c_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (\text{curva superior}), \quad e$$

$$\rho = B^{kc_0} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (\text{curva inferior}), \quad \text{onde } B \text{ é o } c_0$$

eficiente de ramificação, e c_0 , o limite inferior aos custos de transição.

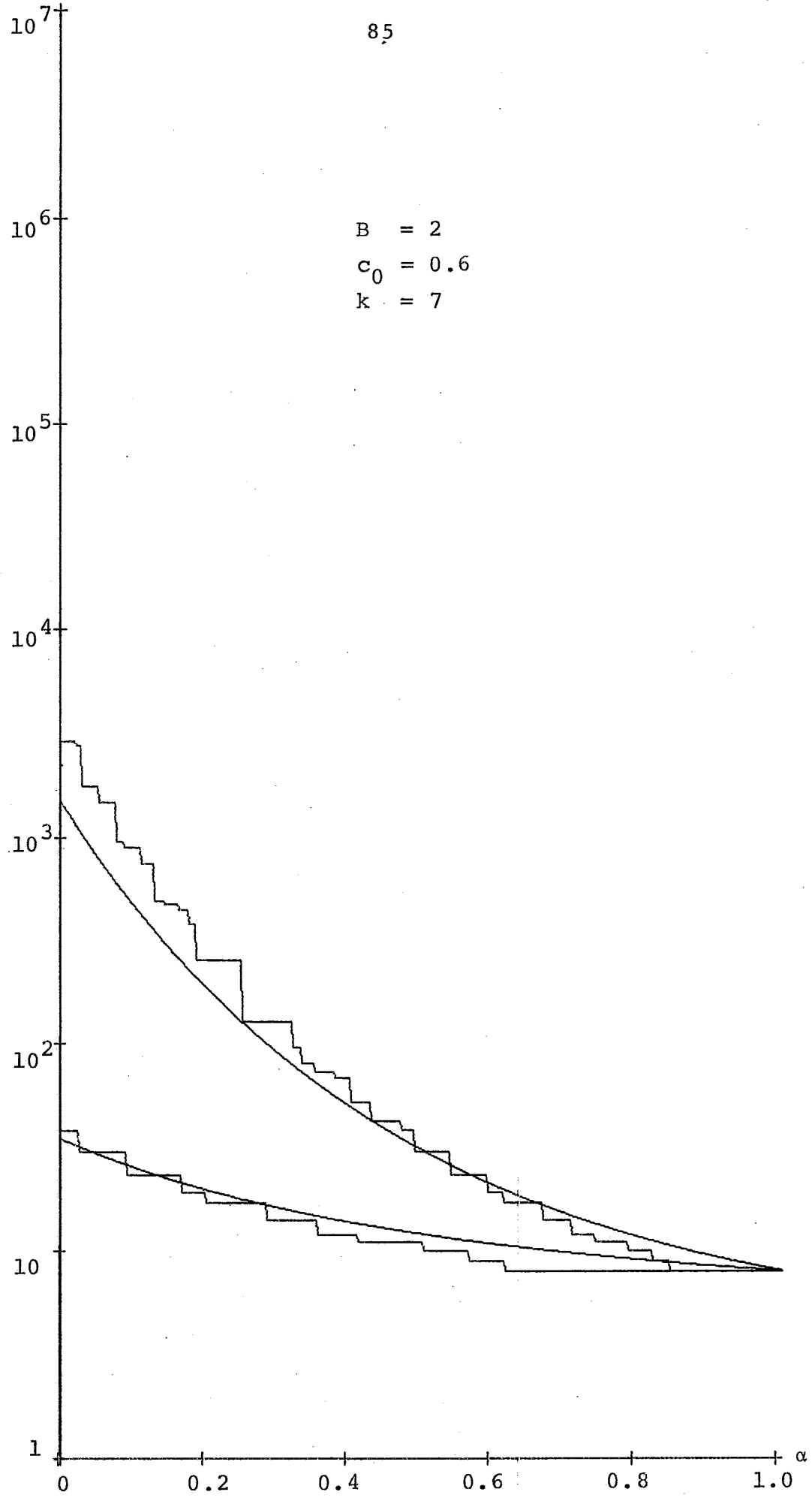


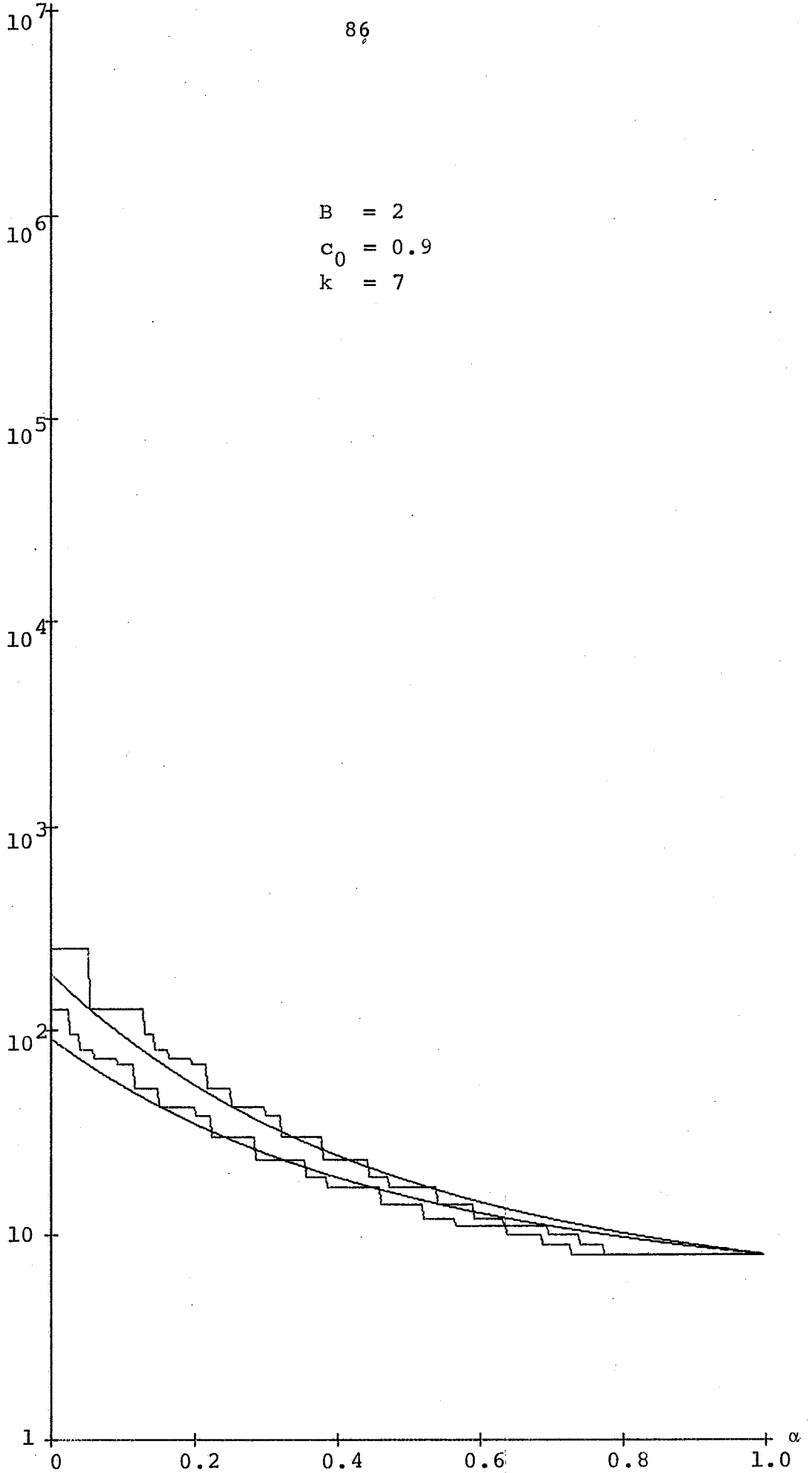


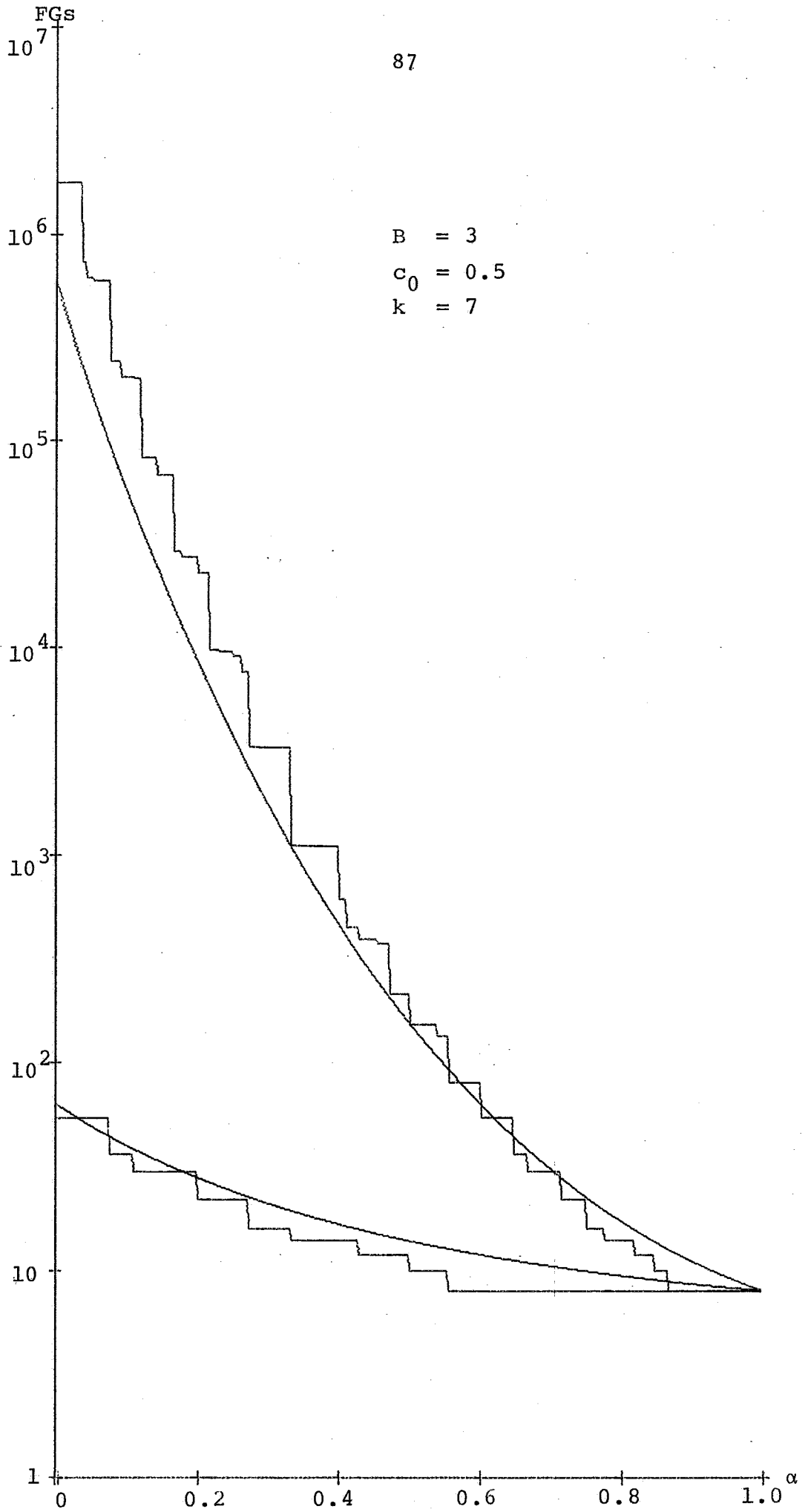
FGs

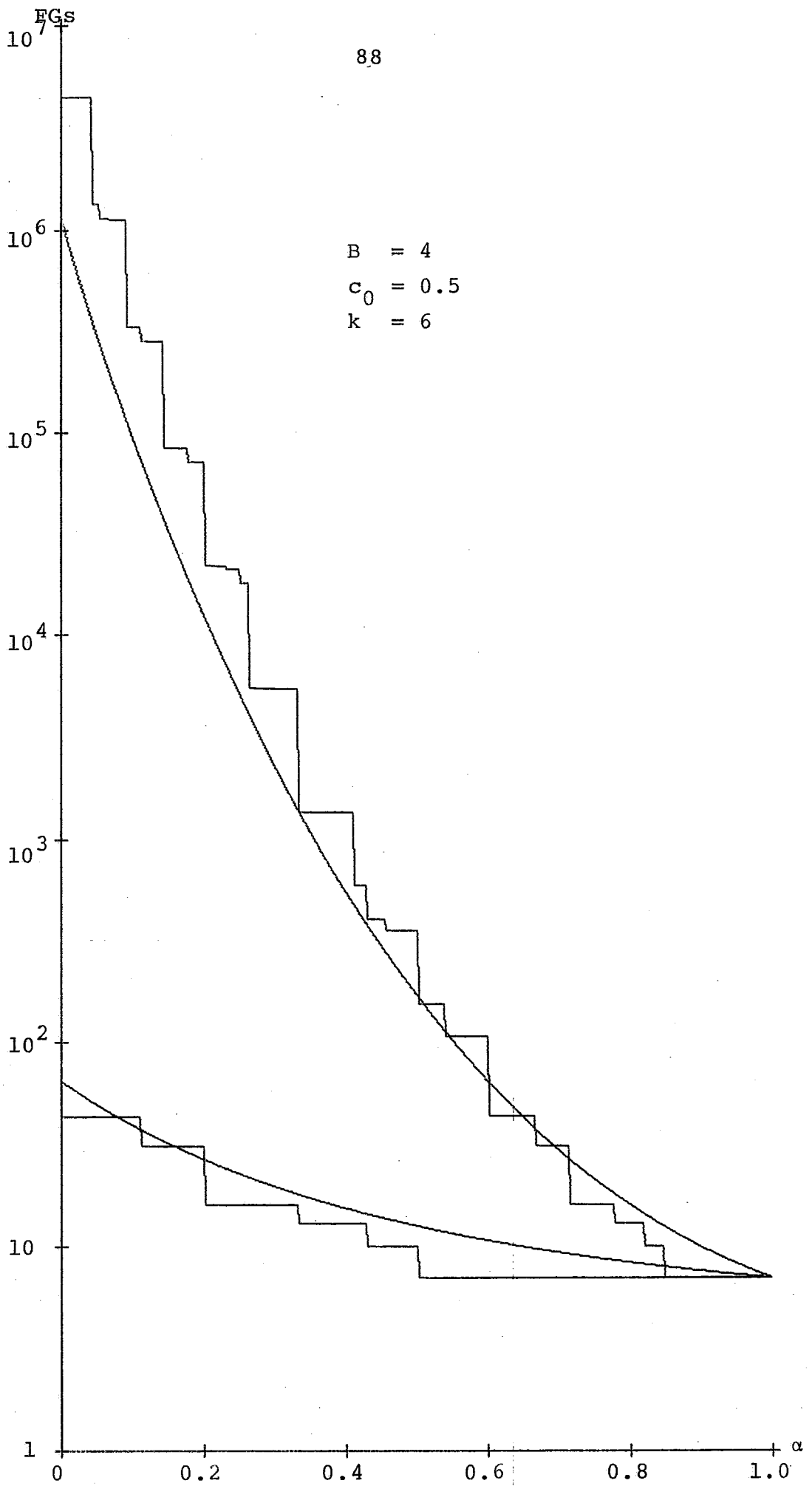
85

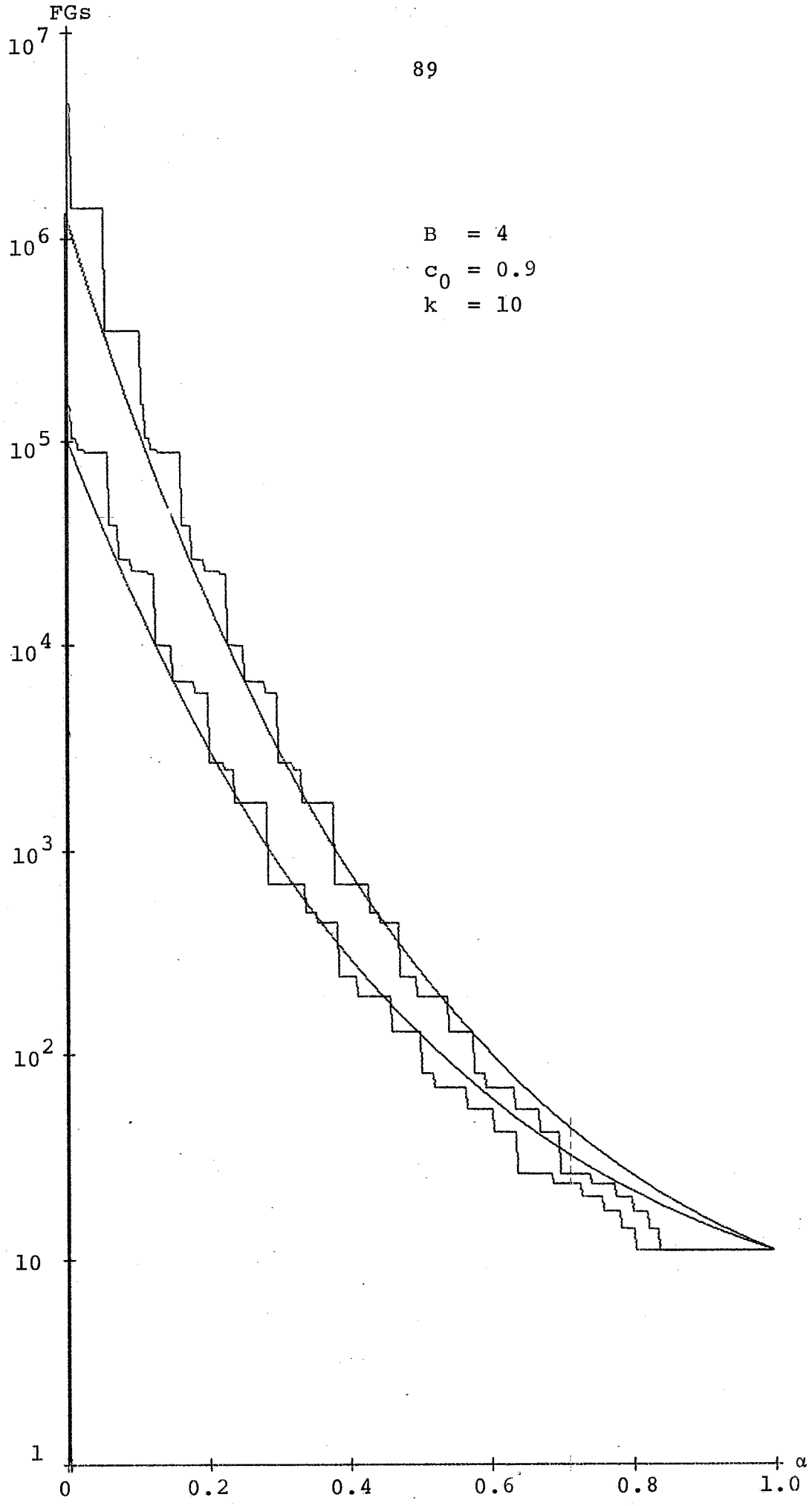
B = 2
c₀ = 0.6
k = 7

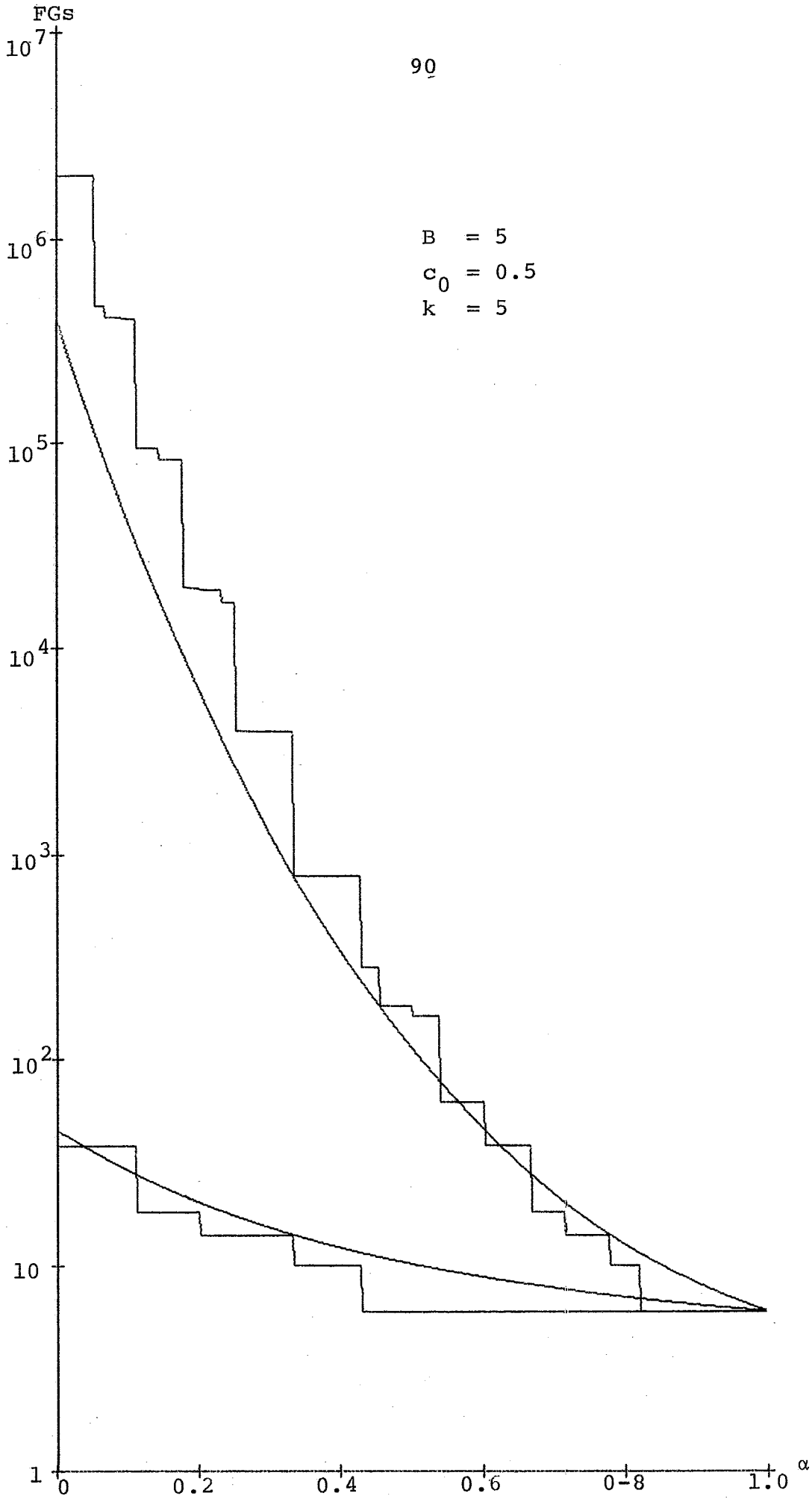


