"UMA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO COMPETITIVO EM UM SISTEMA ECONÔMICO DE PURA TROCA"

Geraldo da Silva e Souza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
JULHO DE 1974

Dedico esta tese aos queridos

Walter Fritsch,
Wanda e Alexandre da Silva e Souza

"There are today heaven knows how many schools of political economy... For my part, I recognize only two: the school of those who do not demonstrate, and the school, which I hope to see founded, of those who do demonstrate their conclusions"

(Citação de Walras, extraída da introdução da Referência (3))

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos à COPPE-UFRJ que me acolheu em hora difícil e deu-me a oportunidade da realização deste trabalho de pesquisa.

Particularmente e especialmente, meus agradecimentos aos professores Nelson Maculan Filho e José Antonio Ortega pelo particular interesse e prestimosa colaboração na apresentação desta tese.

RESUMO

Esta tese trata do significado do comportamento competitivo em Economia. A fim de acentuar os principais aspectos deste importante conceito introduz-se a generalização dada por Debreu e Scarf para o problema, originalmente apresentado por Edgeworth em seu Mathematical Psychics, que surge quando agentes econômicos, possuindo quantidades positivas de determinados bens, comparecem ao mercado e procuram negociar suas dotações iniciais. O resultado da troca é uma realocação destes recursos inicialmente possuídos. Concentro minha discussão sobre o problema da existência de alocações competitivas, i.e, aquelas que possuem um sistema de preços associado satisfazendo condições de comportamento ótimo.

ABSTRACT

This work is concerned with the meaning of competitive behaviour in Economics. In order to underline the main features of this important concept I introduce the generalization given by Debreu and Scarf. The problem, originally presented by Edgeworth in his Mathematical Psychics, arises when many traders, owning positive amounts of some goods, meet in the market and try to negociate their initial endowments. The exchanges result in a re-allocation of those resources initially owned. I concentrate my discussion on the problem of the existence of competitive re-allocations; i.e, those that have a price system associated with them satisfying some conditions of optimum behaviour.

INDICE

INTRODUÇÃO

O estudo das trocas que surgem entre indivíduos que afluem ao mercado com certas quantidades de bens foi primeiramente apresentado por Edgeworth em seu Mathematical Psychics (1881). Este estudo apresenta a primeira formulação precisa do comportamento competitivo. Apesar de sua importância, somente na década de 50 foi atribuído real valor ao trabalho de Edgeworth, quando se determinou conexões entre as economias do tipo por ele estudado com jogos de n-pessoas.

Edgeworth considerou a princípio uma economia composta de 2 indivíduos e 2 bens, cada um dos indivíduos possuindo determinadas quantidades iniciais destes bens. Estes agentes comparecem ao mercado para negociar estas quantidades possuídas. O resultado do comércio é uma re-distribuição da quantidade total destes recursos iniciais. Numa análise de situações a priori, Edgeworth considerou o conjunto dos resultados que poderiam advir das negociações no mercado e concentrou sua atenção naqueles resultados que eram bons para ambos os indivíduos, no sentido de que a situação dos agentes não pode ser melhorada simultaneamente por meio de comércio adicional (estes resultados são denominados Pareto ótimos) e que eram preferíveis às dotações iniciais. A este conjunto Edgeworth deu o nome de Curva de Contrato. Considerando os resultados aos quais era possível associar preços satisfazendo certas condições (tais condições serão especificadas mais tarde), i.e, resultados competitivos, Edgeworth observou que estas particulares distribuições dos recursos eram elementos da Curva de Contrato. Com o intuito de isolá-las, Edgeworth introduziu uma economia expandida com 2n indivíduos. Demonstrou então que à medida que n torna- se maior e maior, mais e mais distribuições dos recursos são elimina - das da Curva de Contrato obtendo-se como "limite" deste conjunto os resultados competitivos. O artifício utilizado nesta demonstração foi o que Edgeworth denominou recontrato. Um grupo qualquer de indivíduos recontrata um resultado do comércio (a priori) para o conjunto total de agentes se lhes é possível redistribuir entre si suas dotações de tal modo que pelo menos um dos participantes do grupo está mais satisfeito com o novo resultado do que com o anterior e nenhum outro o deseje menos.

A Teoria dos Jogos chamou núcleo a Curva de Contrato de Edgeworth. Com este novo nome apareceram as generalizações. A primeira delas foi apresentada por Gerard Debreu *(1960) que estu - dou o núcleo de uma economia com m tipos de agentes e ℓ bens . Recentemente outras surgiram para economias com um número infinito não enumerável de agentes e o ponto de vista da Teoria da Medida foi introduzido no estudo do núcleo.

O objetivo destas notas é apresentar um modelo, derivado do trabalho de Debreu*, que não somente permita a obtenção dos resultados de Edgeworth como também a demonstração da existência de uma alocação competitiva. O fato crucial para a validade deste resultado é a continuidade da demanda, que permite, considerando-se o simplexo de preços, a aplicação do Teorema de Brower.

O trabalho é dividido em 4 partes. Na primeira apresenta-se alguns resultados matemáticos. Não se pretende nada além de fixar a notação com esta parte. A segunda trata de um breve resumo dos conceitos econômicos em torno dos quais gira a análise e, finalmente, as partes III e IV estudam o núcleo de economias não produtivas e produtivas, respectivamente.

* Gerard Debreu - H. Scarf

CAPÍTULO I

Apresenta-se a seguir um resumo da maioria dos resultados e conceitos matemáticos que serão utilizados. A notação empregada no resto do trabalho é a que é aqui apresentada e conseqüentemente este Capítulo I serve como um guia de referências da linguagem utilizada.

1: Conjuntos

Se S é um conjunto e x um elemento (ponto) de S, escrevemos $x \in S$. Se x não é elemento de S, escreve-se $x \notin S$. Como exemplos de conjuntos apresentamos:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais, i.e, o conjunto formado pelos números 1,2,3,...

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais.

Em geral, dados objetos $a,b,c,\ldots$ indica-se por $\{a,b,c,\ldots\}$ o conjunto que é formado por esses objetos. Com esta convenção, por exemplo, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

Se S é um conjunto, seja P uma propriedade relativa a um elemento genérico de S. Esta propriedade P define um novo conjunto denominado parte ou subconjunto de S. Este subconjunto consiste dos elementos de S que gozam da propriedade P. Formalmente: P define o subconjunto $\{x \in S;\ x$ tem a propriedade $P\}$. Quando nenhum elemento de S tem a propriedade P

diz-se que P define o subconjunto vazio, denotado por $\emptyset$.

Dados dois conjuntos S e Y , diremos que S está contido em Y e escreveremos $S \subset Y$, quando todo elemento de S é tembém um elemento de Y . Diremos que $S=Y$ quando $S \subset Y$ e $Y \subset S$.

Se S é um subconjunto de Y , os elementos de Y que não pertencem a S determinam um subconjunto de Y denominado complementar de S em Y e representado por $\complement_Y S$.

Se S e Y são conjuntos, a união, $S \cup Y$, de S e Y é o conjunto dos elementos que pertencem a S ou a Y (ou a ambos). A interseção, $S \cap Y$, de S e Y , é o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a S e a Y .

Se S é um conjunto , $\mathcal{P}(S)$ representa o conjunto de todos os subconjuntos de S .

2: Funções

Sejam S e Y dois conjuntos não vazios. Se a cada elemento x de S está associado um único elemento y de Y , diz-se que está definida a função f de S em Y . Usaremos também o vocábulo aplicação designando uma função f . Representaremos uma função f de S em Y através da notação $\begin{array}{l} f:S \to Y \\ x \to f(x) \end{array}$, onde para cada x em S , $f(x)$ representa o elemento de Y associado a x via f . Os conjuntos S e Y são chamados, respectivamente, domínio e contradomínio de f .

A seguinte definição é uma reprodução da referência (1) .

"Seja L um conjunto não vazio cujos elementos chamaremos índices e representaremos por λ . Dado um conjunto não vazio X , uma família de elementos de X com índices em L é uma aplicação $x : L \rightarrow X$.

Dada uma família x , indicaremos o valor de x no elemento λ de L por x_λ , ao invés da notação usual $x(\lambda)$. A família x é indicada também pelo símbolo $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$."

Se $L = \mathbb{N}$ a família denomina-se sequência de elementos de X .

Se S é um conjunto e $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de elementos de $\mathbb{P}(S)$, a união desta família, representada por $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é o conjunto dos elementos de S que pertencem a pelo menos um dos A_λ . A interseção da família $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$, é o conjunto dos elementos de S que pertencem a todos os A_λ . Formalmente:

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in S \; ; \text{ existe } \lambda \in L \text{ com } x \in A_\lambda\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in S \; ; \; x \in A_\lambda \text{ para todo } \lambda \in L\}$$

Se $L = \{1,\ldots,m\}$ escreve-se também $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ representando a união e a interseção, respectivamente.

Se S é um conjunto não vazio e $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$, $L = \{1,\ldots,m\}$ é uma família de elementos não vazios de $\mathbb{P}(S)$, define-se o produto cartesiano $S_1 x \ldots x S_m$ da família $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ como o conjunto de todas as aplicações $f : \{1,\ldots,m\} \rightarrow \bigcup_{\lambda \in L} S_\lambda$ tais que $f(\lambda) \in S_\lambda$ para todo $\lambda=1,\ldots,m$. Os elementos de $S_1 x \ldots x S_m$ são representados pelas m-uplas $(s_1,\ldots,s_m)$ onde $s_\lambda \in S_\lambda$ para todo $\lambda=1\ldots m$. Os s_λ são denominados componentes ou coordenadas da m-upla.

