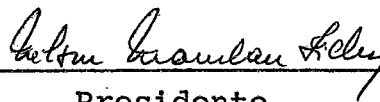


PROBLEMAS DE MULTICOMODIDADE EM REDES NÃO ORIENTADAS

Raul Rosenthal Ladeira de Matos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:



Presidente





RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
OUTUBRO DE 1974

À Valéria.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Devo manifestar muito mais do que um simples agradecimento ao Professor Nelson Maculan Filho, meu orientador, não só por sua colaboração na confecção deste trabalho como também em diversos outros setores.

Ao Professor Ronaldo Cesar Marinho Persiano, por suas valiosas sugestões.

A todos os professores e funcionários da COPPE.

A todos os Órgãos que me prestaram auxílio financeiro.

SUMÁRIO

O objetivo deste trabalho foi coletar diversos tipos de Problemas referentes a Multicomodidade em Redes Não Orientadas e colocá-los em uma única formulação que fosse o mais possível didática e justificar o porquê de seus processos de resolução, visto que todos os artigos referentes a esses tópicos são muito pouco didáticos e não apresentam justificativa nenhuma para os processos apresentados.

Dos Problemas apresentados, o mais importante é o de Síntese, no qual necessita-se encontrar as capacidades de uma rede a ser construída, de modo que satisfaça a requisitos de fluxo previamente estabelecidos e tenha um custo total de construção mínimo. A parte principal deste trabalho, onde entre toda sua originalidade, é referente à região viável deste tipo de Problema, pois conseguimos determinar uma região viável bastante limitada, o que em muito nos facilita a busca da solução ótima.

Outro Problema abordado é referente à Viabilidade de Fluxos, onde a quantidade de fluxo de cada uma das comodidades é conhecida a priori e a questão é sabermos se todas essas quantidades de fluxo podem ou não ser satisfeitas simultaneamente para uma rede dada. Em outras palavras, temos uma determinada rede e desejamos saber se podemos passar através dela determinadas quantidades de fluxo. Consideramos também Problemas de Somatória de Fluxos onde se tem como requisito determinadas quantidades de fluxo entre espe-



cíficos nós fontes e específicos nós receptores com mínimo custo total. A este tipo de problema podemos associar custo, associando a cada arco da rede um determinado custo de transporte.

Como último Problema abordado, temos o de Ampliação, onde já existe construída uma rede e, através de uma análise, sabe-se que a mesma não está atendendo aos requisitos de fluxo. A questão é conhecer de quanto deve ser aumentada a capacidade de cada arco da rede, de maneira que a rede ampliada satisfaça aqueles requisitos e tenha um custo total de ampliação mínimo.

Convém lembrar que este trabalho tem finalidade didática, daí a inclusão de determinados itens que funcionam como suporte aos Problemas referidos.

ABSTRACT

The objective of this work is to collect several kinds of Problems concerning Multicommodity in Non-Oriented Networks and put them in one unique formulation which is the most didactic possible and justify their resolution procedures, for all the publications about these topics are not didactic and do not present any justification.

The most important Problem presented is the Synthesis Problem, where we have to determine the capacities of a network to be constructed so that the previously established flow requirements are satisfied at minimum total construction cost. The main part of this work, where is all its originality, is the feasible area of this kind of Problem, for we determine a very restrictive feasible area, which help us to find the optimal solution.

Another presented Problem is the Feasibility of Flows, where the flow value at each of the commodities is prescribed, and the question is to know if all these flow values can be realized simultaneously or not in a given network. In other words, we have a network and we want to know if we can pass the prescribed flows through it. We also considered the Sum of Flows Problems where we have as a requisite a certain quantity of flow between specific source nodes with a minimum total cost. To this kind of problem, we can associate a cost, associating to every arc of the network a prescribed shipping cost.

As the last Problem presented, we have the Expansion

Problem, where we already have an existing network and, through analysis, we find that the network is not satisfying the flow requirements. The question is to determine how much the capacity of each arc in the network must be expanded, so that the expanded network can satisfy those requirements at minimum total expansion cost.

We remark that this work has a didactic finality, and this justifies the inclusion of some topics which have the only function to support the mentioned Problems.

INDICE

CAPÍTULO I - <u>DEFINIÇÃO DO PROBLEMA GERAL</u> .....	1
CAPÍTULO II - <u>VIABILIDADE E SOMATÓRIO DE FLUXOS</u>	
2.1 - Método do Simplex Revisado .....	8
2.1.1 - Introdução .....	8
2.1.2 - Inversão de Matrizes por Partição .....	9
2.1.3 - Forma Matricial do Simplex .....	10
2.1.4 - Método do Simplex Revisado .....	14
2.1.4.1 - Variação nos Dados do Simplex Revisado	17
2.2 - Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe .....	19
2.2.1 - Introdução .....	19
2.2.2 - Um Teorema sobre Combinações Convexas .....	20
2.2.3 - Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe ..	23
2.2.4 - Updating .....	30
2.3 - Viabilidade e Somatório de Fluxos .....	37
2.3.1 - Somatório de Fluxos .....	37
2.3.2 - Viabilidade de Fluxos .....	40
2.3.3 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Viabilidade de Fluxos .....	44
2.3.4 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Somatória de Fluxos, introduzindo-se Custos .....	61

CAPÍTULO III - SÍNTESE

3.1 - Definição do Problema .....	82
3.2 - Formulação do Problema .....	83
3.3 - Algoritmo Primal Aplicado a Problemas de Síntese ....	102
3.3.1 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Aplicação do Algoritmo Primal .....	112
3.4 - Algoritmo Dual Aplicado a Problemas de Síntese .....	138
3.4.1 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Aplicação do Algoritmo Dual .....	142
3.5 - Ampliação de Rede já Existente a Mínimo Custo .....	158
BIBLIOGRAFIA .....	162

CAPÍTULO 1DEFINIÇÃO DO PROBLEMA GERAL

Quando se estuda os clássicos problemas de transporte numa rede  $[N, A, Y]$ , encontrar o fluxo máximo que vai da fonte  $N_S$  ao receptor  $N_{S'}$ , sem violar as capacidades das restrições  $x_{ij} \leq y_{ij}$  (para todo  $i, j$ ), onde  $x_{ij}$  é a quantidade de fluxo que atravessa o arco  $A_{ij}$  e  $y_{ij}$  é a capacidade do arco  $A_{ij}$ , sua formulação matemática assume o transporte de somente uma única commodity.

Resumindo-se, um problema clássico de transporte é apresentado da seguinte maneira:

Sejam  $N_S$  e  $N_{S'}$ , dois nós distintos de  $N$  onde  $N_S$  é a fonte e  $N_{S'}$ , o receptor. Um fluxo estático de valor  $f(S, S')$  de  $N_S$  para  $N_{S'}$ , em  $[N, A, Y]$ , (uma rede orientada), é uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz às seguintes equações lineares e inequações:

$$\sum_{w \in A(x)} f(x, w) - \sum_{w \in B(x)} f(w, x) = \begin{cases} f(S, S') & , \quad x=S \\ 0 & , \quad x \neq S, S' \\ -f(S, S') & , \quad x=S' \end{cases}$$

$$0 \leq f(x, w) \leq y(x, w) \quad , \quad \forall (x, w) \in A .$$

No caso de existirem diversas fontes e vários recep

tores e se o fluxo de qualquer fonte puder ser enviado a qualquer receptor então, este problema pode ser trivialmente transformado em um problema de uma única fonte e único receptor através da criação de uma super fonte a qual estaria ligada a todas as fontes originárias através de arcos com capacidades de transporte iguais a infinito e também através da criação de um super receptor o qual também estaria ligado a todos receptores originários através de arcos com capacidade infinita. Portanto, um problema deste tipo é assim apresentado :

Para maiores detalhes, suponhamos que os  $N$  nós de uma rede  $[N, A, Y]$  são divididos em três conjuntos:

$S$  = conjunto dos nós fontes

$S'$  = conjunto dos nós receptores

$R$  = conjunto dos nós intermediários ;

e consideremos o problema de encontrar o máximo fluxo de  $S$  para  $S'$ .

O fluxo de  $S$  para  $S'$  pode ser imaginado como uma função de valor real  $f$  definida em  $A$  que satisfaz :

$$f(x, N) - f(N, x) = 0 \quad , \quad \forall x \in R \quad ,$$

$$0 \leq f(x, w) \leq b(x, w) \quad , \quad \forall (x, w) \in A \quad ,$$

o valor do fluxo torna-se

$$f(S, S') = f(S, N) - f(N, S)$$

Transformando-se  $[N, A, Y]$  na rede  $[N^*, A^*, Y^*]$  através do acréscimo de dois nós  $u$  e  $v$  e de todos os arcos  $(u, S)$  ,  $(S', v)$  e alterando a função de capacidade  $b$  definida em  $A$  para  $b^*$  definida em  $A^*$  por

$$\begin{aligned}
 b^*(u,x) &= \infty & , x \in S , \\
 b^*(x,v) &= \infty & , x \in S' , \\
 b^*(x,w) &= b(x,w) & , (x,w) \in A .
 \end{aligned}$$

Então a limitação  $f$  de um fluxo  $f^*$  de  $u$  para  $v$  em  $[N^*,A^*,Y^*]$  é um fluxo de  $S$  para  $S'$  em  $[N,A,Y]$ . Vice-versa, um fluxo de  $S$  para  $S'$  em  $[N,A,Y]$  pode ser transformado em um fluxo  $f^*$  de  $u$  para  $v$  em  $[N^*,A^*,Y^*]$ , definindo-se

$$\begin{aligned}
 f^*(u,x) &= f(x,N) - f(N,x) & , x \in S , \\
 f^*(x,v) &= f(N,x) - f(x,N) & , x \in S' , \\
 f^*(x,w) &= f(x,w) & , \text{em outros casos} .
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente o problema de fluxo máximo de  $S$  para  $S'$  em  $[N,A,Y]$  é equivalente ao problema de uma única fonte e único receptor na rede transformada.

Se, em cima deste problema de transporte apresentando fizermos certas restrições tais como a obrigatoriedade de que o fluxo de certas fontes sejam enviados a determinados receptores ou então quando o problema envolve  $n$  produtos diferentes para serem enviados através de uma rede de transportes de capacidade limitada e a quantidade de oferta e demanda difere significativamente de produto para produto, então o problema torna-se mais complexo e não mais é possível resolvê-lo como um problema comum de transporte ou mesmo como uma aproximação. É que agora temos um problema de multicomodidade de fluxos.

Sejam as fontes  $N_S$  e os receptores  $N_{S'}$ , ( $S=1, \dots, \dots, q$ ;  $S'=1', \dots, \dots, q'$ ), onde o fluxo  $S$  é de  $N_S$  para  $N_{S'}$ .



Seja  $x_{ij}^S$  o fluxo  $S$  no arco  $A_{ij}$  e  $f(S,S')$  o valor do fluxo  $S$  de  $N_S$  para  $N_{S'}$ . Um dos problemas em multicomodidade de fluxos é encontrar

$$\max \sum_{S=1}^q f(S,S')$$

sujeito a :

$$\sum_i x_{ij}^S - \sum_k x_{jk}^S = \begin{cases} -f(S,S') & \text{se } j=S, \\ 0 & \text{se } j \neq S, S', \\ f(S,S') & \text{se } j=S', \end{cases}$$

$$\sum_{S=1}^q |x_{ij}^S| \leq y_{ij} \quad , \quad (\forall i,j) .$$

Em casos muito especiais, como quando da existência de um único tipo de fluxo em toda uma rede, podemos para arcos com fluxos em direções opostas, efetuar os respectivos cancelamentos. Esta observação é de grande importância para ressaltar o fato de que arcos com fluxos de diferentes comodidades não podem se cancelar entre si, no caso de terem direções opostas. Esta é uma das maiores dificuldades de problemas de multicomodidade de fluxos.

Outro tipo de problema de multicomodidade de fluxos é o chamado problema de viabilidade que se resume em dados valores inteiros não negativos de requisitos de fluxo  $r(S,S')$ , ( $S=1, \dots, \dots, q$ ;  $S' = 1', \dots, \dots, q'$ ), pode existir fluxos simultâneos com

$$f(S,S') \geq r(S,S')$$

$$\sum_i x_{ij}^s - \sum_k x_{jk}^s = \begin{cases} -f(S,S') & \text{se } j=S, \\ 0 & \text{se } j \neq S, S', \\ f(S,S') & \text{se } j=S', \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^q |x_{ij}^s| \leq y_{ij}, \quad (\forall i,j).$$

Existem diversos modelos de multicomodidade em redes, dois dos quais simplesmente já apresentados, mas basicamente existem dois tipos de problemas, o problema de análise e o de síntese que serão apresentados a seguir.

Seja  $f_{pq}$  o valor do fluxo da fonte  $N_p$  ao receptor  $N_q$ , e  $x_{ij}^{pq}$  o fluxo no arco  $A_{ij}$  com fonte  $N_p$  e receptor  $N_q$ . A conservação dos fluxos requer

$$\sum_i x_{ij}^{pq} - \sum_k x_{jk}^{pq} = \begin{cases} -f_{pq} & \text{se } j=p, \\ 0 & \text{se } j \neq p,q, \\ f_{pq} & \text{se } j=q. \end{cases} \quad (1.1)$$

Se  $y_{ij}$  é a capacidade do arco  $A_{ij}$ , então

$$\sum_{p,q} |x_{ij}^{pq}| \leq y_{ij}, \quad (\forall i,j). \quad (1.2)$$

Seja  $r_{p,q}(t)$  o fluxo requerido de  $N_p$  para  $N_q$  no tempo  $t$ . O fato de que a rede é capaz de transportar todos os fluxos a qualquer tempo é indicado por

$$f_{p,q}(t) \geq r_{p,q}(t) \quad , (\forall p,q; \forall t=1,\dots,T) \quad (1.3)$$

Evidentemente, o fato da rede  $[N,A,Y]$  atender aos requisitos de fluxo para todos os períodos acarretará uma transformação nas equações (1.1), (1.2) e (1.3) transformando-as respectivamente em (1.4), (1.5) e (1.6) .

$$\sum_i x_{ij}^{pq}(t) - \sum_k x_{jk}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j=p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j=q \end{cases} \left. \begin{array}{l} (\forall j,p,q \in N), \\ (\forall t=1,\dots,T). \end{array} \right\} \dots\dots\dots(1.4)$$

$$\sum_{p,q} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq y_{ij} \quad , (\forall i,j \in A) \quad , (\forall t=1,\dots,T) \quad (1.5)$$

$$f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t) \quad , (\forall p,q \in N) \quad , (\forall t=1,\dots,T) \quad (1.6)$$

No caso do Problema de Análise,  $y_{ij}$  e  $r_{pq}(t)$  são dados e o problema é encontrar  $x_{ij}^{pq}(t)$  tal que (1.4), (1.5) e (1.6) sejam satisfeitas. Algumas vezes custos são associados aos fluxos nos arcos, então passamos a ter um problema de minimização do custo total sujeito a (1.4), (1.5) e (1.6). Portanto, no problema de análise, já existe construída uma rede e a questão é verificar se determinados requisitos de fluxo podem ser atendidos.

Para o Problema de Síntese,  $r_{pq}(t)$  é dado e o problema é encontrar  $y_{ij}$  tal que (1.4), (1.5) e (1.6) sejam satisfeitas com o custo total  $\sum c_{ij} y_{ij}$  mínimo. Neste caso os custos são associados às capacidades dos arcos que serão construídos, ou seja,  $c_{ij}$  é o custo de construção de um arco de capacidade unitária de  $N_i$  para  $N_j$ . Consequentemente, no problema de síntese, necessita-se encontrar as capacidades de uma rede a ser construída, de modo que satisfaça a requisitos de fluxo previamente estabelecidos e tenha um custo total de construção mínimo.

O grau de dificuldade dos problemas de análise e síntese depende de como o  $r_{pq}(t)$  é dado.

## CAPÍTULO 2

### VIABILIDADE E SOMATÓRIO DE FLUXOS

Antes de passarmos a estudar os problemas de Viabilidade e Somatório de Fluxos, apresentaremos dois tópicos que serão necessários para a perfeita compreensão dos referidos problemas. São eles: Método do Simplex Revisado e o Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe.

#### 2.1 - Método do Simplex Revisado

##### 2.1.1 - Introdução

A forma de resolução do método simplex é uma maneira muito conveniente para fins didáticos, mas pode ser muito simplificada.

O que torna possível esta simplificação é o fato de muitas informações calculadas em cada quadro do simplex serem perfeitamente dispensáveis. Cada quadro, conforme será mostrado, pode ser determinado a partir do quadro inicial e de algumas informações do quadro anterior. Este fato tem origem no Método do Simplex Revisado. Para isso, necessitamos conhecer um método de inversão de matrizes, inversão por partição e também a forma matricial do simplex.

## 2.1.2 - Inversão de Matrizes por Partição

Seja  $M$  uma matriz ( $n \times n$ ) não singular, vamos parti-  
cioná-la da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \text{ onde } \alpha \text{ é uma matriz } (m \times m), \beta \text{ é } (m \times s), \\ \gamma \text{ é } (s \times m) \text{ e } \delta \text{ é } (s \times s); m+s=n$$

Como  $M$  é não singular,  $M^{-1}$  existe e pode ser es-  
crita

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ onde } A(m \times m), B(m \times s), C(s \times m) \text{ e } D(s \times s).$$

$$\text{Por definição, } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

onde  $I_m$  e  $I_s$  são matrizes identidade de ordem  $m$  e  $s$ .

Ficamos então com o sistema :

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot C = I_m$$

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot D = 0$$

$$\gamma \cdot A + \delta \cdot C = 0$$

$$\gamma \cdot B + \delta \cdot D = I_s$$

Resolvendo-se o sistema, encontramos:

$$A = (\alpha - \beta \delta^{-1} \gamma)^{-1}$$

$$B = -A \beta \delta^{-1}$$

$$C = -\delta^{-1} \gamma A$$

$$D = \delta^{-1} - \delta^{-1} \gamma B$$

Existindo  $\delta^{-1}$ , o sistema é possível.

Um caso particular importante e que nos interessará é o da matriz  $M$  que pode ser particionada como se segue :

$$M = \begin{vmatrix} I & Q \\ O & R \end{vmatrix} \quad \text{de onde tiramos :}$$

$$A = (I - QR^{-1}O)^{-1} = I$$

$$B = -IQR^{-1} = QR^{-1}$$

$$C = -R^{-1}OA = O$$

$$D = R^{-1} - R^{-1}OB = R^{-1}$$

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} I & -QR^{-1} \\ O & R^{-1} \end{vmatrix}$$

### 2.1.3 - Forma Matricial do Simplex

Considerando-se um PPL com as variáveis de folga já incluídas, podemos representá-lo matricialmente da seguinte forma:

$$\text{maximizar } Z = \underline{c} \underline{x} - a_{00}, \text{ sujeito a: } A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \quad (2.1)$$

onde  $\underline{c}$  é o vetor linha  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\underline{x}$  é um vetor coluna  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $\underline{b}$  é um vetor coluna  $[b_1, b_2, \dots, b_m]$  e  $A$  é uma matriz  $(m \times n)$ ,  $A = [a_{ij}]$ .

Podemos escrever (2.1) da seguinte forma :

$$\begin{array}{l} \min Z \\ \text{sujeito a :} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} a_{00} & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} -1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} z \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right|$$

que podemos resumir em :

$$\begin{array}{l} \min Z \\ \text{sujeito a :} \end{array} \left| \begin{array}{c|c} a_{00} & \tilde{c} \\ \hline \tilde{b} & A \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} -1 \\ \tilde{x} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} z \\ \tilde{0} \end{array} \right| \quad (2.2)$$

Seja agora a matriz :

$$A^* = \left| \begin{array}{c|c} a_{00} & \tilde{c} \\ \hline \tilde{b} & A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a_{00} & a_{0j} \\ a_{i0} & a_{ij} \end{array} \right| \quad (2.3)$$

ou seja,  $c_j$  passa a ser escrito como  $a_{0j}$ ,  $b_i$  passa a  $a_{i0}$  e o elemento nulo da primeira linha e primeira coluna passa a ser escrito  $a_{00}$ . A matriz  $A^*$  é de  $(m+1)$  linhas e  $(n+1)$  colunas.

A operação de pivotagem é equivalente a multiplicar (2.2) à esquerda pela matriz



$$E = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots\dots\dots & -(a_{os} / a_{rs}) & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots\dots & -(a_{ls} / a_{rs}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & (1 / a_{rs}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & -(a_{ms} / a_{rs}) & \dots & 1 \end{array} \right| , \begin{array}{l} r \neq 0 \text{ e} \\ s \neq 0 \end{array}$$

Se particionarmos as colunas de  $A$  em colunas básicas (B) e não básicas (N) , teremos de (2.2) :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{oo} & \underline{c}_b & \underline{c}_n \\ \underline{b} & B & N \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} -1 \\ \underline{x}_b \\ \underline{x}_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} z \\ 0 \end{array} \right| \quad (2.4)$$

onde  $\underline{c}_b$  é um vetor linha de  $m$  componentes,  $\underline{c}_n$  é um vetor linha de  $(n-m)$  componentes e são correspondentes aos custos na função objetivo.  $\underline{x}_b$  é um vetor coluna de  $m$  componentes,  $\underline{x}_n$  é um vetor coluna de  $(n-m)$  componentes e são correspondentes a variáveis básicas e não básicas.

Fazendo-se  $\underline{x}_b$  como variáveis básicas de partida , e como a ordem das colunas de  $B$  e  $N$  não é importante desde que em  $\underline{x}_b$  e em  $\underline{x}_n$  as variáveis estejam na mesma ordem que as colunas correspondentes em  $B$  e em  $N$  e que seus coeficientes correspondentes em  $\underline{c}_b$  e em  $\underline{c}_n$  estejam nessa mesma ordem, o que estamos real

mente querendo é uma matriz identidade no lugar de  $B$ . O que é equivalente a multiplicarmos (2.4) à esquerda por

$$\begin{vmatrix} 1 & -\underline{c}_b B^{-1} \\ \underline{0} & B^{-1} \end{vmatrix}$$

denotando-se  $\underline{c}_b B^{-1} = \underline{\Pi}$ , temos :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\underline{c}_b B^{-1} \\ \underline{0} & B^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \underline{c}_b & \underline{c}_n \\ \underline{b} & B & N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ \underline{x}_b \\ \underline{x}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\underline{c}_b B^{-1} \\ \underline{0} & B^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Z \\ \underline{0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \underline{c}_b B^{-1} \underline{b} & 0 & \underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1} N \\ B^{-1} \underline{b} & I & B^{-1} N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ \underline{x}_b \\ \underline{x}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z \\ \underline{0} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

o que é equivalente a :

$$Z = \underline{c}_b B^{-1} \underline{b} + (\underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1} N) \underline{x}_n$$

$$\underline{x}_b = B^{-1} \underline{b} - B^{-1} N \underline{x}_n$$

Como  $\underline{x}_n = 0$ , temos :

$$Z = \underline{c}_b B^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{x}_b = B^{-1} \underline{b}$$

(2.6)

Para mudarmos de base, observamos os elementos da matriz  $(\underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1}N)$ . Seja  $\underline{a}_j$  a coluna  $j$  da matriz  $N$  e  $\underline{z}_j = (\underline{c}_b B^{-1})\underline{a}_j$ . Os elementos  $\bar{c}_j$  da matriz  $(\underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1}N)$  serão dados por  $\bar{c}_j = \underline{c}_j - \underline{z}_j$ , onde  $\bar{c}_j$  é o custo relativo.

A base  $B$  é viável se  $B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}$ , e é ótima se  $\bar{c}_j \leq 0$  para todo  $j$ . Se não, escolhemos o maior  $\bar{c}_j$  positivo. A variável  $j$  correspondente entrará na base. Para escolhermos a variável que sairá, calculamos os quocientes  $b_i / a_{ij}$ , onde  $b_i$  é o elemento  $i$  de  $\underline{b}$  e  $a_{ij}$  é o elemento  $i$  da coluna  $\underline{a}_j$ . A menor razão corresponderá à variável que sairá da base.

O vetor linha  $\underline{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$  é o peso a ser multiplicado por cada linha e ser subtraído da linha custo para eliminar os coeficientes de custo das variáveis básicas.

#### 2.1.4 - Método do Simplex Revisado

Todo este item 2.1.4 será baseado no seguinte problema:

$$\text{maximizar } Z = \underline{c} \underline{x} \quad , \text{ sujeito a: } A\underline{x} = \underline{b} \quad , \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

No método do simplex, todos os números do quadro mudam de uma iteração para outra. Durante o cálculo, uma vez obtido um quadro, podemos esquecer todas as informações anteriores, pois temos em cada quadro as informações necessárias para construir o se

guinte.

Suponhamos que mantemos o quadro inicial e queremos gerar um determinado quadro. Que informações precisamos? Digamos que estamos interessados em todos os números do 29º quadro. Precisamos de  $B^{-1}$  associada ao 29º quadro e dos nomes das variáveis básicas atuais. Todos os outros números do quadro podem ser gerados a partir do quadro inicial e da matriz  $B^{-1}$  do 29º quadro, como veremos a seguir.

Observe-se que  $\bar{c}_j = c_j - \Pi a_j$ , ou seja, o  $\bar{c}_j$  atual é obtido multiplicando-se  $c_j$  do quadro inicial pelo  $B^{-1}$  atual. Convém lembrar que conhecendo-se as variáveis básicas atuais, conhece-se  $c_b$ .  $\bar{b}$  (termos independentes do 29º quadro) é dado por  $B^{-1} \cdot b$ , onde  $b$  é do quadro inicial. Qualquer coluna  $\bar{a}_j$  da matriz  $A$  é dada por  $B^{-1} a_j$ , onde  $a_j$  é do quadro inicial. Também o coeficiente  $\bar{c}_j$ , da função objetivo, é dado por  $\bar{c}_j = c_j - \Pi a_j$ , onde  $c_j$  e  $a_j$  são do quadro inicial. Portanto, se tivermos  $B^{-1}$  e as variáveis básicas, podemos gerar todo o quadro.

Suponhamos agora que temos o quadro inicial e  $B^{-1}$  do 29º quadro. Que números adicionais do 29º quadro devem ser gerados para que possamos obter  $B^{-1}$  do 30º quadro? Os números adicionais são os da coluna  $\bar{a}_j$  não básica do 29º quadro que entrará na base e  $\bar{b}$  do 29º quadro. O vetor  $\bar{a}_j$  é candidato a entrar na base se  $\bar{c}_j > 0$ . Escolhemos um  $\bar{c}_s > 0$  e calculamos  $\bar{a}_s = B^{-1} \cdot a_s$  e  $\bar{b} = B^{-1} \cdot b$ . Estes determinarão  $B^{-1}$  do 30º quadro.

O Método do Simplex Revisado consiste em conservar o quadro inicial e em cada iteração gerar apenas os dados necessários para tomar decisões, ou seja, o vetor linha  $\bar{c}_j$ , a coluna da variável que entrará na base e o vetor coluna  $\bar{b}$ . Estes dados, juntamente com a inversa atual  $B^{-1}$ , determinarão  $B^{-1}$  do quadro seguinte.

Quando temos  $B^{-1}$ ,  $\bar{a}_j$  e  $\bar{b}$  (estes formarão um quadro de tamanho  $(m+1) \times (m+2)$ ), podemos usar o teste da razão e determinar o pivô para, por pivotagem, acharmos  $B^{-1}$  do próximo quadro. Então, a cada iteração, calculamos no máximo  $n-m$  custos relativos  $\bar{c}_j$ , a coluna  $\bar{b}$  e o vetor  $\bar{a}_s$ . Como o quadro inicial contém uma matriz identidade  $(m \times m)$  com todos os seus coeficientes na função objetivo nulos, os números que aparecem no lugar dessa matriz identidade em um outro quadro formarão a matriz  $B^{-1}$  desse quadro, e os que aparecem no lugar dos coeficientes da função objetivo formarão  $\bar{\Pi} = \bar{c}_b B^{-1}$  desse quadro. Conhecendo-se  $\bar{\Pi}$  e  $B^{-1}$  de um quadro, geramos os  $\bar{c}_j$  desse quadro por  $\bar{c}_j = c_j - \bar{\Pi} \bar{a}_j$ . Se um coeficiente  $\bar{c}_j$  for não positivo, não estaremos interessados nos componentes de  $\bar{a}_j$  correspondentes. Escolhendo-se qualquer  $\bar{c}_j > 0$ , podemos gerar o vetor associado a  $\bar{c}_j$  para entrar na base. Observe-se que

$$\begin{vmatrix} 1 & -\bar{\Pi} \\ \sim & B^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_j \\ \sim \\ \bar{a}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_j - \bar{\Pi} \bar{a}_j \\ \sim \\ \bar{a}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{c}_j \\ \sim \\ \bar{a}_j \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & -\bar{\Pi} \\ \sim & B^{-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \sim \\ \bar{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\bar{\Pi} \bar{b} \\ \sim \\ B^{-1} \bar{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\bar{z} \\ \sim \\ \bar{b} \end{vmatrix}$$

No quadro inicial,  $B$  é igual à sua inversa e  $\Pi$  é nulo, visto que  $\Pi = \underline{c}_b B^{-1}$  e  $\underline{c}_b = \underline{0}$ . Portanto, podemos acrescentar uma coluna  $[1, 0, \dots, 0]$  à matriz  $B$  e obtemos :

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & I \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & -\Pi \\ \underline{0} & B^{-1} \end{array} \right|$$

ou seja, o quadro inicial pode ser tratado como qualquer outro.

O Método do Simplex Revisado é muito útil, especialmente para processamento eletrônico, já que efetua menos operações que o simplex comum. Note-se que no Método do Simplex Revisado nós não precisamos calcular todos os  $\bar{c}_j$ .

Como exemplo para um problema resolvido por este método, citamos [6].

