


"CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE
PARA SISTEMAS DE GERAÇÃO HIDROTÉRMICOS"

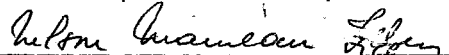
Maria Helena Torres de Araujo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por :



Prof. Clovis C. Gonzaga.
(Presidente)



Prof. Nelson Macutan F.



Prof. Ronaldo C. M. Persiano

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
DEZEMBRO DE 1974

RESUMO

A satisfação do mercado por um sistema de geração hidrotérmico faz-se por meio de energia hidroelétrica de baixo custo e por energia termoelétrica de alto custo. Para obter estratégias ótimas de operação do sistema integrado deve-se decidir a cada instante qual a distribuição entre os dois tipos de geração. Esta distribuição deve ser tal que além de satisfazer a demanda, minimiza o custo total em um período dado, respeitando restrições devidas ao tamanho dos reservatórios e a fatores meteorológicos.

Este trabalho aborda o problema considerando o sistema composto, isto é, com apenas um reservatório. Obtem-se condições necessárias de otimalidade para a operação do sistema, considerando afluências determinísticas, custos descontados e hipóteses realistas sobre os custos de geração termoelétrica.

ABSTRACT

Market's satisfaction by a hydrothermal generation system is achieved by means of low cost hydroelectric energy, and by expensive thermoelectric energy. To obtain optimal strategies for the integrated system's operation, we must decide at each instant what shall be the distribution between these two kinds of generation. This distribution must be so that besides satisfying the demand, it minimizes the total cost over a given time period, constrained by restrictions due to the size of reservoirs and to meteorologic factors.

This study treats the problem considering composite system, that is, with only one reservoir. We obtain necessary optimality conditions for the system's operation, considering deterministic inflows, discounted costs and realistic hypotheses about the thermoelectric generation costs.

INDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - O SISTEMA	5
Seção 1: Sistema de Geração Hidrotérmico	5
Seção 2: Modelo Composto e Simplificações ...	10
CAPÍTULO III - O PROBLEMA	18
Seção 1: Definição das Variáveis e Enunciado do Problema	18
Seção 2: Métodos de Resolução	24
CAPÍTULO IV - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE	28
Seção 1: Definições e Lemas	29
Seção 2: Condição Necessária de Otimalidade: O Teorema	38
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES	53
BIBLIOGRAFIA	55

CAPÍTULO IINTRODUÇÃO

Um sistema de geração hidrotérmico é constituído por usinas de geração hidroelétricas e termoelétricas. O mercado consumidor numa certa região requer a produção de determinada quantidade de energia que deverá ser obtida por geração nessas usinas. As usinas hidroelétricas utilizam água na geração de energia e possuem geralmente reservatórios para armazenamento dessa água. As termoelétricas fazem uso de combustível como óleo e gás e apresentam um alto custo de operação em relação ao custo nas hidroelétricas.

Em vista disso, se queremos operar o sistema a mínimo custo devemos evitar sempre que possível a utilização da geração térmica para o atendimento da demanda. Este fato, aliado à limitação existente nos recursos hídricos de um sistema dessa natureza, leva à necessidade de um planejamento cuidadoso na operação de um sistema hidrotérmico. A solução deste problema de planejamento deve especificar qual a quantidade de energia a ser gerada em cada usina (hidráulica ou térmica) para todo instante do período de planejamento. Os níveis de geração obtidos fornecem uma estratégia de operação do sistema. Observa-se ainda que o problema de planejamento de um sistema hidrotérmico deve encontrar uma estratégia que além de apresentar o menor custo operacional, atenda às restrições físicas do sistema e à condição de satisfação do mercado consumidor.

O objetivo deste trabalho é estudar esse problema a fim de chegar a conclusões básicas em relação a uma estratégia ótima de operação do sistema. São feitas várias simplificações no sistema abordado para que seja possível a formulação de um problema de solução razoavelmente simples, como será visto a seguir.

Inicialmente faz-se um estudo detalhado de cada componente do sistema, onde se pode verificar a complexidade envolvida na sua modelagem. Em seguida, propõem-se certas simplificações que tornarão a abordagem mais simples e poderão levar a resultados ainda significativos. De um modo geral, o sistema aqui modelado apresenta as seguintes características :

- 1 - Possui somente um reservatório e estação geradora hidroelétrica cuja capacidade e características são equivalentes, aproximadamente, às do conjunto de reservatórios e estações do sistema original. Esta substituição é proposta no chamado modelo composto desenvolvido inicialmente por Little em [1]. A adoção deste modelo leva à necessidade de resolução de um outro problema de planejamento. Explica-se: como solução, utilizando o modelo composto, obtém-se a quantidade total de energia a ser obtida nas usinas hidroelétricas em cada instante do período de planejamento. Precisa-se agora, distribuir este total para cada uma das usinas de acordo com suas capacidades e características. Aqui trataremos somente do primeiro problema, trabalhando com o modelo composto. O segundo problema ainda não foi bastante estudado, existindo atualmente somente soluções heurísticas.

- 2 - A afluência ao reservatório é considerada determinística. Na realidade, este fator é aleatório, já que depende de ocorrências meteorológicas.
- 3 - O custo decorrente da adoção de uma estratégia para o sistema terá desconto no decorrer do período obtido pela taxa de juros aplicada ao capital no início do planejamento. A função custo da geração termoelétrica (11.18) será considerada crescente, convexa, mas não estritamente convexa.
- 4 - Consideraremos que a geração máxima capaz de ser obtida das usinas termoelétricas é ilimitada. Para tal, supõe-se conhecido um custo especial chamado custo do deficit que estima os prejuízos causados no mercado se ocorrer um certo deficit no fornecimento de energia.

Todas essas suposições são vistas mais detalhadamente no Capítulo II. Em seguida, o problema simplificado é modelado matematicamente, onde definimos todas as variáveis que entram em jogo no sistema. E ainda no Capítulo III, veremos uma rápida análise das principais abordagens encontradas na literatura. Maiores detalhes sobre estes estudos podem ser facilmente encontrados nas referências [1], [2], [3], [4], [5] e [8].

As conclusões a respeito da operação ótima do sistema são feitas no Capítulo IV. Aqui, veremos algumas condições necessárias de otimalidade de uma estratégia que respeita as restrições impostas ao sistema (estratégia admissível). Inicialmente são

apresentados e demonstrados 3 lemas especificando características da operação ótima do sistema nos casos de armazenagem crítica. Em seguida, apresenta-se um teorema que estabelece uma condição necessária de otimalidade para uma estratégia admissível de operação. Este teorema é o primeiro resultado encontrado na literatura onde o sistema é tratado com a consideração dos descontos do custo operacional (3) .

Vejamos agora uma particularidade da notação adotada a seguir .

Seja $u_t(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Então, chamaremos $u(t^+)$ ao seguinte limite :

$$u(t^+) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau > 0}} u(t+\tau)$$

CAPÍTULO II

O SISTEMA

Este capítulo tem por finalidade apresentar o sistema a ser estudado e propor certas simplificações e suposições em torno do sistema e sua operação, de modo a que seja possível uma abordagem posterior do problema, mais simplificada.

Inicialmente será feita uma descrição física de um sistema de geração hidrotérmico, considerando seus componentes e as principais particularidades destes. Em seguida, tendo em vista o objetivo do estudo e a complexidade do sistema, serão tomadas medidas simplificadoras, como a adaptação do sistema ao chamado modelo composto [1]. É feita ainda, uma análise do comportamento dos custos decorrentes de diferentes esquemas de operação do sistema. Concluímos então, que a variação de custo obtida é devida principalmente à geração térmica requerida e propomos uma composição das usinas térmicas do sistema, em um outro sistema equivalente e mais simples.

SEÇÃO 1 : SISTEMA DE GERAÇÃO HIDROTÉRMICO

Um sistema de geração hidrotérmico tem por finalidade gerar energia elétrica para atendimento satisfatório de um mercado consumidor utilizando usinas de geração hidroelétricas e térmicas, ligadas à área de consumo por redes de transmissão. Vejamos separa

damente como se comporta cada tipo de usina, inicialmente sem grandes simplificações. Hipóteses para a modelagem do sistema constarão da Seção 2 .

- 1 Uma usina hidroelétrica se compõe basicamente de um reservatório para armazenamento de água e de uma estação geradora con-
tendo turbinas e geradores elétricos. Da queda de água passando a-
través das turbinas resulta a geração de energia. Podem existir, no
entanto, usinas sem reservatório para armazenamento de água, ou ain-
da, usinas com vários reservatórios ligados a uma só estação gerado-
ra: esses casos não serão estudados neste trabalho.

As principais variáveis atuantes num sistema hidroelétrico são as seguintes:

- 2 Volume de água no reservatório :

É uma indicação do estado em que o reservatório se encontra. Ou seja, indica o potencial gerador da usina, já que mostra a disponibilidade atual de água utilizável pela usina. Indica ainda o potencial gerador da estação, já que dando a informação da altura de queda da água possibilita a obtenção da relação de transformação água-energia.

- 3 Fluxo afluente ao sistema :

É constituído basicamente da afluência natural ao sistema, influenciado pelo regime hidrológico da bacia em que se encontra o reservatório; e pela descarga permitida no reservatório imediatamente à montante, se existir. A afluência natural é uma variável

aleatória dependendo exclusivamente de ocorrências meteorológicas . De forma que, a afluência a um reservatório constitui um fator que torna a modelagem e análise de um sistema hidroelétrico bastante complexa. As afluências futuras são estimadas, então, através de uma distribuição de probabilidade obtida com base nos dados históricos de afluências armazenados.