Se para todo $\lambda=1\ldots m$, $S_\lambda=B$, representaremos o produto $S_1 x \ldots x S_m$ por B^m . Como exemplo apresentamos:

$\mathbb{R}^m = \{(x_1,\ldots,x_m); x_i$ é um número real$\}$, o espaço euclidiano a m dimensões .

3: <u>Pré-ordens</u>

Seja S um conjunto não vazio. Uma relação binária R em S é um subconjunto do produto SxS . Se o par (x,y) é um elemento de R , escreve-se xRy .

Seja R uma relação binária em S . Diremos que R é :

i) reflexiva: se para todo $x \in S$ xRx

ii) simétrica: se a condição xRy acarreta yRx

iii) anti-simétrica: se as condições xRy e yRx acarretam $x=y$

iv) transitiva: se as condições xRy e yRz acarretam xRz

v) completa: se para todo par x,y de elementos de S, xRy, yRx, ou ambas as relações se verificam.

Uma pré-ordem parcial em S é uma relação binária R em S reflexiva e transitiva. Uma ordem parcial em S é uma pré-ordem parcial antisimétrica. O símbolo $\precsim$ será usado(em lugar de R) para representar uma pré-ordem parcial. Uma pré-ordem (respectivamente ,ordem) é uma pré-ordem parcial completa (respectivamente, ordem parcial completa).

Seja $\precsim$ pré-ordem parcial em S. Se x,y são elementos de S tais que $x \precsim y$ e $y \precsim x$ escreveremos $x \sim y$. Se $x \precsim y$ e não $y \precsim x$, escreveremos $x \prec y$.

Dada $\precsim$ pré-ordem parcial em S, se y é um elemento de S tal que para todo x em S, $x \precsim y$ (respectiva - mente $y \precsim x$) diz-se que y é um maior elemento (respectivamente, menor elemento) de S.

A notação $\leq$ será usada para representar a ordem usual de $\mathbb{R}$.

Se $a,b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, define-se os conjuntos:

$$[a:b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \leq b\}$$

$$(a:b) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a < x < b\}$$

4: O $\mathbb{R}^n$

Se $x=(x_1,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,\ldots,y_n)$ são elementos de $\mathbb{R}^n$ (vetores), sua soma $x+y$ é por definição o vetor $(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$. O elemento neutro desta operação é o vetor cujas componentes são todas nulas que será representado por 0 . O simétrico de x, $-x$, é o vetor $(-x_1,\ldots,-x_n)$. Se λ é um número real λx é o vetor $(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$. A diferença entre x e Y , $x-y$, é o vetor $x+(-y)$.

Se $x^1,\ldots,x^m$ são elementos de $\mathbb{R}^n$, sua soma $x^1+\ldots+x^m$ (definida indutivamente) será representada por $\sum\limits_{j=1}^{m} x^j$.

Escreveremos $x \leq y$ com o sentido de que para todo $i=1 \ldots n$ $x_i \leq y_i$. Escreveremos $x \leqq y$ com o sentido de que para todo $i=1 \ldots n$ $x_i \leq y_i$ e x distinto de y . Finalmente $x \ll y$ significa $x_i < y_i$ para todo $i=1 \ldots n$.

Se $a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n$ são números reais com $a_i \leq b_i$ para todo $i=1 \ldots n$, o produto cartesiano $[a_1:b_1] \times \ldots \times [a_n:b_n] \subset \mathbb{R}^n$ denomina-se hiperparalelepípedo de $\mathbb{R}^n$.

Diz-se que um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é limitado se está contido em algum hiperparalelepípedo.

Consideraremos $\mathbb{R}^n$ provido da norma euclidiana $\|\ \|$, i.e, da aplicação $\|\ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \rightarrow \|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Uma sequência $(x^{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ é convergente a $x^o \in \mathbb{R}^n$ se para cada número real $\varepsilon > 0$ existir $\lambda_o \in \mathbb{N}$ com a propriedade: $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq \lambda_o$, então $||x - x^o|| < \varepsilon$. Escreveremos $x^o = \lim\limits_{\lambda} x^{\lambda}$.

Dada a sequência $(x^{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^n$, seja $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma aplicação com a propriedade:

$$k \longrightarrow \phi(k) = \lambda_k$$

$\phi(x) = \phi(y)$ implica em $x=y$ (i.e, ϕ é injetiva). A sequência $(x^{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ denomina-se subsequência de $(x^{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$.

Diremos que uma sequência $(x^{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ é limitada quando seu conjunto de valores $\{x^{\lambda} ; \lambda \in \mathbb{N}\}$ o fôr. Para sequências limitadas vale o seguinte

Teorema: Se $(x^{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ é limitada, admite subsequência convergente.

Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diremos que A é fechado se para cada sequência $(x^{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de elementos de A, convergente, $\lim\limits_{\lambda} x^{\lambda}$ é um elemento de A.

Um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é compacto se é fechado e limitado. Para compactos vale o seguinte

Teorema: Se $(B_{\lambda})_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos compactos não vazios de $\mathbb{R}^n$ com a propriedade que para toda parte $\emptyset \neq I \subset L$, finita*, $\bigcap\limits_{\gamma \in I} B_{\gamma} \neq \emptyset$, então $\bigcap\limits_{\lambda \in L} B_{\lambda} \neq \emptyset$.

---

* Diz-se que I é finito com j elementos se é possível determinar $\phi : I \to \{1, \dots, j\}$ tal que para todo $k \in \{1, \dots, j\}$ existe um único $x \in I$ com $\phi(x) = k$.

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto f(x)$$

uma aplicação. Diremos que f é contínua em $x^0 \in A$, se para toda sequência $(x^\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de elementos de A convergindo a x^0 a sequência $(f(x^\lambda))_{\lambda \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x^0)$. Diremos que f é contínua em A se f é contínua em todo elemento de A.

Se x e y são elementos de $\mathbb{R}^n$ o segmento de reta com extremidades x e y é o conjunto $[x:y] = \{z \in \mathbb{R}^n ;\ z=ty+(1-t)x$ com $t \in [0:1]\}$.

Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é dito convexo se toda vez que $x,y \in S$, $[x:y] \subset S$. É imediato que interseções quaisquer de conjuntos convexos são convexas.

A envoltória convexa de $S \subset \mathbb{R}^n$ é o menor subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, no qual S está contido, i.e, a envoltória convexa de S é a interseção de todos os subconjuntos convexos que contém S. A envoltória convexa de S coincide com o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado tomando-se todas as combinações convexas finitas de elementos de S, i.e, o conjunto de todos os elementos $z = \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_p x^p$ onde $x^i \in S$ para todo $i=1\ldots p$, $\alpha_i \geq 0$ $i=1\ldots p$ e $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$.

Seja c um número real e p um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. O hiperplano com normal p e constante c é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n ;\ p.x = c\}$ onde $p.x = \sum_{i=1}^{n} p_i.x_i$ se $p=(p_1,\ldots,p_n)$ e

$x = (x_1, \ldots, x_n)$. Diz-se que o hiperplano com normal p e constante c é limite para um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se S está contido em um dos semi-espaços

$$\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; p.x \leq c\} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n ; \; p.x \geq c\}$$

Os dois teoremas que seguem são cruciais nestas notas.

Teorema: Seja S um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ e z um ponto de $\mathbb{R}^n$. Existe um hiperplano com normal p e constante c , tal que $p.z = c$, limite para S , quando e apenas quando z não é ponto interior de S , i.e, quando não existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; ||x-z|| < \varepsilon\} \subset S$.

Teorema: Ponto Fixo de Brower

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não vazio, compacto e convexo. Seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longrightarrow f(x)$ uma função contínua tal que $f(S) = \{f(x); x \in S\} \subset S$. Então existe $p^0 \in S$ tal que $f(p^0) = p^0$.

CAPÍTULO II

Procura-se definir aqui os conceitos econômicos básicos em torno dos quais nossa análise será efetuada. Preços, bens e agentes são estes conceitos. Os bens são introduzidos por meio de exemplos: pão, café, caminhão, trabalho... etc são considerados bens econômicos, cada um dos quais medidos de forma conveniente. Assumiremos que a quantidade de cada bem é um número real não negativo (esta hipótese nada realística de perfeita divisibilidade, como acentua Debreu no seu Value Theory, é imposta pelo atual estágio de desenvolvimento da Economia). Os agentes da atividade econômica são os indivíduos, grupos de indivíduos ou organismos que constituem as unidades elementares dessa atividade. A cada agente corresponde um certo conjunto de decisões disponíveis a ele. Faremos distinções entre dois tipos de agentes: produtores e consumidores. Os produtores são os que transformam certos bens em outros bens e os consumidores são os que usam determinados bens para satisfazer suas próprias necessidades. A seguir dá-se uma idéia do papel de cada um na atividade econômica:

<u>Produtores</u>: O papel do produtor é escolher um plano completo de ação (tal plano é caracterizado por uma listagem completa de seus inputs e outputs). O produtor é caracterizado pelas limitações de sua escolha e pelo seu critério de escolha. Suas intenções de produção (suas possíveis escolhas) estão restritas a pertencerem a um certo conjunto representando seu conhecimento tecnológico.

