



UM ALGORITMO BRANCH-AND-PRICE PARA INSTÂNCIAS DE GRANDE  
PORTE DO MODELO BRASILEIRO DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO  
DA GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA A LONGO PRAZO

Carlos Henrique Medeiros de Sabóia

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Abilio Pereira de Lucena Filho  
Nelson Maculan Filho

Rio de Janeiro  
Junho de 2013

UM ALGORITMO BRANCH-AND-PRICE PARA INSTÂNCIAS DE GRANDE  
PORTE DO MODELO BRASILEIRO DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO  
DA GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA A LONGO PRAZO

Carlos Henrique Medeiros de Sabóia

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Abilio Pereira de Lucena Filho, Ph.D.

---

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

---

Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr.Ing.

---

Prof. Geraldo Robson Mateus, D.Sc.

---

Prof. André Luiz Diniz Souto Lima, D.Sc.

---

Prof. Luidi Gelabert Simonetti, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2013

Sabóia, Carlos Henrique Medeiros de

Um Algoritmo Branch-and-Price para Instâncias de Grande Porte do Modelo Brasileiro de Planejamento da Expansão da Geração de Energia Elétrica a Longo Prazo/Carlos Henrique Medeiros de Sabóia. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XII, 133 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Abilio Pereira de Lucena Filho

Nelson Maculan Filho

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 111 – 128.

1. Planejamento da expansão da geração. 2. Programação linear inteira mista. 3. Decomposição de Dantzig-Wolfe. 4. Algoritmo branch-and-price. 5. Algoritmo local branching. I. Lucena Filho, Abilio Pereira de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*“Combati o bom combate,  
terminei a corrida, guardei a fé.”  
2 Timóteo 4:7*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, e a toda minha família.

Ao orientador e amigo, Prof. Abilio Pereira de Lucena Filho, pela orientação e dedicação ao longo de todo o trabalho que realizamos juntos no CEPEL, não somente referente ao trabalho de tese, mas também a todos os desenvolvimentos que realizamos no algoritmo de solução do modelo MELP desde o ano de 2005. Ao Prof. Nelson Maculan Filho pelos seus conselhos, por sua ajuda e por ter sempre estado disponível como orientador e amigo, qualidades estas conhecidas por todos e que o tornam um ser humano ímpar.

A amiga do CEPEL, Maria Luiza Viana Lisboa, gerente do projeto MELP, pela sua inestimável orientação, incentivo e contribuição no desenvolvimento desta tese, principalmente no que diz respeito ao problema de planejamento da expansão da geração.

A Maria Elvira Piñeiro Maceira, chefe do Departamento de Otimização Energética e Meio Ambiente do CEPEL, por ter tornado possível a cooperação com o Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ através do Prof. Abilio Lucena, e por ter disponibilizado todas as ferramentas necessárias ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos do CEPEL. Com certeza estaria sendo injusto ao citar nomes, pois ao longo destes anos fiz tantos amigos aqui que certamente estaria esquecendo alguém caso tentasse citar a todos. No entanto, não posso deixar de mencionar aqui a Débora Jardim e a Daniela Kyrillos pelo carinho que sempre tiveram com minha família, ao Luciano Xavier pela amizade desde os tempos da república em Ipanema, ao André Diniz pelo apoio e pelas contribuições no texto da tese desde o exame de qualificação, aos amigos Fábio Batista, Vitor Duarte, Guilherme Marzano, Cláudia Sagastizábal, Roberto Pinto, José Francisco, Thatiana Justino, Leonardo Moraes, Welington Oliveira, Michel Tchou, Igor Raupp, e tantos outros, o meu muito obrigado.

Ao meu grande amigo Sérgio Assunção Monteiro por ter estado sempre presente nos momentos mais importantes que passei aqui no Rio. Aos amigos do Semente da Igreja Santa Margarida Maria, em especial ao casal Gisele e Marcos por terem nos acolhido e nos ajudado em momentos difíceis.

Aos meus amados pais e irmãos por terem estado sempre presentes nos momentos mais importantes. Ao meu querido sogro Clóvis Pimentel por todo apoio e ajuda e por ter sempre me tratado como um filho, e ao casal Marcelo e Verônica Pimentel, tios e padrinhos de minha filha caçula, por terem cuidado com carinho de minha família em Recife no período em fiquei isolado aqui no Rio escrevendo a tese. Sem a ajuda de todos vocês não teria conseguido terminar, por isto sou para sempre grato.

Iniciei agradecendo a Deus e finalizo agradecendo novamente a Ele por todas as graças recebidas, por nossa paz e saúde, por toda minha família e amigos, por minha amada esposa Ana Lúcia Sabóia e nossas filhas Maria Júlia e Maria Clara, nossos tesouros, que nos mostraram o caminho para o que é verdadeiramente importante nesta vida.

*“Eu sempre acreditei em números, em equações e na lógica que leva à razão. Mas depois de uma vida em tal busca, eu pergunto: o que é mesmo a lógica? Quem decide o que é racional? Tal busca me levou através da física, da metafísica, do delírio e de volta. Então eu fiz a descoberta mais importante de minha carreira. A descoberta mais importante de minha vida. É somente nas misteriosas equações do amor que alguma lógica real pode ser encontrada.”*<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Discurso do matemático John Forbes Nash ao receber o Prêmio Nobel de Economia em 1994.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UM ALGORITMO BRANCH-AND-PRICE PARA INSTÂNCIAS DE GRANDE PORTE DO MODELO BRASILEIRO DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DA GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA A LONGO PRAZO

Carlos Henrique Medeiros de Sabóia

Junho/2013

Orientadores: Abilio Pereira de Lucena Filho

Nelson Maculan Filho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Desde meados da década de 90, o CEPEL vem desenvolvendo o modelo computacional MELP para o problema do planejamento da expansão da geração a longo prazo do sistema elétrico brasileiro. Para reduzir a complexidade do problema, foram adotadas hipóteses simplificadoras que permitiram derivar uma formulação com base em Programação Linear Inteira Mista, adotando como metodologia de solução o algoritmo Branch-and-Cut disponível em um software comercial no estado-da-arte.

Estudos recentes evidenciaram a necessidade de uma modelagem mais detalhada de certos aspectos do problema, que aumentam as dimensões das instâncias e comprometem a resolução do mesmo sob o ponto de vista computacional. Por exemplo, para uma análise operativa em base semestral ou com um maior número de patamares de demanda, nem mesmo a relaxação linear do problema pode ser obtida em tempo computacional aceitável para o sistema elétrico brasileiro. Com isso, a metodologia de solução adotada tornou-se inadequada.

Este trabalho teve por objetivo desenvolver uma nova metodologia de otimização exata para o modelo MELP capaz de tratar instâncias de grande porte do problema. Para isto foi proposto para o mesmo uma nova formulação matemática e, com base nesta, desenvolvido um algoritmo do tipo Branch-and-Price. Este algoritmo apresenta certas características diferentes daqueles encontrados na literatura, como o procedimento de estabilização dos duais e a regra de ramificação para a árvore de enumeração guiada por limites primais ao invés dos limites duais. São feitas aplicações do algoritmo para instâncias anteriormente intratáveis do problema em questão.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A BRANCH-AND-PRICE ALGORITHM FOR SOLVING LARGE SCALE  
INSTANCES OF THE BRAZILIAN LONG TERM POWER GENERATION  
EXPANSION PLANNING MODEL

Carlos Henrique Medeiros de Sabóia

June/2013

Advisors: Abilio Pereira de Lucena Filho

Nelson Maculan Filho

Department: Systems Engineering and Computer Science

Since mid-90's the Brazilian Electric Energy Research Center has been developing the MELP computational model for the Brazilian long term power generation expansion planning problem. In order to reduce the problem complexity some assumptions have been adopted and a mathematical formulation based on Mixed Integer Linear Programming has been derived. Such formulation is solved by a Branch-and-Cut algorithm available in a state-of-the-art commercial optimization package.

Recent analysis has highlighted the need of modeling enhancement of some aspects of the problem, which will increase the scale of the instances and the computational effort. As an example, an operative analysis on seasonal basis instead of annual basis, or considering more than two energy demand levels, even the linear relaxation of the problem could not be attained in a reasonable computational time.

The objective of this work is the development of an exact optimization procedure for the MELP model to tackle large scale instances of the problem. Based on a mathematical reformulation derived for MELP model, a Branch-and-Price algorithm has been developed. The proposed algorithm deals with some relevant points in a nonstandard way, like the duals stabilization procedure and the branch rules for the enumeration tree guided by primal bounds instead of dual bounds. The proposed algorithm is applied to previously untractable large scale instances of the problem.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Planejamento da Expansão da Geração de Energia Elétrica</b>	<b>5</b>
1.1 Modelos e Algoritmos para o PEG . . . . .	7
1.1.1 Observações Gerais . . . . .	13
1.2 MELP - Modelo Brasileiro de Planejamento da Expansão da Geração a Longo Prazo . . . . .	14
<b>2 Formulação Matemática do MELP</b>	<b>19</b>
2.1 Considerações Gerais . . . . .	19
2.1.1 Representação do Sistema Elétrico e de Gás Natural . . . . .	20
2.1.2 Aspectos da Modelagem do Sistema Elétrico . . . . .	23
2.1.3 Aspectos da Modelagem do Sistema de Gás Natural . . . . .	25
2.2 Formulação Matemática . . . . .	26
2.2.1 Definição de Conjuntos e Índices . . . . .	26
2.2.2 Definição dos Parâmetros do Modelo . . . . .	28
2.2.3 Definição das Variáveis do Modelo . . . . .	30
2.2.4 Modelagem Matemática . . . . .	32
2.3 Representação Matemática Compacta . . . . .	40
2.3.1 Notação Compacta . . . . .	40
2.3.2 Notação Matricial . . . . .	44
2.4 Algoritmos de Solução . . . . .	46
2.4.1 Motivação . . . . .	48
<b>3 Decomposição de Dantzig-Wolfe</b>	<b>50</b>
3.1 Aspectos Gerais: Aplicações na Literatura . . . . .	50
3.2 Decomposição em Programação Linear . . . . .	52
3.2.1 Equivalência com Relaxação Lagrangeana . . . . .	56

3.2.2	Procedimentos de Estabilização de Colunas . . . . .	59
3.3	Decomposição em Programação Inteira . . . . .	64
3.3.1	Algoritmo Branch-and-Price: Regras de Branching e Planos de Corte . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Reformulações para o MELP</b>	<b>69</b>
4.1	Reformulações Proposta na Literatura . . . . .	69
4.2	Reformulação Estendida . . . . .	73
4.2.1	Notação Matricial . . . . .	76
4.2.2	Reformulação Estendida $\times$ Formulação Original: Exemplo Ilustrativo . . . . .	79
4.2.3	Propriedades das Matrizes de Restrições de (4.46) . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Geração de Colunas para o MELP</b>	<b>87</b>
5.1	O Problema Mestre . . . . .	87
5.1.1	Problema Mestre Restrito: Notação Matricial . . . . .	88
5.2	Subproblemas de Geração de Colunas . . . . .	89
5.2.1	SGC: Notação Matricial . . . . .	90
5.3	Algoritmo de Geração de Colunas . . . . .	91
5.4	Algoritmo Branch-and-Price para o MELP . . . . .	97
5.4.1	Algoritmo Local Branching . . . . .	98
5.4.2	Geração de Colunas em um contexto de Busca Local . . . . .	99
5.5	Experimentos Computacionais . . . . .	101
5.5.1	Análise dos Resultados Práticos . . . . .	106
	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>108</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>111</b>
	<b>A Parâmetros de Penalidade</b>	<b>129</b>

# Lista de Figuras

1.1	Cadeia Integrada de Modelos (Fonte: CEPEL) . . . . .	18
2.1	Sistema Interligado Nacional (SIN) . . . . .	20
2.2	Bacias Hidrográficas Brasileiras / Subsistemas de Geração de Energia	21
2.3	Sistema de Gás Natural Brasileiro / Integração com o Sistema Elétrico	22
4.1	Formulação Original do MELP . . . . .	80
4.2	Formulação Extendida do MELP . . . . .	81
4.3	Formulação Extendida do MELP (SINGH <i>et al.</i> [1]) . . . . .	82
5.1	Esquema Padrão do <i>Local Branching</i> . . . . .	99
5.2	Subsistemas Elétricos dos Grupos Analisados . . . . .	102
5.3	Expansão Acumulada de 2016 a 2035 (Grupo C / Caso II) . . . . .	107
5.4	Expansão Acumulada de 2016 a 2035 (Grupo C / Caso III) . . . . .	107

# Lista de Tabelas

2.1	Projetos de Usinas Geradoras e Interligações . . . . .	48
5.1	Conjunto de Usinas Geradoras e Interligações . . . . .	103
5.2	Dimensões das Instâncias na Formulação Original . . . . .	103
5.3	Dimensões das Instâncias na Formulação Estendida . . . . .	103
5.4	Experimentos Computacionais Comparativos entre <b>HDW</b> e <b>BPLB</b> .	104
5.5	Participação Final das Hidrelétricas e Termelétricas/Renováveis . . .	106

# Introdução

Tradicionalmente, o principal objetivo do planejamento da expansão da geração de um sistema elétrico é a determinação de um cronograma de construção de usinas geradoras e troncos de interligação que assegure um atendimento confiável e de custo mínimo à demanda futura de energia elétrica. Trata-se de um problema complexo, que impõe grandes desafios para sua modelagem matemática, principalmente para sistemas hidrotérmicos de grande porte.

A questão da confiabilidade está associada ao suprimento adequado de energia elétrica mesmo sob condições operativas futuras adversas, as quais são incertas, por exemplo, crescimento da demanda, custos de combustíveis, taxas de juros etc. Por outro lado, a questão do custo de atendimento está associada ao custo do programa de expansão, que inclui os custos de investimentos e de operação. Atualmente, a este problema, soma-se a necessidade da incorporação das questões ambientais, que têm assumido importância cada vez maior no Brasil e no mundo, tendo em vista as preocupações crescentes com o impacto dos gases de efeito estufa no clima do planeta. Além disso, o desenvolvimento de novas tecnologias tem resultado em uma maior interdependência do setor elétrico com outras cadeias energéticas, passando a exigir um planejamento integrado das mesmas.

O problema do planejamento da expansão do sistema elétrico brasileiro é particularmente mais complexo pela predominância hidráulica de seu parque gerador, que inclui bacias hidrográficas com regimes hidrológicos distintos e distribuídas em uma área geográfica de dimensões continentais. Ressalta-se a variabilidade da produção de energia hidrelétrica decorrente da característica estocástica das vazões afluentes aos reservatórios. As incertezas associadas à geração hidrelétrica podem ser mitigadas através da construção de reservatórios de regularização, usinas termelétricas para geração complementar, além dos troncos de interligação para trocas energéticas interregionais. A utilização destes recursos exige uma operação integrada dos sistemas hidrotérmicos regionais, tarefa bastante complexa tendo em vista o acoplamento temporal e espacial estabelecido pelos reservatórios de usinas hidrelétricas.

Sob o ponto de vista ambiental, ressalta-se que a maior parte do potencial hidrelétrico brasileiro ainda a ser explorado situa-se na região amazônica do país. Esta região apresenta inúmeras áreas de preservação ambiental e reservas indígenas,

que não podem ser negligenciadas na modelagem do problema. Finalmente, no que diz respeito a integração com outras cadeias energéticas, existe uma perspectiva de maior integração com as cadeias de gás natural e produtos da cana de açúcar. Esta perspectiva decorre das descobertas recentes de gás natural na camada de pré-sal e o desenvolvimento da indústria do etanol, que permitirão uma maior expansão de unidades geradoras a gás natural e a bagaço de cana de açúcar, respectivamente.

Trata-se, portanto, de um problema complexo cuja resolução requer o auxílio de ferramentas computacionais. Estas ferramentas são desenvolvidas com base em modelos que buscam representar o problema de forma simplificada, porém preservando seus aspectos mais relevantes.

Neste trabalho de tese, a definição de um **modelo** compreende as etapas de definição das premissas simplificadoras do problema, modelagem matemática do problema com base nas premissas adotadas, definição da metodologia de solução e finalmente, implementação computacional da formulação matemática e da metodologia de solução adotada. No caso do planejamento da expansão da geração, a modelagem resulta em uma formulação matemática que dá origem a um problema de otimização, cuja resolução pode ser feita através de métodos de otimização exatos ou heurísticos.

Na literatura, diversas abordagens foram propostas para tratar o problema de planejamento da expansão da geração de energia elétrica. Em especial, no caso do Brasil, destacam-se os modelos desenvolvidos pela Eletrobras (Centrais Elétricas do Brasil S.A.) - DESELP no início da década de 80 [2], e pelo CEPEL (Centro de Pesquisas de Energia Elétrica do Grupo Eletrobras) - MODPIN no final da década de 80 [3] e MELP no início de 2000 [4–6]. Estes modelos foram desenvolvidos para subsidiar os estudos oficiais de planejamento da expansão da geração de longo prazo do sistema elétrico brasileiro, tendo sido o último o modelo utilizado pelo Ministério de Minas e Energia e pela Empresa de Pesquisa Energética no Plano Nacional de Energia 2030 [7].

O modelo MELP, doravante simplesmente designado por MELP, é matematicamente formulado como um problema de programação linear inteira mista que, por se tratar do sistema brasileiro, resulta em um problema de grande porte. Esta formulação foi implementada em linguagem de programação FORTRAN e C, utilizando como metodologia de solução o algoritmo branch-and-cut disponível no pacote comercial CPLEX 11.0. Entretanto, a aplicação direta deste pacote comercial mostrou-se inviável para o sistema brasileiro, tornando necessário o desenvolvimento heurísticas primais, para determinar soluções viáveis iniciais de boa qualidade para o problema.

Porém, em estudos recentes, observou-se que a resolução da formulação matemática de instâncias de grande porte, por exemplo, um caso real de planejamento

do sistema elétrico brasileiro com diversos patamares da curva de carga, apresenta dificuldades até mesmo para a sua relaxação linear, mesmo recorrendo-se a estas heurísticas e utilizando pacotes comerciais no estado-da-arte da otimização. Esta dificuldade fica ainda mais evidente quando considerados novos aperfeiçoamentos na modelagem matemática do MELP, tais como a integração do sistema elétrico com a cadeia energética do gás natural [8] e a análise da operação em base semestral, ao invés de anual, conforme trabalhos recentes desenvolvido pelo CEPEL [9, 10].

Esta limitação de esforço computacional apresentada pela atual metodologia de solução do MELP também restringe outros aprimoramentos necessários e desejados para este modelo, como, por exemplo, a incorporação das incertezas de demanda.

Recentemente, SINGH *et al.* [1] aplicaram a técnica de Decomposição de Dantzig-Wolfe a um problema de programação estocástica inteira mista para o planejamento da expansão da capacidade de geração, considerando incertezas na demanda futura de energia elétrica, com formulação semelhante àquela empregada no MELP, resolvendo instâncias reais com centenas de milhares de variáveis binárias. Para aplicarem esta técnica de decomposição de forma eficiente, os autores propuseram uma reformulação para o problema. A utilização desta metodologia no MELP poderia apresentar-se como uma solução promissora para instâncias de grande porte, entretanto, a reformulação proposta pelos autores não é aplicável ao MELP devido à representação neste modelo de limites mínimos de geração de energia em usinas termelétricas, que não é considerada em [1].

Neste trabalho é desenvolvida uma reformulação matemática para o MELP com base naquela proposta por SINGH *et al.* [1], porém, adequada à representação do problema de planejamento da expansão do sistema elétrico adotada no MELP, de modo a possibilitar o desenvolvimento de uma metodologia de solução com base na Decomposição de Dantzig-Wolfe. A metodologia proposta, por sua vez, divide-se em duas etapas. Na primeira é aplicada a decomposição citada para encontrar soluções viáveis de muito boa qualidade para instâncias de grande porte do MELP, atualmente intratáveis por pacotes comerciais no estado-da-arte da programação inteira. Na segunda etapa, fazendo uso destas soluções viáveis, é desenvolvido um procedimento de enumeração implícita do tipo Branch-and-Price, baseado no algoritmo *Local Branching* [11], onde a regra de ramificação é guiada por limites primais ao invés dos limites duais.

Com esta metodologia foram resolvidas instâncias do MELP com aproximadamente vinte e cinco mil variáveis binárias, oitocentos e cinquenta mil variáveis contínuas e mais de 1 milhão de restrições, com *gap* de otimalidade inferior a 1%. Detalhes da reformulação proposta para o MELP, bem como da primeira etapa desta metodologia de solução são descritos em SABÓIA e LUCENA [12].

Este trabalho de tese está organizado da seguinte forma, no capítulo 1 é apresen-

tado o problema de planejamento da expansão da geração através de uma revisão bibliográfica sobre o assunto, além disso, são introduzidas as principais premissas utilizadas no modelo MELP. No capítulo 2 é descrita em detalhes uma formulação matemática do MELP e é introduzida uma notação compacta do mesmo que servirá de base para a apresentação deste trabalho. No capítulo 3 é feita uma revisão teórica sobre a aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe em Programação Linear e Programação Inteira, onde são apresentados a equivalência com a Decomposição Lagrangeana, as condições de otimalidade, os diversos métodos existentes na literatura para a estabilização dos duais, o algoritmo Branch-and-Price e seus principais tipos de regras de ramificação. No capítulo 4 são apresentadas e analisadas as reformulações propostas em SINGH *et al.* [1], identificando-se os problemas encontrados na adaptação direta destas reformulações ao MELP e com base nesta análise é proposta uma nova reformulação estendida para o mesmo.

Finalmente, no capítulo 5 é desenvolvida em duas etapas uma metodologia de solução para a reformulação proposta para o MELP, seguindo-se os resultados computacionais para instâncias de grande porte e as conclusões.



# Capítulo 1

## Planejamento da Expansão da Geração de Energia Elétrica

Os estudos de planejamento tem por objetivo subsidiar a tomada de decisão no presente para atender a situação futura da melhor maneira possível [2]. No que diz respeito ao planejamento de um sistema elétrico, isto representa a definição de um cronograma de expansão do sistema de geração e transmissão para o atendimento à demanda futura de energia elétrica de forma econômica, confiável e sustentável. Quanto maior o intervalo de tempo necessário para que uma decisão seja implementada, maior o horizonte de tempo necessário ao planejamento.

Para um sistema elétrico, o problema de Planejamento da Expansão da Geração (PEG) requer a análise em um longo horizonte. É necessário identificar a evolução tecnológica e de custos das possíveis fontes de geração e tecnologias de transmissão e avaliar seus impactos econômicos e socioambientais [2], o que requer uma série de estudos preliminares, por exemplo, os estudos de inventário de usinas hidrelétricas. Além disso, as decisões referem-se a investimentos, dentre outros, em usinas geradoras, cujo tempo para construção e entrada em operação pode demorar vários anos, em particular, as hidrelétricas de médio e grande porte.

No Brasil, o processo de planejamento tem sido dividido em três etapas principais: longo prazo, com horizonte em torno de 30 anos, médio prazo, com horizonte de 15 anos e curto prazo, que considera um horizonte de 10 anos. As perspectivas para o planejamento para cada um destes horizontes são distintas.

Em estudos de planejamento de longo prazo com horizonte de até 30 anos, procura-se analisar as estratégias de desenvolvimento do sistema elétrico, a composição futura do parque gerador, os principais troncos de interligação, e estabelecer um programa de desenvolvimento tecnológico e industrial e de inventário de bacias hidrográficas. Nestes estudos são definidas as diretrizes para os estudos de planejamento da expansão de médio e curto prazos e determinados os custos marginais de expansão de longo prazo [13].

Nos estudos de médio e curto prazos, a expansão da geração é analisada detalhadamente, indicando as necessidades quanto ao início de construção de novos projetos, bem como a priorização da continuidade das obras em andamento, garantindo o atendimento ao mercado consumidor. São estudos que, em princípio, procuram atualizar o cronograma definido nos estudos de longo prazo, considerando as mudanças conjunturais e de premissas, tais como previsões de crescimento da demanda de energia elétrica e reavaliação da economicidade de projetos, fruto do maior aprofundamento dos estudos técnicos de engenharia e meio ambiente [13].