4 Fluxo energético efluente da usina :

É controlado pela quantidade de água que se permite e fluir do sistema através das turbinas e pela altura de queda dessa água. Durante um certo período de tempo a quantidade de energia retirável de uma usina hidroelétrica é limitada principalmente pelos seguintes fatores:

- 5 - Disponibilidade de recursos hídricos que depende da afluência à usina, assim como da capacidade armazenadora do reservatório. Logicamente, há um limite físico de capacidade máxima, e pode haver ainda um limite mínimo, quando outras utilidades são exigidas do reservatório como irrigação, navegação ou turismo.
- 6 - Vazão máxima permitida pelas turbinas, que limita a quantidade de energia que pode ser obtida da usina num certo instante de operação.

Uma usina térmica gera energia elétrica por consumo de combustível, podendo ser de vários tipos tais como a óleo, a gás, nuclear, etc. Poucos são os fatores atuantes numa usina térmica, podendo-se citar basicamente os seguintes:

7 Capacidade geradora :

É limitada e é uma característica de instalação da usina.

8 Custo de operação :

Varia de usina a usina de acordo com seu tipo e estrutura e sofre modificações no decorrer do tempo, em certos casos aleatórias.

Com base no que foi exposto acima, podemos agora estudar as principais variáveis envolvidas num sistema de geração hidrotérmico, de um modo geral.

9 Afluência :

Os reservatórios das usinas hidroelétricas de um sistema hidrotérmico estão situados em redes fluviais dependentes ou não, ou seja, vários regimes hidrológicos podem ser encontrados no sistema. Consequentemente, a afluência a um sistema de hidroelétricas é analisada e prevista com base em várias distribuições de probabilidade características de cada regime hidrológico presente.

10 Demanda :

É um fator aleatório, embora possa ser previsto com margem de erro razoável, dada a existência de elaborados estudos estatísticos no assunto. Além disso, é uma variável que sofre variações locais dentro da área atendida pelo sistema. Logo, consideran-

do o custo e perdas por transmissão de energia e a limitação na quantidade de energia que pode ser transmitida pelas linhas, vemos que a localização da demanda num certo instante influencia o esquema de operação a ser adotado pelo sistema naquele instante.

11 Eficiência e perdas :

A operação das usinas de um sistema hidrotérmico é modificada ainda pelo rendimento apresentado pelas máquinas geradoras e pelas perdas de energia que ocorrem no sistema. O rendimento numa usina hidroelétrica é uma função da altura de queda da água e da vazão mantida através das turbinas. As perdas que mais comumente ocorrem num sistema são devidas à evaporação da água armazenada, atrito no fluxo pelas turbinas e nos condutos e perdas por transmissão do centro gerador aos consumidores. A influência desses fatores no potencial gerador de um sistema hidrotérmico é bastante significativa, sendo portanto muito importante o seu cômputo na modelagem do sistema.

Da rápida análise de um sistema de geração hidrotérmico feita acima, podemos concluir que uma modelagem precisa levaria à formulação de um problema de solução muito difícil, quando não impossível. Assim sendo, vemos a necessidade de simplificar o modelo, de modo a conseguir um problema de mais fácil resolução e que, mantendo as principais características do sistema permita-nos tirar conclusões significativas. Foi proposta por Little [1] a adaptação do sistema em um modelo bem mais simples chamado modelo composto, como veremos a seguir.

SEÇÃO 2 : MODELO COMPOSTO E SIMPLIFICAÇÕES

O objetivo do presente estudo é o de conseguir algumas informações básicas a respeito da operação ótima a longo prazo de um sistema hidrotérmico. Um planejamento a longo prazo, por sua vez, tem por finalidade obter uma indicação da tendência evolutiva do sistema para uma orientação mais segura do planejamento a curto prazo. Por outro lado, o estudo pretende somente apresentar uma abordagem inicial do problema, sendo necessário um trabalho mais aprofundado para utilizações práticas posteriores das conclusões aqui conseguidas. De forma que, nos sentimos à vontade de fazer algumas simplificações e suposições que sabemos fugir à realidade, mas que levam à obtenção de resultados de possível utilização num estudo mais completo. São as seguintes as considerações mais importantes :

12 Utilização do modelo composto

O modelo composto se caracteriza por substituir o conjunto de usinas hidroelétricas de um sistema hidrotérmico por uma só usina hidroelétrica de capacidade e características equivalentes, dentro de certas aproximações, às do sistema real. Obviamente, a validade do modelo exige uma uniformização de características das hidroelétricas para que a usina substituta possa ser realmente representativa do conjunto. As principais hipóteses de homogeneidade exigidas pelo modelo são :

- Dos regimes hidrológicos presentes, para que se possa obter uma distribuição probabilística da afluência ao reservatório, coerente com o sistema real.

- Da distribuição na área de consumo da demanda total, para que os efeitos de sua localização possam ser desprezados.

- Dos níveis dos reservatórios quando operados individualmente. Assim, o alcance de um ponto crítico de armazenagem (plena ou mínima) no sistema equivalente pode significar o mesmo no sistema real.

A equivalência de capacidade das hidroelétricas pode ser obtida de duas maneiras :

- Por equivalência em volume de água armazenada, e nesse caso a relação de transformação água-energia deve envolver todas as características próprias de cada usina hidroelétrica.

- Por equivalência do potencial gerador, onde a transformação água-energia é feita na afluência, armazenagem e vazão de cada reservatório separadamente. O somatório de todos os reservatórios das variáveis transformadas é que fornece os dados que caracterizam o sistema equivalente . [6]

No nosso estudo, o primeiro processo será adotado a - crescido de uma suposição, qual seja a consideração da relação de transformação água-energia como sendo independente da altura de queda da água turbina e do rendimento das turbinas e geradores. Esta é uma simplificação bastante forte, mas que será adotada já que facilita sobremaneira a modelagem do problema.

13 Afluência determinística

A afluência ao reservatório será considerada determinável a partir dos dados estatísticos anteriormente coletados. Os resultados obtidos com esta suposição parecem ser bastante significativos, como mostra Little [1] através de estudos comparativos realizados num certo sistema considerando afluências determinísticas e aleatórias. Além disso, estes resultados são necessários como ponto de partida para um estudo considerando a aleatoriedade desse fator.

14 Demanda

A demanda global num certo instante será a soma dos requisitos energéticos de cada região da área consumidora, determinada por previsão estatística. As perdas, anteriormente citadas, serão computadas como uma percentagem da demanda global, de forma que a demanda considerada no problema será a demanda global acrescida das perdas.

15 Vazão e armazenagem

A vazão máxima nas turbinas será considerada ilimitada, o que é irrelevante nos casos onde a demanda em todo instante é menor que a vazão máxima. Os limites inferiores para armazenagem e vazão serão nulos, ou seja, suporemos que nenhuma outra obrigação é exigida do reservatório. O limite superior de armazenagem será constante.

16 Dēficits

As deficiências no suprimento de energia serão devidas somente à falta dos recursos hídricos. Para isso, estamos supondo que há abundância de combustível para geração térmica e ainda que as falhas nos equipamentos não podem ocorrer .

17 Disponibilidade

A disponibilidade das usinas térmicas será considerada conhecida em qualquer instante do período de planejamento. Em sistemas com elevado número de usinas térmicas, essa disponibilidade é aleatória.

18 Custo de operação de um sistema hidrotérmico

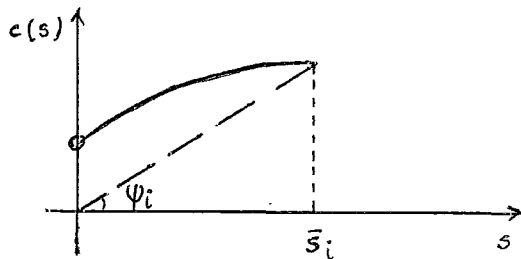
Antes de apresentarmos as suposições relativas a esse custo, se faz necessário um estudo um pouco mais detalhado do seu comportamento.

A operação de um sistema hidrotérmico envolve várias despesas referentes a pessoal e estrutura, compra de combustível e manutenção dos equipamentos. Os gastos com pessoal e estrutura mantêm-se os mesmos qualquer que seja a operação do sistema. O mesmo não se verifica nos outros gastos, sendo que a despesa na manutenção é muito pequena quando comparada à de combustível. Em vista disso, e já que estamos interessados somente na comparação de custos operacionais, o custo de operação de um sistema hidrotérmico pode ser medido através da geração térmica desenvolvida pelo sistema.

Vejamos inicialmente como se comporta o custo desta ge

ração num certo instante de operação do sistema. Sabemos que o custo de geração de potência para uma usina térmica varia com o nível de geração do seguinte modo :

19



onde:

s - nível de geração

\bar{s}_i - nível máximo de geração da térmica i

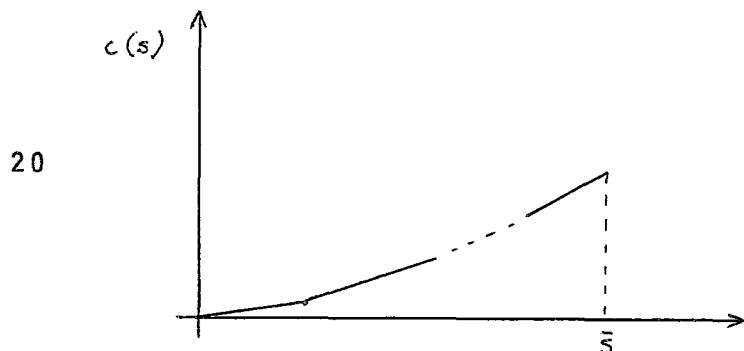
$c(s)$ - custo da geração s

ψ_i - custo marginal aproximado da térmica i

Tomemos como aproximação do custo marginal de uma usina térmica, o coeficiente angular da reta que une a origem ao ponto de máxima geração $(\bar{s}_i, c(\bar{s}_i))$. É razoável que se tome esta aproximação, já que na operação do sistema podemos sempre manter as usinas térmicas operando no seu máximo (máximo rendimento), sendo o nível médio de geração térmica requisitado num certo período controlado pelo tempo de operação dessas usinas.