<u>Consumidores</u> : Tal como os produtores, o consumidor escolhe um plano completo de ação e também é caracterizado pelas limitações sobre suas escolhas e pelo seu critério de escolha. Suas limitações são de natureza orçamentária e fisiológica e seu critério de escolha é caracterizado por suas preferências num certo conjunto representando suas alternativas de consumo.

A atividade econômica (admito esta expressão como intuitiva) estudada neste trabalho é a atividade de um dado instante, denominado o instante presente. Supõe-se também que a atividade econômica é levada a cabo sem a ajuda de um bem servindo como meio de troca.

Entende-se por preço de um bem um número real não negativo associado a este bem. O papel dos preços é o que se segue: Quando um agente econômico "adquire" uma certa quantidade desse bem, o produto dessa quantidade pelo preço é um número real não negativo escrito no lado dos débitos de sua contabilidade. Este número representa a quantidade "paga" pelo agente. Se o agente "fornece" essa quantidade,o produto acima referido escreve-se no lado dos créditos de sua contabilidade e representa a quantidade recebida pelo agente.

Em nossa análise não se supõe a existência a priori de preços.

Se a atividade econômica é composta de ℓ bens, um sistema de preços associado a esse conjunto de bens é um vetor com componentes não negativas de $\mathbb{R}^{\ell}$. A componente i é o preço do bem i .

CAPÍTULO III

1: Economias

No que segue, lidaremos com uma economia consistindo de m consumidores e ℓ bens. Cada consumidor possui inicialmente certas quantidades de cada bem, suas dotações, representadas por pontos de $\mathbb{R}^\ell$. As decisões de consumo desses indivíduos são representadas por elementos de Ω, o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^\ell$ com componentes não negativas. O critério de escolha de cada consumidor está determinado por uma pré-ordem em Ω denominada preferência desse consumidor em Ω. Formalmente:

<u>Definição 1</u> : Uma economia E com m consumidores e ℓ bens é caracterizada por um par $((\Omega, \precsim_i)_{i \in I}, (w^i)_{i \in I})$ onde $I = \{1, \ldots, m\}$; $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \,;\, x_j \geq 0$ para todo $j = 1 \ldots \ell\}$; $(w^i)_{i \in I}$ é uma família de elementos de Ω com componentes estritamente positivas e para cada $i \in I$, $\precsim_i$ é uma pré-ordem * satisfazendo:

i) Se $x, y \in \Omega$ com $y \leq x$, então $y \precsim_i x$ - não saciedade

ii) Se x, y são dois pontos distintos de Ω, satisfazendo $x \precsim_i y$, então para todo número real $\alpha \in (0:1)$ $x \prec_i \alpha x + (1-\alpha)y$ - convexidade

iii) Para todo $x \in \Omega$ os conjuntos $\{y \in \Omega ; x \precsim_i y\}$, $\{y \in \Omega ; y \precsim_i x\}$, são fechados - continuidade

---

* Supõe-se estas pré-ordens distintas .

Diremos que y é preferível a x, segundo o consumidor i, se $x \underset{i}{\prec} y$. Diremos que y é indiferente a x, segundo o consumidor i, se $x \underset{i}{\sim} y$.

A condição ii) admite uma generalização importante:

<u>Lema 1</u> : Seja E uma economia, $i \in I$; para o natural $s \geq 2$ sejam $x^1, \ldots, x^s$ elementos de Ω não todos iguais tais que $x^s \underset{i}{\precsim} x^q$ para $q = 1 \ldots s$. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ são números reais positivos com $\sum_{q=1}^{s} \alpha_q = 1$, então $x^s \underset{i}{\prec} \sum_{q=1}^{s} \alpha_q x^q$.

<u>Demonstração</u>: Para $s=2$ o Lema é um dos axiomas da definição de E. Demonstraremos por indução sobre s. Para isto suponha o lema verdadeiro para $s-1$, $s>2$. Temos:

$$\sum_{q=1}^{s} \alpha_q x^q = \alpha_s x^s + \left(\sum_{q=1}^{s-1} \alpha_q\right) x' \text{ , onde } x' = \frac{1}{\sum_{q=1}^{s-1} \alpha_q} \cdot \sum_{q=1}^{s-1} \alpha_q x^q$$

Se $x^1 = \ldots = x^{s-1}$, segue que $x^s \underset{i}{\precsim} x'$. Se $x^1, \ldots, x^{s-1}$ não são todos iguais, podemos supor, sem perda de generalidade, $x^{s-1} \underset{i}{\precsim} x^q$ para todo $q=1 \ldots s-1$ ($\underset{i}{\precsim}$ é completa). A hipótese de indução assegura que $x^{s-1} \underset{i}{\prec} x'$. Segue então que $x^s \underset{i}{\prec} x'$. Em qualquer caso o lema aplica-se $(s=2)$ ao par (x', x^s). Portanto

$$x^s \underset{i}{\prec} \alpha_s x^s + \left(\sum_{q=1}^{s-1} \alpha_q\right) x' = \sum_{q=1}^{s} \alpha_q x^q \quad .$$

2: Alocações

A economia E, como já acentuado, compõe-se de m indivíduos que afluem ao mercado para negociar suas dotações. Uma alocação para E é um resultado possível desse comércio. Formalmente:

Definição 2 : Dada a economia E, uma alocação para E é uma m-upla $(x^1,\ldots,x^m) \in \Omega^m$; x^i denota o vetor de bens (resultado possível do comércio) associado ao i-ésimo consumidor.

Definição 3 : Uma alocação $(x^1,\ldots,x^m)$ para a economia E é dita provável, se o vetor de bens $\sum_{i=1}^{m} x_i$ associado ao conjunto de todos os agentes iguala o vetor disponibilidade total (oferta) $\sum_{i=1}^{m} w^i$.

3: Bloqueamento por Coleção de Agentes

Dentro do espírito da demonstração de Edgeworth introduz-se agora o equivalente atual da noção de recontrato. Dada uma alocação qualquer, uma coleção de agentes, representada por um subconjunto de I, bloqueia esta alocação se é possível para seus integrantes redistribuir totalmente suas dotações de modo que pelo menos um deles esteja mais satisfeito com a nova distribuição do que com a antiga e nenhum outro a deseje menos. Formalmente:

Definição 4 : Dada a economia E, a alocação $(x^1,\ldots,x^m)$ e a co leção J de consumidores ($\emptyset \neq J \subset I$) diremos que J bloqueia $(x^1,\ldots,x^m)$ se para cada $j \in J$ existe $x^{-j} \in \Omega$ de tal modo que

i) $\sum_{j \in J} x^{-j} = \sum_{j \in J} w^j$

ii) $x^j \precsim_j x^{-j}$ para todo $j \in J$ e existe $j_0 \in J$ tal que

$x^{j_0} \prec_{j_0} x^{-j_0}$.

Definimos então o núcleo de E como o conjunto das alocações admissíveis, i.e, o conjunto das alocações prováveis que não podem ser bloqueadas por nenhuma coleção de agentes. Considerando-se a coleção dos m indivíduos segue que as alocações do núcleo são Pareto ótimas e por consideração de coleções formadas por um único indivíduo segue que são preferíveis as dotações iniciais.

4: Alocações Competitivas

Não é de nenhum modo evidente que existe uma alocação no núcleo de E . Com o intuito de demonstrar este fato e de isolar o tipo realmente importante de alocação do núcleo, introduz-se a noção de comportamento competitivo. Diremos que os agentes de E se comportam competitivamente se sua "demanda total" iguala sua "oferta total" e se é possível determinar um sistema de preços p de modo tal que as escolhas de consumo do i-ésimo consumidor são limitadas pelo valor de sua dotação inicial. Formalmente:

Definição 5: A alocação $(x^1,\dots,x^m)$ é competitiva para a economia E se :

i) $(x^1,\dots,x^m)$ é provável.

ii) Existe $p \geq 0$ em Ω tal que para todo $i \in I$, x^i é o maior elemento, segundo $\precsim_i$, do conjunto $\{x \in \Omega; p\cdot x \leq p\cdot w^i\}$

Demonstraremos agora a existência de uma alocação competitiva. Para isto seja $A = \{(x^1,\dots,x^m) \in \Omega^m; \sum_{i=1}^{m} x^i \leq \sum_{i=1}^{m} w^i\}$, i.e, A é o conjunto das alocações de E cujo vetor total (demanda) $\sum_{i=1}^{m} x^i$ não excede a oferta da economia. Para cada $i \in I$ seja $\bar{\Omega}_i$ o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ para os quais existem $m-1$ vetores $x^1,\dots,x^{i-1}$, x^{i+1}, ..., x^m em Ω tais que $(x^1,\dots,x^{i-1}, x, x^{i+1},\dots, x^m) \in A$.

A idéia importante por trás da construção dos $\bar{\Omega}_i$ é a substituição de Ω por novos conjuntos de decisões de consumo, agora limitados. Estes novos conjuntos permitirão definir a demanda dos consumidores para todo $p \in \Omega$; fato de vital importância na demonstração da existência de preços competitivos.

Proposição 1: Para cada $i \in I$, $\bar{\Omega}_i$ é não vazio, limitado e convexo.

