

CÁLCULO SIMPLIFICADO DOS COEFICIENTES WALSH


PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS APLICADO

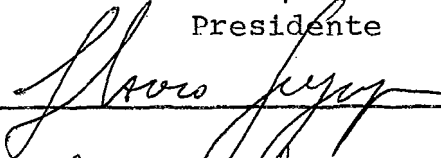
À COMPRESSÃO DE DADOS

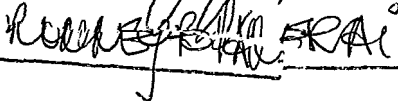
Jovana Ferreira Pires

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:



Presidente




RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

NOVEMBRO DE 1974.

A meus pais

A minha avó

Ao meu noivo

AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho aproveito a oportunidade para expressar a minha gratidão a Deus e a todos que de algum modo me auxiliaram.

RESUMO

Neste trabalho estudamos dois problemas distintos. O primeiro é calcular os coeficientes Walsh para funções contínuas, com maior precisão. O segundo é uma aproximação melhor para funções contínuas conhecendo seus coeficientes Walsh, aplicada à compressão de dados.

Damos, também, tabelas exemplificando os problemas.

ABSTRACT

In this work we studied two different problems. The first was an accurate method of calculating the walsh coefficients of a function from its samples. The second was calculating the function given its walsh coefficients. An application was given to compression of data. Numerical examples have been included.

Í N D I C E

DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
CAPÍTULO I - Introdução	1
CAPÍTULO II - Definições e propriedades de funções Walsh ...	4
1 - Funções Rademacher	4
2 - Funções Walsh	6
3 - Transformada Walsh	16
4 - Matriz Walsh	18
5 - Relação entre transformada Walsh de uma função contínua e matriz Walsh	20
CAPÍTULO III - Problemas	
1 - Primeiro Problema	23
2 - Segundo Problema	30
3 - Exemplos	32
CONCLUSÕES	42
REFERÊNCIAS	44
APÊNDICE	45

C A P Í T U L O I

Introdução

O sistema de funções Walsh surgiu em 1900 com J.A.Barret [1] e foi introduzido em matemática em 1923 por J.L.Walsh [2].

Este sistema é ortonormal e completo como mostraremos nos itens 2.29 e 2.37 do capítulo II. As funções Walsh assumem sempre os valores ± 1 ; mudam de sinal somente quando a variável é um múltiplo de uma potência de $1/2$ (ver item 2.13) e uma função contínua $f(t)$, $t \in [0, T]$, pode ser desenvolvida em série Walsh como veremos mais tarde.

Há poucos anos atrás foram sugeridas muitas aplicações das funções Walsh em lugar das funções seno e coseno [3]. Dentre elas a principal é em computação eletrônica.

Nosso objetivo neste trabalho é resolver dois problemas distintos. O primeiro consiste em desenvolver em série Walsh uma função contínua da qual conhecemos apenas alguns valores, mas desconhecemos a descrição analítica. Isto porque, conhecendo-se a expressão analítica da função, esse desenvolvimento é muito simples de ser obtido (ver §5, capítulo II).

Resolvemos este problema usando uma interpolação da função por um "spline" cúbico (§1 - capítulo III), e depois calculando os coeficientes do desenvolvimento em série Walsh deste "spline" cúbico.

Usamos o "spline" cúbico porque tem boas propriedades ,

tais como: dá uma boa aproximação da função [4] e, consequentemente, dos coeficientes Walsh e sua derivada primeira é de cálculo simples.

Este método será exemplificado através de duas funções no capítulo III.

O segundo problema consiste em determinar uma função contínua, conhecendo um número finito de seus coeficientes Walsh.

A aplicação direta da fórmula do desenvolvimento em série Walsh não dá uma boa aproximação da função, pois dá origem a uma função descontínua, devido às características das funções básicas da série.

Para uma convergência melhor calculamos, apenas, um número finito de valores pelo processo acima e os interpolamos por um "spline" cúbico para determinar completamente a função.

Aplicamos este problema à compressão de dados, isto é, mostramos que fazendo os coeficientes Walsh da função que estão mais próximos de zero assumir o valor zero, temos, ainda, uma boa aproximação da função.

Damos exemplos de compressão de dados para três funções distintas no capítulo III.

A definição de função Walsh usada neste trabalho, foi a dada por Paley [6]. Paley redefiniu essas funções ordenando-as de maneira diferente da de Walsh, como exemplificamos no ítem 2.25, onde damos as duas definições.

Escolhemos esta definição por dar uma convergência melhor da transformada Walsh definida no §3 do capítulo III [5].

Apresentamos um algoritmo para resolver os dois problemas.

C A P Í T U L O II

Definições e propriedades de funções Walsh

1 - Funções Rademacher

2.1 - Definição de Paley [5]

Para $k = 1, 2, \dots$ e $t \in [0, 1)$, define-se a k -ésima função Rademacher por:

$$R_k(t) = (-1)^{t_k} \quad (2.2)$$

onde $t = (0.t_1t_2\dots t_k\dots)_2$, $t_k = 0, 1$,

t_k obtido por:

$$t = t_1 \cdot 2^{-1} + t_2 \cdot 2^{-2} + \dots + t_k \cdot 2^{-k} + \dots \quad (2.3)$$

2.4 - Definição de Walsh [0]

Define-se função Rademacher por:

$$R_n(\theta) = \text{sign} [\text{sen}(2^n \pi \theta)] \quad (2.5)$$

onde $n = 1, 2, \dots$ e $\theta \in [0, 1)$

2.6 - Observação:

Para melhor compreensão da construção do gráfico da função Rademacher, observe que se $t \in [0, \frac{1}{2^n})$ então $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$.

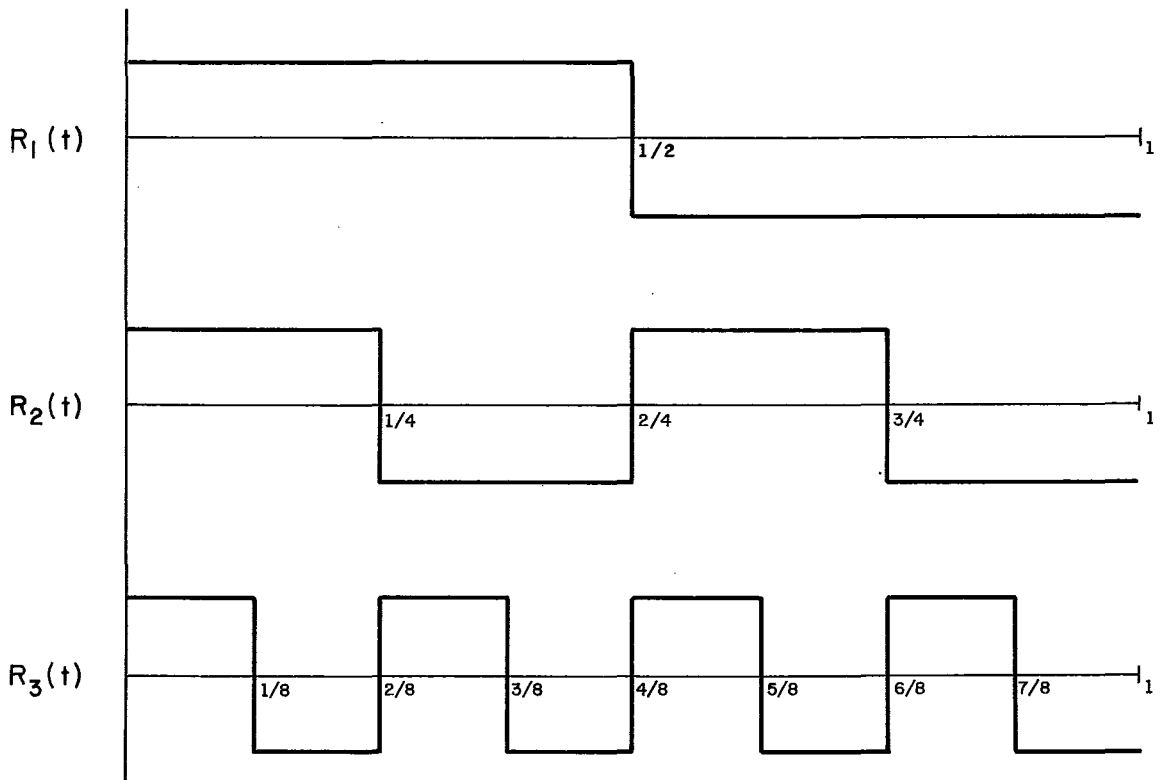
Para verificar esta afirmativa supor:

$$t_i = 1, \forall i \leq n$$

Então

$$t = t_1 \cdot 2^{-1} + t_2 \cdot 2^{-2} + \dots + 1 \cdot 2^{-i} + \dots \geq \frac{1}{2^n} \quad (2.7)$$