O parque gerador do sistema elétrico brasileiro é predominantemente hidrelétrico, o que torna o problema da expansão da geração mais complexo devido a variabilidade da geração hidrelétrica decorrente da característica estocástica das vazões afluentes aos reservatórios. Além disso, usualmente o potencial das bacias hidrográficas são explorados através da construção de usinas em cascata, que resulta numa operação das mesmas com um acoplamento espacial e temporal. A oferta de energia hidrelétrica para o atendimento à demanda somente pode ser avaliada com precisão considerando a estocasticidade das afliências e características operativas das usinas hidrelétricas. Com este detalhamento, para um parque gerador hidrotérmico com as dimensões do brasileiro, a oferta total a custo mínimo somente pode ser definida recorrendo-se a modelos computacionais. No setor elétrico brasileiro é utilizado o modelo NEWAVE [14], que aplica a metodologia de Programação Dinâmica Dual Estocástica [15] ao problema do planejamento da operação hidrotérmica. A execução deste modelo exige elevado esforço computacional, que inviabiliza este tratamento criterioso da operação em modelos de planejamento da expansão de longo prazo.

Em termos de modelos desenvolvidos para o PEG, em linhas gerais, podemos dizer que as decisões a serem tomadas consistem em definir um cronograma de construção de usinas geradoras e troncos de interligação que assegure um atendimento confiável e de custo mínimo à demanda futura de energia elétrica. Estas decisões são tomadas com base em critérios econômicos e de garantia de suprimento de energia.

A questão da confiabilidade está associada ao suprimento adequado de energia elétrica mesmo sob condições operativas futuras adversas, as quais são incertas. Por outro lado, a questão do custo mínimo de atendimento está associada ao custo atualizado de investimento referente a construção de usinas geradoras e reforços de interligação, aos custos operativos do sistema e de déficit no atendimento a demanda.

Ao longo das últimas décadas diversos modelos matemáticos foram propostos para tratar o PEG. Estes modelos adotam em suas formulações aspectos que variam desde a consideração de incertezas, que podem ser relacionadas por exemplo a demanda futura de energia elétrica, até a consideração de impactos ambientais, ou mesmo, a integração do setor elétrico com os outros setores energéticos. Na seção seguinte é apresentada uma revisão bibliográfica sobre o assunto.

## 1.1 Modelos e Algoritmos para o PEG

A maior parte dos modelos propostos na literatura para o PEG, nas décadas de 80 e 90, concentraram-se principalmente no tratamento das incertezas associadas aos vários parâmetros do problema como a demanda futura de energia elétrica. A partir de 2000 o foco das pesquisas voltam-se para a proposição de novos modelos matemáticos onde são representadas as questões relativas aos impactos ambientais de instalação e operação das fontes geradoras e a integração entre o sistema elétrico e a outras cadeias energéticas como, por exemplo, a de petróleo e gás natural. Uma revisão da literatura para o PEG pode ser encontrada em [16, 17] e em [18] é apresentada uma revisão sobre a integração entre o setor elétrico e a cadeia energética do gás natural.

A revisão bibliográfica sumarizada a seguir apresenta primeiramente os trabalhos que serviram como base para o desenvolvimento do modelo MELP [4-6], foco principal deste trabalho de tese. Logo após, são apresentados diversos trabalhos que representam os aspectos ambientais, integração com outros setores energéticos, consideração de diversas funções objetivo no problema de planejamento, e ainda novas técnicas de decomposição para o tratamento de problemas estocásticos de grande porte.

### Modelos PEG no Brasil

Um dos primeiros modelos desenvolvidos no Brasil foi proposto na década de 80, quando em 1982 a Eletrobras [2] desenvolveu um modelo de planejamento da expansão da geração de longo prazo, baseado em programação linear, chamado DESELP (**D**eterminação da **E**xpansão do **S**istema **E**létrico a **L**ongo **P**razo). Neste as decisões de investimento e operação são modeladas com o auxílio de variáveis contínuas.

Neste modelo a operação do sistema hidrotérmico era representada de forma simplificada, considerando apenas os cenários de hidrologia média (CHM) e crítica (CHC). Para cada cenário eram associados disponibilidades máximas de geração para as usinas geradoras. A análise da operação na CHM permite avaliar adequadamente os custos operacionais e a análise da operação na CHC permite garantir a definição de um cronograma com déficit nulo no atendimento a demanda. Para um horizonte de longo prazo esta simplificação das incertezas hidrológicas é razoável. Com esta simplificação, além de evitar na modelagem matemática a representação detalhada destas incertezas, o acoplamento espacial e temporal entre os reservatórios também não é considerado, o que reduz de forma considerável a complexidade da operação hidrotérmica.

Ressalta-se que esta definição da operação com base nas disponibilidades de energia em diferentes condições hidrológicas também foi adotada em um modelo proposto

nos EUA em 1986 por SANGHVI e SHAVEL [19]. Neste modelo, a metodologia de resolução adotada baseia-se no método de Decomposição de Dantzig-Wolfe [20], tendo sido também consideradas as incertezas na demanda futura de energia.

Em 1993, foi desenvolvido pelo CEPEL [3], um modelo para o PEG no Brasil considerando diversos tipos de incertezas através do critério de mínimo-máximo arrependimento [21], denominado MODPIN (**M**odelo de **P**lanejamento sob **I**ncertezas). O critério de tratamento de incertezas citado, também conhecido como critério de Savage, consiste em calcular o arrependimento associado a cada combinação de decisão e cenário, isto é, a diferença entre o custo real e o custo que se teria caso houvesse a certeza que aquele cenário iria ocorrer.

Diferentemente do DESELP, no modelo MODPIN são considerados o acoplamento espacial e temporal entre os reservatórios e as decisões de investimentos são modeladas com variáveis inteiras. A produção de energia nas usinas hidrelétricas depende, portanto, das séries de vazões afluentes aos reservatórios. Neste modelo, o problema é decomposto em dois subproblemas. O primeiro, o subproblema de investimento, é um problema de programação linear inteira mista resolvido através de um algoritmo branch-and-bound. O segundo, o subproblema de operação, é um problema linear multi-estágio resolvido por um algoritmo de fluxo em redes. Os dois subproblemas são integrados através da técnica de Decomposição de Benders [22]. Reporta-se em [3] a resolução um problema com 376.956 variáveis, sendo 620 binárias, e 142.416 restrições. Ressalta-se que este mesmo procedimento foi aplicado em 2001, por KENFACK *et al.* [23], em um problema de planejamento da expansão hidrotérmica da República dos Camarões, com a diferença que os subproblemas eram resolvidos com o algoritmo simplex.

Mais tarde, em 2002, uma nova metodologia de solução para o subproblema de investimento é proposta para o modelo MODPIN. O algoritmo branch-and-bound aplicado na resolução deste subproblema foi substituído por um algoritmo genético [24]. Ainda no mesmo ano, a PSR-Power Systems Research [25] desenvolveu o modelo OPTGEN, semelhante a [3], apresentando sua aplicação ao problema de planejamento da expansão da geração e transmissão dos países da região dos Bálcãs.

Em 2002, foi desenvolvido pelo CEPEL [4] um modelo para o planejamento da expansão da geração de longo prazo no Brasil, denominado MELP (**M**odelo de **E**xpansão de **L**ongo **P**razo). Observou-se em relação ao modelo MODPIN, que devido ao pequeno número de séries hidrológicas consideradas era extremamente difícil se determinar uma série bastante representativa de um cenário de hidrologia desfavorável. Desta forma, optou-se por substituir o tratamento da operação adotado no modelo MODPIN por aquele adotado no modelo DESELP, resultando então no modelo MELP. Neste, as decisões de investimento em novas fontes geradoras são modeladas com variáveis inteiras e as incertezas na demanda de energia tratadas

através do critério de mínimo-máximo arrependimento [21], de forma análoga ao modelo MODPIN. Além disto adota-se a mesma técnica de resolução utilizada em [3], ou seja, o princípio de Decomposição de Benders [22].

Em 2004, uma aplicação do MELP ao sistema elétrico brasileiro foi apresentada em [5]. Nesta aplicação, evidenciou-se a limitação da técnica de decomposição adotada, pois em cada iteração do método era resolvido um algoritmo branch-and-bound que apresentava um comportamento menos eficiente à medida que novos cortes de Benders eram adicionados ao longo do processo iterativo. Devido a este fato e considerando-se também que o tratamento do problema de operação adotado foi bastante simplificado, optou-se por resolver o problema sem decomposição, adotando-se um algoritmo branch-and-cut disponível em software comercial. Vale ressaltar que para tornar o problema tratável do ponto de vista computacional, devido as dimensões do caso brasileiro, não foi considerado o tratamento das incertezas na demanda de energia, ou seja, o problema foi resolvido considerando-se um único cenário de demanda. Menciona-se em [6] uma aplicação deste modelo a um caso real de planejamento da expansão do sistema elétrico brasileiro, semelhante aquele publicado nos estudos oficiais do Plano Nacional de Energia 2030 [7].

Podem ser citados desde 2004 até a presente data uma série de trabalhos que também fazem uso de pacotes de otimização no estado-da-arte como o CPLEX ou de meta-heurísticas como algoritmos genéticos, para a resolução direta do PEG, sem fazer uso de decomposições matemáticas. Nestes trabalhos, os estudos de casos apresentados, apesar de não serem de grande porte, consideram em suas formulações aspectos relevantes como a consideração de restrições ambientais, análise multiobjetivo e a integração com outros setores energéticos, como o de gás natural e transportes. Decidiu-se então subdividir estes trabalhos nestes três aspectos citados, e também naqueles que desenvolvem métodos de decomposição para o tratamento de problemas de grande porte, principalmente envolvendo aspectos de incertezas, seja na demanda futura de energia ou em preços de combustíveis.

### **Modelos PEG com Formulação Multiobjetivo**

Em 2004, ANTUNES *et al.* [26] em Portugal, apresentaram um modelo multiobjetivo de programação inteira mista para o PEG. Os autores propõem um método iterativo baseado na métrica de Tchebycheff para tratar as funções objetivo envolvidas (minimização de custos e impactos ambientais), utilizando também o algoritmo branch-and-bound para a resolução dos problemas de programação inteira. Apresentam também uma aplicação a um caso exemplo de pequenas dimensões de Portugal.

Em 2007, MEZA *et al.* [27] desenvolvem um modelo multiobjetivo de programação linear aplicado a um caso exemplo do México, onde são consideradas a minimização de custos, impactos ambientais e riscos relacionados a importação de

combustíveis. Em 2010, TEKINER *et al.* [28] propõem um modelo MIP multiobjetivo para o PEG associado com simulação de Monte Carlo, neste caso resolvem o problema diretamente através de um algoritmo branch-and-bound, considerando a minimização de custos e impactos ambientais.

Em 2011, PEREIRA *et al.* [29] propõem um modelo MIP multiobjetivo para o PEG, considerando reservatórios, usinas reversíveis, tratamento de ponta e duas séries de afluências, resolvendo o problema diretamente através do pacote de otimização GAMS e aplicando o mesmo a um caso teste de Portugal. Ainda em 2011, UNSIHUAY *et al.* [30] propõem um modelo MIP para o PEG considerando três funções objetivos, quais sejam, a minimização de custos de investimento e operação, minimização do ciclo de vida de gases de efeito estufa e maximização da diversificação do mix de geração de energia. A metodologia é aplicada a um sistema teste com um horizonte de planejamento de 10 anos, envolvendo três patamares da curva de carga e onze projetos de investimento, resultando em um problema de pequeno porte, permitindo sua resolução com reduzido esforço computacional.

### **Modelos PEG com Aspectos Ambientais (Restrições e/ou Penalidades)**

Em 2006, SIRIKUM e TECHANITISAWAD [31] modelam o PEG como um problema de programação não-linear inteira mista onde consideram restrições de confiabilidade e aspectos ambientais. A resolução do problema é feita através de algoritmos genéticos.

Em 2010, MUIS *et al.* [32] propõem modelo MIP resolvido diretamente através de um algoritmo branch-and-bound, que considera restrições de emissões de gases poluentes, aplicando a um caso da Malásia. Ainda em 2010, GIRALDO *et al.* [33] propõem um modelo de PL para o PEG com tratamento de algumas questões ambientais, como taxas e metas de redução de emissões e retirada gradual de operação de tecnologias geradoras ineficientes, aplicando o modelo a um caso dos EUA com horizonte de 20 anos de planejamento. CHEN *et al.* [34] propõem um modelo de PL que considera o impacto de tecnologias de baixa emissão de carbono, utilizando um caso teste da China.

Em 2012, BAKIRTZIS *et al.* [35] propõem um modelo MIP para o PEG considerando a minimização dos custos de investimento e operação, penalização das emissões de poluentes e consideração de manutenções, aplicando o modelo ao sistema hidrotérmico da Grécia e utilizando diretamente um algoritmo branch-and-bound para a sua solução. GIRALDO *et al.* [36] propõem um modelo de PL para o PEG considerando restrições de emissões e um fluxo DC simplificado, sendo a dimensão do maior caso teste em torno de 80 mil variáveis contínuas e 47 mil restrições.

Recentemente, em 2013, foi proposto em [37] um aprimoramento do modelo MELP, conforme proposto em [38], onde são considerados custos referentes aos

impactos ambientais associados a construção e operação de usinas hidrelétricas e termelétricas. Os autores resolvem o problema diretamente, através do algoritmo branch-and-cut disponível no pacote de otimização CPLEX 11.0. O caso de estudo mencionado possui três subsistemas energéticos, com um total de 13 projetos de usinas candidatas a expansão, resultando em um caso de pequena dimensão com 17.124 variáveis, sendo 720 binárias, e 13.522 restrições.

## Modelos PEG Integrados

Em 2007, UNSIHUAY *et al.* [39] desenvolvem um modelo similar ao MELP [5], incorporando a cadeia de suprimento de gás natural ao sistema elétrico, resolvendo o problema diretamente através de um algoritmo branch-and-cut. QUELHAS *et al.* [40] integram o problema de planejamento da expansão do sistema elétrico com as cadeias energéticas de carvão e gás natural, modelando o problema como um fluxo em redes, que apresenta a vantagem de existirem algoritmos exatos em grafos para sua resolução.

Em 2008, nos EUA IBÁÑEZ *et al.* [41] propõem um modelo de fluxo em redes integrado de planejamento da expansão dos sistemas elétrico e de transportes, considerados interdependentes: o setor de transporte requer energia na forma de combustível, e o setor de energia requer o transporte físico de recursos energéticos em sua forma primária, como o transporte de gás natural e carvão para operação das usinas termelétricas.

Em 2009, a inclusão da representação do sistema de gás natural ao MELP é proposta em [8]. A integração deste sistema é realizada através da operação das usinas termelétricas que utilizam o gás natural como seu combustível. O suprimento deste combustível deve ser assegurado tanto para atender a demanda destas usinas quanto para atender os outros setores da economia como o setor industrial. São considerados diversos componentes desta cadeia energética, como os gasodutos e terminais de recebimento de gás natural liquefeito.

Em 2010, UNSIHUAY *et al.* [42] desenvolvem um modelo semelhante aquele apresentado em [39] incorporando a representação do armazenamento de gás natural. Ainda em 2010, McCALLEY *et al.* [43] propõem um modelo multiobjetivo de PL para o planejamento de longo prazo integrado do sistema elétrico (Fluxo DC) com a infraestrutura de transportes, utilizando um algoritmo multi-objetivo evolucionário juntamente com programação linear de fluxo em redes.

Em 2012, SHARAN e BALASUBRAMANIAN *et al.* [44] propõem um modelo MIP de planejamento integrado da geração e transmissão (Fluxo DC), incluindo restrições de disponibilidade e transporte de combustíveis. Os autores aplicam o modelo a um sistema teste dos EUA, resolvendo o problema diretamente com um algoritmo branch-and-bound.

## Técnicas de Decomposição Matemática

Recentemente, foram desenvolvidos alguns trabalhos aplicados ao PEG com foco em técnicas de decomposição matemática. Citam-se, em 2007, MARCATO e SAGASTIZÁBAL [45] introduzem restrições ambientais em um problema de planejamento da expansão de um sistema térmico formulado como um problema de programação estocástica de dois estágios e resolvido por um algoritmo de planos de corte. SIRIKUM *et al.* [46] propõem um modelo de programação não-linear inteira mista para o problema de planejamento da expansão considerando restrições de confiabilidade e aspectos ambientais. Decomposição de Benders é utilizada para dividir o problema no subproblema de investimento (não-linear inteiro misto resolvido através de algoritmos genéticos) e no subproblema de operação (linear), aplicando a metodologia a um caso da Tailândia.

Em 2009, SINGH *et al.* [1] aplicaram Decomposição de Dantzig-Wolfe a um problema de programação estocástica inteira mista para o planejamento da expansão da capacidade de geração, com estrutura matemática semelhante ao MELP. Com esta técnica, os autores resolveram problemas com até 250.000 variáveis binárias que representam casos reais do sistema elétrico da Nova Zelândia.

Em 2011, CARERI *et al.* [47] propõem um modelo MIP para o PEG, considerando dentre outras características, restrições de emissão de CO<sub>2</sub> e políticas de tecnologias renováveis. Utilizam a Decomposição de Benders implementada no pacote MATLAB, em conjunto com o pacote de otimização CPLEX, aplicando-os a um sistema teste da Itália. Ainda em 2011, KIM *et al.* [48] propõem um modelo de fluxo em redes para o PEG utilizando a Decomposição de Benders onde o problema mestre determina o cronograma de expansão e os subproblemas a operação e confiabilidade do mesmo, aplicando o modelo em um caso teste da Korea.

Em 2012, SAGASTIZÁBAL e SOLODOV [49] resolvem o PEG modelado como um problema de programação linear estocástico em dois estágios. O modelo utilizado assemelha-se àquele desenvolvido em [45], com uma importante diferença que além de considerar emissões de poluentes por parte das usinas termoelétricas, considera-se também a poluição da água de rios e lagos pelos resíduos sólidos liberados por estas termoelétricas. Este novo tipo de restrição classifica-se como convexa não-diferenciável e os autores utilizam o método de feixes apresentado em [50] para tratar o problema através da Decomposição de Benders.



### 1.1.1 Observações Gerais

Diante do exposto pode-se perceber que os trabalhos mais recentes propõem para o PEG diversos tipos de aperfeiçoamentos em sua modelagem. Em especial destacam-se a consideração de incertezas, seja da demanda futura de energia elétrica ou nos custos relativos a operação de usinas e de impactos ambientais. Percebe-se também esforços referentes a modelagem de restrições ambientais, principalmente aquelas referentes a emissões de gases de efeito estufa. A integração com outros setores energéticos também é motivo de estudo, principalmente na integração do setor elétrico com o setor de gás natural. Outro tema de desenvolvimento importante é aquele referente a consideração de análise multicritério através da consideração de diversas funções objetivo.

No entanto, também pode-se notar que a quase totalidade destes trabalhos que não fazem uso de técnicas de decomposição matemática estão condicionados ao problema da dimensionalidade, por se tratarem de problemas de programação inteira mista. Tomando-se como exemplo o trabalho de aplicação do MELP descrito em [6], observa-se que se trata de um caso teste com aproximadamente 15000 variáveis binárias e dezenas de milhares de variáveis contínuas e restrições. Se para este trabalho, os autores tivessem considerado aspectos de incertezas, por exemplo na demanda futura de energia elétrica, de tal maneira como foi feito em [4, 37], este problema seria intratável do ponto de vista computacional, como será apresentado nos capítulos seguintes desta tese.

Sendo assim, antes de se pensar em qualquer consideração de incertezas na formulação do modelo MELP, é impreterível que casos de grandes dimensões possam ser adequadamente tratados através de metodologias de otimização no estado-da-arte da programação inteira, de forma a fornecer em tempo computacional aceitável boas soluções viáveis para o problema.

De todos os trabalhos desenvolvidos até o presente apenas aquele descrito em SINGH *et al.* [1] possui característica promissora para a resolução de instâncias de Programação Estocástica Inteira Mista de grande porte, pois os autores reportam a resolução de casos com um quarto de milhão de variáveis binárias. Neste trabalho os autores consideram incertezas na demanda futura de energia a ser atendida e empregam a técnica de Decomposição de Dantzig-Wolfe para a resolução do problema. Segundo os mesmos, a relaxação linear do problema mestre restrito, na grande maioria dos casos, satisfaz as restrições de integralidade.

Na seção seguinte é apresentada uma exposição geral do modelo MELP que será o foco principal deste trabalho de tese.

## 1.2 MELP - Modelo Brasileiro de Planejamento da Expansão da Geração a Longo Prazo

Diferentemente de outros grandes sistemas elétricos do mundo, com base predominantemente térmica, o sistema elétrico brasileiro tem e deverá continuar a ter, nas próximas duas ou três décadas, a hidroeletricidade como a sua principal fonte de produção. Essa predominância hidroelétrica resulta em uma variabilidade da geração de energia hidrelétrica decorrente da característica estocástica das vazões afluentes aos reservatórios

Devido à esta variabilidade, tornou-se necessário adotar modelos estocásticos tanto no planejamento da operação, quanto no planejamento da expansão de médio prazo. No entanto, para o planejamento da expansão da geração de longo prazo, estes modelos apresentam limitações de elevado esforço computacional. Sendo assim, torna-se imperativo assumir hipóteses simplificadoras, que permitam derivar modelos matemáticos que representem de forma adequada as incertezas hidrológicas do problema com uma precisão condizente com o horizonte de estudo.

Neste sentido, o MELP adota em sua formulação apenas os cenários hidrológicos, crítico e médio, para analisar a adequação do atendimento à demanda para cada período do horizonte de planejamento. O MELP considera em sua função objetivo os custos de construção de unidades geradoras e troncos de interligação, e os custos associados à operação das usinas apenas em condições de hidrologia média.

Define-se **período hidrológico crítico** como sendo o período de tempo, da sequência histórica de vazões, em que o armazenamento do sistema vai de seu nível máximo (todos os reservatórios estão cheios) ao seu nível mínimo (geração nula), sem re-enchimentos totais intermediários, no atendimento da energia firme do sistema <sup>1</sup>. Sendo assim, as restrições relativas a condição de hidrologia crítica modeladas no MELP garantem que, caso ocorra algum período crítico ao longo do horizonte de planejamento, o sistema terá capacidade instalada suficiente para atendê-lo sem a ocorrência de déficits de energia, independentemente do custo operativo associado a este atendimento, razão pela qual a operação nesta condição hidrológica não é valorizada na função objetivo.

Na formulação proposta para o MELP são consideradas apenas as disponibilidades de geração média ou crítica de cada usina hidrelétrica, associadas aos cenários de hidrologia média e crítica, respectivamente. Estas disponibilidades são dadas pela energia média da usina que seria sua geração média anual estimada, e pela energia crítica que seria a quantidade média de energia que a usina é capaz de gerar ao longo

---

<sup>1</sup>Energia Firme de um sistema gerador é, no caso de repetição das afluições do registro histórico, a maior quantidade possível de energia capaz de ser produzida continuamente pelo sistema, com as mesmas características do mercado, sem a ocorrência de déficits de energia [13]

do período crítico do sistema, com este atendendo à sua energia firme [13].

A análise da operação do sistema no MELP na formulação apresentada [4–6], tanto no cenário hidrológico médio quanto no crítico, era feita em base anual, considerando-se as energias média e crítica das usinas hidrelétricas, que seriam suas respectivas disponibilidades de geração anual para cada condição hidrológica. Tendo em vista que o potencial hídrico ainda não explorado no Brasil está basicamente localizado na região amazônica do país, distante dos grandes centros de carga, e que nesta região as vazões afluentes aos rios são altamente sazonais com os períodos secos não coincidentes com outras bacias hidrográficas do país, faz-se necessário a modelagem no MELP desta variação sazonal dentro do ano. O tratamento desta característica particular do Brasil possibilita que o modelo contabilize, a capacidade de geração adicional necessária para garantir um suprimento confiável de energia nas estações secas, e a capacidade adicional de interconexões necessárias para escoar o excesso de energia produzida nas estações chuvosas. Desta forma a análise da operação em base anual no MELP foi substituída pela análise da operação em base semestral. Um estudo detalhado da inclusão da sazonalidade no MELP foi recentemente desenvolvido por LISBOA *et al.* [10].