Demonstração: Para cada $i \in I$ o vetor nulo e w^i são elementos de $\bar{\Omega}_i$ o que mostra que $\bar{\Omega}_i$ é não vazio.

Se $x \in \bar{\Omega}_i$ existem $x^1,\dots,x^{i-1}$, x^{i+1}, ..., x^m tais que $(x^1,\dots,$

$x^{i-1}, x, x^{i+1}, \dots, x^m) \in A$. Como $x \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x^j + x \leq \sum_{j=1}^{m} w^j$ segue que $\bar{\Omega}_i$ é limitado. Se y é outro elemento de $\bar{\Omega}_i$ sejam $y^1, \dots, y^{i-1}, y^{i+1}, \dots, y^m$ seus correspondentes em Ω tais que $(y^1, \dots, y^{i-1}, y, y^{i+1}, \dots, y^m) \in A$. Dado $\alpha \in [0:1]$ considere os vetores $\alpha x^1 + (1-\alpha)y^1, \dots, \alpha x^{i-1} + (1-\alpha)y^{i-1}, \alpha x^{i+1} + (1-\alpha)y^{i+1}, \dots$ .., $\alpha x^m + (1-\alpha)y^m$. Tem-se $\alpha (\sum_{j \neq i} x^j + x) + (1-\alpha) (\sum_{j \neq i} y^j + y) \leq$ $\leq \alpha \sum_{j=1}^{m} w^j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{m} w^j = \sum_{j=1}^{m} w^j$. É claro que $\alpha x + (1-\alpha)y \in \bar{\Omega}_i$.

Segue desta proposição que existe $h = (h_1, \dots, h_\ell) \in \Omega$ tal que se $x \in \bar{\Omega}_i$, $x << h$, para todo $i \in I$. Seja então $H = [0:h_1] \times \dots \times [0:h_\ell]$. H é compacto, convexo.

5: A Demanda do Consumidor

A proposição seguinte mostra a existência de pontos ótimos de consumo a partir dos quais a demanda é construída.

Proposição 2 : Para cada $p \in \Omega$ e para cada $i \in I$ existe um único $x^0 \in H$ tal que:

i) x^0 é o maior elemento, segundo $\precsim_i$, do conjunto

$$B_{i,p} = \{x \in H;\ p \cdot x \leq p \cdot w^i\}$$

ii) $p \cdot x^0 = p \cdot w^i$

Demonstração :

Mostraremos primeiramente que se x^0 existe, deve satisfazer $p \cdot x^0 = p \cdot w^i$. Se $p=0$ nada há que demonstrar. Podemos então supor $p \neq 0$. Observemos que nestas condições $x^0 \neq h$. De fato $p \cdot h > p \cdot w^i$ (da construção de H, segue $h >> w^i$) e portanto $h \notin B_{i,p}$. É claro então que $x^0 \leqq h$. Suponha então $p.x^0 < < p \cdot w^i$. Seja $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos em $(0:1)$ convergente a 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n x^0 + (1-\alpha_n)h \geqq \alpha_n x^0 + (1-\alpha_n)x^0 = x^0$. Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $\alpha_n p \cdot x^0 + (1-\alpha_n)p \cdot h < p \cdot w^i$. De fato, seja $\varepsilon > 0$ tal que $p \cdot x^0 + \varepsilon < p \cdot w^i$. A sequência $(\alpha_n p \cdot x^0 + (1-\alpha_n)p \cdot h)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $p \cdot x^0$; portanto existe um natural n_0 tal que para todo natural n maior ou igual que n_0, $\alpha_n p \cdot x^0 + (1-\alpha_n)p \cdot h < p \cdot x^0 + \varepsilon < p \cdot w^i$. Segue da convexidade de H e da não saciedade, que os pontos da forma $\alpha_n x^0 + (1-\alpha_n)h$ com $n \geq n_0$ são pontos de $B_{i,p}$ com $x^0 \not\precsim_i \alpha_n x^0 + (1-\alpha_n)h$, uma contradição.

Para demonstrar a existência observe primeiramente que $B_{i,p}$ é um conjunto compacto convexo (não vazio). Seja então para cada $x \in B_{i,p}$

$I_x = \{y \in B_{i,p} ; x \precsim_i y\} = \{y \in \Omega; x \precsim_i y\} \cap B_{i,p}$. Segue dos axiomas ii) e iii) da Definição 1 que $(I_x)_{x \in B_{i,p}}$ é uma família de compactos convexos não vazios ($x \in I_x$. para todo $x \in B_{i,p}$). A família $(I_x)_{x \in B_{i,p}}$ tem a propriedade da interseção finita (isto segue imediatamente do fato de $\precsim_i$ ser completa). Portanto

$\bigcap_{x \in B_{i,p}} I_x \neq \emptyset$. Seja x^0 um ponto desta interseção. É claro então que para todo $x \in B_{i,p}$, $x \precsim_i x^0$ e portanto x^0 é um maior elemento de $B_{i,p}$. Suponha que exista $y \neq x^0$ em $B_{i,p}$ tal que $x^0 \precsim_i y$. Pelo axioma ii) da Definição 1, $x^0 \prec_i \lambda y + (1-\lambda)x^0$, se $\lambda \in (0:1)$. Como $B_{i,p}$ é convexo teríamos $\lambda y+(1-\lambda)x^0 \in B_{i,p}$ contrariando a definição de x^0 .

Portanto a cada p Ω podemos associar um elemento x^0 (único) maior elemento, segundo a pré-ordem $\precsim_i$, no conjunto $B_{i,p}$. Esta correspondência é denominada demanda do consumidor i . Formalmente:

Definição 6 : Para cada $i \in I$, a aplicação $d^i : \Omega \longrightarrow \Omega$
$p \longrightarrow d^i(p)=x^0$

onde x^0 é o maior elemento de $\{x \in H;\ p \cdot x \leq p \cdot w^i\}$ é denominada demanda do consumidor i .

Teorema 1 : A aplicação d^i é contínua em p^0 , se $p^0 \neq 0$, para cada $i \in I$.

Demonstração: Seja $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos em Ω convergente a p^0 . Mostraremos que $(d^i(p^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $d^i(p^0)$. Seja para $n \in \mathbb{N}$, $x^n = d^i(p^n)$. A sequência $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada ($x^n \in H$ para todo n). Seja então W o conjunto dos pontos limites das subsequências convergentes de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Afirmamos que se $W = \{\bar{x}\}$ então $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$. Caso contrário existiria $\varepsilon > 0$ com a propriedade de que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe

$n \in \mathbb{N}$, $n > n_o$, de modo que $||x^n - \bar{x}|| \geq \varepsilon$. Seria então possível determinar $(x^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $||x^{n_k} - \bar{x}|| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $(x^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é por seu turno sequência limitada e admitiria subsequência convergente para um ponto distinto de $\bar{x}$. Isto contradiz a hipótese $W = \{\bar{x}\}$. Basta então mostrar que $W = \{x^o\}$, onde $x^o = d^i(p^o)$. Seja então $x^* \in W$. Segue que $x^* = \lim\limits_k x^{n_k}$, $(x^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como H é fechado, é claro que $x^* \in H$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, segue da proposição 2 que $p^{n_k} \cdot x^{n_k} = p^{n_k} \cdot w^i$. Por passagem ao limite, obtém-se $p^o \cdot x^* = p^o \cdot w^i$. Como x^o é maior elemento em B_{i,p^o} , segue que $x^* \precsim_i x^o$. Seja agora $(\lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos em $(0:1)$ convergente a zero. A sequência $(p^{n_k} \cdot (1-\lambda_\gamma) x^o)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $(1-\lambda_\gamma) p^o \cdot x^o$, para cada $\gamma \in \mathbb{N}$, fixo. Por outro lado $p^o \cdot w^i > 0$. Seja então $\varepsilon = \dfrac{\lambda_\gamma (p^o \cdot w^i)}{2}$. Existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$,

$$
\begin{aligned}
p^{n_k} \cdot (1-\lambda_\gamma) x^o < p^o \cdot (1-\lambda_\gamma) x^o + \frac{\lambda_\gamma (p^o \cdot w^i)}{2} &= \\
= p^o \cdot x^o - \lambda_\gamma p^o \cdot x^o + \frac{\lambda_\gamma (p^o \cdot w^i)}{2} & \\
= p^o \cdot w^i - \lambda_\gamma p^o \cdot w^i + \frac{\lambda_\gamma (p^o \cdot w^i)}{2} & \\
= p^o \cdot w^i - \varepsilon &
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da convergência de $(p^{n_k} \cdot x^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ a $p^o \cdot w^i$, segue que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $k \geq k_1$, $p^{n_k} \cdot w^i = p^{n_k} \cdot x^{n_k} > p^o \cdot w^i - \varepsilon$

Tome-se então $\bar{k}$ como o maior dos dois números k_o, k_1 . Para $k \in \mathbb{N}$,$k \geq \bar{k}$, tem-se:

$$p^{n_k} \cdot w^i > p^o \cdot w^i - \varepsilon > p^{n_k} \cdot (1-\lambda_\gamma)x^o .$$

Como x^{n_k} é o maior elemento de $B_{i,p^{n_k}}$ segue que para todo γ e todo $k \geq \bar{k}$, $(1-\lambda_\gamma)x^o \precsim_i x^{n_k}$. Como $\{y \in \Omega;\ (1-\lambda_\gamma)x^o \precsim_i y\}$ é fechado, segue que $(1-\lambda_\gamma)x^o \precsim_i x^*$. Portanto $((1-\lambda_\gamma)x^o)_{\gamma \in \mathbb{N}}$ é sequência convergente no fechado $\{x \in \Omega; x \precsim_i x^*\}$ e necessariamente $x^o \precsim_i x^*$. Segue então que x^* também é maior elemento em B_{i,p^o} e portanto $x^* = x^o$.