#### 2.1.4.1. - Variação nos Dados do Simplex Revisado

Sabendo-se da possibilidade de em alguns problemas de programação linear os dados não serem exatos, torna-se muito importante saber como estes dados irão afetar a solução. Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\min Z = \underline{c} \underline{x} = \underline{c}_n \underline{x}_n + \underline{c}_b \underline{x}_b$$

sujeito a :

$$B \underline{x}_b + N \underline{x}_n = \underline{b} \quad , \quad (2.6.1)$$

$$\underline{x}_b \geq \underline{0} \quad , \quad \underline{x}_n \geq \underline{0} \quad .$$

Considerando-se  $\underline{x}_b$  como as variáveis básicas, podemos transformar (2.6.1) no seguinte problema de programação linear equivalente :

$$\min Z = \underline{c}_b B^{-1} \underline{b} + (\underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1} N) \underline{x}_n$$

sujeito a:

$$\underline{x}_b + B^{-1} N \underline{x}_n = B^{-1} \underline{b} \quad , \quad (2.6.2)$$

$$\underline{x}_b \geq \underline{0} \quad , \quad \underline{x}_n \geq \underline{0} \quad .$$

Se  $\underline{x}_b$  é uma solução ótima, implica em :

$$i) \underline{x}_b = B^{-1} \underline{b} \geq \underline{0} \quad , \quad \text{ou seja, é primal viável}$$

$$ii) \underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1} N \geq \underline{0} \quad , \quad \text{ou seja, é dual viável} \quad .$$

Deve-se notar que a viabilidade do primal não depende do vetor custo  $\underline{c}$  , e que a viabilidade do dual não depende do vetor  $\underline{b}$  .

Vamos agora considerar os seguintes tipos de variações dos dados:

a) O vetor  $\underline{b}$  é alterado para  $\underline{b} + \Delta \underline{b}$ . Como a condição de viabilidade do dual não depende de  $\underline{b}$ , a solução original  $\underline{x}_b$  permanece dual viável. A solução original  $\underline{x}_b$  será também primal viável se :

$$B^{-1} \underline{b} + B^{-1} \Delta \underline{b} \geq \underline{0} \quad (2.3.6)$$

Portanto, durante os cálculos (iterações), devemos pegar a base original  $B$  a qual é dual viável e usar o Método Dual Simplex

para continuarmos os cálculos.

b) O vetor custo  $\underline{c}$  é alterado para  $\underline{c} + \Delta (\underline{c}_b, \underline{c}_n)$ . A solução original  $\underline{x}_b$  permanece primal viável. Também será dual viável se:

$$(\underline{c}_n - \underline{c}_b B^{-1}N) + (\Delta \underline{c}_n - \Delta \underline{c}_b B^{-1}N) \geq \underline{0} \quad (2.6.4)$$

Se  $\Delta \underline{c}_b = 0$ , a condição (2.6.4) reduz-se a :

$$c_j - \sum a_{ij} \geq - \Delta c_j \quad .$$

c) Este terceiro tipo de variação de dados é o que mais nos interessará.

Se um novo vetor coluna  $\underline{a}_{n+1}$  com custo  $c_{n+1}$  é acrescentado, então a solução ótima original  $\underline{x}_b$  continuará a ser ótima se :

$$c_{n+1} - \sum a_{in+1} \geq 0 \quad .$$

No Método do Simplex Revisado, isto é exatamente a operação de avaliação para determinarmos se um vetor coluna não binário deverá ser introduzido na base.

## 2.2 - Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe

### 2.2.1 - Introdução

O Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe [2] foi o que deu início a um extensivo trabalho em programação matemática de grande porte. Este procedimento se torna mais eficiente quando aplicado a problemas lineares cujos coeficientes das matrizes têm uma estrutura angular, ou seja, um ou mais blocos indepen-



dentes são ligados por equações de acoplamentos. Este processo opera através da formação de um programa principal com apenas umas poucas linhas a mais do que as equações de acoplamento do problema original, mas com muito mais colunas. Este programa é resolvido sem tabularmos todas estas colunas através da geração delas quando o método simplex as necessita; a técnica é denominada "geração de colunas". O resultado do algoritmo envolve iterações entre o conjunto de sub-problemas independentes cujas funções objetivo contêm parâmetros variáveis e o problema principal. Os sub-problemas recebem um conjunto de parâmetros do programa principal. Eles enviam suas soluções ao programa principal, o qual as combina com as soluções prévias de uma maneira ótima e computa novos preços. Estas são novamente enviadas aos sub-programas e as iterações prosseguem até serem aprovadas num teste de otimalidade.

### 2.2.2 - Um Teorema sobre Combinações Convexas

O desenvolvimento do Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe está apoiado principalmente em duas noções. A primeira é a "geração de colunas" e a segunda é um teorema o qual afirma que um ponto pertence a um poliedro convexo fechado e limitado se e somente se puder ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos do poliedro. Esta prova requer os seguintes resultados acerca de conjuntos convexos, cujas provas podem ser encontradas em [14]:

1. Seja  $X$  um conjunto convexo e  $y$  um elemento não pertencente a  $X$ . Então existe um hiperplano o qual separa  $y$  e  $X$ .

2. Se  $X$  é um conjunto convexo compacto, então qualquer hiperplano suporte (é um hiperplano tal que todo o conjunto  $X$  esteja em um de seus lados e pelo menos um ponto de  $X$  pertence ao hiperplano) de  $X$  contém um ponto extremo de  $X$ .

O teorema que nos interessa é o seguinte:

TEOREMA 1 :

Seja  $X$  um conjunto compacto convexo em  $\mathbb{R}^n$ ;  $E(X)$  o conjunto de seus pontos extremos e  $C[E(X)]$  a envoltória convexa de  $E(X)$ . Então  $C[E(X)] = E(X)$ .

Prova:

a) Para mostrarmos que  $X \supseteq C[E(X)]$ , escreveremos qualquer elemento  $\underline{y}$ , de  $C[E(X)]$  como

$$\underline{y} = \sum_i \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad x^i \in E(X) \quad (2.7)$$

Portanto, desde que  $x^i \in X$  e  $X$  é convexo,  $\underline{y} \in X$ .

b) Para mostrarmos que  $C[E(X)] \supseteq X$ , façamos  $\underline{x}^* \in X$ , mas  $\underline{x}^* \notin C[E(X)]$ . Então  $\underline{x}^*$  pode ser separado de  $C[E(X)]$  por um hiperplano, isto é, existe  $(\underline{c}, \alpha)$  tal que

$$\underline{c}' \underline{x}^* = \alpha \quad (2.8)$$

$$\underline{c}' \underline{y} < \alpha, \quad \forall \underline{y} \in C[E(X)] \quad (2.9)$$

Façamos  $\alpha^0 = \max \{ \underline{c}'\underline{x} / \underline{x} \in X \}$ . O número  $\alpha^0$  existe, uma vez que  $X$  é compacto. Então  $(\underline{c}, \alpha^0)$  define um hiperplano suporte de  $X$ , visto que

$$\underline{c}'\underline{x} \leq \alpha^0, \quad \forall \underline{x} \in X \quad (2.10)$$

Como este deve conter um ponto extremo de  $X$ ,  $x^i$ , então

$$\underline{c}'x^i = \alpha^0 \quad (2.11)$$

Mas isto contradiz o fato de que todos os pontos de  $C[E(X)]$  (desse modo todos os pontos extremos de  $X$ ) satisfazem (2.9), desde que  $\alpha^0 \geq \alpha$ .

O TEOREMA 1 pode ser reescrito numa forma mais usável para os próximos desenvolvimentos, usando-se (2.7) e especialmente o caso onde  $X$  tem um número finito de pontos extremos.

#### TEOREMA 2 :

Seja  $X = \{ \underline{x} / A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \}$  não vazio e limitado, e seja  $x^i (i=1, 2, \dots, r)$  seus pontos extremos. Então, qualquer elemento  $\underline{x} \in X$  pode ser assim escrito

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \quad \dots (2.10.1)$$

A extensão deste caso para quando  $X$  é não limita-

do é como se segue.

TEOREMA 3 :

Seja  $X = \{\underline{x}/A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}\}$  não vazio. Então, um ponto  $\underline{x} \in X$  se e somente se ele puder ser escrito como combinação convexa dos pontos extremos de  $X$  mais uma combinação linear não negativa dos raios extremos (soluções homogêneas) de  $X$ , isto é,

$$\underline{x} = \sum_i \lambda_i x^i$$

onde

$$\sum_i \lambda_i \delta_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

e

$$\delta_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{dependendo de } x^i \text{ ser um } \begin{cases} \text{ponto extremo} \\ \text{raio extremo} \end{cases} \text{ de } X.$$

### 2.2.3 - Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe

Em cálculo de matrizes é comum particionarmos uma matriz grande em diversos blocos e então efetuarmos alguns cálculos em cada um dos blocos. Este enfoque é especialmente vantajoso se algumas das submatrizes tiverem uma estrutura especial, exemplificando, identidade ou zero. Isto também é verdade em programação linear quando a matriz  $A$  tem uma estrutura especial. Deve-se enfatizar o fato de que o Princípio da Decomposição, que será descrito a seguir, possa ser usado para qualquer matriz  $A$ , mas o mérito

deste enfoque é mais evidentemente revelado quando a matriz  $A$  tem uma estrutura especial.

Consideremos o programa linear

$$\min Z = \underline{c} \underline{x}$$

sujeito a :

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \quad , \quad \underline{x} \geq \underline{0} . \quad (2.11)$$

Acontece frequentemente o fato da matriz  $A$  ter a estrutura especial mostrada na Figura 2.1 , onde os coeficientes que não pertencem a qualquer um dos blocos são zero .

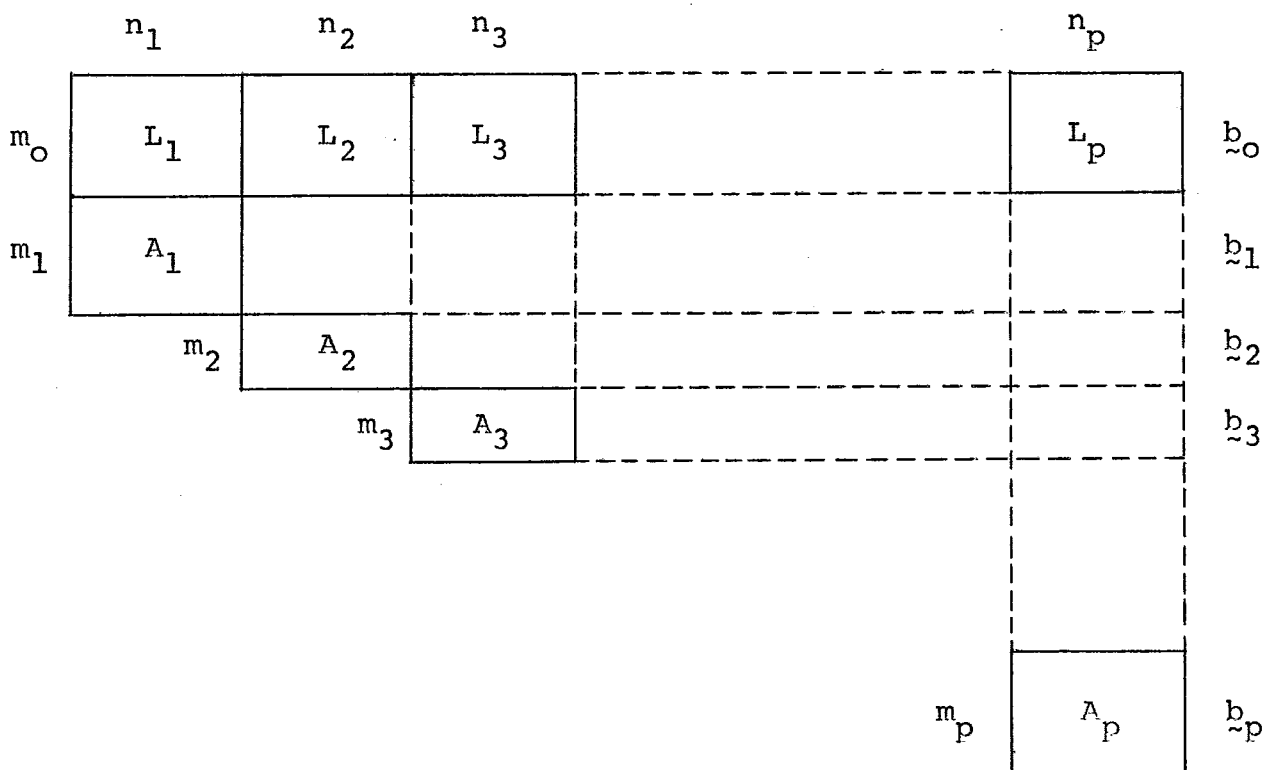


Figura 2.1

Um programa linear de uma grande firma pode conter esta estrutura. Cada agência da firma é apresentada como um programa linear de si própria, ou seja,  $A_i \underline{x}_i = \underline{b}_i$ , e a rede da firma tem uma matriz de restrições (equações de acoplamento) envolvendo todas as suas agências. Algumas das matrizes  $A_i$  podem ser vazias, é o caso em que a firma tem uma filial onde seu pessoal é não produtivo, mas ele é computado na matriz de restrições totais da firma.

Note-se que o vetor  $\underline{b}$  em (2.11) é também particionado em  $p+1$  vetores  $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p$ . Da mesma forma, o vetor  $\underline{c}$  é particionado em  $p$  vetores linha  $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_p$ . Portanto, podemos reescrever (2.11) da seguinte forma :

$$\min Z = \sum_{j=1}^p \underline{c}_j \underline{x}_j$$

sujeito a :

$$\sum_{j=1}^p L_j \underline{x}_j = \underline{b}_0 \quad ,$$

$$A_j \cdot \underline{x}_j = \underline{b}_j \quad , \quad (j=1,2,\dots,p) \quad ,$$

$$\underline{x}_j \geq \underline{0}.$$

(2.12)

Cada um dos subconjuntos de restrições  $A_j \cdot \underline{x}_j = \underline{b}_j$  define um politopo convexo  $S_j$  ( $S_j = \{\underline{x}_j / A_j \cdot \underline{x}_j = \underline{b}_j, \underline{x}_j \geq \underline{0}\}$ ). Sejam  $\underline{x}_{ij}$  os pontos extremos do politopo convexo, então, pelo TEOREMA 2, qualquer solução  $\underline{x}_j$  pode ser escrita como sendo

$$\underline{x}_j = \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} \underline{x}_{ij} \quad , \quad (2.13)$$

com

$$\sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} = 1 \quad , \quad \lambda_{ij} \geq 0 \quad ,$$

onde assumimos ter o politopo  $S_j$ ,  $s_j$  vértices e ser limitado. Assumiremos agora que conhecemos todos  $\underline{x}_{ij}$  (pontos extremos). Sejam

$$\underline{\ell}_{ij} = L_j \underline{x}_{ij} \quad , \quad c_{ij} = c_j \underline{x}_{ij} \quad (2.14)$$

Então, de (2.12) e (2.13), temos :

$$\min z = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{s_j} c_{ij} \lambda_{ij}$$

sujeito a :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} \underline{\ell}_{ij} = \underline{b}_0 \quad (2.15)$$

com

$$\sum_{i=1}^{s_j} \lambda_{ij} = 1 \quad , \quad (j=1,2,\dots,p) \quad ,$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad , \quad (i=1,2,\dots,s_j) \quad .$$

Se os  $\lambda_{ij}$  desconhecidos de (2.15) são determinados, então podemos determinar  $\underline{x}_j$  por (2.13), supondo-se que todos os  $\underline{x}_{ij}$  são conhecidos. O problema (2.15) pode sistematicamen

te ser disposto como na Figura 2.2 .

$c_{11}, \dots, c_{s_1 1}$	$c_{12}, \dots, c_{s_2 2}$		$c_{1p}, \dots, c_{s_p p}$	
$l_{11}, \dots, l_{s_1 1}$	$l_{12}, \dots, l_{s_2 2}$		$l_{1p}, \dots, l_{s_p p}$	$=b_0$
$1, 1, \dots, 1$				$=1$
	$1, 1, \dots, 1$			$=1$
			$1, 1, \dots, 1$	$=1$

Figura 2.2

A transformação de (2.12) para (2.15) provoca uma redução no número de linhas de  $m_0 + \sum_{j=1}^p m_j$  para  $m_0 + p$  linhas. Por outro lado, há um grande acréscimo do número de variáveis, passando de  $\sum_{j=1}^p n_j$  para  $\sum_{j=1}^p s_j$ . Felizmente nós não necessitamos trabalhar com todas as variáveis  $\lambda_{ij}$  e também não precisamos conhecer todos os  $x_{ij}$ .

Desde que a matriz da Figura 2.2 tenha  $m_0 + p$  linhas,  $m_0 + p$  vetores serão necessários para formar uma solução básica viável. Assumiremos que temos uma solução básica viável de



partida e usaremos o método do simplex revisado. Isto irá gerar preços para cada uma das linhas. Seja o vetor preço  $(\underline{\Pi}, \bar{\Pi})$ , onde  $\underline{\Pi}$  é referente ao vetor  $m_0$  e  $\bar{\Pi}$  é referente ao vetor  $p$ . Note-se que  $[\underline{\ell}_{ij}, \underline{e}_j]$  é um típico vetor coluna na Figura 2.2. De acordo com o método do simplex, um vetor que não está na base deve ser colocado na base se seus custos relativos forem negativos, isto é, se

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (\underline{\Pi}, \bar{\Pi}) [\underline{\ell}_{ij}, \underline{e}_j] < 0 .$$

Seja :

$$\bar{\Pi} = (\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_p) .$$

Então :

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \underline{\Pi} \underline{\ell}_{ij} - \bar{\Pi}_j .$$

Dentre todos os vetores que não estão na base, alguns estão em  $S_1$ , outros em  $S_2$ , e assim por diante. Se o mínimo dos custos relativos dos vetores em cada  $S_j$  é não negativo, isto é,  $\min_i \bar{c}_{ij} \geq 0$ , então a solução atual é ótima. Portanto, devemos pesquisar em cada  $S_j$  pelo vetor com o mínimo custo relativo. Desde que em um dado  $S_j$ ,  $\bar{\Pi}_j$  é o mesmo para todos os vetores, nós resolvemos

$$\min_i (c_{ij} - \underline{\Pi} \underline{\ell}_{ij}) = \min_i (c_j - \underline{\Pi} L_j) x_{ij} ,$$

sujeito a :

$$x_{ij} \in S_j .$$

(Escolhemos o menor vértice do polítopo convexo  $S_j$ ). Mas, este é

um programa linear

$$\min (\underline{c}_j - \bar{\pi} L_j) \underline{x}_j$$

sujeito a :

$$A_j \cdot \underline{x}_j = \underline{b}_j \quad , \quad \underline{x}_j \geq \underline{0} \quad . \quad (2.16)$$

Desde que a função objetivo em (2.16) é linear, o mínimo da função objetivo será sempre um vértice [6] , isto é,  $\underline{x}_{ij}$  .

Se

$$(\underline{c}_j - \bar{\pi} L_j) \underline{x}_{ij} - \bar{\pi}_j < 0$$

(onde  $\underline{x}_{ij}$  é a solução ótima de (2.16) ), então o vetor  $[\underline{\ell}_{ij}, \underline{e}_j]$  deve ser introduzido na base através do processamento usual do simplex. Uma coisa deve ser bem enfatizada, é com relação ao fato de que quando introduzimos o vetor  $[\underline{\ell}_{ij}, \underline{e}_j]$  na base, nós devemos multiplicá-lo por  $B^{-1}$  atual antes de realizarmos a operação de pivoteamento. Porque, quando  $(\bar{\pi}, \bar{\pi})$  foi obtido em (2.15), a matriz em (2.15) havia sido multiplicada por  $B^{-1}$  . Houvesse o vetor  $[\underline{\ell}_{ij}, \underline{e}_j]$  pertencido a (2.15), ele deveria ser multiplicado à esquerda por  $B^{-1}$  , o mesmo ocorrendo com os demais vetores de (2.15). A operação de multiplicar-se um vetor coluna do quadro inicial pelo atual  $B^{-1}$  é denominada "UPDATING".

Se depois de resolvermos todos os p programas lineares

$$\min_i (\underline{c}_j - \bar{\pi} L_j) \underline{x}_{ij} - \bar{\pi}_j \geq 0 \quad , \quad (j=1,2,\dots,p) \quad ,$$

então a solução atual é ótima.

Um exemplo completo de resolução de um problema deste tipo encontra-se em [16].

#### 2.2.4 - Updating

Qualquer conjunto de equações lineares simultâneas tem uma representação conveniente usando-se notação matricial. O sistema

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n & = & b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n & = & b_m
 \end{array} \tag{2.16.1}$$

pode ser aceito como :

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

onde

$$A = [a_{ij}] \quad ; \quad \tilde{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \quad ; \quad \tilde{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$$

Se  $A$  é quadrada ( $m=n$ ) e não singular, o vetor solução é dado por:

$$\tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$$

Existe um simples esquema de cálculo que pode ser aplicado a qualquer sistema não singular para obtenção do vetor solução e/ou a ma-

triz inversa. Este procedimento, o Método da Eliminação Completa de Gauss e Jordan, tem um número finito de iterações. Em exatamente  $m$  ( $=n$ ) iterações, o procedimento multiplica o sistema (2.16.1) por  $A^{-1}$  e obtém  $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ . Se for necessário,  $A^{-1}$  pode ser desenvolvido ao mesmo tempo. Ilustraremos o método com um exemplo.

Consideremos o seguinte conjunto :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \quad (2.16.2)$$

Seja

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a matriz dos coeficientes. Pode-se verificar que  $A$  é não singular,  $|A| = 6$ . Podemos reescrever (2.16.2) da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix}$$

ou então, fazendo-se

$$\underline{a}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} ; \quad \underline{a}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} ; \quad \underline{a}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{a}_0 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{vmatrix}$$

podemos reescrever (2.16.2) como :

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 = \underline{a}_0$$

Desde que  $A$  seja não singular, o conjunto de vetores  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  e  $\underline{a}_3$  são linearmente independentes e conseqüentemente formam uma base no espaço tri-dimensional.

Para provarmos que o conjunto de vetores  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  de uma matriz não singular  $A$  formam um conjunto linearmente independente, iremos primeiramente assumir que o conjunto é linearmente dependente. Portanto, para algum conjunto de  $\alpha_j, j=1, \dots, n$  devemos ter :

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

com pelo menos um  $\alpha_{ij} \neq 0$ . Podemos então resolver para algum vetor  $\underline{a}_j$ , por exemplo  $\underline{a}_1$ , em função dos outros vetores para obtermos :

$$\underline{a}_1 = \beta_2 \underline{a}_2 + \dots + \beta_n \underline{a}_n$$

onde  $\beta_j = -\alpha_j/\alpha_1$ . Substituímos o vetor  $\underline{a}_1$  por esta expressão na matriz  $A$ . Então, adicionando-se sucessivamente a primeira coluna  $-\beta_j \underline{a}_j$ , para  $j=2,3,\dots,n$ , nós reduzimos a primeira coluna ao vetor zero. Pela propriedade dos determinantes, a adição desses vetores não altera o valor do determinante, e como agora uma das colunas é igual a zero, o valor do determinante é zero. Entretanto, isto contradiz a suposição de que  $A$  é uma matriz não singular. Por

tanto, nossa hipótese de dependência linear foi contextada e consequentemente o conjunto de vetores de  $A$  é linearmente independente.

Provado que os vetores  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  e  $\underline{a}_3$  são linearmente independentes, para resolvermos (2.16.2), nós precisamos encontrar a única combinação linear (ou seja, os únicos valores  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ) de  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  e  $\underline{a}_3$  a qual é igual ao vetor  $\underline{a}_0$ . Devemos primeiramente obter o vetor solução para (2.16.2). O processo de eliminação completa elimina sucessivamente a primeira, a segunda, a terceira, etc...., variáveis de todas as equações com excessão da primeira, da segunda, da terceira, etc... , respectivamente. Para (2.16.2), o primeiro passo é eliminarmos a primeira variável de todas as equações, exceto da primeira. Como segundo passo, eliminaremos a segunda variável de todas as equações, com excessão da segunda e no terceiro passo eliminamos a terceira variável de todas as equações, com excessão da terceira. Devemos também fazer com que as variáveis que permaneçam tenham coeficiente unitário.

Com estes três passos, reduzimos o sistema (2.16.2)

a:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 3 \\ x_3 & = & 2 \end{array} \quad (2.16.3)$$

As operações do procedimento de eliminação completa transformou a matriz dos coeficientes

$$A = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

na matriz identidade

$$I_3 = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right|$$

Com isto nós notamos que a transformação total causada pelo processo de eliminação completa é equivalente a multiplicarmos o sistema (2.16.1) por  $A^{-1}$ .

Isto é frequentemente necessário, não somente para resolvermos um sistema de equações lineares simultâneas, mas também para obtermos o inverso da matriz dos coeficientes. Isto ocorre, colocando-se uma matriz identidade (mxm) à direita da matriz original dos coeficientes e aplicando-se as transformações de eliminação a toda a matriz. A matriz inversa será gerada no lugar da matriz identidade. Se escrevermos a matriz particionada

$$(A \mid I \mid \underline{a}_0)$$

e aplicarmos as transformações de eliminação completa, teremos:

$$(A^{-1}A \mid A^{-1}I \mid A^{-1}\underline{a}_0) = (I \mid A^{-1} \mid \underline{x})$$

Ilustraremos este procedimento com o exemplo anterior. A matriz particionada é :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Os sucessivos passos são:

Passo 1 :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Passo 2 :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Passo 3 :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 2 \end{array} \right)$$

Nós então temos:

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1/3 & 1/3 & \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & \\ -1/2 & 0 & 1/2 & \end{array} \right)$$

A única combinação linear dos vetores  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  e  $\underline{a}_3$  que é igual a  $\underline{a}_0$  pode ser determinada como sendo



$$1\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = \vec{a}_0$$

Desde que os vetores  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  e  $\vec{a}_3$  formam uma base no espaço tridimensional, qualquer outro vetor neste espaço pode também ser expresso como única combinação linear destes três vetores. Para qualquer vetor  $\vec{a}_4$ , podemos determinar  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  tal que :

$$y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3 = \vec{a}_4$$

ou

$$A\vec{y} = \vec{a}_4 \quad (2.16.4)$$

Resolvendo-se para  $\vec{y}$ , devemos multiplicar (2.16.4) por  $A^{-1}$ , obtendo

$$A^{-1}A\vec{y} = A^{-1}\vec{a}_4$$

$$\vec{y} = A^{-1}\vec{a}_4$$

Por exemplo, seja:

$$\vec{a}_4 = \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$\vec{y}$  é dado por

$$\vec{y} = \begin{vmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}_4$  expresso como combinação linear de  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  e  $\vec{a}_3$  e tal que

$$2\underline{a}_1 + 2\underline{a}_2 + 0\underline{a}_3 = \underline{a}_4$$

Aqui  $\underline{a}_4$  é igual à combinação linear de somente dois dos três vetores básicos.

O que denominaremos de "updating" é exatamente esta "atualização" do vetor que será expresso em função dos vetores da base. No exemplo acima, o "updating" é a multiplicação de  $A^{-1}$  por  $\underline{a}_4$ , ou seja, expressar o  $\underline{a}_4$  em função da base  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  e  $\underline{a}_3$  ou então, dando-se um outro enfoque, é a transformação de  $\underline{a}_4$  em  $\underline{y}$ .

## 2.3 - Viabilidade e Somatório de Fluxos

### 2.3.1 - Somatório de Fluxos

Nesta seção, o problema que iremos abordar é referente a maximizar a soma de fluxos de diversas comodidades; para cada uma das comodidades existem diversas cadeias unindo a fonte ao receptor. O objetivo deste tipo de problema é selecionar determinadas cadeias para cada comodidade, de tal forma que a capacidade dos arcos não seja violada e que seja máxima a soma dos fluxos em todas as cadeias selecionadas.

Façamos a hipótese de que existem  $m$  arcos na rede e que as capacidades dos arcos sejam  $b_i$ , ( $i=1, \dots, m$ ).

Qualquer uma das cadeias da rede pode ser representada por um vetor de  $m$  componentes, com o valor 1 na componente

se o arco for usado na cadeia e 0 na componente caso o arco não seja usado na cadeia. Podemos então definir uma matriz de arcos incidentes  $A = [a_{ij}]$ , da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } i \text{ pertence à cadeia } j, \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Seja  $x_j$  a quantidade de fluxo na cadeia  $j$ , então o problema de maximizar os fluxos das diversas comodidades pode assim ser expresso:

$$\max \sum_j x_j$$

sujeito a :

$$\sum_j a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.17)$$

$$x_j \geq 0, \quad s_i \geq 0.$$

( $s_i$  são as variáveis de folga).

É muito importante notarmos que neste tipo de formulação, a matriz  $A$  tem uma quantidade muito grande de colunas, pois cada cadeia possível para cada comodidade origina uma coluna. Felizmente, para resolvermos (2.17), necessitamos somente de uma matriz  $(m+1) \times (m+1)$ , conforme teremos oportunidade de mostrar no decorrer desta seção.

Outro fato relevante que deve ser notado é que o as

pecto de multicomodidade não aparece explicitamente em (2.17), mas está contido na estrutura da matriz  $A = [a_{ij}]$ . No caso de considerarmos apenas cadeias de uma única comodidade na matriz de arcos incidentes  $A$ , então (2.17) será simplesmente convertido em um problema de fluxo máximo.