Com relação as usinas termelétricas, por terem sua operação em base complementar as usinas hidrelétricas, a sua disponibilidade de geração em cada condição hidrológica é calculada através de fatores de participação térmicos, em condições de hidrologia média e crítica. Estes fatores permitem calcular de forma aproximada a operação destas usinas e são definidos em termos da probabilidade de uma usina termelétrica operar na base (geração máxima) em um determinado cenário de hidrologia [4, 38].

O MELP considera em sua modelagem as usinas geradoras e os troncos de interligações entre subsistemas elétricos. Em cada período de estudo as decisões de investimento em usinas hidrelétricas, termelétricas e intercâmbios são representadas como variáveis binárias e a geração de energia destas usinas, bem como os fluxos de energia nos intercâmbios, são representados como variáveis contínuas. O atendimento a demanda de energia em cada subsistema elétrico, patamar de carga e estação sazonal, é feito através das gerações de energia nas usinas hidrelétricas e termelétricas, e dos fluxos de energia através dos intercâmbios.

Ainda em relação à operação das usinas termelétricas, o modelo MELP em sua proposta inicial assume a premissa de que não há restrições de suprimento de combustíveis nas usinas termelétricas. Esta premissa pode ser considerada aceitável para os combustíveis derivados do petróleo como o óleo combustível ou o óleo diesel, no entanto não é condizente com a realidade nacional atual do combustível gás natural. A demanda por este combustível passou a ter um crescimento expressivo nos últimos anos, tanto pelo setor elétrico com usinas termelétricas utilizando turbinas a ciclo

combinado quanto pelo setor industrial, comercial, residencial e de transportes. O desenvolvimento da indústria de gás natural resultou em um processo natural de integração entre estes setores em diversos países do mundo. No Brasil, este processo de integração iniciou-se no final da década de 90, notadamente com a construção do gasoduto Brasil-Bolívia e das primeiras usinas termelétricas a gás natural conectadas ao sistema interligado nacional.

A cadeia energética do gás natural é constituída por equipamentos de exploração, extração, unidades de processamento de gás natural úmido (UPGN), unidades de regaseificação de gás natural liquefeito (GNL) (para receber o GNL importado através de navios criogênicos ou metaneiros), gasodutos e sistema de distribuição.

O modelo MELP partia da premissa que seriam feitos todos os investimentos de infra-estrutura necessários na cadeia energética do gás natural, e considerava que o retorno dos investimentos, bem como os custos de operação e manutenção dos gasodutos, estavam incluídos no custo deste combustível. Entretanto, o planejamento da expansão dos gasodutos não é um problema trivial, envolvendo elevados investimentos, além do que não sendo o gás natural destinado exclusivamente ao setor elétrico, existe uma competição pelo seu uso com os setores industrial, residencial e de transportes. Portanto, não é razoável assumir a hipótese de que o gás natural estará disponível para as usinas termelétricas sempre que o setor elétrico necessitar, pois o mesmo poderá estar sendo demandado por outros setores da economia nos períodos de estiagem, ou mesmo, pode não existir infra-estrutura suficiente no país para se atender esta demanda.

A representação matemática da cadeia energética do gás natural é feita de maneira semelhante à adotada para o sistema elétrico brasileiro, ou seja, são criados subsistemas de gás natural interligados por gasodutos, que podem ou não representar as mesmas áreas geográficas que os subsistemas elétricos. Os gasodutos apresentam limites mínimo e máximo de operação, de forma análoga aos troncos de interligação. O consumo de gás natural de uma usina termelétrica é função linear da sua geração, ou seja, o volume de gás necessário para produzir uma dada quantidade de energia elétrica é calculado com base nos valores constantes da eficiência de uma usina termelétrica e, da quantidade de energia contida em um dado volume de gás. A demanda total de gás natural de cada subsistema, é definida pela soma da demanda de gás natural de usinas termelétricas e a demanda de gás natural dos outros setores da economia.

Portanto, o MELP é um modelo de programação linear inteira mista que define ao longo do horizonte de planejamento um cronograma de construção de usinas hidrelétricas, termelétricas, troncos de interligação entre subsistemas elétricos, unidades de regaseificação de GNL e gasodutos, visando atender a demanda futura de energia elétrica e de gás natural de maneira confiável e econômica para o país.

## Integração com Outros Modelos de Planejamento

Para subsidiar os estudos oficiais do governo e de agentes do setor elétrico o CEPEL dispõe de uma cadeia integrada de modelos de otimização e simulação [51], para o planejamento da expansão da geração e da operação energética (Figura 1.1), da qual o MELP é parte integrante. Uma metodologia de integração entre os modelos MELP e NEWAVE foi recentemente proposta em [52]. Esta integração tem por objetivo ajustar o cronograma de expansão obtido pelo MELP com uma representação mais detalhada da operação através do NEWAVE. Em [52] a metodologia é aplicada a um problema real de planejamento da expansão da geração com horizonte de 15 anos.

Nesta cadeia integrada, os modelos desenvolvidos abrangem os mais diversos horizontes de estudo, desde o planejamento da expansão de longo prazo com horizonte de até 30 anos, passando pelo planejamento da operação de médio prazo com horizonte de até 15 anos, até o planejamento da programação da operação com horizonte semanal. Conforme mencionado anteriormente quanto mais longo for o horizonte de estudo mais simplificado, em termos de representação do sistema, o modelo deve ser. Ao contrário, quanto menor for o horizonte de estudo, mais detalhada será a representação do sistema no modelo.

Observando esta cadeia fica claro também a importância da modelagem do MELP como um problema de programação inteira. Visto que o mesmo é um modelo para estudos de longo prazo, seria razoável admitir que estes projetos pudessem assumir valores fracionários, indicando assim apenas os potenciais energéticos a serem explorados ao longo do horizonte de planejamento. Em outras palavras, o modelo MELP poderia ser um modelo de programação linear. No entanto, não seria possível informar um plano de expansão com usinas fracionárias para um modelo estocástico como o NEWAVE, pois as informações necessárias para a correta simulação da usina, como por exemplo curvas de cota-volume e cota-vazão são calculadas considerando todo o reservatório da usina e não somente parte do mesmo.

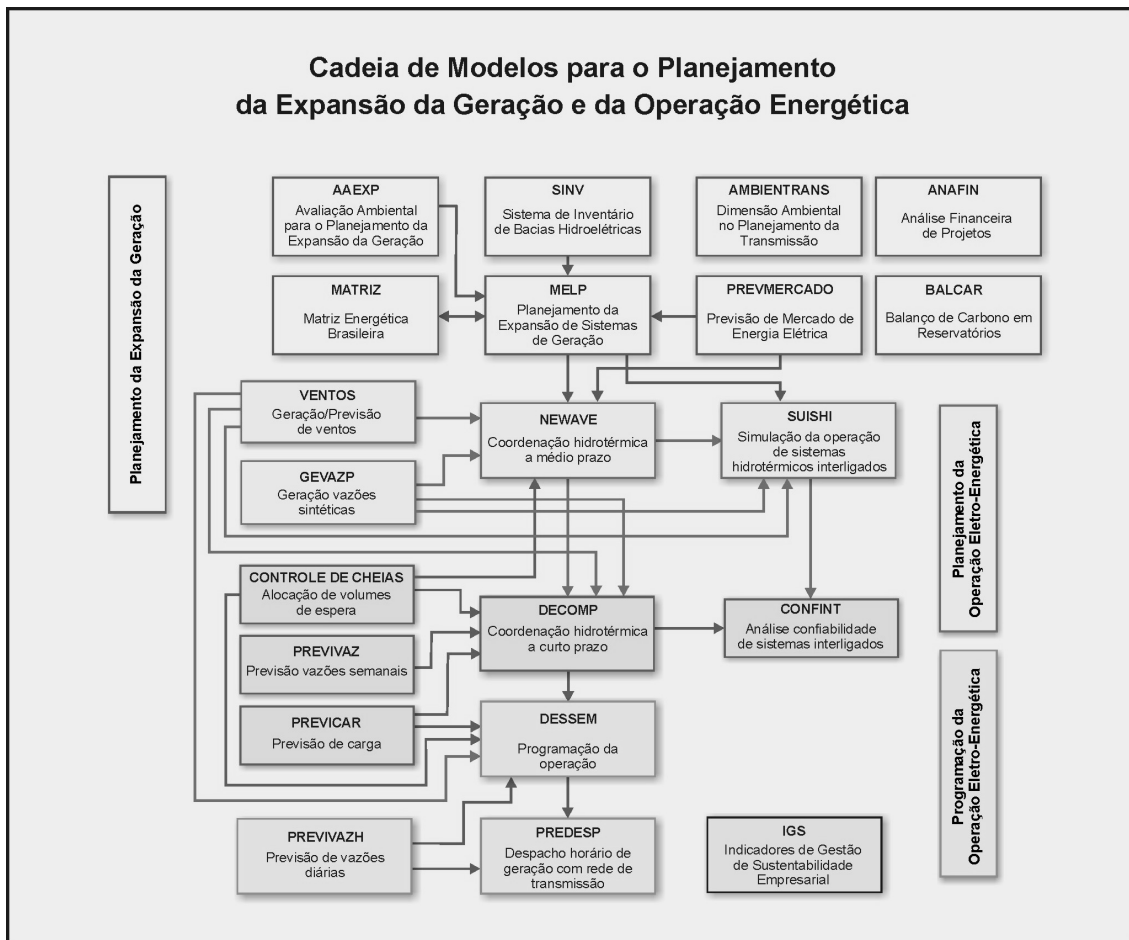


Figura 1.1: Cadeia Integrada de Modelos (Fonte: CEPEL)

## Capítulo 2

# Formulação Matemática do MELP

Neste capítulo é apresentado o modelo MELP em detalhes. Nas primeiras seções são descritas as principais características referentes a modelagem adotada, como a definição dos subsistemas elétricos e de gás natural, bem como os principais parâmetros das unidades de geração e transmissão de energia elétrica, e das tecnologias envolvidas na modelagem do sistema de gás natural. A seção 2.2 segue com a descrição de uma formulação matemática detalhada sugerida para o modelo [53], e a introdução de uma notação compacta e matricial, utilizada nos capítulos posteriores. Finalmente, na seção 2.4 é apresentada de maneira sintética uma descrição dos algoritmos de solução empregados no MELP, bem como as limitações apresentadas pelos mesmos na resolução de instâncias de grande porte do modelo.

### 2.1 Considerações Gerais

No problema de planejamento da expansão da geração de longo prazo a operação do sistema hidrotérmico interligado deve ser representada de maneira simplificada, pois além da falta de dados necessários para a modelagem do problema, como por exemplo as curvas de cota-volume e cota-vazão utilizadas para a operação das usinas hidrelétricas, não seria necessário em um enfoque de longo prazo, e nem possível tratá-lo com a riqueza de detalhes utilizada em estudos de curto prazo. Esta característica se impõe fundamentalmente pelo enorme esforço computacional demandado, pois estariasse trabalhando com um problema multi-estágio de grande porte em Programação Inteira Mista Estocástica. A seguir são abordados alguns aspectos de modelagem do problema antes de apresentar uma formulação matemática sugerida para o MELP [53].

## 2.1.1 Representação do Sistema Elétrico e de Gás Natural

Nesta seção são apresentados alguns aspectos da modelagem dos subsistemas elétricos e de gás natural. O sistema elétrico brasileiro é composto de unidades geradoras de energia (usinas hidrelétricas, usinas termelétricas e tecnologias renováveis, tais como usinas eólicas) que atendem a centros de carga através da rede elétrica.

Na Figura 2.1 é apresentado o Sistema Interligado Nacional (SIN), com seus centros de carga, centros de geração de energia e linhas de transmissão. Pode-se observar que a maioria destes centros de carga localizam-se ao longo da costa brasileira e que as maiores e principais usinas hidrelétricas, como Tucuruí, Serra da Mesa ou Itaipu, localizam-se afastadas dos mesmos o que evidencia a necessidade de linhas de transmissão de longa distância. Estas linhas possuem também a função de interligar as bacias hidrográficas e regiões com características hidrológicas heterogêneas de modo a otimizar a geração de energia hidrelétrica. Ainda na Figura 2.1 as linhas cheias são as linhas de transmissão existente enquanto as pontilhadas são projetos definidos em planos oficiais de expansão de energia.



Figura 2.1: Sistema Interligado Nacional (SIN)

Em problemas de planejamento com horizonte de longo prazo procura-se determinar a capacidade a ser adicionada aos blocos de geração hidráulica e térmica, bem como os reforços necessários nos grandes troncos de interligação. As tecnologias de geração de energia são agrupadas em subsistemas de geração de energia elétrica, e devido ao fato do sistema brasileiro ser fortemente baseado na hidroeletricidade,



estes subsistemas englobam os grandes blocos de geração hidráulica, localizados nas principais bacias hidrográficas. No exemplo da Figura 2.2, ao lado da ilustração das Bacias Hidrográficas Brasileiras (Fonte: IBGE), são apresentados os subsistemas atualmente considerados em estudos oficiais de planejamento da expansão no Brasil. Convém mencionar que os fluxos de energia elétrica entre estes subsistemas são realizados através dos grandes troncos de interligação.

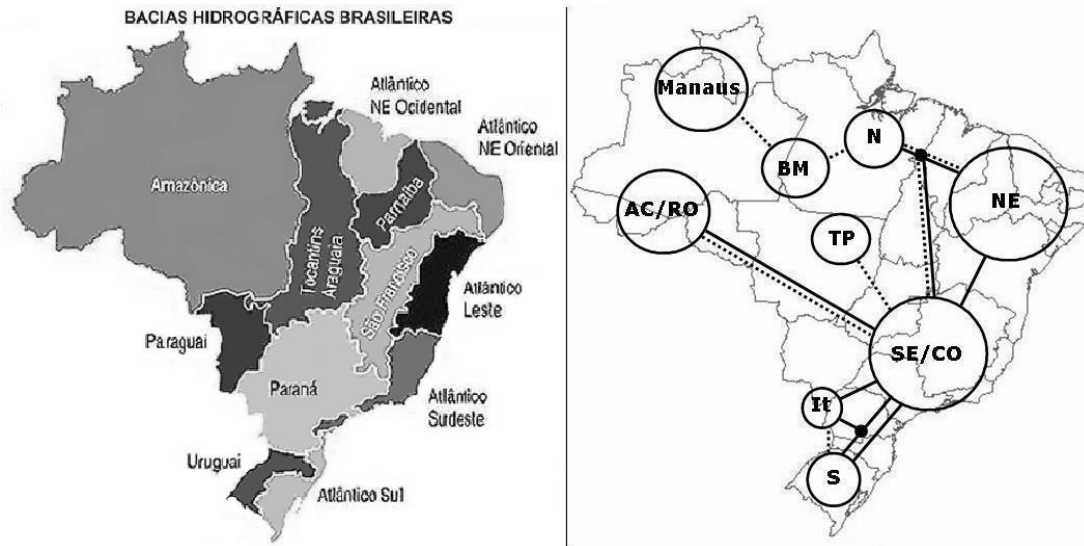


Figura 2.2: Bacias Hidrográficas Brasileiras / Subsistemas de Geração de Energia

Defina-se então, neste trabalho de tese, um **subsistema elétrico** como sendo um subconjunto do sistema elétrico que contém um conjunto de tecnologias de geração de energia elétrica (usinas hidrelétricas, termelétricas e tecnologias renováveis) e que pode, ou não, possuir uma demanda de energia elétrica a ser atendida em cada período do horizonte de planejamento. Os subsistemas elétricos são interconectados entre si através dos troncos de interligação.

No exemplo da Figura 2.2 o país foi dividido em 9 subsistemas, sendo NE (região Nordeste), SE/CO (regiões Sudeste e Centro-Oeste), S (região Sul), N (região Norte, contendo a hidrelétrica de Tucuruí), It (usina de Itaipu binacional), AC/RO (regiões definidas pelos estados de Acre e Rondônia, onde localiza-se o complexo da bacia hidrográfica do Madeira), Manaus, BM (usina de Belo Monte) e TP (complexo da bacia hidrográfica do Teles Pires/Tapajós). As linhas cheias representam os troncos de interligação existentes e as linhas pontilhadas aqueles candidatos a expansão.

Vale ressaltar que em subsistemas como BM e AC/RO as usinas hidrelétricas ainda estão em construção e cada tronco de interligação candidato a expansão é composto por diversas linhas de diferentes capacidades, modeladas no MELP individualmente.

No que tange ao sistema de gás natural, são consideradas unidades de extração de gás natural úmido, unidades de processamento de gás natural (UPGN) que

produzem o gás natural seco, unidades de regaseificação de gás natural liquefeito (GNL) e o sistema de gasodutos. Em estudos de longo prazo o que é importante é determinar se existe capacidade instalada de extração e produção de gás natural, infraestrutura nos portos para receber GNL importado e capacidade nos gasodutos para transportar uma certa quantidade de gás natural de uma região a outra do país, de tal forma a atender a demanda do setor elétrico e de outros setores. Ressalta-se que o volume de gás natural demandado pelo setor elétrico deve ser aquele necessário a atender a demanda de combustível das usinas termelétricas a gás natural.

Neste sentido define-se então um **subsistema de gás natural** como sendo uma região geográfica que contém componentes do sistema de gás natural, tais como unidades de regaseificação de GNL, e que pode, ou não, conter usinas termelétricas que utilize este combustível. No caso em que este contiver alguma usina termelétrica, a geração desta é contabilizada como uma demanda de gás natural para o subsistema. Além disto, os gasodutos de interligação entre os subsistemas de gás natural, expressariam a capacidade total de transporte de todos os gasodutos que conectam pares distintos de subsistemas.

A Figura 2.3 descreve o sistema de gás natural brasileiro (Fonte: Petrobras) junto, com um exemplo ilustrativo, de sua representação através de subsistemas. Nesta representação o país foi dividido em 3 subsistemas definidos por elipses. Considerou-se dois pólos de importações de GNL no Nordeste/Norte e Sudeste/Sul, o volume de gás natural importado da Bolívia através do GASBOL (Gasoduto Brasil-Bolívia) representado pela seta com origem na Bolívia e a possibilidade de instalação de um gasoduto de interligação entre os subsistemas de gás natural Nordeste/Norte e Sudeste/Sul. Ainda na Figura 2.3 pode ser vista a integração entre os subsistemas elétricos e de gás natural, sendo o acoplamento entre os mesmos realizado através das usinas termelétricas movidas a gás natural.

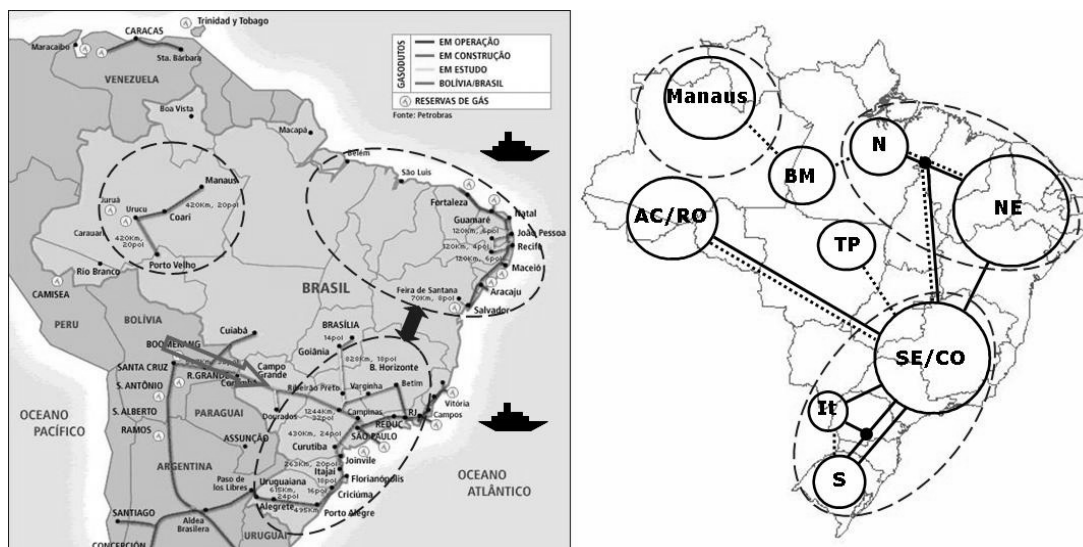


Figura 2.3: Sistema de Gás Natural Brasileiro / Integração com o Sistema Elétrico

## 2.1.2 Aspectos da Modelagem do Sistema Elétrico

No modelo MELP, a função objetivo consiste em minimizar a soma dos custos de investimentos referentes a um cronograma de construção de usinas geradoras (hidrelétricas, termelétricas e de tecnologias renováveis) e troncos de interligações, além dos custos de operação ao longo do horizonte de planejamento. Estes últimos, compreendem os custos associados ao consumo de combustíveis utilizados na geração das usinas termelétricas e aqueles correspondentes aos déficits de energia, definidos numa análise da operação para um cenário de hidrologia média. Esta análise se baseia em um conjunto de restrições que incluem o balanço de demanda (onde é permitido o déficit de energia), limites operacionais e de suprimento de energia.

Adicionalmente, o modelo analisa a operação do sistema elétrico para um cenário de hidrologia crítica. Esta análise se baseia em um conjunto de restrições semelhantes ao da análise para hidrologia média, porém a restrição de atendimento à demanda de energia elétrica não admite déficit de energia. Impõe-se assim, diante das premissas assumidas pelo MELP, a expansão necessária do parque gerador para atender a demanda de energia elétrica futura sem risco de déficit.

Os limites de suprimento de energia das usinas geradoras ao longo de um determinado período de análise dependem do cenário de hidrologia considerado e da estação do ano em análise. No caso das usinas hidrelétricas, a produção de energia esta limitada à energia média no cenário de hidrologia média, e à energia firme no cenário de hidrologia crítica. Estes conceitos de energia foram estendidos para as usinas termelétricas através da definição de fatores de participação médio e crítico que reproduzem de forma aproximada a operação de caráter complementar das usinas termelétricas em cada cenário de hidrologia. A seguir são apresentados os principais conceitos relacionados ao cálculo destas energias e suas variações cíclicas ao longo das estações.

### Usinas Hidrelétricas: Energias Firme e Média das Usinas

Os valores de energia média e firme podem ser obtidos através de modelos que simulam a operação do sistema de usinas hidrelétricas utilizando a série de vazões históricas, como por exemplo o modelo SUSHI-O [54] desenvolvido pelo CEPEL.

Para as usinas que não possuem todos os dados necessários para a simulação, como as curvas de cota-volume ou cota-vazão (devido ao fato de ainda estarem em fase de estudos de inventário), os valores de energia são calculados de forma aproximada com base em informações disponíveis [55]. O MELP assume como uma de suas premissas básicas que a energia firme e média das hidrelétricas não variam de forma significativa ao longo do horizonte de estudo, assumindo assim valores constantes [56].

## Usinas Termelétricas: Fatores de Participação

No MELP as usinas termelétricas operam em regime complementar às usinas hidrelétricas, ou seja, as mesmas somente serão despachadas na base (geração máxima) quando as usinas hidrelétricas atingirem seus níveis máximos de geração. Devido à modelagem simplificada imposta ao sistema hidrotérmico, um limite de geração para as usinas termelétricas é dado pelos valores esperados de suas gerações calculados através da probabilidade da usina estar gerando na base, em condições de hidrologia média e crítica. A esta probabilidade é dado o nome de fator de participação.

O cálculo dos fatores de participação é feito considerando simulações do modelo NEWAVE [14] para as duas condições de hidrologia [57]. Em condição hidrológica média, o fator de participação médio é calculado como a frequência em que a usina esta gerando no máximo ao longo de todo o horizonte, considerando todas as seqüências hidrológicas. Em condição hidrológica crítica, o fator de participação crítico é calculado como a frequência em que a usina está gerando no máximo durante o período crítico, considerando o subconjunto de seqüências hidrológicas que ocasionaram déficit de energia nas simulações citadas.