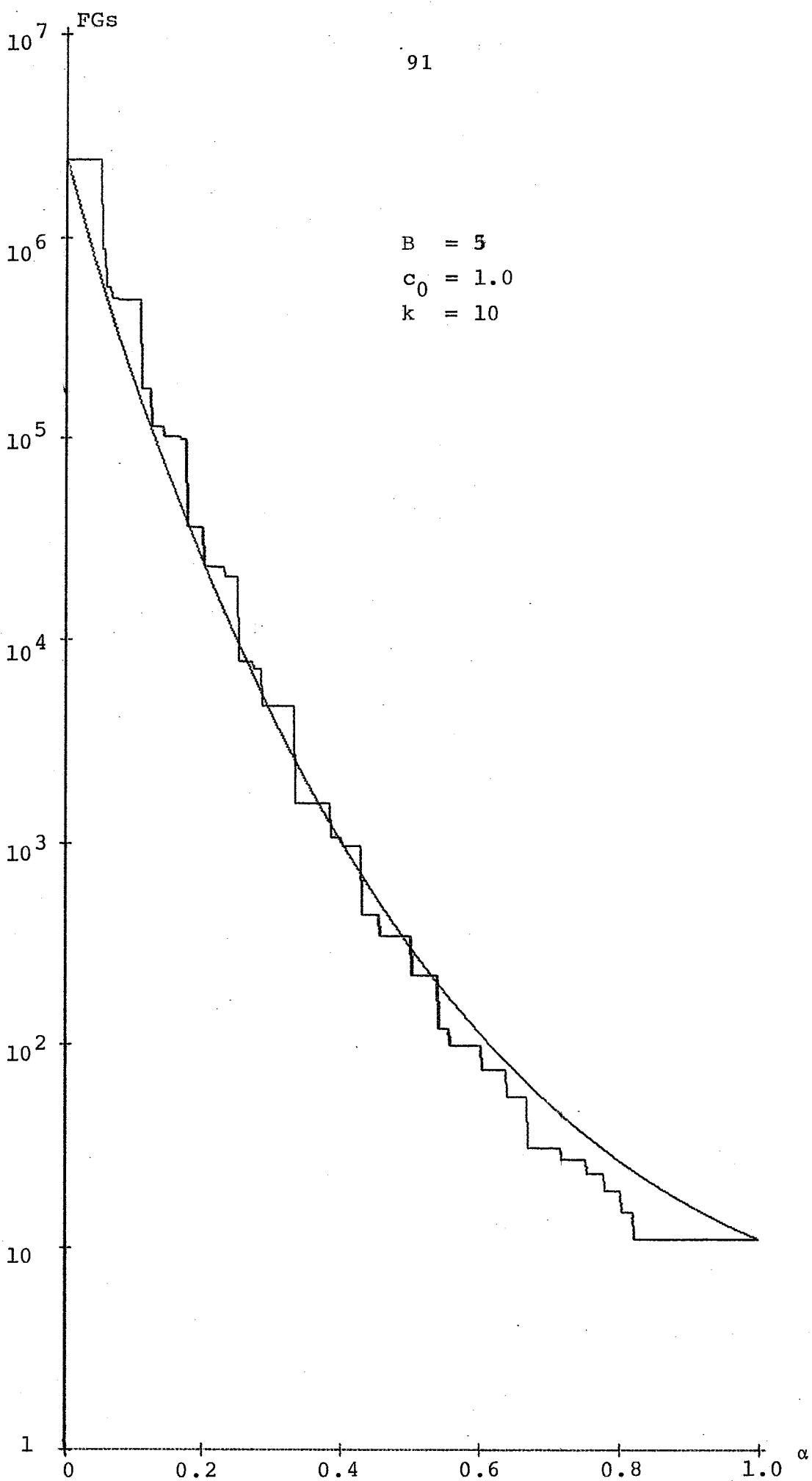












A P Ê N D I C E II

Da mesma forma que no apêndice anterior são, a seguir, apresentados gráficos para as expressões obtidas para os limites superior e inferior de nós fechados, desta vez em função do custo $f(s)$ da solução preferida.

As curvas em degrau representam as funções exatas