Suponhamos que conhecemos as  $m$  colunas que formam a base de partida de (2.17); podemos resolver (2.17) e determinar o vetor preço  $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m)$  onde cada  $\Pi_i$  corresponde a uma linha específica. Devemos notar que o custo relativo de todas as colunas não básicas  $a_{ij}$  é dado por  $\bar{c}_j = c_j - \Pi a_j$ . No caso de  $\bar{c}_j \leq 0$  a atual base é ótima e se  $\bar{c}_j > 0$ , então esta coluna deverá ser introduzida na base. O problema de determinarmos  $\bar{c}_j$  é relativamente fácil; se interpretarmos  $\Pi_i$  como o comprimento dos arcos, então  $\Pi a_j$  é o comprimento da cadeia a qual é representada pela coluna  $a_j$ .

Observemos que  $c_j = +1$  (método do simplex revisado) para todas as colunas, e se o método simplex for usado, então  $\Pi$  e não  $(-\Pi)$  aparecerá na linha de custo das variáveis de folga pelo fato de termos usado  $-c_b$  e  $-c_n$  no quadro de partida. Com isto fica mostrado, parte do fato de usarmos somente uma matriz de tamanho  $(m+1) \times (m+1)$ , ou seja, a parte referente a  $(m+1)$  linhas, onde  $m+1$  -ésima linha é o vetor preço (comprimento)  $\Pi$ . Entretanto, nós não necessitamos listar todas as colunas representando cadeias unindo as diferentes fontes aos diferentes receptores. A cada iteração de resolução, nós simplesmente usamos o método do simplex revisado e pegamos uma matriz de tamanho  $(m+1) \times (m+1)$ . A partir de en -

tão , usamos o procedimento do método simplex revisado para as operações de pivoteamento, isto é, se algum  $\Pi_i$  for negativo, então escolhemos a coluna referente a ele como coluna pivô. Se todos os  $\Pi_i$  são não negativos, nós os consideramos como comprimento dos arcos e encontramos a menor cadeia ligando a fonte ao receptor de cada commodity. Se a menor cadeia de todas as commodities é de comprimento 1 ou maior ( $\bar{c}_j \leq 0$ ), então a atual base é ótima.

Uma observação muito importante é o fato de que todas as colunas que forem entrar na base fazerem o "updating" antes de serem acrescentadas ao quadro, conforme mostrado no Princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe (2.2.3) .

### 2.3.2 - Viabilidade de Fluxos

Neste tipo de problema, isto é, problema de viabilidade de multicomodidade de fluxos, sabemos a priori o valor do fluxo de cada uma das commodities e nosso objetivo é saber se todos esses valores de fluxo serão satisfeitos em uma dada rede, de tal forma que a capacidade de nenhum dos arcos da rede dada, seja excedido.

Usaremos a rede na qual estamos desejando saber se todos os requisitos de fluxo serão satisfeitos sem excedermos a capacidade de seus arcos da seguinte forma: primeiramente, montaremos esta rede com todos os seus nós e arcos, mas retiramos as restrições de capacidade. Numa segunda fase, para cada requisito de fluxo, determinamos uma cadeia da fonte ao receptor desta commodity, isto sempre sendo feito na rede da primeira fase. Com isto, nós assegura-

ramos a cada arco da cadeia uma capacidade igual à quantidade de fluxo requerida. Sobrepondo-se todas estas cadeias para todos os requisitos de fluxo, nós obrigatoriamente teremos uma rede viável, pois fomos satisfazendo gradativamente os requisitos de fluxo de cada um dos arcos. Portanto, existem milhares destas redes viáveis que irão satisfazer aos requisitos de fluxo. Todas estas viáveis têm o mesmo número de arcos ligando os mesmos pares de nós da rede original, mas todas estas redes terão as capacidades dos arcos diferentes. O mesmo número de arcos em todas as redes ocorrerá em virtude de mantermos na rede todos os arcos, inclusive os de capacidade zero (isto é necessário para que possamos superpor todas as cadeias com todos os requisitos de fluxo para determinarmos a rede viável).

### Proposição 1:

Qualquer combinação convexa linear destas redes viáveis também irão satisfazer os requisitos de fluxo da rede original.

Prova:

- (i) Seja uma rede  $G = [N, A, b]$  com  $m$  arcos.
- (ii)  $\varrho \in \mathbb{R}^m$  é a quantidade de fluxo que desejamos passar através da rede  $G$ ,  $\varrho = [\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m]$ .
- (iii)  $\tilde{b}^1 \in \mathbb{R}^m$  e  $\tilde{b}^2 \in \mathbb{R}^m$  são vetores que definem as capacidades de duas quaisquer das inúmeras redes viáveis obtidas pelo processo acima. Estes dois vetores pertencem a  $\mathbb{R}^m$  pois fixamos que todas as redes viáveis deveriam ter o mesmo número de arcos da rede  $G$ , portanto  $m$ ,  $\tilde{b}^1 = [b_1^1, b_2^1, \dots, b_m^1]$ ,  $\tilde{b}^2 = [b_1^2, b_2^2, \dots$

$\dots, b_m^2 ] .$

De (ii) e (iii)  $\implies$

$$\varnothing \leq \underline{b}^1$$

$$\varnothing \leq \underline{b}^2$$

$\forall \lambda \in [0,1]$  temos :

$$\lambda \varnothing \leq \lambda \underline{b}^1 \quad (a)$$

$$(1-\lambda)\varnothing \leq (1-\lambda)\underline{b}^2 \quad (b)$$

De (a) + (b)  $\implies$

$$\varnothing \leq \lambda \underline{b}^1 + (1-\lambda)\underline{b}^2$$

$\triangle$

Descreveremos agora um meio de determinar se a rede original contém uma rede que seja combinação convexa linear destas redes viáveis:

Seja  $[a_{ij}]$  uma matriz de  $m$  linhas onde cada linha corresponde a um arco da rede dada. A coluna  $j$  da matriz representa uma rede, a qual tem  $a_{1j}$  como capacidade do primeiro arco,  $a_{2j}$  como capacidade do segundo arco e assim por diante. Então, todas as redes viáveis mencionadas anteriormente podem ser representadas por colunas da matriz. Se a rede original representada por  $[b_1, b_2, \dots, b_m]$  contém a rede  $[b'_1, b'_2, \dots, b'_m]$  com  $b'_i \leq b_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) e  $[b'_1, b'_2, \dots, b'_m]$  é uma combinação convexa linear das colunas de  $[a_{ij}]$ , então a rede original é viável. Sejam os

coeficientes da combinação convexa da coluna  $j$ ,  $x_j$ , então o problema de viabilidade pode ser formulado como

$$\max \theta = \sum_j x_j$$

sujeito a :

$$a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots, ) \quad (2.18)$$

$$x_j \geq 0, \quad s_i \geq 0.$$

Se o valor ótimo de  $\theta$  é 1, então a rede original é viável.

Felizmente não necessitamos escrever a enorme quantidade de colunas de  $[a_{ij}]$ , (método da decomposição de Dantzig-Wolfe). Tendo-se uma base inicial de (2.18) com  $m$  colunas, podemos através do método do simplex determinar o vetor  $\Pi$ . Com este vetor  $\Pi$ , podemos através do método do simplex revisado, ir gerando as colunas que nos darão aumento na função objetivo, gerando-se primeiramente aquela que causar o maior acréscimo e assim por diante. Desde que o custo relativo  $\bar{c}_j$  da coluna  $j$  é dado por  $\bar{c}_j = c_j - \Pi a_j$  e  $c_j$  é 1 para todas as colunas, então o que queremos encontrar é o mínimo de  $\Pi a_j$ . Se para o mínimo de  $\Pi a_j$  tivermos  $\bar{c}_j = c_j - \Pi a_j \leq 0$ , então a solução atual é ótima.

Com objetivo computacional, devemos pegar uma matriz  $(m+1) \times (m+1)$  e devemos interpretar  $\Pi_i$  como o custo de construção de um arco  $i$  de capacidade unitária. Quando temos no quadro to-



dos os  $\Pi_i \geq 0$ , devemos tentar introduzir na base a coluna que representa a mais barata das redes que é capaz de transportar simultaneamente os requisitos de fluxo.

Se  $\theta \geq 1$ , então o conjunto de requisitos de fluxo é viável.

Se  $\theta < 1$  e  $\sum a_j \geq 1$  para todo  $j$ , então o conjunto de requisitos de fluxos é inviável para a rede existente.

### 2.3.3 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Viabilidade de Fluxos

O objetivo deste exemplo é dirimir todas as dúvidas que por ventura ainda possam existir a respeito de Viabilidade de Fluxos; portanto, o exemplo será apresentado de uma forma bastante didática, incluindo-se todas as passagens.

Seja a rede mostrada na Figura 2.3 referente às capacidades dos arcos, ou seja, os números sobre os arcos são suas capacidades e na Figura 2.4 apresentamos os requisitos de fluxo de quatro comodidades. Estes requisitos têm seus valores marcados sobre os arcos. O nosso objetivo é determinar se os requisitos de fluxo da rede apresentada na Figura 2.4 são viáveis ou não na rede cujas capacidades são apresentadas na Figura 2.3.

$$\max \theta = \sum_j x_j$$

sujeito a :

$$a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad , \quad (i=1, \dots, m ; j=1, \dots, n),$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad s_i \geq 0 \quad .$$

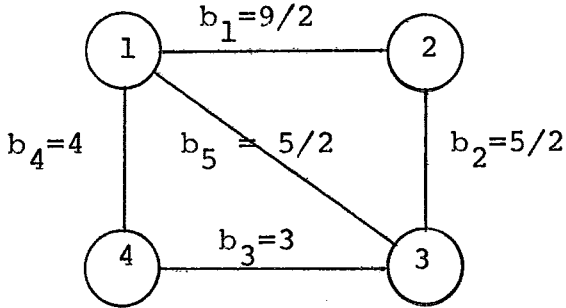


Figura 2.3

Capacidade dos arcos

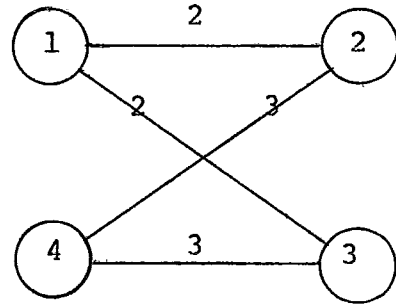


Figura 2.4

Requisitos de fluxo

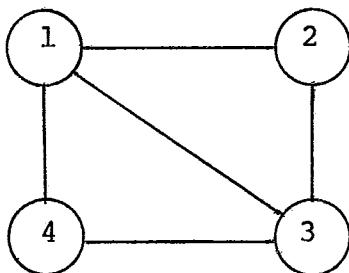
$$\begin{array}{rcl} a_{1j}x_j + s_1 & = & b_1 \\ a_{2j}x_j + s_2 & = & b_2 \\ a_{3j}x_j + s_3 & = & b_3 \\ a_{4j}x_j + s_4 & = & b_4 \\ a_{5j}x_j + s_5 & = & b_5 \end{array}$$

Montaremos agora um quadro no qual o valor de  $\theta$  é zero ( $\theta=0$ ) e as capacidades da rede são expressas em função das variáveis de folga e o vetor  $b$ , encontrado do lado esquerdo, no mais é igual ao simplex revisado.

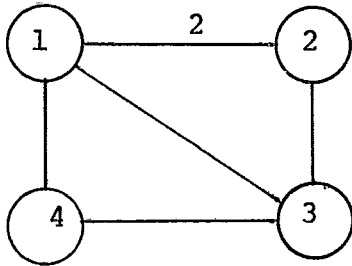
QUADRO 1.1'

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_1$
$\theta$	0	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	$\Pi_5$	
$s_1$	9/2	1					
$s_2$	5/2		1				
$s_3$	3			1			
$s_4$	4				1		
$s_5$	5/2					1	

Neste Quadro 1.1' , o valor da função objetivo aparecerá no canto superior esquerdo. Note-se que estão faltando dois vetores para completarmos o quadro, são eles  $\underline{\Pi}$  e  $\underline{x}_1$  . Como vetor  $\underline{\Pi}$  de partida, usaremos  $\underline{\Pi} = [ 0, 0, 0, 0, 0 ]$  , pois assim qualquer rede capaz de transportar os requisitos de fluxo será a mais barata . Para determinarmos  $\underline{x}_1$  , usaremos o procedimento já descrito no princípio do item 2.3.2 , ou seja, primeiramente montamos a rede original  $G$  , somente com seus nós e arcos, sem suas capacidades ,  $G = [ N, A ]$  .

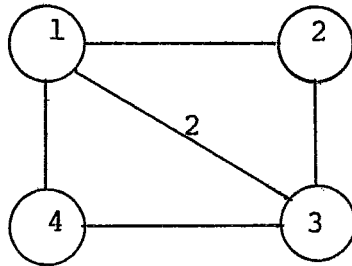


Agora pegaremos cada um dos requisitos de fluxo da Figura 2.4 e os satisfaremos mas, através dos arcos da rede  $G = [N, A]$ , ou seja, da rede da Figura 2.3 sem suas capacidades. Começaremos pelo requisito de fluxo entre os nós 1 e 2; como existe um arco equivalente em  $G$ , teremos:



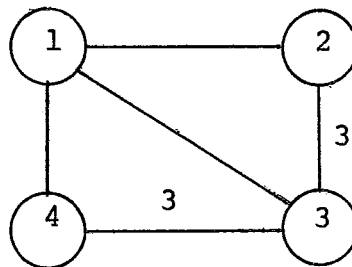
(i)

Pegaremos agora o requisito de fluxo entre os nós 1 e 3; como existe um arco equivalente em  $G$ , teremos:



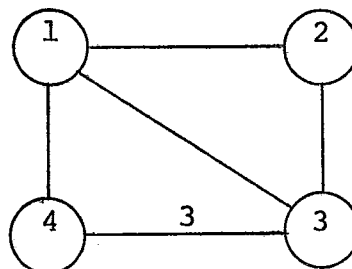
(ii)

Consideremos o requisito de fluxo entre os nós 2 e 4; como não existe um arco equivalente em  $G$ , usaremos o arco entre os nós 2 e 3 mais o arco entre os nós 3 e 4:



(iii)

O último requisito de fluxo é entre os nós 3 e 4, e como há um arco equivalente em  $G$ , teremos:



(iv)



Com o vetor  $\underline{x}_1$ , temos o QUADRO 1.1' completo e passará a QUADRO 1.1

QUADRO 1.1

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_1$
$\theta$	0	0	0	0	0	0	-1
$s_1$	9/2	1					2
$s_2$	5/2		1				3
$s_3$	3			1			6
$s_4$	4				1		0
$s_5$	5/2					1	2

Realizaremos agora o pivoteamento:

$$\text{piv\^o} = \min \{ 9/2 / 2, 5/2 / 3, 3/6, 5/2 / 2 \} = 3/6 = 1/2$$

Portanto, o elemento piv\^o do Quadro 1,1 é o 6 e está assim caracterizado  $\textcircled{6}$ .

É importante notar que como escolhemos a rede que originou o vetor  $\underline{x}'_1$  que por sua vez gerou o vetor  $\underline{x}_1$ , poderíamos ter escolhido qualquer outra rede, desde que satisfizesse os requisitos de n\^os e arcos da rede  $G = [N, A]$ , isto devido ao fato de todas as componentes do vetor  $\underline{II}$  serem nulas, ou seja, qualquer rede será a mais barata.

Realizando-se o pivoteamento, obteremos o QUADRO 1.2':

QUADRO 1.2'

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_2$
0	1/2			1/6			
$s_1$	7/2	1		-1/3			
$s_2$	1		1	-1/2			
$x_1$	1/2			1/6			
$s_4$	4			0	1		
$s_5$	3/2			-1/3		1	

Neste Quadro 1.2' o vetor  $\underline{\pi} = [0, 0, 1/6, 0, 0]$ ; portanto, o vetor  $\underline{x}'_2$  será gerado por qualquer rede que satisfaça os requisitos de nós e arcos de  $G = [N, A]$  mas sem usar o arco que une os nós 3 e 4, pois  $\pi_3 = 1/6$  e queremos as redes mais baratas. Usando-se o mesmo procedimento usado para  $\underline{x}'_1$  temos: (apresentaremos somente a rede final e não mais todas as passagens):

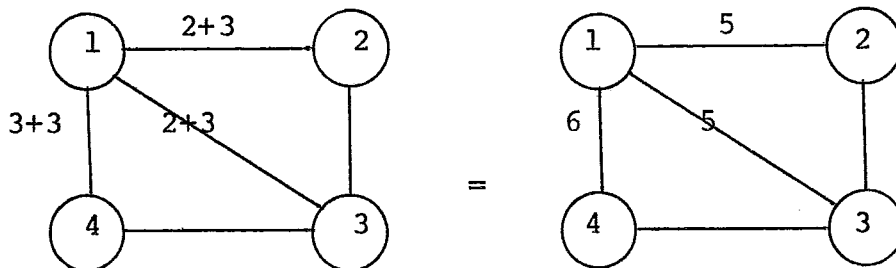


Figura 2.6

$$\underline{x}'_2 = [5, 0, 0, 6, 5]$$

Realizando-se o "updating", conforme feito com  $\tilde{x}_1$ , obteremos  $\tilde{x}_2$ .

$$\left| \begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & 5 & & 5 \\ & 1 & & & 0 & & 0 \\ & & 1/6 & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & 1 & 6 & & 6 \\ & & -1/3 & & 5 & & 5 \end{array} \right| = \tilde{a}_2$$

Acrescentando-se  $c_j = 1$ , temos :

$$\tilde{x}_2 = [-1, 5, 0, 0, 6, 5]$$

Agora, com  $\tilde{x}_2$ , temos o QUADRO 1.2' completo que passará a QUADRO 1.2 .

QUADRO 1.2

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_2$
$\theta$	1/2			1/6			-1
$s_1$	7/2	1		-1/3			5
$s_2$	1		1	-1/2			0
$x_1$	1/2			1/6			0
$s_4$	4			0	1		6
$s_5$	3/2			-1/3		1	5



Determinamos o elemento pivô :

$$\text{pivô} = \min \{ 7/2 / 5 , 4/6 , 3/2 / 5 \} = 3/10$$

portanto, o elemento pivô do Quadro 1.2 é o 5 , mas o referente a  $s_5$  .

Um fato muito importante e que deve ser interpretado é o valor de  $\theta = 1/2$ . Isto significa que o vetor  $\underline{x}_1'$  que na realidade é uma rede em  $G$  , satisfazendo todos os requisitos de fluxo, pode ter metade ( $\theta = 1/2$ ) de seus requisitos satisfeitos, isto é,  $(1/2) [2, 3, 6, 0, 2] = [1, 3/2, 3, 0, 1]$  é a quantidade de fluxo referente a  $\underline{x}_1'$  que passaremos na rede original, Figura 2.3, portanto, observando-se a Figura 2,5, teremos:

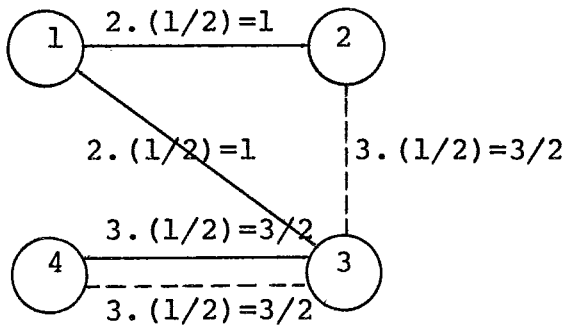


Figura 2.7

Este pontilhado na Figura 2.7, do nó 2 ao 4 passando pelo nó 3, é referente a um requisito de fluxo entre os nós 2 e 4, requisito este apresentado na Figura 2.4, mas tem que ser satisfeito através da rede da Figura 2.3 .

Realizando-se o pivoteamento, obtemos o QUADRO 1.3':

QUADRO 1.3'

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_3$
$\theta$	8/20			1/10		1/5	
$s_1$	2	1		0		-1	
$s_2$	1		1	-1/2		0	
$x_1$	1/2			1/6		0	
$s_4$	11/5			2/5	1	-6/5	
$x_2$	3/10			-1/15		1/5	

O vetor  $\underline{\pi} = [0, 0, 1/10, 0, 1/5]$ , portanto quando gerarmos a rede referente a  $x_3'$  não podemos usar os arcos que unem os nós 3 e 4 e os nós 1 e 3, pois  $\pi_3 = 1/10$  e  $\pi_5 = 1/5$  e que remos as redes mais baratas. Usando-se o mesmo procedimento usado para  $x_1'$  e  $x_2'$ , temos:

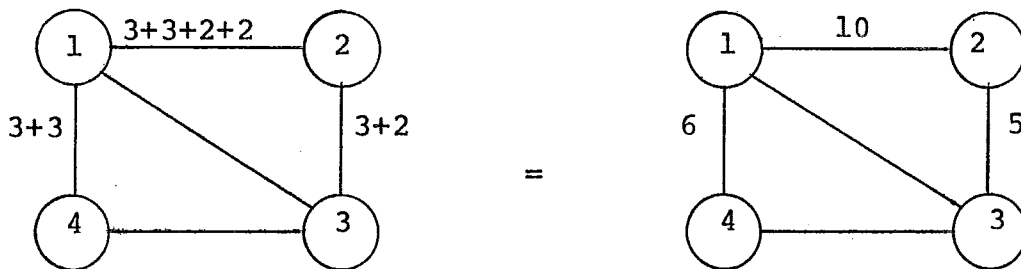


Figura 2.8

$$x_3' = [10, 5, 0, 6, 0]$$

Efetutando-se o "updating" conforme realizado com  $\underline{x}_1$  e  $\underline{x}_2$ , obtemos  $\underline{x}_3$ .

$$\left| \begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & & & & 10 & & 10 \\ & 1 & -1/2 & & 5 & & 5 \\ & & 1/6 & & 0 & = & 0 \\ & & 2/5 & 1 & 6 & & 6 \\ & & -1/15 & & 0 & & 0 \end{array} \right| = \underline{a}_3$$

Acrescentando-se  $c_j = 1$ , temos :

$$\underline{x}_3 = [-1, 10, 5, 0, 6, 0]$$

Tendo-se  $\underline{x}_3$ , completamos o Quadro 1.3' que passará a Quadro 1.3.

QUADRO 1.3

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_3$
$\theta$	8/10			1/10		1/5	-1
$s_1$	2	1		0		-1	10
$s_2$	1		1	-1/2		0	5
$x_1$	1/2			1/6		0	0
$s_4$	11/5			2/5	1	-6/5	6
$x_2$	3/10			-1/15		1/5	0

Determinamos o elemento pivô :

$$\text{pivô} = \min \{ 2/10, 1/5, 11/5 / 6 \} = 2/10 = 1/5$$

Portanto, o elemento pivô referente ao Quadro 1.3 pode tanto ser o 10,  $s_1$ , como 5,  $s_2$  pois o mínimo do quociente é o mesmo tanto para  $s_1$  como para  $s_2$ .

Interpretamos agora o valor de  $\theta = 8/10$ , o que realmente significa um aumento em  $\theta$  de  $3/10 = (8/10) - (1/2)$ . Portanto,  $x_2'$  terá  $(3/10)$  de seus requisitos satisfeitos, isto é,  $(3/10) [ 5, 0, 0, 6, 5 ] = [ 3/2, 0, 0, 9/5, 3/2 ]$  que é a quantidade de fluxo referente a  $x_2'$  que passaremos na rede original, conseqüentemente, observando-se a Figura 2.6, teremos

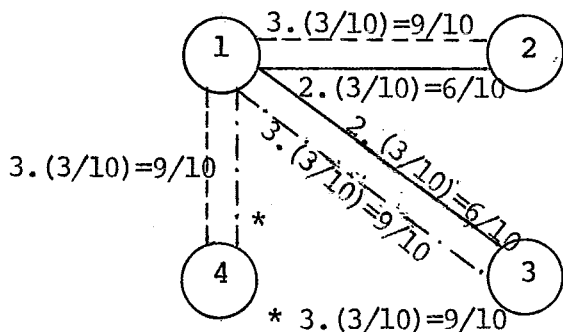


Figura 2.9

Estes requisitos de fluxo da Figura 2.9 são exatamente  $(3/10)$  dos requisitos de fluxo que dão origem a  $x_2'$ , na Figura 2.6.

Realizando-se o pivoteamento, primeiramente com relação a  $s_1$ , obteremos o Quadro 1.4'.1 :

QUADRO 1.4'.1

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_3$
$\theta$	1	1/10	0	1/10	0	1/10	0
$x_3$	1/5	1/10		0		-1/10	1
$s_2$	0	-1/2	1	-1/2		1/2	0
$x_1$	1/2	0		1/6		0	0
$s_4$	1	-6/10		2/5	1	-6/10	0
$x_2$	3/10	0		-1/15		1/5	0

$\Pi = [1/10, 0, 1/10, 0, 1/10]$  , portanto, quando gerarmos a rede referente a  $x_4'$  não poderemos usar os arcos que unem os nós 1 e 2 , os nós 3 e 4 e os nós 1 e 3, pois  $\Pi_1 = 1/10$ ,  $\Pi_3 = 1/10$  e  $\Pi_5 = 1/10$  e queremos as redes mais baratas. Portanto, com este  $\Pi$  não existe rede capaz de transportar o fluxo com um custo total menor do que 1 . Consequentemente, o valor ótimo de  $\theta$  é 1,  $\theta = 1$  e a rede original é viável para os requisitos de fluxo apresentados.

Agora faremos o pivoteamento com relação a  $s_2$  , e obteremos o Quadro 1.4'.2 :

QUADRO 1.4'.2

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_3$
$\theta$	1	0	1/5	0	0	1/5	0
$s_1$	0	1	-2	1		-1	0
$x_3$	1/5		1/5	-1/10		0	1
$x_1$	1/2		0	1/6		0	0
$s_4$	1		-6/5	1	1	-6/5	0
$x_2$	3/10		0	1/15		1/5	0

$\Pi = [ 0, 1/5, 0, 0, 1/5 ]$  , podemos gerar uma rede referente a  $\underline{x}'_4$  mesmo tendo-se  $\Pi_2 = 1/5$  e  $\Pi_5 = 1/5$  . Mas, como já satisfazemos a condição de  $\theta \geq 1$  para o conjunto de requisitos de fluxo ser viável na rede original, pois no nosso caso temos  $\theta=1$  então não é necessário construirmos a rede referente a  $\underline{x}'_4$  . Caso o fizéssemos, haveriam duas hipóteses: uma é após o "updating",  $\underline{x}_4$  entrar na base e sair algum dos  $s_i$  e nesse caso  $\underline{x}_4$  teria valor zero; a outra hipótese é  $\underline{x}_4$  entrar na base e sair algum outro  $\underline{x}_i$  . Estes casos realmente não nos interessam pois a partir do instante em que temos  $\theta \geq 1$  já sabemos que os requisitos de fluxo são viáveis para a rede toda.

É importante notar que tanto no Quadro 1.4'.1 como no Quadro 1.4'.2 os valores de  $\theta$  e  $\underline{x}_3$  são exatamente iguais.

Fazemos agora a interpretação do valor de  $\theta=1$ , o que significa um acréscimo em  $\theta$  de  $1/5 = 1 - (8/10)$ . Portanto,  $x_3'$  terá  $(1/5)$  de seus requisitos satisfeitos, ou seja,  $(1/5) [10, 5, 0, 6, 0] = [2, 1, 0, 6/5, 0]$  que é a quantidade de fluxo referente a  $x_3'$  que passaremos na rede original; consequentemente, observando-se a Figura 2.8, teremos:

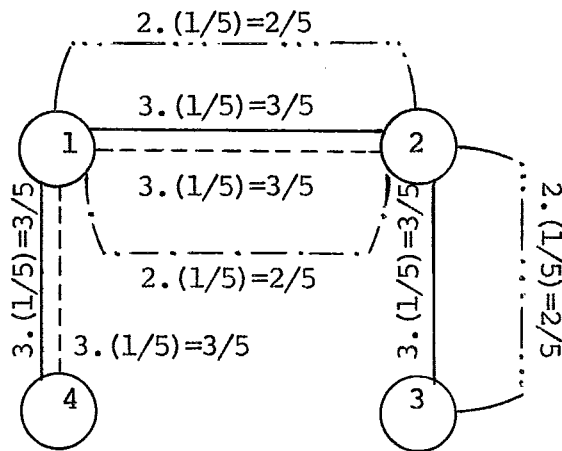


Figura 2.10

Estes requisitos de fluxo da Figura 2.10 são exatamente  $(1/5)$  dos requisitos de fluxo que dão origem a  $x_3'$  na Figura 2.8.

Sobrepondo-se as Figuras 2.7, 2.9 e 2.10, teremos a Figura 2.11. Antes faremos as somatórias dos requisitos de fluxo nos arcos respectivos nas três figuras.

$$\text{Nós 1-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 9/10 + 6/10 + 3/5 + 2/5 + 3/5 + 2/5 = \\ = \frac{10 + 9 + 6 + 6 + 4 + 6 + 4}{10} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} = b_1 \end{array} \right.$$

$$\text{Nós 2-3} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3/2 + 3/5 + 2/5 = \frac{15 + 6 + 4}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = b_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \text{N\u00f3s 3-4} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3/2 + 3/2 = 3 = b_3 \end{array} \right. \\
 \text{N\u00f3s 4-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} 9/10 + 9/10 + 3/5 + 3/5 = \frac{9+9+6+6}{10} = \frac{30}{10} = 3 < 4 = b_4 \end{array} \right. \\
 \text{N\u00f3s 1-5} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + 6/10 + 9/10 = \frac{10+6+9}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = b_5 \end{array} \right.
 \end{array}$$

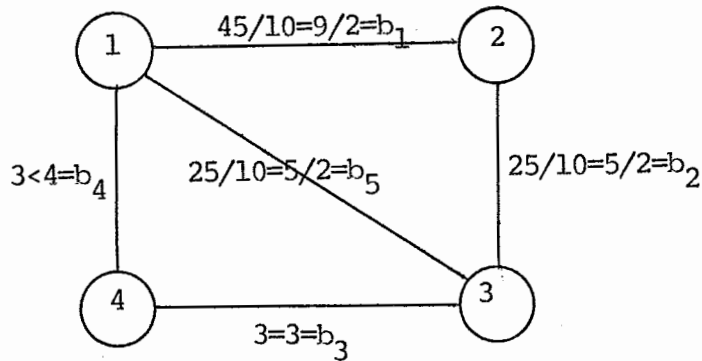


Figura 2.11

Na Figura 2.11 est\u00e1 apresentado como os requisitos de fluxo da Figura 2.4 podem ser transportados atrav\u00e9s da Figura 2.3, ou seja, satisfazendo suas capacidades.