Como já foi visto anteriormente, as usinas térmicas têm seu custo de geração variando de acordo com seu tipo e estrutura e conseqüentemente terão seu custo marginal assim definido também variando. De modo que, podemos ordenar as usinas na ordem crescente de seus custos marginais. E então, é possível substituir o conjunto de usinas térmicas por uma só usina se supomos que as usinas mais baratas

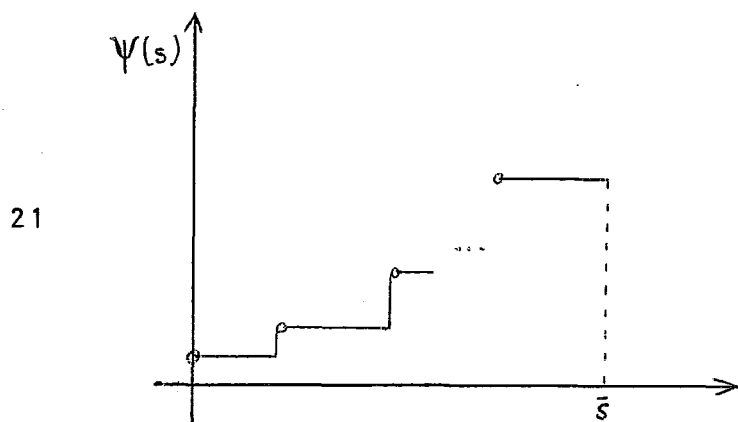
tas serão utilizadas preferencialmente quando um certo nível de geração for requerido. Logo, considerando os custos marginais das térmicas assim definidos, o custo de geração dessa usina equivalente varia com o nível de geração do seguinte modo:



onde :

\bar{s} - capacidade máxima de geração térmica do sistema

E a variação do custo marginal corresponde à derivada à esquerda do custo de geração de potência para todo nível $0 < s \leq \bar{s}$.



onde :

$\psi(s)$ = custo marginal associado ao nível de geração s

$$\psi(s) = \frac{\partial c(s)}{\partial s^-}$$

Como se pode verificar, a curva $\Psi(s)$ assim definida é uma curva crescente não estritamente e contínua à esquerda, ou seja :

$$22 \quad (a) \quad s_1 > s_2 \implies \Psi(s_1) \geq \Psi(s_2)$$

$$23 \quad (b) \quad \Psi(s_1^-) = \Psi(s_1)$$

Vejamos agora que considerações serão feitas em torno das curvas (20) e (21) :

24 - Suporemos que não há limite máximo de geração térmica e acrescentaremos à curva (20), um custo especial associado ao excesso de energia requerido das usinas térmicas. Este custo especial está relacionado com os prejuízos sociais e econômicos decorrentes de um déficit de energia no mercado consumidor equivalente ao excesso requisitado das térmicas e é chamado custo do déficit.

25 - As modificações sofridas pelo custo serão conhecidas para todo instante envolvido no planejamento de operação do sistema.

26 - Será considerado desconto no custo de operação obtido pela taxa de juros decorrente da aplicação do capital no início do planejamento.

CAPÍTULO IIIO P R O B L E M A

Depois de analisado o sistema em estudo, podemos tentar agora exprimi-lo matematicamente, de modo que possamos enunciar formalmente o problema de planejamento que advém da operação do sistema. São então, temos condições de apreender as técnicas e proposições de solucionamento desse problema. É o que será feito a seguir. Em primeiro lugar, teremos a definição de todas as variáveis existentes no problema, considerando as simplificações anteriormente sugeridas. Em seguida, serão apresentadas as principais abordagens do problema, desenvolvidas com maiores detalhes nas referências |1|, |2|, |3|, |4|, |5| e |8|.

SEÇÃO 1 : DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS E ENUNCIADO DO PROBLEMA

1

As variáveis envolvidas no problema devem ser definidas em cada instante do período de planejamento. A determinação do horizonte desse período é um problema à parte, dependendo principalmente do ciclo de esvaziamento e enchimento dos reservatórios do sistema e dos intervalos de tempo em que são fornecidos os dados de modificações na estrutura do sistema. Suponhamos conhecido esse horizonte. Uma observação a ser feita é quanto à equivalência água-energia resultante da suposição (II.12) que nos permitirá comparar

adiante, termos em unidades elétricas com termos em unidades de volume de água. Não será exigido diferenciabilidade das funções a serem definidas, sendo necessário somente que elas sejam contínuas à direita.

Seja :

T - intervalo de tempo onde se quer fazer o planejamento

W - volume máximo de armazenagem do reservatório

W_T - volume exigido do reservatório no fim do período de planejamento

As principais variáveis que caracterizam o sistema são as seguintes:

2 Estado - $w \in \mathbb{R}$

Volume do reservatório. Um estado $w \in \mathbb{R}$ é viável se respeita os limites de armazenagem do reservatório, ou seja :

$$0 \leq w \leq W$$

3 Demanda - $D(.) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Onde, para $t \in [0, T)$, $D(t)$ é a quantidade de energia requisitada pelo mercado no instante t .

4 Afluência - $x(.) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Onde, para $t \in [0, T)$, $x(t)$ é o fluxo de água que chega ao reservatório no instante t .

5 Controle - $u \in \mathbb{R}$

Nível de potência termoelétrica utilizada na produção total de energia. Um controle $u \in \mathbb{R}$ é dito viável no instante $t \in [0, T)$ se :

$$0 \leq u \leq D(t)$$

6 Vertimento - $q(.) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Onde, para $t \in [0, T)$, $q(t)$ é a vazão efluente do sistema não utilizada para geração de energia no instante t . Um vertimento num instante $t \in [0, T)$, $q(t)$, é dito admissível quando:

$$\begin{aligned} q(t) > 0 &\implies w(t) = W \\ q(t^+) &= q(t) \end{aligned}$$

Ou seja, só é permitido fluxo de água efluente sem geração de potência quando o reservatório está cheio, e o vertimento é contínuo à direita.

7 Estratégia - $u(.) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Função que associa a cada instante t do período de planejamento um controle $u(t)$.

8 Equação de transição de estado

Dados um instante $t_0 \in [0, T)$ e o estado do sistema nesse instante ($w(t_0) = w_0$), o estado do sistema em qualquer instante $t \in [t_0, T]$ é dado pelo balanço de fluxo afluente e efluente do reservatório para cada instante entre t_0 e t . Ou seja :

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^t [\lambda(\tau) + u(\tau) - D(\tau) - q(\tau)] d\tau$$

9 Trajetoária - $w_u(.) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

Chama-se de trajetória gerada por uma estratégia $u(.)$ e um vertimento $q(.)$ a partir de um estado inicial $w(0) = w_0$ a função que associa a cada instante $t \in [0, T]$, o estado $w_u(t)$ do sistema obtido pela equação de transição acima estabelecida (8). Uma trajetória $w_u(.)$ é viável se :

$$(\forall t \in [0, T]) \quad , \quad 0 \leq w_u(t) \leq W$$

10 Estratégia admissível

Uma estratégia $u(.)$ é admissível a partir de um estado w_0 em $t=0$ se :

(a) $u(.)$ é contínua à direita, ou seja :

$$\forall t \in [0, T) \quad , \quad u(t) = u(t^+)$$

(b) Os controles são viáveis, ou seja: $\forall t \in [0, T), \quad 0 \leq u(t) \leq D(t)$

(c) Existe $q(.) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, admissível (Ver 6) e tal que a trajetória gerada por $(u(.), q(.))$ a partir de w_0 é viável.