## Fatores de Sazonalidade

A modelagem da sazonalidade hidrológica no MELP [9, 10] foi feita assumindo uma subdivisão do horizonte de planejamento, onde cada período de análise é subdividido em dois subperíodos. Estes, por sua vez, não precisam necessariamente ter a mesma duração, mas devem ser representativos de uma certa estação do ano, por exemplo, estação das chuvas e estação seca. Faz-se então, para cada subperíodo, uma análise da operação levando-se em consideração a sazonalidade da geração. Isto é feito através da aplicação de fatores sazonais de geração hidráulica aos valores de energia média e firme das usinas hidrelétricas, resultando assim em valores médios sazonais de energia média e firme para as mesmas.

Matematicamente, a formulação do MELP passa a ter, para cada subperíodo e cenário de hidrologia, uma restrição de balanço de demanda, além das restrições operativas. As variáveis operativas (contínuas) são então duplicadas para se representar cada estação. Note que, as variáveis de investimento (binárias) poderiam também ser duplicadas, representando-se assim o investimento em cada estação. No entanto, optou-se por manter sua representação anual para não comprometer ainda mais o desempenho computacional que já é precário em instâncias de grandes dimensões.

No caso das usinas termelétricas, como as mesmas operam em regime complementar às hidrelétricas, suas gerações, em cada estação, serão também complementares, sem a necessidade de utilização de fatores sazonais. No entanto, para algumas usinas específicas, como as termelétricas a bagaço de cana ou eólicas, suas gerações

não possuem características complementares à das hidrelétricas tendo, seus próprios perfis sazonais. Desta forma, para estas usinas são definidos então fatores sazonais particulares.

### **2.1.3 Aspectos da Modelagem do Sistema de Gás Natural**

Para a representação do sistema de gás no MELP, conforme previamente apresentado na seção 2.1.1, são criados subsistemas de gás natural de forma análoga aos subsistemas elétricos, porém não necessariamente em igual número. Subsistemas de gás natural podem ou não representar a mesma região geográfica definida por subsistemas elétricos. São considerados dois tipos de demanda de gás natural, a do sistema elétrico (demanda de gás natural elétrica) e a dos outros setores da economia (demanda de gás natural não elétrica). A demanda de gás natural elétrica em cada subsistema de gás natural é função da geração das usinas termelétricas a gás natural localizadas neste subsistema, enquanto a não elétrica é um parâmetro constante no modelo. Ressalta-se que usinas termelétricas a gás natural de subsistemas elétricos distintos podem estar localizadas em um mesmo subsistema de gás natural.

No balanço de demanda de gás natural para o cenário de hidrologia crítica, diferentemente do que se adota para o balanço de demanda de energia elétrica, pode-se permitir déficit de gás natural. Este déficit é expresso monetariamente na função objetivo pelo custo do combustível alternativo utilizado para cobri-la.

Para o cenário de hidrologia média, o déficit de gás natural é expresso em dois níveis. Este déficit é expresso monetariamente na função objetivo pelo custo do combustível alternativo correspondente. O último nível deve ser referente à parcela da demanda que não pode ser substituída por outro combustível. Este nível é expresso monetariamente na função objetivo pelo custo de déficit de gás natural, valor este a ser definido por órgãos governamentais e/ou agentes do setor de petróleo e gás natural.

No MELP, as tecnologias de exploração, extração e processamento são representadas conjuntamente de forma análoga a uma usina geradora existente do sistema elétrico, porém com um custo operacional referente à soma dos custos de investimentos e operação associados a estas atividades. Em outras palavras, a decisão de investir ou não nestas tecnologias não é modelada. Trata-se de uma simplificação, pois considerou-se que, em função dos elevados investimentos na área de exploração e do elevado nível de incertezas associado a descobertas de novas reservas de gás natural, a representação das mesmas, na forma de variável de decisão, não seria condizente com a natureza dos outros investimentos considerados. Além disso, na ocorrência de novas descobertas, os investimentos em extração e processamento do gás natural seriam naturalmente feitos para compensar aqueles já efetuados na ex-

ploração, isto é, não seriam definidos em função do problema de otimização que está sendo tratado.

Gasodutos são representados de forma semelhante a troncos de interligação entre subsistemas elétricos. Por sua vez, unidades de regaseificação de GNL são modeladas de forma análoga a uma usina geradora de eletricidade, produzindo gás natural seco a partir do gás natural liquefeito. Ambos são representados por variáveis de investimento (binárias) e operação (contínuas).

A parcela da função objetivo referente ao sistema de gás natural corresponde a minimização da soma dos custos de investimentos relativos ao cronograma de construção de gasodutos e unidades de regaseificação de GNL, bem como os custos de operação ao longo do horizonte de planejamento (que incluem aqueles associados à extração/produção de gás natural no subsistema de gás natural), e os custos operativos dos gasodutos e unidades de regaseificação de GNL.

## 2.2 Formulação Matemática

Nesta seção é apresentada uma formulação matemática detalhada do MELP. Primeiramente são definidos todos os conjuntos e índices nela utilizados. A seguir são descritos os parâmetros e variáveis utilizados para modelar os sistemas elétrico e de gás natural. Feito isso são então apresentadas a função objetivo e os conjuntos de restrições de investimento, operação e acoplamento (limites operativos). No que se segue, para um dado conjunto finito de elementos, digamos um conjunto  $P$ , denotamos por  $|P|$  seu número de elementos.

### 2.2.1 Definição de Conjuntos e Índices

$i$ – índice de subsistemas (elétrico/gás);	$l$ – índice de patamar de demanda de energia elétrica;
$j$ – índice de projeto (usinas ou interligações, para o sistema elétrico, e gasodutos ou instalações para importação de GNL, para o sistema de gás natural);	$d$ – índice de patamar de curva de custo de déficit de energia elétrica;
$z$ – índice de subsistema (elétrico/gás natural) vizinho ao subsistema $i$ ;	$d_g$ – índice do patamar de curva de custo de déficit de suprimento de gás natural;
$k$ – índice do período de análise da expansão/operação dado em anos;	$I_e$ – conjunto de subsistemas elétricos;
$s$ – índice de estação do sazonal;	$I_g$ – conjunto de subsistemas de gás natural;
	$K$ – conjunto de períodos de tempo no horizonte de planejamento;

$\mathcal{S}$  – conjunto de estações sazonais;

$\mathcal{L}$  – conjunto dos patamares de demanda que compõem a curva de demanda de energia elétrica;

$\mathcal{D}$  – conjunto dos patamares da curva de custo de déficit de energia elétrica;

$\mathcal{D}_g$  – conjunto dos patamares da curva de custo de déficit de suprimento de gás natural;

$J_i^{HP}$  – conjunto de projetos candidatos de usinas hidrelétricas no subsistema  $i$ ;

$J_i^H$  – conjunto de usinas hidrelétricas existentes e projetos candidatos no subsistema  $i$ , sendo que  $J_i^{HP} \subseteq J_i^H$ ;

$J_i^{EP}$  – conjunto de projetos candidatos de expansão complementar de usinas hidrelétricas existentes no subsistema  $i$ ;

$J_i^E$  – conjunto de usinas hidrelétricas existentes no subsistema  $i$ , com expansão complementar, sendo que  $J_i^E \subseteq J_i^H$ ;

$J_i^{TP}$  – conjunto de projetos candidatos a usinas termelétricas no subsistema  $i$ ;

$J_i^T$  – conjunto de usinas termelétricas existentes e projetos candidatos no subsistema  $i$ , sendo que  $J_i^{TP} \subseteq J_i^T$ ;

$\check{J}_i^T$  – conjunto das usinas termelétricas existentes e projetos candidatos no subsistema  $i$ , que possuem fatores de sazonalidade de geração próprios como usinas termelétricas movidas a bagaço de cana, sendo  $\check{J}_i^T \subseteq J_i^T$ ;

$J_{i,z}^{IP}$  – conjunto de projetos candidatos de interligações entre os subsistemas elétricos  $i$  e  $z$ ;

$J_{i,z}^I$  – conjunto de interligações existentes e projetos candidatos entre os subsistemas elétricos  $i$  e  $z$ , sendo que  $J_{i,z}^{IP} \subseteq J_{i,z}^I$ ;

$\Omega_i^{EL}$  – conjunto de subsistemas elétricos vizinhos ao subsistema elétrico  $i$ ;

$J_i^{GNLP}$  – conjunto de projetos candidatos de instalações para importação de GNL no subsistema de gás natural  $i$ ;

$J_i^{Gnl}$  – conjunto de instalações existentes e projetos candidatos para importação de GNL no subsistema  $i$ , sendo que  $J_i^{GNLP} \subseteq J_i^{Gnl}$ ;

$J_{i,z}^{GNP}$  – conjunto de projetos candidatos de gasodutos entre os subsistemas de gás natural  $i$  e  $z$ ;

$J_{i,z}^{Gn}$  – conjunto de gasodutos existentes e projetos candidatos que ligam o subsistema de gás natural  $i$  ao subsistema  $z$ , sendo que  $J_{i,z}^{GNP} \subseteq J_{i,z}^{Gn}$ ;

$\Phi_i^{Gn}$  – conjunto de subsistemas de gás natural vizinhos ao subsistema de gás natural  $i$ ;

$J_i^{TG}$  – conjunto de usinas termelétricas a gás natural localizadas no subsistema de gás natural  $i$ ;

## 2.2.2 Definição dos Parâmetros do Modelo

$\tau$  – taxa de desconto monetário entre períodos;

### Parâmetros do Sistema Elétrico

$De_{i,s,l}^k$  – demanda de potência (MWmed) a ser atendida no subsistema elétrico  $i$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , da estação  $s$ , do período  $k$ ;

$\theta_{s,l}$  – duração do patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , na estação  $s$ ;

$\delta_{i,l,d}^k$  – custo de déficit no patamar de déficit  $d$ , do subsistema elétrico  $i$ , no patamar de demanda elétrica  $l$ , durante o período  $k$ ;

### Parâmetros das Hidrelétricas

$dh_{i,j}^{min}(dh_{i,j}^{max})$  – período mínimo (máximo) para entrada em operação do projeto candidato a potência inicial  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$dg_{i,j}^{min}(dg_{i,j}^{max})$  – período mínimo (máximo) para entrada em operação do projeto candidato a expansão complementar  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$\phi h_{i,j}^k$  – custo de investimento do projeto candidato a potência inicial  $j$  no subsistema  $i$ , no período  $k$ ;

$\phi g_{i,j}^k$  – custo de investimento do projeto candidato à expansão complementar  $j$  no subsistema  $i$ , no período  $k$ ;

$\underline{H}_{i,j}(\overline{H}_{i,j})$  – potência hidrelétrica mínima(máxima) da usina  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$\overline{G}_{i,j}$  – potência de expansão complementar máxima da usina  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$\overline{E}_{i,j}^h(\tilde{E}_{i,j}^h)$  – energia firme(média), em MWmed, produzida pela usina  $j$  do subsistema  $i$  em condição de hidrologia crítica(média);

$\overline{E}_{i,j}^{hc}(\tilde{E}_{i,j}^{hc})$  – energia firme(média), em MWmed, associada a expansão complementar da usina  $j$  do subsistema  $i$  em condição de hidrologia crítica(média). Ressalta-se, no que se refere a energia firme, que a expansão complementar apenas agrega energia firme a usina caso a mesma ainda não tenha atingido sua potência de base.

$\mathcal{F}_{i,s}^h$  – fator de sazonalidade da geração hidrelétrica no subsistema  $i$  e estação  $s$ , satisfazendo  $\frac{1}{|\mathcal{S}|} \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_{i,s}^h = 1$ ;

### Parâmetros das Termelétricas

$dt_{i,j}^{min}(dt_{i,j}^{max})$  – período mínimo (máximo) para entrada em operação do projeto candidato  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$\phi t_{i,j}^k$  – custo de investimento do projeto candidato  $j$ , do subsistema  $i$ , no período  $k$ ;

$\underline{T}_{i,j}(\overline{T}_{i,j})$  – potência mínima(máxima) da usina termelétrica  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$\overline{F}(c_j)(\tilde{F}(c_j))$  – fator de participação térmico em condição de hidrologia crítica(média) da usina  $j$  (cujo custo de operação é  $c_j$ );

$\overline{E}_{i,j}^t$  – valor esperado (MWmed) da disponibilidade de geração da



usina  $j$ , do subsistema  $i$ , na condição de hidrologia crítica dada por  $[\bar{F}(c_j) \cdot \bar{T}_{i,j} + (1 - \bar{F}(c_j)) \cdot \underline{T}_{i,j}]$ ;

$\tilde{E}_{i,j}^t$  – valor esperado (MWmed) da disponibilidade de geração da usina  $j$ , do subsistema  $i$ , na condição de hidrologia média dada por  $[\tilde{F}(c_j) \cdot \bar{T}_{i,j} + (1 - \tilde{F}(c_j)) \cdot \underline{T}_{i,j}]$ ;

$\mathcal{F}_{i,j,s}^t$  – fator de sazonalidade para a usina termelétrica  $j \in \check{J}_i^T$ , do subsistema elétrico  $i$ , na estação sazonal  $s$ , satisfazendo  $\frac{1}{|\mathcal{S}|} \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_{i,j,s}^t = 1$ ;

$\gamma_{i,j}^k$  – custo unitário de produção da termelétrica  $j$ , do subsistema  $i$ , durante o período  $k$ ;

$\mathcal{F}_{i,j}^{eg}$  – fator de conversão de energia elétrica (MWh) para volume de gás natural ( $Mm^3$ ), consumido na usina termelétrica a gás natural  $j$ , localizada no subsistema de gás natural  $i$ ;

$S_e(i, j)$  – função que identifica o subsistema elétrico ao qual pertence a usina termelétrica  $j$ , localizada no subsistema de gás natural  $i$ ;

### Parâmetros das Interligações

$dz_{i,z,j}^{\min}(dz_{i,z,j}^{\max})$  – período mínimo (máximo) para entrada em operação do projeto candidato  $j$ , conectando os subsistemas  $i$  e  $z$ ;

$\phi z_{i,z,j}^k$  – custo de investimento do projeto candidato  $j$ , conectando os subsistemas elétricos  $i$  e  $z$ , no período  $k$ ;

$\bar{Z}_{i,z,j}$  – capacidade máxima da interligação  $j$ , entre os subsistemas  $i$  e  $z$ ;

$\eta_{i,z,j}^k$  – eficiência da interligação  $j$ , entre os subsistemas  $i$  e  $z$ , durante o período  $k$ ;

### Parâmetros do Sistema de Gás

$Dg_{i,s}^k$  demanda de gás natural para outros usos (demanda não termelétrica), no subsistema de gás natural  $i$ , na estação  $s$ , no período  $k$ ;

$\mu_{i,d_g}^k$  – custo de déficit de gás natural de profundidade  $d_g$ , no subsistema de gás natural  $i$ , durante o período  $k$ ;

$\varphi_i^k$  – custo de produção/extração de gás natural, no subsistema de gás natural  $i$ , no período  $k$ ;

$\underline{Pg}_{i,k}^{\min}(\overline{Pg}_{i,k}^{\max})$  – extração mínima(máxima) de gás natural, no subsistema  $i$ , no período  $k$ ;

### Parâmetros das Unidades de GNL

$dgnl_{i,j}^{\min}(dgnl_{i,j}^{\max})$  – período mínimo (máximo) para entrada em operação do projeto de instalação da unidade de importação de GNL  $j$ , no subsistema  $i$ ;

$\phi gnl_{i,j}^k$  – custo de investimento do projeto de instalação da unidade de importação de GNL  $j$ , no subsistema  $i$ , no período  $k$ ;

$\underline{Ipg}_{i,j}^{\min}(\overline{Ipg}_{i,j}^{\max})$  – volume mínimo(máximo) de importação de GNL na unidade de regaseificação  $j$ , do subsistema  $i$ ;

$\psi_{i,j}^k$  – custo de importação e regaseificação de GNL da instalação  $j$ , do subsistema de gás natural  $i$ , no período  $k$ ;

## Parâmetros dos Gasodutos

$dgas_{i,z,j}^{min}(dgas_{i,z,j}^{max})$  – período mínimo (máximo) para entrada em operação do projeto candidato  $j$ , conectando os subsistemas  $i$  e  $z$ ;

$\phi gas_{i,z,j}^k$  – custo de investimento do gasoduto  $j$ , conectando os subsistemas de gás natural  $i$  e  $z$ , no período  $z$ ;

$\overline{F}g_{i,z,j}^{max}$  – fluxo máximo de gás natural transportado no gasoduto  $j$ , conectando os subsistemas  $i$  e  $z$ ;

$\rho_{i,z,j}^k$  – eficiência do transporte de gás natural no gasoduto  $j$ , conectando os subsistemas  $i$  e  $z$ , durante o período  $k$ ;

$\xi_{i,z,j}^k$  – custo de operação do gasoduto  $j$ , conectando os subsistemas  $i$  e  $z$ , durante o período  $k$ ;

## 2.2.3 Definição das Variáveis do Modelo

### Variáveis do Sistema Elétrico

$\tilde{w}_{i,s,l,d}^k \in \mathbb{R}_+$  – déficit de energia elétrica de patamar de déficit  $d$ , no subsistema  $i$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , na estação  $s$ , durante o período  $k$ , em condição de hidrologia média;

### Variáveis das Hidrelétricas

$xh_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  – projeto candidato a potência inicial da usina hidrelétrica  $j$ , do subsistema elétrico  $i$ , no período  $k$ . O valor unitário significa construir o projeto, e o valor nulo significa não construir;

$\bar{h}_{i,j,s,l}^k(\tilde{h}_{i,j,s,l}^k) \in \mathbb{R}_+$  – produção hidrelétrica referente a potência inicial da usina  $j$  do subsistema elétrico  $i$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$  da estação  $s$  do período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

$xg_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  – projeto candidato a expansão complementar da usina hidrelétrica  $j$ , do subsistema elétrico  $i$ , no período  $k$ . O valor unitário significa construir o projeto, e o valor nulo significa não construir;

$\bar{g}_{i,j,s,l}^k(\tilde{g}_{i,j,s,l}^k) \in \mathbb{R}_+$  – produção hidrelétrica devido a expansão complementar da usina  $j$ , do subsistema elétrico  $i$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , da estação  $s$ , do período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

### Variáveis das Termelétricas

$xt_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  – projeto candidato a usina termelétrica  $j$ , do subsistema  $i$ , no período  $k$ . O valor unitário significa construir o projeto, e o valor nulo significa não construir;

$\bar{t}_{i,j,s,l}^k(\tilde{t}_{i,j,s,l}^k) \in \mathbb{R}_+$  – produção da usina termelétrica  $j$ , subsistema  $i$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , na estação  $s$ , durante o período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

### Variáveis das Interligações

$xz_{i,z,j}^k \in \{0, 1\}$  – projeto candidato de interligação  $j$ , que conecta os subsistemas elétricos  $i$  e  $z$ , no período  $k$ . O valor unitário significa construir o projeto, e o valor nulo significa não construir;

$\bar{z}_{i,z,j,s,l}^k(z_{i,z,j,s,l}^k) \in \mathbb{R}_+$  – fluxo de energia na interligação  $j$ , do subsistema  $i$  para o subsistema  $z$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , da estação  $s$ , do período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

### Variáveis do Sistema de Gás

$\bar{U}g_{i,s}^k(\tilde{U}g_{i,s}^k) \in \mathbb{R}_+$  – produção de gás natural no subsistema  $i$ , no período  $k$ , na estação  $s$ , em condição de hidrologia crítica(média);

$\bar{W}g_{i,s,d_g}^k(\tilde{W}g_{i,s,d_g}^k) \in \mathbb{R}_+$  – déficit de suprimento de gás natural de profundidade  $d_g$ , no subsistema de gás natural  $i$ , estação  $s$ , no período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

### Variáveis das Unidades de GNL

$xgnl_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  – projeto candidato de instalação da unidade de importação de

GNL  $j$ , no subsistema de gás natural  $i$ , no período  $k$ . O valor unitário significa construir o projeto, e o valor nulo significa não construir;

$\bar{I}gnl_{i,j,s}^k(\tilde{I}gnl_{i,j,s}^k) \in \mathbb{R}_+$  – quantidade importada/regaseificada de GNL na instalação  $j$ , do subsistema de gás natural  $i$ , na estação  $s$ , do período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

### Variáveis dos Gasodutos

$xgas_{i,z,j}^k \in \{0, 1\}$  – projeto candidato de gasoduto  $j$ , conectando os subsistemas de gás natural  $i$  e  $z$ , no período  $k$ . O valor unitário significa construir o projeto, e o valor nulo significa não construir;

$\bar{F}_{i,z,j,s}^k(\tilde{F}_{i,z,j,s}^k) \in \mathbb{R}_+$  – fluxo de gás natural através do gasoduto  $j$ , conectando o subsistema de gás natural  $i$  ao subsistema  $z$ , na estação  $s$  do período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média);

## 2.2.4 Modelagem Matemática

### Função Objetivo

Para facilitar a exposição, antes de apresentar a função objetivo, vamos discutir seus termos componentes, fazendo menção à forma como estes serão identificados naquela função.

A função objetivo do MELP pode ser dividida em quatro parcelas distintas. O investimento em usinas hidrelétricas e termelétricas, e em troncos de interligação, em cada período de planejamento  $k$ , é representado pela parcela  $S_{E,Inv}^k$  (2.1). Na operação do setor elétrico, em cada período de planejamento  $k$ , é considerado apenas o custo da geração termelétrica e de possíveis déficits de energia, em condições hidrológicas médias. Esta parcela é representada por  $S_{E,Op}^k$  (2.2).

No que se refere ao sistema de gás natural, a parcela  $S_{G,Inv}^k$  (2.3) representa, em cada período de planejamento  $k$ , o investimento em infra-estrutura de importação/regaseificação de gás natural liquefeito (GNL) e gasodutos. No problema de operação deste sistema, ou seja, na parcela representada por  $S_{G,Op}^k$  (2.4), são representados os custos de extração de gás natural em cada subsistema, de importação/regaseificação de GNL, de transporte em gasodutos e o custo de déficit de gás natural, todos em condições hidrológicas médias. Os termos da função objetivo são então descritos como:

$$S_{E,Inv}^k = \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^{HP}}} \phi h_{i,j}^k \cdot x h_{i,j}^k + \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^{EP}}} \phi g_{i,j}^k \cdot x g_{i,j}^k + \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^{TP}}} \phi t_{i,j}^k \cdot x t_{i,j}^k \quad (2.1)$$

$$+ \sum_{\substack{(i,z)_{z \geq i} \in \{I_e, \Omega_i^{EL}\} \\ j \in J_{i,z}^{IP}}} \phi z_{i,z,j}^k \cdot x z_{i,z,j}^k$$

$$S_{E,Op}^k = \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^T \\ s \in \mathcal{S} \\ l \in \mathcal{L}}} \gamma_{i,j}^k \cdot \tilde{t}_{i,j,s,l}^k + \sum_{\substack{i \in I_e \\ s \in \mathcal{S} \\ l \in \mathcal{L} \\ d \in \mathcal{D}}} \delta_{i,l,d}^k \cdot \tilde{w}_{i,s,l,d}^k \quad (2.2)$$

$$S_{G,Inv}^k = \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^{GNLP}}} \phi gnl_{i,j}^k \cdot x gnl_{i,j}^k + \sum_{\substack{(i,z)_{z \geq i} \in \{I_g, \Phi_i^{Gn}\} \\ j \in J_{i,z}^{GNP}}} \phi gas_{i,z,j}^k \cdot x gas_{i,z,j}^k \quad (2.3)$$

$$S_{G,Op}^k = \sum_{\substack{i \in I_g \\ s \in \mathcal{S}}} \varphi_i^k \cdot \tilde{U} g_{i,s}^k + \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^{Gnl} \\ s \in \mathcal{S}}} \psi_{i,j}^k \cdot \tilde{I} gnl_{i,j,s}^k \quad (2.4)$$

$$+ \sum_{\substack{(i,z)_{z \geq i} \in \{I_g, \Phi_i^{Gn}\} \\ j \in J_{i,z}^{Gn} \\ s \in \mathcal{S}}} \xi_{i,z,j}^k \cdot \tilde{F}_{i,z,j,s}^k + \sum_{\substack{i \in I_g \\ s \in \mathcal{S} \\ d_g \in \mathcal{D}_g}} \mu_{i,d_g}^k \cdot \tilde{W} g_{i,s,d_g}^k$$

A função objetivo do MELP corresponde então a minimização dos custos atualizados de investimento e operação dos sistemas elétrico e de gás natural, em todo horizonte de estudo, representado pela equação 2.5.

$$FO_{melp} = \sum_{k \in K} \frac{1}{(1 + \tau)^k} \left[ (S_{E,Inv}^k + S_{G,Inv}^k) + (S_{E,Op}^k + S_{G,Op}^k) \right] \quad (2.5)$$

### Restrições de Investimento

Estas restrições garantem que cada projeto candidato dos sistemas elétrico e de gás natural seja implementado uma única vez no horizonte de planejamento, respeitando as datas mínima e máxima para entrada em operação do projeto. As mesmas envolvem exclusivamente variáveis binárias.