Um fato muito importante \u00e9 que tanto no Quadro 1.4'.1 como no Quadro 1.4'.2 os valores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  s\u00e3o os mesmos e respectivamente  $1/2$ ,  $3/10$  e  $1/5$  que representam os respectivos a cr\u00easimos de  $\theta$ . A partir do momento que um destes  $x_i$  entra na base, j\u00e1 o faz com o valor que ser\u00e1 o incremento em  $\theta$  e n\u00e3o mais modificar\u00e1 este valor. Uma observa\u00e7\u00e3o mais detalhada dos Quadros justificar\u00e1 este fato.



Quando apresentamos a parte teórica (2.3.2 Viabilidade de Fluxos) salientamos a importância da Proposição 1: "Qualquer combinação convexa linear de redes viáveis também irá satisfazer os requisitos de fluxo da rede original". No nosso exemplo é exatamente o que ocorre quando temos  $\theta=1$ , ou seja, quando  $\theta=1$  temos a combinação convexa linear entre  $x_1, x_2$  e  $x_3$  e respectivamente  $x'_1, x'_2$  e  $x'_3$  com  $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$  e  $x_i \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & \cdot (1/2) [2, 3, 6, 0, 2] + (3/10) [5, 0, 0, 6, 5] + \\ & + (1/5) [10, 5, 0, 6, 0] = \\ & = [1, 3/2, 3, 0, 1] + [3/2, 0, 0, 9/5, 3/2] + \\ & + [2, 1, 0, 6/5, 0] = \\ & = [9/2, 5/2, 3, 3, 5/2] < [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5] = \\ & = [9/2, 5/2, 3, 4, 5/2] \end{aligned}$$

Como última observação sobre este exemplo, convém notar o fato de quando realizamos o "updating" com os vetores  $\underline{x}'_i$  para com o acréscimo de  $c_j=1$  torná-los  $\underline{x}_i$ , a não ser o acréscimo de  $c_j$ , não há alteração alguma nesta operação, isto é,  $\underline{x}_i$  é exatamente igual a  $\underline{x}'_i$  acrescido de  $c_j$ . Isto ocorre devido ao fato de que quando determinamos as redes viáveis para os requisitos de fluxo ( $\underline{x}'_i$ ) o fazemos de tal forma que nos arcos onde corresponde um  $\Pi_i \neq 0$  não passamos nenhum requisito de fluxo para que tenhamos a rede mais barata (os  $\Pi_i \neq 0$  correspondem às variáveis que

não pertencem à base, com isto conseguimos redes mais baratas). Quando realizamos o "updating", a coluna da matriz correspondente aos  $\Pi_i \neq 0$  será multiplicada por zero pois não passamos nenhum requisito de fluxo pelos arcos correspondentes a estes  $\Pi_i$ . Com isto fica justificado o fato da não necessidade (em termos) da realização do "updating" neste tipo de problema.

#### 2.3.4 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Somatória de Fluxos, Introduzindo-se Custos

Dois são os tipos de problemas referentes a multicomodidades em redes de fluxo com mínimo custo. Esses dois problemas já foram aqui apresentados mas sem ser feita referência a custo (2.17) e (2.18). A partir de agora introduziremos custos, ou seja, associado com todos os arcos da rede existe um custo  $c_i$ , o qual é referente ao custo de transporte de uma unidade de fluxo através do respectivo arco  $i$ . O problema (2.17) requer certas unidades de fluxo, sem se preocupar com as comodidades, entre as fontes e os receptores com um custo total mínimo.

Sejam :

$b_o$  - quantidade de fluxo requerida ;

$A = [ a_{ij} ]$  - matriz de arcos incidentes ;

$x_j$  - quantidade de fluxo na cadeia  $j$  ;

$c_i$  - custo de transporte de uma unidade de fluxo através do arco  $i$  ;

$c_j^*$  - custo de transporte de uma unidade de fluxo através da cadeia  $j$  ;

$b_i$  - capacidades do arco  $i$  .

O problema é :

$$\min Z = c_j^* x_j$$

sujeito a :

(2.19)

$$\sum x_j - s_o = b_o \quad ,$$

$$\sum a_{ij} x_j + s_i = b_i \quad ,$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad s_o \geq 0 \quad , \quad s_i \geq 0 \quad .$$

(Cada coluna de  $A = [a_{ij}]$  em (2.19) é uma cadeia ligando uma fonte a um receptor de alguma comodidade)

Seja a rede apresentada na Figura 2.12 referente às capacidades dos arcos e associamos a todos os arcos desta rede um custo que é mostrado na Figura 2.13. O nosso objetivo é conseguir que a soma dos fluxos do nó 1 ao nó 3 e do nó 2 ao nó 4 seja de oito unidades, com um mínimo custo.

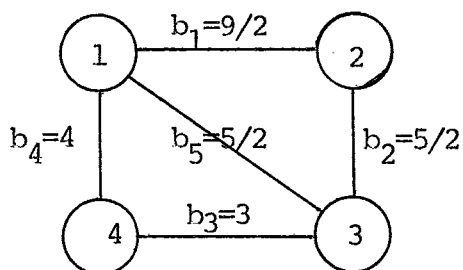


Figura 2.12  
Capacidade dos Arcos

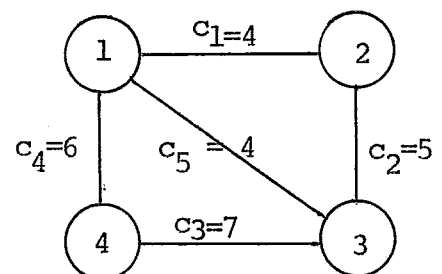


Figura 2.13  
Custo dos Arcos

$$\begin{aligned}
 \sum x_j & & -s_0 & = b_0 \\
 \sum a_{1j} x_j + s_1 & & & = b_1 \\
 \sum a_{2j} x_j & + s_2 & & = b_2 \\
 \sum a_{3j} x_j & & + s_3 & = b_3 \\
 \sum a_{4j} x_j & & & + s_4 & = b_4 \\
 \sum a_{5j} x_j & & & & + s_5 & = b_5
 \end{aligned}$$

(No nosso, a quantidade de fluxo requerido é 8,  $b_0 = 8$  )

No Quadro 2.1' que apresentaremos a seguir, o valor da função objetivo é zero ( $-Z=0$ ), valor de partida, as capacidades dos arcos da rede são expressas em função das variáveis de folga e o vetor  $b$  se encontra ao lado esquerdo do Quadro. No mais, é igual ao simplex revisado.

QUADRO 2.1'

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_1$
$-Z$	0	$\Pi_0$	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	$\Pi_5$	
$s_0$	-8	1						
$s_1$	9/2		1					
$s_2$	5/2			1				
$s_3$	3				1			
$s_4$	4					1		
$s_5$	5/2						1	

É muito importante se notar que este problema não é primal viável, pois na coluna 1 temos um elemento negativo ( $a_{10} < 0$ ) e para ser primal viável teríamos que ter todos os elementos da coluna 1 não negativos ( $a_{i0} \geq 0$ ). Portanto, para podermos resolver este problema temos que primeiramente torná-lo primal viável, e para isto vamos introduzir arbitrariamente tantas colunas (cadeias que satisfaçam o requisito de ligação entre os nós previamente estabelecidos, 1-3 e 2-4) quanto for necessário para retirarmos esta inviabilidade. Como todas as colunas são da forma  $[-1, \underline{a}_j]$ , (-1) porque é o coeficiente de  $x_j$  na equação  $-\sum x_j + s_0 = -b_0$ , e em (-Z) temos o custo total desta coluna. Então, a medida que vamos introduzindo estas colunas na base, vamos gradativamente eliminando a inviabilidade, pois vamos tornando o valor de  $s_0$  na base, positivo. Quando isto ocorrer,  $s_0 \geq 0$ , então paramos de gerar colunas (cadeias), pois o problema será primal viável.

Vamos agora gerar a primeira destas colunas, isto é, temos que gerar cadeias que unam os nós 1 e 3 e os nós 2 e 4 sem nos preocuparmos com as capacidades dos arcos destas cadeias, pois somente estamos interessados em gerar cadeias que unam os nós previamente estabelecidos. Como primeira cadeia será a que une os nós 1 e 3 da rede  $G = [N, A]$  da Figura 2.12, usando-se apenas o arco 5. Portanto, temos  $\underline{a}_1 = [0, 0, 0, 0, 1]$ . O custo desta cadeia é quatro,  $c_5 = 4$  pois somente usamos o arco 5. Com isto, podemos montar o vetor coluna completo que será posicionado sob  $x_1$  no Quadro 2.1', que é:

$$[ 4, -1, 0, 0, 0, 0, 1 ]$$

O valor do vetor  $\underline{\Pi}$  de partida, onde  $\underline{\Pi} = (\Pi_0, \Pi_1)$  é zero, portanto  $\underline{\Pi} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

Apresentaremos agora o Quadro 2.1'.1 que é exatamente o Quadro 2.1' com o vetor  $\underline{\Pi}$  igual a zero e o vetor coluna  $[4, -1, 0, 0, 0, 0, 1]$  que será posicionado sob  $x_1$

QUADRO 2.1'.1

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_1$
-Z	0	0	0	0	0	0	0	4
$s_0$	-8	1						-1
$s_1$	9/2		1					0
$s_2$	5/2			1				0
$s_3$	3				1			0
$s_4$	4					1		0
$s_5$	5/2						1	1

Determinamos o elemento pivô :

$$\text{pivô} = \min \{ 5/2 / 1 \} = 5/2 \quad .$$

Realizamos o pivoteamento e teremos o Quadro 2.1'.2.

QUADRO 2.1'.2

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_2$
-z	-10						-4	
$s_0$	-11/2	1					1	
$s_1$	9/2		1					
$s_2$	5/2			1				
$s_3$	3				1			
$s_4$	4					1		
$x_1$	5/2						1	

Portanto, o problema ainda continua primal inviável pois na coluna 1 ainda temos um elemento negativo ( $a_{10} \neq 0$ ). Iremos então gerar uma segunda cadeia que será posicionada sob  $x_2$  e esta segunda cadeia unirá os nós 1 e 3 da rede  $G = [N, A]$  da Figura 2.12. Mas, usando os arcos 1 e 4, teremos  $\underline{a}_2 = [1, 0, 0, 1, 0]$ . O custo desta cadeia é dez,  $c_1 + c_4 = 4 + 6 = 10$ . Com isto, o vetor coluna completo que será posicionado sob  $x_2$  no Quadro 2.1'.2 é:

$$[10, -1, 1, 0, 0, 1, 0]$$

Determinando-se o elemento pivô do Quadro 2.1'.2 já com o vetor coluna posicionado sob  $x_2$  temos :

$$\text{pivô} = \min (9/2 / 1, 4/1) = 4/1 = 4.$$

Portanto, o elemento pivô do Quadro 2.1'.2 é o 1, mas referente a  $s_4$ .

Realizando-se o pivoteamento no Quadro 2.1'.2, já com o vetor  $[10, -1, 1, 0, 0, 1, 0]$  posicionado sob  $x_2$  teremos o Quadro 2.1'.3.

QUADRO 2.1'.3

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_2$	$x_3$
$-Z$	-50					-10	-4	0	
$s_0$	-3/2	1			1	1	1	0	
$s_1$	1/2		1			-1		0	
$s_2$	5/2			1				0	
$s_3$	3				1			0	
$x_2$	4					1		1	
$x_1$	5/2						1	0	

Podemos constatar que o problema ainda não se tornou primal viável, pois temos elemento negativo ( $a_{10} \neq 0$ ). Vamos gerar uma terceira coluna que será posicionada sob  $x_3$ , mas faremos com que esta cadeia una os nós 2 e 4 da rede  $G = [N, A]$  da



Figura 3.12 , usando-se os arcos 2 e 3 então, teremos  $a_3 = [0, 1, 1, 0, 0]$  , o custo desta cadeia é 12 ,  $c_2 + c_3 = 5+7 = 12$  . O vetor coluna completo que será posicionado sob  $x_3$  no Quadro 2.1'.3 é :

$$[12, -1, 0, 1, 1, 0, 0]$$

O elemento pivô do Quadro 2.1'.3 já com o vetor coluna posicionado sob  $x_3$  é :

$$\text{pivô} = \min \{5/2 / 1, 3/1\} = 5/2 / 1 = 5/2$$

Portanto, o elemento pivô do Quadro 2.1'.3 é o 1, mas referente a  $s_2$  .

Realizando-se o pivoteamento no Quadro 2.1'.3, já com o vetor  $[12, -1, 0, 1, 1, 0, 0]$  posicionado sob  $x_3$  , teremos o Quadro 2.1'.4 :

QUADRO 2.1'.4

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_3$
-z	-80	0	0	-12	0	-10	-4	0
$s_0$	1	1		1		1	1	0
$s_1$	1/2		1			-1		0
$x_3$	5/2			1				1
$s_3$	1/2			-1	1			0
$x_2$	4					1		0
$x_1$	5/2						1	0

Conseguimos, com a introdução deste último vetor posicionado sob  $x_3$ , reduzir a inviabilidade do primal no Quadro 2.1'. 4 onde todos os elementos da coluna 1 são não negativos ( $a_{10} \geq 0$ ).

Determinando-se o elemento pivô do Quadro 2.1'.4, sabendo-se que  $s_2$  entrará na base, temos:

$$\text{pivô} = \min \{1/1, 5/2 / 1\} = 1/1 = 1$$

Portanto, o elemento pivô do Quadro 2.1'.4 é o 1, mas referente a  $s_0$ , isto é,  $s_0$  sairá da base.

Realizando-se o pivoteamento no Quadro 2.1'.4, teremos o Quadro 2.2 .

QUADRO 2.2

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
-z	-68	12	0	0	0	2	8
$s_2$	1	1		1		1	1
$s_1$	1/2		1			-1	
$x_3$	3/2	-1		0		-1	-1
$s_3$	3/2	1		0	1	1	1
$x_2$	4					1	
$x_1$	5/2						1

Devemos notar que o custo relativo é  $\bar{c}_j^* = c_j^* - \Pi a_j$ , como toda coluna é da forma  $[-1, \underline{a}_j]$  então  $\bar{c}_j^* = c_j^* - \Pi a_j = c_j^* + (-\Pi_0, \Pi_1) [-1, \underline{a}_j] = -\Pi_0 + \sum_i (c_i - \Pi_i) a_{ij}$ .  $\Pi_0$  é o preço de  $s_0$ .

A partir deste Quadro 2.2, nós podemos interpretar  $c_i - \Pi_i$  como o comprimento do arco e com isto tentar encontrar a menor cadeia unindo os nós 1 e 3 ou 2 e 4.

Neste Quadro 2.2 temos :

Cadeia unindo nós 1 e 3 usando arcos 1 e 2 :

$$\left. \begin{array}{l} c_1 - \Pi_1 = 4 + 0 = 4 \\ c_2 - \Pi_2 = 5 + 0 = 5 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 9 ;$$

cadeia unindo nós 1 e 3 usando o arco 5 :

$$\left. c_5 - \Pi_5 = 4 + 8 = 12 \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 12 ;$$

cadeia unindo nós 1 e 3 usando arcos 3 e 4 :

$$\left. \begin{array}{l} c_3 - \Pi_3 = 7 + 0 = 7 \\ c_4 - \Pi_4 = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 15 ;$$

cadeia unindo nós 2 e 4 usando arcos 2 e 3 :

$$\left. \begin{array}{l} c_2 - \Pi_2 = 5 + 0 = 5 \\ c_3 - \Pi_3 = 7 + 0 = 7 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 12 ;$$

cadeia unindo nós 2 e 4 usando arcos 1 e 4 :

$$\left. \begin{array}{l} c_1 - \Pi_1 = 4 + 0 = 4 \\ c_4 - \Pi_4 = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 12 .$$

Portanto, a menor cadeia unindo os nós 1 e 3 é a de comprimento 9, a que usa os arcos 1 e 2. Com relação aos nós 2 e 4, as duas cadeias têm o mesmo comprimento, 12. Conseqüentemente iremos acrescentar ao Quadro 2.2, gerando o Quadro 2.3, um vetor coluna que será posicionado sob  $x_4$  que nada mais é do que um vetor referente à cadeia mais curta, a de comprimento 9, mas já tendo-se realizado o "updating". Denominando-se esta cadeia de comprimento 9 de cadeia 4 então temos :

$$\underline{a}_4 = [1, 1, 0, 0, 0]$$

Como todos os vetores coluna são da forma  $[-1, \underline{a}_j]$ , temos:

$$[-1, 1, 1, 0, 0, 0] \quad .$$

Realizando-se o "updating" :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Como :

$$\begin{aligned} \bar{c}_4^* &= c_4^* - \Pi \underline{a}_4^* = c_4^* - (-\Pi_0, \Pi_1) [-1, \underline{a}_4] = -\Pi_0 + \sum_{i=1}^2 (c_i - \Pi_i) a_{i4} = \\ &= -\Pi_0 + [(c_1 - \Pi_1) \cdot a_{14} + (c_2 - \Pi_2) \cdot a_{24}] = -12 + [(4+0) \cdot 1 + (5+0) \cdot 1] = -3 \\ \bar{c}_4^* &= -3 . \end{aligned}$$

Com  $\bar{c}_4^*$  temos o vetor coluna que será posicionado sob  $x_4$  completo, e é :

$$[-3, 0, 1, 1, -1, 0, 0]$$

Temos o Quadro 2.3 :

QUADRO 2.3

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x_4$
-z	-68	12	0	0	0	2	8	-3
$s_2$	1	1		1		1	1	0
$s_1$	1/2		1			-1		1
$x_3$	3/2	-1				-1	-1	1
$s_3$	3/2	1			1	1	1	-1
$x_2$	4					1		0
$x_1$	5/2						1	0

Devemos introduzir  $x_4$  na base, por ser a "cadeia" mais curta. Determinando-se o elemento pivô teremos:

$$\text{pivô} = \min \{ 1/2 / 1, 3/2 / 1 \} = 1/2 / 1 = 1/2$$

Portanto, o elemento pivô é 1 e  $s_1$  sairá da base .

Realizando-se o pivoteamento no Quadro 2.3, teremos o Quadro 2.4 .

QUADRO 2.4

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
-Z	-66,5	12	3			-1	8
$s_2$	1	1		1		1	1
$x_4$	1/2		1			-1	
$x_3$	1	-1	-1				-1
$s_3$	2	1	1		1		1
$x_2$	4					1	
$x_1$	5/2						1

Determinando-se o elemento pivô no Quadro 2.4, sabendo-se que  $s_4$  entrará na base, temos:

$$\text{pivô} = \min \{1/1, 2/1, 5/2 / 1\} = 1/1 = 1$$

Portanto, o elemento pivô é 1 e  $s_2$  sairá da base.

Realizando-se o pivoteamento no Quadro 2.4, teremos o Quadro 2.5.

	1	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
-Z	-65.5	13	3	1			9
$s_4$	1	1		1		1	1
$x_4$	3/2	1	1	1			
$x_3$	1	-1	-1				-1
$s_3$	2	1	1		1		1
$x_2$	3	-1		-1			-1
$x_1$	5/2						1

Interpretaremos novamente  $c_i - \Pi_i$  como o comprimento do arco e tentaremos encontrar a menor cadeia unindo os nós 1 e 3 ou 2 e 4 .

Neste Quadro 2.5, temos:

Cadeia unindo nós 1 e 3, usando arcos 1 e 2 :

$$\left. \begin{array}{l} c_1 - \Pi_1 = 4+3 = 7 \\ c_2 - \Pi_2 = 5+1 = 6 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 13 ;$$

Cadeia unindo nós 1 e 3, usando o arco 5 :

$$\left. \begin{array}{l} c_5 - \Pi_5 = 4+9 = 13 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 13 ;$$

Cadeia unindo nós 1 e 3 , usando arcos 3 e 4 :

$$\left. \begin{array}{l} c_3 - \Pi_3 = 7+0 = 7 \\ c_4 - \Pi_4 = 6+0 = 6 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 13 ;$$

Cadeia unindo nós 2 e 4 , usando arcos 2 e 3 :

$$\left. \begin{array}{l} c_2 - \Pi_2 = 5+1 = 6 \\ c_3 - \Pi_3 = 7+0 = 7 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 13 ;$$

Cadeia unindo nós 2 e 4, usando arcos 1 e 4 :

$$\left. \begin{array}{l} c_1 - \Pi_1 = 4+3 = 7 \\ c_4 - \Pi_4 = 6+0 = 6 \end{array} \right\} \text{ comprimento total da cadeia é } 13 .$$

Portanto, todas as cadeias unindo os nós 1 e 3 ou 2 e 4 possuem o mesmo comprimento 13 .

No Quadro 2.5, temos  $\Pi_0 = 13$  e conseqüentemente ,  
 $-\Pi_0 + \sum_i (c_i - \Pi_i) a_{ij} \geq 0$  pois todas as cadeias apresentam um comprimento total igual a 13 e portanto a solução atual é ótima. Concluímos que a solução é ótima pelo item 2.1.4.1 (Variação nos Dados do Simplex Revisado) quando consideramos três tipos de variações de dados e no terceiro temos:

Se um novo vetor coluna  $\underline{a}_{n+1}$  com custo  $c_{n+1}$  é acrescentado, então a solução ótima original  $\underline{x}_b$  continuará a ser ótima se:

$$\bar{c}_{n+1}^* = c_{n+1}^* - \Pi \underline{a}_{n+1}^* \geq 0$$

ou

$$\begin{aligned} c_{n+1}^* - \Pi \underline{a}_{n+1} &= c_{n+1}^* - (-\Pi_0, \Pi_1) \begin{bmatrix} -1 \\ \underline{a}_{n+1} \end{bmatrix} = \\ &= -\Pi_0 + \sum_i (c_i - \Pi_i) a_{i,n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Como o problema é de minimização, se  $\bar{c}_{n+1} \geq 0$ , então a solução atual é ótima e se  $\bar{c}_{n+1} < 0$ , a coluna deverá ser introduzida na base. Isto foi apresentado no item 2.1.4 (Método do Simplex Revisado).

$$\bar{c}_1^* = -\Pi_0 + [(c_5 - \Pi_5) a_{51}] = -13 + [(4+9) \cdot 1] = -13 + 13 = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2^* &= -\Pi_0 + [(c_1 - \Pi_1) a_{12} + (c_4 - \Pi_4) a_{42}] = -13 + [(4+3) \cdot 1 + (6+0) \cdot 1] = \\ &= -13 + 13 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_3^* &= -\Pi_0 + [(c_2 - \Pi_2) a_{23} + (c_3 - \Pi_3) a_{33}] = -13 + [(5+1) \cdot 1 + (7+0) \cdot 1] = \\ &= -13 + 13 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{c}_4^* &= -\pi_0 + [(c_1 - \pi_1)a_{14} - (c_2 - \pi_2)a_{24}] = -13 + [(4+3) \cdot 1 + (5+1) \cdot 1] = \\ &= -13 + 13 = 0\end{aligned}$$

Portanto, como todas as cadeias são de mesmo comprimento, e todos os  $\bar{c}_i^*$  são nulos, então qualquer coluna (cadeia) que pegarmos não será possível introduzi-la na base pois  $\bar{c}_i^*$  é não negativo.

Já temos a certeza de estarmos na solução ótima, vamos agora interpretar o Quadro 2.5 que nos forneceu esta solução ótima.

Primeiramente vamos determinar os valores das variáveis básicas, que aparecem na coluna 1. São eles:

$$x_1 = 5/2 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad ; \quad x_3 = 1 \quad \text{e} \quad x_4 = 3/2$$

Como no item 2.3.3 (Um Exemplo Numérico Completo sobre Viabilidade de Fluxos), o valor de  $x_1 = 5/2$  significa que na cadeia  $a_1 = [0, 0, 0, 0, 1]$  temos passando uma quantidade de fluxo de  $x_1 \cdot a_1 = 5/2 \cdot [0, 0, 0, 0, 1] = [0, 0, 0, 0, 5/2]$ , que é mostrada na Figura 2.14.

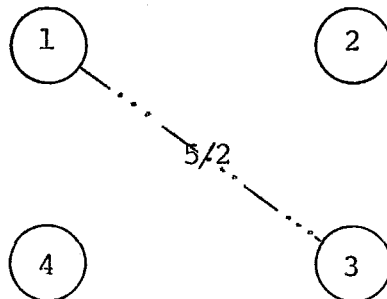


Figura 2.14

$x_2 = 3$  significa que na cadeia  $a_2 = [1, 0, 0, 1, 0]$  temos passando uma quantidade de fluxo de  $x_2 \cdot a_2 = 3 \cdot [1, 0, 0, 1, 0] = [3, 0, 0, 3, 0]$  que está na Figura 2.15.

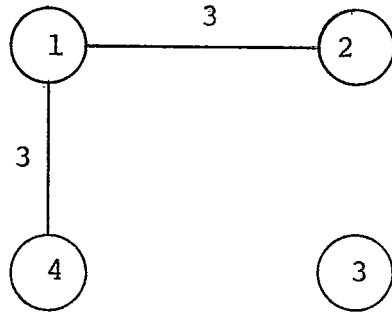


Figura 2.15

$$x_3 = 1, \quad a_3 = [0, 1, 1, 0, 0] \rightarrow x_3 \cdot a_3 =$$

$$= 1 \cdot [0, 1, 1, 0, 0] = [0, 1, 1, 0, 0], \text{ Figura 2.16 .}$$

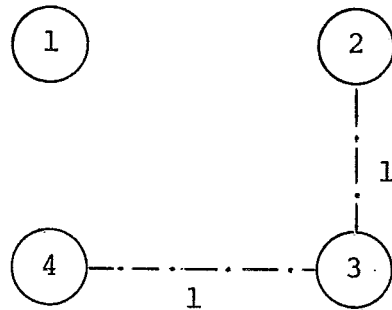


Figura 2.16

$$x_4 = 3/2, \quad a_4 = [1, 1, 0, 0, 0] \rightarrow x_4 \cdot a_4 =$$

$$= 3/2 \cdot [1, 1, 0, 0, 0] = [3/2, 3/2, 0, 0, 0], \text{ Figura 2.17 .}$$

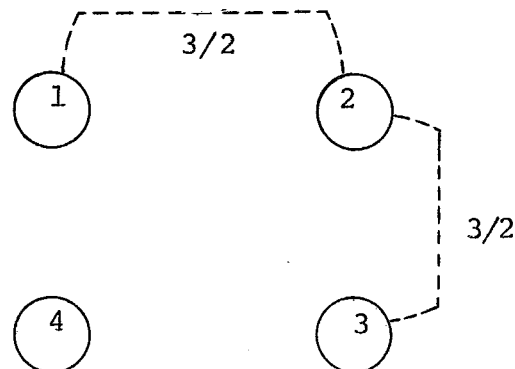


Figura 2.17

Sobrepondo-se as Figuras 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17 ,

temos a Figura 2.18 :

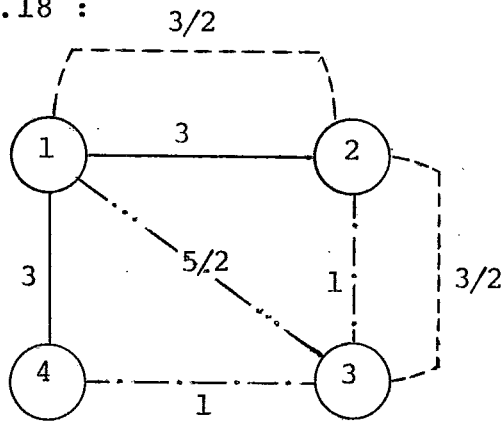


Figura 2.18

Fazendo-se a somatória dos fluxos nos arcos respectivos da Figura 2.18, teremos a Figura 2.19 :

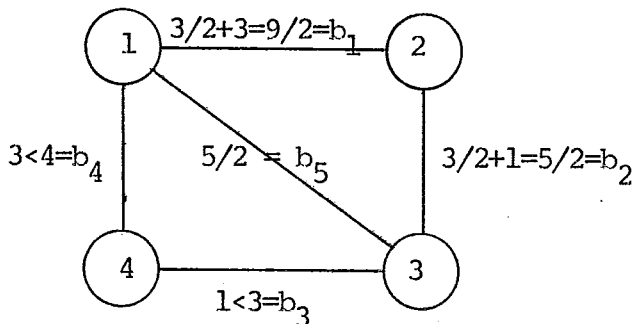


Figura 2.19

Conforme apresentado na Figura 2.19, as capacidades dos arcos são preservadas, isto é, a quantidade de fluxo que passa em cada um dos arcos é menor ou igual à sua respectiva capacidade.

Determinaremos agora o custo total desta rede da Figura 2.19 que nada mais é do que o custo de transporte de uma unidade de de fluxo no arco pela quantidade de fluxo real do arco. ( $c_i$  = custo total do arco).

Arco 1 :

$$c_1' = c_1 \cdot 9/2 = 4 \cdot 9/2 = 36/2 = 18$$

Arco 2 :

$$c_2' = c_2 \cdot 5/2 = 5 \cdot 5/2 = 25/2 = 12,5$$

Arco 3 :

$$c_3' = c_3 \cdot 1 = 7 \cdot 1 = 7$$

Arco 4 :

$$c_4' = c_4 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

Arco 5 :

$$c_5' = c_5 \cdot 5/2 = 4 \cdot 5/2 = 20/2 = 10$$

Custo Total:

$$Z = c_1' + c_2' + c_3' + c_4' + c_5' = 18 + 12,5 + 7 + 18 + 10 = 65,5$$

$$Z = 65,5$$

Observando-se novamente o Quadro 2.5 , notamos que o valor de  $Z$  é exatamente 65,5 , portanto não há necessidade de calcularmos  $Z$  com forme fizemos, pois o próprio Quadro nos dá seu valor.