Estamos praticamente com os instrumentos necessários para a demonstração da existência de uma alocação competitiva. A proposição seguinte dá o toque final relacionando tais alocações com as demandas dos consumidores.

<u>Proposição 3</u> : Seja $p \in \Omega$ tal que $\sum_{i=1}^{m} d^i(p) = \sum_{i=1}^{m} w^i$.

Então:

i) $p \gg 0$

ii) $(d^1(p),\ldots,d^m(p))$ é competitiva

<u>Demonstração</u>:

Mostremos inicialmente que $p \gg 0$. Suponha que p tenha alguma componente nula, digamos a j-ésima, i.e, $p^j = 0$.Para cada $i \in I$ seja $x^i = d^i(p)$. A condição $\sum_{i=1}^{m} x^i = \sum_{i=1}^{m} w^i$ im -

plica em que $x^i \in \bar{\Omega}_i$ para cada i e portanto $x^i << h$ para todo i. Seja $\bar{x}^i$ o vetor obtido de x^i pela substituição de sua j-ésima componente por h^j. Então $x^i \leq \bar{x}^i$ e pela não saciedade $x^i \prec_i \bar{x}^i$. É claro que $\bar{x}^i \in H$ e $p\cdot\bar{x}^i = p\cdot x^i = p\cdot w^i$. Obtém-se deste modo uma contradição.

Mostremos agora que x^i é o maior elemento, segundo $\precsim_i$ do conjunto $\{x \in \Omega;\ p\cdot x \leq p\cdot w^i\}$. Admitamos que exista um elemento w em $C_\Omega H$ satisfazendo a restrição $p\cdot x \leq p\cdot w^i$ e tal que $x^i \prec_i w$. Seja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $(0:1)$ convergente a 1. Existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, acarreta $x^i \prec_i \alpha_n w$. Caso contrário existiria subsequência $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ $\alpha_{n_k} w \precsim_i x^i$ e isto implicaria, por iii) da Definição 1, $w \precsim_i x^i$. Seja então $n \geq n_0$ e faça $x = \alpha_n \cdot w$. É claro que $x \in [0:w]$ (segmento de reta com extremidades $0,w$) e $x \leq w$. Por outro lado $p\cdot x < p\cdot w \leq p\cdot x^i$ Seja então $\lambda \in (0:1)$ tal que $\lambda x << h$. Como $x^i << h$ segue $z = \lambda x + (1-\lambda)x^i << h$. Portanto $z \in H$ e por ii) da Definição 1, $x^i \prec_i z$ e $p\cdot z = \lambda p\cdot x + (1-\lambda)p\cdot x^i < \lambda p\cdot x^i + (1-\lambda)p\cdot x^i = p.x^i = p.w^i$. Mas estes fatos estão em contradição com a definição de x^i.

Seja agora $S = \{p \in \Omega\ ;\ \sum_{j=1}^{\ell} p_j = 1\}$ ∴ S é compacto e convexo. Para $p \in S$ definimos o excesso de demanda $e(p) = \sum_{i=1}^{m} d^i(p) - \sum_{i=1}^{m} w^i$. Evidentemente $e(p)$ é uma função contínua em S com a propriedade de que $p\cdot e(p) = 0$ para todo p em S. Nosso objetivo é demonstrar que para algum $p \in S, e(p) = 0$. Nestas condições, a proposição anterior mostra que $(d^1(p),\ldots, d^m(p))$ é uma alocação competitiva. Antes de apresentar o teorema referente à existência de um p nestas condições faz-se mister a apresentação de uma motivação para a introdução de S em nossa análise. Observemos primeiramente que $d^i(\lambda p) = d^i(p)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $p \in \Omega$. Portanto se $p \geq 0$ é um sistema de preços associado aos nossos bens o vetor λp, com $\lambda = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{\ell} p_i}$, também funciona como tal. É claro que $\lambda p \in S$.

A fim de ter uma idéia do funcionamento dos preços e consequentemente uma visão econômica do argumento acima considere o seguinte procedimento: fixe um dos bens sob análise, como padrão de medida, e determine a proporção em que este bem é trocado por todos os outros. Estas proporções determinam o sistema de preços. O bem fixado é denominado numerário e seu preço é considerado 1. Esta técnica de determinação do sistema de preços tem o inconveniente de que o preço do bem escolhido não pode ser nulo. Para evitar este inconveniente, os economistas consideram um padrão de medida bastante sutil. O numerário é substituído por uma cesta $v = (1,\dots,1)$ formada de uma unidade cada bem. O sistema de preços é então escolhido de tal modo que $p \cdot v = 1$, i.e, $\sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1$. Neste sistema, qualquer preço pode ser nulo (mas não todos).

<u>Teorema 2</u>: Existe uma alocação competitiva para a economia E.

<u>Demonstração</u>: Seja

$$\Gamma : S \longrightarrow S$$

$$p = (p_1,\ldots,p_\ell) \longrightarrow r(p) = \left(\frac{p_1+\max(0,e_1(p))}{1+\sum_{j=1}^{\ell}\max(0,e_j(p))}, \ldots, \frac{p_\ell+\max(0,e_\ell(p))}{1+\sum_{j=1}^{\ell}\max(0,e_j(p))}\right)$$

onde max é a notação para máximo e $e_j(p)$ é a j-ésima componente de $e(p)$. Como r é contínua, segue do Teorema de Brower que existe $p \in S$ tal que $r(p) = p$. Se $p = (p_1,\ldots,p_\ell)$, para $j=1 \ldots \ell$

$$p_j = \frac{p_j+\max(0,e_j(p))}{1+\sum_{j=1}^{\ell}\max(0,e_j(p))} \quad . \quad \text{Faça } \lambda = \sum_{j=1}^{\ell}\max(0,e_j(p)).$$

Segue que $\lambda p_j = \max(0,e_j(p))$. Multiplicando ambos os membros desta equação por $e(p)$ obtemos:

$$\lambda p_j e_j(p) = e_j(p)\max(0,e_j(p)) = \left[\max(0,e_j(p))\right]^2 .$$

Portanto, $\sum_{j=1}^{\ell}\left[\max(0,e_j(p))\right]^2 = 0$ e então $e_j(p) \leq 0$ para todo $j=1 \ldots \ell$. Então $-e_j(p) \geq 0$ para todo j e como $p\cdot(-e(p)) = 0$ segue que $p_j(-e_j(p)) = 0$ para todo j. Portanto, se $p \gg 0$, $e_j(p) = 0$ para todo j. Para mostrar que $p \gg 0$ considere $d^i(p)$. Como $d^i(p) \in \tilde{\Omega}_i$ ($e(p) \leq 0$ implica em $\sum_{i=1}^{m} d^i(p) \leq \sum_{i=1}^{m} w^i$) o argumento utilizado na demonstração da proposição anterior pode ser repetido.

Estamos agora em condições de demonstrar que o núcleo de E é não vazio.

<u>Proposição 4</u> : Se $(x^1,\dots,x^m)$ é competitiva, está no núcleo de E .

<u>Demonstração</u>: Como x^i é o maior elemento do conjunto $\{x \in \Omega,\ p\cdot x \leq p\cdot w^i\}$, com $i \in I$, se $x^i \prec_i x'$, necessariamente $p\cdot w^i < p\cdot x'$. É evidente também que se $x^i \precsim_i x'$ então $p\cdot w^i \leq p\cdot x'$. Suponha então que exista uma coleção S de consumidores bloqueando esta alocação. Seja, para cada $i \in S$, $\bar{x}^i$ o resultado da nova distribuição dos recursos dos elementos de S . Temos:

$$\sum_{i\in S} \bar{x}^i = \sum_{i\in S} w^i$$

$x^i \precsim_i \bar{x}^i$ para todo i S e para algum i_0 S

$x^{i_0} \prec_{i_0} \bar{x}^{i_0}$. Segue então que $p\bar{x}^i \geq p\cdot x^i$ para $i \in S$, $i \neq i_0$ e $p\cdot\bar{x}^{i_0} > p\cdot x^{i_0}$. Portanto $\sum_{i\in S} p.\bar{x}^i > \sum_{i\in S} p\cdot w^i$, uma contradição.

6: <u>A Igualdade Assintótica entre o Núcleo e o Conjunto das Alocações Competitivas</u>

Ainda dentro do espírito das considerações de

Edgeworth, consideraremos agora as expansões de E (E^r), i.e,consideraremos economias obtidas de E pela inclusão de mais consumidores.

Diremos que dois consumidores são do mesmo tipo se suas preferências são representadas pela mesma pré-ordem e se possuem o mesmo vetor de recursos iniciais (evidentemente também possuem o mesmo conjunto de escolhas de consumo). Neste contexto, a definição que segue representa uma economia com m tipos de consumidores e r consumidores de cada tipo.