$$FGs = \sum_{i=0}^k B \left[(k-i) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right], \text{ onde}$$

$$k = \left[\frac{f(s)}{c_0} \right] + 1 \text{ (curva superior) e}$$

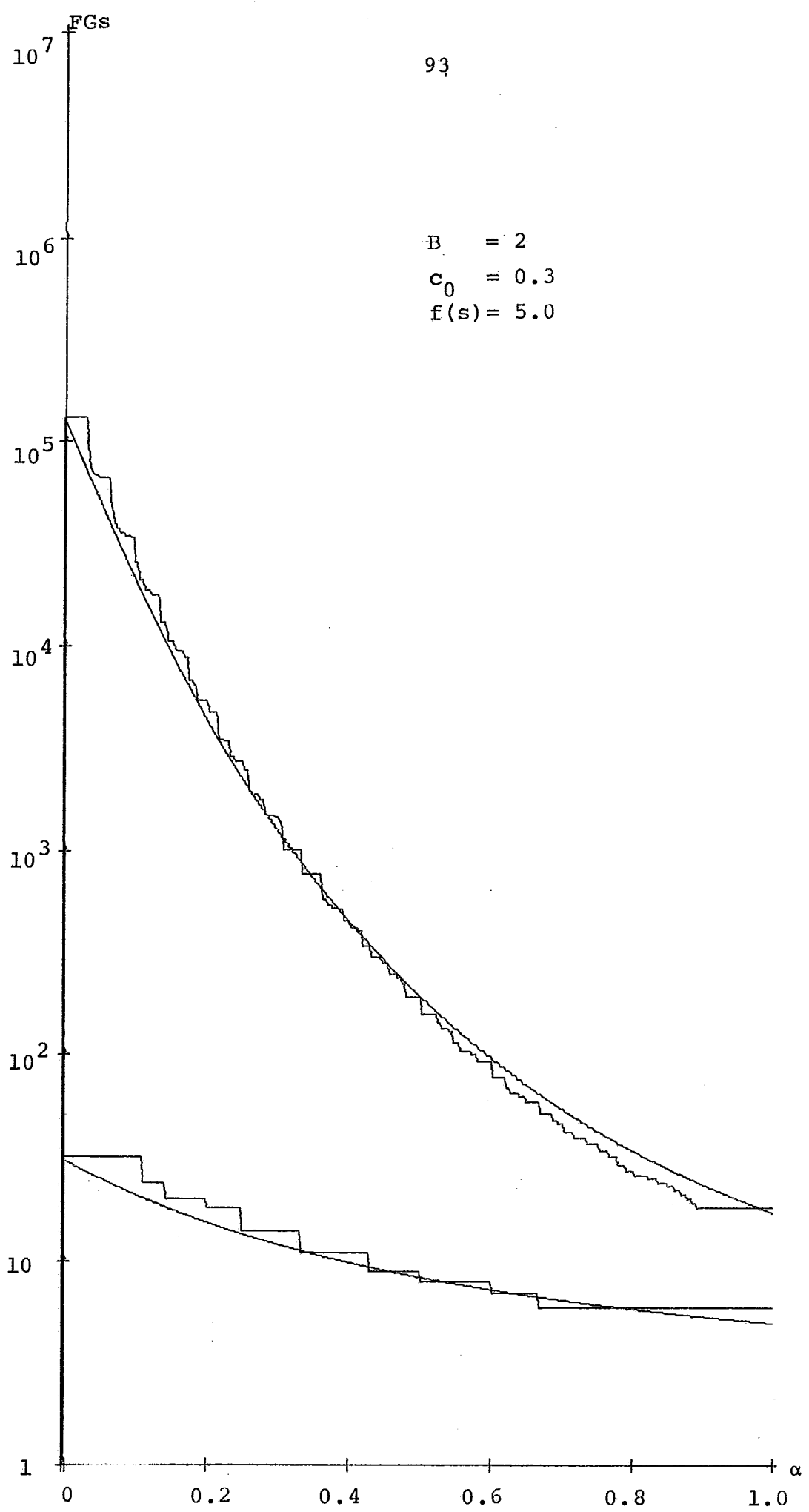
$$k = \left[f(s) \right] \text{ (curva inferior)}$$