As inequações apresentadas a seguir são referentes a projetos opcionais, ou seja, o projeto somente será instalado se for interessante em termos do impacto que provoca na função objetivo. No caso de projetos obrigatórios, ou seja, que devem ser instalados independentemente da forma como impactam na função objetivo, as restrições de investimento são modeladas como equações. Para projetos já implementados no início do horizonte de estudo (ou seja, unidades já existentes no sistema), convencionou-se que os mesmos sejam projetos obrigatórios com as datas mínima e máxima iguais ao primeiro ano do horizonte de estudo.

- Usinas Hidrelétricas: defina-se,  $\forall(i, j, k) \in \{I_e, J_i^{HP}, K\}$ , a variável  $xh_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  se  $dh_{i,j}^{min} \leq k \leq dh_{i,j}^{max}$ , sendo nulo o seu valor, em caso contrário. A restrição de investimento é formulada como:

$$\sum_{k \in K} xh_{i,j}^k \leq 1, \forall(i, j) \in \{I_e, J_i^{HP}\} \quad (2.6)$$

- Expansão Complementar de Usinas Hidrelétricas: defina-se,  $\forall(i, j, k) \in \{I_e, J_i^{EP}, K\}$ , a variável  $xg_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  se  $dg_{i,j}^{min} \leq k \leq dg_{i,j}^{max}$ , sendo nulo o seu valor, em caso contrário. A restrição de investimento é formulada como:

$$\sum_{k \in K} xg_{i,j}^k \leq 1, \forall(i, j) \in \{I_e, J_i^{EP}\} \quad (2.7)$$

- Usinas Termelétricas: defina-se,  $\forall(i, j, k) \in \{I_e, J_i^{TP}, K\}$ , a variável  $xt_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  se  $dt_{i,j}^{min} \leq k \leq dt_{i,j}^{max}$ , sendo nulo o seu valor, em caso contrário. A restrição de investimento é formulada como:

$$\sum_{k \in K} xt_{i,j}^k \leq 1, \forall(i, j) \in \{I_e, J_i^{TP}\} \quad (2.8)$$

- Interligações: defina-se,  $\forall(i, z, j, k) \in \{I_e, \Omega_i^{EL}, J_{i,z}^{IP}, K\}$ , a variável  $xz_{i,z,j}^k \in \{0, 1\}$  se  $dz_{i,j}^{min} \leq k \leq dz_{i,j}^{max}$ , sendo nulo o seu valor, em caso contrário. A restrição de investimento é formulada como:

$$\sum_{k \in K} xz_{i,z,j}^k \leq 1, \forall(i, z, j) \in \{I_e, \Omega_i^{EL}, J_{i,z}^{IP}\} \quad (2.9)$$

- Unidades de GNL: defina-se,  $\forall(i, j, k) \in \{I_g, J_i^{GnlP}, K\}$ , a variável  $xgnl_{i,j}^k \in \{0, 1\}$  se  $dgnl_{i,j}^{min} \leq k \leq dgnl_{i,j}^{max}$ , sendo nulo o seu valor, em caso contrário. A restrição de investimento é formulada como:

$$\sum_{k \in K} xgnl_{i,j}^k \leq 1, \forall(i, j) \in \{I_g, J_i^{GnlP}\} \quad (2.10)$$

- Gasodutos: defina-se,  $\forall(i, z, j, k) \in \{I_g, \Phi_i^{Gn}, J_{i,z}^{GnP}, K\}$ , a variável  $xgas_{i,z,j}^k \in \{0, 1\}$  se  $dgas_{i,j}^{min} \leq k \leq dgas_{i,j}^{max}$ , sendo nulo o seu valor, em caso contrário. A restrição de investimento é formulada como:

$$\sum_{k \in K} xgas_{i,z,j}^k \leq 1, \forall(i, z, j) \in \{I_g, \Phi_i^{Gn}, J_{i,z}^{GnP}\} \quad (2.11)$$

## Restrições de Operação

As restrições apresentadas a seguir referem-se ao problema de operação dos sistemas elétricos e de gás natural tratados no MELP. As equações são modeladas exclusivamente com variáveis contínuas, e representam o atendimento a demanda de energia elétrica e de gás natural, em cada condição de hidrologia.

- Atendimento a Demanda: defina-se,  $\forall(i, k, s, l) \in \{I_e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ , as restrições de atendimento a demanda de energia elétrica em condições de hidrologia crítica (2.12) e média (2.13), como descritas a seguir. Estas restrições garantem que a demanda de energia elétrica seja atendida através das gerações das usinas hidrelétricas e termelétricas do subsistema, e se for o caso, pelos intercâmbios de energia com outros subsistemas. Ressalta-se que em condições de hidrologia crítica não é permitido déficit de energia elétrica. As restrições são então formuladas como:

$$De_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l} = \sum_{j \in J_i^H} \bar{h}_{i,j,s,l}^k + \sum_{j \in J_i^E} \bar{g}_{i,j,s,l}^k + \sum_{j \in J_i^T} \bar{t}_{i,j,s,l}^k \quad (2.12)$$

$$+ \sum_{\substack{z \in \Omega_i^{EL} \\ j \in J_{i,z}^I}} (\eta_{i,z,j}^k \bar{z}_{z,i,j,s,l}^k - \bar{z}_{i,z,j,s,l}^k)$$

e

$$De_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l} = \sum_{d \in \mathcal{D}} \tilde{w}_{i,s,l,d}^k + \sum_{j \in J_i^H} \tilde{h}_{i,j,s,l}^k + \sum_{j \in J_i^E} \tilde{g}_{i,j,s,l}^k + \sum_{j \in J_i^T} \tilde{t}_{i,j,s,l}^k \quad (2.13)$$

$$+ \sum_{\substack{z \in \Omega_i^{EL} \\ j \in J_{i,z}^I}} (\eta_{i,z,j}^k \tilde{z}_{z,i,j,s,l}^k - \tilde{z}_{i,z,j,s,l}^k).$$

- Suprimento de Gás Natural: defina-se,  $\forall(i, k, s) \in \{I_g, K, \mathcal{S}\}$ , as restrições de suprimento de gás natural para as usinas termelétricas a gás natural em condições de hidrologia crítica (2.14) e média (2.15), como descritas a seguir. Estas restrições garantem que o gás natural proveniente da produção/extração de gás no próprio subsistema, acrescido da importação através de gasodutos e instalações para importação de GNL, seja suficiente para atender a demanda das usinas termelétricas a gás natural contidas neste subsistema, além das demandas não elétricas. As restrições são então formuladas como:

$$Dg_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{J}_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} (\bar{t}_{S_e(i,j),j,s,l}^k \cdot \mathcal{F}_{i,j}^{eg}) = \sum_{d_g \in \mathcal{D}_g} \bar{W}g_{i,s,d_g}^k + \bar{U}g_{i,s}^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_i^{Gnl}} \bar{I}gnl_{i,j,s}^k + \sum_{\substack{z \in \Phi_i^{Gn} \\ j \in \mathcal{J}_{i,z}^{Gn}}} (\rho_{i,z,j}^k \bar{F}_{z,i,j,s}^k - \bar{F}_{i,z,j,s}^k) \quad (2.14)$$

e

$$Dg_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{J}_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} (\tilde{t}_{S_e(i,j),j,s,l}^k \cdot \mathcal{F}_{i,j}^{eg}) = \sum_{d_g \in \mathcal{D}_g} \tilde{W}g_{i,s,d_g}^k + \tilde{U}g_{i,s}^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_i^{Gnl}} \tilde{I}gnl_{i,j,s}^k + \sum_{\substack{z \in \Phi_i^{Gn} \\ j \in \mathcal{J}_{i,z}^{Gn}}} (\rho_{i,z,j}^k \tilde{F}_{z,i,j,s}^k - \tilde{F}_{i,z,j,s}^k). \quad (2.15)$$

- Extração de Gás Natural: defina-se,  $\forall(i, k) \in \{I_g, K\}$ , as restrições de limites de extração de gás natural no próprio subsistema, em condições de hidrologia crítica (2.16) e média (2.17), como descritas a seguir. Estas restrições impõem limites de produção/extração de gás natural em cada subsistema. Tais limites são exógenos ao modelo e seus valores dependem das políticas do governo referentes a exploração de gás natural no horizonte de estudo. As restrições são então formuladas como:

$$\underline{Pg}_{i,k}^{min} \leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \bar{U}g_{i,s}^k \leq \overline{Pg}_{i,k}^{max} \quad (2.16)$$

e

$$\underline{Pg}_{i,k}^{min} \leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{U}g_{i,s}^k \leq \overline{Pg}_{i,k}^{max}. \quad (2.17)$$

## Restrições de Acoplamento

Estas restrições acoplam o problema de investimento ao problema de operação do MELP. As mesmas impõem limites operativos a cada projeto contido nos sistemas elétricos e de gás natural. O acoplamento acontece porque um dado projeto somente poderá entrar em operação a partir do momento que o mesmo seja instalado no sistema, decisão esta tomada no problema de investimento.

- Usinas Hidrelétricas - Limites de Potência Inicial: defina-se,  $\forall(i, j, k, s, l) \in \{I_e, J_i^H, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ , as restrições de limite de geração mínima e máxima de energia elétrica dada pela potência da usina, em condições de hidrologia crítica, (2.18) e (2.19), e média, (2.20) e (2.21), como descritas a seguir. Estas restrições impõem que as usinas devem respeitar seus limites operativos, em cada patamar de demanda. As restrições são então formuladas como:



$$\bar{h}_{i,j,s,l}^k \geq \sum_{p=1,\dots,k} (xh_{i,j}^p \cdot \underline{H}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}), \quad (2.18)$$

$$\bar{h}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (xh_{i,j}^p \cdot \bar{H}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}), \quad (2.19)$$

$$\tilde{h}_{i,j,s,l}^k \geq \sum_{p=1,\dots,k} (xh_{i,j}^p \cdot \underline{H}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}), \quad (2.20)$$

e

$$\tilde{h}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (xh_{i,j}^p \cdot \bar{H}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}). \quad (2.21)$$

- Usinas Hidrelétricas - Limites de Potência Complementar: defina-se,  $\forall(i, j, k, s, l) \in \{I_e, J_i^E, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ , as restrições de limite de geração complementar máxima de energia elétrica dada pela potência complementar da usina, em condições de hidrologia crítica (2.22) e média (2.23), como descritas a seguir. Estas restrições impõem que a expansão complementar das usinas deve respeitar seus limites operativos, em cada patamar de demanda e são formuladas como:

$$\bar{g}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (xg_{i,j}^p \cdot \bar{G}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}) \quad (2.22)$$

e

$$\tilde{g}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (xg_{i,j}^p \cdot \bar{G}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}). \quad (2.23)$$

- Usinas Hidrelétricas - Limites de Geração de Energia: defina-se,  $\forall(i, j, k, s) \in \{I_e, J_i^H \cup J_i^E, K, \mathcal{S}\}$ , as restrições de limite de geração máxima de energia elétrica, ao longo do período de estudo, limitada pela energia firme (2.24) em condição de hidrologia crítica, e pela energia média (2.25) em condição de hidrologia média, como descritas a seguir. Estas restrições impõem que a geração das usinas, ao longo dos patamares, deve respeitar seus limites de geração de energia em cada condição hidrológica. São formuladas como:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{h}_{i,j,s,l}^k + \sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{g}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} \left[ (xh_{i,j}^p \cdot \bar{E}_{i,j}^h + xg_{i,j}^p \cdot \bar{E}_{i,j}^{hc}) \cdot \mathcal{F}_{i,s}^h \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l} \right] \quad (2.24)$$

e

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{h}_{i,j,s,l}^k + \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{g}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} \left[ (xh_{i,j}^p \cdot \tilde{E}_{i,j}^h + xg_{i,j}^p \cdot \tilde{E}_{i,j}^{hc}) \cdot \mathcal{F}_{i,s}^h \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l} \right]. \quad (2.25)$$

- Usinas Termelétricas - Limites de Potência: defina-se,  $\forall(i, j, k, s, l) \in \{I_e, J_i^T, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ , as restrições de limite de geração mínima e máxima de energia elétrica dada pela potência da usina, em condições de hidrologia crítica (2.26) e (2.27), e média, (2.28) e (2.29), como descritas a seguir. Estas restrições

impõem que as usinas devem respeitar seus limites operativos, em cada patamar de demanda e são formuladas como:

$$\bar{t}_{i,j,s,l}^k \geq \sum_{p=1,\dots,k} (xt_{i,j}^p \cdot \underline{T}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}), \quad (2.26)$$

$$\bar{t}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (xt_{i,j}^p \cdot \bar{T}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}), \quad (2.27)$$

$$\tilde{t}_{i,j,s,l}^k \geq \sum_{p=1,\dots,k} (xt_{i,j}^p \cdot \underline{T}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}), \quad (2.28)$$

e

$$\tilde{t}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (xt_{i,j}^p \cdot \bar{T}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}). \quad (2.29)$$

- Usinas Termelétricas - Limites de Geração de Energia: defina-se,  $\forall(i, j, k) \in \{I_e, J_i^T, K\}$ , as restrições de limite de geração máxima de energia elétrica, ao longo do período de estudo, limitada pela energia firme (2.30) em condição de hidrologia crítica, e pela energia média (2.31) em condição de hidrologia média, como descritas a seguir. Estas restrições impõem que a geração das usinas, ao longo dos patamares, deve respeitar seus limites de geração de energia em cada condição hidrológica e são formuladas como:

$$\sum_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ s \in \mathcal{S}}} \bar{t}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} \left( xt_{i,j}^p \cdot \bar{E}_{i,j}^t \cdot \sum_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ s \in \mathcal{S}}} \theta_{s,l} \right) \quad (2.30)$$

e

$$\sum_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ s \in \mathcal{S}}} \tilde{t}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} \left( xt_{i,j}^p \cdot \tilde{E}_{i,j}^t \cdot \sum_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ s \in \mathcal{S}}} \theta_{s,l} \right). \quad (2.31)$$

- Usinas Termelétricas com Perfil Sazonal - Limites de Geração de Energia: defina-se,  $\forall(i, j, k, s) \in \{I_e, \check{J}_i^T, K, \mathcal{S}\}$ , as restrições de limite de geração máxima de energia elétrica, ao longo do período de estudo, limitada pela energia firme (2.32), em condição de hidrologia crítica, e pela energia média (2.33), em condição de hidrologia média, como descritas a seguir. Estas restrições impõem que a geração das usinas, ao longo dos patamares, deve respeitar seus limites de geração de energia em cada condição hidrológica. São formuladas como:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \bar{t}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} \left( xt_{i,j}^p \cdot \bar{E}_{i,j}^t \cdot \mathcal{F}_{i,j,s}^t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l} \right) \quad (2.32)$$

e

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{t}_{i,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} \left( xt_{i,j}^p \cdot \tilde{E}_{i,j}^t \cdot \mathcal{F}_{i,j,s}^t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l} \right). \quad (2.33)$$

- Interligações - Limites de Fluxo: defina-se,  $\forall(i, z, j, k, s, l) \in \{I_e, \Omega_i^{EL}, J_{i,z}^I, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ , as restrições de limite máximo de fluxo de energia em cada interligação entre subsistemas elétricos, em condições de hidrologia crítica (2.34) e média (2.35), como descritas a seguir. Estas restrições impõem que os fluxos de energia devem respeitar os limites operativos dos intercâmbios, em cada patamar de demanda. São formuladas como:

$$\bar{z}_{i,z,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (x z_{i,z,j}^p \cdot \bar{Z}_{i,z,j} \cdot \theta_{s,l}) \quad (2.34)$$

e

$$\tilde{z}_{i,z,j,s,l}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (x z_{i,z,j}^p \cdot \bar{Z}_{i,z,j} \cdot \theta_{s,l}). \quad (2.35)$$

- Unidades de GNL: defina-se,  $\forall(i, k) \in \{I_g, K\}$ , as restrições de importação mínima e máxima de GNL em cada unidade de regaseificação, em condições de hidrologia crítica, (2.36) e (2.37), e média, (2.38) e (2.39), como descritas a seguir. Estas restrições impõem que a importação/regaseificação de GNL deve respeitar seus limites, ao longo das estações sazonais. São formuladas como:

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \bar{I}gnl_{i,j,s}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (x gnl_{i,j}^p \cdot \overline{Ipg}_{i,j}^{max}), \quad (2.36)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \bar{I}gnl_{i,j,s}^k \geq \sum_{p=1,\dots,k} (x gnl_{i,j}^p \cdot \underline{Ipg}_{i,j}^{min}), \quad (2.37)$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{I}gnl_{i,j,s}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (x gnl_{i,j}^p \cdot \overline{Ipg}_{i,j}^{max}), \quad (2.38)$$

e

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \tilde{I}gnl_{i,j,s}^k \geq \sum_{p=1,\dots,k} (x gnl_{i,j}^p \cdot \underline{Ipg}_{i,j}^{min}). \quad (2.39)$$

- Gasodutos: defina-se,  $\forall(i, z, j, k, s) \in \{I_g, \Phi_i^{Gn}, J_{i,z}^{Gn}, K, \mathcal{S}\}$ , as restrições de limite máximo de fluxo de gás natural em cada gasoduto conectando os subsistemas de gás natural, em condições de hidrologia crítica (2.40) e média (2.41), como descritas a seguir. Estas restrições impõem que os fluxos de gás natural devem respeitar os limites operativos dos gasodutos, em cada estação sazonal. São formuladas como:

$$\bar{F}_{i,z,j,s}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (x gas_{i,z,j}^p \cdot \overline{Fg}_{i,z,j}^{max}) \quad (2.40)$$

e

$$\tilde{F}_{i,z,j,s}^k \leq \sum_{p=1,\dots,k} (x gas_{i,z,j}^p \cdot \overline{Fg}_{i,z,j}^{max}). \quad (2.41)$$

## 2.3 Representação Matemática Compacta

Nesta seção são introduzidas representações matemáticas compactas do MELP. Através destas, será possível desenvolver toda a metodologia empregada de uma forma clara para o leitor. Duas representações compactas serão consideradas.

A primeira descreve o modelo de forma simplificada, agregando as variáveis de investimento e de operação dos sistemas elétrico e de gás natural. Assim procedendo será possível identificar as principais características e restrições do modelo. A segunda representa o modelo em uma notação matricial, que apesar de extremamente simplificada, possibilita compreender a metodologia proposta e entender as vantagens de se reformular o modelo, como será apresentado no capítulo 4.

### 2.3.1 Notação Compacta

No intuito de se representar o modelo de forma simplificada, são definidos novos conjuntos, parâmetros e variáveis, de tal forma que a formulação detalhada apresentada anteriormente possa ser escrita de forma agregada.

#### Conjuntos

$J_i^e$  – conjunto de todas as usinas hidrelétricas e termelétricas pertencentes ao subsistema elétrico  $i$ , e interligações conectando o subsistema  $i$  ao subsistema  $z$ , em operação em um período  $k$ , dado por  $J_i^e = J_i^H \cup J_i^T \cup J_{i,z}^I$ ;

$\hat{J}^e$  – conjunto contendo todas as usinas e interligações do sistema elétrico, em operação em um período  $k$ , dado por  $\hat{J}^e = \bigcup_{i \in I_e} J_i^e$ ;

$Df_i^e$  – conjunto dos índices das variáveis de déficit de energia elétrica no subsistema elétrico  $i$ . Por simplicidade de notação, quando  $j \in Df_i^e$ , isto significa que a variável que representa este projeto se refere ao déficit de energia no subsistema  $i$ ;

$J_i^g$  – conjunto de todas as unidades de importação/regaseificação de GNL per-

tencentes ao subsistema de gás natural  $i$ , assim como gasodutos conectando o subsistema  $i$  ao subsistema  $z$ , em operação em um período  $k$ . Tem-se que  $J_i^g = J_i^{Gnl} \cup J_i^{Gn}$ ;

$\hat{J}^g$  – conjunto contendo todas as unidades de importação/regaseificação de GNL e gasodutos do sistema de gás natural, em operação em um período  $k$ . Tem-se que  $\hat{J}^g = \bigcup_{i \in I_g} J_i^g$ ;

$Df_i^g$  – conjunto dos índices das variáveis de déficit de gás natural no subsistema de gás natural  $i$ . Por simplicidade de notação, quando  $j \in Df_i^g$ , isto significa que a variável que representa este projeto se refere ao déficit de gás no subsistema  $i$ ;

$\mathcal{C}$  – conjunto das condições de hidrologia possíveis,  $\mathcal{C} = \{cr, md\}$ , onde  $cr$  é a condição de hidrologia crítica e  $md$  é a condição de hidrologia média;

## Parâmetros

$\beta^k$  – fator de atualização financeira, ou seja, valor atual dado por  $\beta^k = \frac{1}{(1+\tau)^k}$ ;

$\hat{D}_{e_{i,s,l}}^k$  – demanda de energia (MWh) a ser atendida no subsistema elétrico  $i$ , no patamar de demanda de energia elétrica  $l$ , da estação  $s$ , do período  $k$ ;

$\phi_j^k$  – representa o custo de investimento do projeto  $j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}$ , no período  $k \in K$ ;

$\hat{\gamma}_{i,j}^k$  – representa o custo unitário de operação da usina termelétrica  $j$ , do subsistema  $i$ , durante o período  $k$ , quando  $j \in J_i^T$ . Caso contrário, se  $j \in Df_i^e$ , o parâmetro representa o custo unitário do déficit de energia elétrica no subsistema  $i$ , durante o período  $k$ ;

$\hat{\mu}_{i,j}^k$  – representa o custo de operação da unidade de importação/regaseificação de GNL ou dos gasodutos, pertencentes ao subsistema de gás natural  $i$ , durante o período  $k$ , quando  $j \in J_i^g$ . Caso contrário, se  $j \in Df_i^g$ , o parâmetro representa o custo do déficit de suprimento de gás natural no subsistema  $i$ , durante o período  $k$ ;

$E_{i,j,s}^{cr}$  – representa, para as usinas hidrelétricas ou termelétricas, o limite de geração de energia (MWh) no subsistema  $i$ , na estação  $s$ , em condição de hidrologia crítica. Para as hidrelétricas tem-se  $E_{i,j,s}^{cr} = \bar{E}_{i,j}^h \cdot \mathcal{F}_{i,s}^h \cdot (\sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l})$ . Para as termelétricas tem-se  $E_{i,j,s}^{cr} = \bar{E}_{i,j}^t \cdot \mathcal{F}_{i,j,s}^t \cdot (\sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l})$ .

$E_{i,j,s}^{md}$  – representa, para as usinas hidrelétricas ou termelétricas, o limite de geração de energia (MWh) no subsistema  $i$ , na estação  $s$ , em condição de hidrologia média. Para as hidrelétricas tem-se  $E_{i,j,s}^{md} = \tilde{E}_{i,j}^h \cdot \mathcal{F}_{i,s}^h \cdot (\sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l})$ . Para as termelétricas tem-se  $E_{i,j,s}^{md} = \tilde{E}_{i,j}^t \cdot \mathcal{F}_{i,j,s}^t \cdot (\sum_{l \in \mathcal{L}} \theta_{s,l})$ .