2.8 - Gráfico das três primeiras funções Rademacher:



2 - Funções Walsh

2.9 - Definição de Paley [5]

Define-se função Paley (ou função Walsh) por:

$$\text{pal}(i, t) = \prod_{k=1}^n [R_k(t)]^{i_k} = \prod_{k=1}^n (-1)^{i_k t_k} \quad (2.10)$$

com: $t \in [0, 1)$

$$i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

$$i = (i_n i_{n-1} \dots i_1)_2, \quad i_k = 0, 1$$

$$t = (0.t_1 t_2 \dots t_k \dots)_2, \quad t_k = 0, 1$$

onde t_k é obtido como em (2.3) e i_k é dado por

$$i = i_n \cdot 2^{n-1} + i_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \dots + i_1 \cdot 2^0 \quad (2.11)$$

2.12 - Exemplo:

Se considerarmos $i = 5$ na definição 2.1, temos:

$$\text{pal}(5, t) = \prod_{k=1}^n (-1)^{5_k t_k}$$

$$5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (101)_2$$

$$0 = 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = (000)_2$$

Logo $n = 3$ e $t = t_3 \cdot 2^{-3} + t_2 \cdot 2^{-2} + t_1 \cdot 2^{-1}$

Como $t_k = 0$ ou $t_k = 1$, vem:

$$t = 0.001 = 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-1} = \frac{1}{8}$$

$$t = 0.010 = 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-1} = \frac{2}{8}$$

$$t = 0.011 = 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-1} = \frac{3}{8}$$

$$t = 0.100 = 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-1} = \frac{4}{8}$$

$$t = 0.101 = 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-1} = \frac{5}{8}$$

$$t = 0.110 = 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-1} = \frac{6}{8}$$

$$t = 0.111 = 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-1} = \frac{7}{8}$$

Usando a definição de Paley, temos:

$$\text{pal}(5, 0) = 1$$

$$\text{pal}(5, \frac{1}{8}) = (-1)^0 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^1 = -1$$

$$\text{pal}(5, \frac{2}{8}) = (-1)^0 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^0 = 1$$

$$\text{pal}(5, \frac{3}{8}) = (-1)^1 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^0 = -1$$

$$\text{pal}(5, \frac{4}{8}) = (-1)^0 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^1 = -1$$

$$\text{pal}(5, \frac{5}{8}) = (-1)^1 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^1 = 1$$

$$\text{pal}(5, \frac{6}{8}) = (-1)^0 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^1 = -1$$

$$\text{pal}(5, \frac{7}{8}) = (-1)^1 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^1 = 1$$

2.13 - Observação:

Seja $t \in [0, 1)$. Então se $t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ afirmamos que:

$$\text{pal}(i, t) = \text{pal}(i, \frac{k}{2^n}) \quad (2.14)$$

Prova:

Seja $t = \frac{2^m k + r}{2^{n+m}}$, $0 < r < 2^m$, então

$$t \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$$

$$\text{pal}(i, \frac{k}{2^n}) \triangleq \prod_{j=1}^n (-1)^{i_j (\frac{k}{2^n})_j}$$

$$k = k_1 \cdot 2^0 + k_2 \cdot 2^1 + \dots + k_n \cdot 2^{n-1}$$

$$\frac{k}{2^n} = k_1 \cdot 2^{-n} + k_2 \cdot 2^{-n+1} + \dots + k_n \cdot 2^{-1}$$

Então

$$k_1 = (\frac{k}{2^n})_n, \quad k_2 = (\frac{k}{2^n})_{n-1}, \dots, \quad k_n = (\frac{k}{2^n})_1$$

$$\text{pal}(i, \frac{k}{2^n}) = (-1)^{i_1 k_n} (-1)^{i_2 k_{n-1}} \dots (-1)^{i_{n-1} k_2} (-1)^{i_n k_1} \quad (2.15)$$

$$\text{pal}(i, t) \triangleq \prod_{j=1}^n (-1)^{i_j t_j}$$

$$t = \frac{2^m k + r}{2^{n+m}} \implies t_j = (\frac{2^m k + r}{2^{n+m}})_j$$

$$2^m \cdot k = k_1 \cdot 2^m + k_2 \cdot 2^{m+1} + \dots + k_n \cdot 2^{m+n-1}$$

$$2^m \cdot k + r = r \cdot 2^0 + k_1 \cdot 2^m + \dots + k_n \cdot 2^{m+n-1}$$

$$t = \frac{2^m \cdot k + r}{2^{n+m}} = r \cdot 2^{-n-m} + k_1 \cdot 2^{-n} + k_2 \cdot 2^{-n+1} + \dots + k_n \cdot 2^{-1}$$

Então

$$k_n = t_1, \dots, k_2 = t_{n-1}, k_1 = t_n, r = t_{n+m}$$

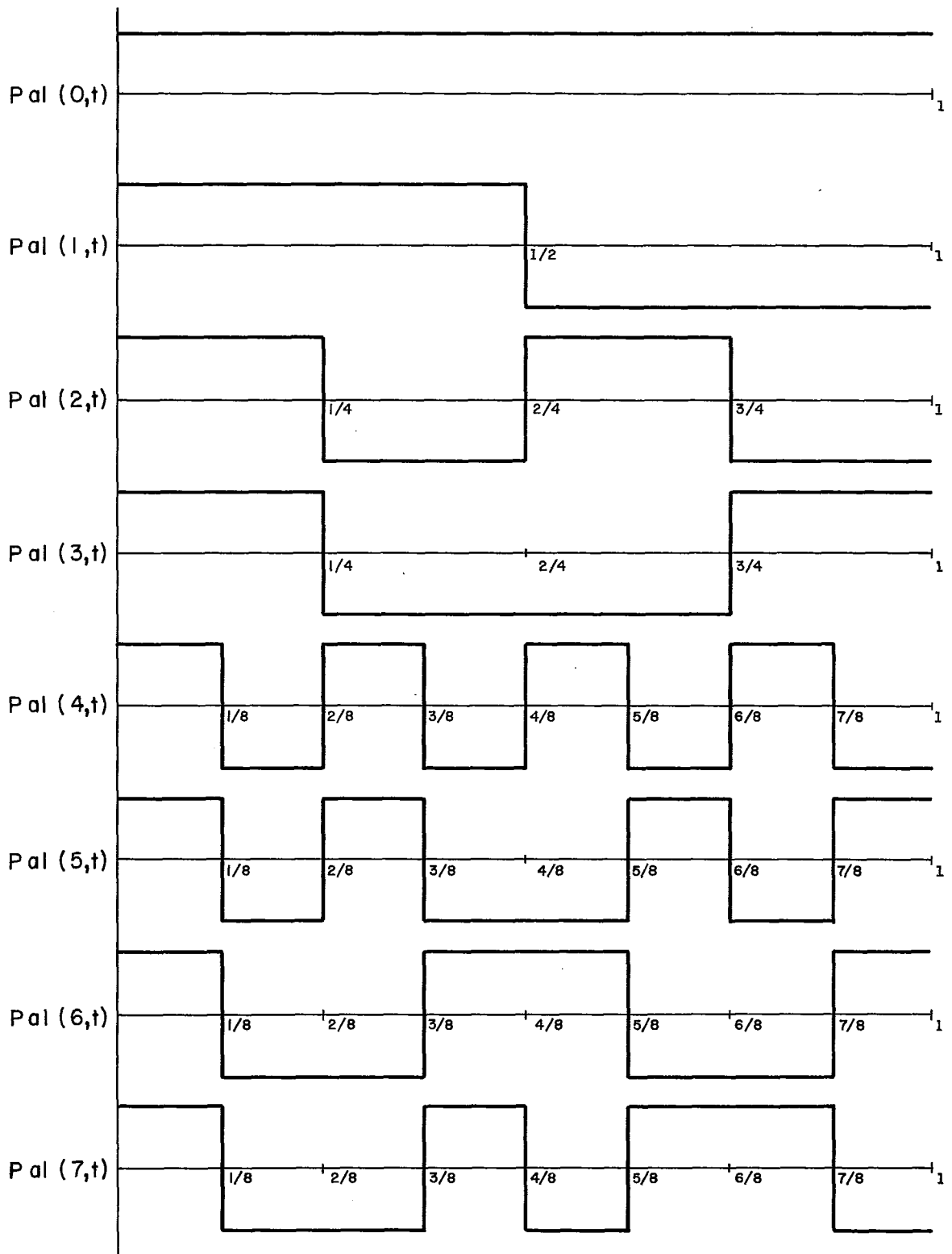
$$\text{pal}(i, t) = (-1)^{i_1 k_n} \cdot (-1)^{i_2 k_{n-1}} \dots (-1)^{i_{n-1} k_2} \cdot (-1)^{i_n k_1} \quad (2.16)$$