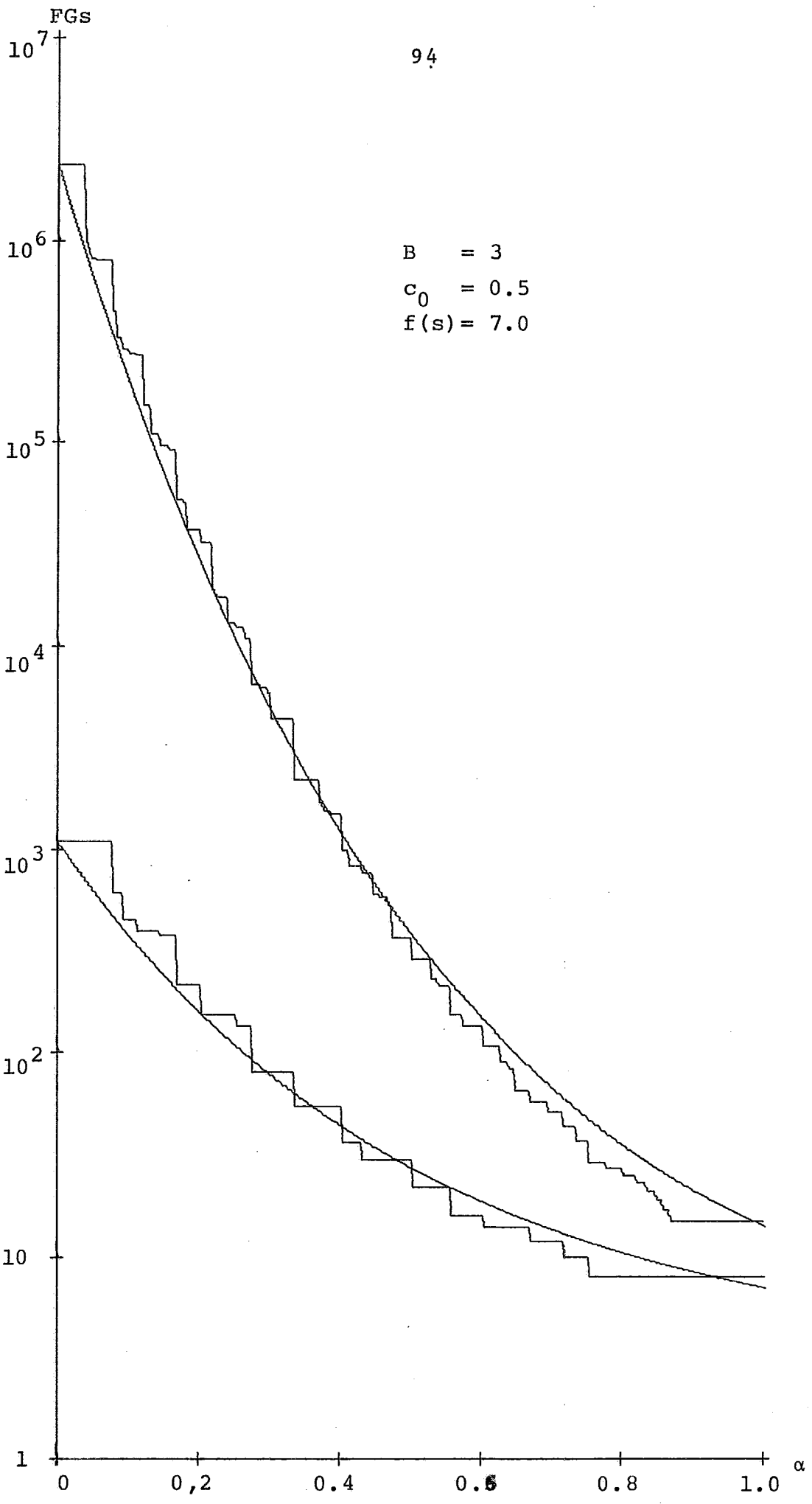
As curvas contínuas representam as expressões aproximadas

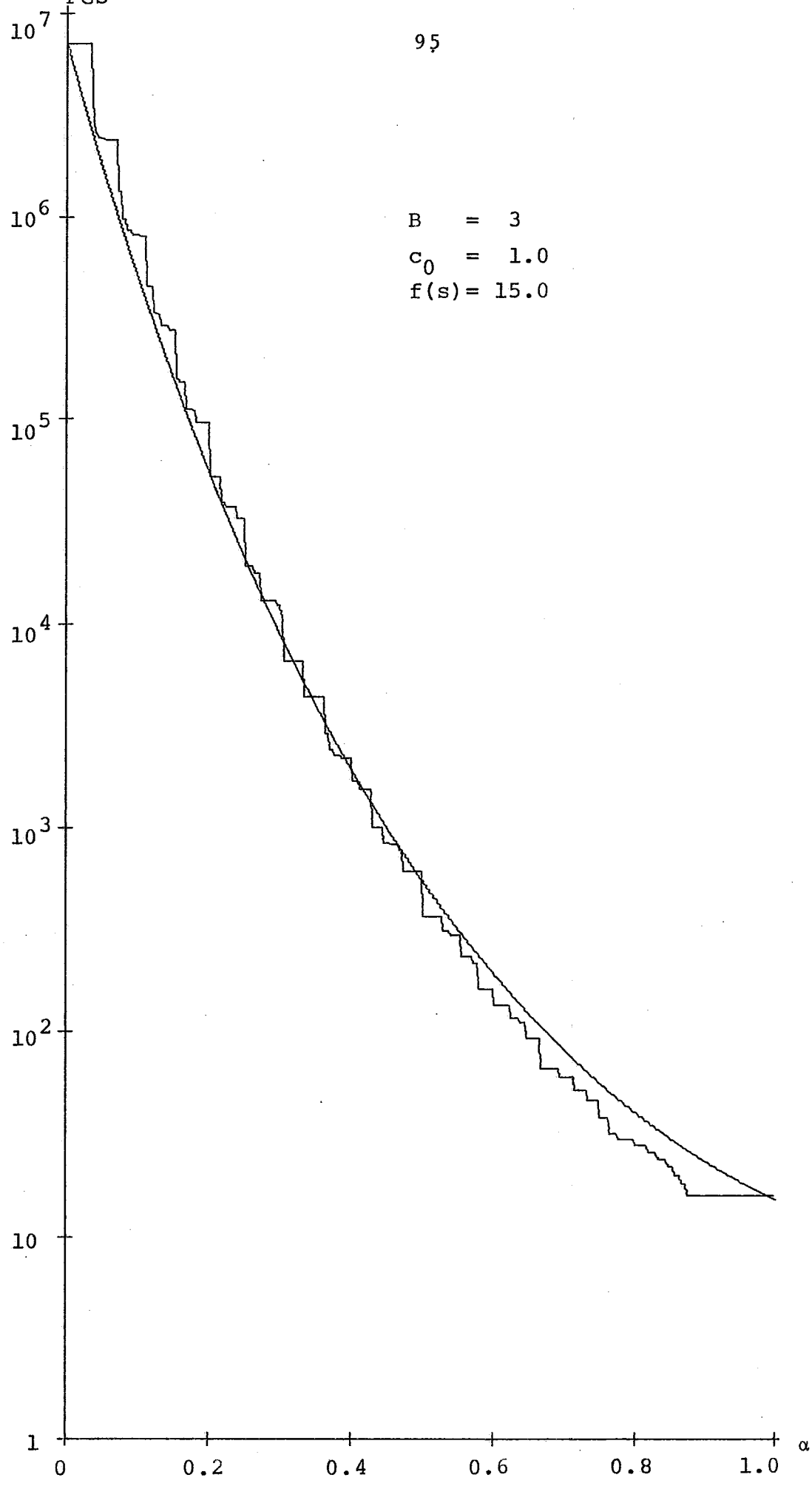
$$FGs \approx \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1}, \text{ onde } \rho = B \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \text{ e}$$

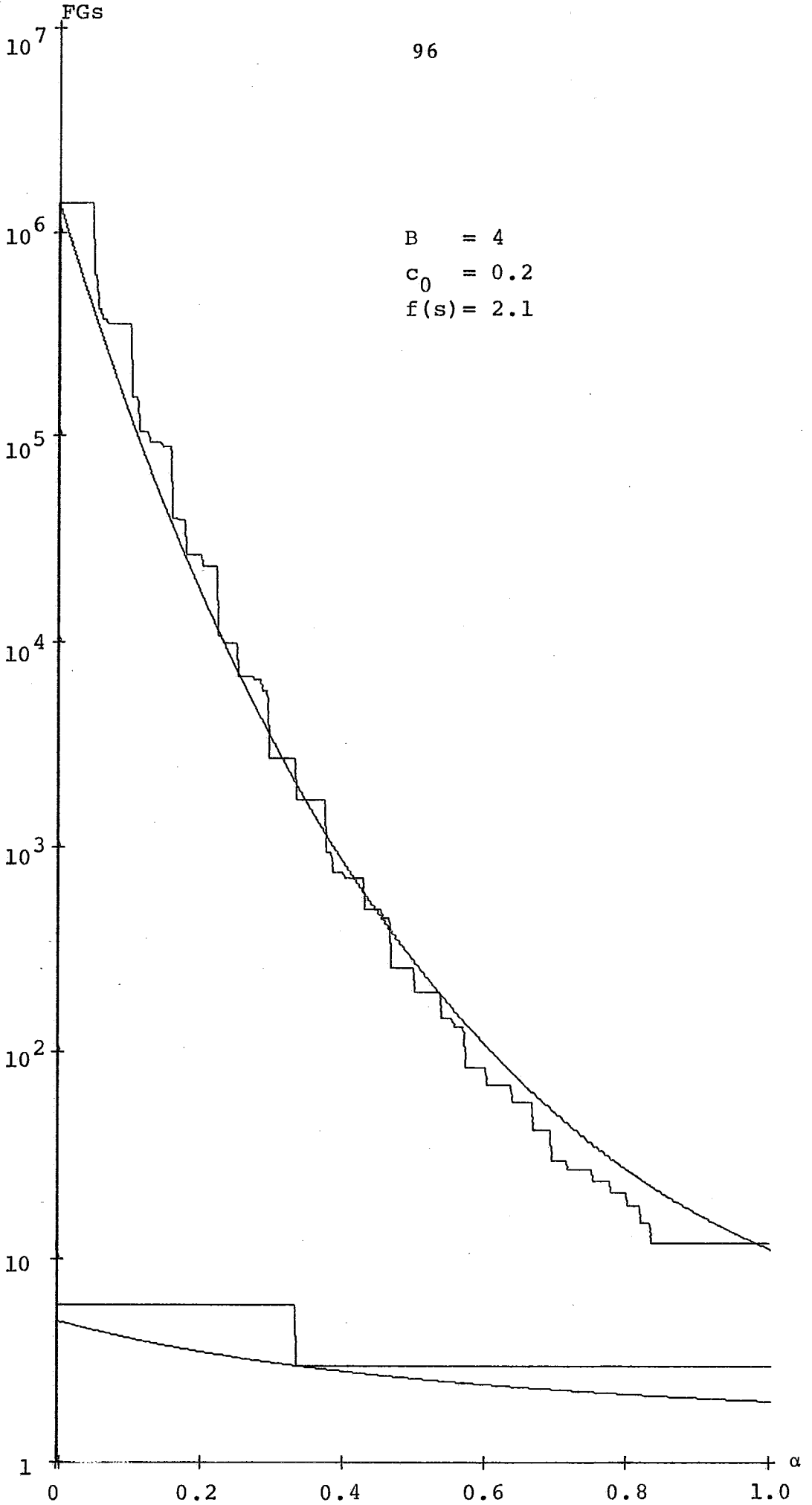
$$k = \left[\frac{f(s)}{c_0} \right] + 1 \text{ (curva superior e}$$