$Ge_{i,j,s,l}^{max}$  – representa, para o sistema elétrico, o limite máximo de geração (fluxo) dado pela capacidade da usina (interligação), localizada no subsistema  $i$ , na estação  $s$  e no patamar de carga  $l$ . Este limite é dado por:  $\bar{H}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}$  (hidrelétricas),  $\bar{T}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}$  (termelétricas) ou  $\bar{Z}_{i,z,j} \cdot \theta_{s,l}$  (interligações);

$Ge_{i,j,s,l}^{min}$  – representa, para o sistema elétrico, o limite mínimo de geração dado pela capacidade da usina, no subsistema  $i$ , estação  $s$  e patamar de carga  $l$ . Este limite é dado por:  $\underline{H}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}$  (hidrelétricas) ou  $\underline{T}_{i,j} \cdot \theta_{s,l}$  (termelétricas);

$Vg_{i,j,s}^{max}$  – representa, para o sistema de gás natural, o limite máximo do volume de importação/regaseificação (fluxo) dado pela capacidade da unidade de GNL (gasoduto), no subsistema  $i$  e estação  $s$ . Este limite é dado por:  $\overline{Ipg}_{i,j}^{max}$  (unidades de GNL) ou  $\overline{Fg}_{i,z,j}^{max}$  (gasodutos);

$Vg_{i,j,s}^{min}$  – representa, para o sistema de gás natural, o limite mínimo do volume de importação/regaseificação dado pela capacidade da unidade de GNL, no subsistema  $i$  e estação  $s$ . Este limite é dado por:  $\underline{Ipg}_{i,j}^{min}$ ;

## Variáveis

$x_j^k \in \{0, 1\}$  – representa o investimento no projeto  $j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}$ , no período  $k \in K$ ;

$ye_{i,j,s,l}^{cr,k}(ye_{i,j,s,l}^{md,k}) \in \mathbb{R}_+$  – representa, para o subsistema elétrico  $i$ , a geração de energia nas usinas ou fluxo líquido nos intercâmbios para  $j \in J_i^e$ , e o déficit de energia para  $j \in Df_i^e$ , na estação  $s$ , patamar de carga  $l$  e período  $k$ , em condição de

hidrologia crítica(média);

$yg_{i,j,s}^{cr,k}(yg_{i,j,s}^{md,k}) \in \mathbb{R}_+$  – representa, para o subsistema de gás natural  $i$ , o volume de gás natural produzido no próprio subsistema e nas unidades de regaseificação de GNL, ou o volume líquido de gás natural transportado nos gasodutos para  $j \in J_i^g$  e o déficit de suprimento de gás para  $j \in Df_i^g$ , na estação  $s$  e período  $k$ , em condição de hidrologia crítica(média).

Com relação a definição da última variável, note que a produção de gás natural no próprio subsistema pode ser considerada, para efeito de simplificação, como sendo a produção de uma unidade de regaseificação de GNL existente, com os custos de operação e capacidade compatíveis com a extração/produção de gás natural no próprio subsistema.

Após definidos novos conjuntos, parâmetros e variáveis, tomando-se por base aqueles previamente definidos na seção anterior, apresenta-se o MELP em notação compacta. Nesta representação as variáveis de decisão de investimento em projetos dos sistemas elétrico e de gás natural foram agregadas em um único tipo de variável. No entanto, as variáveis de operação destes sistemas foram agregadas em variáveis de operação do sistema elétrico e variáveis de operação do sistema de gás natural.

A função objetivo é apresentada em (2.42), descrita abaixo. As restrições de investimento são representadas em (2.43), enquanto que as restrições de atendimento a demanda do sistema elétrico são apresentadas em (2.44) e as restrições de atendimento a demanda de gás natural são apresentadas em (2.45), tanto para as condições de hidrologia crítica como média.

As restrições de acoplamento (limites operativos) para o sistema elétrico são apresentadas em (2.46) (geração de energia ao longo dos períodos) e em (2.47) e (2.49) (operação limitada pela capacidade). Para o sistema de gás natural o limites operativos são apresentados em (2.48) e (2.50). Uma formulação para nossa versão compacta do MELP é então dada por:

$$\min \sum_{k \in K} \beta^k \left( \sum_{\substack{j \in \hat{J}^e \\ j \in \hat{J}^g}} \phi_j^k x_j^k + \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^T \\ j \in Df_i^e}} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ l \in \mathcal{L}}} \hat{\gamma}_{i,j}^k \cdot y_{i,j,s,l}^{md,k} + \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^g \\ j \in Df_i^g}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \hat{\mu}_{i,j}^k \cdot y_{i,j,s}^{md,k} \right) \quad (2.42)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in K} x_j^k \leq 1, \quad \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\} \quad (2.43)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^e \cup Df_i^e\}} y_{i,j,s,l}^{p,k} = \hat{D}e_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l}, \quad \forall (p,i,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (2.44)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^g \cup Df_i^g\}} y_{i,j,s}^{p,k} = Dg_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{J}_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{i,j}^{eg} \cdot y_{S_e(i,j),j,s,l}^{p,k}, \quad \forall (p,i,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, K, \mathcal{S}\} \quad (2.45)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} y_{i,j,s,l}^{p,k} \leq \sum_{n=1, \dots, k} E_{i,j,s}^p \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_e, \{J_i^H \cup J_i^T\}, K, \mathcal{S}\} \quad (2.46)$$

$$y_{i,j,s,l}^{p,k} \leq \sum_{n=1, \dots, k} Ge_{i,j,s,l}^{max} \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (2.47)$$

$$y_{i,j,s}^{p,k} \leq \sum_{n=1, \dots, k} Vg_{i,j,s}^{max} \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (2.48)$$

$$y_{i,j,s,l}^{p,k} \geq \sum_{n=1, \dots, k} Ge_{i,j,s,l}^{min} \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (2.49)$$

$$y_{i,j,s}^{p,k} \geq \sum_{n=1, \dots, k} Vg_{i,j,s}^{min} \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (2.50)$$

$$x_j^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (2.51)$$

$$y_{i,j,s,l}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (2.52)$$

$$y_{i,j,s}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (2.53)$$

## 2.3.2 Notação Matricial

No intuito de se representar o modelo em notação matricial, são definidos novos parâmetros e variáveis, de tal forma que a formulação apresentada anteriormente possa ser escrita da forma mais compacta possível.

### Dimensões

$n_{inv}$  – número máximo de variáveis do problema de investimento, sendo seu valor dado pelo número total de projetos  $|\hat{J}^e| + |\hat{J}^g|$ , vezes o número total de períodos  $|K|$ ;

$n_{opr}$  – número máximo de variáveis do problema de operação, sendo seu valor dado pelo número total de projetos  $|\hat{J}^e| + |\hat{J}^g|$ , vezes o número total de períodos  $|K|$ , vezes o número total de estações  $|\mathcal{S}|$ , vezes o número total de patamares de carga  $|\mathcal{L}|$ , vezes o número total de condições de hidrologia  $|\mathcal{C}|$ ;

$m_{inv}$  – número máximo de restrições do problema de investimento, sendo seu valor dado pelo número total de projetos  $|\hat{J}^e| + |\hat{J}^g|$ ;

$m_{opr}$  – número máximo de restrições do problema de operação, sendo seu valor dado pelo número total de subsistemas  $|I_e| + |I_g|$ , vezes o número total de períodos  $|K|$ , vezes o número total de estações  $|\mathcal{S}|$ , vezes o número total de patamares de carga  $|\mathcal{L}|$ , vezes o número total de condições de hidrologia  $|\mathcal{C}|$ ;

$m_{acpu}$  – número máximo de restrições de acoplamento entre os problemas de investimento e operação referentes aos limites máximo de geração para cada variável do problema de operação, ou seja, seu valor é dado por  $n_{opr}$ ;

$m_{acpl}$  – número máximo de restrições de acoplamento entre os problemas de investimento e operação referentes aos limites mínimos de geração para cada variável do problema de operação, ou seja, seu valor é dado por  $n_{opr}$ ;

$m_{acpp}$  – número máximo de restrições de acoplamento entre os problemas de investimento e operação referentes aos limites máximos de geração, associados ao somatório das gerações de cada usina em todos os patamares da curva de carga, sendo seu valor aproximado dado pelo número total de projetos do sistema elétrico  $|\hat{J}^e|$ , vezes o número total de períodos  $|K|$ , vezes o número total de estações  $|\mathcal{S}|$ , vezes o número total de condições de hidrologia  $|\mathcal{C}|$ ;

### Parâmetros

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^{n_{inv}}$  – vetor de coeficientes da função objetivo, referente ao problema de investimento;

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}_+^{n_{opr}}$  – vetor de coeficientes da função objetivo, referente ao problema de operação;

$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m_{inv} \times n_{inv}}$  – matriz de coeficientes das restrições de investimento;

$\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^{m_{inv}}$  – vetor de termos constantes do lado direito das restrições de investimento;



$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m_{opr} \times n_{opr}}$  – matriz de coeficientes das restrições de operação;

$\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^{m_{opr}}$  – vetor de termos constantes do lado direito das restrições de operação;

$\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m_{acpp} \times n_{inv}}$  – matriz de coeficientes das restrições de acoplamento, associadas à geração total nos patamares da curva de carga, referentes a parte de investimento;

$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m_{acpp} \times n_{opr}}$  – matriz de coeficientes das restrições de acoplamento, associadas à geração total nos patamares da curva de carga, referentes a parte de operação;

$\overline{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m_{acpu} \times n_{inv}}$  – matriz de coeficientes

das restrições de acoplamento, associadas à produção máxima, referentes à parte de investimento;

$\underline{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m_{acpl} \times n_{inv}}$  – matriz de coeficientes das restrições de acoplamento, associadas à produção mínima, referentes à parte de investimento;

$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_{opr} \times n_{opr}}$  – matriz identidade referente ao problema de operação;

### Variáveis

$\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n_{inv}}$  – variáveis do problema de investimento;

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n_{opr}}$  – variáveis do problema de operação;

Na notação matricial todas as restrições de investimento (2.43) são agrupadas na restrição  $\mathbf{H}\mathbf{x} \leq \mathbf{p}$ , enquanto que as restrições de operação dos sistemas elétrico e de gás natural (2.44) e (2.45) são agrupadas nas restrições  $\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{m}$ . Note que estas últimas restrições são formadas por restrições desacopladas no tempo, que consistem na operação em cada período de estudo.

As restrições de acoplamento foram agrupadas em três classes. A primeira representa os limites máximos associados ao somatório das gerações ao longo de todos os patamares da curva de carga, ou seja, o grupo de restrições (2.46), dada por  $-\mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{y} \leq 0$ . A segunda representa a geração máxima permitida, ou seja, o grupo de restrições (2.47) e (2.48), dada por  $-\overline{\mathbf{G}}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} \leq 0$ . A última representa a geração mínima obrigatória, ou seja, o grupo de restrições (2.49) e (2.50), dada por  $-\underline{\mathbf{G}}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} \geq 0$ . Uma formulação matricial para o MELP é então dada por:

$$\left. \begin{array}{llll} \min & \mathbf{q}^T \mathbf{x} & + & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} & \mathbf{H}\mathbf{x} & & \leq \mathbf{p} \\ & & & \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{m} \\ & -\mathbf{E}\mathbf{x} & + & \mathbf{F}\mathbf{y} \leq 0 \\ & -\overline{\mathbf{G}}\mathbf{x} & + & \mathbf{I}\mathbf{y} \leq 0 \\ & -\underline{\mathbf{G}}\mathbf{x} & + & \mathbf{I}\mathbf{y} \geq 0 \\ & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n_{inv}} & , & \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n_{opr}} \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

## 2.4 Algoritmos de Solução

A primeira versão do MELP [38] utilizava um algoritmo de solução baseado na Decomposição de Benders [22]. Através desta metodologia o problema era decomposto no subproblema de operação representado por  $w(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n_{opr}}} \{\mathbf{d}^T \mathbf{y} : \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{m}, \mathbf{F}\mathbf{y} \leq \mathbf{E}\mathbf{x}, \mathbf{I}\mathbf{y} \leq \overline{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \mathbf{I}\mathbf{y} \geq \underline{\mathbf{G}}\mathbf{x}\}$  e no subproblema de investimento dado por  $\min_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^{n_{inv}}} \{\mathbf{q}^T \mathbf{x} + w(\mathbf{x}) : \mathbf{H}\mathbf{x} \leq \mathbf{p}\}$ , onde a função  $w(\mathbf{x})$  era substituída pela aproximação convexa de sua formulação dual representada pelos cortes de Benders, obtidos ao longo do processo iterativo descrito em [38].

A metodologia de solução adotada apresentou bom desempenho computacional para o caso exemplo apresentado em [38], que é uma instância bastante reduzida do problema. Em casos reais de planejamento da expansão a metodologia mostrou-se insatisfatória principalmente devido ao fato da resolução do problema de investimento, pelo algoritmo branch-and-bound, se tornar cada vez mais difícil com a progressiva incorporação de cortes de Benders.

Como alternativa a esta metodologia foi adotada a solução direta do modelo, sem uso de Decomposição de Benders, através do algoritmo branch-and-cut disponível no pacote de otimização CPLEX. No intuito de melhorar o desempenho deste algoritmo foi desenvolvida uma metodologia heurística para se encontrar soluções viáveis iniciais de boa qualidade para serem utilizadas como ponto de partida pelo algoritmo branch-and-cut. Esta heurística baseia-se na técnica de Busca Local [58] e foi desenvolvida com base na desigualdade (2.55), utilizada em [11].

$$\Omega(x, \bar{x}, \kappa) : \sum_{v: \bar{x}_v=1} (1 - x_v) + \sum_{v: \bar{x}_v=0} x_v \leq \kappa \quad (2.55)$$

Nesta desigualdade,  $\bar{x}$  é uma solução viável para o conjunto de restrições definido em (2.54),  $\bar{x}_v$  é a  $v$ -ésima coordenada do vetor  $\bar{x}$  e  $\kappa$ , um inteiro positivo que define o grau de liberdade da restrição. Perceba que ao se adicionar a desigualdade (2.55) ao conjunto de restrições do MELP, o mesmo ficará restrito a soluções viáveis encontradas na vizinhança  $\Omega(x, \bar{x}, \kappa)$  de  $\bar{x}$ . Em outras palavras, o modelo buscará por uma solução ótima com no máximo  $\kappa$  elementos diferentes de  $\bar{x}$ .

Este procedimento torna o custo computacional de um algoritmo branch-and-cut, aplicado à solução do problema restrito, bastante reduzido. Baseado na restrição (2.55) tem-se então o seguinte algoritmo de solução para o MELP.

## Heurística Busca Local - HBL

**Passo 0:** Defina o número máximo de iterações  $N_{max}$ . Faça  $i = 0$ ;

**Passo 1:** Considere  $(\bar{x}, \bar{y})$  uma solução viável e  $F_{obj}(\bar{x}, \bar{y})$  seu respectivo valor na função objetivo. Seja  $\kappa^i$  o grau de liberdade da restrição  $\Omega(x, \bar{x}, \kappa^i)$ ;

**Passo 2:** Se  $i = 0$  adicione ao MELP a restrição de busca local  $\Omega(x, \bar{x}, \kappa^i)$ ;

**Passo 3:** Se  $i > 0$  atualize a restrição  $\Omega(x, \bar{x}, \kappa^i)$ ;

**Passo 4:** Resolva o MELP utilizando o algoritmo branch-and-cut e um certo *gap* relativo de convergência do algoritmo, obtendo uma nova solução viável  $(\hat{x}, \hat{y})$ ;

**Passo 5:** Se a solução  $(\hat{x}, \hat{y})$  satisfizer  $F_{obj}(\hat{x}, \hat{y}) = F_{obj}(\bar{x}, \bar{y})$ , aumente o valor do parâmetro  $\kappa^{i+1}$  para aumentar a região de busca em torno do ponto viável  $(\hat{x}, \hat{y})$  na próxima iteração do algoritmo;

**Passo 6:** Se a solução  $(\hat{x}, \hat{y})$  satisfizer  $F_{obj}(\hat{x}, \hat{y}) < F_{obj}(\bar{x}, \bar{y})$ , atualize a melhor solução viável conhecida fazendo  $(\bar{x}, \bar{y}) := (\hat{x}, \hat{y})$ ;

**Passo 7:** Se  $i < N_{max}$ , faça  $i = i + 1$  e vá para o Passo 1;

**Passo 8:** PARE, retorne a solução  $(\bar{x}, \bar{y})$  e retire do MELP a restrição de busca local  $\Omega(x, \bar{x}, \kappa^i)$ ;

Finalizado o procedimento **HBL**, a solução obtida  $(\bar{x}, \bar{y})$  e seu respectivo valor na função objetivo  $F_{obj}(\bar{x}, \bar{y})$  são informados ao algoritmo branch-and-cut do CPLEX. O algoritmo então resolve o MELP utilizando esta informação primal que em geral encontra-se em torno de 1,5% da relaxação linear do mesmo.

Faz-se necessário ressaltar aqui uma característica bastante importante da formulação matemática do MELP, observada em todos os experimentos computacionais realizados até o momento. O valor de sua relaxação linear é muito próximo do valor ótimo do problema, ou seja, a relaxação linear fornece um limite inferior extremamente forte.

Finalmente, comenta-se a título de informação que já foram realizados experimentos no MELP aplicando a técnica de Relaxação Lagrangeana. Adotou-se uma reformulação do MELP onde as variáveis e restrições de investimento eram duplicadas. Utilizava-se para o problema de investimento variáveis contínuas e binárias, com um conjunto adicional de restrições de igualdade entre as mesmas. Ao se dualizar estas restrições de forma Lagrangeana obtinha-se, um problema de programação inteira composto apenas por restrições de mochila e um outro problema que seria a própria formulação matemática do MELP utilizando para o investimento variáveis contínuas, ao invés de binárias. Infelizmente, em todos os experimentos computacionais realizados, nenhum limite inferior melhor do que a própria relaxação linear do problema foi obtido.

## 2.4.1 Motivação

A validação do modelo MELP foi realizada no ano de 2007 através da elaboração do Caso Base de validação do MELP [59, 60] que foi um trabalho conjunto desenvolvido por técnicos do Cepel, Eletrobrás, Ministério de Minas e Energia (MME) e Empresa de Pesquisa Energética (EPE). Através deste trabalho foi possível validar o MELP para sua utilização, como modelo oficial de planejamento da expansão da geração, no Plano Nacional de Energia 2030 [7].

O Caso Base de validação do MELP é uma instância determinística elaborada a partir do Plano Decenal de Energia Elétrica (PDEE) 2006-2015 [61]. Adotou-se um horizonte de estudo de 25 anos, de 2006-2030, com períodos anuais de avaliação da operação e do cronograma de investimento, sendo o sistema elétrico subdividido em 13 subsistemas elétricos (quatro destes, fictícios). Os dados foram estruturados de tal forma que no horizonte de 2006 a 2015 o cronograma de expansão definido no plano decenal fosse obrigatório, e a partir de 2016 a decisão de expansão dos projetos em análise fosse definida pelo MELP. A tabela 2.1 a seguir fornece um resumo dos projetos de usinas e interligações avaliados neste caso.

Tabela 2.1: Projetos de Usinas Geradoras e Interligações

Tipo	Número de Usinas		
	Existentes	Obrigatórias PDEE (2006-2015)	Opcionais (2016-2030)
Hidrelétricas	100	78	676
Termelétricas	61	29	158
Interligações	10	32	285
Total	171	139	1119

Considerando-se apenas 1 patamar da curva de carga, em base anual, para a análise da operação energética deste caso, obtem-se uma formulação de programação linear inteira mista com aproximadamente 15.000 variáveis binárias, 60.000 variáveis contínuas e 140.000 restrições. Para esta instância foi obtida uma solução viável com um *gap* de otimalidade de 0,5% em aproximadamente 3 horas de tempo de CPU, fazendo-se uso do algoritmo branch-and-cut do CPLEX juntamente com a heurística de busca local (**HBL**), trabalhando-se em uma máquina Pentium IV, com velocidade de processador de 3GHz e com 500 Mb de memória RAM.

Para esta mesma instância, considerando-se agora 3 patamares da curva de carga, em base anual, para a análise da operação energética, o número de variáveis binárias permanece o mesmo, no entanto o problema passa a ter em torno de 170.000 variáveis contínuas e 325.000 restrições. Utilizando-se os mesmos algoritmos de solução e a mesma máquina, o tempo de processamento demandado para a obtenção de uma solução aceitável, que antes era definido por algumas horas, passou a ser de dias.

Com a inclusão da representação da sazonalidade hidrológica no MELP, trabalhando-se em base semestral ao invés de anual, para este caso com 3 patamares de carga, o número de variáveis contínuas e restrições fica em torno de 340.000 e 620.000, respectivamente. Esta instância mostrou-se intratável pelos algoritmos de solução disponíveis.

Convém mencionar que a importância da consideração de três patamares da curva de carga em casos reais de planejamento de longo prazo da expansão da geração é, na verdade, sem grande relevância prática. No entanto, o que se deseja ressaltar através desta experiência computacional é que instâncias de grandes dimensões são intratáveis utilizando-se os algoritmos apresentados nesta seção, mesmo fazendo uso de pacotes comerciais de otimização no estado-da-arte.

De fato, pode ser estabelecido uma relação, apenas do ponto de vista de dimensões do problema, entre o caso com três patamares da curva de carga e um caso considerando apenas uma curva de carga, mas também considerando incertezas na demanda de energia futura, de forma similar a metodologia apresentada em [38]. Este último caso, considerando três cenários de demanda futura de energia elétrica, teria “dimensões equivalentes” ao primeiro caso com três patamares de carga. De forma análoga, o caso com a análise da operação em base semestral e três patamares da curva de carga, seria equivalente a um caso com a análise da operação em base anual e apenas um patamar da curva de carga, mas considerando-se seis cenários de demanda futura de energia elétrica.

Percebe-se então que sem um tratamento adequado no algoritmo de solução do modelo não será possível incluir aspectos de incertezas quando forem consideradas instâncias reais do sistema elétrico brasileiro. Com base nisso, e devido a característica promissora encontrada no trabalho de SINGH *et al.* [1] na resolução de instâncias de Programação Estocástica Inteira Mista de grande porte, resolveu-se investigar a aplicação da técnica de Decomposição de Dantzig-Wolfe ao modelo MELP.

# Capítulo 3

## Decomposição de Dantzig-Wolfe

Neste capítulo, inicialmente, procura-se apresentar uma revisão da literatura sobre a abrangência do princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe [20] nos mais variados tipos de aplicações práticas, em diversas áreas do conhecimento. Logo após, são descritas as idéias básicas relacionadas a esta decomposição em Programação Linear, ressaltando-se aspectos teóricos tais como a equivalência entre esta decomposição e a Relaxação Lagrangeana, as condições de otimalidade e os métodos de estabilização propostos na literatura. A seguir, é apresentada a extensão dessa técnica a problemas de Programação Inteira, sendo introduzido o algoritmo *branch-and-price* e suas particularidades tais como possíveis regras de ramificação.

### 3.1 Aspectos Gerais: Aplicações na Literatura

A metodologia de Decomposição de Dantzig-Wolfe [20] faz uso da técnica de geração de colunas, que pode ser aplicada a problemas de Programação Linear de grande porte onde não são conhecidas a priori todas as colunas do problema, ou seja, variáveis e seus coeficientes correspondentes. No caso desta decomposição, as colunas correspondem a pontos extremos de uma região poliedral de viabilidade associada às variáveis que as definem. Na literatura o princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe é uma das técnicas mais bem sucedidas na otimização de problemas lineares de grande porte [62].