<u>Definição 6</u> : A economia E^r , $r \in \mathbb{N}$, é caracterizada por um par $((\Omega, \precsim_{(i,q)})_{(i,q) \in I\times J}, (w^{(i,q)})_{(i,q)\in I\times J})$ onde $I = \{1,\dots,m\}$, $J = \{1,\dots,r\}$ e para cada $i \in I$ as pré-ordens $\precsim_{(i,1)},\dots,\precsim_{(i,r)}$ são idênticas (definem a mesma relação) a $\precsim_{(i,1)}$ e os vetores $w^{(i,1)},\dots,w^{(i,r)}$ são todos iguais a $w^{(i,1)}$. Os vetores $w^{(i,1)}$ e as pré-ordens $\precsim_{(i,1)}$, $i \in I$, satisfazem os axiomas da Definição 1 .

Com o intuito de suavizar a notação, representaremos a pré-ordem $\precsim_{(i,1)}$ simplesmente por $\precsim_i$ e o vetor $w^{(i,1)}$, por w^i . Ressalto também que na definição de E^r , o par (i,q) é tal que i indica o tipo de consumidor e q o indivíduo do tipo determinado por i . Deste modo o cardinal de $I\times J$ (mr) determina o número de agentes de E^r . Para $r=1$ este conceito coincide com o de E .

<u>Definição 7</u> : Uma alocação provável para a economia E^r é uma mr-upla

$(x^{11},\ldots,x^{1r},x^{21},\ldots,x^{2r},\ldots,x^{m1},\ldots,x^{mr})$ de Ω^{mr} tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{r} x^{iq} \right) = r \cdot \sum_{i=1}^{m} w^i \ .$$

Os conceitos de coleção de agentes bloqueando alocações, de núcleo e de alocações competitivas são definidos de modo inteiramente análogo para E^r , a partir da Definição 7 .

Mostraremos agora que as alocações do núcleo de E^r associam as mesmas escolhas de consumo para consumidores do mesmo tipo. Isto permite então identificar o núcleo de E^r com um subconjunto de Ω^m .

<u>Proposição 4</u> : Se $(x^{11},\ldots,x^{1r},x^{21},\ldots,x^{2r},\ldots,x^{m1},\ldots,x^{mr})$ está no núcleo de E^r então para cada $i \in I$, $x^{iq} = x^{i1}$ para $q=1\ldots r$.

<u>Demonstração</u> : Para cada $i=1 \ldots m$ seja x^i um menor elemento, segundo $\precsim_i$, do conjunto $\{x^{iq}, q=1\ldots r\}$. Suponha que para algum $i' \in \{1,\ldots,m\}$ existam dois elementos da forma x^{iq} distintos. Pelo Lema 1 segue para i'

$$x^{i'} \prec_i \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{r} x^{i'q}$$

. Por convexidade, se $i \neq i'$

$x^i \precsim_i \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{r} x^{iq}$. Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{r} \sum_{q=1}^{r} x^{iq} - w^i \right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{q=1}^{r} x^{iq} \right) - \sum_{i=1}^{m} w^i =$$

$\sum_{i=1}^{m} w^i - \sum_{i=1}^{m} w^i = 0$. Seja então S a coleção dos indivíduos a que os x^i estão associados. Para cada $i \in S$ associe o novo "consumo" $\frac{1}{r} \sum_{q=1}^{r} x^{iq}$. Segue o argumento acima que S bloqueia, uma contradição .

Portanto, uma alocação $(x^1, \ldots, x^1_r, x^2, \ldots, x^2_r, \ldots, x^m, \ldots, x^m_r)$ do núcleo de E^r pode ser "identificada" com o elemento $(x^1, \ldots, x^m) \in \Omega^m$. Neste contexto vale a seguinte

Proposição 5 : Para todo $r \in \mathbb{N}$, se C_r é o núcleo de E^r , então $C_{r+1} \subset C_r$.

Demonstração: Seja $(x^1, \ldots, x^m) \in C_{r+1}$. Suponha que $(x^1, \ldots, x^m) \notin C_r$. Então existe uma coleção S de agentes bloqueando $(x^1, \ldots, x^m)$ em E^r . Mas isto é contraditório, pois esta mesma coleção bloqueia $(x^1, \ldots, x^m)$ em E^{r+1} .

Se considerarmos uma alocação competitiva da economia E e repetirmos esta alocação quando expandimos E , a alocação resultante é competitiva para a economia expandida. Deste modo C_r é não vazio para todo r. Como consequência, também $\mathbb{K} \subset \bigcap_{r \in \mathbb{N}} C_r$, onde $\mathbb{K}$ é o conjunto das alocações competitivas para E. Nosso objetivo final, nesta parte III, é demonstrar a inclusão no outro sentido. Para isto necessitamos do seguinte

Lema 2 : Sejam A_1 e A_2 subconjuntos convexos não vazios de $\mathbb{R}^n$ e H a envoltória convexa de $A_1 \cup A_2$. Seja $B = \{z : z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ com $z_1 \in A_1$, $z_2 \in A_2$, $\alpha_i \geq 0$ $i=1,2$ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$, então $H=B$.

Demonstração: É claro que $B \subset H$. Mostremos então que $H \subset B$. Seja então $x \in H$; x pode ser escrito sob a forma $x = \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \ldots + \alpha_p x^p$, para algum p e $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ $\alpha_i \geq 0$; $x^i \in A_1 \cup A_2$, $i=1\ldots p$. Podemos supor que $x^1, \ldots, x^m$ são elementos de A_1 e $x^{m+1}, \ldots, x^p$ o são de A_2. Se $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$ então $\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i = 1$ e portanto $x = \alpha_{m+1} x^{m+1} + \ldots + \alpha_p x^p$ é um elemento de A_2 (A_2 convexo). Se z é um elemento qualquer de A_1, $x = 0 \cdot z + 1 \cdot x \in B$. Se $\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i = 0$, $x = 1 \cdot x + 0 \cdot z \in B$, onde agora z é um elemento qualquer de A_2.

Se $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \neq 0$ e $\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i \neq 0$, temos:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} x^i\right)$$

$$\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i x^i = \left(\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i\right) \left(\sum_{i=m+1}^{p} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i} x^i\right)$$

Sejam :

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} x^i \quad ; \quad \theta_2 = \sum_{i=m+1}^{p} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i} x^i$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \quad , \quad \beta_2 = \sum_{i=m+1}^{p} \alpha_i \quad .$$

Segue que $\theta_1 \in A_1$, $\theta_2 \in A_2$. Além disso $\beta_1+\beta_2 = 1$, $\beta_1>0$, $\beta_2 > 0$. Agora, $x = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2 \in B$.

<u>Teorema 3</u> : Se $(x^1,\dots,x^m) \in C_r$ para todo r então $(x^1,\dots,x^m) \in \mathbb{K}$.

<u>Demonstração</u>: Para cada $i=1,\dots,m$ seja $T_i = \{z \in \mathbb{R}^\ell : z+w^i \in \Omega$ e $x^i \prec_i z+w^i\}$; $T_i \neq \emptyset$ pois pela não saciedade existe um vetor x' tal que $x^i \prec_i x'$ e portanto $x' - w^i \in T_i \cdot T_i$ é também convexo pois se $z,z' \in T_i$, com $z \neq z'$ e $z'+w^i \precsim_i z+w^i$ (sem perda de generalidade, pois $\precsim_i$ é completa) segue de ii) da Definição 1 que se $\alpha \in (0,1)$,

$$x^i \prec_i z' + w^i \prec_i \alpha(z'+w^i) + (1-\alpha)(z+w^i) =$$

$$= \alpha z' + (1-\alpha)z+w^i \quad \text{e então} \quad \alpha z' + (1-\alpha)z \in T_i \ .$$

Seja então T a envoltória convexa de $\bigcup_{i=1}^{m} T_i$.

Pelo Lema 2, x é um elemento de T se e somente se existem $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ números reais não negativos com $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ e elementos $z^i \in T_i$, $i=1 \ldots m$, tais que $x = \alpha_1 z^1+\ldots+\alpha_m z^m$.

O argumento básico da demonstração é mostrar que $0 \notin T$ e a partir daí usar um teorema de separação para conjuntos convexos e pontos, para obter um sistema de preços competitivo associado à alocação $(x^1,\ldots,x^m)$.