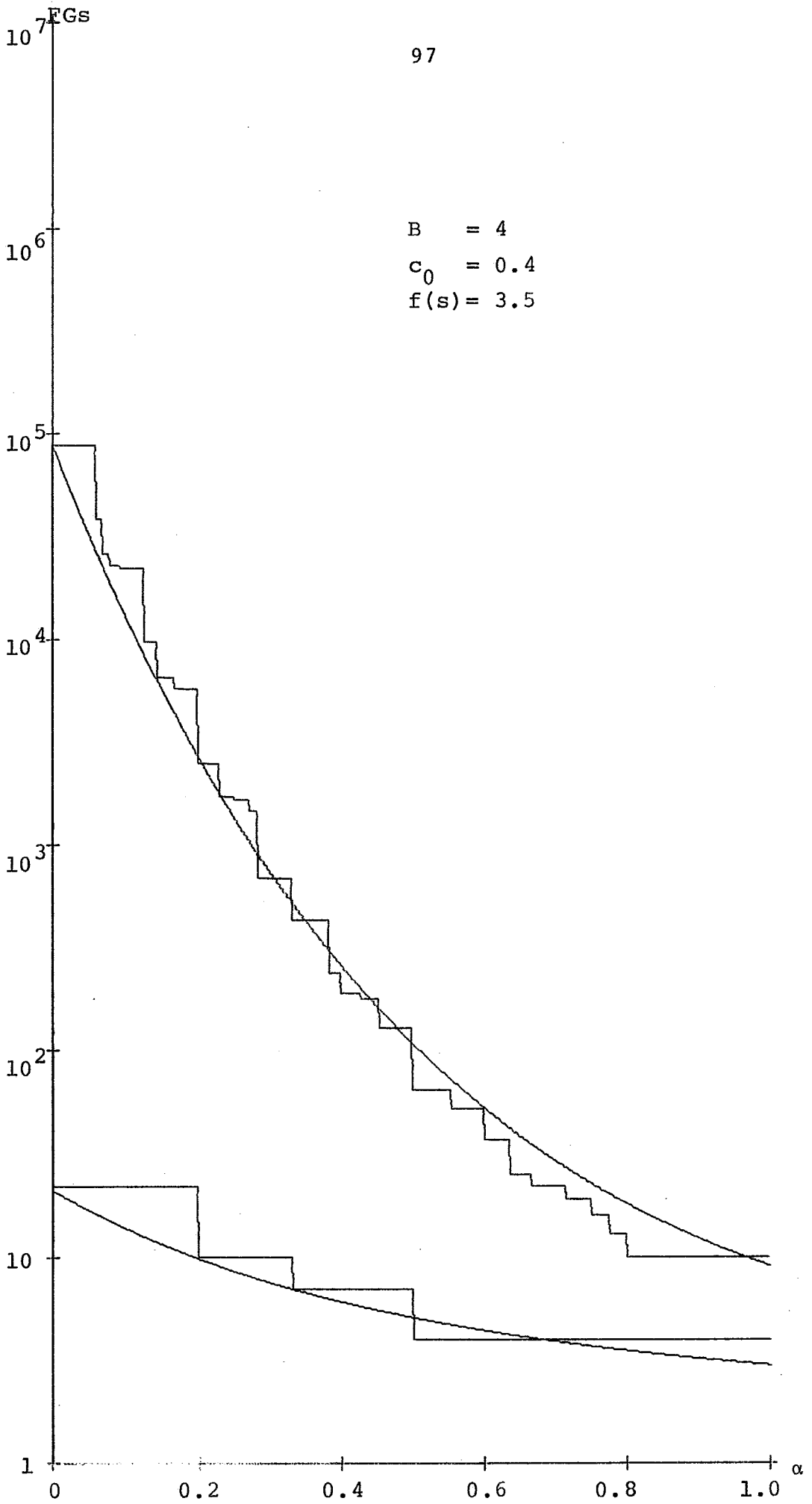
$$k = \left[f(s) \right] \text{ (curva inferior).}$$