Somente nos resta saber se na rede da Figura 2.19 conseguiremos satisfazer os requisitos de somatória defluxos, isto é, a somatória dos fluxos do nó 1 ao 3 e do nó 2 ao 4 ser de oito unidades.

Vamos em primeiro lugar determinar a quantidade de fluxo que está indo do nó 1 ao 3, o que é dado por  $x_1 \cdot a_1 + x_4 \cdot a_4$ . Sobrepondo-se as Figuras 2.14 e 2.17, temos a rede que representa a quantidade de fluxo que vai do nó 1 ao nó 3, Figura 2.20.

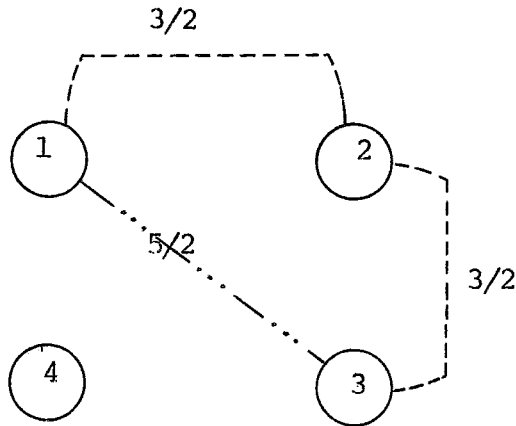


Figura 2.20

Portanto, do nó 1 ao nó 3 estão sendo transportadas  $5/2 + 3/2 = 8/2 = 4$  unidades de fluxo.

Com relação aos nós 2 e 4, a quantidade de fluxo que os une é dada por  $x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3$ . Sobrepondo-se as Figuras 2.15 e 2.16 temos a Figura 2.21 que representa a rede com a quantidade de fluxo que vai do nó 2 ao nó 4.

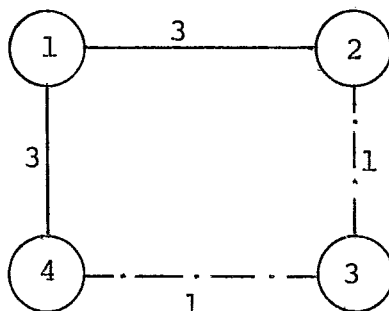


Figura 2.21

Conforme apresentado na Figura 2.21, do nó 2 ao nó 4 estão sendo transportadas  $3+1 = 4$  unidades de fluxo. Com isto conseguimos atingir o objetivo do problema a que nos propusemos que era a somatória dos fluxos entre os nós 1 e 3 e os nós 2 e 4 ser de oito unidades, a um mínimo custo. Quanto à somatória dos fluxos ser oito unidades foi acima mostrado e o que nos garante o fato da rede ser a de mínimo custo é o Método do Simplex Revisado.

CAPÍTULO 3S Í N T E S E3.1 - Definição do Problema

Em linhas gerais, o Problema de Síntese é aquele em que se necessita encontrar as capacidades de uma rede a ser construída, de modo que satisfaça a requisitos de fluxo previamente estabelecidos e tenha um custo total de construção mínimo.

Como dados do Problema, temos:

(i) Uma rede não orientada  $[N, A]$  existente, onde:

$N$  = conjunto de nós =  $\{1, 2, \dots, n\}$

$A$  = conjunto dos arcos =  $\{(i, j) / i, j \in N; i \neq j\}$ , estes arcos são numerados  $1, 2, \dots, m$  com  $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

(ii) Um conjunto  $\{r_{ij}(t) / i, j \in N; t=1, 2, \dots, T\}$  de requisitos de fluxo simultâneos para o período de tempo  $t$ , onde :

$r_{ij}(t) = r_{ji}(t) =$  fluxo requerido entre os nós  $i, j \in N$ , durante o período  $t$ ,  $t=1, 2, \dots, T$ .

(iii) Um vetor  $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  de custos unitários para incremento da capacidade, onde:

$c_i =$  custo para aumentar de uma unidade a capacidade do arco  $i \in A$ .

Como objetivo do Problema, temos :

- (i) Uma rede não orientada  $[N,A,Y]$  , usando-se a rede  $[N,A]$  já existente , e  $\underline{Y} \geq \underline{0}$  .
- (ii) A rede  $[N,A,Y]$  seja viável, isto é, satisfaça aos requisitos de fluxo em todos os períodos.
- (iii)  $\min \underline{c} \underline{Y}$  .

### 3.2 - Formulação do Problema

Orientando-se a rede  $[N,A,Y]$ , um determinado fluxo que vai de um nó  $p \in N$  a um nó  $q \in N$  , tem o seu valor notado como  $f_{pq}$  e  $x_{ij}^{pq}$  é o valor do fluxo que passa no arco  $(i,j) \in A$  saindo do nó  $p \in N$  e indo ao nó  $q \in N$  . Como em todos os nós de  $N$  existe a conservação do fluxo, temos:

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^{pq}(t) - \sum_{k \in N} x_{jk}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j=p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j=q \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} (\forall j,p,q \in N) \\ (\forall t=1,2,\dots,T) \end{array} \right\}$$

Seja  $Y_{ij}$  a capacidade do arco  $(i,j) \in A$  , então:

$$\sum_{p,q \in N} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq Y_{ij} \quad , \quad (\forall (i,j) \in A) \quad , \quad (\forall t=1,2,\dots,T) .$$



Se  $r_{pq}(t)$  é o requisito de fluxo entre os nós  $p \in N$  e  $q \in N$  no tempo  $t$ , o fato da rede ser capaz de transportar todos os fluxos a qualquer período de tempo, pode assim ser expresso:

$$f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t) \quad , \quad (\forall p, q \in N), \quad (\forall t=1, 2, \dots, T).$$

Após esta apresentação, podemos colocar o Problema da seguinte forma:

$$\min \underline{c} \underline{Y} \tag{3.1}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^{pq}(t) - \sum_{k \in N} x_{jk}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j=p \\ 0 & \text{se } j \neq p, q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j=q \end{cases} \left. \vphantom{\sum} \right\} \begin{matrix} (\forall j, p, q \in N), \\ (\forall t=1, 2, \dots, T) \end{matrix}$$

$$\sum_{p, q \in N} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq y_{ij} \quad , \quad (\forall (i, j) \in A), \quad (\forall t=1, 2, \dots, T) .$$

$$f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t) \quad , \quad (\forall p, q \in N) \quad , \quad (\forall t=1, 2, \dots, T).$$

$$\underline{Y} \geq \underline{0}$$

Esta formulação (3.1) de um Problema de Programação Linear nos apresenta uma série de limitações para sua resolução, pois caso tenhamos uma rede  $[N, A, Y]$  completa, ou seja, com um número de arcos  $m = \frac{n(n-1)}{2}$  e onde  $h_t$  é o número total de requisitos para um determinado período  $t$ , teríamos para cada período de tempo  $t$

um PPL com :

$$\text{nº de variáveis} = \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^2 + n(n-1) \quad ;$$

$$\text{nº de restrições} = n \left[ 2^{h_t} \frac{(n-1)n}{2} \right] + n(n-1)$$

o que torna praticamente impossível sua resolução para redes mesmo com números relativamente pequenos de nós.

Em virtude disto, vamos desenvolver uma série de for mulações possíveis, até conseguirmos chegar a uma formulação que nos permita solucionar, em termos práticos, o problema.

Seja o conjunto dos vetores de capacidades  $\underline{N}^t \in \mathbb{R}^m$ , correspondentes a todas as redes de  $\underline{m}$  arcos que satisfazem aos re quisitos de fluxo num determinado período  $\underline{t}$ .

Denominaremos de  $\mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$  o politopo formado por todos os  $\underline{N}^t \in \mathbb{R}^m$ ,  $\underline{N}^t \geq \underline{0}$ .

Podemos formular as seguintes proposições a respeito deste politopo:

Proposição 2 :

O politopo  $\mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$  é convexo .

Prova:

(Esta proposição é exatamente igual à Proposição 1, apresentada no item 2.3.2 Viabilidade de Fluxos).

Proposição 3 :

O politopo  $P_t^m \subset \mathbb{R}^m$  é ilimitado.

Prova:

(i) Seja uma rede  $G = [N, A, N^t]$  com  $\underline{m}$  arcos.

(ii)  $\underline{\phi}^t \in \mathbb{R}^m$  é a quantidade de fluxo que desejamos passar a través da rede  $G$ ,  $\underline{\phi}^t = [\phi_1^t, \phi_2^t, \dots, \phi_m^t]$ .

(iii)  $\underline{N}^t \in P_t^m$  é um vetor que define a capacidade de uma rede viável. Este vetor pertence a  $\mathbb{R}^m$  pois fixamos que todas as redes viáveis deveriam ter o mesmo número de arcos da rede  $G$ , portanto  $\underline{m}$ .

De (ii) e (iii)  $\rightarrow$

$$\rightarrow \underline{\phi}^t \leq \underline{N}^t$$

$\forall \lambda^t \geq 1$  temos:

$$\underline{\phi}^t \leq \lambda^t \underline{N}^t$$

portanto,  $\lambda^t \underline{N}^t$  também é viável  $\forall \lambda^t \geq 1$ . △

Proposição 4 :

Se  $\underline{N}^t \in IP_t^m$  e  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\underline{y} \geq \underline{N}^t \geq \underline{0} \rightarrow$

$\rightarrow \underline{y} \in IP_t^m$ .

Prova:

(i) Seja uma rede  $G = [N, A, N^t]$  com  $\underline{m}$  arcos.

(ii)  $\underline{\phi}^t \in \mathbb{R}^m$  é a quantidade de fluxo que desejamos passar a través da rede  $G$ ,  $\underline{\phi}^t = [\phi_1^t, \phi_2^t, \dots, \phi_m^t]$ .

(iii)  $\underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m$  é um vetor que define a capacidade de uma rede viável. Este vetor pertence a  $\mathbb{R}^m$  pois fixamos que todas as redes viáveis deveriam ter o mesmo número de arcos da rede  $G$ , portanto  $\underline{m}$ .

De (ii) e (iii)  $\rightarrow$

$$\rightarrow \underline{\phi}^t \leq \underline{N}^t .$$

Como  $\underline{Y} \geq \underline{N}^t \rightarrow$

$$\rightarrow \underline{\phi}^t \leq \underline{N}^t \leq \underline{Y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Y} \geq \underline{\phi}^t$$

portanto  $\underline{Y}$  é viável

$$\rightarrow \underline{Y} \in \mathbb{P}_t^m \quad \Delta$$

Seja  $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$  um politopo convexo qualquer, podendo ser ilimitado.

DEFINIÇÃO 1 :

Dado um politopo convexo  $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$  denominamos o cone

$$\mathbb{K} = \{ \underline{d} \in \mathbb{R}^m / \forall \underline{N} \in \mathbb{H}^m, \forall \lambda \geq 0, \underline{y} = \underline{N} + \lambda \underline{d} \text{ implica } \underline{y} \in \mathbb{H}^m \} , \dots (3.2)$$

como sendo o cone assintótico de  $\mathbb{H}^m$ .

TEOREMA 4 :

Seja o politopo convexo  $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$  definido por

$$\mathbb{H}^m = \{ \underline{N} \in \mathbb{R}^m / \underline{AN} \leq \underline{b} \} ,$$

onde  $A$  é uma matriz  $p \times m$ ,  $\underline{b} \in \mathbb{R}^p$ . O cone poliédrico convexo

$$\mathbb{M} = \{ \underline{\ell} \in \mathbb{R}^m / A\underline{\ell} \leq \underline{0} \} \quad (3.3)$$

é o cone assintótico de  $\mathbb{H}^m$ .

Prova:

Consideremos a DEFINIÇÃO 1, portanto provaremos que  $\mathbb{K} = \mathbb{M}$ .

→

Seja  $\underline{\ell} \in \mathbb{M}$

$$\mathbb{H}^m = \{ \underline{N} \in \mathbb{R}^m / A\underline{N} \leq \underline{b} \} \quad (3.4)$$

$$\mathbb{M} = \{ \underline{\ell} \in \mathbb{R}^m / \beta A\underline{\ell} \leq \underline{0}, \forall \beta \geq 0 \} \quad (3.5)$$

Somando-se (3.4) e (3.5), temos:

$$A\underline{N} + \beta A\underline{\ell} \leq \underline{b} + \underline{0}$$

$$A(\underline{N} + \beta \underline{\ell}) \leq \underline{b}$$

$$\text{Como } \underline{N} \in \mathbb{H}^m, \quad \beta \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{N} + \beta \underline{\ell} \in \mathbb{H}^m$$

pela definição de  $\mathbb{K} \rightarrow$

$$\rightarrow \underline{\ell} \in \mathbb{K}'$$

$$\rightarrow \mathbb{M} \subset \mathbb{K}$$

←

Seja  $\underline{d} \in \mathbb{K}$ ,  $\underline{N} \in \mathbb{H}^m$

pela definição de  $\mathbb{H}^m \rightarrow$

$$\rightarrow \underline{AN} \leq \underline{b} \quad (i)$$

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \underline{N} + \lambda \underline{d} \in \mathbb{H}^m \rightarrow$$

$$\rightarrow A(\underline{N} + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b}$$

$$\underline{AN} + \lambda \underline{Ad} \leq \underline{b}$$

$$\underline{AN} \leq \underline{b} - \lambda \underline{Ad}$$

$$\text{Suponhamos } (\underline{Ad})_i > 0 \quad (ii)$$

$$(\underline{AN})_i \leq b_i - \lambda (\underline{Ad})_i$$

Por (i) e (ii), temos :

$$\frac{(\underline{AN})_i - b_i}{(\underline{Ad})_i} \leq 0$$

Como  $\lambda \geq 0$

$$\rightarrow \lambda > - \left[ \frac{(\underline{AN})_i - b_i}{(\underline{Ad})_i} \right]$$

o que contradiz a suposição de  $(\underline{Ad})_i > 0$

$$\rightarrow (\underline{Ad})_i \leq 0$$

$$\rightarrow \underline{d} \in \mathbb{M}$$

$$\rightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{M}$$

Portanto,  $\mathbb{K}$  é um cone poliédrico convexo .

△

#### TEOREMA 5 :

Seja o politopo convexo  $\mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$ , que satisfaz às PROPOSIÇÕES 3 e 4 . O cone poliédrico convexo  $\mathbb{L}^t \in \mathbb{R}^m$ , definido por

$\mathbb{L}^t = \{\underline{N}^t \in \mathbb{R}^m / \underline{I}\underline{N}^t \geq \underline{0}\}$ , onde  $\underline{I}$  é uma matriz identidade de dimensão  $m \times m$ , é o cone assintótico de  $\mathbb{P}_t^m$ .

Seja  $Z^t =$  cone assintótico de  $\mathbb{P}_t^m$ .

→

Seja  $\underline{N}^t \in \mathbb{L}^t$ . Tomemos  $\underline{y} \in \mathbb{P}_t^m$  e consideremos :

$$\underline{z}^t = \underline{y}^t + \lambda^t \underline{N}^t, \quad \forall \lambda^t \geq 0$$

Devemos provar que :

$$\underline{z}^t \in \mathbb{P}_t^m$$

$$\text{Como } \lambda^t \geq 0, \quad \underline{N}^t \geq \underline{0} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{y}^t + \lambda^t \underline{N}^t \geq \underline{y}^t$$

$$\underline{y}^t + \lambda^t \underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{N}^t \in Z^t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbb{L}^t \subset Z^t$$

←

Tomemos  $\underline{d}^t \in Z^t$

Portanto

$$\underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m, \quad \forall \lambda^t \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{N}^t + \lambda^t \underline{d}^t \in \mathbb{P}_t^m$$

$$\rightarrow \underline{N}^t + \lambda^t \underline{d}^t \geq \underline{0}, \quad \underline{N}^t \geq \underline{0}$$

Suponhamos  $(d^t)_i < 0$  (i)

$$(N^t)_i + \lambda^t (d^t)_i \geq 0 \rightarrow$$

$$(N^t)_i \geq \lambda^t [-(d^t)_i]$$

Por (i) e  $(N^t)_i \geq 0$  temos :

$$\frac{(N^t)_i}{-(d^t)_i} \geq 0$$

Como  $\lambda^t \geq 0$

$$\rightarrow \lambda^t > \frac{(N^t)_i}{-(d^t)_i}$$

o que contradiz a suposição de  $(d^t)_i < 0$

$$\rightarrow (d^t)_i \geq 0$$

$$\rightarrow \underline{d}^t \geq \underline{0}$$

$$\rightarrow I \underline{d}^t \geq \underline{0}$$

$$\rightarrow \underline{d}^t \in \mathbb{L}^t \rightarrow$$

$$\rightarrow z^t \in \mathbb{L}^t$$

△

## DEFINIÇÃO 2 :

Como  $\mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$  é um polítopo convexo ilimitado, existe um número finito de pontos extremos desse polítopo, que denominaremos de  $\underline{N}_i^t$ .

Definamos a envoltória convexa dos pontos extremos de  $\mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$ , como sendo  $\mathbb{E}^t$  que é um polítopo convexo limitado.



$$\mathbb{E}^t = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / \tilde{N}^t = \sum_{i=1}^{k(t)} \delta_i^t \tilde{N}_i^t, \sum_{i=1}^{k(t)} \delta_i^t = 1, \delta_i^t \geq 0 \}$$

TEOREMA 6 :

O politopo convexo ilimitado

$$\mathbb{P}_t^m = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / A \tilde{N}^t \leq b^t \}$$

se não vazio, pode ser expresso como soma dos conjuntos :

$\mathbb{E}^t$  que é o politopo convexo limitado

$$\mathbb{E}^t = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / \tilde{N}^t = \sum_{i=1}^{k(t)} \delta_i^t \tilde{N}_i^t, \sum_{i=1}^{k(t)} \delta_i^t = 1, \delta_i^t \geq 0 \}$$

e  $\mathbb{L}^t$  que é o cone poliédrico convexo

$$\mathbb{L}^t = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / I \tilde{N}^t \geq 0 \} .$$

$$\mathbb{P}_t^m = \mathbb{E}^t + \mathbb{L}^t = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / \tilde{N}^t = N^{t'} + N^{t''}, N^{t'} \in \mathbb{E}, N^{t''} \in \mathbb{L}^t \} =$$

$$= \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / \tilde{N}^t = \sum_{i=1}^{k(t)} \delta_i^t \tilde{N}_i^t + I \tilde{J}^t, \sum_{i=1}^{k(t)} \delta_i^t = 1, \delta_i^t \geq 0, \tilde{J}^t \geq 0 \}$$

Prova :

[ 15 ]

Portanto, pelas proposições, teoremas e definições apresentados neste item, podemos concluir que o conjunto dos  $\tilde{N}$  viáveis para cada  $t$ , ou seja,  $\tilde{N}^t \in \mathbb{P}_t^m$  é apresentado da seguinte

maneira :

$$\forall \tilde{N}^t \in \mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{P}_t^m = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / \tilde{N}^t = \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t \tilde{N}_i^t + \sum_{j=1}^m \mu_j^t e_j, \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t = 1, \mu_j^t \geq 0 \}$$

$$n_i^t \geq 0, \mu_j^t \geq 0$$

onde ,

$e_j$  = j-ésimo vetor da base canônica

$$\mathbb{P}_t^m = \{ \tilde{N}^t \in \mathbb{R}^m / \tilde{N}^t \geq \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t \tilde{N}_i^t, \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t = 1, n_i^t \geq 0 \}$$

....(3.6)

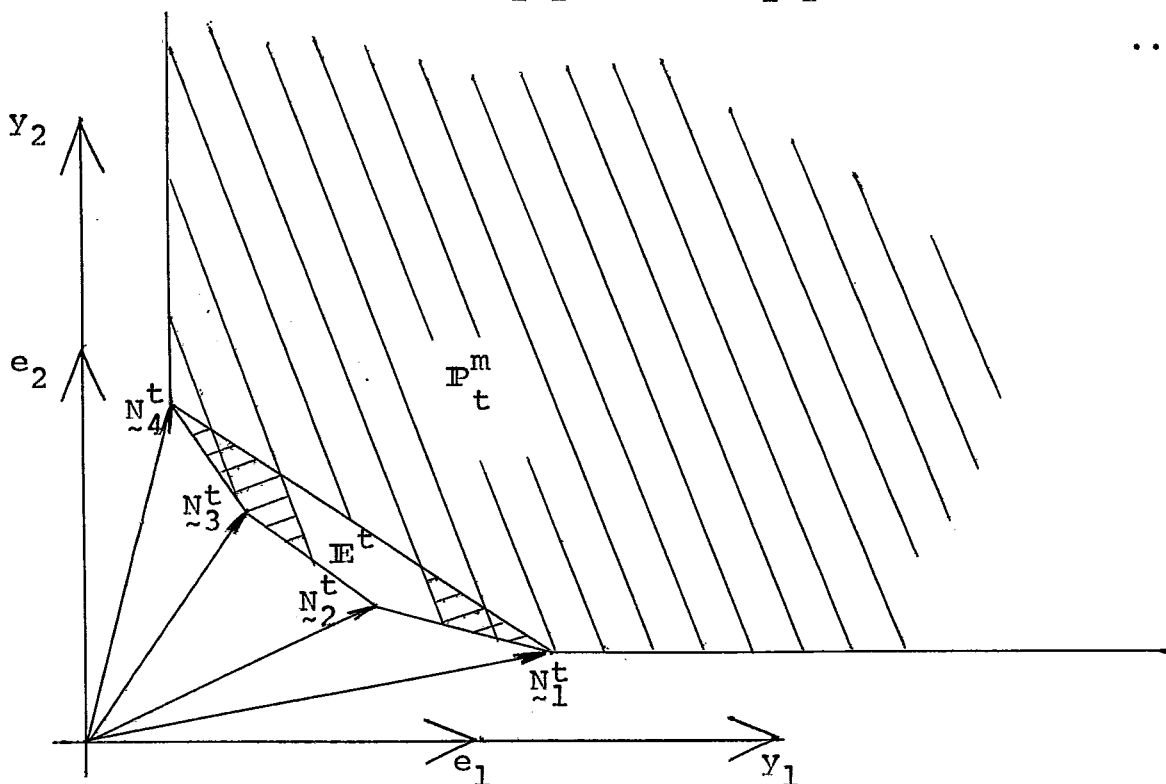


Figura 3.1

Seja  $\underline{y}^t \in \mathbb{E}^t$ , onde

$$\underline{y}^t = \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t \underline{N}_i^t, \quad \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t = 1, \quad n_i^t \geq 0$$

Portanto, se  $\underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m$  então

$$\underline{N}^t \geq \underline{y}^t$$

Por outro lado, para que uma rede com vetor de capacidades  $\underline{N}$  satisfaça aos requisitos de todos os períodos, é necessário e suficiente que:  $\underline{N} \geq \underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m, \forall t=1,2,\dots,T$ . Com isto, o problema (3.1) passa a ter a seguinte configuração:

$$\min \underline{c} \underline{N}$$

sujeito a :

(3.7)

$$\begin{array}{l} \underline{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t \underline{N}_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} n_i^t = 1, \quad n_i^t \geq 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \forall t = 1, 2, \dots, T; \quad \forall i = 1, 2, \dots, k(t)$$

Proposição 5 :

O vetor de capacidades  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  é a interseção dos politopos  $\mathbb{P}_t^m$ , ou seja :

$\underline{y}$  satisfaz (3.1) se e somente se existe  $\underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m$  tal que

$$\underline{y} \geq \underline{N}^t \in \mathbb{P}_t^m, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T.$$

Prova :



Condição necessária ; provaremos que  $\underline{y} \geq \underline{N}^t$  ,  $\forall t=1,2,\dots,T$ .

Sabemos que o vetor de capacidades  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  satisfaz ao conjunto de restrições de (3.1) . Tomando-se um particular período de tempo  $\underline{t}$  , temos :

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^{pq}(t) - \sum_{k \in N} x_{jk}^{pq}(t) = \begin{cases} -f_{pq}(t) & \text{se } j=p \\ 0 & \text{se } j \neq p,q \\ f_{pq}(t) & \text{se } j=q \end{cases} \left. \vphantom{\sum} \right\} \begin{array}{l} (\forall j,p,q \in N), \\ (\forall t=1,2,\dots,T) \end{array}$$

$$\sum_{p,q \in N} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq y_{ij}, \quad (\forall (i,j) \in A), \quad (\forall t=1,2,\dots,T)$$

$$f_{pq}(t) \geq r_{pq}(t), \quad (\forall p,q \in N), \quad (\forall t=1,2,\dots,T)$$

$$\underline{y} \geq \underline{0}.$$

$\underline{y}$  independente de  $\underline{t}$  , portanto :

$\underline{y}$  satisfaz a todos os períodos de tempo  $\underline{t}$  →

$$\rightarrow \underline{y} \in \mathbb{P}_t^m$$



Condição suficiente; provaremos que  $\forall t=1,2,\dots,T$  sempre existe  $\underline{N}^t \leq \underline{y}$  .

Seja  $N_{ij}^t$  uma das  $m$  componentes de  $\tilde{N}^t \in \mathbb{P}_t^m \subset \mathbb{R}^m$ .

Podemos então escrever uma das restrições de (3.1) da seguinte forma:

$$\sum_{p,q \in N} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq N_{ij}^t, \quad (\forall (i,j) \in A), \quad (\forall t=1,2,\dots,T).$$

Como  $\tilde{y} \geq \tilde{N}^t$ , temos:

$$\sum_{p,q \in N} |x_{ij}^{pq}(t)| \leq N_{ij}^t \leq y_{ij}, \quad (\forall (i,j) \in A), \quad (\forall t=1,2,\dots,T).$$

$$\tilde{y} \in \mathbb{P}_t^m$$

Baseando-se na formulação de  $\mathbb{P}_t^m$  e na Proposição 5 é que se justifica a transformação do problema (3.1) no problema (3.7).

$$\min \quad \tilde{c} \tilde{N}$$

sujeito a :

(3.8)

$$\begin{array}{l} \tilde{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1, \quad \lambda_i^t \geq 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \tilde{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1, \quad \lambda_i^t \geq 0 \end{array}} \right\} \forall t=1,2,\dots,T; \quad \forall i=1,2,\dots,k(t)$$

A justificativa da transformação do problema (3.7) no problema (3.8) é apresentada a seguir pela Proposição 6.

Proposição 6 :

O conjunto dos vetores  $\tilde{N}$  que satisfazem as restrições do problema (3.7) é igual ao conjunto dos vetores  $N$  que satisfazem as restrições do problema (3.8).

←

Seja:

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t = \delta \quad (i)$$

Como  $\lambda_i^t \geq 0$  e  $N_i^t \geq 0$ , então

$$\tilde{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t N_i^t \geq 0$$

Dividindo-se (i) por  $\delta$  temos :

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t / \delta = 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \tilde{N} \geq \left( \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t / \delta \right) N_i^t$$

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t / \delta = 1 = \sum_{i=1}^{k(t)} \eta_i^t$$

→

Para  $\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t = 1$ ,

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \eta_i^t = 1 \quad \text{satisfaz .}$$

Portanto, em particular satisfaz para  $\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t > 1$ .

O problema (3.8) é praticamente insolúvel, pois embora tenha  $(m+1) \cdot T$  linhas, onde cada linha representa uma restrição, portanto  $m+1$  restrições para cada período  $t$ , possui um enorme número de colunas, pois para cada  $N_i^t$  temos uma coluna e além do mais não conhecemos os pontos extremos.

Das restrições de (3.8), podemos tirar :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t &\leq \tilde{N} \\ -\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t &\leq -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t [ \tilde{N}_i^t , -1 ] \leq [ \tilde{N} , -1 ]$$

Então :

$$\min \underline{c} \tilde{N}$$

sujeito a :

(3.9)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t [ \tilde{N}_i^t , -1 ] &\leq [ \tilde{N} , -1 ] \\ \lambda_i^t &\geq 0 \end{aligned} \right\} \forall t=1,2,\dots,T ; \forall i=1,2,\dots,k(t)$$

Seja  $\underline{D}^t$  um vetor coluna cujas componentes são  $\lambda_i^t$ ,  
 $\forall t=1,2,\dots,T ; \forall i=1,2,\dots,k(t)$

$$\underline{D}^t = [ \lambda_1^t , \lambda_2^t , \dots , \lambda_{k(t)}^t ]$$

e seja  $M^t$  uma matriz cujas colunas são os vetores  $[ \tilde{N}_i^t , -1 ]$  ,  
 $\forall t=1,2,\dots,T ; \forall i=1,2,\dots,k(t)$

$$M^t = ( [ \tilde{N}_1^t , -1 ] , [ \tilde{N}_2^t , -1 ] , \dots , [ \tilde{N}_{k(t)}^t , -1 ] )$$

Então o problema se torna :

$$\min \underline{c} \cdot \underline{N}$$

(3.10)

sujeito a

$$\left. \begin{array}{l} M^t \cdot \underline{D}^t \leq [\underline{N}, -1] \\ \underline{D}^t \geq \underline{0} \\ \underline{N} \geq \underline{0} \end{array} \right\} \forall t=1,2,\dots,T$$

Para um  $\underline{N} \geq \underline{0}$  dado, o sistema  $M^t \underline{D}^t \leq [\underline{N}, -1]$  terá uma solução  $\underline{D}^t \geq \underline{0}$  se e somente se para todo vetor  $\underline{\Pi}^t \geq \underline{0}$  tal que  $\underline{\Pi}^t \cdot M^t \geq \underline{0}$  implica  $\underline{\Pi}^t [\underline{N}, -1] \geq 0$  (Lema de Minkowsky-Farkas) [20].