Como as expressões (2.15) e (2.16) são iguais, então

$$\text{pal}(i, t) = \text{pal}\left(i, \frac{k}{2^n}\right)$$

2.17 - Gráfico das oito primeiras funções Paley.

Usando os parágrafos 2.12 e 2.13 podemos traçar o gráfico da função $\text{pal}(5, t)$ e, de maneira análoga, o gráfico das funções $\text{pal}(i, t)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7$.



2.18 - Definição de Walsh [0]

Define-se função Walsh por:

$$\text{wal}(0,t) = 1$$

$$\text{wal}(n,t) = \prod_{i=1}^m R_i^{\alpha_i}(t) \quad (2.19)$$

onde m e α_i são dados por

$$(n)_2 = \bigoplus_{i=1}^m \alpha_i (b_i)_2 \quad (2.20)$$

com $b_i = 2^i - 1$ e $\alpha_i = 0, 1$ e onde $(n)_2$ e $(b_i)_2$ são as representações binárias de n e b_i respectivamente e o símbolo \bigoplus representa a adição módulo 2.

2.21 - Exemplos:

2.22 - Se considerarmos $n=1$ na definição 2.4, temos:

$$n = 1 \quad (n)_2 = 001$$

$$b_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$$(n)_2 = \sum_{i=1}^1 \alpha_i (b_i)_2 = 1(001) = 001$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\text{wal}(1,t) = R_1^1(t) = R_1(t)$$

2.23 - Considerando $n=6$ na definição 2.4, vem:

$$n = 6 \implies (n)_2 = 110 = 001 + 111$$

$$001 = (b_1)_2$$

$$111 = (b_3)_2$$

$$(n)_2 = 1.(b_1)_2 \oplus 0.(b_2)_2 \oplus 1.(b_3)_2$$

$$\text{wal}(6,t) = R_1^1(t) \cdot R_2^0(t) \cdot R_3^1(t) = R_1(t) \cdot R_3(t)$$

2.24 - Comparação entre funções Paley e funções Walsh

Pelos exemplos 2.12 e 2.23, podemos verificar que

$$\text{wal}(6,t) = \text{pal}(5,t).$$

2.25 - Comparação entre as oito primeiras funções Paley e funções Walsh.

Usando as definições 2.9 e 2.18 estabelecemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \text{pal}(0,t) &= \text{wal}(0,t) \\ \text{pal}(1,t) &= \text{wal}(1,t) \\ \text{pal}(2,t) &= \text{wal}(3,t) \\ \text{pal}(3,t) &= \text{wal}(2,t) \\ \text{pal}(4,t) &= \text{wal}(7,t) \\ \text{pal}(5,t) &= \text{wal}(6,t) \\ \text{pal}(6,t) &= \text{wal}(4,t) \\ \text{pal}(7,t) &= \text{wal}(5,t) \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.27 - Propriedades das funções Walsh

2.28 - Um conjunto com 2^n , $n = 1, 2, \dots$, funções Walsh com a operação

$$\text{pal}(i,t) \cdot \text{pal}(j,t) = \text{pal}(i \oplus j,t)$$

onde \oplus é a soma módulo 2, forma um grupo abeliano [0].

2.29 - O sistema de funções Walsh é ortonormal:

$$\int_0^1 \text{pal}(i,t) \text{pal}(j,t) dt = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.30)$$

Prova:

$$\int_0^1 \text{pal}(i,t) \text{pal}(j,t) dt = \int_0^1 \text{pal}(i \oplus j, t) dt$$

Se $k = i \oplus j$, então basta provar a equação (2.30) para $\int_0^1 \text{pal}(k,t) dt$.

Logo:

$$\text{se } i=j \quad \int_0^1 \text{pal}(k,t) dt = \int_0^1 \text{pal}(0,t) dt = 1 \quad (2.31)$$

$$\text{se } i \neq j, \text{ vamos mostrar que } \int_0^1 \text{pal}(k,t) dt = 0 \quad (2.32)$$

k é um número fixo, diferente de zero, que é representado na forma binária por

$$k = (k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1)_2, \quad k_i = 0, 1$$

$$\text{pal}(k,t) \triangleq \prod_{i=1}^n (-1)^{k_i t_i} \quad (2.33)$$

onde $t = (0 \cdot t_1 t_2 \dots)_2, \quad t_i = 0, 1$

Sabemos que a função $\text{pal}(k,t)$ é constante em cada intervalo $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$, assumindo sempre os valores $+1$ ou -1 . Como k é diferente de zero, podemos afirmar que existe um número m de k_i que assumem o valor um, m menor ou igual a n , e um número $n-m$ de k_i que assumem o valor zero.

A função $\text{pal}(k,t)$ vai assumir o valor -1 quando

$$k_1 t_1 \oplus k_2 t_2 \oplus \dots \oplus k_n t_n = 1 \quad (2.34)$$

e isto significa que temos um número ímpar de parcelas $k_i t_i$ iguais a 1.

Logo a função $\text{pal}(k,t)$ vai assumir o valor -1 .

$$2^{n-m} (C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \dots + C_m^p) \quad (2.35)$$

vezes, com $p = \begin{cases} m - 1 & \text{se } m \text{ for par} \\ m & \text{se } m \text{ for ímpar} \end{cases}$

$$\text{Como } 2^{n-m} (C_m^1 + C_m^3 + \dots + C_m^p) = 2^{n-1} \quad (2.36)$$

vemos que a função $\text{pal}(k,t)$ assume 2^{n-1} vezes o valor -1 e, conseqüentemente, 2^{n-1} vezes o valor $+1$.

Então a expressão (2.32) é verdadeira e o sistema de funções Walsh é ortonormal.

2.37 - O sistema de funções Walsh é completo em $L_2(0,1)$.