(d) O estado final alcançado é tal que :

$$w(T) \geq W_T$$

11 Instante característico - $t_i \in [0, T]$

Um instante t_i é chamado instante característico numa dada trajetória $w(.)$ se algum limite de armazenagem é atingido

no instante t_i , ou ainda, se t_i é um instante inicial ou final do planejamento (Ver 13). Isto é, t_i é um instante característico se uma das seguintes condições é satisfeita:

(a) $t_i = 0$

(b) $t_i = T$

(c) $w(t_i) = 0$ e $(\exists \delta > 0)$ tal que :

$$(\forall t \in [t_i - \delta, t_i)) , w(t) > 0$$

(d) $w(t_i) = W$ e $(\exists \delta > 0)$ tal que :

$$(\forall t \in [t_i - \delta, t_i)) , w(t) < W$$

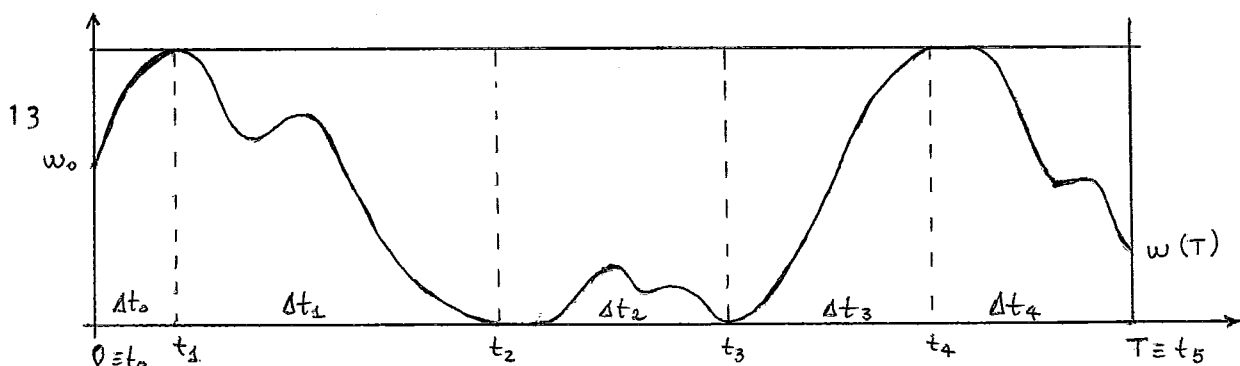
12 Intervalos característicos - $\Delta t_i \in \mathbb{R}^+$

Se o número de instantes característicos de uma trajetória for finito, $\{t_0, t_1, \dots, t_p\}$, define-se intervalo característico como um intervalo de tempo limitado por dois instantes característicos consecutivos. Ou seja :

$$\Delta t_i = [t_i, t_{i+1})$$

Vejamos agora graficamente em que consistem estas definições para uma melhor visualização do que elas significam :

Seja dada uma trajetória $w(\cdot)$:



Instantes característicos = $\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

Intervalos característicos = $\{\Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4\}$

14 Custo de um controle - $c(u) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

Custo instantâneo associado ao nível de geração térmica (potência termoelétrica) especificado pelo controle $u \in \mathbb{R}^+$. Ver (11.20).

15 Custo incremental de um controle - $\psi(u) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

Custo incremental instantâneo associado ao nível de geração térmica $u \in \mathbb{R}^+$. É uma função não decrescente e que se mantém contínua à esquerda como já foi visto em (11.21).

16 Taxa de desconto - $\beta > 0$

É a taxa de juros aplicada ao capital a ser gasto na operação do sistema, entre o instante inicial e o instante de sua aplicação. Impõe-se que há sempre desconto, ou seja, $\beta > 0$.

17 Custo de um estratégia - $C(u(.))$

Custo total decorrente da adoção de uma estratégia de operação $u(.)$ pelo sistema, considerando os descontos (16).

$$C(u(.)) = \int_0^T c(u(\tau)) e^{-\beta\tau} d\tau$$

Podemos agora, formular o enunciado do problema de planejamento a longo prazo do sistema assim modelado, do seguinte modo:

18 Problema

Conhecidas a demanda (3), a afluência (4), um estado final w_T e um estado inicial w_0 , encontrar uma estratégia de operação admissível $\hat{u}(\cdot)$ de custo mínimo entre tais estratégias. Isto é,

$$C(\hat{u}(\cdot)) = \min \left\{ C(u(\cdot)) \mid u(\cdot) \text{ é admissível a partir do estado inicial } w_0 \right\}$$

Uma estratégia que satisfaça estas condições é chamada estratégia ótima de operação do sistema.

SEÇÃO 2 : MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Um número razoável de artigos é encontrado na literatura analisando o problema composto sob variados enfoques. Diferem entre si principalmente na consideração do tempo como variável contínua ou discreta, da afluência como determinística ou aleatória e na variável de decisão adotada. Basicamente, no entanto, esses estudos podem ser enquadrados em dois grupos compreendendo os métodos diretos e os indiretos. Vejamos mais detalhadamente em que consistem estes métodos.

Métodos Diretos

Esses métodos determinam diretamente a potência térmica ou hidráulica a ser gerada a cada instante do período. Englobam

estudos que consideram o intervalo de planejamento discretizado |1| ou contínuo |4| e |5|.

19 O estudo desenvolvido na referência |1| consiste basicamente na adaptação do problema hidroelétrico composto, em um problema clássico de estoque. Considera a afluência como variável aleatória distribuída segundo cadeia simples de Markov e caracteriza o estado do sistema num estágio K pelo volume do reservatório naquele estágio e a afluência ao reservatório no estágio anterior. A decisão é a quantidade de água a ser desestocada do sistema. O objetivo da otimização é minimizar o custo total esperado da energia não hidráulica utilizada para satisfação do mercado consumidor. O problema é resolvido através de técnicas de programação dinâmica estocástica por utilização de uma equação de recorrência usual: relaciona-se o custo total esperado de operação desde um estágio K até o final do planejamento, com o estado e decisão tomada naquele estágio. Com base nisso, são construídas tabelas para cada estágio do período de planejamento, fornecendo a decisão a ser tomada para vários estados do sistema naquele estágio. De posse destas tabelas, a operação ótima do sistema é facilmente localizada.

20 Os enfoques contínuos apresentam como resultado uma de terminação gráfica de uma trajetória ótima do problema composto no período de planejamento. A trajetória é obtida por partes referentes aos intervalos característicos (12), sendo cada intervalo construído de modo a satisfazer certos princípios de otimalidade. São su postos nulos os descontos obtidos por aplicação do capital (16) e su põe-se ainda que a curva de custo de geração térmica é estritamente

convexa. Mais adiante, veremos algumas condições necessárias de otimalidade para o problema, onde estas duas suposições são evitadas. Não se faz necessária uma análise mais detalhada desse método de trajetórias, já que o estudo posterior a que nos referimos acima será desenvolvido de modo semelhante.

21 Métodos Indiretos

A decisão é tomada com base em tabelas previamente calculadas do valor marginal da água mantida em estoque. Este valor pode ser definido para um certo estado de um determinado instante, como a economia obtida no custo total de operação do sistema se o volume do reservatório naquele instante fôsse acrescido de uma unidade. O problema é tratado discretamente e obtem-se várias tabelas fornecendo o valor marginal da água para vários estados de cada um dos estágios em que se acha dividido o período de planejamento. De posse das tabelas, a operação do sistema é obtida, fazendo-se acionar, num certo estágio, as usinas térmicas cujos custos marginais de geração (11.21) são menores ou iguais ao valor da água associado ao estado do sistema naquele estágio.

O método é bastante difundido, já sendo inclusive aplicado em vários sistemas de geração de potência, podendo-se citar como exemplo a Suécia [2] e [3], a Noruega [9], a França [5] e os Estados Unidos [7] e [10].

A determinação dos valores marginais da água é feita com base na teoria desenvolvida por P. Massé (Les Réserves et la

Régulation de l'Avenir - 1945) que permite estabelecer um critério de otimalidade para uma decisão de operação. Segundo Massé, a decisão ótima a ser tomada num certo estado de um estágio K é tal que o valor marginal esperado da água naquele estágio permanece o mesmo nos estágios seguintes. Para obtenção das tabelas de valor marginal da água em um período de planejamento é necessário que se tenha (ou se estime) uma aproximação inicial dos valores relativos à tabela do último estágio do planejamento. A partir daí, consegue-se por recursão e utilizando o critério de otimalidade acima definido, chegar às outras tabelas referentes aos estágios anteriores. O caráter arbitrário da aproximação inicial é desprezível, se os cálculos para cada estágio são efetuados até que se tenha conseguido uma certa estabilização dos valores encontrados.

Vale salientar que a teoria desenvolvida por Massé não leva em conta a existência de restrições no sistema. De modo que quando um dos limites de armazenagem do sistema é atingido, o valor marginal da água neste estado é indeterminado. O problema é contornado assumindo-se valores empíricos previamente estipulados para esses casos limites. Observa-se ainda que a determinação do nível de geração térmica a ser obtido do sistema supõe uma curva de custo marginal de geração térmica estritamente crescente.

Estas são as principais abordagens do problema composto encontradas na literatura. Não foi apresentado um estudo mais exaustivo dessas técnicas, já que as referências que contêm o assunto podem ser facilmente localizadas.

CAPÍTULO IV

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE

A análise dos estudos encontrados na literatura sugere a necessidade de uma revisão matemática um pouco mais rigorosa dos princípios em que se baseiam os métodos já existentes. Em vista disso, apresentaremos a seguir a formulação matemática de alguns aspectos característicos da operação do sistema quando efetuada otimamente.

O trabalho será desenvolvido com base nos estudos realizados por Koopmans [4] e Guillaumin [5]. É introduzida no entanto, uma importante modificação no modelo analisado, qual seja a consideração da taxa de descontos (III.16) como positiva. Nos estudos anteriormente referidos, assim como em quase todas as outras abordagens da literatura, essa taxa é considerada nula.

A formulação será feita por demonstração inicial de alguns lemas fundamentais. Os lemas relacionam vertimento e nível de potência termoelétrica em casos de armazenagem crítica ou numa operação ótima do sistema. Em seguida será apresentado um teorema especificando uma condição necessária de otimalidade para a operação do sistema.

SEÇÃO 1 : DEFINIÇÕES E LEMAS

Antes de apresentarmos um teorema final enfocando uma condição necessária de otimalidade de uma estratégia, formularemos alguns lemas que facilitarão a demonstração do referido teorema. É conveniente ainda, introduzir algumas suposições e definições para o desenvolvimento a seguir.