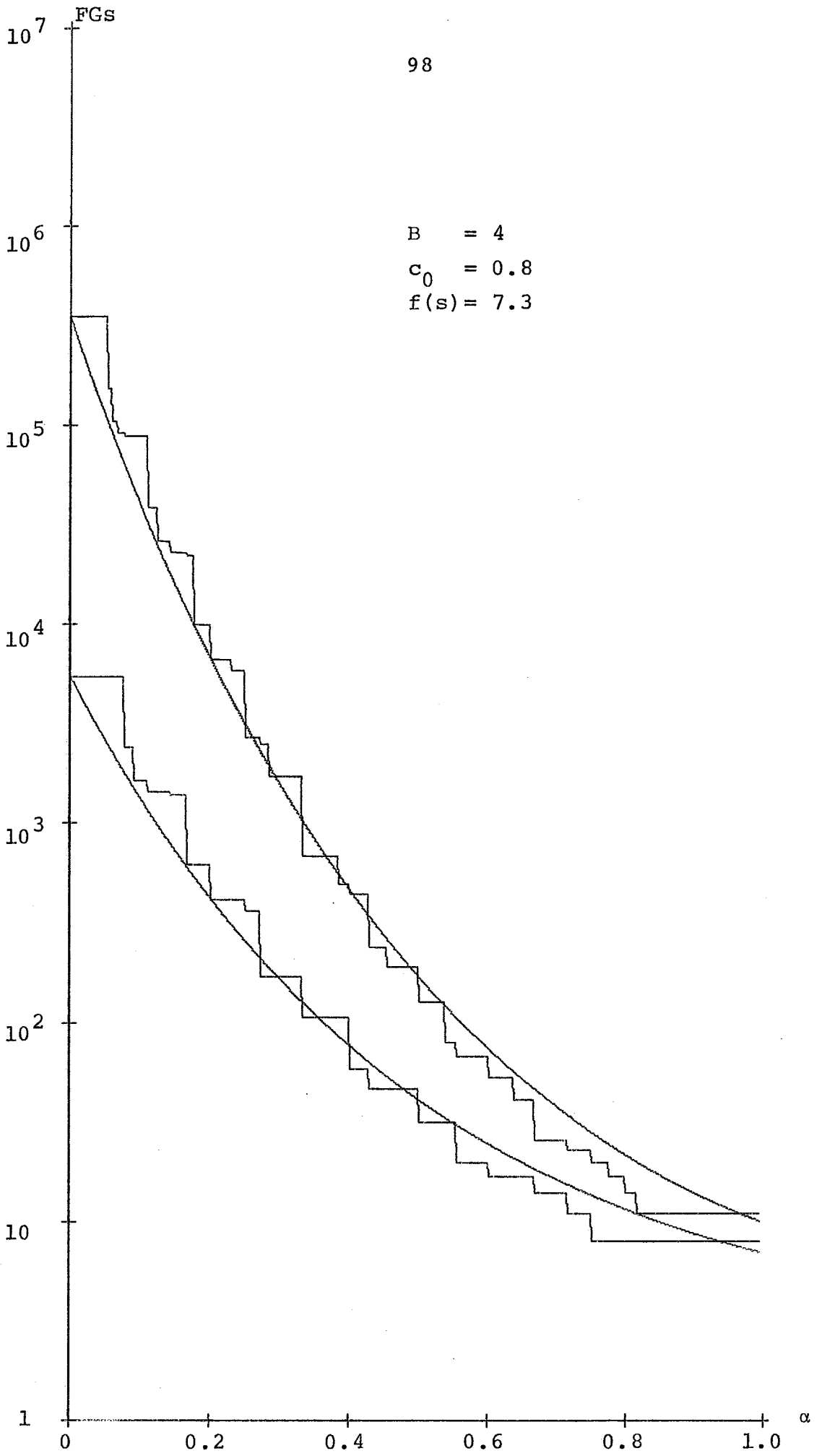




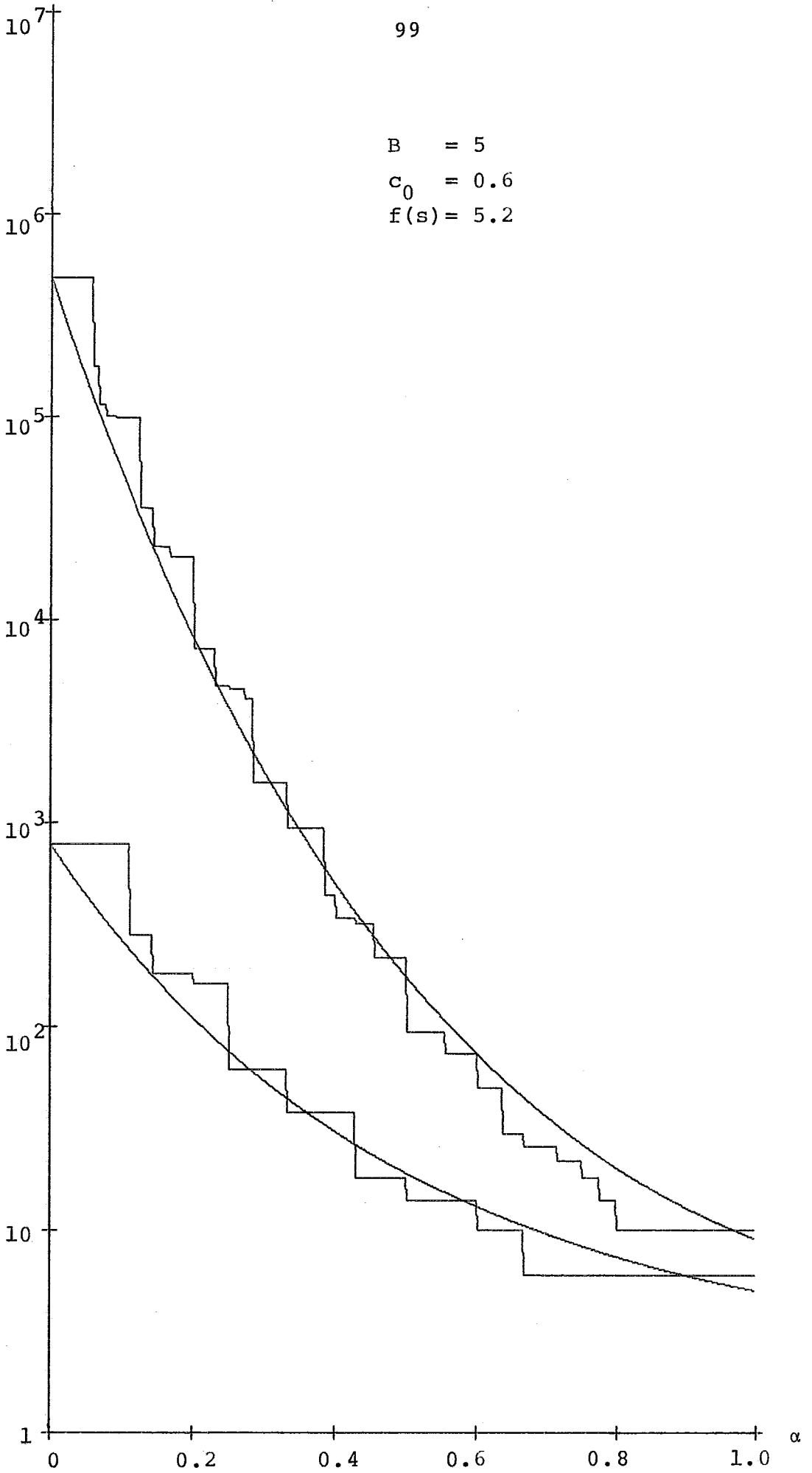


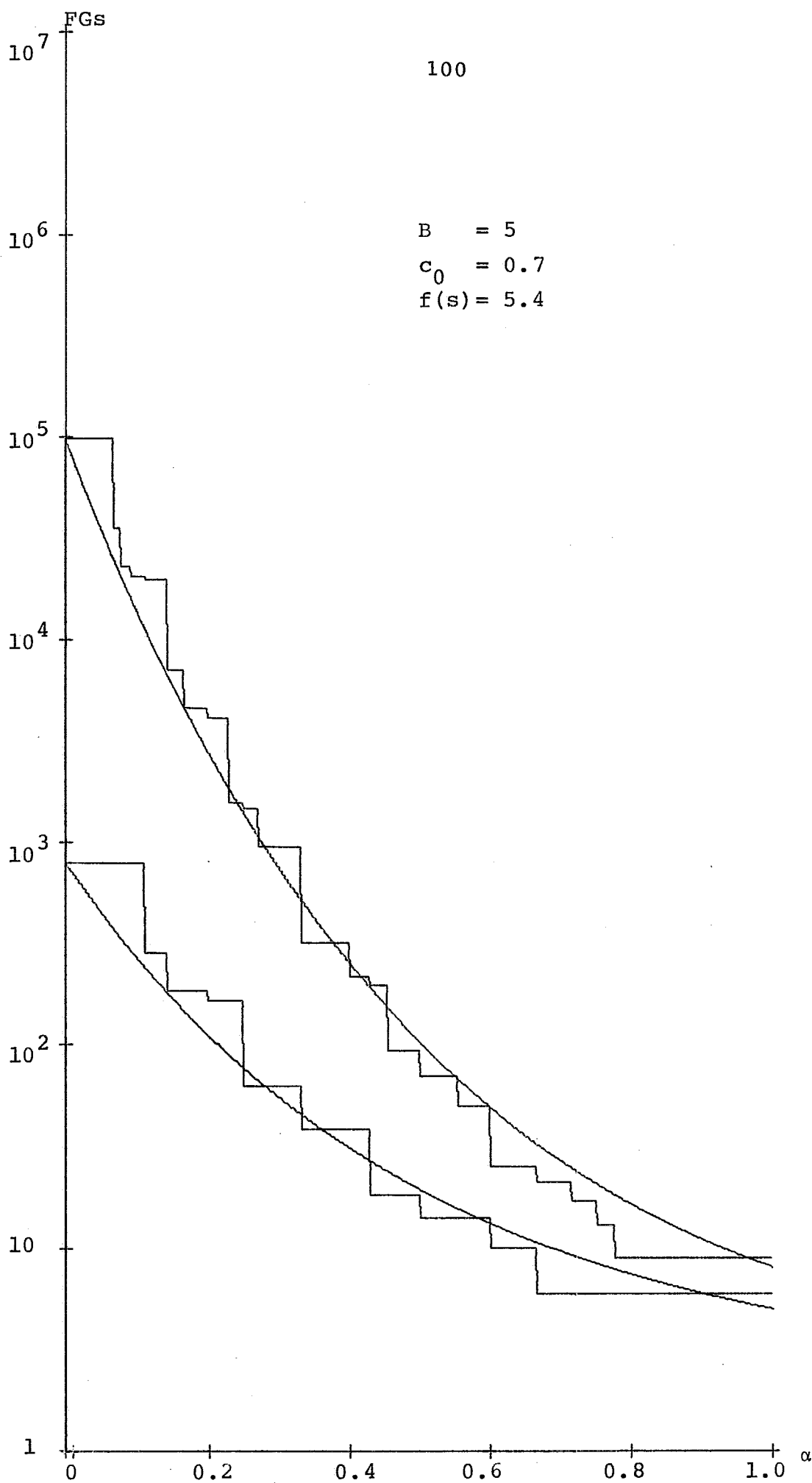






B = 5
c₀ = 0.6
f(s) = 5.2





FGs

101

10^7

10^6

10^5

10^4

10^3

10^2

10

B = 5

$c_0 = 0.9$

$f(s) = 6.0$

1

0

0.2

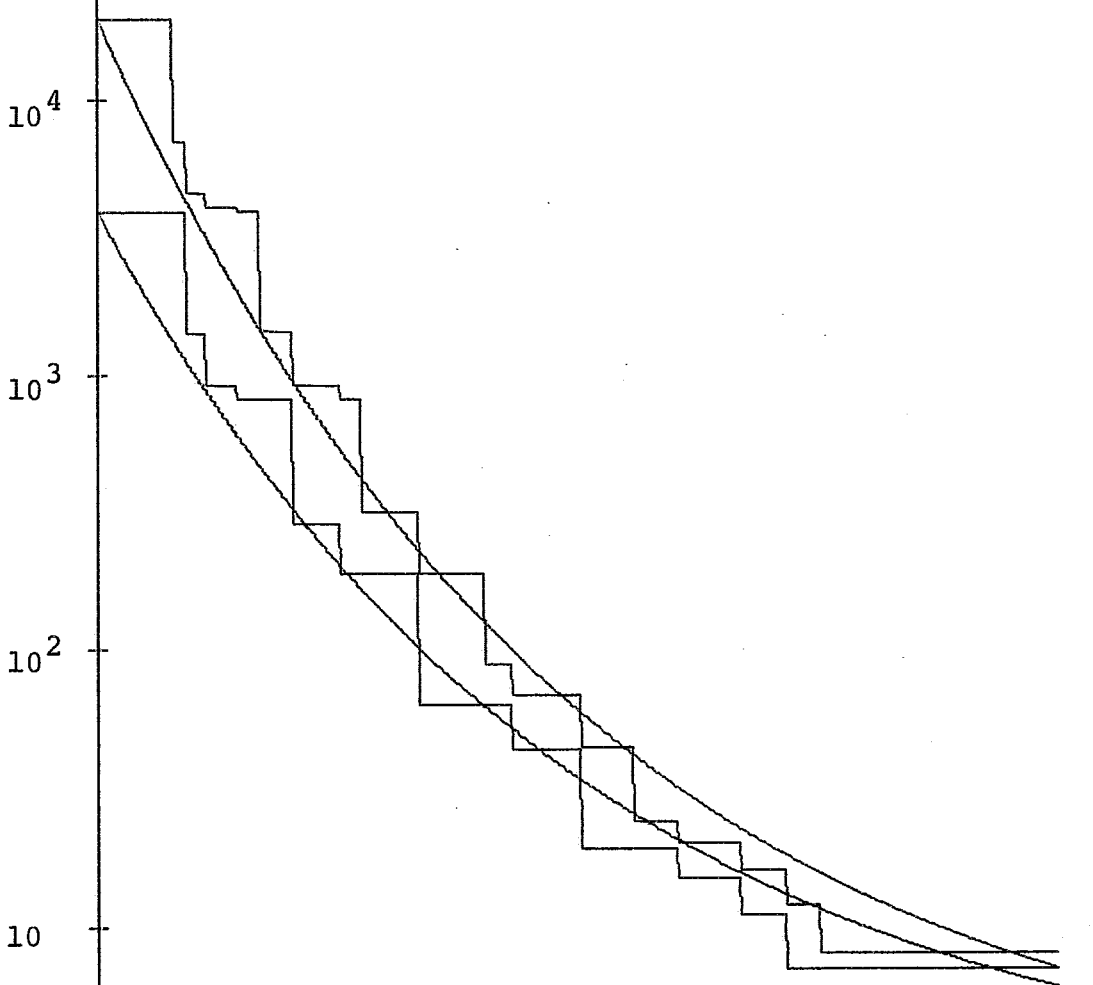
0.4

0.6

0.8

1.0

α



A P Ê N D I C E III

Foram feitas simulações, no B-6700 do NCE da UFRJ, de um algoritmo A^* , nas condições C1, para determinação do número de nós fechados, onde o custo de transição é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre c_0 e 1.

No primeiro grupo de experimentos, a profundidade da solução é conhecida, e os parâmetros são:

coeficiente de ramificação: $B = 3$

profundidade da solução: $k = 5$

limite inferior para os custos de transição: $c_0 = 0.4$.

α varia de 0.1 a 1.0, passo 0.1, e para cada α são feitos 10 experimentos.

No segundo grupo, o custo da solução ótima é conhecido, e os parâmetros são:

coeficiente de ramificação: $B = 3$

custo da solução ótima: $f(s) = 4.5$

limite inferior para os custos de transição: $c_0 = 0.7$

Também nesse caso, α varia de 0.1 a 1.0, passo 0.1, e para cada α são feitos 10 experimentos.

Os resultados estão apresentados a seguir.

$$B = 3$$

$$c_o = 0.4$$

$$k = 5$$

α	número de nōs fechados
0.1	43
	93
	118
	70
	351
	139
	176
	59
	76
	164
0.2	25
	74
	37
	67
	47
	54
	38
	59
	35
	49

$$B = 3$$

$$c_o = 0.4$$

$$k = 5$$

α	número de nós fechados
0.3	15
	34
	31
	30
	33
	25
	23
	37
	28
	23
0.4	12
	17
	19
	22
	25
	17
	22
	17
	21
	19

$$B = 3$$

$$c_o = 0.4$$

$$k = 5$$

α	número de nós fechados
0.5	9
	10
	13
	15
	15
	13
	9
	12
	14
	14
0.6	6
	10
	11
	10
	11
	10
	6
	10
	10
	9

$$B = 3$$

$$c_o = 0.7$$

$$f(s) = 4.5$$

α	número de nós fechados
0.1	8
	9
	8
	7
	8
	257
	9
	248
	10
	8
	0.2
7	
7	
7	
7	
7	
7	
7	
101	
107	
7	

$$B = 3$$

$$c_o = 0.7$$

$$f(s) = 4.5$$

α	número de nós fechados