Suponha $\langle f(t), \text{pal}(i,t) \rangle = 0 \quad \forall i = 0,1,2,\dots$

Vamos provar que $f(t) = 0 \quad \forall t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \langle f(t), \text{pal}(i,t) \rangle &= \int_0^1 f(t) \text{pal}(i,t) dt \\ &= \text{pal}(i,0) \int_0^{1/2^n} f(t) dt + \text{pal}(i, \frac{1}{2^n}) \int_{1/2^n}^{2/2^n} f(t) dt + \\ &\quad + \dots + \text{pal}(i, \frac{2^{n-1}}{2^n}) \int_{\frac{2^{n-1}}{2^n}}^1 f(t) dt \end{aligned}$$

Então se $\langle f(t), \text{pal}(i,t) \rangle = 0 \quad \forall i = 0,1,2,\dots$

e $\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t) dt = f_k, \quad k = 0,1,\dots,2^n-1$, temos:

$$\begin{bmatrix} \text{pal}(0,0) & \text{pal}(0, \frac{1}{2^n}) & \dots & \text{pal}(0, \frac{2^{n-1}}{2^n}) \\ \text{pal}(1,0) & \text{pal}(1, \frac{1}{2^n}) & \dots & \text{pal}(1, \frac{2^{n-1}}{2^n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{pal}(2^{n-1},0) & \text{pal}(2^{n-1}, \frac{1}{2^n}) & \dots & \text{pal}(2^{n-1}, \frac{2^{n-1}}{2^n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{2^n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo para calcular $f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1}$, basta resolver um sistema homogêneo com 2^n equações e 2^n incógnitas, cujo determinante principal é de ordem 2^n , o que implica em

$$f_0 = f_1 = \dots = f_{2^n-1} = 0$$

Supondo que $f(t)$ não muda de sinal no intervalo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $\forall k = 0, 1, \dots, 2^n-1$, podemos afirmar que

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2^n-1$$

Como, por hipótese,

$$\langle f(t), \text{pal}(i, t) \rangle = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

e por definição de $\text{pal}(i, t)$ se $i \rightarrow \infty$ então $2^n \rightarrow \infty$ afirmamos que existe um n tal que $f(t)$ não muda de sinal em cada intervalo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, 2^n-1$.

Concluimos, então, que $f(t) = 0 \quad \forall t \in (0, 1)$.

3 - Transformada Walsh

Como sabemos, quase todas as funções de tempo, $f(t)$ definidas no intervalo $(0, T)$, podem ser aproximadas pela série de Fourier [3]

$$f(t) = F_0 + \sqrt{2}F_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + \sqrt{2}F_2 \cos\frac{2\pi t}{T} + \sqrt{2}F_3 \sin\frac{4\pi t}{T} + \dots \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
 \text{onde } F_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 F_1 &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} dt \\
 F_2 &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{cos} \frac{2\pi t}{T} dt \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Definição:

Como o sistema de funções Walsh é ortonormal e completo, podemos desenvolver uma função $f(t)$ em série Walsh [3]

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \operatorname{pal}(i, \frac{t}{T}), \quad t \in [0, T] \tag{2.39}$$

$$\alpha_i = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{pal}(i, \frac{t}{T}) dt \tag{2.40}$$

Fazendo uma mudança de variável

$$x = \frac{t}{T}, \quad dt = T dx$$

temos:

$$\alpha_i = \int_0^1 f(xT) \operatorname{pal}(i, x) dx \tag{2.41}$$

2.42 - Definição: [5]

O número α_i definido em (2.40) é chamado de i -ésima transformada Walsh da função $f(t)$.

4 - Matriz Walsh

2.43 - Definição

Define-se matriz Walsh, W_N , por

$$W_N = (w_{ik})_{N,N}$$

onde

$$N = 2^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$i, k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$$

$$w_{ik} = \text{pal}(i, t), \quad t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right)$$

2.44 - Exemplo:

Seja $n = 3$

$$W_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.45 - Definição

Dizemos que a matriz A_N é ortogonal se

$$A_N A_N^T = NI$$

onde N é a ordem da matriz A e I é a matriz identidade $N \times N$.

2.46 - Propriedades das matrizes Walsh

2.47 - As entradas das matrizes Walsh assumem sempre os valores $+1$ e -1 .

Prova:

Por definição de matriz Walsh

2.48 - As matrizes Walsh são simétricas, isto é: $w_{ik} = w_{ki}$

Prova:

Temos que provar que

$$\text{pal}\left(i, \frac{k}{2^n}\right) = \text{pal}\left(k, \frac{i}{2^n}\right) \quad (2.49)$$

$$i = i_1 2^0 + i_2 2^1 + \dots + i_n 2^{n-1}$$

$$\frac{i}{2^n} = i_1 2^{-n} + i_2 2^{-n+1} + \dots + i_n 2^{-1}$$

$$k = k_1 2^0 + k_2 2^1 + \dots + k_n 2^{n-1}$$

$$\frac{k}{2^n} = k_1 2^{-n} + k_2 2^{-n+1} + \dots + k_n 2^{-1}$$

$$\text{pal}\left(i, \frac{k}{2^n}\right) = (-1)^{i_1 k_n} \dots (-1)^{i_n k_1} \quad (2.50)$$

$$\text{pal}\left(k, \frac{i}{2^n}\right) = (-1)^{k_1 i_n} \dots (-1)^{k_n i_1} \quad (2.51)$$

Concluimos (2.49) de (2.50) e (2.51).

2.52 - As matrizes Walsh são ortogonais.

Esta propriedade é uma consequência direta da propriedade (2.29).

2.53 - Se a matriz Walsh W é de ordem N , sua matriz inversa W^{-1} é dada por

$$W^{-1} = \frac{1}{N} W$$

Esta propriedade decorre das propriedades (2.48) e (2.52).

5 - Relação entre as transformadas Walsh de uma função e a matriz Walsh.

Na prática, ao desenvolvermos uma função em série, usamos um número finito de parcelas e no caso da série Walsh este número será do tipo 2^n , onde $n = 1, 2, \dots$

De (2.39) e (2.40), vem:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{2^n} \alpha_i \text{pal}(i, \frac{t}{T}) \quad t \in [0, T]$$

$$\alpha_i = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{pal}(i, \frac{t}{T}) dt$$

Seja $x = \frac{t}{T}$, então $x \in [0, 1]$ e

$$\alpha_i = \int_0^1 f(xT) \text{pal}(i, x) dx$$

Sabemos que as funções Walsh são constantes em cada intervalo $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, logo:

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \text{pal}(i, 0) \int_0^{1/2^n} f(xT) dx + \text{pal}(i, \frac{1}{2^n}) \int_{1/2^n}^{2/2^n} f(xT) dx + \dots \\ & \dots + \text{pal}(i, \frac{2^{n-1}}{2^n}) \int_{\frac{2^{n-1}}{2^n}}^1 f(xT) dx \end{aligned} \quad (2.54)$$

Então, para obtermos as 2^n transformadas Walsh da função $f(t)$, $t \in [0, T]$, basta multiplicar a matriz Walsh $W_{2^n \times 2^n}$ pela matriz A_{2^n} , onde

$$A_i = \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} f(xT) dx, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \quad (2.55)$$

$$\begin{bmatrix} \text{pal}(0,0) & \text{pal}(0,\frac{1}{2^n}) & \dots & \text{pal}(0,\frac{2^n-1}{2^n}) \\ \text{pal}(1,0) & \text{pal}(1,\frac{1}{2^n}) & \dots & \text{pal}(1,\frac{2^n-1}{2^n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{pal}(2^n-1,0) & \text{pal}(2^n-1,\frac{1}{2^n}) & \dots & \text{pal}(2^n-1,\frac{2^n-1}{2^n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{2^n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

Então

$$W A = \alpha \quad (2.56)$$

onde

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2^n-1} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

C A P Í T U L O I I I

Problemas

1 - Primeiro problema.