Estratégia gerada automaticamente por uma curva $p(.)$

A definição abaixo tem um papel central no desenvolvimento de condições de otimalidade para o problema de operação. A partir de uma curva $p(.)$ gera-se uma estratégia $u_p(.)$ com a seguinte característica: em cada instante a geração termoelétrica $u_p(t)$ assumirá o maior valor possível (compatível com os vínculos), a custo marginal não superior a $p(t)$. O teorema principal mostrará que uma estratégia ótima é gerada automaticamente por uma curva $p(.)$ com características bem definidas. Deve-se ainda observar que nas abordagens indiretas comentadas em (III.21) gera-se uma estratégia ótima a partir de uma curva de "valor da água", cuja utilização é idêntica à aqui definida: a curva de valor da água será um caso particular de curva geradora de um estratégia.

1 Definição :

Seja $p(.) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$

e considere-se a função $\bar{u}_p(.)$ definida por :

$(\forall t \in [0, T))$,

$$2 \quad \bar{u}_p(t) = \max \{ u \mid \psi(u)e^{-\beta t} \leq p(t), u \leq D(t) \}$$

Então, uma estratégia $u_{p,w}(\cdot)$ é gerada automaticamente por $p(\cdot)$ se numa dada trajetória $w(\cdot)$:

$$3 \quad u_{p,w}(t) = \begin{cases} \min \{ \bar{u}_p(t), \max \{ 0, D(t) - x(t) \} \} & \text{se } w(t) = W \\ \bar{u}_p(t) & \text{se } 0 < w(t) < W \\ \max \{ \bar{u}_p(t), D(t) - x(t) \} & \text{se } w(t) = 0 \end{cases}$$

Observa-se que a trajetória $w(\cdot)$ não é necessariamente gerada por $u_{p,w}(\cdot)$.

4 Suposições :

Em todo o desenvolvimento a seguir exige-se a continuidade à direita das funções $\chi(\cdot)$ e $D(\cdot)$, ou seja :

$$\begin{aligned} (\forall t \in [0, T)) \quad , \quad \chi(t^+) &= \chi(t) \\ D(t^+) &= D(t) \end{aligned}$$

Passemos agora à apresentação dos lemas. O lema 1 relaciona o vertimento $q(\cdot)$ e a geração $u(\cdot)$ em uma estratégia, mostrando que a especificação de $u(\cdot)$ é suficiente para definir perfeitamente o vertimento $q(\cdot)$. O lema 2 estuda o comportamento de $q(\cdot)$ em uma estratégia ótima. E o lema 3 isola propriedades de uma estratégia ótima ao serem atingidos os limites do reservatório.

5 LEMA 1 :

Suponhamos conhecido o estado $w(0) = w_0$ no início do planejamento e as funções $q(\cdot)$ e $u(\cdot)$ tais que :

- 6 - a trajetória gerada por $(u(.), q(.))$ é viável
 7 - a função $u(.)$ é contínua à direita.

Nesse caso, a curva $q(.)$ é admissível se e somente se é dada por :

$$(\forall t \in [0, T)) ,$$

$$8 \quad q(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } w(t) < W \\ \max\{0, x(t) + u(t) - D(t)\} & \text{se } w(t) = W \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO :

- 9 1ª PARTE : Seja $q(.)$ uma curva admissível.
- 10 (a) Se $t \in [0, T)$ é tal que $w(t) < W$, decorre imediatamente de (9) que $q(t) = 0$.
- 11 (b) Se $t \in [0, T)$ é tal que $w(t) = W$, suponhamos, por absurdo , que a hipótese (8) não é verdadeira, então :

$$q(t) \neq \max\{0, x(t) + u(t) - D(t)\}$$

- 12 Caso 1 : $q(t) > \max\{0, x(t) + u(t) - D(t)\}$

Ou seja,

$$q(t) > 0$$

$$q(t) > x(t) + u(t) - D(t)$$

- 13 Então, pela continuidade à direita das funções $q(.)$ (9) , $u(.)$ (7) , $x(.)$ e $D(.)$ (4) , podemos dizer que :

$$(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall \bar{t} \in [t, t+\delta)) ,$$

$$q(\bar{t}) > x(\bar{t}) + u(\bar{t}) - D(\bar{t})$$

$$q(\bar{t}) > 0$$

Ou seja :

$$w(\bar{t}) = W + \int_t^{\bar{t}} [x(\tau) + u(\tau) - D(\tau) - q(\tau)] d\tau < W$$

E então, $\forall \bar{t} \in [t, t+\delta)$, vem :

$$q(\bar{t}) > 0$$

14 $w(\bar{t}) < W$, o que por (9) é um absurdo.

15 Caso 2 : $q(t) < \max\{0, x(t) + u(t) - D(t)\}$

Ou seja :

$$q(t) < x(t) + u(t) - D(t)$$

já que $q(t) \geq 0$ por definição.

Então, por (9), (7) e (4) podemos dizer que :

$(\exists \delta > 0)$ tal que $(\forall \bar{t} \in [t, t+\delta))$,

$$q(\bar{t}) < x(\bar{t}) + u(\bar{t}) - D(\bar{t})$$

Ou seja :

$$w(\bar{t}) = W + \int_t^{\bar{t}} [x(\tau) + u(\tau) - D(\tau) - q(\tau)] d\tau > W$$

16 o que por (6) se constitui um absurdo.

Logo, de (14) e (16), vem que :

17 $w(t) = W \rightarrow q(t) = \max\{0, x(t) + u(t) - D(t)\}$

E de (10) e (17), podemos concluir que se $q(\cdot)$ é admissível, então é dado por (8) .

18 2ª PARTE : Seja $q(\cdot)$ dado por : $(\forall t \in [0, T))$,

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } w(t) < W \\ \max\{0, x(t) + u(t) - D(t)\} & \text{se } w(t) = W \end{cases}$$

Nesse caso, vemos diretamente da definição que :

$$q(t) > 0 \rightarrow w(t) = W$$

E mais que $q(\cdot)$ é uma função contínua à direita, já que as funções envolvidas na sua definição também o são.

Logo, podemos concluir que $q(\cdot)$ é admissível.

19 OBSERVAÇÃO :

Do lema 1 vemos que o vertimento $q(\cdot)$ admissível é totalmente definido pela política de operação $u(\cdot)$ aplicada ao sistema a partir de um estado inicial w_0 . De modo que, daqui por diante falaremos em estratégia gerada por $u(\cdot)$ ao invés de $(u(\cdot), q(\cdot))$ e chamaremos de vertimento associado a uma estratégia $u(\cdot)$, a função definida em (8) .

20 LEMA 2 :

Seja $u(\cdot)$ uma estratégia ótima (III.18) aplicada ao sistema a partir de um estado inicial $w(0) = w_0$, e $q(\cdot)$ o vertimento associado a esta estratégia.

Então, ($\forall t \in [0, T)$), temos :

$$21 \quad q(t) > 0 \quad \rightarrow \quad u(t) = 0$$

DEMONSTRAÇÃO :

Suponhamos por absurdo que a afirmação (21) é falsa, então :

($\exists t' \in [0, T)$) tal que

$$u(t') > 0$$

$$q(t') > 0$$

E pela continuidade à direita das funções $u(\cdot)$ e $q(\cdot)$, podemos afirmar que :

($\exists \delta > 0$) tal que ($\forall t \in [t', t'+\delta)$) ;

$$u(t) > 0$$

$$q(t) > 0$$

E então, pelo lema 1 vemos que :

$$w(t) = W$$

Logo, ($\forall t \in [t', t'+\delta)$) temos que :

$$22 \quad x(t) + u(t) - D(t) - q(t) = 0$$

Definamos uma nova estratégia $u'(\cdot)$ do seguinte modo :

$$23 \quad u'(t) = \begin{cases} u(t) , & (\forall t \notin [t', t'+\delta)) \\ \max \{0, u(t) - q(t)\} , & (\forall t \in [t', t'+\delta)) \end{cases}$$

E seja um vertimento $q'(\cdot)$ dado por :

$$24 \quad q'(t) = \begin{cases} q(t) , & (\forall t \notin [t', t'+\delta)) \\ x(t) - D(t) + u'(t) , & (\forall t \in [t', t'+\delta)) \end{cases}$$

Deve-se mostrar que $q'(\cdot)$ é admissível :

Na estratégia $w'(\cdot)$ gerada por $(u'(\cdot), q'(\cdot))$, o integrando da equação de transição de estado se anula em todo $t \in [t', t'+\delta)$, como se pode verificar de (24). Ou seja :

$$(\forall t \in [t', t'+\delta)) , \quad x(t) + u'(t) - D(t) - q'(t) = 0$$

Portanto, podemos concluir que :

$$(\forall t \in [t', t'+\delta)) , \quad w'(t) = w(t) = W$$

E então, pelo lema 1, o vertimento associado a $u'(\cdot)$ neste intervalo é dado por :

$$q'(t) = \max \{0, x(t) - D(t) + u'(t)\}$$

Mas, de (22) e (23) vemos que :

$$\begin{aligned} x(t) - D(t) + u'(t) &= x(t) - D(t) + \max \{0, u(t) - q(t)\} \\ &\geq x(t) - D(t) + u(t) - q(t) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

E portanto :

$$q'(t) = \max \{0, x(t) - D(t) + u'(t)\} = x(t) - D(t) + u'(t)$$

O que coincide com o vertimento construído em (24) e mostra que $q'(\cdot)$ é admissível.

Podemos verificar ainda que a estratégia $u'(\cdot)$ é admissível já que por definição é contínua à direita, gera uma trajetória idêntica à gerada por uma política ótima e admite um vertimento $q'(\cdot)$ admissível.