Suponhamos então que $x=0$. Para cada $i=1\ldots m$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ seja a_i^k o menor elemento do conjunto $\{n \in \mathbb{N} ;\ n \geq k\cdot\alpha_i\}$. Para i no conjunto $\Psi=\{i \ \{j,\ldots,m\};\ \alpha_i>0\}$ defina $z_i^k = \dfrac{k\,\alpha_i}{a_i^k}\, z^i$ $(k \in \mathbb{N})$. Tem-se:

i) $z_i^k + w^i \in \left[w^i : z^i+w^i\right]$ e portanto $z_i^k + w^i \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, $\theta \in \left[w^i : w^i+z^i\right]$ se e somente se existe $\alpha \in [0:1]$ tal que $\theta=\alpha w^i+(1-\alpha)(z^i+w^i) = (1-\alpha)z^i+w^i$. Com $1-\alpha = \dfrac{k\,\alpha_i}{a_i^k}$ segue i) (observe que para $i \in \Psi$, $a_i^k > 0$ $k \in \mathbb{N}$ e $a_i^k \geq k\cdot\alpha_i$, donde $0 < \dfrac{k\,\alpha_i}{a_i^k} \leq 1$).

ii) $\lim\limits_{k} \dfrac{k\alpha_i}{a_i^k} = 1$

De fato, se $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{k\alpha_i}{a_i^k} - 1 \right\| = \frac{a_i^k - k\alpha_i}{a_i^k} .$$

Se $k\alpha_i$ é natural, então $a_i^k = k\alpha_i$; caso contrário, $0 \leq a_i^k - 1 \leq k\alpha_i < a_i^k$. Em qualquer caso $a_i^k - k\alpha_i < 1$ e $a_i^k \geq k\alpha_i$. Segue então que :

$$\frac{a_i^k - k\alpha_i}{a_i^k} < \frac{1}{k\alpha_i}$$ e portanto ii) .

iii) Para cada $i \in \Psi$ existe $k_{oi} \in \mathbb{N}$ tal que $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_{oi}$, acarreta :

$$x^i \prec_i \frac{k\alpha_i}{a_i^k} z^i + w^i = x^k .$$

Caso contrário, seria possível determinar subsequência $(x^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $x^{k_n} \in \{x \in \Omega ; x \not\succ_i x^i\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como este conjunto é fechado (Definição 1) seguiria de ii) que $z^i + w^i \precsim_i x^i$, o que é contraditório.

Seja então $k_o = \max \{k_{oi}, i \in \Psi\}$, $k > k_o$ e $r = \max \{a_i^k , i \in \Psi\}$. Na economia E^r seja S a coleção de agentes formada por a_i^k elementos do grupo i , para cada $i \in \Psi$. Associe a cada um destes indivíduos $z_i^k + w^i$. Por iii) $x^i \prec_i z_i^k + w^i$ para todo $i \in \Psi$ e

$$\sum_{i \in \Psi} a_i^k (z_i^k + w^i) = \sum_{i \in \Psi} a_i^k z_i^k + \sum_{i \in \Psi} a_i^k w^i = \sum_{i \in \Psi} a_i^k w^i \quad , \quad \text{pois}$$

$$\sum_{i\in\Psi} a_i^k z_i^k = k \sum_{i\in\Psi} \alpha_i z^i = 0$$

Segue portanto que S bloqueia $(x^1,\dots,x^m)$ em E^r, uma contradição. Logo $0 \notin T$. Como T é convexo, existe um hiperplano passando pela origem com normal $p \neq 0$, limite para T. Deste modo podemos supor $p\cdot z \geq 0$ para todo $z \in T$. A não saciedade implica em $p \geqq 0$. De fato, suponha que para algum $j \in \{1,\dots,\ell\}$, $p_j < 0$. Sejam

$$A_1 = \{j \in \{1,\dots,\ell\},\ p_j < 0\}\ ;\quad A_2 = \complement_{\{1,\dots,\ell\}} A_1\ ;$$

e n_1, n_2 números naturais tais que $n_1 > x_j^i$, $n_2 > x_j^i$, para todo j (x_j^i : j-ésima componente de x^i) e

$$-n_2 \sum_{j\in A_1} p_j > n_1 \sum_{j\in A_2} p_j \quad \left(\text{defina } \sum_{j\in A_2} p_j = 0 \text{ se } A_2 = \emptyset\right).$$

Seja γ o vetor formado pela substituição das componentes x_j^i por n_2, se $j \in A_1$ e n_1 se $j \in A_2$. Pela não saciedade $\gamma \in T_i$, mas

$$p\cdot\gamma = n_2 \sum_{j\, A_1} p_j + n_1 \sum_{j\, A_2} p_j < 0 \text{ contradizendo } p\cdot\gamma \geq 0 .$$

Mostraremos agora que os x^i satisfazem a condição "de ótimo" exigida para alocações competitivas.

Seja então $x' \in \Omega$ tal que $x^i \prec_i x'$, $i \in \{1,\dots,m\}$ e $(\alpha_n)_{n\in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de $(0:1)$ con -

vergindo a zero. Seja $x^n = \alpha_n x' + (1-\alpha_n)x^i$, para cada $n \in \mathbb{N}$. É claro que $x^i \prec_i x^n$ (ii), Definição 1) para todo $n \in \mathbb{N}$; $\lim_n x^n = x^i$ e $x^n - w^i$ T_i . Portanto $x^n - w^i \in T$ e então $p\cdot(x^n - w^i) \geq 0$, para todo natural n . Por passagem ao limite obtem-se $p\cdot x^i \geq p\cdot w^i$. Como $\sum_{i=1}^{m} x^i - \sum_{i=1}^{m} w^i = 0$ obtem-se $p\cdot x^i = p\cdot w^i$ para todo $i=1,\ldots,m$. Resta provar que x^i é o maior elemento segundo $\precsim_i$ do conjunto $\{x \in \Omega;\ p\cdot x \leq p\cdot w^i\}$. Suponha então que exista x neste conjunto tal que $x^i \prec_i x$. Nestas condições, como $x - w^i \in T_i$, segue que $p\cdot x \geq p\cdot w^i$ e portanto $p\cdot x = p\cdot w^i$. Seja então $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos em (0:1) convergente a 1. O mesmo argumento de iii) mostra que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq n_0$, $x^i \prec_i \alpha_n x$ e $p\cdot\alpha_n x = \alpha_n p\cdot x = \alpha_n p\cdot w^i < p\cdot w^i$ $(p\cdot w^i > 0)$, contrariando o fato que $\alpha_n x - w^i \in T$ (e portanto $p\cdot\alpha_n x \geq p\cdot w^i$) .

CAPÍTULO IV

1: Economias

Os resultados apresentados no Capítulo III, como bem acentua Gerard Debreu em seu paper, admitem, em sua maioria, uma extensão direta para economias produtivas. No entanto, as hipóteses necessárias para tais extensões não mais permitem a demonstração da existência de alocações competitivas. Com o objetivo de demonstrar a validade do Teorema 3 em economias em que a produção é possível, introduziremos a economia E formada por m indivíduos. Supõe-se que estes indivíduos performam um duplo papel. Atuam como consumidores, com preferências em Ω, seu conjunto de consumo e atuam como produtores, com acesso ao conjunto de planos de produção $Y \subset \mathbb{R}^{\ell}$, onde Y, como já observado, representa as alternativas de produção disponíveis em face do conhecimento técnico desses indivíduos.

Definição 1 : Uma economia produtiva E é caracterizada por um terno $((\Omega, \precsim_i)_{i \in I}, (w^i)_{i \in I}, Y)$, onde $I = \{1,\ldots,m\}$; $(\Omega, \precsim_i)_{i \in I}$ e $(w^i)_{i \in I}$ satisfazem as condições da Definição 1, Capítulo III; $Y \subset \mathbb{R}^{\ell}$ tem as seguintes propriedades :

i) $0 \in Y$ - possibilidade de não produção

ii) Para todo $x \in Y$, $\lambda x \in Y$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$

iii) Y é convexo

As três últimas condições da Definição 1 se resumem dizendo-se que Y é um cone convexo com vértice na origem.

Dado um ponto $y \in Y$, as coordenadas negativas de y são interpretadas como quantidades dos bens necessários para a produção (inputs) de suas coordenadas positivas (outputs), i.e, as coordenadas positivas representam as quantidades dos bens resultantes da aplicação dos inputs ao processo produtivo.

2: Alocações

Na mesma ordem de idéias do Capítulo III, apresentamos:

<u>Definição 2</u> : Uma alocação para E é um m-upla $(x^1,\ldots,x^m) \in \Omega^m$.

<u>Definição 3</u>: Uma alocação $(x^1,\ldots,x^m)$ para E é provável se a diferença $\sum_{i=1}^{m} x^i - \sum_{i=1}^{m} w^i$ é um elemento de Y , i.e, se existe um plano de produção satisfazendo a igualdade entre oferta e demanda .

3: Bloqueamento por Coleções de Agentes em Economias Produtivas

<u>Definição 4</u> : Seja S uma coleção de agentes de E , i.e, S é parte não vazia de I . Diremos que S bloqueia uma alocação $(x^1,\ldots,x^m)$ para E se para cada $i \in S$, existe $\bar{x}^i$ satisfazendo:

i) $\sum_{i \in S} \bar{x}^i - \sum_{i \in S} w^i \in Y$

ii) $x^i \precsim_i \bar{x}^i$ para cada $i \in S$ e existe $i_0 \in S$ tal que $x^{i_0} \prec_{i_0} \bar{x}^{i_0}$.

As alocações admissíveis são definidas de modo análogo às correspondentes do Capítulo III e novamente o núcleo de E é o conjunto de tais alocações.

4: Alocações Competitivas e Lucro Nulo

A noção de comportamento competitivo para E é a que segue:

Definição 5 : A alocação provável $(x^1,\ldots,x^m) \in \Omega^m$ é competitiva se existe $p \geq 0$ de modo que:

i) A aplicação
$$f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto f(y) = p\cdot y$$
tem máximo;

ii) Para cada i, x^i é o maior elemento, segundo $\precsim_i$, do conjunto $\{x \in \Omega;\ p\cdot x \leq p\cdot w^i\}$.

Com a convenção de sinal imposta sobre os elementos de Y, $f(y)$ representa o lucro decorrente da execução do plano de produção $y \in Y$.