Conhecemos um número finito de valores $\{f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m)\}$ da função $f(t)$ mas não sabemos a expressão analítica da função e queremos desenvolvê-la em série Walsh.

Solução:

Neste caso não podemos determinar a matriz A_{2^n} (2.55) pois não conhecemos $f(t)$. Vamos, então, calcular um spline cúbico $g(t)$ que vai interpolar $f(t)$ nos pontos $t_i, i = 0, 1, \dots, m$ e calcular A'_{2^n} , uma aproximação para A_{2^n} , onde

$$A'_i = \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} g(xT) dx, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \quad e$$

$$x = \frac{t}{T}, \quad t \in [0, T)$$

Usaremos o spline cúbico porque tem boas propriedades de convergência já que a convergência é de quarta ordem [6].

Um spline cúbico $g(t)$ é uma função que em cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ é um polinômio cúbico $g_i(t)$ diferente, é contínua e suas derivadas, primeira e segunda, são contínuas.

Para calcular $g(t)$ é suficiente determinar $Dg(t_i)$ que é, por definição, igual a λ_i [4], onde λ_i é dado por:

$$h \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2[f(t_1)-f(t_0)]+[f(t_2)-f(t_0)]/2 \\ 3[f(t_2)-f(t_0)] \\ 3[f(t_3)-f(t_1)] \\ \vdots \\ \vdots \\ 3[f(t_m)-f(t_{m-2})] \\ 2[f(t_m)-f(t_{m-1})]+[f(t_m)-f(t_{m-2})]/2 \end{bmatrix}$$

Vamos representar os polinômios $g_i(t)$, por:

$$g_i(t) = a_i(t-t_i)^3 + b_i(t-t_i)^2 + c_i(t-t_i) + d_i$$

onde $i = 0, 1, \dots, m-1$

$$\text{Então } d_i = g_i(t_i) = f(t_i) \quad (3.2)$$

$$\text{e } c_i = Dg(t_i) = \lambda_i \quad (3.3)$$

onde λ_i é calculado facilmente aplicando operações elementares as linhas do produto de matrizes acima.

Basta, agora, determinar a_i e b_i .

Sejam $h = t_{i+1} - t_i$ e $y_i = f(t_i)$

Logo:

$$\begin{cases} y_i = a_i h^3 + b_i h^2 + \lambda_{i-1} h + y_{i-1} \\ \lambda_i = 3a_i h^2 + 2b_i h + \lambda_{i-1} \end{cases} \quad (3.4)$$

Resolvendo o sistema (3.4), temos:

$$\begin{cases} y_i - \lambda_{i-1} h - y_{i-1} = a_i h^3 + b_i h^2 \\ \lambda_i - \lambda_{i-1} = 3a_i h^2 + 2b_i h \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_i = \frac{1}{h^3} (y_i - \lambda_{i-1} h - y_{i-1} - b_i h^2) \\ a_i = \frac{1}{3h^2} (\lambda_i - \lambda_{i-1} - 2b_i h) \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^3} (y_i - \lambda_{i-1} h - y_{i-1} - b_i h^2) = \frac{1}{3h^2} (\lambda_i - \lambda_{i-1} - 2b_i h)$$

$$3y_i - 3\lambda_{i-1} h - 3y_{i-1} - 3b_i h^2 = \lambda_i h - \lambda_{i-1} h - 2b_i h^2$$

$$\frac{1}{h^2} (3y_i - 3\lambda_{i-1} h - 3y_{i-1} - \lambda_i h + \lambda_{i-1} h) = b_i$$

$$b_i = \frac{1}{h^2} (3y_i - 2\lambda_{i-1} h - 3y_{i-1} - \lambda_i h) \quad (3.5)$$

$$a_i = \frac{1}{3h^2} (\lambda_i - \lambda_{i-1} - \frac{2h}{h^2} (3y_i - 2\lambda_{i-1}h - 3y_{i-1} - \lambda_i h))$$

$$a_i = \frac{1}{3h^2} \left(\frac{\lambda_i h - \lambda_{i-1} h - 6y_i + 4\lambda_{i-1} h + 6y_{i-1} + 2\lambda_i h}{h} \right)$$

$$a_i = \frac{1}{3h^3} (3\lambda_i h + 3\lambda_{i-1} h - 6y_i + 6y_{i-1})$$

$$a_i = \frac{1}{h^3} (\lambda_i h + \lambda_{i-1} h - 2y_i + 2y_{i-1}) \quad (3.6)$$

Conhecidos os coeficientes do polinômio $g_i(t)$ o "spline" cúbico fica determinado. Basta, agora, aplicar o resultado (2.55) a $g(t)$ e em seguida a equação (2.56) o que determina a aproximação que desejamos para a transformada Walsh de $f(t)$

3.7 - Exemplo:

Seja $m = 3$, isto é, conhecemos:

$$f(t_0), f(t_1), f(t_2), f(t_3)$$

vamos, apenas, lembrar a maneira de calcular λ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0)/2 \\ 3(y_2 - y_0) \\ 3(y_3 - y_1) \\ 2(y_3 - y_2) + (y_3 - y_1)/2 \end{bmatrix}$$

Para simplificar os cálculos fazemos:

$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0)/2]/h \\ [3(y_2 - y_0)]/h \\ [3(y_3 - y_1)]/h \\ [2(y_3 - y_2) + (y_3 - y_1)/2]/h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Realizando operações elementares sobre as linhas do produto acima, vem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 - B_0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ (B_1 - B_0)/2 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ (B_1 - B_0)/2 \\ B_2 - (B_1 - B_0)/2 \\ B_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ (B_1 - B_0)/2 \\ (B_2 - (B_1 - B_0)/2) \cdot \frac{2}{7} \\ B_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ (B_1 - B_0)/2 \\ \frac{2}{7}(B_2 - (B_1 - B_0)/2) \\ B_3 - \frac{4}{7}(B_2 - (B_1 - B_0)/2) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ (B_1 - B_0)/2 \\ \frac{2}{7}(B_2 - (B_1 - B_0)/2) \\ \frac{7}{3} [B_3 - \frac{4}{7}(B_2 - (B_1 - B_0)/2)] \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_0 + 2\lambda_1 = B_0 \\ \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} = \frac{1}{2}(B_1 - B_0) \\ \lambda_2 + \frac{2}{7}\lambda_3 = \frac{2}{7} [B_2 - (B_1 - B_0)/2] \\ \lambda_3 = \frac{7}{3} [B_3 - \frac{4}{7} [B_2 - (B_1 - B_0)/2]] \end{cases} \quad (3.8)$$

Logo:

$$\lambda_2 = \frac{2}{7} \left[B_2 - \frac{1}{2}(B_1 - B_0) \right] - \frac{2}{3} \left\{ B_3 - \frac{4}{7} \left[B_2 - \frac{1}{2}(B_1 - B_0) \right] \right\}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} [B_0 - B_1 + 2B_2 - 2B_3] \quad (3.9)$$

$$\lambda_1 = \frac{B_1}{2} - \frac{B_0}{2} - \frac{1}{6} [B_0 - B_1 + 2B_2 - 2B_3]$$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3} B_0 + \frac{2}{3} B_1 - \frac{1}{3} B_2 + \frac{1}{3} B_3 \quad (3.10)$$

$$\lambda_0 = B_0 + \frac{4}{3} B_0 - \frac{4}{3} B_1 + \frac{2}{3} B_2 - \frac{2}{3} B_3$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} (7B_0 - 4B_1 + 2B_2 - 2B_3) \quad (3.11)$$

2 - Segundo problema.

Determinar os valores $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m)$ de uma função $f(t)$, conhecendo um conjunto finito de transformadas Walsh, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1}\}$, da função.