Façamos agora uma comparação entre os custos das políticas $u'(\cdot)$ e $u(\cdot)$.

$$C(u(.)) = C(u'(.)) + \int_{t'}^{t'+\delta} [c(u(\tau)) - c(u'(\tau))] e^{-\beta\tau} d\tau$$

Sabemos que :

$$(\forall t \in [t', t'+\delta)) \quad , \quad u(t) > 0$$

$$q(t) > 0$$

$$u'(t) = \max \{0, u(t) - q(t)\}$$

Donde se conclui que nesse intervalo :

$$u'(t) < u(t)$$

E pelo caráter crescente da curva de custo de geração descrita em (11.20) :

$$(\forall t \in [t', t'+\delta)) \quad , \quad c(u'(t)) < c(u(t))$$

E portanto :

$C(u'(.)) < C(u(.))$ o que é um absurdo, já que $u(.)$ por hipótese é uma estratégia ótima.

Logo, a afirmação (21) é verdadeira.

LEMA 3 :

Seja $w(.)$ a trajetória gerada por uma estratégia ótima $u(.)$ a partir de um estado inicial w_0 . Então :

$$25 \quad (a) \quad w(t) = W \rightarrow q(t) = \max \{0, x(t) - D(t)\}$$

$$26 \quad (b) \quad w(t) = 0 \rightarrow u(t) \geq D(t) - x(t)$$

DEMONSTRAÇÃO :

(a) $w(t) = W$

- Se $u(t) = 0$, então pelo lema 1 temos :

$$q(t) = \max \{0, x(t) - D(t) + u(t)\} = \max \{0, x(t) - D(t)\} .$$

- Se $u(t) > 0$, então, pelo lema 2, temos :

$$q(t) = 0$$

e conseqüentemente :

$$x(t) < D(t)$$

já que se assim não fosse, teríamos $\bar{t} = t + \delta$, $\delta > 0$

tal que :

$$w(\bar{t}) = W + \int_{\bar{t}}^t [x(\tau) - D(\tau) + u(\tau)] d\tau > W \quad \text{o que não pode a-}$$

contecer sendo $w(\cdot)$ viável .

(b) $w(t) = 0$

por absurdo, supondo ser falsa a afirmação (26) :

 $(\exists \bar{t} \in [0, T))$ tal que :

$$w(\bar{t}) = 0$$

$$u(\bar{t}) + x(\bar{t}) - D(\bar{t}) < 0$$

Mas pela continuidade à direita de $u(\cdot)$, $D(\cdot)$ e $x(\cdot)$, podemos afirmar que : $(\exists \delta > 0)$ tal que $(\forall t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta))$, temos :

$$w(t) < W$$

$$u(t) + x(t) - D(t) < 0$$

e então:

$$w(t) = \int_{-t}^t [\chi(\tau) + u(\tau) - D(\tau)] d\tau < 0 \quad \text{o que é um absurdo.}$$

do.

Logo, a afirmação (26) é verdadeira.

SEÇÃO 2 : CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE OTIMALIDADE - O TEOREMA

Passemos agora à apresentação do teorema final, anteriormente citado, relacionando uma condição necessária de otimalidade para uma estratégia de operação. A demonstração será feita por etapas, considerando as diversas situações que podem ser defrontadas.

TEOREMA:

Se $u(.)$ é uma estratégia ótima aplicada ao sistema a partir de um estado inicial w_0 e $w(.)$ é a trajetória por ela gerada, então :

($\exists p(.) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$) tal que :

- $u(.) = u_{p,w}(.)$

- $p(.)$ é constante nos intervalos característicos.

DEMONSTRAÇÃO :

Seja :

Δt_i = um intervalo característico qualquer da trajetória $w(.)$ gerada por $u(.)$

$q(\cdot)$ = o vertimento associado à estratégia $u(\cdot)$

$$27 \quad \tau = \{t \in \Delta t_i \mid w(t) > 0\}$$

Definamos :

$$28 \quad p_i = \begin{cases} \sup \Psi(u(t)) e^{-\beta t} & \text{se } \tau \neq \phi \\ 0 & \text{se } \tau = \phi \end{cases}$$

$$u_{p_i}(\cdot) = u_{p,w}(\cdot) \quad , \quad \text{onde}$$

$p(\cdot)$ é tal que $(\forall t \in [0, T))$, $p(t) = p_i$

Queremos mostrar que :

$$29 \quad (\forall t \in \Delta t_i) \quad , \quad u(t) = u_{p_i}(t) \quad .$$

Inicialmente vejamos o que ocorre se $\tau = \phi$.

Então :

$$p_i = 0$$

$$(\forall t \in \Delta t_i) \quad , \quad w(t) = 0$$

Logo, o integrando da equação de transição de estado é nulo no intervalo Δt_i assim como, pelo lema 1, o vertimento associado a $u(\cdot)$.

Ou seja :

$$(\forall t \in \Delta t_i) \quad , \quad q(t) = 0$$

$$x(t) - D(t) + u(t) = 0$$

E portanto :

$$\begin{aligned} u(t) &= D(t) - x(t) \\ &= \max \{0, D(t) - x(t)\} , \text{ pois } u(t) \geq 0 \\ &= u_0(t) \end{aligned}$$

Logo, ($\forall t \in \Delta t_i$) :

$$u(t) = u_{p_i}(t) \quad \text{onde } p_i = 0$$

Basta, portanto, considerar o caso $\tau \neq \phi$

A demonstração será feita por absurdo. Cada possibilidade de absurdo é inicialmente tratada de modo a serem eliminados casos críticos e a se conseguir chegar a hipóteses mais simples. A segunda hipótese de absurdo analisada (33) é contrariada por construção de uma estratégia de operação baseada na estratégia ótima e que sendo viável, apresenta um custo operacional inferior ao custo desta estratégia ótima.

Suponhamos então, que ($\exists t_1 \in \Delta t_i$) tal que :

$$u(t_1) \neq u_{p_i}(t_1)$$

Se $u(t_1) > u_{p_i}(t_1)$, então, considerando que pela definição de p_i (28) :

$$(\forall t \in \tau) \quad , \quad \Psi(u(t))e^{-\beta t} \leq p_i$$

podemos concluir que somente um dos seguintes casos pode acontecer:

(a) Se $w(t_1) = W$ tem-se :

$$u(t_1) > u_{p_i}(t_1) \Rightarrow u(t_1) > \max \{0, D(t_1) - x(t_1)\}$$

Ou seja :

$$u(t_1) > D(t_1) - x(t_1) \Rightarrow u(t_1) - D(t_1) + x(t_1) > 0$$

Pelo lema 1, vemos que o vertimento associado a $u(\cdot)$ no instante t_1 é dado por :

$$\begin{aligned} q(t_1) &= \max \{0, x(t_1) - D(t_1) + u(t_1)\} \\ &= x(t_1) - D(t_1) + u(t_1) > 0 \end{aligned}$$

Mas, pelo lema 2 :

$$u(t_1) > 0 \Rightarrow q(t_1) = 0$$

o que é uma contradição e então a hipótese inicial é falsa, ou seja :

$$u(t_1) \leq u_{p_i}(t_1)$$

(b) Se $w(t_1) = 0$, tem-se :

$$\begin{aligned} u(t_1) > u_{p_i}(t_1) &\Rightarrow u(t_1) > D(t_1) - x(t_1) \\ &u(t_1) > \max\{ u \mid \psi(u)e^{-\beta t_1} \leq p_i \} \end{aligned}$$

E então, devido à continuidade à direita das funções envolvidas :

$$(\exists \delta_1 > 0) \text{ tal que } (\forall t \in [t_1, t_1 + \delta_1)) ,$$

$$30 \quad x(t) - D(t) + u(t) > 0$$

$$q(t) = 0$$

E mais, dada a continuidade à esquerda de $\psi(\cdot)$ (11.23) e à direita de $u(\cdot)$:

$$31 \quad (\exists \delta_2 > 0) \text{ tal que } (\forall t \in [t_1, t_1 + \delta_2)) , \\ \psi(u(t))e^{-\beta t} > p_i$$

32

De fato ; $\Psi(\cdot)$ contínua à esquerda e $\Psi(u(t_1)e^{-\beta t_1}) > p_i$ implica em :

$$(\exists \varepsilon_1 > 0) \text{ tal que } u > u(t_1) - \varepsilon_1 \\ \Psi(u)e^{-\beta t_1} > p_i$$

$$(\exists \varepsilon_2 > 0) \text{ tal que } u > u(t_1) - \varepsilon_{1/2} \\ \Psi(u)e^{-\beta t} > p_i, \quad (\forall t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_2])$$

Da continuidade à direita de $u(\cdot)$:

$$(\exists \varepsilon_3 > 0) \text{ tal que } u(t) > u(t_1) - \varepsilon_{1/2}, \\ (\forall t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_3))$$

Logo, se $\delta_2 = \min \{\varepsilon_2, \varepsilon_3\}$:

$$(\forall t \in [t_1, t_1 + \delta_2)) , \Psi(u(t))e^{-\beta t} > p_i$$

Fazendo-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tem-se de (30) e (31) que :

$$(\forall t \in (t_1, t_1 + \delta)) , \\ w(t) = \int_{t_1}^t [x(\tau) - D(\tau) + u(\tau) - q(\tau)] d\tau > 0 \\ \Psi(u(t))e^{-\beta t} > p_i$$

o que contraria a definição de p_i .

Logo, por (a) e (b) vemos que $u(t_1) \leq u_{p_i}(t_1)$.