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\Pi}^t \cdot M^t \geq \underline{0} \\ \underline{\Pi}^t \geq \underline{0} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\Pi}^t [\underline{N}_i^t, -1] \geq 0, \forall t=1,2,\dots,T; \forall i=1,2,\dots,k(t) \\ \underline{\Pi}^t \geq \underline{0} \end{array} \right. \quad (3.10.1)$$

Os  $\underline{\Pi}^t \geq \underline{0}$  que satisfazem  $\underline{\Pi}^t [\underline{N}_i^t, -1] \geq 0$ ,  $\forall i=1,2,\dots,k(t)$  formam um cone poliédrico convexo  $\mathbb{F}_{m+1}^t$ .

Observação:

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{F}_{m+1}^t, \underline{x} = \sum_{j=1}^{r(t)} \alpha_j^t \underline{\Pi}_j^t, \alpha_j^t \geq 0, \forall j=1,2,\dots,r(t)$$

onde  $\underline{\Pi}_j^t$  são os unitários na direção das arestas.

Se  $\underline{\Pi}^t [\underline{N}, -1] \geq 0$  para todo  $\underline{N} \in \mathbb{P}_t^m$  então  $\underline{\Pi}^t [\underline{N}_i^t, -1] \geq 0$  porque  $\underline{N}_i^t \in \mathbb{P}_t^m$ .



TEOREMA 8 :

$\forall \underline{\Pi}^t \in \mathbb{F}_{m+1}^t$  ,  $\underline{\Pi}^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0$  é verdadeiro se e somente se

$$\underline{\Pi}_j^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,2,\dots,r(t) \quad .$$

Prova :

$\boxed{\rightarrow}$

$$\underline{\Pi}^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0 \quad , \quad \forall \underline{\Pi}^t \in \mathbb{F}_{m+1}^t \quad \text{com}$$

$$\underline{\Pi}_j^t \in \mathbb{F}_{m+1}^t \quad , \quad j=1,2,\dots,r(t) \quad \text{então}$$

$$\underline{\Pi}_j^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0 \quad \text{é verdadeiro} \quad .$$

$\boxed{\leftarrow}$

$$\underline{\Pi}_j^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,2,\dots,r(t) \quad \text{sejam verdadeiros}$$

$$\underline{\Pi}^t \in \mathbb{F}_{m+1}^t \quad , \quad \underline{\Pi}^t = \sum_{j=1}^{r(t)} \alpha_j^t \underline{\Pi}_j^t \quad , \quad \alpha_j^t \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,2,\dots,r(t)$$

$$\alpha_j^t \cdot \underline{\Pi}_j^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{r(t)} \alpha_j^t \cdot \underline{\Pi}_j^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\Pi}^t [ \underline{N}, -1 ] \geq 0$$

$\Delta$

Temos então o seguinte problema :

$$\min \quad \underline{c} \underline{N}$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} \Pi_j^t [N, -1] &\geq 0, \quad \forall j=1,2,\dots,r(t); \quad \forall t=1,2,\dots,T \\ N &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

O problema (3.11) contém apenas  $m$  colunas, onde cada coluna é referente a uma componente de  $N \in \mathbb{R}^m$ , mas possui um grande número de linhas, sendo cada linha referente a um  $\Pi_j^t$ , portanto, continuamos com um problema insolúvel na prática. Existem porém, algoritmos de resolução para este tipo de problema nos quais não é necessário listarmos todas as restrições. Esses algoritmos consistem basicamente de duas partes, sendo uma a principal e outra auxiliar. Neles trabalhamos com quadros de tamanho  $(m+2) \times (m+1)$  na parte principal e  $(m+3) \times (m+5)$  ou  $(m+1) \times (m+2)$  na parte auxiliar, dependendo do tipo de algoritmo empregado ser primal ou dual.

O algoritmo primal tem a grande vantagem de que a qualquer momento que interrompemos a sua execução, a solução que ele nos apresenta é um solução primal viável, ou seja, uma solução viável  $N$  para o problema (3.11). Este fato se torna de grande valia em problemas de grande porte onde na maioria das vezes é mais interessante uma boa solução do que a solução ótima, em virtude do enorme tempo de processamento necessário à obtenção da solução ótima. Por sua vez, o algoritmo dual tem a grande vantagem de computacionalmente ser muito mais rápido do que o primal.

Portanto, apresentaremos a seguir duas técnicas de resolução do problema (3.11), o Algoritmo Primal para Resolução e

o Algoritmo Dual para Resolução.

### 3.3 - Algoritmo Primal Aplicado a Problemas de Síntese

O Algoritmo Primal apresentado neste item será dirigido para resolução do Problema (3.11) e como o número de iterações para este tipo de algoritmo depende diretamente do número de restrições (linhas) ou do número de variáveis (colunas) e em virtude de termos apenas  $m$  variáveis em (3.11) e um número muito grande de restrições, adotaremos o Algoritmo Primal Simplex por Operações Coluna. Como todo Primal Simplex, necessitamos de uma base inicial e de uma solução primal viável (rede primal viável) que mostraremos como obtê-la no próximo item. O Método Primal Simplex consiste dos seguintes passos:

1. Escolha da coluna, ou seja, da variável que irá entrar na base.
2. Escolha da linha, ou seja, da variável que irá sair da base.
3. Processo de eliminação de Gauss-Jonhan , ou seja, mudança da base por operações coluna.

Os passos (1) e (3) são passos de rotina e o passo (2) não pode ser realizado como normalmente o é em um PPL, pelo fato de não conhecermos a priori as restrições de (3.11). Portanto, a dificuldade reside no passo (2) pois temos que determinar qual, da enorme lista de restrições de (3.11) será primeiro violada, isto é, quando a variável não básica escolhida for introduzida na base.

Como necessitamos a priori de uma solução básica primal viável, que  $\hat{N}$  o seja. Realizando-se o passo (1) temos a coluna  $\underline{t}_e$ , correspondente à variável  $\hat{N}_e$  que irá entrar na base. Se  $\theta$  é o valor que será assumido por  $\hat{N}_e$  quando introduzida na base, então  $\underline{t}_e$  remos como nova solução básica

$$\tilde{N} = \hat{N} - \theta \underline{t}_e$$

e o novo valor da função objetivo será

$$\underline{c} \tilde{N} = \underline{c} \hat{N} - \theta (z_e - c_e)$$

(a origem de  $z_e - c_e$  está no item 2.1.4)

Como  $z_e - c_e < 0$ , quanto maior for o valor de  $\theta$ , maior será o aumento no valor da função objetivo e como a nova solução  $\tilde{N}$  deverá ser primal viável, desejamos então obter o maior valor para  $\theta$ , ( $\theta_{\max}$ ), mas mantendo-se a restrição de  $\tilde{N}$  ser primal viável. Com isto, temos que resolver para  $t=1,2,\dots,T$ , o seguinte PPL :

$$\max \theta$$

(3.12)

sujeito a :

$$\tilde{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \underline{N}_i^t$$

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1$$

$$\lambda_i^t \geq 0$$

$$\theta \geq 0$$

$$\forall t = 1, 2, \dots, T .$$

que é equivalente a :

$$\max \theta \quad (3.13)$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} \hat{N} - \theta t_e &\geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t N_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t &\geq 1 \\ \lambda_i^t &\geq 0 \\ \theta &\geq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{N} - \theta t_e &\geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t N_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t &\geq 1 \\ \lambda_i^t &\geq 0 \\ \theta &\geq 0 \end{aligned}} \right\} \forall t = 1, 2, \dots, T .$$

e obter  $\theta_{\max}^t$ . Das restrições de (3.13), temos que para  $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^t$  a rede  $\tilde{N}$  satisfaz aos requisitos de fluxo do período  $t$ , ou seja, a rede  $\tilde{N}$  é viável. Podemos escrever (3.13) da seguinte maneira:

$$\max Z = \theta \quad (3.14)$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} \theta t_e + \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t N_i^t &\leq \hat{N} \\ - \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t &\leq -1 \\ \lambda_i^t &\geq 0 \\ \theta &\geq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \theta t_e + \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t N_i^t &\leq \hat{N} \\ - \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t &\leq -1 \\ \lambda_i^t &\geq 0 \\ \theta &\geq 0 \end{aligned}} \right\} \forall t = 1, 2, \dots, T .$$

Este problema (3.14) é um problema limitado, pois as suas próprias restrições limitam o valor de  $\theta$  tanto superiormente,

pois um  $\theta$  ilimitado superiormente nos dará uma rede viável com custo total negativo, como inferiormente onde não teria sentido usarmos o ínfimo de  $\theta$ ,  $\theta=0$ .

Como (3.14) possui apenas  $m+1$  linhas para cada período  $t$  e um enorme número de colunas onde cada coluna corresponde a um  $\tilde{N}_i^t$ , vamos resolvê-lo através do Primal Simplex Revisado por Operações Linha, que será detalhado no final deste item. Supondo - se (3.14) resolvido para um determinado  $t$ , teremos o valor de  $\theta_{\max}^t$ . Como utilizamos o Simplex Revisado, temos :

$$\hat{B}_t^{-1} = \left| \begin{array}{cc} 1 & -c_b^t B_t^{-1} \\ 0 & B_t^{-1} \end{array} \right|$$

onde  $B_t$  é a matriz ótima. Fazendo-se no último quadro do Simplex

$$\tilde{\Pi}^t = c_b^t B_t^{-1}$$

sabemos que  $\tilde{\Pi}^t$  é a solução ótima do problema dual de (3.14) que é o seguinte:

$$\min \quad \tilde{v}^t \cdot [\hat{N}, -1] \tag{3.15}$$

sujeito a :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{v}^t \cdot [t_e, 0] \geq 1 \\ \tilde{v}^t \cdot [\tilde{N}_i^t, -1] \geq 0 \\ \tilde{v}^t \geq \underline{0} \end{array} \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k(t); \forall t=1, 2, \dots, T.$$

Podemos garantir que  $\underline{\Pi}^t$  é solução ótima do dual pelo fato do primal (3.14) ter solução ótima limitada. Portanto, pelas propriedades do primal e dual, temos:

1.  $\underline{\Pi}^t \cdot [\hat{N}, -1]$  é o valor ótimo do dual (3.15), consequentemente igual a  $\theta_{\max}^t$  que é o valor ótimo do primal (3.14).  
... (3.16)
2. Como  $\underline{\Pi}^t$  é uma solução ótima de (3.15), também o é viável, portanto:

$$\underline{\Pi}^t = [t_e, 0] \geq 1$$

$$\underline{\Pi}^t = [N_i^t, -1] \geq 0, \quad \forall i=1,2,\dots,k(t); \quad \forall t=1,2,\dots,T \quad (3.17)$$

$$\underline{\Pi}^t \geq 0$$

3. Pelo fato de  $\underline{\Pi}^t$  ser solução ótima de (3.15), será um ponto extremo do politopo de restrições.

$$\underline{\Pi}^t = c_b^t B_t^{-1} \quad (3.18)$$

Resolvendo-se (3.14) e (3.15), obteremos para cada período  $t$ , um  $\theta_{\max}^t$  e um  $\underline{\Pi}^t$  respectivamente. Como para  $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^t$ , a nova solução básica viável  $\tilde{N}$ , para o problema (3.11), será tal que satisfará aos requisitos de fluxo no período  $t$ , então obteremos:

$$\theta_{\max}^{t*} = \min_t \{ \theta_{\max}^t \}$$

e assim a rede  $\tilde{N}$  satisfará aos requisitos de fluxo de todos os períodos, ou seja,  $\tilde{N}$  será uma solução básica primal viável de (3.11) se e somente se:

$$0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^{t^*} \iff \theta_{\max} = \theta_{\max}^{t^*}$$

Portanto, temos:

$$\theta_{\max} = \theta_{\max}^{t^*} = \min_t \{ \theta_{\max}^t \} \quad (3.19)$$

$$\tilde{N} \text{ é básica viável para (3.11) } \iff 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^{t^*} \quad (3.20)$$

Fazendo-se  $t=t^*$ , as expressões (3.16), (3.17) e (3.18) serão válidas também para  $t^*$ :

$$\underline{\Pi}^{t^*} \cdot [\hat{N}, -1] = \theta_{\max}^{t^*} \quad (3.21)$$

$$\underline{\Pi}^{t^*} \cdot [\underline{t}_e, 0] \geq 1 \quad (3.22)$$

$$\underline{\Pi}^{t^*} \cdot [\underline{N}_i^t, -1] \geq 0, \quad \forall i=1,2,\dots,k(t); \forall t=1,2,\dots,T \quad (3.23)$$

$$\underline{\Pi}^{t^*} \geq 0 \quad (3.24)$$

$\underline{\Pi}^{t^*}$  é um extremo do politopo de restrições de (3.15).

Pelo fato de  $\theta \geq 0$ , de (3.22), temos:

$$-\theta \cdot \underline{\Pi}^{t^*} \cdot [\underline{t}_e, 0] \leq -\theta \quad (3.25)$$

Somando-se (3.25) com (3.21), temos:

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}^{t^*} \cdot \left[ [\hat{N}, -1] - \theta [\underline{t}_e, 0] \right] &\leq \theta_{\max}^{t^*} - \theta \iff \\ \iff \underline{\Pi}^{t^*} \cdot [\tilde{N}, -1] &\leq \theta_{\max}^{t^*} - \theta \end{aligned} \quad (3.25.1)$$



Vamos agora mostrar que:

A . Uma das restrições do problema (3.11) é :

$$\underline{\Pi}^{t^*} [\underline{N}, -1] \geq 0 \quad (3.26)$$

B . A restrição (3.26) é a primeira a ser violada quando a variável  $x_e$  que é correspondente à coluna  $\underline{t}_e$ , coluna pivô, for introduzida na base.

Demonstrando-se A. e B. , a linha pivô será obtida atualizando-se a restrição (3.26), isto é, escrevendo-a em termos das variáveis não básicas correntes.

Para demonstrarmos A., provaremos que  $\underline{\Pi}^{t^*}$  é um raio vetor do cone poliédrico convexo  $\mathbb{F}_{m+1}^{t^*}$ , ou seja,  $\underline{\Pi}^{t^*}$  é um dos  $\underline{\Pi}_j^{t^*}$  de (3.11).

Comparando as desigualdades (3.23) e (3.24) com (3.10.1), temos que:

$$\underline{\Pi}^{t^*} \in \mathbb{F}_{m+1}^{t^*}$$

O fato de  $\underline{\Pi}^t$  ser um ponto extremo do politopo de restrições de (3.15) nos garante que  $\underline{\Pi}^{t^*}$  também é um ponto extremo do politopo de restrições do problema (3.15) referente ao período  $\underline{t}^*$ .

Como  $\underline{t}_e$  é a coluna do pivô e pelo fato do problema (3.14) ser limitado (possui solução ótima), conforme já mostrado e por (3.22) temos:

$$\underline{\Pi}^{t^*} [\underline{t}_e, 0] \geq 1$$

o que nos obriga a

$$\underline{\Pi}^{t^*} \neq \underline{0} \quad (3.26.1)$$

consequentemente, teremos pelo menos uma componente de  $\underline{t}_e$  positiva, pois sabemos a priori que  $\underline{\Pi}^{t^*} \geq \underline{0}$ . Com este fato de pelo menos uma componente de  $\underline{t}_e$  ser positiva, garantimos que a variável  $x_e$  (correspondente a  $\underline{t}_e$ ) entrará na base.

O fato de termos uma componente de  $\underline{t}_e > 0$ , implica que dentre as  $\underline{m+1}$  restrições de (3.15)

$$\underline{\Pi}^{t^*} \left[ \begin{array}{c} \underline{N}_i^t \\ \underline{N}_i^t, -1 \end{array} \right] \geq 0$$

pelo menos  $\underline{m}$  são do tipo

$$\underline{\Pi}^{t^*} \left[ \begin{array}{c} \underline{N}_i^t \\ \underline{N}_i^t, -1 \end{array} \right] = 0 \quad (3.27)$$

enquanto que a  $(\underline{m+1})$ -ésima poderá ser do mesmo tipo ou então ser a primeira

$$\underline{\Pi}^{t^*} \left[ \begin{array}{c} \underline{t}_e \\ \underline{t}_e, 0 \end{array} \right] = 1 \quad (3.28)$$

que será a nossa solução .

Podemos considerar somente dois casos:

Caso 1 : A  $(\underline{m+1})$ -ésima restrição é do tipo (3.27), portanto teremos  $\underline{m+1}$  restrições independentes tais que

$$\underline{\Pi}^{t^*} \left[ \begin{array}{c} \underline{N}_i^{t^*} \\ \underline{N}_i^{t^*}, -1 \end{array} \right] = 0 \quad , \quad (3.29)$$

o que não pode ocorrer, pois teríamos

$$\underline{\Pi}^{t^*} = \underline{0} \quad , \quad \text{o que contradiz (3.26.1).}$$

Caso 2 : A (m+1)-ésima restrição é  $\underline{\Pi}^{t^*} [\underline{t}_e, 0] = 1$  . Como temos obrigatoriamente  $\underline{\Pi}^{t^*} \neq \underline{0}$  , então  $\underline{\Pi}^{t^*}$  é solução das  $\underline{m}$  equações do tipo

$$\underline{\Pi}^{t^*} [\underline{N}_i^{t^*}, -1] = 0$$

Logo,  $\underline{\Pi}^{t^*}$  é um vetor na direção das arestas de  $\mathbb{F}_{m+1}^{t^*}$  (3.32) e portanto fica demonstrada a afirmativa A. .

Demonstraremos agora a afirmativa B.

De (3.25.1), temos:

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}^{t^*} [\underline{\tilde{N}}, -1] \leq \theta_{\max}^{t^*} - \theta & \iff \\ \iff \underline{\Pi}^{t^*} [\underline{\tilde{N}}, -1] + (\theta - \theta_{\max}^{t^*}) \leq 0 & \quad (3.33) \end{aligned}$$

Para  $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}^{t^*}$  ,  $\underline{\tilde{N}}$  é uma solução básica viável para (3.11), mas para qualquer  $\theta > \theta_{\max}^{t^*}$  ,  $\underline{\tilde{N}}$  não mais será básica viável para (3.11). Fazendo-se  $\theta > \theta_{\max}^{t^*}$  em (3.33), temos:

$$\underline{\Pi}^{t^*} [\underline{\tilde{N}}, -1] < 0 \quad (3.34)$$

Concluimos então que a restrição (3.26) da afirmativa A. não será válida para  $\theta > \theta_{\max}^{t^*}$  , portanto será a primeira restrição a ser violada quando tivermos  $\theta > \theta_{\max}^{t^*}$  .

Na apresentação deste item ficou faltando mostrar - mos para um determinado período  $\underline{t}$  , como obtermos do problema (3.14) o vetor  $\underline{\Pi}^t$  e  $\theta_{\max}^t$  . Como a última restrição de (3.14) será considerada sob a forma

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1, \quad \forall t=1,2,\dots,T$$

e conforme já dito, usaremos o Primal Simplex Revisado por Operações Linha. Portanto, para obtermos  $\Pi^t$  devemos multiplicar a última componente da parte da linha (z-c) que corresponde à inversa da base por (-1) no último quadro.

Para termos uma base inicial devemos introduzir variáveis de folga para as  $m$  primeiras restrições de (3.14) e uma variável artificial para a última restrição. Continuando-se com o Simplex apresenta-se um problema que é escolhermos a variável que irá entrar na base, pois não conhecemos todos os  $N_i^t$ , portanto mostraremos como determinar a variável que irá entrar na base ou seja, a coluna pivô.

Usaremos para o Simplex, o Método das Duas Fases. Para um quadro qualquer  $M$ , fazamos:

$$\gamma = c_b B^{-1}$$

Sendo  $(z_j - c_j)$  um elemento arbitrário de (z-c) no quadro  $M$ ,  $t_j$  a coluna correspondente à variável  $x_j$  no quadro inicial e  $c_j$  o custo na função objetivo da variável  $x_j$ , temos:

$$z_j - c_j = \gamma t_j - c_j \quad (3.34.1)$$

Sabendo-se que o coeficiente de uma variável  $\lambda_i^t$  qualquer na função objetivo original é 0 (2ª fase) e como na função objetivo da 1ª fase são aparecem as variáveis artificiais de (3.34.1), temos:

$$(z_i^t - c_i^t) 1_a = -1$$

$$(z_i^t - c_i^t) \underline{z}_a = \underline{\gamma} [N_i^t, 1]$$

fazendo-se:

$$\underline{\gamma} = [\underline{\gamma}_1, \gamma_{m+1}]$$

temos:

$$(z_i^t - c_i^t) \underline{z}_a = \underline{\gamma}_1 \cdot N_i^t + \gamma_{m+1} \quad (3.34.2)$$

A variável que entrará na base é a que tiver o menor  $z_j - c_j$ ; suponhamos que seja  $\bar{z}_j - \bar{c}_j$ , e que  $\bar{z}_j - \bar{c}_j \geq 0$ , estamos na solução ótima. Portanto, queremos a coluna para a qual  $\underline{\gamma}_1 \cdot N_i^t$  seja mínimo, onde  $N_i^t \in \mathbb{P}_t^m$ . Este problema é um PPL que não passa de um problema de síntese para satisfazer aos requisitos simultâneos de  $\underline{t}$  e sendo  $\underline{\gamma}_1$  o vetor custo unitário. Este problema é resolvido utilizando-se  $\gamma_{1ij}$ ,  $\forall (i,j) \in A$ , como comprimentos e com isto determinaremos os caminhos mínimos para todos  $(i,j) \in A$ . Construímos então, ao longo de cada caminho mínimo, capacidade suficiente para transportar o fluxo requerido entre os extremos do caminho. Superpondo-se estas capacidades construídas, obtemos a rede final. Dependendo do porte do problema devemos usar o Algoritmo de Decomposição de Hu [10] o qual economizará uma grande quantidade de operações.

### 3.3.1 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Aplicação do Algoritmo Primal.

Seja a rede mostrada na Figura 3.3 referente ao custo de construção unitário de capacidade em cada arco, ou seja, o custo de uma unidade de capacidade em um determinado arco. Como os re -

quisitos de fluxos consistirão de dois períodos, apresentaremos em duas Figuras, 3.4 e 3.5 . Finalmente na Figura 3.6 estão indicadas as variáveis  $\underline{N}$  do problema.

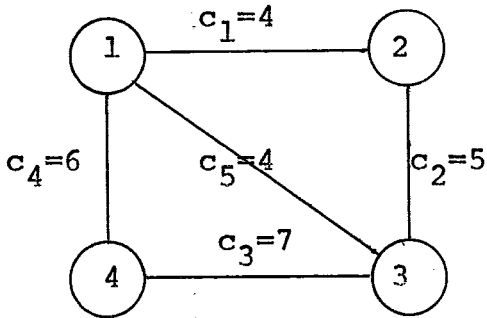


Figura 3.3

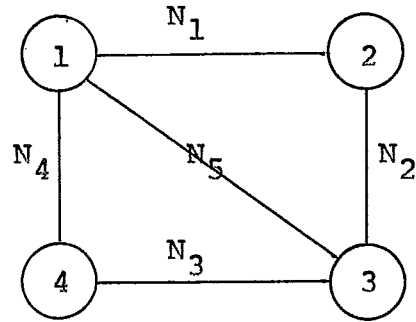


Figura 3.6

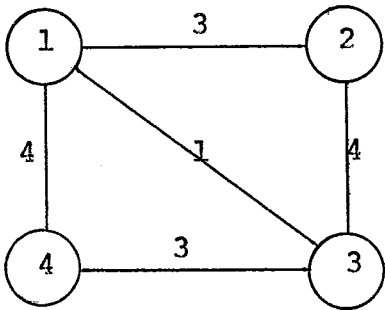


Figura 3.4

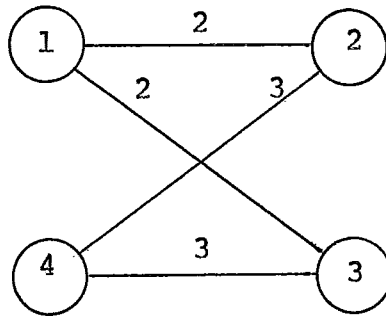


Figura 3.5

(Requisitos de fluxo)

Em linhas gerais, o nosso objetivo neste problema é encontrarmos as capacidades da rede da Figura 3.6 , de modo que satisfaça aos requisitos de fluxo das redes das Figuras 3.4 e 3.5 e levando-se em consideração o custo unitário da rede da Figura 3.3 , venha a ter um custo total de construção mínimo.

$$\min \underline{c} \underline{N}$$

sujeito a

$$\Pi_j^t [\underline{N}, -1] \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,2,\dots,r(t) ; \quad \forall t=1,2,\dots,T.$$

$$\underline{N} \geq \underline{0}$$

A primeira coisa a ser feita é obtermos uma rede primal viável que é uma solução primal viável. Isto é facilmente obtido se fizermos para cada arco  $(i,j)$  :

$$N_{ij}^0 = \max_t r_{ij}(t)$$

Neste nosso exemplo, temos na Figura 3.5 o requisito  $r_6$ , ligação entre os nós 2 e 4, que não possui arco correspondente na Figura 3.6 ; portanto, faremos com que  $r_6$  se converta em arcos existentes na Figura 3.6 . Converteremos  $r_6$  nos arcos  $N_1$  e  $N_4$  . Consequentemente, teremos :

$$r_1 = 2+3 = 5 \qquad r_4 = 0+3$$

Como fizemos a conversão para  $N_1$  e  $N_4$  poderíamos ter feito para  $N_2$  e  $N_3$  .

Obteremos agora a rede primal viável :

$$N_1^0 = \max \{3,5\} = 5$$

$$N_2^0 = \max \{0,4\} = 4$$

$$N_3^0 = \max \{3,3\} = 3$$

$$N_4^0 = \max \{4,3\} = 4$$

$$N_5^0 = \max \{1,2\} = 2$$

$$\hat{\underline{N}} = [N_1^0, N_2^0, N_3^0, N_4^0, N_5^0] = [5,4,3,4,2] \Rightarrow \text{rede primal vi}$$

ável de partida.

Temos então necessidade de obter uma base de partida, e para tanto introduziremos as variáveis  $u_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), as quais

serão irrestritas em sinal e definidas por :

$$N_1^0 = 5 - u_1 \quad , \quad N_2^0 = 4 - u_2 \quad , \quad N_3^0 = 3 - u_3$$

$$N_4^0 = 4 - u_4 \quad , \quad N_5^0 = 2 - u_5$$

Esta transformação nos dá o quadro inicial da parte principal, Quadro A1 , com exceção da linha do pivô.

QUADRO A1

	1	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	$-u_4$	$-u_5$
-Z	-93	-4	-5	-7	-6	-4
$N_1$	5	1				
$N_2$	4		1			
$N_3$	3			1		
$N_4$	4				1	
$N_5$	2					1

Escolhemos  $u_3$  para entrar na base. Devemos agora re solver o problema (3.14) para o primeiro período, mas usando-se a restrição  $\sum_i \lambda_i^t \geq 1$  em lugar de  $-\sum_i \lambda_i^t \leq -1$ . Para tal, já temos:

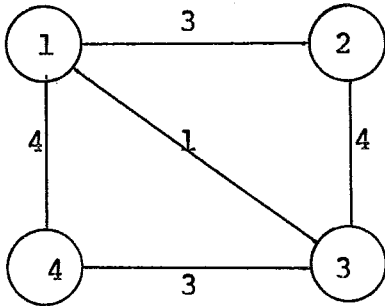
$$\hat{N} = [5, 4, 3, 4, 2] \quad \text{e} \quad \underline{t}_e = [0, 0, 1, 0, 0]$$

pois introduziremos  $u_3$  na base .



Portanto, introduzindo-se as folgas  $s_i$ ,  $i=1, \dots, 6$ , a variável artificial  $x^a$  e usando-se  $[\hat{N}, 1]$  em lugar de  $[\hat{N}, -1]$  o que acarretará a introdução de  $-1$  na coluna sob  $s_6$ , teremos o primeiro quadro da parte auxiliar praticamente completo, faltando a penas a coluna do pivô.

Como  $\gamma = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$  pois  $\gamma_1 = [0, 0, 0, 0, 0]$  e  $\gamma_{m+1} = 0$ , então qualquer  $N_{-1}^1 \in \mathbb{P}_t^m$  (ponto extremo) será solução ótima pois será a mais "barata".



$$N_{-1}^1 = [3, 4, 3, 4, 1] \rightarrow [N_{-1}^1, 1] = [3, 4, 3, 4, 1, 1]$$

Sendo  $(z_1^1 - c_1^1)_{1a} = -1$  e  $(z_1^1 - c_1^1)_{2a} = 0$ , temos a coluna pivô completa:

$$[-1, 0, 3, 4, 3, 4, 1, 1]$$

consequentemente temos o Quadro A1P1 completo.

QUADRO A1P1

	1	0	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_1^1$
1ª fase	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
2ª fase	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_1$	5	0	1							3
$s_2$	4	0		1						4
$s_3$	3	1			1					3
$s_4$	4	0				1				4
$s_5$	2	0					1			1
$x^a$	1	0						1	-1	1

$$\text{pivô} = \min \{5/3, 4/4, 3/3, 4/4, 2/1, 1/1\} = 1$$

Realizando-se o pivoteamento no elemento indicado do Quadro AlP1, ou seja, introduzindo-se  $\lambda_1^1$  na base e tirando-se a variável artificial  $x^a$ , obtemos o Quadro AlP2.