Solução:

Uma solução rápida seria multiplicar a matriz inversa da matriz Walsh de ordem 2^n pela matriz coluna cujas entradas são as transformadas Walsh conhecidas. Obteríamos, então, os valores

A_i , $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ definidos na equação (2.55) e definiríamos

$$f(t_k) = A_i, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.12)$$

se $t_k \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right)$

O processo acima não dá uma boa aproximação para a função $f(t)$. Faremos então a seguinte aproximação: após determinarmos A_i , $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, definimos

$$g(x_i) = \frac{A_i}{h} \quad (3.13)$$

onde

$$h = \frac{1}{2^n} \quad (3.14)$$

e

$$x_i = \frac{(2i-1)h}{2} \quad (3.15)$$

$$f(x_i) \stackrel{\sim}{=} g(x_i) \quad (3.16)$$

Interpolando os valores $g(x_i)$ por um spline cúbico $g(t)$, vem:

$$f(t_j) \stackrel{\sim}{=} g(t_j) \quad \text{se } t_j \in \left[\frac{(2i-1)h}{2}, \frac{(2i+1)h}{2} \right], \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, 2^n \\ j = 1, \dots, m-1 \end{array}$$

$$f(t_0) \stackrel{\sim}{=} g(t_0)$$

$$f(t_m) \stackrel{\sim}{=} g(t_m)$$

(3.17)

3 - Exemplos

Daremos aqui exemplos dos problemas 1 e 2. Usamos para esses exemplos duas funções cujas expressões analíticas são conhecidas, as funções $\exp(-t)$ e $\sin 2\pi t$, para fazermos uma comparação entre os resultados obtidos pelos processos indicados nos problemas e os resultados obtidos através do cálculo direto, já que as funções são conhecidas.

Daremos também um exemplo para compressão de dados, isto é, conhecidas as transformadas Walsh de uma função $f(t)$ vamos substituir seus menores valores por zero e ainda assim, usando spline cúbico, chegaremos a uma boa aproximação da função $f(t)$.

Para exemplo de compressão de dados vamos usar as funções $\exp(-t)$, $\sin 2\pi t$ e valores de um eletrocardiograma.

Usaremos aqui a seguinte definição para o erro relativo E :

Se $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ é um vetor e $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$ é uma aproximação deste vetor então

$$E = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

3.17 - Consideremos a função $\exp(-t)$ restrita ao intervalo $[0,1]$. Calculando dezesseis transformadas Walsh desta função vamos obter o vetor A_0 abaixo.

Dividindo o intervalo $[0,1]$ em subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0,1,\dots,m$, onde faremos m igual a 16, 10 e 5 respectivamente e onde $|x_{i+1} - x_i|$ é constante, e calculando $f(x_i)$ para cada $i = 0,1,\dots,m$, determinamos, pelo processo do problema um, dezesseis transformadas Walsh da função $\exp(-t)$ que notamos respectivamente por A_1, A_2 e A_3 , fazendo uma comparação entre esses vetores e A_0 , denotando os erros por E_1, E_2 e E_3 respectivamente.

A_0	A_1	A_2	A_3
0.6321205	0.6321204	0.6321203	0.6321251
0.1548181	0.1548182	0.1548182	0.1548194
0.0786061	0.0786061	0.0786062	0.0786084
0.0192521	0.0192522	0.0192524	0.0192609
0.0394562	0.0394563	0.0394562	0.0394570
0.0096635	0.0096636	0.0096638	0.0096657
0.0049065	0.0049065	0.0049068	0.0049136
0.0012018	0.0012016	0.0012019	0.0012034
0.0197473	0.0197474	0.0197474	0.0197475
0.0048363	0.0048365	0.0048366	0.0048368
0.0024555	0.0024557	0.0024557	0.0024574
0.0006015	0.0006014	0.0006015	0.0006018
0.0012326	0.0012326	0.0012328	0.0012293
0.0003019	0.0003019	0.0003020	0.0003010
0.0001532	0.0001533	0.0001534	0.0001526
0.0000377	0.0000376	0.0000377	0.0000348

$$E_1 = 0.0000007$$

$$E_2 = 0.0000012$$

$$E_3 = 0.0000208$$

3.18 - Exemplo análogo ao 3.17 para a função $\text{sen } 2\pi t$ restrita ao intervalo $[0,1]$,

A_0	A_1	A_2	A_3
0.0000000	0.0000028	0.0000048	0.0000091
0.6366330	0.6366252	0.6367450	0.6468556
0.0000212	0.0000351	0.0002806	0.0197685
-0.0000426	-0.0000398	-0.0000377	-0.0000329
0.0000087	0.0000207	0.0003906	0.0048092
-0.0000176	-0.0000148	-0.0000123	-0.0000104
0.0000001	0.0000027	0.0000051	0.0000089
-0.2636867	-0.2636659	-0.2632328	-0.2481242
0.0000042	0.0000303	0.0001442	0.0008398
-0.0000085	-0.0000051	-0.0000045	-0.0000045
-0.0000001	0.0000033	0.0000038	0.0000046
-0.1266271	-0.1265970	-0.1265453	-0.1229854
-0.0000000	0.0000031	0.0000045	0.0000023
-0.0524511	-0.0524271	-0.0521364	-0.0603699
-0.0000017	0.0000203	0.0002755	-0.0061516
0.0000034	0.0000067	0.0000080	0.0000060

$$E_1 = 0.0000849$$

$$E_2 = 0.0011333$$

$$E_3 = 0.0420828$$

3.19 - Exemplo do segundo problema:

Calculamos o valor da função $\exp(-t)$ nos pontos $x_i \in [0,1]$, $i = 0,1,2,\dots,16$, onde $[x_{i+1}-x_i]$ é constante, a partir de suas dezesseis primeiras transformadas Walsh.

Usamos os dois métodos descritos no problema 2, notando por Y_1 o vetor dos valores obtidos pelo primeiro processo, por Y_2 o vetor cujas componentes são os valores da função obtidos através de splines cúbicos e por Y os valores de $\exp(x_i)$, $i = 0,1,\dots,16$.

Denotaremos os erros por E_1 e E_2 respectivamente.

Y	Y_1	Y_2
1.0000000	0.9693913	1.0001602
0.9394131	0.9106584	0.9395663
0.8824969	0.8554844	0.8826402
0.8290291	0.8036532	0.8291639
0.7788008	0.7549623	0.7789273
0.7316157	0.7092215	0.7317345
0.6872893	0.6662517	0.6874008
0.6456485	0.6258855	0.6457531
0.6065307	0.5879652	0.6066291
0.5697829	0.5523422	0.5698754
0.5352615	0.5188771	0.5353482

Y	Y ₁	Y ₂
0.5028316	0.4874399	0.5029128
0.4723666	0.4579076	0.4724430
0.4437473	0.4301644	0.4438193
0.4168620	0.4041020	0.4169295
0.3916056	0.3796188	0.3916692
0.3678795	0.3796188	0.3679382

$$E_1 = 0.0306330$$

$$E_2 = 0.0001624$$

3.20 - Exemplo análogo ao 3.19 para a função $\sin 2\pi t$ restrita ao intervalo $[0,1]$.

Y	Y ₁	Y ₂
0.0	0.1940008	-0.0019729
0.3826757	0.5519313	0.3805555
0.7070950	0.8261093	0.7023689
0.9238698	0.9744521	0.9178922
1.0000000	0.9744696	0.9934762
0.9238957	0.8261338	0.9178830
0.7071425	0.5520337	0.7025369

Y	Y ₁	Y ₂
0.3827379	0.1938937	0.3802460
0.0000664	-0.1937640	0.0000661
-0.3826143	-0.5519230	-0.3801234
-0.7070479	-0.8260599	-0.7024428
-0.9238445	-0.9744433	-0.9178318
-1.0000000	-0.9744785	-0.9934767
-0.9239210	-0.8261821	-0.9179418
-0.7071894	-0.5520457	-0.7024662
-0.3827992	-0.1940829	-0.3806688
0.0	-0.1940829	0.0019615

$$E_1 = 0.2071972$$

$$E_2 = 0.0065682$$

3.21 - Compressão de dados:

Usando as dezesseis primeiras transformadas Walsh das funções $\exp(-t)$ e $\sin 2\pi t$ construímos a tabela seguinte mostrando o erro no cálculo dos valores das funções.