Portanto, basta verificar o que ocorre, se supomos:

33

$$u(t_1) < u_{p_i}(t_1)$$

Esta hipótese implica pela definição de $u_{p_i}(t)$ em :

$$u(t_1) < \bar{u}_{p_i}(t_1)$$

De fato : Se $w(t_1) = 0$, tem-se :

$$u(t_1) < \max\{\bar{u}_{p_i}(t_1), D(t_1) - x(t_1)\}$$

E, pelo lema 3 :

$$u(t_1) \geq D(t_1) - x(t_1)$$

Logo :

$$u(t_1) < \bar{u}_{p_i}(t_1)$$

Se $w(t_1) \neq 0$, então $u_{p_i}(t_1) \leq \bar{u}_{p_i}(t_1)$

Portanto, podemos dizer que :

$$u(t_1) < D(t_1)$$

$$u(t_1) < \bar{u} \triangleq \max\{u \mid \Psi(u)e^{-\beta t_1} \leq p_i\}$$

$$\Psi(\bar{u})e^{-\beta t_1} \leq p_i$$

Devido à continuidade à direita das funções envolvidas :

($\exists t'_1 > t_1$, $t'_1 \in [0, T)$) tal que :

$$u(t'_1) < D(t'_1)$$

$$u(t'_1) < \bar{u}$$

E obtém-se, dado que $\beta > 0$ e $t'_1 > t_1$:

$$\Psi(\bar{u})e^{-\beta t'_1} < \Psi(\bar{u})e^{-\beta t_1} \leq p_i$$

Observação : Eliminação do caso $w(t_1) = W$

Se $w(t_1) = W$, então a hipótese (33) implica em :

$$u(t_1) < D(t_1) - x(t_1)$$

$$u(t_1) < \bar{u}$$

Usando a continuidade à direita das funções, vemos que :

($\exists t'_1 > t_1$, $t'_1 < T$) tal que

$$u(t) < D(t) - x(t) \quad , \quad \forall t \in [t_1, t'_1]$$

$$34 \quad u(t'_1) < \bar{u} \stackrel{\Delta}{=} \max \{u \mid \Psi(u)e^{-\beta t'_1} \leq p_i\} \leq \bar{u}'$$

onde :

$$\bar{u}' \stackrel{\Delta}{=} \max \{u \mid \Psi(u)e^{-\beta t'_1} \leq p_i\}$$

Segue que :

$$w(t'_1) = W + \int_{t_1}^{t'_1} [x(\tau) - D(\tau) + u(\tau) - q(\tau)] d\tau$$

$$35 \quad w(t'_1) < W$$

De (34) e (35), depreende-se que é suficiente considerar o caso $w(t_1) < W$, fazendo $t_1 = t'_1$.

Finalmente, a hipótese inicial de absurdo (33) reduz-se ao seguinte caso:

($\exists t_1 \in \Delta t_1$) ($\exists \bar{u} > 0$) tal que

$$36 \quad u(t_1) < D(t_1)$$

$$37 \quad u(t_1) < \bar{u}$$

$$38 \quad \Psi(\bar{u})e^{-\beta t_1} < p_i$$

$$39 \quad w(t_1) < W$$

Seja ϵ dado por :

$$40 \quad 2\epsilon = p_i - \psi(\bar{u})e^{-\beta t_1} \quad , \quad \epsilon > 0 \quad \text{devido a (38)}$$

Pela definição de supremo, tem-se :

($\exists t_2 \in \tau$) tal que

$$41 \quad \psi(u(t_2))e^{-\beta t_2} > p_i - \epsilon$$

Observe-se que de (38) e (41) temos :

$$\psi(u(t_1))e^{-\beta t_1} < \psi(u(t_2))e^{-\beta t_2}$$

e portanto , $t_1 \neq t_2$.

Passa-se agora à construção de uma estratégia admissível correspondente a $u(\cdot)$ perturbada: aumenta-se a geração numa vizinhança de t_1 , a custo marginal inferior a $p_i - \epsilon$; reduz-se o controle perto de t_2 , a custo marginal superior a $p_i + \epsilon$. Mostra-se que a estratégia perturbada conduz a um custo total inferior ao de $u(\cdot)$ estabelecendo a contradição .

Obviamente, a perturbação está sujeita a limitações para que se mantenha a viabilidade dos controles na nova estratégia construída e ainda a viabilidade na trajetória por ela gerada.

Vejamos inicialmente, que variações podem sofrer os controles próximos a t_1 e t_2 .

Acréscimos permissíveis perto de t_1 :

Seja γ_1 tal que

$$2\gamma_1 = \min \{D(t_1) - u(t_1), \bar{u} - u(t_1)\}$$

Pela continuidade à direita das funções, tem-se :

$$42 \quad (\exists \delta_1 > 0) \text{ tal que } (\forall t \in [t_1, t_1 + \delta_1)), (\forall \gamma \leq \gamma_1) \\ u(t) + \gamma < D(t)$$

$$43 \quad (\exists \delta_2 > 0) \text{ tal que } (\forall t \in [t_1, t_1 + \delta_2)), (\forall \gamma \leq \gamma_1) \\ u(t) + \gamma < \bar{u}$$

Decréscimos permissíveis perto de t_2

Seja $\gamma_2 > 0$ tal que

$$44 \quad \Psi(u(t_2) - 2\gamma_2)e^{-\beta t_2} \geq p_i - \epsilon$$

Então ,

$$(\exists \delta_3 > 0) \text{ tal que } (\forall t \in [t_2, t_2 + \delta_3)) (\forall \gamma \leq \gamma_2) :$$

$$45 \quad u(t) - \gamma > 0$$

$$46 \quad \Psi(u(t) - \gamma)e^{-\beta t} \geq p_i - \epsilon$$

Garante-se a existência de γ_2 e δ_3 pela continuidade à esquerda de $\Psi u(\cdot)$ e à direita de $u(\cdot)$. Ver (32).

Construção da função perturbadora

Seja δ tal que :

$$47 \quad 0 < \delta < \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, |t_2 - t_1|, |t_{i+1} - t_1|, |t_{i+1} - t_2| \}$$

Define-se $\Delta u_\gamma (\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ por :

$$\Delta u_\gamma (t) = \begin{cases} \gamma & \text{se } t \in [t_1, t_1 + \delta) \\ -\gamma & \text{se } t \in [t_2, t_2 + \delta) \\ 0 & \text{se } t \notin [t_1, t_1 + \delta) \cup [t_2, t_2 + \delta) \end{cases}$$

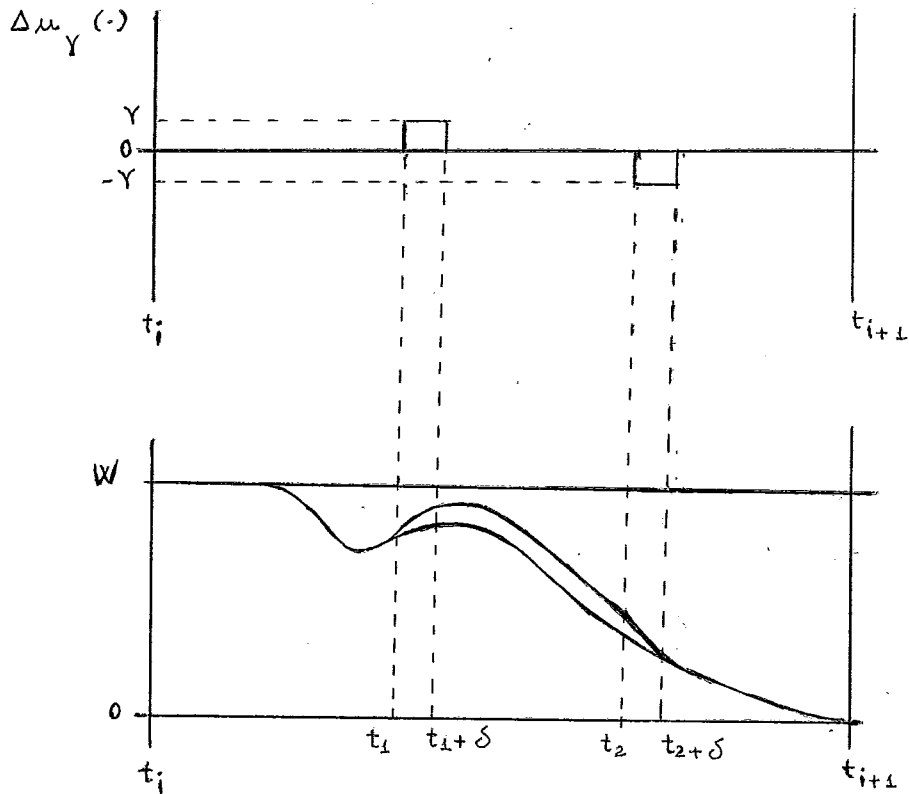
As conclusões em (42), (45) e (47) garantem que :

- A função perturbadora está bem definida (os intervalos são disjuntos e estão em Δt_i)
- 48 - A estratégia perturbada, $u(\cdot) + \Delta u_\gamma(\cdot)$, mantém os controles viáveis para todo γ tal que :

$$\gamma \leq \bar{\gamma} \triangleq \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$$

Graficamente, a perturbação da estratégia $u(\cdot)$ e consequente modificação na trajetória gerada, pode ser vista do seguinte modo :

(Ver figura na próxima folha)



Basta verificarmos, portanto, os limites impostos a γ para que a trajetória perturbada seja viável. Observa-se ainda que se tivéssemos considerado $t_1 > t_2$, a modificação na trajetória seria contrária, ou seja, a curva seria decrescida entre t_2 e t_1 . De modo que a diversificação do efeito leva à necessidade de considerarmos separadamente os dois casos, o que será feito a seguir.