Esta técnica decompõe o problema em um problema mestre e em um ou mais subproblemas de geração de colunas. Sendo impraticável gerar todas as colunas associadas a um problema não trivial, trabalha-se então com um Problema Mestre Restrito envolvendo um pequeno conjunto das mesmas. Este, por sua vez, é expandido a cada iteração do algoritmo, com colunas adicionais sendo geradas pelos subproblemas. Baseando-se no teorema da representação de Minkowski (veja [63], por exemplo) e nas colunas geradas em cada iteração pelos subproblemas, resolve-se o problema mestre restrito obtendo-se as variáveis duais que serão utilizadas pelos

subproblemas para determinar novas colunas “atraentes”, ou seja, colunas capazes de levar a melhores soluções do Problema Mestre Restrito.

Em particular, para problemas de Programação Inteira, o princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe é combinado com um algoritmo do tipo Branch-and-Bound resultando no algoritmo exato chamado de Branch-and-Price, utilizado na resolução de problemas de Programação Inteira de muito grande porte [64–66].

No que se refere as aplicações práticas da Decomposição de Dantzig-Wolfe em Programação Inteira, a mesma foi utilizada pela primeira vez no problema de determinação de padrões de corte [67, 68], ainda na década de 1960. No entanto, o uso da mesma como algoritmo exato ocorreu apenas em 1984 com sua utilização em um problema de roteamento de veículos [69]. A utilização da técnica de geração de colunas para a resolução de problemas de Programação Inteira vem sendo utilizada em diversas aplicações práticas, tais como:

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Alocação Generalizada [70–72]</li> <li>• Coleta e Entrega [73–78]</li> <li>• Escalonamento de pessoas [79–86]</li> <li>• Escalonamento de máquinas [87–91]</li> <li>• Escalonamento de veículos [92–94]</li> <li>• Fluxo Multicomodidade [95–98]</li> <li>• Formação de Alianças [99]</li> <li>• Gerência da Cadeia de Suprimentos [100]</li> <li>• Indústria da Aviação: alocação de aeronaves [101], alocação da tripulação [102–105], escalonamento da tripulação [106–108]</li> <li>• Indústria Florestal [109–114]</li> <li>• Indústria do Petróleo [115]</li> <li>• Localização de Facilidades [116–119]</li> <li>• Lógica Probabilística [120, 121]</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Logística [122, 123]</li> <li>• Manutenção [124]</li> <li>• Medicina [125–128]</li> <li>• Mochila [129]</li> <li>• Padrões de Corte e Empacotamento [130–140]</li> <li>• Planejamento da Operação Hidrotérmica [141]</li> <li>• Partição de Circuitos [142]</li> <li>• Problemas Estocásticos [143–145]</li> <li>• Problemas em grafos: empacotamento de árvores de Steiner [146], coloração de grafos [147, 148], confiabilidade [149]</li> <li>• Problemas de Tráfego [150, 151]</li> <li>• Projeto de Redes [152–158]</li> <li>• P-mediana [159–162]</li> <li>• Roteamento de veículos [163–171]</li> </ul> |
|--|---|

Como citado anteriormente, com relação ao problema de planejamento da expansão da geração, em 1986 SANGHVI e SHAVEL [19] utilizaram este método de decomposição para resolver o problema de investimento hidrotérmico de longo prazo considerando incertezas na demanda futura de energia e no suprimento de combustíveis. Recentemente, em 2009 SINGH *et al.* [1] obtiveram sucesso na aplicação desta metodologia a um modelo com características semelhantes ao MELP.

Nas próximas seções serão apresentados os aspectos teóricos desta metodologia quando aplicada a problemas de Programação Linear e Inteira. Para uma maior compreensão será utilizado um problema genérico de Programação Linear, sem nenhuma relação com o modelo em estudo. Mais adiante, no Capítulo 5, a teoria apresentada a seguir será aplicada a uma nova formulação do modelo MELP, a ser apresentada no próximo capítulo.

## 3.2 Decomposição em Programação Linear

Dado um problema genérico de Programação Linear (PL), como uma forma de descrever o princípio em que se baseia a Decomposição de Dantzig-Wolfe, considere uma forma alternativa de resolver esse problema. Assim sendo, tome um problema de PL descrito por:

$$\min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v} \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.} \quad D\mathbf{v} \geq \mathbf{d} \quad (3.2)$$

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{v}$  é um vetor  $n$ -dimensional cujos elementos definem as variáveis  $\{v_j : j = 1, \dots, n\}$  do problema,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  é uma matriz  $m \times n$  cujos elementos assumem valores reais,  $D$  é uma matriz  $p \times n$  cujos elementos também assumem valores reais,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ .

Uma forma simples de resolver (3.1)-(3.4) à otimalidade seria submetê-lo a algum algoritmo de PL, por exemplo, um algoritmo baseado no Método Simplex [172] ou um Algoritmo de Pontos Interiores [173], e assim obter diretamente uma solução desejada. No entanto, ao invés de seguir esse caminho natural, vamos resolver (3.1)-(3.4) por um procedimento que envolve uma decomposição do problema. Assim sendo, considere uma região poliedral definida por  $\mathcal{A} = \{\mathbf{v} : A\mathbf{v} = \mathbf{b}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}\}$  e um problema de PL a ela associado, onde  $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ , formulado como:

$$\min \left\{ \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{A} \right\}. \quad (3.5)$$



A região poliedral  $\mathcal{A}$  contém um conjunto finito  $\{\mathbf{v}^p : p \in P\}$  de pontos extremos e um conjunto finito  $\{\mathbf{u}^r : r \in R\}$  de raios extremos. Assim sendo, pelo Teorema da Representação de Minkowski (veja [63], por exemplo), existem escalares  $\{\lambda_p \geq 0 : p \in P\}$  e  $\{\mu_r \geq 0 : r \in R\}$  tais que qualquer  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$  pode ser descrito como:

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p + \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \quad (3.6)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{p \in P} \lambda_p = 1 \quad (3.7)$$

$$\lambda_p \geq 0, \forall p \in P \quad (3.8)$$

$$\mu_r \geq 0, \forall r \in R \quad (3.9)$$

Como pode ser observado, o espaço de soluções associado a (3.1)-(3.4) está contido em  $\mathcal{A}$ , já que esse espaço é uma restrição de  $\mathcal{A}$  às desigualdades em (3.2). Ou seja, uma solução ótima para (3.1)-(3.4) é um ponto de  $\mathcal{A}$  que satisfaz as restrições (3.2). Assim sendo, (3.1)-(3.4) pode ser reformulado como o *Problema Mestre* (PM):

$$\min \quad \mathbf{c}^T \left( \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + \mathbf{c}^T \left( \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \quad (3.10)$$

$$\text{s.a.} \quad D \left( \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + D \left( \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \geq \mathbf{d} \quad (3.11)$$

$$\sum_{p \in P} \lambda_p = 1 \quad (3.12)$$

$$\lambda_p \geq 0, \forall p \in P \quad (3.13)$$

$$\mu_r \geq 0, \forall r \in R \quad (3.14)$$

Suponha que  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é uma solução ótima para PM e defina por  $\bar{\mathbf{v}}$  a descrição dessa solução através das variáveis  $\mathbf{v}$ , segundo a relação (3.6)-(3.9). Note que, assim sendo,  $\bar{\mathbf{v}}$  deve necessariamente pertencer a  $\mathcal{A}$ . Note ainda que, de forma similar, o conjunto de restrições (3.11) impõe, adicionalmente, que  $\bar{\mathbf{v}}$  satisfaça também à restrição (3.2) da formulação original do problema.

Através da reformulação expressa por PM, mostra-se que resolver (3.1)-(3.4) à otimalidade é equivalente a resolver (3.10)-(3.14) à otimalidade. Note no entanto que, na segunda opção, deve-se, ao menos em tese, enumerar explicitamente todos os pontos e raios extremos de  $\mathcal{A}$ . Normalmente, para um problema de PL não-trivial, o número desses pontos e raios é excessivamente alto e, dessa maneira, enumerá-los seria uma tarefa impraticável. Por outro lado, como será visto adiante, existe uma maneira tratável de resolver PM onde não é necessário efetuar explicitamente tal enumeração.

Assuma que, ao invés de trabalhar diretamente com PM, considera-se um PM

*Restrito* (PMR), definido para subconjuntos  $P' \subset P$  e  $R' \subset R$  como:

$$\min \quad \mathbf{c}^T \left( \sum_{p \in P'} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + \mathbf{c}^T \left( \sum_{r \in R'} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \quad (3.15)$$

$$\text{s.a.} \quad D \left( \sum_{p \in P'} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + D \left( \sum_{r \in R'} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \geq \mathbf{d} \quad (3.16)$$

$$\sum_{p \in P'} \lambda_p = 1 \quad (3.17)$$

$$\lambda_p \geq 0, \forall p \in P' \quad (3.18)$$

$$\mu_r \geq 0, \forall r \in R' \quad (3.19)$$

Suponha agora que  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é uma solução ótima primal para (3.15)-(3.19) e que, associando-se variáveis duais  $\pi \geq \mathbf{0}$  e  $\sigma$  respectivamente às restrições (3.16) e (3.17), tem-se  $(\bar{\pi}, \bar{\sigma})$  como uma solução ótima dual para (3.15)-(3.19). Dessa maneira, é possível então calcular custos reduzidos  $\{(\mathbf{c}^T \mathbf{v}^p - \bar{\pi} D \mathbf{v}^p - \bar{\sigma}) : p \in P'\}$  e  $\{(\mathbf{c}^T \mathbf{u}^r - \bar{\pi} D \mathbf{u}^r) : r \in R'\}$  relativos respectivamente às variáveis  $\lambda$  e  $\mu$  de PMR. Claramente, pela otimalidade de  $(\bar{\pi}, \bar{\sigma})$ , esses custos reduzidos devem necessariamente ser não-negativos.

Observando que  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é necessariamente uma solução primal viável para PM e que  $(\bar{\pi}, \bar{\sigma})$  é provavelmente uma solução dual inviável para aquele problema, nos interessaria então encontrar, caso exista, uma variável  $\lambda_p$ , para  $p \in \{P \setminus P'\}$ , ou uma variável  $\mu_r$ , para  $r \in \{R \setminus R'\}$ , com custo reduzido negativo. Encontrada tal variável (coluna) e expandido PMR através de sua introdução, seria então possível encontrar, através da resolução desse PMR estendido (e na ausência de *degeneração*), uma solução viável de PM de melhor qualidade que  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ . Dessa maneira, o procedimento que foi descrito pode ser entendido como uma iteração de atualização de base do Método Simplex Revisado, aplicado a PM através de PMR (veja [63], para maiores detalhes).

Com o objetivo de eventualmente encontrar variáveis de custo reduzido negativo indexadas respectivamente por  $\{P \setminus P'\}$  e  $\{R \setminus R'\}$ , considere um *subproblema* definido por

$$\min \{(\mathbf{c}^T - \bar{\pi} D) \mathbf{v} - \bar{\sigma} : \mathbf{v} \in \mathcal{A}\}. \quad (3.20)$$

Em relação a esse subproblema, observe que sendo  $\bar{\sigma}$  uma constante, a mesma pode ser eliminada de (3.20), sem prejuízos. Note ainda que uma solução ótima de (3.20), obtida pelo Método Simplex, nos dá um ponto extremo  $\mathbf{v}^p$  de  $\mathcal{A}$ , para  $p \in P$ , associado a uma variável  $\lambda_p$  de menor custo reduzido. Caso esse custo reduzido seja negativo, tal variável é necessariamente indexada em  $\{P \setminus P'\}$  e é assim uma candidata a expandir PMR. Por outro lado, se (3.20) tem, para a função objetivo utilizada, uma solução ótima ilimitada, um raio extremo  $\mathbf{u}_r$  de  $\mathcal{A}$ , para  $r \in R$ , seria então naturalmente caracterizado pelo Método Simplex (veja [63] para

detalhes). Se o custo reduzido  $(\mathbf{c}^T \mathbf{u}^r - \bar{\pi} D \mathbf{u}^r)$  da variável  $\mu_r$  associada a esse raio for negativo, tal variável é necessariamente indexada em  $\{R \setminus R'\}$  e é assim uma candidata a expandir PMR. Finalmente, caso não exista nenhum ponto extremo ou raio extremo de  $\mathcal{A}$  associado a variáveis com custo reduzido negativo, a solução  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é então necessariamente ótima primal para PM. Da mesma forma,  $\bar{\mathbf{v}}$  obtido em (3.6)-(3.9) para  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é então uma solução ótima primal para (3.1)-(3.4).

É possível mostrar (veja [63], para detalhes) que se (3.1)-(3.4) é inviável ou ilimitado, PM será igualmente inviável ou ilimitado.

A utilização da Decomposição de Dantzig-Wolfe pode ser particularmente atraente em situações em que, ao invés de um problema genérico de PL, como aquele descrito acima, tem-se para  $K = \{1, \dots, l\}$ , um problema que é formulado (ou pode ser reformulado) como:

$$\min \quad \sum_{k \in K} \mathbf{c}_k^T \mathbf{v}_k \quad (3.21)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in K} D_k^T \mathbf{v}_k \geq \mathbf{d} \quad (3.22)$$

$$A_k \mathbf{v}_k = \mathbf{b}_k, \forall k \in K \quad (3.23)$$

$$\mathbf{v}_k \geq \mathbf{0}, \forall k \in K \quad (3.24)$$

A formulação acima é definida para variáveis  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$  e apresenta uma estrutura *bloco-angular*, expressa pelas restrições (3.23), com uma conexão entre os blocos sendo estabelecida pelas *restrições de acoplamento* (3.22). De forma a aplicar a Decomposição de Dantzig-Wolfe ao problema acima, a exemplo do desenvolvimento feito anteriormente, defina regiões poliedrais

$$\mathcal{A}_k = \{\mathbf{v}_k : A_k \mathbf{v}_k = \mathbf{b}_k, \mathbf{v}_k \geq \mathbf{0}\}, \forall k \in K \quad (3.25)$$

para cada um dos blocos presentes na formulação. Na situação descrita acima, a aplicação da decomposição é ainda mais atraente se os subproblemas

$$\min \{\bar{\mathbf{c}}_k^T \mathbf{v}_k : \mathbf{v}_k \in \mathcal{A}_k\} \quad (3.26)$$

podem ser resolvidos eficientemente através de algoritmos dedicados específicos. Isso se aplica pois numa reformulação de Dantzig-Wolfe para a formulação (3.21)-(3.24), colunas seriam geradas para o PMR através dos  $l$  subproblemas definidos acima.

### 3.2.1 Equivalência com Relaxação Lagrangeana

No intuito de tornar ainda mais claro o princípio da Decomposição de Dantzig-Wolfe, apresenta-se a seguir a relação entre esta decomposição e a técnica de Relaxação Lagrangeana. Para isto, aplica-se aquela técnica ao problema genérico de programação linear (3.1)-(3.4).

Suponha que o conjunto de restrições (3.2) torne difícil a resolução do problema definido por (3.1)-(3.4) que, caso não existissem, seriam de fácil resolução. Uma maneira de contornar este problema seria trabalhar com um problema mais relaxado onde as restrições (3.2) seriam dualizadas de forma Lagrangeana, ou seja, levadas à função objetivo sob uma penalização  $\pi \geq 0$ . Este novo problema mais relaxado seria então descrito por:

$$\min \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{v} + \max_{\pi \geq 0} (\mathbf{d} - D\mathbf{v})^T \pi \right\} \quad (3.27)$$

$$\text{s.a.} \quad A\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (3.29)$$

Fazendo uso de alguma manipulação algébrica, o problema (3.27)-(3.29) pode ser formulado novamente dando origem ao Problema Dual Lagrangeano de (3.1)-(3.4), dado por:

$$\max_{\pi \geq 0} \left\{ \mathbf{d}^T \pi + \min (\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v} \right\} \quad (3.30)$$

$$\text{s.a.} \quad A\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Recordando que  $\mathcal{A} = \{\mathbf{v} : A\mathbf{v} = \mathbf{b}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}\}$ , pode-se definir uma função  $\mathcal{G}(\pi) = \min \{(\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{A}\}$ . Dessa maneira o Problema Dual Lagrangeano pode então ser escrito como  $\max \{\mathbf{d}^T \pi + \mathcal{G}(\pi) : \pi \geq 0\}$ . Sabe-se que  $\mathcal{G}(\pi)$  é uma função côncava não-diferenciável por ser constituída pelo mínimo de funções lineares. Pode-se então construir uma aproximação convexa  $\check{\mathcal{G}}(\pi)$  desta função com o uso de hiperplanos suportes. Esta aproximação, por sua vez, ao substituir a função  $\mathcal{G}(\pi)$ , irá criar também uma aproximação do problema dual lagrangeano, dada por:

$$\max \left\{ \mathbf{d}^T \pi + \check{\mathcal{G}}(\pi) : \pi \geq 0 \right\} \quad (3.33)$$

A definição destes hiperplanos suportes, necessários ao desenvolvimento de  $\check{\mathcal{G}}(\pi)$ , podem ser obtidos através da proposição que se segue.

**Proposição 1** *Considere  $\mathbf{v}^p \in P$ , um ponto extremo do conjunto finito de pontos extremos  $P$  da região poliedral  $\mathcal{A}$ . A função linear  $\mathcal{H}(\pi) = (\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p$  é um*

hiperplano suporte da função  $\mathcal{G}(\pi)$ .

**Prova 1** *Sabe-se que para qualquer valor  $\pi \geq 0$ , a seguinte relação é satisfeita  $(\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p \geq \min\{(\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{A}\}$ , ou seja,  $\mathcal{H}(\pi) \geq \mathcal{G}(\pi)$ . Considere  $\pi^p$  o vetor que satisfaz,  $\mathbf{v}^p = \operatorname{argmin}\{(\mathbf{c}^T - \pi^p D)\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{A}\}$ . As seguintes relações são satisfeitas:*

$$(\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p \geq \mathcal{G}(\pi) \quad (3.34)$$

$$(\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p + \pi^p D\mathbf{v}^p - \pi^p D\mathbf{v}^p \geq \mathcal{G}(\pi) \quad (3.35)$$

$$(\mathbf{c}^T - \pi^p D)\mathbf{v}^p - (D\mathbf{v}^p)^T(\pi - \pi^p) \geq \mathcal{G}(\pi) \quad (3.36)$$

$$\mathcal{G}(\pi^p) - (D\mathbf{v}^p)^T(\pi - \pi^p) \geq \mathcal{G}(\pi) \quad (3.37)$$

Note que a desigualdade (3.37) representa a equação da reta tangente à função  $\mathcal{G}(\pi)$  no ponto  $\pi^p$  sendo  $-D\mathbf{v}^p$  o seu gradiente, que por sua vez satisfaz  $-D\mathbf{v}^p \in \partial\mathcal{G}(\pi^p)$ , ou seja, é um subgradiente contido no subdiferencial da função côncava não-diferenciável  $\mathcal{G}(\pi)$ . Este resultado fecha a prova.

Desta forma, considerando o conjunto finito de pontos extremos  $P$  da região poliedral  $\mathcal{A}$ , pode-se construir uma aproximação côncava  $\check{\mathcal{G}}(\pi)$  da função  $\mathcal{G}(\pi)$  com o uso dos hiperplanos suporte  $\mathcal{H}(\pi)$ . Tem-se então que:

$$\check{\mathcal{G}}(\pi) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : (\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p \geq \sigma, \forall p \in P \right\}. \quad (3.38)$$

Note que, caso o conjunto  $\mathcal{A}$  seja fechado e ilimitado (não compacto) existe então um conjunto finito de raios extremos  $\{\mathbf{u}^r : r \in R\}$ . Sabe-se, pela teoria da dualidade que se um problema de Programação Linear for ilimitado, seu problema dual será inviável. Desta forma, acrescentam-se em  $\check{\mathcal{G}}(\pi)$  hiperplanos associados aos raios extremos do conjunto  $\mathcal{A}$  para evitar, no problema dual lagrangeano aproximado (3.33), a escolha de valores de  $\pi$  que implicariam em valores ilimitados para a função objetivo de  $\mathcal{G}(\pi)$ . Tem-se então uma nova aproximação convexa da função  $\mathcal{G}(\pi)$  dada por:

$$\check{\mathcal{G}}(\pi) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : (\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p \geq \sigma, (\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{u}^r \geq 0, \forall p \in P, \forall r \in R \right\}. \quad (3.39)$$

O Problema Dual Lagrangeano aproximado pode então ser escrito como o seguinte problema de Programação Linear:

$$\max \quad \mathbf{d}^T \pi + \sigma \quad (3.40)$$

$$\text{s.a.} \quad (\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{v}^p \geq \sigma, \forall p \in P \quad (3.41)$$

$$(\mathbf{c}^T - \pi D)\mathbf{u}^r \geq 0, \forall r \in R \quad (3.42)$$

$$\sigma \in \mathbb{R}, \pi \geq 0 \quad (3.43)$$

Fazendo uso de alguma manipulação algébrica o problema anterior pode ser escrito como:

$$\max \quad \mathbf{d}^T \pi + \sigma \quad (3.44)$$

$$\text{s.a.} \quad \pi(D\mathbf{v}^p) + \sigma \leq (\mathbf{c}^T \mathbf{v}^p), \quad \forall p \in P \quad (3.45)$$

$$\pi(D\mathbf{u}^r) \leq (\mathbf{c}^T \mathbf{u}^r), \quad \forall r \in R \quad (3.46)$$

$$\sigma \in \mathbb{R}, \quad \pi \geq 0 \quad (3.47)$$

Associando as variáveis duais  $\lambda_p \geq 0, \forall p \in P$ , e  $\mu_r \geq 0, \forall r \in R$ , às restrições (3.45) e (3.46), respectivamente, obtém-se uma formulação dual do Problema Dual Lagrangeano Aproximado (3.44)-(3.47) dada por:

$$\min \quad \mathbf{c}^T \left( \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + \mathbf{c}^T \left( \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \quad (3.48)$$

$$\text{s.a.} \quad D \left( \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + D \left( \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \geq \mathbf{d} \quad (3.49)$$

$$\sum_{p \in P} \lambda_p = 1 \quad (3.50)$$

$$\lambda_p \geq 0, \quad \forall p \in P \quad (3.51)$$

$$\mu_r \geq 0, \quad \forall r \in R \quad (3.52)$$

A formulação acima é precisamente idêntica à formulação do *Problema Mestre* (3.10)-(3.14) apresentada anteriormente, comprovando assim a equivalência existente entre a Decomposição de Dantzig-Wolfe e a Relaxação Lagrangeana.

Note que quando a formulação (3.48)-(3.52) é resolvida na otimalidade, os vetores duais ótimos associados às restrições (3.49) e (3.50) serão exatamente os valores ótimos de  $\pi$  e  $\sigma$ , respectivamente, da formulação (3.44)-(3.47).

Outro ponto importante diz respeito a condição de otimalidade. Seja  $\bar{\pi}$  a solução do Problema Dual Lagrangeano (3.30)-(3.32) que, sendo ótima, é a mesma solução do Problema Dual Lagrangeano Aproximado (3.33), ou seja:

$$\underbrace{\mathbf{d}^T \bar{\pi} + \mathcal{G}(\bar{\pi})}_{\text{Limite Inferior}} = \underbrace{\mathbf{d}^T \bar{\pi} + \check{\mathcal{G}}(\bar{\pi})}_{\text{Limite Superior}} = \mathbf{d}^T \bar{\pi} + \bar{\sigma} \rightarrow \mathcal{G}(\bar{\pi}) = \bar{\sigma} \rightarrow \mathcal{G}(\bar{\pi}) - \bar{\sigma} = 0 \quad (3.53)$$

A última relação em (3.53) pode ser escrita como:

$$\min \{ (\mathbf{c}^T - \bar{\pi} D) \mathbf{v} - \bar{\sigma} : \mathbf{v} \in \mathcal{A} \} \quad (3.54)$$

Esta condição é exatamente a mesma descrita em (3.20) para a Decomposição de Dantzig-Wolfe. Quando o valor ótimo deste problema é nulo, condição de otimalidade na Relaxação Lagrangeana, isto significa que, no contexto da Decomposição de

Dantzig-Wolfe, não existe nenhuma variável que possa entrar na base e levar a uma solução viável de melhor qualidade para o PMR. Sendo assim, a solução corrente para aquele problema seria ótima.