Observe que se a condição ii) da Definição 5 é satisfeita, necessariamente o máximo de f é zero. De fato, suponha que exista $y \in Y$, com $f(y) > 0$. Para todo natural n, $ny \in Y$ e $f(ny) = p\cdot ny = n\,p\cdot y = nf(y)$. Portanto f não teria máximo .

Juntamente com a hipótese $0 \in Y$, segue a afirmação.

<u>Proposição 1</u>: Se a alocação $(x^1, \ldots, x^m)$ é competitiva, está no núcleo de E.

<u>Demonstração</u>: Suponha o contrário. Então existe $S \subset I$, não vazio e para cada $i \in S$, $\bar{x}^i$ tal que

$$y = \sum_{i \in S} \bar{x}^i - \sum_{i \in S} w^i \in Y \qquad \text{e}$$

$x^i \precsim_i \bar{x}^i$ para todo $i \in S$ e existe $i_0 \in S$ tal que $x^{i_0} \prec_{i_0} \bar{x}^{i_0}$. O mesmo argumento da Proposição 4, Capítulo III, mostra que:

$$\sum_{i \in S} p \cdot \bar{x}^i > \sum_{i \in S} p \cdot w^i \qquad \text{e portanto}$$

$p \cdot \left(\sum_{i \in S} \bar{x}^i - \sum_{i \in S} w^i \right) = p \cdot y = f(y) > 0$, contrariando o fato de que f tem máximo.

Como antes, considere a economia expandida E^r, obtida considerando-se r consumidores-produtores de cada um de m tipos.

<u>Definição 6</u>: A economia E^r é caracterizada pelo terno $((\Omega, \precsim_{(i,q)})_{(i,q) \in I \times J}, (w^{(i,q)})_{(i,q) \in I \times J}, Y)$ onde Y satisfaz as mesmas condições da Definição 1 e as famílias $(\Omega, \precsim_{(i,q)})_{(i,q) \in I \times J}$,

$(w^{(i,q)})_{(i,q)\in I\times J}$ tem os significados do Capítulo III .

Definição 7 : Uma alocação provável para E^r é uma mr-upla $(x^{11},\ldots,x^{1r},x^{21},\ldots,x^{2r},\ldots,x^{m1},\ldots,x^{mr})$ de Ω^{mr} tal que

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{r} x^{iq} - rw^i\right) \in Y .$$

Os conceitos de núcleo e alocação competitiva são definidos de modo análogo ao Capítulo III a partir da Definição 7 .

Proposição 2 : Se $(x^{11},\ldots,x^{1r},\ldots,x^{m1},\ldots,x^{mr})$ está no núcleo de E^r , então, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, $x^{iq} = x^{i1}$ para todo $q = 1\ldots r$.

Demonstração : Seja x^i um menor elemento do conjunto $\{x^{iq}, q=1\ldots r\}$; segundo $\precsim_i$. Suponha que dois elementos da forma $x^{i'q}$, para algum i' , sejam distintos. Considerando a coleção S dos indivíduos possuidores dos x^i e associando a cada um $\frac{1}{r}\sum_{q=1}^{r} x^{iq}$, teríamos:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{r}\sum_{q=1}^{r} x^{iq} - w^i\right) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{r} x^{iq}\right) - \sum_{i=1}^{m} w^i =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{r} x^{iq} - rw^i\right) \quad . \text{ Seja } y = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{r} x^{iq}-rw^i\right).$$

Como $y \in Y$ e Y é um cone convexo com vértice zero, $\frac{1}{r}\, y \in Y$ e portanto o Lema 1 do Capítulo III , mostra que a coleção S bloqueia $(x^1,\ldots,x^m)$, uma contradição.

5: A Igualdade Assintótica entre o Núcleo e o Conjunto das Alocações Competitivas

Seja C_r o núcleo de E^r . No contexto dos comentários do Capítulo III, $(C_r)_{r \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não crescente e o conjunto das alocações competitivas de E está contido em C_r para todo r .

Finalmente a igualdade assintótica entre o núcleo e o conjunto das alocações competitivas é apresentada no seguinte

Teorema 1 : Se $(x^1,\ldots,x^m) \in C_r$ para todo r , é competitiva.

Demonstração: Sejam T_i , $i=1\ldots m$ e T os mesmos conjuntos definidos no teorema correspondente do Capítulo III. Afirmamos que $T \cap Y = \emptyset$. Caso contrário existiriam $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ não negativos , com $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ e $z^i \in T_i$, $i=1\ldots m$, tais que

$y = \alpha_1 z^1 + \ldots + \alpha_m z^m \in Y$. Sejam a_i^k , Ψ e z_i^k os mesmos elementos do Teorema 3 do Capítulo III. Para cada $i \in \Psi$, existe $k_{o_i} \in \mathbb{N}$ tal que $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_{o_i}$, acarreta $x^i \prec_i z_i^k + w^i$ (os argumentos i) e ii) da demonstração do Teorema 3 também se aplicam). Tome-se então k_o, k e r nas condições do Teorema 3, Capítulo III e seja S a coleção de agentes formada por a_i^k elementos do grupo i, para cada $i \in \Psi$. A cada um desses agentes associe $z_i^k + w^i$. Como

$$\sum_{i \in \Psi} a_i^k (z_i^k + w^i) = k \sum_{i \in \Psi} \alpha_i z^i = ky \in Y$$ segue que S bloqueia $(x^1, \ldots, x^m)$, uma contradição. Existe então um hiperplano com normal $p \neq 0$ limite * para T e Y, i.e, tal que $p \cdot z \leq 0$ para todo $z \in Y$ e $p \cdot x \geq 0$ para todo $x \in T$.

A não saciedade implica então que $p \geq 0$ e o mesmo argumento anterior repete-se para mostrar que $(x^1, \ldots, x^m)$ é competitiva (a condição de f ter máximo segue de $p \cdot z \leq 0$ para todo $z \in Y$).

* Considere

$$T - Y = \{z \; ; \; z = x - y \; , \text{ com } \; x \quad T \; \text{ e } \; y \quad Y \}$$

i) T-Y é convexo :

Se z, z' T-Y , $z = x - y$ e $\alpha \in [0:1]$
$z' = x' - y'$

tem-se: $\alpha z + (1-\alpha) z' = \alpha x + (1-\alpha) x' - [\alpha y + (1-\alpha) y']$, como T e Y são convexos, segue que $\alpha z + (1-\alpha) z' \in T - Y$.

ii) $0 \notin T-Y$ pois $T \cap Y = \emptyset$.

Segue de i) e ii) e do teorema de separação enunciado no Capítulo I, que existe hiperplano (normal $p \neq 0$) tal que $p \cdot z \geq 0$ para todo $z \in T-Y$. Portanto $p \cdot (x-y) \geq 0$ para todo $x \in T$

e todo $y \in Y$. Como $0 \in Y$ segue que $p \cdot x \geq 0$ para todo $x \in T$. Seja agora $x_0 \in T$. Para todo $y \in Y$, $p \cdot y \leq p \cdot x_0$. Seja então y_0 um elemento qualquer de Y . Como para todo $\lambda > 0$, $\lambda y_0 \in Y$; tem-se:

$$p \cdot \lambda y_0 \leq p \cdot x_0 \qquad ; \qquad p \cdot y_0 \leq \frac{p \cdot x_0}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$ e portanto $p \cdot y_0 \leq 0$.

CONCLUSÕES

A contribuição realmente efetiva desta tese para o problema da troca entre indivíduos é, em última análise, a da apresentação do modelo completo. Com a adaptação de determinadas técnicas, em sua maioria camufladas em complexos teoremas da Teoria do Equilíbrio Geral, aos problemas de existência e continuidade da demanda e da existência de preços competitivos, conseguiu-se, com uma matemática extremamente simples, apresentar um modelo de Equilíbrio Geral que completa o apresentado por Debreu e Scarf, no sentido de que se exibiu uma alocação competitiva para o núcleo da economia E.

Os resultados mais recentes sobre Economias de Trocas pertencem ao vasto campo das aplicações da Teoria da Medida. Considerando-se o conjunto dos consumidores com a cardinalidade de , é possível, utilizando-se os conceitos e resultados da referida teoria, extender a quase totalidade dos teoremas aqui expostos. A importância deste modelo mais geral está não somente no fato de que dá uma melhor conceituação ao comportamento competitivo como também ressalta a importância do método matemático nas resoluções de problemas econômicos. Sob este ponto de vista, o autor considera interessante a realização de pesquisa, semelhante a aqui levada a efeito , neste novo contexto.

REFERÊNCIAS

(1) Elon Lages de Lima : "Elementos de Topologia Geral" (Ao Livro Técnico).

(2) Walter Rudin: "Principles of Mathematical Analysis" (McGraw-Hill)

(3) H.Nikaido :"Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics" (North-Holland).

(4) Gerard Debreu : "Theory of Value" (Cowles Foundation Monograph)

(5) G. Debreu - H. Scarf : "A Limit Theorem on the Core of an Economy" (International Economic Review - Setembro,1963, Vol.4, nº 3).

(6) G. Debreu - H. Scarf : "The Limit of the Core of an Economy". (Monograph-North Holland - 1972).

(7) Gerard Debreu: "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis" (International Economic Review - Setembro 1962, Vol. 2, Nº 3).

(8) E. Malinvaud : "Lectures on Micro Economic Theory" (North-Holland).

(9) Kenneth Arrow - F.Hahn: "General Competitive Analysis" (Holden-Day).