(a) Se $t_1 < t_2$, temos :

$$(\forall t \in \Delta t_1, t > t_1) \quad , \quad w(t) < W$$

Já que $w(\cdot)$ é contínua, temos :

$$\bar{w} \triangleq \max\{w(t) \mid t \in [t_1, t_2 + \delta]\} < W$$

$$\text{Seja } v = W - \bar{w}$$

A trajetória gerada por $u(\cdot) + \Delta u_\gamma(\cdot)$, considerando o mesmo vertimento anterior, é dada por :

$$49 \quad w'(t) = \begin{cases} w(t) & \text{se } t \in [0, t_1] \\ w(t) + \int_{t_1}^t \Delta u_\gamma(\tau) d\tau & \text{se } t \in (t_1, t_2 + \delta] \\ w(t) & \text{se } t \in (t_2 + \delta, T] \end{cases}$$

Mas, por construção, tem-se :

$$0 \leq \int_{t_1}^t \Delta u_\gamma(\tau) d\tau \leq \delta \gamma \quad , \quad \forall t \in [t_1, t_2 + \delta]$$

Portanto, se fizermos $\gamma < \min \{ \bar{\gamma}, \frac{\nu}{\delta} \}$, temos :

$$w'(t) < w(t) + \nu$$

$$w'(t) \geq w(t)$$

50 Ou seja, a estratégia perturbada gera uma trajetória viável.

(b) Se $t_1 > t_2$, temos :

$$(\forall t \in \Delta t_1, t > t_2) \quad , \quad w(t) > 0$$

jã que $w(t_2) > 0$, $t_2 \in \tau$.

Portanto ,

$$\underline{w} \triangleq \min \{ w(t) \mid t \in [t_2, t_1 + \delta] \} > 0$$

A trajetória gerada por $u(\cdot) + \Delta u_\gamma(\cdot)$, considerando o mesmo vertimento anterior, é dada por :

$$51 \quad w'(t) = \begin{cases} w(t) & \text{se } t \in [0, t_2] \\ w(t) + \int_{t_2}^t \Delta u_\gamma(\tau) d\tau & \text{se } t \in (t_2, t_1 + \delta] \\ w(t) & \text{se } t \in (t_1 + \delta, T] \end{cases}$$

Mas, por construção, tem-se :

$$0 \geq \int_{t_2}^t \Delta u_{\gamma}(\tau) d\tau \geq -\delta\gamma, \quad \forall t \in [t_2, t_1 + \delta]$$

E agora, se fizermos $\gamma < \min \{ \bar{\gamma}, \frac{w}{\delta} \}$, temos :

$$w'(t) > w(t) - \underline{w}$$

52

$$w'(t) \leq w(t)$$

Logo, $w'(\cdot)$ é viável .

Se observarmos ainda que o vertimento associado a $u(\cdot) + \Delta u_{\gamma}(\cdot)$ se mantém o mesmo que o de $u(\cdot)$, podemos garantir que $u(\cdot) + \Delta u_{\gamma}(\cdot)$ é uma estratégia admissível. De fato, esta condição é satisfeita já que a modificação sofrida pela trajetória é tal que os limites de armazenagem não são atingidos. (Ver lema 1).

Passemos agora à comparação entre os custos das estratégias.

Sabe-se que:

$$53 \quad C(u(\cdot) + \Delta u_{\gamma}(\cdot)) - C(u(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_1 + \delta} [c(u(\tau) + \gamma) - c(u(\tau))] e^{-\beta\tau} d\tau + \\ + \int_{t_2}^{t_2 + \delta} [c(u(\tau) - \gamma) - c(u(\tau))] e^{-\beta\tau} d\tau$$

E ainda que, dado o caráter crescente de $\psi_u(\cdot)$:

$$54 \quad c(u+\gamma) \leq c(u) + \psi(u+\gamma) \cdot \gamma$$

$$c(u-\gamma) \leq c(u) - \psi(u-\gamma) \cdot \gamma$$

Substituindo-se (54) em (53), tem-se :

$$55 \quad c(u(\cdot) + \Delta u_{\gamma}(\cdot)) - c(u(\cdot)) \leq \int_{t_1}^{t_1+\delta} \gamma \cdot \psi(u(\tau)+\gamma) e^{-\beta\tau} d\tau - \\ - \int_{t_2}^{t_2+\delta} \gamma \cdot \psi(u(\tau)-\gamma) e^{-\beta\tau} d\tau$$

Verifica-se que :

$$(a) \quad (\forall t \in [t_1, t_1+\delta)) \quad , \quad u(t) + \gamma < \bar{u} \quad (\text{por (43)})$$

Logo :

$$\psi(u(t)+\gamma) e^{-\beta t} \leq \psi(\bar{u}) e^{-\beta t} < \psi(\bar{u}) e^{-\beta t_1} = p_i - 2\varepsilon$$

$$(b) \quad (\forall t \in [t_2, t_2+\delta)) \quad ,$$

$$\psi(u(t)-\gamma) e^{-\beta t} \geq \psi(u(t) - \gamma_2) e^{-\beta t} \geq p_i - \varepsilon$$

Logo, concluímos de (56) e (57) que ;

$$(\forall t' \in [t_1, t_1+\delta)) \quad \text{e} \quad (\forall t'' \in [t_2, t_2+\delta))$$

$$\psi(u(t')+\gamma) e^{-\beta t'} < \psi(u(t'')-\gamma) e^{-\beta t''}$$

E então, aplicando este resultado em (55), vemos que :

$$c(u(\cdot) + \Delta u_{\gamma}(\cdot)) - c(u(\cdot)) < 0$$

Portanto, a estratégia perturbada é admissível, e tem um custo de operação inferior a $u(\cdot)$ (estratégia ótima), o que estabelece a contradição e encerra a demonstração .

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Como resultado do estudo desenvolvido anteriormente, sobre a operação de um sistema de geração hidrotérmico, chegou - se à formulação de condições necessárias de otimalidade para uma estratégia de operação do sistema. A verificação dos conceitos envolvidos pode ser feita graficamente com relativa facilidade, a partir de uma estratégia conhecida.

Os resultados obtido não são imediatamente aplicáveis à construção de estratégias ótimas, já que nenhuma condição suficiente de otimalidade foi estabelecida.

A construção de estratégias por computador exige a discretização do tempo e, conseqüentemente, a introdução de novas simplificações. Por outro lado, é mais fácil considerar afluências aleatórias no problema discretizado. A extensão dos resultados aqui obtidos a esse caso constitui um prolongamento necessário a este trabalho.

Além disso, é necessária uma revisão do estudo para aplicação a um caso real, onde se abandonem certas simplificações aqui consideradas.

Finalmente, é preciso ainda que se consiga resolver o segundo problema, descrito no Capítulo I, qual seja a distribuição

do total a ser gerado hidráulicamente em cada uma das usinas hidroe-létricas do sistema.

As conclusões obtidas abrem o caminho para a obtenção de resultados utilizáveis em problemas reais, sem muitas das simplificações heurísticas presentes atualmente nos vários métodos de otimização existentes na literatura. Prepara-se também o terreno para o estudo do "valor da água", que deixa de ser necessariamente constante sobre uma estratégia ótima, quando se considera descontos e custos realistas para a geração térmica. Pode-se prever que o valor da água sobre uma estratégia está estreitamente ligado às funções $p(.)$ estudadas nesta tese.

BIBLIOGRAFIA

1. J.D.C. LITTLE , "The Use of Storage Water in a Hydroelectric System", Journal of the Operations Research Society of America, 3, 187-197 (1955).
2. S. STAGE e Y. LARSSON, "Incremental Cost of Water Power", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems", 361-365 (Agosto/1961).
3. J. LINDQVIST, "Operation of a Hydrothermal Electric System: A Multistage Decision Process", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, (Abril/1962).
4. T.C. KOOPMANS, "Water Storage Policy in a Simplified Hydroelectric Systems", First International Conference on Operational Research, 193-227 (1957). Retirado do livro :Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
5. P. GUILLAUMIN e M.L. ARABEYDE, "Modèle de Gestion d'un Ensemble Hydraulique et Thermique avec Aléas de Consommation et de Disponibilité des Groups (Modèle GRETA)", Power Systems Computations Conference III (Junho/1969).
6. N.V. ARVANITIDIS e J. ROSING, "Composite Representation of a Multi-reservoir Hydroelectric Power System", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 319-327 (Fevereiro/1970)
7. N.V. ARVANITIDIS e J. ROSING, "Optimal Operation of Multireservoir Systems Using a Composite Representation", IEEE Transactions on

Power Apparatus and Systems, 327-335 (Fevereiro/1970).

8. Departamento de Planejamento Econômico de Furnas Centrais Elétricas S.A. , "Planejamento Ótimo Econômico da Operação do Sistema Hidrotérmico de FURNAS-Centraís Elétricas S.A.", Nota DPE.0-79 (Maio/1972).
9. V. HVEDING, "Digital Simulation Techniques in the Planning of Large Mixed-Supply (Hydrothermal) Power Systems", Symposium on Prospects for the Development of Hydro-electric Schemes and for their Incorporation in Future Energy Supply Systems" (Outubro/1970).
10. R.N.BRUDENELL e J.H. GILBREATH , "Economic Complementary Operation of Hydro Storage and Steam Power in the Integrated TVA System", IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems", 136-156 (Junho/1959).
11. S.S. BRITO, "Modelos de Otimização Econômica do Planejamento de Operação de Furnas", Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Grupo de Estudos de Produção Hidráulica, São Paulo (Abril/1972).