Chamamos de TW o número de transformadas Walsh que assumem o valor zero.

TW	$\exp(-t)$	$\text{sen } 2\pi t$
0	0.0001624	0.0065682
3	0.0006597	0.0065684
6	0.0032996	0.0065682
9	0.0272652	0.0065684
11	0.0392457	0.0065868

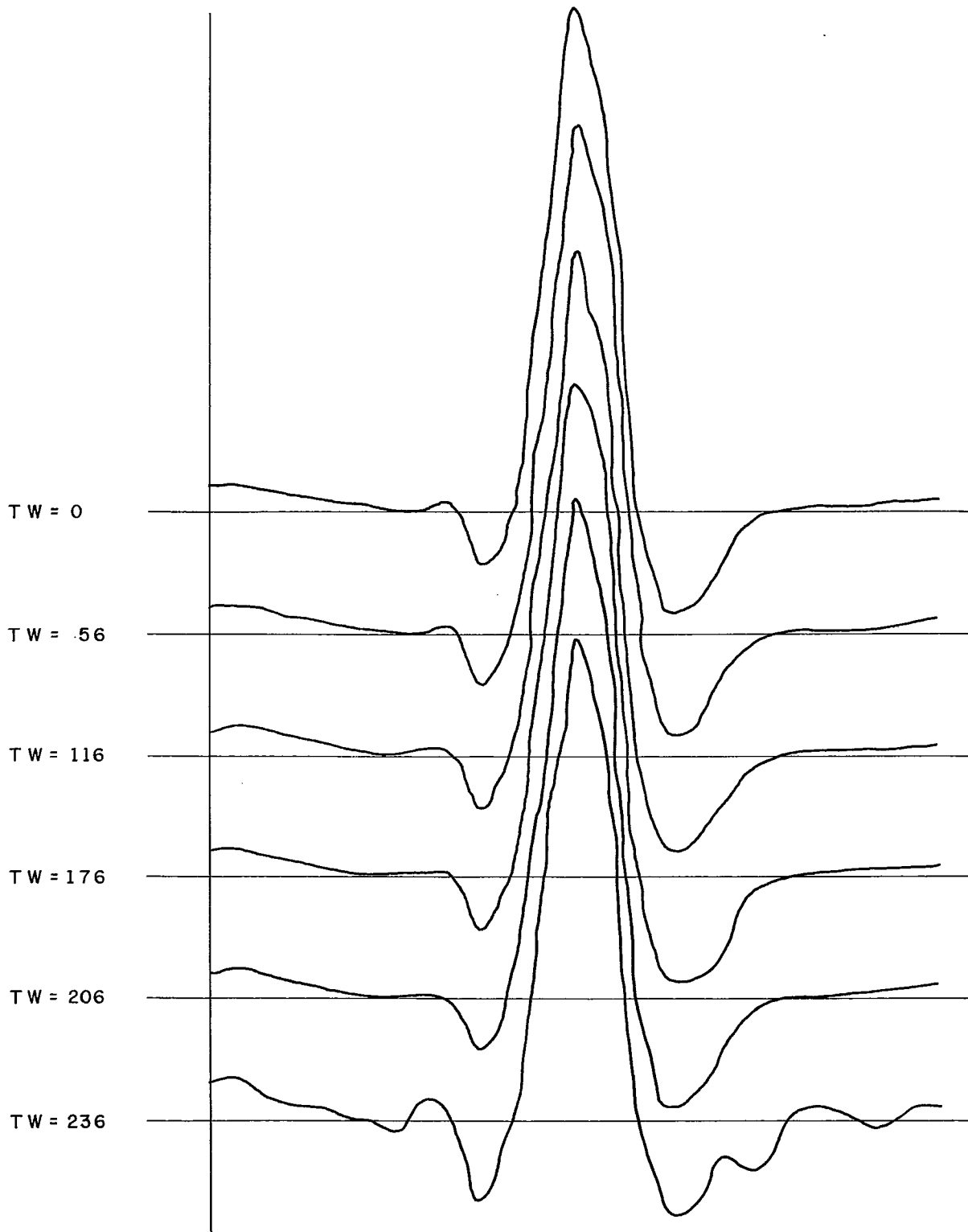
3.22 - Exemplo análogo ao 3.21 obtido para cento e cinquenta valores de um eletrocardiograma e suas duzentos e cinquenta e seis primeiras transformadas Walsh.

Notamos por TW o número de transformadas Walsh que assumem o valor zero.

TW	ERRO
0	0.0011853
26	0.0015207
56	0.0037444
86	0.0070324
116	0.0103901
146	0.0167941
176	0.0261302
206	0.0528582
236	0.1791616

Para dar uma idéia melhor da aproximação dos valores de um eletrocardiograma quando fazemos algumas de suas transformadas Walsh assumirem o valor zero, daremos a seguir o gráfico da função, e gráficos obtidos quando fazemos 56, 116, 176, 206 e 236 transformadas Walsh iguais a zero, respectivamente.

Usamos para o traçado dos gráficos, quinze dos cento e cinquenta valores usados no cálculo.



CONCLUSÕES

As tabelas dadas no capítulo anterior, nos mostram que um número finito de valores de uma função pode nos dar uma boa aproximação da transformada Walsh da função, e que o problema inverso também tem uma solução melhor com "splines" que da maneira usual.

Verificamos, através dos exemplos 3.17 e 3.18 que, ao considerarmos apenas seis valores da função $\exp(-t)$ obtivemos um erro menor que ao considerarmos o mesmo número de valores da função $\sin 2\pi t$. Atribuimos isto ao fato de a primeira função ser suave e segunda oscilante.

Este aspecto do problema precisa, ainda, ser analisado.

Deixamos, também, uma pergunta: este processo de obter a transformada Walsh de uma função é economicamente vantajoso para funções oscilantes?

As observações anteriores também são válidas para o segundo problema.

No exemplo do problema de compressão de dados, vemos que, mesmo que façamos onze das dezesseis transformadas Walsh das funções $\exp(-t)$ e $\sin 2\pi t$ assumirem o valor zero, chegamos a um valor muito próximo do obtido quando conhecemos as dezesseis transformadas Walsh.

Concluimos, então, que não precisamos conhecer muitos coe

ficientes da série Walsh para obtermos uma boa aproximação da função, e que, para a função $\sin 2\pi t$ este resultado é ainda melhor, pois em sua maioria, seus coeficientes Walsh já estão muito próximos de zero, como vemos no exemplo 3.18.

O problema de compressão de dados pode também ser resolvido em termos de série de Fourier. Um campo para ser pesquisado é qual das duas, a série de Fourier ou de Walsh, é a que dá melhores resultados.

REFERÊNCIAS

- [0] Harmuth, Henning F., Transmission of Information by Orthogonal Functions, Springer-Verlag, vol. 2, pp. 1-26, 1970.
- [1] Fowle, F.F., The Transposition of Conductors, Transactions AIEE, vol. 23, pp. 659-687, 1905.
- [2] Walsh, J.L., A Closed Set of Orthogonal Functions, Amer.J. of Mathematics, vol. 45, pp. 5-24, 1923.
- [3] Blachman, Nelson M., Sinusoids Versus Walsh Functions , Proceedings IEEE, pp. 346-354, 1974.
- [4] D. Kershaw, Two Interpolatory Cubic Splines, Journal of the Institute of Mathematical Applications, vol. 2, pp. 329-333, 1973.
- [5] C.K. Yuen, Upper Bounds on Walsh Transforms, IEEE Transactions on Computers, pp. 1273-1280, 1972.
- [6] R.E.A.C.Paley, A Remarkable series of Orthogonal Functions , Proc. London Math. Soc., vol. 2, no 34, pp. 241-279, 1932.