QUADRO AlP2

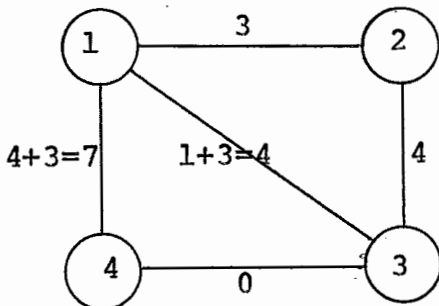
	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_1^1$
1 <sup>a</sup> fase	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 <sup>a</sup> fase	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_1$	2	0	1					-3	3	0
$s_2$	0	0		1				-4	4	0
$s_3$	0	1			1			-3	3	0
$s_4$	0	0				1		-4	4	0
$s_5$	1	0					1	-1	1	0
$\lambda_1^1$	1	0						1	-1	1

Neste Quadro AlP2,  $x^a$  foi retirada da base e em seu lugar entrou  $\lambda_1^1$ , com isto terminamos a 1<sup>a</sup> fase, de modo que nos próximos quadros somente apresentaremos a linha (z-c) da 2<sup>a</sup> fase. Introduzindo-se  $\theta$  na base, teremos o Quadro AlP3 praticamente completo, faltando somente a coluna que será posicionada sob  $\lambda_2^1$ .

QUADRO ALP3

	1	0	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_2^1$
$\theta^1$	0	0			1			-3	3	-3
$s_1$	2	0	1		0			-3	3	0
$s_2$	0	0		1	0			-4	4	0
$\theta$	0	1			1			-3	3	-3
$s_4$	0	0			0	1		-4	4	3
$s_5$	1	0			0		1	-1	1	3
$\lambda_2^1$	1	0			0			1	-1	1

No Quadro ALP3 temos  $\gamma = [0, 0, 1, 0, 0, -3]$  onde ,  
 $\gamma_1 = [0, 0, 1, 0, 0]$  e  $\gamma_{m+1} = -3$  , portanto escolheremos uma rede  
 que satisfaça  $\gamma_1$  , ou seja, não possua nenhum requisito de fluxo  
 no arco que une os nós 3 e 4 ; assim teremos a rede mais barata .  
 Existe mais de uma rede que satisfaça  $\gamma_1$  , conseqüentemente mais de  
 uma solução ótima. Escolheremos uma:



$$\tilde{N}_2^1 = [3, 4, 0, 7, 4] \rightarrow [\tilde{N}_2^1, 1] = [3, 4, 0, 7, 4, 1]$$

De (3.3 4.2), temos:

$$(z_2^1 - c_2^1) = -3$$

A coluna  $[\tilde{N}_2^1, 1]$  para ser introduzida no Quadro ALP3  
 precisa ser pré-multiplicada pela inversa da base, isto é, necessi-

tamos de realizar o "updating" ,

$$\left| \begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| =$$

e acrescentar o valor de  $(z_2^1 - c_2^1) = -3$  . Portanto a coluna do pivô do Quadro ALP3 será :

$$[-3, 0, 0, -3, 3, 3, 1]$$

$$\text{pivô} = \min \{0/3, 3/3, 1/3\} = 0/3 = 0$$

Realizando-se o pivoteamento no Quadro ALP3 obteremos o Quadro ALP4 com exceção da última coluna, a qual será posicionada sob  $\lambda_3^1$  .

QUADRO ALP4

	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_3^1$
$\theta^1$	0	0			1	1		-7	7	0
$s_1$	2	0	1			0		-3	3	0
$s_2$	0	0		1		0		-4	4	0
$\theta$	0	1			1	1		-7	7	0
$\lambda_2^1$	0	0				1/3		-4/3	4/3	0
$s_5$	1	0				-1	1	3	-3	0
$\lambda_1^1$	1	0				-1/3		7/3	-7/3	1

No Quadro ALP4 temos  $\gamma = [0, 0, 1, 1, 0, -7]$  onde  $\gamma_1 = [0, 0, 1, 1, 0]$  e  $\gamma_{m+1} = -7$ . Como rede mais barata, temos:  $\tilde{N}_3^1 = [3, 4, 3, 4, 1] \rightarrow [N_3^1, 1] = [3, 4, 3, 4, 1, 1]$ .

De (3.34.2) temos:

$$(z_3^1 - c_3^1) = 0$$

Realizando-se o "updating" em  $[N_3^1, 1]$  temos:

$$\left| \begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -7 & 3 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -4/3 & 4 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 7/3 & 1 & & 1 \end{array} \right.$$

Portanto, a coluna do pivô do Quadro ALP4 será :

$$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

Como, no Quadro ALP4 temos  $(z-c) \geq 0$ , estamos na solução ótima.

$$\theta_{\max}^1 = 0 \quad ; \quad \tilde{\Pi}^1 = [0, 0, 1, 1, 0, 7]$$

Trocamos o sinal da última componente de  $\tilde{\Pi}^1$ .

Ocorreu um caso particular de termos  $\theta_{\max}^1 = 0$ , pois com isto não precisaremos resolver o problema (3.14) para  $t=2$ , porque:

$$\theta_{\max} = \min \{ \theta_{\max}^1, \theta_{\max}^2 \} = 0$$

$$\underline{\pi}^{1*} = \underline{\pi}^1 = [0, 0, 1, 1, 0, 7]$$

Obteremos a linha do pivô pela atualização da restrição (3.26).

$$\pi^{t*} \cdot [N, -1] \geq 0$$

$$N_3 + N_4 - 7 \geq 0$$

Devemos expressar esta restrição em termos das variáveis não básicas correntes,  $(-u_1, \dots, -u_5)$ .

$$N_3 = 3 - u_3, \quad N_4 = 4 - u_4$$

$$N_3 + N_4 - 7 \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad 3 - u_3 + 4 - u_4 - 7 \geq 0$$

$$-u_3 - u_4 \geq 0$$

Acrescentando-se uma variável de folga  $v_1$ , temos:

$$-u_3 - u_4 - v_1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad v_1 = -u_3 - u_4$$

que é a linha do pivô do Quadro A1.

Com isto temos o Quadro A2 que vem a ser o Quadro A1 mais a linha do pivô.

(Veja Quadro A2 na próxima página)

QUADRO A2

	1	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	$-u_4$	$-u_5$
$-z$	-93	-4	-5	-7	-6	-4
$N_1$	5	1				
$N_2$	4		1			
$N_3$	3			1		
$N_4$	4				1	
$N_5$	2					1
$v_1$	0	0	0	1	1	0

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro A2 , obtemos o Quadro A3 .

QUADRO A3

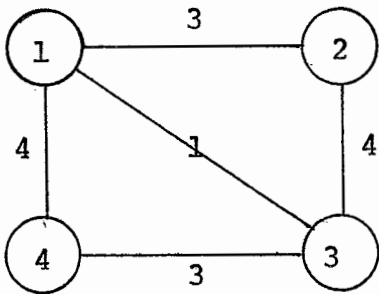
	1	$-u_1$	$-u_2$	$-v_1$	$-u_4$	$-u_5$
$-z$	-93	-4	-5	7	1	-4
$N_1$	5	1				
$N_2$	4		1			
$N_3$	3			-1	-1	
$N_4$	4				1	
$N_5$	2					1
$u_3$	0	0	0	-1	0	0

Podemos eliminar a última linha do quadro acima pois não mais terá utilidade.

Escolhemos agora a variável  $u_2$  para entrar na base e iremos resolver o problema (3.14) para os dois períodos de tempo a fim de determinarmos a linha pivô do Quadro A3 .

$$\gamma = [0, 0, 0, 0, 0, 0] \rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = [0, 0, 0, 0, 0] \\ \gamma_{m+1} = 0 \end{cases}$$

portanto qualquer  $\tilde{N}_1^1 \in \mathbb{P}_t^m$  (fazendo primeiramente para  $t=1$ ) será solução ótima pois será a mais barata.



$$\tilde{N}_1^1 = [3, 4, 3, 4, 1] \rightarrow [N_1^1, 1] = [3, 4, 3, 4, 1, 1]$$

sendo  $(z_1^1 - c_1^1)_{1a} = -1$  e  $(z_1^1 - c_1^1)_{2a} = 0$  , temos a coluna pivô completa:

$$[-1, 0, 3, 4, 3, 4, 1, 1]$$

consequentemente temos o Quadro A3P11 completo.

(Veja Quadro A3P11 na próxima página)



QUADRO A3P11

	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_{11}^1$
1 <sup>a</sup> fase	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
2 <sup>a</sup> fase	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_1$	5	0	1							3
$s_2$	4	1		1						4
$s_3$	3	0			1					3
$s_4$	4	0				1				4
$s_5$	2	0					1			1
$x^a$	1	0						1	-1	1

$$\text{pivô} = \min \{5/3, 4/4, 3/3, 4/4, 2/1, 1/1\} = 1$$

Realizando-se o pivoteamento no elemento indicado no Quadro A3P11, ou seja, introduzindo-se  $\lambda_{11}^1$  na base e tirando-se a variável artificial  $x^a$ , obtemos o Quadro A3P12.

QUADRO A3P12

	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_{11}^1$
1 <sup>a</sup> fase	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2 <sup>a</sup> fase	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_1$	2	0	1					-3	3	0
$s_2$	0	1		1				-4	4	0
$s_3$	0	0			1			-3	3	0
$s_4$	0	0				1		-4	4	0
$s_5$	1	0					1	-1	1	0
$\lambda_{11}^1$	1	0						1	-1	1

Neste Quadro A3P12,  $x^a$  foi retirada da base e em seu lugar entrou  $\lambda_{11}^1$ , com isto terminamos a 1ª fase, de modo que nos próximos quadros somente apresentaremos a linha (z-c) da 2ª fase. Introduzindo-se  $\theta$  na base, teremos o Quadro A3P13 praticamente completo, faltando somente a coluna que será posicionada sob  $\lambda_{21}^1$ .

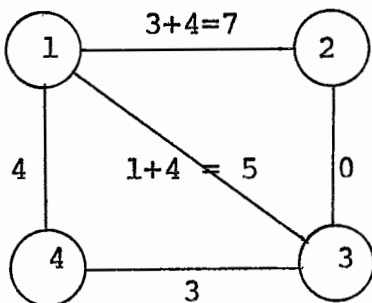
QUADRO A3P13

	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s_6$	$\lambda_{21}^1$
$\theta^1$	0	0		1				-4	4	-4
$s_1$	2	0						-3	3	4
$\theta$	0	1						-4	4	-4
$s_3$	0	0						-3	3	0
$s_4$	0	0						-4	4	0
$s_5$	1	0						-1	1	4
$\lambda_{21}^1$	1	0						1	-1	1

No Quadro A3P13 temos :

$$\gamma = [0, 1, 0, 0, 0, -4] \rightarrow \begin{cases} \gamma = [0, 1, 0, 0, 0] \\ \gamma_{m+1} = -4 \end{cases}$$

uma das redes mais baratas será :



$$\underline{N}_2^1 = [7, 0, 3, 4, 5] \rightarrow [\underline{N}_2^1, 1] = [7, 0, 3, 4, 5, 1]$$

De (3.34,2), temos:

$$(z_2^1 - c_2^1) = -4$$

Para introduzirmos a coluna  $[N_2^1, 1]$  no Quadro A3P13 necessitamos realizar o "updating" :

$$\begin{array}{cccccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

e acrescentar o valor de  $(z_2^1 - c_2^1) = -4$  . Portanto a coluna do pivô do Quadro A3P13 será :

$$[-4, 4, -4, 0, 0, 4, 1]$$

$$\text{pivô} = \min \{2/4, 1/4, 1/1\} = 1/4$$

Realizando-se o pivoteamento no Quadro A3P13, obtaremos o Quadro A3P14 , com exceção da última coluna que será posicionada sob  $\lambda_{31}^1$  .

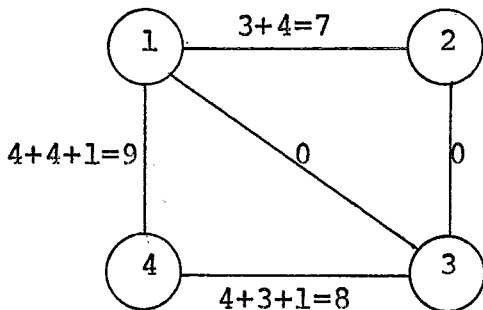
QUADRO A3P14

	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s^6$	$\lambda_{31}^1$
$\theta^1$	1	0		1			1	-5	5	-5
$s_1$	1	0	1				-1	-2	2	5
$\theta$	1	1		1			1	-5	5	-5
$s_3$	0	0			1		0	-3	3	5
$s_4$	0	0				1	0	-4	4	5
$\lambda_{21}^1$	1/4	0					1/4	-1/4	1/4	-1/4
$\lambda_{11}^1$	3/4	0					-1/4	5/4	-5/4	5/4

No Quadro A3P14 temos :

$$\gamma = [0, 1, 0, 0, 1, -5] \rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = [0, 1, 0, 0, 1] \\ \gamma_{m+1} = -5 \end{cases}$$

uma das redes mais baratas será :



$$\underline{N}_3^1 = [7, 0, 8, 9, 0] \rightarrow [\underline{N}_3^1, 1] = [7, 0, 8, 9, 0, 1]$$

De (3.34.2), temos:

$$(z_3^1 - c_3^1) = -5$$

Para introduzirmos a coluna  $[N_3^1, 1]$  no Quadro A3P14 necessitamos de realizar o "updating" ,

$$\left| \begin{array}{cccccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & -1 & 5/4 \end{array} \right| =$$

e acrescentar o valor de  $(z_3^1 - c_3^1) = -5$  . Portanto a coluna do pivô do Quadro A3P14 será :

$$[-5, 5, -5, 5, 5, -1/4, 5/4]$$

$$\text{pivô} = \min \{1/5, 0/5, 0/5, 3/4 / 5/4\} = 0/5 = 0$$

Realizando-se o pivoteamento no Quadro A3P14 obteremos o Quadro A3P15, com exceção da última coluna que será posicionada sob  $\lambda_{41}^1$  .

QUADRO A3P15

	1	$\theta$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$x^a$	$s^6$	$\lambda_{41}^1$	
$\theta^1$	1	0		1	1			1	-8	8	0
$s^1$	1	0	1		-1		-1	1	-1		0
$\theta$	1	1		1	1			1	-8	8	0
$\lambda_{31}^2$	0	0			1/5			0	-3/5	3/5	0
$s_4$	0	0			-1	1	0	-1	1		0
$\lambda_{21}^2$	1/4	0			1/20			1/4	-2/5	2/5	0
$\lambda_{11}^2$	3/4	0			-1/4			-1/4	8/4	-8/4	1

No Quadro A3P14 temos  $\gamma = [0, 1, 1, 0, 1, -8]$  onde ,  
 $\gamma_1 = [0, 1, 1, 0, 1]$  e  $\gamma_{m+1} = -8$  . Como rede mais barata temos:

$$\tilde{N}_4^1 = [3, 4, 3, 4, 1] \rightarrow [N_4^1, 1] = [3, 4, 3, 4, 1, 1]$$

De (3.34.2), temos :

$$(z_4^1 - c_4^1) = 0$$

Realizando-se o "updating" em  $[N_3^1, 1]$  temos:

$$\left| \begin{array}{cccccc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & -3/5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 & 0 & 1/4 & -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & -1/4 & 8/4 & 1 & 1 \end{array} \right| =$$

Portanto a coluna pivô do Quadro A3P15 será :

$$[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ]$$

Como no Quadro A3P15 temos  $(z-c) \geq 0$ , estamos na solução ótima.

$$\theta_{\max}^1 = 1 \quad ; \quad \underline{\Pi}^1 = [ 0, 1, 1, 0, 1, 8 ]$$

Trocamos o sinal da última componente de  $\underline{\Pi}^1$ .

Agora passaremos a resolver o problema (3.14) para  $t=2$ , segundo período de tempo. Resolveremos da mesma maneira apresentada para  $t=1$ . Como na nossa rede da Figura 3.6 não temos o arco  $N_6$ , temos que desmembrar o requisito referente a  $N_6$  na Figura 3.5 em outros quaisquer que satisfaçam o referido requisito e os arcos da Figura 3.6.

Resolvendo-se este problema, obteremos:

$$\theta_{\max}^2 = 4 \quad ; \quad \underline{\Pi}^2 = [ 1, 1, 0, 0, 0, 5 ]$$

$$\theta_{\max} = \min \{ \theta_{\max}^1, \theta_{\max}^2 \} = 1$$

$$\underline{\Pi}^{1*} = \underline{\Pi}^1 = [ 0, 1, 1, 0, 1, 8 ]$$

Obteremos a linha do pivô pela atualização da restrição (3.26):

$$\underline{\Pi}^{t*} [ \underline{N}, -1 ] \geq 0$$

$$N_2 + N_3 + N_5 - 8 \geq 0$$

Devemos expressar esta restrição em termos das variáveis não básicas correntes  $(-u_1, \dots, -u_5)$ .

$$N_2 = 4 - u_2 \quad , \quad N_3 = 3 - u_3 \quad , \quad N_5 = 2 - u_5$$

$$N_2 + N_3 + N_5 - 8 \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad 4 - u_2 + 3 - u_3 + 2 - u_5 - 8 \geq 0$$

$$1 - u_2 - u_3 - u_5 \geq 0$$

Acrescentando-se uma variável de folga  $v_2$ , temos:

$$1 - u_2 - u_3 - u_5 - v_2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad v_2 = 1 - u_2 - u_3 - u_5$$

Como  $-u_3$  é uma variável não básica, temos que expressá-la em função de variáveis básicas. Usando-se a linha do pivô do Quadro A1, temos:

$$v_1 = -u_3 - u_4 \quad \longrightarrow \quad -u_3 = v_1 + u_4$$

substituindo-se em  $v_2$  teremos :

$$v_2 = 1 - u_2 + v_1 + u_4 - u_5$$

que é a linha do pivô do Quadro A3 .

Com isto temos o Quadro A4 que vem a ser o Quadro A3, sem a linha referente a  $u_3$  mais a linha do pivô.

(Ver Quadro A4 na próxima página)



QUADRO A4

	1	$-u_1$	$-u_2$	$-v_1$	$-u_4$	$-u_5$
-z	-93	-4	-5	7	1	-4
$N_1$	5	1				
$N_2$	4		1			
$N_3$	3			-1	-1	
$N_4$	4				1	
$N_5$	2					1
$v_2$	1	0	1	-1	-1	1

Realizando-se o pivoteamento por operações colunas no Quadro A4, obtemos o Quadro A5.

QUADRO A5

	1	$-u_1$	$-v_2$	$-v_1$	$-u_4$	$-u_5$
-z	-88	-4	5	2	-4	1
$N_1$	5	1				
$N_2$	3		-1	1	1	-1
$N_3$	3			-1	-1	
$N_4$	4				1	
$N_5$	2					1
$v_2$	0	0	-1	0	0	0

Repetindo-se os cálculos auxiliares para geração da linha do pivô, ou seja, resolvendo-se o problema (3.14) para os dois períodos de tempo, obteremos:

$$N_2 + N_3 + N_5 - 9 \geq 0$$

a qual atualizada nos fornecerã a linha do pivô do Quadro A6. Deve mos notar que  $N_2$  e  $N_3$  são não básicas.

QUADRO A6

	1	$-u_1$	$-v_2$	$-v_1$	$-u_4$	$-u_5$
-Z	-88	-4	5	2	-4	1
$N_1$	5	1				
$N_2$	3		-1	1	1	-1
$N_3$	3			-1	-1	
$N_4$	4				1	
$N_5$	2					1
$v_3$	0		-1	1	2	

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro A6, obteremos o Quadro A7 .

QUADRO A7

	1	$-u_1$	$-v_2$	$-v_1$	$-v_3$	$-u_5$
-Z	-88	-4	3	4	2	1
$N_1$	5	1				
$N_2$	3		-1/2	1/2	-1/2	-1
$N_3$	3		-1/2	-1/2	1/2	
$N_4$	4		1/2	-1/2	-1/2	
$N_5$	2					1
$v_3$	0	0	0	0	-1	0

Repetindo-se os cálculos auxiliares para geração da linha do pivô, ou seja, resolvendo-se o problema (3.14) para os dois períodos de tempo, obteremos:

$$N_1 + N_3 + N_5 - 10 \geq 0$$

a qual atualizada nos fornecerá a linha do pivô do Quadro A8. Devemos notar que  $N_3$  é não básica.

QUADRO A8

	1	$-u_1$	$-v_2$	$-v_1$	$-v_3$	$-u_5$
-Z	-88	-4	3	4	2	1
$N_1$	5	1				
$N_2$	3		-1/2	1/2	-1/2	-1
$N_3$	3		-1/2	-1/2	1/2	
$N_4$	4		1/2	-1/2	-1/2	
$N_5$	2					1
$v_4$	0	1	1/2	-1/2	1/2	1

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro A8, obtemos o Quadro A9.

QUADRO A9

	1	$-v_4$	$-v_2$	$-v_1$	$-v_3$	$-u_5$
-Z	-88	4	1	2	4	5
$N_1$	5	-1	1/2	1/2	-1/2	-1
$N_2$	3		-1/2	1/2	-1/2	-1
$N_3$	3		-1/2	-1/2	1/2	
$N_4$	4		1/2	-1/2	-1/2	
$N_5$	2					1
$v_4$	0	-1	0	0	0	0

Repetindo-se os cálculos auxiliares para geração da linha do pivô, ou seja, resolvendo-se o problema (3.14) para os dois períodos de tempo, obteremos:

$$N_1 + N_2 - 7 \geq 0$$

a qual atualizada nos fornecerá a linha do pivô do Quadro A10 .

Como as variáveis  $u_i$  ( $u_1, \dots, u_5$ ) são irrestritas em sinal, no Quadro A10 mudaremos  $-u_5$  para  $u_5$  .

QUADRO A 10

	1	$-v_4$	$-v_2$	$-v_1$	$-v_3$	$u_5$
-Z	-88	4	1	2	4	-5
$N_1$	5	-1	1/2	1/2	-1/2	1
$N_2$	3		-1/2	1/2	-1/2	1
$N_3$	3		-1/2	-1/2	1/2	
$N_4$	4		1/2	-1/2	-1/2	
$N_5$	2					-1
$v_5$	1	-1	0	1	-1	2

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro A10, obtemos o Quadro A11.

QUADRO All

	1	$-v_4$	$-v_2$	$-v_1$	$-v_3$	$-v_5$
$-z$	-85.5	3/2	1	9/2	3/2	5/2
$N_1$	9/2	-1/2	1/2	0	0	-1/2
$N_2$	5/2	1/2	-1/2	0	0	-1/2
$N_3$	3	0	-1/2	-1/2	1/2	0
$N_4$	4	0	1/2	-1/2	-1/2	0
$N_5$	5/2	-1/2	0	1/2	1/2	1/2
$v_5$	0	0	0	0	0	-1

No Quadro All temos  $(z-c) \geq 0$ , portanto chegamos ao final do problema pois não existe nenhuma coluna que causará um acrêscimo. Conseqüentemente, temos a solução ótima (rede ótima).

$$N^* = [9/2, 5/2, 3, 4, 5/2]$$

$$z^* = 85.5$$

A rede ótima está apresentada na Figura 3.7 .

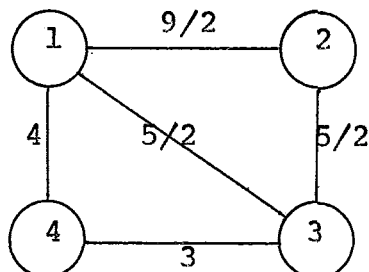


Figura 3.7

Apresentaremos nas Figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12

como poderemos atender aos requisitos de fluxo do primeiro período, isto é, para  $t=1$ , entre os nós  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,4)$ ,  $(2,3)$  e  $(3,4)$  respectivamente.

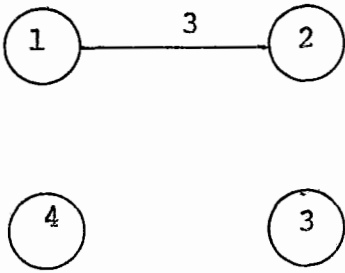


Figura 3.8

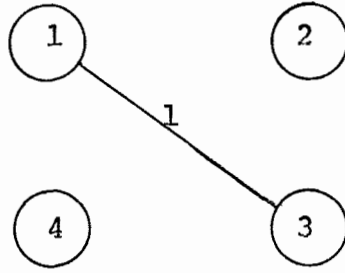


Figura 3.9

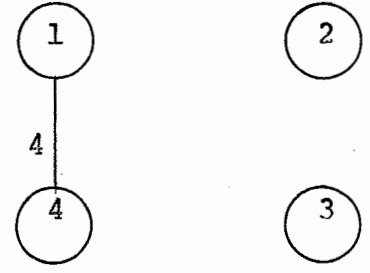


Figura 3.10

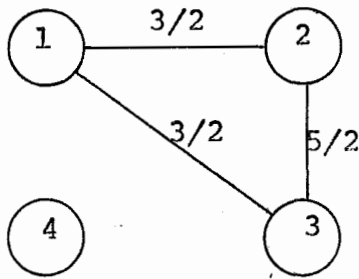


Figura 3.11

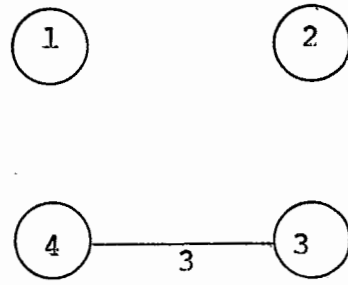


Figura 3.12

As Figuras 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 mostram como poderemos atender aos requisitos de fluxo do 2º período, isto é,  $t=2$ , entre os nós  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(3,4)$  e  $(2,4)$  respectivamente.

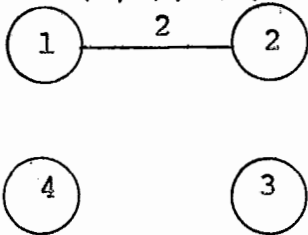


Figura 3.13

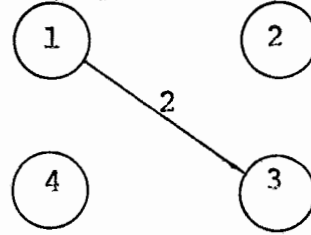


Figura 3.14

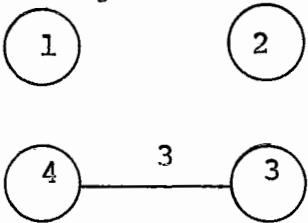


Figura 3.15

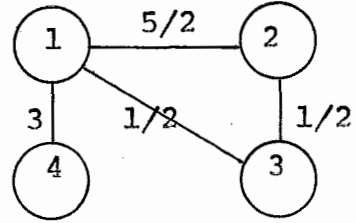


Figura 3.16

### 3.4 - Algoritmo Dual Aplicado a Problemas de Síntese

Da mesma forma que o Algoritmo Primal, o Algoritmo Dual tem como objetivo a resolução do problema (3.11) e pela mesma justificativa apresentada para o Algoritmo Primal iremos adotar o Dual Simplex por Operações Coluna (m variáveis). Como todo Dual Simplex, necessitamos de uma solução básica dual viável qualquer; por exemplo

$$\underline{N} = \underline{0} = [0, 0, \dots, 0]$$

a qual será certamente viável desde que tenhamos  $\underline{c} > 0$  ( $\underline{c}$  é o vetor que representa o custo de transporte de uma unidade de fluxo), o que no nosso caso sempre ocorrerá.

O Método Dual Simplex consiste basicamente dos seguintes passos:

- 1 - Escolha da linha, ou seja, da variável que irá sair da base.
- 2 - Escolha da coluna, ou seja, da variável que irá entrar na base.
- 3 - Processo de eliminação de Gauss-Jordan, ou seja, mudança da base por operações coluna.

Os passos (2) e (3) são de rotina e o passo (1) não pode ser realizado como normalmente o é em um PPL pelo fato de não conhecermos a priori todas as restrições de (3.11). O nosso objetivo resume-se em a cada iteração do Dual Simplex determinarmos uma das restrições de (3.11) não satisfeita pelos valores correntes de  $\underline{N}$ .

Podemos inicialmente utilizar restrições do seguinte tipo:

$$y_{ij} \geq r_{ij}(t) \quad , \quad (\forall (i,j) \in A) \quad , \quad (\forall t=1,2,\dots,T)$$

que são restrições necessárias e suficientes, as quais implicam as seguintes restrições necessárias (mas não suficientes) para que uma rede não orientada com capacidades  $y_{ij}$  ,  $\forall (i,j) \in A$  , satisfaça a um conjunto de requisitos simultâneos  $r_{ij} = r_{ji}$  ,  $\forall (i,j) \in A$  .

$$\sum_j y_{ij} \geq \sum_j r_{ij} \quad , \quad \forall i=1,2,\dots,n \quad ; \quad \forall j=1,2,\dots,n \quad (3.34.3)$$

(Estas restrições (3.34.3) são as que realmente serão utilizadas)

Tendo-se uma solução  $\hat{N}$  dual viável, conforme já visto, para

$$\hat{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t \quad \forall t=1,2,\dots,T \quad ; \quad \forall i \quad (3.34.4)$$

$$\sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

esta mesma solução  $\hat{N}$  também será primal viável e portanto ótima. Temos então o seguinte problema, para cada período  $t$  :

$$\max \theta = \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t$$

sujeito a : (3.35)

$$\hat{N} \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t$$

$$\lambda_i^t \geq 0$$

$$\forall t=1,2,\dots,T \quad ; \quad \forall i$$



Este PPL é tipicamente um problema de análise de uma rede com fluxos de mais de uma comodidade. Notemos também sua semelhança com (3.14) e por analogia usaremos para resolvê-lo o Primal Simplex Revisado por Operações Linha.