0.3	7
	50
	7
	61
	52
	7
	7
	49
	6
	7
0.4	6
	6
	5
	34
	5
	33
	5
	32
	5
	6

$$B = 3$$

$$c_o = 0.7$$

$$f(s) = 4.5$$

α	número de nós fechados
0.5	5
	5
	5
	5
	5
	5
	5
	5
	18
	5
0.6	5
	5
	14
	13
	5
	15
	5
	5
	5
	5

$$B = 3$$

$$c_o = 0.7$$

$$f(s) = 4.5$$

α	número de n̄os fechados
0.7	5 5 5 7 5 9 9 5 9 5
0.8	5 5 6 6 7 5 5 5 5 5

$$B = 3$$

$$c_o = 0.7$$

$$f(s) = 4.5$$

α	número de nós fechados
0.9	5
	5
	5
	5
	5
	5
	5
	5
	5
	5
1.0	7
	5
	5
	5
	5
	5
	5
	6
	7
	7

B I B L I O G R A F I A

- [1] HART, P., N. Nilsson and B. Raphael, "A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths", IEEE Trans. Sys, Cybernetics, vol. SSC-4 n^o 2, pp. 100-107, Julho 1968.
- [2] NILSSON, N., "Problem Solving Methods in Artificial Intelligence", Mc Graw-Hill Inc., 1971,
- [3] ARAUJO, J., "Evaluating and accelerating Heuristic Search: A Proposal", notas mimeografadas, COPPE/UFRJ, Janeiro, 1974.
- [4] ARAUJO, J., "Admissibilidade e Otimalidade do A*", notas mimeografadas, COPPE/UFRJ, 1974.
- [5] POHL, I., "First Results on the Effect of Error in the Heuristic Search", in B. Meltzer and D. Michie (eds.), "Machine Intelligence 5", American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1970.
- [6] FEIGENBAUM, E. and J. Feldan, "Computers and Thought", Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1963.
- [7] BANERJI, R., "Theory of Problem Solving: An Approach to Artificial Intelligence", American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1969.

- [8] MELTZER, B. and D. Michie (eds.), "Machine Intelligence 4", American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1969.
- [9] MELTZER, B. and D. Michie (eds.), "Machine Intelligence 5", American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1970.
- [10] MELTZER, B. and D. Michie (eds.), "Machine Intelligence 6", American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1971.