APÊNDICE

1 - Programa para resolução dos problemas 1 e 2 do capítulo III.

Chamamos de F a matriz cujas entradas são os coeficientes Walsh de uma função $f(t)$, de A a matriz cujas entradas A_i , $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, são dadas por

$$A_i = \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} f(t) dt$$

e chamamos de W a matriz Walsh $2^n \times 2^n$. Pela equação 2.56 sabemos que

$$F = W A$$

1.1 - Subroutine AREA e subroutine WALSH.

Sejam t_0, t_1, \dots, t_m pertencentes ao domínio de $f(t)$.

A) Conhecemos $f(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Se fizermos $NI = 0$ a "subroutine área" calcula a matriz A e a "subroutine Walsh" calcula a matriz F .

B) Conhecemos a matriz F .

Se fizermos $NI = 1$ a "subroutine Walsh" calcula a matriz A e a "subroutine área" calcula $f(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

1.2 - Subroutine MIN.

Esta "subroutine" faz os menores coeficientes Walsh da função iguais a zero.

IL determina o número de coeficientes Walsh que queremos que assumam o valor zero.

```

SUBROUTINE AREA (Y,M,N,X,M1)
C NI=0 CALCULAR AREA
C NI=1 CALCULAR VALIRES
DIMENSION Y(M),X(N)
DIMENSION AU(300),B(300),A(300)
N1=N-1
N2=N-2
M1=M-1
M2=M-2
IF(NI-1)80,81,81
80 G=1./N
H=1./M1
85 H3=H**3
H2=H**2
B(1)=(2*(Y(2)-Y(1))+(Y(3)-Y(1))/2.)/H
B(M)=(2*(Y(M)-Y(M1))+(Y(M)-Y(M2))/2.)/H
DO 3 I=2,M1
3 B(I)=(3*(Y(I+1)-Y(I-1)))/H
B(2)=B(2)-B(1)
AA=2.
DO 2 J=2,M1
AU(J)=1./AA
B(J)=B(J)/AA
B(J+1)=B(J+1)-B(J)
2 AA=4.-AU(J)
B(M)=B(M)-B(M1)
AA=1.-2*AU(M1)
A(M)=B(M)/AA
DO 4 J=1,M2
JJ=M-J
4 A(JJ)=B(JJ)-AU(JJ)*A(JJ+1)
A(1)=B(1)-2*A(2)
DO 20 I=1,M1
20 AU(I)=(A(I+1)+A(I))*H-2*(Y(I+1)-Y(I))/H3
DO 5 I=1,M1
5 B(I)=(3*(Y(I+1)-Y(I))-H*(2*A(I)+A(I+1)))/H2
IF(NI-1)83,84,84
83 J=1
DO 6 I=1,M1
10 GJ=J*G
HI=I*H
IF(GJ-HI)7,7,8
7 GJ=GJ-HI+H
X(J)=AU(I)*(GJ**4-(GJ-G)**4)/4+B(I)*(GJ**3-(GJ-G)**3)/3+A(I)*(GJ**
*2-(GJ-G)**2)/2+Y(I)*G
J=J+1
GO TO 10
8 G1=HI-(J-1)*G
G2=G-G1
HI=H
S1=AU(I)*(HI**4-(HI-G1)**4)/4+B(I)*(HI**3-(HI-G1)**3)/3+A(I)*(HI**
*2-(HI-G1)**2)/2+Y(I)*G1
K=I+1
S2=AU(K)*(G2**4)/4+B(K)*(G2**3)/3+A(K)*(G2**2)/2+Y(K)*G2
X(J)=S1+S2
J=J+1
6 CONTINUE
GO TO 82
81 G=1./N1
H=1./M
GO TO 85
84 X(1)=AU(1)*(-H/2)**3+B(1)*(-H/2)**2+A(1)*(-H/2)+Y(1)
X(N)=AU(M1)*(1.5*H)**3+B(M1)*(1.5*H)**2+A(M1)*1.5*H+Y(M1)
DO 71 I=2,N1
GI=G*(I-1)-H/2
ILM=GI/H
J1=ILM+1
AGH=GI-ILM*H
71 X(I)=AU(J1)*AGH**3+B(J1)*AGH**2+A(J1)*AGH+Y(J1)
82 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE WALSH (A,N,M,B,NJ)
C NI=0, TRANSFORMADA WALSH
C NI=1, INVERSA DA TRANSFORMADA WALSH
DIMENSION A(N),B(N)
N2=N/2
DO 10 I=1,N2
B(2*I-1)=A(2*I-1)+A(2*I)
10 B(2*I)=A(2*I-1)-A(2*I)
DO 20 J=2,M
NN2=2*(J-1)
NN=NN2*2
MM=N/NN
DO 25 IJ=1,MM
DO 25 I=1,NN2
IL=2*I+NN*(IJ-1)
ILL=I+NN*(IJ-1)
A(IL-1)=B(ILL)
25 A(IL)=B(ILL+NN2)
DO 20 I=1,N2
B(2*I-1)=A(2*I-1)+A(2*I)
20 B(2*I)=A(2*I-1)-A(2*I)
IF(NI-1)40,30,40
30 DO 50 I=1,N
50 B(I)=B(I)/N
40 RETURN
END

```

S

```

SUBROUTINE MIN (F,N,IL)
DIMENSION F(N)
DO 9 K=1,IL
FA=ABS(F(I))
J=1
13 IF(FA)12,12,22
12 J=2
FA=ABS(F(J))
GO TO 13
22 DO 10 I=2,N
IF(FA-ABS(F(I)))10,10,20
20 IF(ABS(F(I)))10,10,21
21 FA=ABS(F(I))
J=I
10 CONTINUE
F(J)=0
9 CONTINUE
RETURN
END

```

SI

```

DIMENSION Y(160),AR(256),F(256),X(300),Y1(160),Y2(160),A(256)
M=4
NA=16
N=2**M
NA1=NA+1
T=1
Y1(1)=1.
DO 2 I=2,NA1
  TI=(-(I+1)+2.)/NA
  Y1(I)=EXP(TI)
199  FORMAT(//,3X,0Y10,6(F13.7))
  NI=0
  CALL AREA (Y1,NA1,N,A,NI)
261  FORMAT(//,3X,0A0,8(F13.7))
  CALL WALSH (A,N,M,F,NI)
  IL=6
  CALL MIN (F,N,IL)
101  FORMAT(//,3X,0F0,8(F13.7))
362  FORMAT(//,3X,0F0,8(F13.7))
  NI=1
  CALL WALSH (F,N,M,AR,NI)
259  FORMAT(//,3X,0AR0,8(F13.7))
  DO 20 I=1,N
  X(I)=AR(I)*N
  CALL AREA (X,N,NA1,Y,NT)
200  FORMAT(//,3X,0Y0,6(F13.7))
  EN=0.
  EM=0.
  H=1./NA
  G=1./N
  Y2(1)=X(1)
  Y2(NA1)=X(N)
  DO 90 I=2,NA
  HI=H*(I-1)
  ILM=HI/G
  J1=ILM+1
  90  Y2(I)=X(J1)
  FS=0.
  ET=0.
  DO 91 I=1,NA1
  FS=FS+(Y1(I)-Y2(I))**2
  ET = ET + Y1(I)**2
  F2=SQRT(FS/ET)
  WRITE(6,320)(E2)
  320  FORMAT(///,3X,0E20,(F13.7))
  DO 92 I=1,NA1
  EN=EN+(Y1(I)-Y(I))**2
  EM = EM + Y1(I)**2
  E1=SQRT(EN/EM)
  WRITE(6,319)(E1)
  319  FORMAT(///,3X,0E10,(F13.7))
  CALL EXIT
  END

```