Suponhamos resolvido (3.35) para um determinado período  $t$  e obtivemos a solução ótima  $\theta_{\max}^t$ . Fazendo-se no último quadro do Simplex

$$\underline{\Pi}^t = \underline{c}_b^t B_t^{-1}$$

Sabemos que  $\underline{\Pi}^t$  é a solução ótima do problema dual de (3.35) que é o seguinte:

$$\min \underline{v}^t \cdot \hat{N}$$

sujeito a : (3.36)

$$\underline{v}^t \cdot \underline{N}_i^t \geq 1$$

$$\forall i=1,2,\dots,k(t) ; \forall t=1,2,\dots,T$$

$$\underline{v}^t \geq \underline{0}$$

Sendo  $\underline{\Pi}^t$  solução ótima, pelas propriedades do primal e dual temos:

1.  $\underline{\Pi}^t \cdot \hat{N}$  é o valor ótimo do dual (3.36), conseqüentemente igual a  $\theta_{\max}^t$  que é o valor ótimo do primal (3.35)

.....(3.37)

2. Como  $\underline{\Pi}^t$  é uma solução ótima de (3.36), também o é viável; portanto

$$\underline{\Pi}^t \cdot \hat{N} \geq 1$$

$$\underline{\Pi}^t \geq \underline{0}$$

(3.38)

3. Pelo fato de  $\underline{\Pi}^t$  ser solução ótima de (3.36) será um ponto extremo do politopo de restrições. (3.39)

Podemos escrever (3.37) e (3.38) da seguinte forma:

$$[\underline{\Pi}^t, 1] [\hat{\underline{N}}, -1] = \theta_{\max}^t - 1 \quad (3.40)$$

$$[\underline{\Pi}^t, 1] [\underline{N}_i^t, -1] \geq 0$$

$$[\underline{\Pi}^t, 1] \geq 0$$

Analogamente ao caso do Algoritmo Primal, podemos demonstrar que uma das restrições do problema (3.11) é :

$$[\underline{\Pi}^t, 1] [\underline{N}, -1] \geq 0$$

No problema (3.35),  $\hat{\underline{N}}$  é conhecido e para iniciarmos os cálculos podemos usar qualquer rede viável  $\underline{N}_i^t$  para um determinado período de tempo  $t$ . Resolvendo-se (3.35) para obter  $\theta_{\max}^t$  e  $\underline{\Pi}^t$ , temos duas possibilidades:

1.  $\theta_{\max}^t \geq 1$ , o que por (3.34.4) significa ser  $\hat{\underline{N}}$  primal viável para o período  $t$ .

Se  $\theta_{\max}^t \geq 1$ ,  $\forall t=1,2,\dots,T$ , então  $\hat{\underline{N}}$  é a solução ótima para o problema (3.11) pois  $\hat{\underline{N}}$  é primal viável para todos os períodos  $t$  e também dual viável.

2.  $\theta_{\max}^t < 1$ . De (3.40), temos:

$$[\underline{\Pi}^t, 1] [\hat{\underline{N}}, -1] < 0$$

Portanto,  $\hat{\underline{N}}$  não satisfaz à restrição

$$[\underline{\pi}^t, 1][\underline{N}, -1] \geq 0 \quad (3.41)$$

Conseqüentemente, realizando-se o "updating" na restrição (3.41), ela poderá ser utilizada como linha do pivô.

Finalizando, mostraremos como poderá ser resolvido o problema (3.35). Como no problema (3.14) do Algoritmo Primal, a dificuldade reside na escolha da variável que irá entrar na base, pois não conhecemos todos os  $\underline{N}_i^t$  a priori. Usando-se (3.34.1) para o problema (3.35), temos:

$$(z_i^t - c_i^t) = \gamma \cdot \underline{N}_i^t - 1 \quad (3.42)$$

Para determinarmos a variável que irá entrar na base, analogamente ao Algoritmo Primal, desejamos  $\gamma \cdot \underline{N}_i^t$  mínimo, onde  $\underline{N}_i^t \in \mathbb{P}_t^m$ . Já foi apresentada solução para este tipo de problema.

Se  $\gamma \underline{N}_i^t \leq 1$ , sabemos por (3.42) que estamos na solução ótima de (3.35).

### 3.4.1 - Um Exemplo Numérico Completo sobre Aplicação do Algoritmo Dual

Resolveremos o mesmo exemplo apresentado no item 3.3.1 (Um Exemplo Numérico Completo sobre Aplicação do Algoritmo Primal).

A nossa solução básica dual viável de partida será:

$$\underline{N}^0 = [0, 0, 0, 0, 0]$$

Com isto temos o primeiro quadro do Simplex que é o Quadro B1.

QUADRO B1

	1	$-N_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-N_4$	$-N_5$
$-z$	0	4	5	7	6	4
$N_1$	0	-1				
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	0				-1	
$N_5$	0					-1

Obteremos agora uma restrição não satisfeita pelos valores correntes de  $\underline{N}$ , utilizando-se (3.34.3) e considerando-se os requisitos de fluxo do 1º período que envolvem o nó 1 (Verificar Figura 3.4):

$$N_1 + N_4 + N_5 \geq 3 + 4 + 1 = 8$$

$$N_1 + N_4 + N_5 - 8 \geq 0$$

a qual não é satisfeita pelos valores correntes de  $\underline{N}$ . Adicionando-se uma variável de folga  $v_1$ , teremos :

$$N_1 + N_4 + N_5 - 8 - v_1 = 0$$

$$v_1 = -8 + N_1 + N_4 + N_5$$

que é a linha do pivô do Quadro B1. Acrescentando-se esta linha ao Quadro B1, teremos o Quadro B2 .

QUADRO B2

	1	$-N_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-N_4$	$-N_5$
$-Z$	0	4	5	7	6	4
$N_1$	0	-1				
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	0				-1	
$N_5$	0					-1
$v_1$	-8	-1	0	0	-1	-1

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro B2 , obteremos o Quadro B3 .

$$\text{pivô} = \min \{4/1, 6/1, 4/1\} = 4/1 = 4$$

QUADRO B3

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-N_4$	$-N_5$
$-Z$	-32	4	5	7	2	0
$N_1$	8	-1			1	1
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	0				-1	
$N_5$	0					-1
$v_1$	0	-1	0	0	0	0

Podemos abandonar a última linha do Quadro B3, pois ela não mais será útil.

Considerando-se agora os requisitos de fluxo do 1º período que envolvem o nó 3, por (3.34.3) temos:

$$N_2 + N_3 + N_5 \geq 4 + 3 + 1 = 8$$

$$N_2 + N_3 + N_5 - 8 \geq 0$$

restrição esta que não é satisfeita pelos valores correntes de  $N$ . Adicionando-se uma variável de folga  $v_2$ , teremos:

$$N_2 + N_3 + N_5 - 8 - v_2 = 0$$

$$v_2 = -8 + N_2 + N_3 + N_5$$

que após atualizada, ou seja, realizarmos o "updating" conforme efetuado no item 3.3.1, será a linha do pivô do Quadro B3. Acrescentando-se esta linha ao Quadro B3, teremos o Quadro B4.

QUADRO B4

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-N_4$	$-N_5$
$-Z$	-32	4	5	7	2	0
$N_1$	8	-1			1	1
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	0				-1	
$N_5$	0					-1
$v_2$	-8	0	-1	-1	0	-1

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro B4 , obteremos o Quadro B5.

$$\text{pivô} = \min \{5/1, 7/1, 0/1\} = 0$$

QUADRO B5

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-N_4$	$-v_2$
$-z$	-32	4	5	7	2	0
$N_1$	0	-1	-1	-1	1	1
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	0				-1	
$N_5$	8					-1
$v_2$	0	0	0	0	0	-1

Considerando-se agora os requisitos de fluxo para o 1º período que envolvem o nó 4, por (3.34.3) temos:

$$N_3 + N_4 \geq 3 + 4 = 7$$

$$N_3 + N_4 - 7 \geq 0$$

restrição esta que não é satisfeita pelos valores correntes de  $N$  .  
Adicionando-se uma variável de folga  $v_3$  , teremos :

$$N_3 + N_4 - 7 - v_3 = 0$$

$$v_3 = -7 + N_3 + N_4$$

que atualizada, será a linha do pivô do Quadro B5. Acrescentando-se esta linha

ao Quadro B5 , teremos o Quadro B6 .

QUADRO B6

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-N_4$	$-v_2$
-Z	-32	4	5	7	2	0
$N_1$	0	-1	-1	-1	1	1
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	0				-1	
$N_5$	8		1	1		-1
$v_3$	-7	0	0	-1	-1	0

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro B6 , obteremos o Quadro B7 .

$$\text{pivô} = \min \{7/1, 2/1\} = 2/1 = 2$$

QUADRO B7

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-v_3$	$-v_2$
-Z	-46	4	5	5	2	0
$N_1$	-7	-1	-1	-2	1	1
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	7			1	-1	
$N_5$	8		1	1		-1
$v_3$	0	0	0	0	-1	0



Considerando-se agora os requisitos de fluxo para o 1º período que envolvem o nó 2, por (3.34.3), temos:

$$N_1 + N_2 \geq 3 + 4 = 7$$

$$N_1 + N_2 - 7 \geq 0$$

Acrescentando-se uma variável de folga  $v_4$ , teremos :

$$N_1 + N_2 - 7 - v_4 = 0$$

$$v_4 = -7 + N_1 + N_2$$

que atualizada será a linha do pivô do Quadro B7. Acrescentando-se esta linha ao Quadro B7, teremos o Quadro B8 .

QUADRO B8

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-N_3$	$-v_3$	$-v_2$
-Z	-46	4	5	5	2	0
$N_1$	-7	-1	-1	-2	1	1
$N_2$	0		-1			
$N_3$	0			-1		
$N_4$	7			1	-1	
$N_5$	8		1	1		-1
$v_4$	-14	-1	-2	-2	1	1

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro B8, obteremos o Quadro B9 .

$$\text{pivô} = \min \{4/1, 5/2, 5/2\} = 5/2$$

QUADRO B9

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-v_4$	$-v_3$	$-v_2$
$-z$	-81	3/2	0	5/2	9/2	5/2
$N_1$	7		1	-1		
$N_2$	0		-1			
$N_3$	7	1/2	1	-1/2	-1/2	-1/2
$N_4$	0	-1/2	-1	1/2	-1/2	1/2
$N_5$	1	-1/2		1/2	1/2	-1/2
$v_4$	0	0	0	-1	0	0

Neste Quadro B9 verificamos que todas as restrições do tipo (3.34.3) são satisfeitas para os dois períodos de tempo, pelos valores correntes de  $\underline{N}$ . Portanto, temos que passar para a parte auxiliar, ou seja, resolvermos (3.35), primeiramente para o 1º período, com :

$$\hat{\underline{N}} = [7, 0, 7, 0, 1]$$

Para termos uma base inicial, devemos introduzir variáveis de folga ( $s_1, s_2, \dots, s_5$ ) e com isto teremos o primeiro quadro da parte auxiliar do problema, com exceção da última coluna, coluna pivô.

Como neste quadro temos:

$$\underline{\gamma} = [0, 0, 0, 0, 0]$$

portanto, qualquer rede  $\underline{N}_i^t \in \mathbb{IP}_t^m$  será solução ótima. Determinando-se a rede mais barata para qualquer  $\underline{\gamma} \neq \underline{0}$ , teremos um  $\underline{N}_i^t$ . Para  $\underline{\gamma} = [1, 1, 1, 1, 1]$  a rede mais barata é :

$$\bar{N}_1^1 = [3, 4, 3, 4, 1]$$

Como:

$$(z_1^1 - c_1^1) = -1$$

então a coluna do pivô do primeiro quadro da parte auxiliar, Quadro B9P11 será :

$$[-1, 3, 4, 3, 4, 1]$$

e com isto temos o Quadro B9P11 completo.

QUADRO B9P11

	1	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	$\lambda_{11}^1$
$\theta^1$	0	0	0	0	0	0	-1
S <sub>1</sub>	7	1					3
S <sub>2</sub>	0		1				4
S <sub>3</sub>	7			1			3
S <sub>4</sub>	0				1		4
S <sub>5</sub>	1					1	1

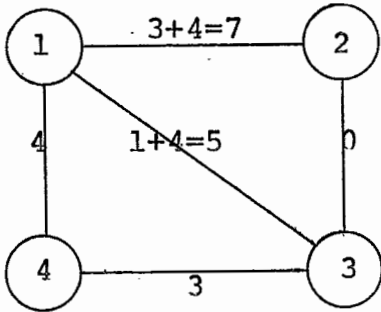
Realizando-se o pivoteamento teremos o segundo quadro da parte auxiliar, com exceção da coluna pivô.

$$\text{pivô} = \min \{7/3, 0/4, 7/3, 0/4, 1/1\} = 0$$

Como neste próximo quadro temos:

$$\gamma = [0, 1/4, 0, 0, 0]$$

uma das redes mais baratas, solução ótima, será :



$$N_2^1 = [7, 0, 3, 4, 5]$$

Como:

$$(z_2^1 - c_2^1) = -1$$

temos :

$$[-1, 7, 0, 3, 4, 5]$$

que realizando-se o "updating", ou seja, pré-multiplicando-a pela inversa da base será a coluna do pivô do Quadro B9P12 .

QUADRO B9P12

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$\lambda_{11}^1$	$\lambda_{21}^1$
$\theta^1$	0	0	1/4	0	0	0	0	-1
$s_1$	7	1	-3/4				0	7
$\lambda_{11}^1$	0		1/4				1	0
$s_3$	7		-3/4	1			0	3
$s_4$	0		-1		1		0	4
$s_5$	1		-1/4			1	0	5

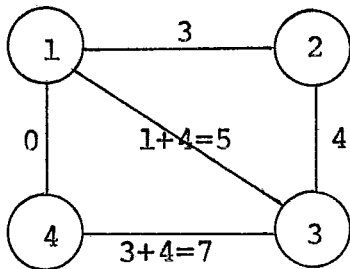
Realizando-se o pivoteamento, teremos o Quadro B9P13, faltando-lhe somente a coluna do pivô.

$$\text{pivô} = \min \{7/7, 7/3, 0/4, 1/5\} = 0$$

Como neste próximo quadro temos:

$$\gamma = [0, 0, 0, 1/4, 0]$$

uma das redes mais baratas, solução ótima, será :



$$N_3^1 = [3, 4, 7, 0, 5]$$

Como:

$$(z_3^1 - c_3^1) = -1$$

temos:

$$[-1, 3, 4, 7, 0, 5]$$

que realizando-se o "updating", será a coluna do pivô do Quadro B9P13

QUADRO B9P13

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$\lambda_{12}^1$	$\lambda_{13}^1$
$\theta^1$	0	0	0	0	1/4	0	0	-1
$s_1$	7	1	1		-7/4		0	7
$\lambda_{11}^1$	0		1/4				0	1
$s_3$	7			1	-3/4		0	7
$\lambda_{12}^1$	0		-1/4		1/4		1	-1
$s_5$	1				-5/4	1	0	9

Realizando-se o pivoteamento teremos o Quadro B9P14,

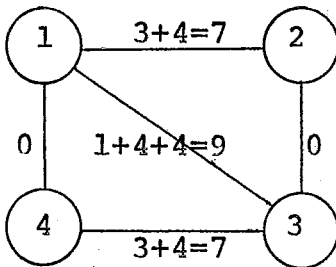
faltando-lhe somente a coluna do pivô.

$$\text{pivô} = \min \{7/7, 0/1, 7/7, 1/9\} = 0$$

Como neste próximo quadro temos:

$$\gamma = [0, 1/4, 0, 1/4, 0]$$

uma das redes mais baratas, solução ótima, será :



$$\tilde{N}_4^1 = [7, 0, 7, 0, 9]$$

Como:

$$(z_4^1 - c_4^1) = -1$$

temos:

$$[-1, 7, 0, 7, 0, 9]$$

que, realizando-se o "updating", será a coluna do pivô do Quadro B9P14 .

QUADRO B9P14

	1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$\lambda_{13}^1$	$\lambda_{14}^1$
$\theta^1$	0	0	1/4	0	1/4	0	0	-1
$s_1$	7	1	-3/4		-7/4		0	7
$\lambda_{13}^1$	0		1/4				1	0
$s_3$	7		-7/4	1	-3/4		0	7
$\lambda_{12}^1$	0				1/4		0	0
$s_5$	1		-5/4		-5/4	1	0	9

Realizando-se o pivoteamento, teremos o Quadro B9P15, faltando-lhe somente a coluna do pivô.

$$\text{pivô} = \min \{7/7, 7/7, 1/9\} = 1/9$$

Como neste próximo quadro temos:

$$\gamma = [0, 1/9, 0, 1/9, 1/9]$$

e a rede mais barata será :

$$\tilde{N}_5^1 = [3, 4, 3, 4, 1]$$

Como, por (3.42):

$$(z_5^1 - c_5^1) = 0$$

temos :

$$[0, 3, 4, 3, 4, 1]$$

que, realizando-se o "updating", será a última coluna do Quadro B9P15 .

		QUADRO B9P15					$\lambda_{14}^1$	$\lambda_{15}^1$	
		1	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$		
$\theta^1$		1/9	0	1/9	0	1/9	1/9	0	0
$s_1$		56/9	1	2/9		-7/9	-7/9	0	0
$\lambda_{13}^1$		0		1/4				0	1
$s_3$		56/9		-7/9	1	2/9	-7/9	0	0
$\lambda_{12}^1$		0				1/4		0	1
$\lambda_{14}^1$		1/9		-5/36		-5/36	1/9	1	-1

Como  $(z-c) \geq 0$ , estamos na solução ótima.

$$\theta_{\max}^1 = 1/9 \quad , \quad \pi^1 = [0, 1/9, 0, 1/9, 1/9]$$

Sendo  $\theta_{\max}^1 < 1$ , por (3.41), uma restrição não satisfeita pelos valores correntes de  $N$  (Quadro B9) é :

$$[\pi^1, 1] \cdot [N, -1] \geq 0$$

$$(1/9)N_2 + (1/9)N_4 + (1/9)N_5 - 1 \geq 0$$

Acrescentando-se uma variável de folga  $v_5$ , teremos

$$(1/9)N_2 + (1/9)N_4 + (1/9)N_5 - 1 - v_5 = 0$$

$$v_5 = -1 + (1/9)N_2 + (1/9)N_4 + (1/9)N_5$$

que atualizada será a linha do pivô do Quadro B9. Acrescentando-se esta linha ao Quadro B9, teremos o Quadro B10.

QUADRO B10

	1	$-v_1$	$-N_2$	$-v_4$	$-v_3$	$-v_2$
-z	-81	3/2	0	5/2	9/2	5/2
$N_1$	7		1	-1		
$N_2$	0		-1			
$N_3$	7	1/2	1	-1/2	-1/2	-1/2
$N_4$	0	-1/2	-1	1/2	-1/2	1/2
$N_5$	1	-1/2		1/2	1/2	-1/2
$v_5$	-8	-1	-2	1	0	0



Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro B10, obteremos o Quadro B11 .

$$\text{pivô} = \min \{ 3/2 / 1 , 0/2 , 5/2 / 1 \} = 0$$

QUADRO B11

	1	$-v_1$	$-v_5$	$-v_4$	$-v_3$	$-v_2$
$-Z$	-81	3/2	0	5/2	9/2	5/2
$N_1$	3	-1/2	1/2	-1/2		
$N_2$	4	-1/2	-1/2	-1/2		
$N_3$	3		1/2		-1/2	-1/2
$N_4$	4		-1/2		-1/2	1/2
$N_5$	1	-1/2		1/2	1/2	-1/2
$v_5$	0	0	-1	0	0	0

Para determinarmos uma restrição que não esteja sendo respeitada pelos valores de  $\underline{N}$  no Quadro B11, vamos resolver (3.35), agora considerando o 2º período com:

$$\hat{\underline{N}} = [ 3, 4, 3, 4, 1 ]$$

Se assim o fizermos, encontraremos

$$\theta_{\max}^2 = 7/10 \quad , \quad \underline{\Pi}^2 = [ 1/10, 0, 1/10, 0, 1/10 ]$$

Sendo  $\theta_{\max}^2 < 1$  , uma restrição não satisfeita é :

$$(1/10)N_1 + (1/10)N_3 + (1/10)N_5 - 1 \geq 0$$

Acrescentando-se uma folga  $v_6 \geq 0$  e atualizando-se,

teremos a última linha do Quadro B12 .

QUADRO B12

	1	$-v_1$	$-v_5$	$-v_4$	$-v_3$	$-v_2$
-Z	-81	3/2	0	5/2	9/2	5/2
$N_1$	3	-1/2	1/2	-1/2		
$N_2$	4	1/2	-1/2	-1/2		
$N_3$	3		1/2		-1/2	-1/2
$N_4$	4		-1/2		-1/2	1/2
$N_5$	1	-1/2		1/2	1/2	-1/2
$v_6$	-3	-1	1	0	0	-1

Realizando-se o pivoteamento por operações coluna no Quadro B12, obteremos o Quadro B13 .

$$\text{pivô} = \min \{3/2 / 1, 5/2 / 1\} = 3/2$$

QUADRO B13

	1	$-v_6$	$-v_5$	$-v_4$	$-v_3$	$-v_2$
-Z	-85.5	3/2	3/2	5/2	9/2	5/2
$N_1$	9/2	-1/2		-1/2		1/2
$N_2$	5/2	1/2		-1/2		-1/2
$N_3$	3		1/2		-1/2	-1/2
$N_4$	4		-1/2		-1/2	1/2
$N_5$	5/2	-1/2	-1/2	1/2	1/2	
$v_6$	0	1	0	0	0	0

Se resolvermos (3,34) para cada um dos dois períodos,  
com :

$$\hat{N} = [9/2, 5/2, 3, 4, 5/2]$$

encontraremos :

$$\theta_{\max}^1 \geq 1 \quad e \quad \theta_{\max}^2 \geq 1$$

Portanto, como era esperado, a solução obtida pelo Algoritmo Dual é exatamente igual à solução obtida pelo Algoritmo Primal.

### 3.5 - Ampliação de Redes já Existentes a Mínimo Custo

Este problema é um caso particular do Problema de Síntese. Neste caso já existe construída uma rede e, através de uma análise verifica-se que a mesma não está atendendo aos requisitos de fluxo. O problema resume-se em saber de quanto deve ser aumentada a capacidade de cada arco da rede de maneira que a rede ampliada satisfaça aqueles requisitos e tenha um custo total de ampliação mínimo. É interessante lembrar que na rede original podemos ter alguns arcos com capacidade nula.

Como dados do Problema, temos:

(i) Uma rede não orientada  $[N, A, Y^e]$  existente, onde:

$$N = \text{conjunto dos nós} = \{1, 2, \dots, n\}$$

$A =$  conjunto dos arcos  $= \{(i,j)/i,j \in N ; i \neq j\}$  ; estes arcos são numerados  $1,2,\dots,m$  , com  $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

$y^e =$  vetor cujas componentes são as capacidades existentes dos arcos  $= (y_1^e, y_2^e, \dots, y_m^e)$ .

(ii) Um conjunto  $\{r_{ij}(t)/i,j \in N ; t=1,2,\dots,T\}$  de requisitos de fluxo simultâneos para o período de tempo  $t$  , onde:  
 $r_{ij}(t) = r_{ji}(t) =$  fluxo requerido entre os nós  $i,j \in N$  , durante o período  $t$  ,  $t=1,2,\dots,T$  .

(iii) Um vetor  $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  de custos unitários para incrementos da capacidade, onde:

$c_i =$  custo para aumentar de uma unidade a capacidade do arco  $i \in A$  .

Como objetivo do Problema, temos:

(i) Uma rede não orientada  $[N,A,Y]$  tal que seja uma ampliação da rede existente  $[N,A,Y^e]$  , ou seja, deveremos ter:  
 $\underline{Y} \geq \underline{Y}^e$  .

(ii) A rede  $[N,A,Y]$  seja viável, isto é, satisfaça aos requisitos de fluxo em todos os períodos .

(iii)  $\underline{c} (\underline{Y} - \underline{Y}^e) = \min \{ \underline{c} (\underline{H} - \underline{Y}^e) / [N,A,H] \}$  é viável,  $\underline{H} \geq \underline{Y}^e$

A formulação do Problema de Ampliação pode ser realizada exatamente igual a do Problema de Síntese, fazendo-se simples-

mente uma mudança de variáveis que indicaremos a seguir.

No problema (3.8), o vetor  $\tilde{N}$  que é um vetor de capacidades de uma determinada rede, para que ele satisfaça aos requisitos de todos os períodos  $t$ , é necessário e suficiente que satisfaça a :

$$\tilde{N} \geq \tilde{N}^t \in \mathbb{P}_t^m, \quad \forall t = 1, 2, \dots, T.$$

Fazendo-se a seguinte mudança de variáveis :

$$\tilde{N} = \tilde{x} + \tilde{y}^e$$

teremos :

$$\tilde{x} = \tilde{y}^e - \tilde{N}$$

e o problema (3.38) passará a :

$$\min \quad \tilde{c} \tilde{x}$$

sujeito a :

(3.43)

$$\begin{array}{l} \tilde{x} + \tilde{y}^e \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1, \quad \lambda_i^t \geq 0 \\ \tilde{x} \geq 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \tilde{x} + \tilde{y}^e \geq \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \tilde{N}_i^t \\ \sum_{i=1}^{k(t)} \lambda_i^t \geq 1, \quad \lambda_i^t \geq 0 \\ \tilde{x} \geq 0 \end{array}} \right\} \quad \forall t = 1, 2, \dots, T$$

Fazendo-se uma série de transformações no problema (3.43), transformações estas análogas às realizadas no problema

(3.38), chegamos à formulação definitiva do Problema de Ampliação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a :} \quad & \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\underline{\pi}_j^t \cdot [ \underline{x} + \underline{y}^e , -1 ] \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,2,\dots,r(t) ; \forall t=1,2,\dots,T$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Como técnicas para resolução do problema (3.44), temos os mesmos algoritmos usados para resolver o problema (3.11) , Problema de Síntese, ou seja, Algoritmo Primal e Algoritmo Dual.

Uma observação importante a ser notada no Problema de Ampliação é o caso em que  $\underline{y}^e = (0,0,\dots,0)$ . Assim sendo, o problema (3.44) passa a ter a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \min \quad & \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a :} \quad & \end{aligned}$$

$$\underline{\pi}_j^t \cdot [ \underline{x}, -1 ] \geq 0 \quad , \quad \forall j=1,2,\dots,r(t) ; \forall t=1,2,\dots,T$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

que nada mais é do que (3.11), ou seja, a formulação definitiva do Problema de Síntese.

Exemplos numéricos completos sobre Problemas de Ampliação podem ser encontrados em [1] .

BIBLIOGRAFIA

- (1) CHARIFKER, I. and MACULAN F.,N.  
"Operational Solution for the Network Expansion Problem"  
International Symposium on Applications of Computers and  
Operations Research to Problems of World Concern.  
Washington, D.C., August/1973.
- (2) DANTZIG, G.B. and WOLFE,P.  
"The Decomposition Algorithm for Linear Programming"  
Econometrica, Vol.9, N<sup>o</sup>4, 1961; Operations Research, Vol.8,  
Jan-Feb-Oct/1960.
- (3) EGGLESTON, H.G.  
"Convexity"  
Cambridge University Press, 1958.
- (4) FORD, L.R. and FULKERSON, D.R.  
"Suggested Computation for Maximal Multi-Commodity Network Flows"  
Management Science, Vol.5, N<sup>o</sup>1, pp. 97-101, Oct/1958.
- (5) FULKERSON, D.R.  
"Increasing the Capacity of a Network; the Parametric Budget  
Problem"  
Management Science, Vol. 5, N<sup>o</sup>4, pp. 472-483, Jul/1959.
- (6) GASS, S.I.  
"Linear Programming"  
McGraw-Hill Book Company, 1969.
- (7) GEOFFRION, A.M.  
"Elements of Large-Scale Mathematical Programming"  
A report prepared for the United States Air Force Project Rand,  
pp. 18-24.

- (8) GOMORY, R.E. and HU, T.C.

"Synthesis of a Communication Network"  
Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics,  
Vol.12, No 2, pp. 348-369, Jun/1964.

- (9) GRÜNBAUM, B.

"Convex Polytopes"  
Interscience Publishers, 1967.

- (10) HU, T.C.

"Decomposition Algorithm for Shortest Paths in a Network"  
Operations Research, Vol. 16, No 1, pp. 91-102, Jan-Feb/1968.

- (11) HU, T.C.

"Integer Programming and Network Flows"  
Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

- (12) HU, T.C.

"Multi-Commodity Network Flows"  
Operations Research, Vol. 11, No 3, pp. 344-360, May-Jun/1966.

- (13) KABALA, R.E. and JUNCOSA, M.L.

"Optimum Design and Utilization of Communication Network"  
Management Science, Vol. 3, No 1, pp. 33-44, 1956.

- (14) KARLEN, S.

"Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and  
Economics"  
Addison-Wesley Publishing Company, Vol. 1, 1961.



- (15) KUHN, H.W. and TUCKER, A.W.

"Linear Inequalities and Related Systems"  
Annals of Mathematics Studies, No 38, pp. 44-46, Princeton  
University Press, 1956.

- (16) LASDON, L.S.

"Optimization Theory for Large Systems"

- (17) McMULLEN, P and SHEPHARD, G.C.

"Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture"  
Cambridge University Press, 1971.

- (18) ROTHSCHILD, B. and WHINSTON, A.

"On Two-Commodity Network Flows"  
Operations Research, Vol. 14, No 3, pp. 377-388, May-Jun/1966.

- (19) SAKAROVITCH, M.

"The Multi-Commodity Maximum Flow Problem"  
University of California, Berkeley, 1966.

- (20) SIMONNARD, M.

"Programmation Lineaire"  
Dunod, Paris, 1962.

- (21) TOMLIN, J.A.

"Minimum-Cost Multi-Commodity Flows"  
Operations Research, Vol. 14, No 1, pp. 45-51, Feb/1966.

- (22) WAGNER, H.M

"Principles of Operations Research"  
Prentice Hall, 1969.