### 3.2.2 Procedimentos de Estabilização de Colunas

Uma implementação eficiente de uma Decomposição de Dantzig-Wolfe demanda um elevado grau de sofisticação. Uma aplicação direta do método pode se mostrar frustrante, se uma série de pontos relevantes associados não forem adequadamente tratados. Dentre estes, destacam-se os problemas normalmente associados à *estabilização* do procedimento de geração de colunas (veja [95], para maiores detalhes).

O problema está associado à grande variação observada nos valores das variáveis duais de PMR, em rodadas sucessivas de geração de colunas. Note que um número elevado de soluções ótimas duais pode tipicamente existir para um problema de PL e que, assim sendo, existe uma ampla opção de escolha para as mesmas. Note também que, numa Decomposição de Dantzig-Wolfe, utiliza-se valores ótimos duais, obtidos nos PMRs, para a geração de colunas nos subproblemas.

Em investigações empíricas associadas à estabilização do procedimento de geração de colunas, verificou-se que as soluções ótimas duais obtidas pelo Método Simplex, em rodadas sucessivas de geração de colunas, tendem a apresentar, para uma mesma variável dual, uma grande variação de valor. Isso pode levar, por exemplo, a uma má convergência do método de decomposição. Dentre os diversos métodos de estabilização existentes na literatura, pode-se citar alguns mais conhecidos e classificá-los em métodos lineares e métodos não-lineares.

Dentre aqueles que se classificam como lineares, citam-se o de MARSTEN *et al.* [174], que se denomina método *box-step* e que consiste em introduzir no PMR um conjunto de variáveis adicionais que, na formulação dual do mesmo, é equivalente a acrescentar um conjunto de restrições impondo limites de variação para as variáveis duais. Em 1999, DU MERLE *et al.* [175] propuseram um método baseado na idéia anterior admitindo, no entanto, uma violação daqueles limites, mas assumindo sujeito ao ônus do pagamento de uma penalidade. Ainda relacionado ao método *box-step*, em 2006, WESTERLUND *et al.* [176] propôs uma modificação do mesmo onde o limite de variação dos duais, ou seja o tamanho da “caixa”, varia ao longo das iterações.

Outro método linear, distinto dos anteriores, foi proposto em 1997 por WENTGES [177]. Este método estabiliza a variação dos duais através de uma combinação convexa do melhor dual conhecido até o momento (aquele que fornece o melhor limite inferior) e o dual do PMR da iteração corrente. Em 2005, CARVALHO [178] sugeriu uma metodologia de estabilização baseada na introdução de desigualdades

válidas adicionais na formulação dual do PMR, o que na prática significa adicionar colunas extras ao PMR, em cada iteração.

Em relação aos métodos não-lineares de estabilização dos duais, em 2006, BEN AMOR e DESROSIERS [179] propuseram um algoritmo de ponto proximal utilizando métodos de penalidades e regiões de confiança. Em 2008, BRIANT *et al.* [180], e em 2009, BEN AMOR *et al.* [181], utilizaram métodos de feixes para o dual do PMR. Por sua vez, em 2011, LEE e PARK [182] utilizaram a métrica de Chebyshev através da adição de restrições não lineares ao problema.

Finalmente citam-se trabalhos que utilizam na resolução do PMR, para efeito de estabilização dos duais, o Método de Pontos Interiores, ao invés do Método Simplex. Dentre estes ressalta-se, ELHEDHLI e GOFFIN [183], em 2004, ROUSSEAU *et al.* [184], em 2007, e SINGH *et al.* [1], em 2009.

A seguir são apresentados, com mais detalhes, dois procedimentos de estabilização que foram testados na aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe ao MELP. Neste trabalho, a ênfase em relação a métodos de estabilização está voltada para os métodos lineares, por serem de fácil implementação computacional. Neste contexto, resolveu-se o PMR através do Método de Pontos Interiores, seguindo a linha adotada em SINGH *et al.* [1].

### Procedimento de DU MERLE *et al.* [175]

Considere um problema de Programação Linear  $P$  definido por:

$$\min \{c^T \mathbf{x} : A\mathbf{x} = b, \mathbf{x} \geq 0\} \quad (3.55)$$

e o seu dual  $D$ , descrito por:

$$\max \{b^T \pi : A^T \pi \leq c\}. \quad (3.56)$$

Quando  $P$  possui um número de variáveis muito maior do que  $D$ , o que ocorre, por exemplo, numa reformulação de Dantzig-Wolfe, o problema é normalmente resolvido através de geração de colunas. No entanto, como foi enfatizado anteriormente, seguindo esse procedimento, é comum enfrentar uma convergência extremamente lenta onde até mesmo exibir uma prova de otimalidade para uma solução degenerada de  $P$ , pode ser não trivial [175]. Nesse contexto, uma forma de lidar com degeneração seria perturbar  $P$ , adicionando ao problema variáveis de folga e de falta, para assim obter o problema perturbado  $P_\epsilon$ , descrito por

$$\min \{c^T \mathbf{x} - \mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ : A\mathbf{x} - \mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ = b, \mathbf{y}_- \leq \epsilon_-, \mathbf{y}_+ \leq \epsilon_+, \mathbf{x}, \mathbf{y}_-, \mathbf{y}_+ \geq 0\}. \quad (3.57)$$

Alternativamente, pode-se também pensar em reduzir o domínio de  $D$ , através de



penalidades. Isso pode ser feito através do uso de um parâmetro  $\delta \geq 0$ , de valor adequado, de tal forma que resolver  $P$  seja equivalente a resolver um problema  $P_\delta$ , definido por

$$\min \{c^T \mathbf{x} + \delta \mathbf{y}_- + \delta \mathbf{y}_+ : A\mathbf{x} - \mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ = b, \mathbf{y}_- \leq \epsilon_-, \mathbf{y}_+ \leq \epsilon_+, \mathbf{x}, \mathbf{y}_-, \mathbf{y}_+ \geq 0\}. \quad (3.58)$$

Na reformulação  $P_\delta$  de  $P$ , pode-se observar que as variáveis duais associadas às restrições de igualdade estão restritas à *caixa*  $[-\delta \mathbf{e}, +\delta \mathbf{e}]$ , onde  $\mathbf{e}$  é um vetor com todas as suas componentes iguais a 1. Centrando-se essa caixa em um valor dual estimado distinto da origem, torna-se o problema  $P_\delta$  equivalente a um dos problemas resolvidos no procedimento iterativo de estabilização denominado *box-step* [174].

A proposta de estabilização sugerida em [175] combina perturbação e penalidade em um único procedimento. Isso é feito através da definição de um problema  $\hat{P}$  que inclui  $P_\epsilon$  e  $P_\delta$ , como casos particulares. O problema  $\hat{P}$  é definido como

$$\min \quad c^T \hat{\mathbf{x}} - \delta_- \mathbf{y}_- + \delta_+ \mathbf{y}_+ \quad (3.59)$$

$$\text{s.a.} \quad A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}_- + \mathbf{y}_+ = b \quad (3.60)$$

$$\mathbf{y}_- \leq \epsilon_- \quad (3.61)$$

$$\mathbf{y}_+ \leq \epsilon_+ \quad (3.62)$$

$$\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_-, \mathbf{y}_+ \geq 0 \quad (3.63)$$

e tem como dual o problema  $\hat{D}$  descrito por

$$\max \quad b^T \hat{\pi} - \epsilon_- w_- - \epsilon_+ w_+ \quad (3.64)$$

$$\text{s.a.} \quad A^T \hat{\pi} \leq c \quad (3.65)$$

$$-\hat{\pi} - w_- \leq -\delta_- \quad (3.66)$$

$$\hat{\pi} - w_+ \leq \delta_+ \quad (3.67)$$

$$w_-, w_+ \geq 0 \quad (3.68)$$

No problema primal  $\hat{P}$ ,  $\mathbf{y}_-$  e  $\mathbf{y}_+$  são respectivamente os vetores de folga e de falta, com limites superiores dados por,  $\epsilon_-$  e  $\epsilon_+$ , em cada caso. Tais vetores são penalizados na função objetivo, respectivamente por  $\delta_-$  e  $\delta_+$ . Por outro lado, no problema dual  $\hat{D}$ , as duas últimas restrições podem ser re-escritas como  $\delta_- - w_- \leq \hat{\pi} \leq \delta_+ + w_+$ , que se resume a penalizar as variáveis  $\hat{\pi}$  quando estão fora do intervalo  $[\delta_-, \delta_+]$ . No método *box-step*,  $\epsilon_- = \epsilon_+ = \infty$  e as variáveis duais não podem sair dos intervalos a elas associados. Por outro lado, no modelo acima, embora os intervalos escolhidos possam ficar bastante longe de uma solução ótima para  $P$ , tomando-se valores suficientemente pequenos para os parâmetros  $\epsilon_-$  e  $\epsilon_+$ , permite-se que o problema  $\hat{P}$  tenha soluções primais e duais próximas das de  $P$ . O procedimento

sugerido em [175], atualiza os valores de  $\delta_-$ ,  $\delta_+$ ,  $\epsilon_-$  e  $\epsilon_+$  de tal forma a permitir que essa associação aconteça.

Na aplicação de decomposição feita ao MELP, o procedimento de estabilização de geração de colunas sugerido em [175] se mostrou difícil de calibrar e muitas vezes divergiu. Além deste, também foi investigado o procedimento sugerido por WENTGES [177], que é descrito a seguir.

### Procedimento de WENTGES [177]

O procedimento de estabilização de geração de colunas sugerido por WENTGES [177], se origina da idéia de resolver um problema Dual Lagrangeano através de Decomposição de Dantzig-Wolfe. A relação existente entre estas duas metodologias foi explorada em detalhes na seção 3.2.1, no entanto, apresenta-se novamente esta relação de acordo com a notação adotada pelo autor em [177]. Para descrever a idéia, considere um Problema  $P$  de Programação Inteira Mista (PPIM) descrito por

$$v(P) = \min \quad c^T \mathbf{x} + d^T \mathbf{y} \quad (3.69)$$

$$\text{s.a.} \quad A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \geq b_1 \quad (3.70)$$

$$C\mathbf{x} + D\mathbf{y} \geq b_2 \quad (3.71)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (3.72)$$

$$\mathbf{y} \in P_0 \quad (3.73)$$

onde as dimensões envolvidas são todas compatíveis, as variáveis  $\mathbf{x}$  assumem valores contínuos e as variáveis  $\mathbf{y}$  assumem valores inteiros.

Se as restrições (3.71) *complicam* a resolução de (3.69)-(3.73), de tal forma que, se fossem eliminadas do mesmo, o problema resultante seria de fácil resolução, é interessante associar multiplicadores  $\mathbf{u} \geq 0$  à tais restrições e dualizá-las Lagrangeanamente. A família de Problemas ( $SL_{\mathbf{u}}$ ) descrita por

$$v(SL_{\mathbf{u}}) = \min \quad c^T \mathbf{x} + d^T \mathbf{y} + (b_2 - C\mathbf{x} - D\mathbf{y})^T \mathbf{u} \quad (3.74)$$

$$\text{s.a.} \quad A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \geq b_1 \quad (3.75)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (3.76)$$

$$\mathbf{y} \in P_0 \quad (3.77)$$

é chamada de Relaxação Lagrangeana de PPIM, relativa à dualização das restrições (3.71). Para um  $\mathbf{u}$  fixo, ( $SL_{\mathbf{u}}$ ) é também chamado de Subproblema Lagrangeano.

O melhor limite inferior capaz de se obter através de Relaxação Lagrangeana é

dado pelo Dual Lagrangeano (DL) definido por

$$v(DL) = \max \{v(SL_{\mathbf{u}}) : \mathbf{u} \geq 0\}. \quad (3.78)$$

Seja  $S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : A\mathbf{x} + B\mathbf{y} \geq b_1, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \in P_0\}$  a região poliedral associada aos subproblemas Lagrangeanos e  $\text{conv}(S)$  o seu fecho convexo. Por simplicidade, é assumido que  $\text{conv}(S)$  é não vazio e limitado, tendo  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) : k \in K\}$  como seu conjunto (finito) de pontos extremos. O problema DL pode então ser re-escrito como

$$\begin{aligned} v(DL) &= \max_{\mathbf{u} \geq 0} \left\{ \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S} \left\{ c^T \mathbf{x} + d^T \mathbf{y} + (b_2 - C\mathbf{x} - D\mathbf{y})^T \mathbf{u} \right\} \right\} \\ &= \max_{\mathbf{u} \geq 0} \left\{ \min_{k \in K} \left\{ c^T \mathbf{x}^k + d^T \mathbf{y}^k + (b_2 - C\mathbf{x}^k - D\mathbf{y}^k)^T \mathbf{u} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

ou ainda,

$$v(DL) = \max_{\substack{u_0 \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u} \geq 0}} \left\{ u_0 : u_0 \leq c^T \mathbf{x}^k + d^T \mathbf{y}^k + (b_2 - C\mathbf{x}^k - D\mathbf{y}^k)^T \mathbf{u}, \forall k \in K \right\} \quad (3.80)$$

Por sua vez, o dual de (3.80) pode ser escrito, fazendo uso de variáveis duais  $\lambda_k$ ,  $\forall k \in K$ , como:

$$v(MP) = \min \sum_{k \in K} \lambda_k (c^T \mathbf{x}^k + d^T \mathbf{y}^k) \quad (3.81)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in K} \lambda_k (b_2 - C\mathbf{x}^k - D\mathbf{y}^k) \leq 0 \quad (3.82)$$

$$\sum_{k \in K} \lambda_k = 1 \quad (3.83)$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad (3.84)$$

o que define exatamente o Problema Mestre (PM) da reformulação de Dantzig-Wolfe de (3.69)-(3.73), tomando (3.71) como as restrições de acoplamento.

A proposta de WENTGES [177], denominada Decomposição Poderada de Dantzig-Wolfe (DPDW), se aplica a um PM Restrito que inicialmente envolve, como é usual, um subconjunto das colunas de PM. Numa dada iteração  $l > 1$  de DPDW, assumamos que  $\mathbf{u}^l$  define os valores duais ótimos associados à solução do PMR corrente. Ao contrário de uma implementação padrão do algoritmo de decomposição de Dantzig-Wolfe, em DPDW, os multiplicadores  $\mathbf{u}^l$  não são submetidos diretamente ao SL (3.74)-(3.77) (para a geração de novas colunas para o PMR). Isso é feito através de uma combinação ponderada de  $\mathbf{u}^l$  e  $\hat{\mathbf{u}}$ , onde  $\hat{\mathbf{u}}$  define os melhores multiplicadores duais disponíveis, ou seja, aqueles que levaram ao melhor valor  $v(SL_{\hat{\mathbf{u}}})$ , até agora obtido. Note que (3.74)-(3.77) nos dá um limite inferior  $v(SL_{\hat{\mathbf{u}}})$  para  $v(P)$  e que quanto maior for esse limite, melhor ele é.

A regra de atualização proposta em [177] utiliza multiplicadores duais ponderados  $\bar{\mathbf{u}}^l$  expressos por

$$\bar{\mathbf{u}}^l = \frac{1}{\alpha^l} \mathbf{u}^l + \frac{\alpha^l - 1}{\alpha^l} \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.85)$$

onde

$$\alpha^l = \min \left\{ \alpha^0, \lfloor \frac{l + l_0}{2} \rfloor \right\} \quad (3.86)$$

e  $l_0$  define o número de vezes em que o melhor limite inferior de  $v(P)$ , dado por (3.74)-(3.77), foi melhorado até a iteração  $l$ . Justificativas teóricas para DPDW são apresentadas em [177] e o bom desempenho computacional do procedimento de estabilização proposto é demonstrado com uma aplicação ao Problema de Localização Capacitada.

### 3.3 Decomposição em Programação Inteira

A primeira utilização de Decomposição de Dantzig-Wolfe para a resolução de problemas de Programação Inteira, foi proposta em [67, 68]. Nessa aplicação, que não tinha por objetivo apresentar certificados de otimalidade, soluções inteiras de *boa qualidade* foram obtidas para o Problema de *Cutting-Stock* (PCS). Nessa aplicação, o subproblema de geração de colunas é formulado como um Problema da Mochila Inteira (resolvido por Programação Dinâmica) e o PMR resultante é definido como um Problema de Recobrimento.

Na aplicação descrita em [67, 68], não foi apresentada nenhuma sugestão capaz de viabilizar a implementação, sob Decomposição de Dantzig-Wolfe, de um algoritmo do tipo *Branch-and-Bound*. Uma combinação adequada desses dois ingredientes, posteriormente denominada *Branch-and-Price*, é, sem dúvidas, uma questão fundamental a resolver em uma eventual extensão genérica da Decomposição de Dantzig-Wolfe a Programação Inteira. Uma forma conveniente de efetuar essa combinação só veio a ser sugerida em [69], vinte anos depois da aplicação pioneira da técnica a problemas de Programação Inteira. Para descrevê-la, considere, por simplicidade, um Problema de Programação Inteira Pura (PPIP) formulado como

$$\min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v} \quad (3.87)$$

$$\text{s.a.} \quad D\mathbf{v} \geq \mathbf{d} \quad (3.88)$$

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n. \quad (3.91)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento proposto anteriormente para o problema de

PL descrito por (3.1)-(3.4), considere um conjunto de pontos definido por

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{v} : A\mathbf{v} = \mathbf{b}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n\} \quad (3.92)$$

e um PM formulado como

$$\min \quad \mathbf{c}^T \left( \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + \mathbf{c}^T \left( \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \quad (3.93)$$

$$\text{s.a.} \quad D \left( \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p \right) + D \left( \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \right) \geq \mathbf{d} \quad (3.94)$$

$$\sum_{p \in P} \lambda_p = 1 \quad (3.95)$$

$$\lambda_p \geq 0, \forall p \in P \quad (3.96)$$

$$\mu_r \geq 0, \forall r \in R \quad (3.97)$$

onde  $\{\mathbf{v}^p : p \in P\}$  e  $\{\mathbf{u}^r : r \in R\}$  definem respectivamente o conjunto de pontos extremos e o conjunto de raios extremos de  $\mathcal{A}$ . Note que, agora, pela definição imposta em (3.92), todos os pontos pertencentes a  $\mathcal{A}$  assumem valores inteiros.

Como era o caso anteriormente, colunas são aqui geradas para introdução em um PMR, definido a partir de PM. Isso é feito através de soluções associadas a um subproblema do tipo

$$\min \{ \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathcal{A} \}, \quad (3.98)$$

onde os custos  $\bar{\mathbf{c}}$  são definidos a partir de valores duais ótimos associados a PMR.

Ao impor restrições de integralidade aos elementos de  $\mathcal{A}$ , estaremos gerando colunas definidas por pontos extremos e raios extremos de uma região poliedral que está contida em

$$\mathcal{A}_{PL} = \{\mathbf{v} : A\mathbf{v} = \mathbf{b}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}\}, \quad (3.99)$$

ou seja, em  $\mathcal{A}$  sem as restrições de integralidade. Se os pontos extremos de  $\mathcal{A}_{PL}$  não são naturalmente inteiros, reformular (3.87)-(3.91) através de PM pode implicar em uma redução da região de viabilidade da relaxação linear do nosso problema original.

Se isso acontece, é possível então obter, através da solução ótima de PM, limites inferiores mais fortes para (3.87)-(3.91) que aqueles obtidos diretamente através da relaxação linear daquela formulação. Desta forma, considerando  $Z_{RL}(\text{PPIP})$  como sendo o valor ótimo da relaxação linear de (PPIP),  $Z_{RL}(\text{PM})$  como sendo o valor ótimo da relaxação linear de (PM) e  $Z_{IT}(\text{PPIP})$  como sendo o valor ótimo de (PPIP) podemos escrever, segundo VANDERBECK [185], a seguinte relação:

$$Z_{RL}(\text{PPIP}) \leq Z_{RL}(\text{PM}) \leq Z_{IT}(\text{PPIP}) \quad (3.100)$$

Recair nessa situação é então algo que se deve almejar ao projetar um algoritmo

do tipo Branch-and-Price (caso, obviamente, sejamos capazes de resolver satisfatoriamente o problema de Programação Inteira definido por (3.98)). Algoritmos Branch-and-Price, como veremos a seguir, inserem o Método Branch-and-Bound na Decomposição de Dantzig-Wolfe.

Note, no entanto, que recair em (3.100) não é uma condição necessária ao bom desempenho desse tipo de algoritmo. Via de regra, nosso interesse maior deve ser sempre o de trabalhar com formulações cujas relaxações lineares, de uma forma ou de outra, levem a limites duais de *boa qualidade*, ou seja, que o valor ótimo da relaxação linear seja próximo ao valor ótimo do problema com restrições de integralidade. Claramente, atingir esse objetivo é essencial para abreviar o processo de enumeração, levado a cabo por um algoritmo do tipo Branch-and-Bound.

As questões levantadas acima também se manifestam, de forma similar, em outros métodos de decomposição utilizados para resolver PPIP. Isso não é de surpreender, já que uma equivalência entre Decomposição de Dantzig-Wolfe e Relaxação Lagrangeana, como vimos, está bem estabelecida. O mesmo também se passa em relação a Decomposição de Benders (veja, dentre outras, [95]).

### 3.3.1 Algoritmo Branch-and-Price: Regras de Branching e Planos de Corte

Como visto anteriormente, uma relação entre as variáveis associadas a (3.87)-(3.91) e aquelas definidas para PM é expressa por:

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in P} \lambda_p \mathbf{v}^p + \sum_{r \in R} \mu_r \mathbf{u}^r \quad (3.101)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{p \in P} \lambda_p = 1 \quad (3.102)$$

$$\lambda_p \geq 0, \forall p \in P \quad (3.103)$$

$$\mu_r \geq 0, \forall r \in R \quad (3.104)$$

onde  $\{\mathbf{v}^p : p \in P\}$  é o conjunto de pontos extremos de  $\mathcal{A}$  enquanto  $\{\mathbf{u}^r : r \in R\}$  define seu conjunto de raios extremos.

Suponha que estamos implementando um algoritmo do tipo Branch-and-Price [64] para resolver (3.87)-(3.91). Suponha também que temos em mãos uma solução ótima para o PM associado ao nó raiz da *árvore de enumeração* correspondente, dada pelo vetor  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ , com dimensões compatíveis. Nesse caso, se o vetor  $\mathbf{v}$ , obtido com a aplicação de  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  na relação expressa por (3.101)-(3.104), assumir valor inteiro, então uma solução ótima inteira para nosso problema original teria sido obtida. Assim sendo, não existiriam portanto nós adicionais a investigar na árvore de enumeração. Caso contrário, deveríamos efetuar uma *ramificação* do nó raiz

através de alguma regra a ser especificada que, a princípio, poderia ser aplicada nos subproblemas de geração de colunas ou nos PMRs.

A imposição de regras de ramificação nos subproblemas de geração de colunas não é, em geral, atraente. Isso se deve ao fato de que, ao fazê-lo, a estrutura associada a esses problemas tende a ser alterada, o que na prática é desvantajoso do ponto de vista computacional. Por exemplo, suponha que os subproblemas sejam um problema de caminhos mínimos em grafos que na prática é resolvido na otimalidade, e em tempo polinomial, através do algoritmo de Dijkstra [186]. Caso uma restrição fosse adicionada ao problema, a sua resolução através do algoritmo citado poderia ser impossibilitada. Recentemente, em 2011, VANDERBECK [187] propôs um esquema de ramificação inovador aplicado aos subproblemas que não destroi a sua estrutura, possibilitando assim a utilização de algoritmos dedicados aos mesmos.

Em relação aos PMRs, regras de ramificação focadas diretamente em  $\{\lambda_p : p \in P\}$  e  $\{\mu_r : r \in R\}$  (e não em  $\mathbf{v}$ ) se mostraram impraticáveis, devido, entre outros, ao número excessivo das variáveis envolvidas, a problemas de convergência (provocados por árvores de enumeração desbalanceadas) e, principalmente, por levarem a modificações na estrutura do subproblema de geração de colunas [64, 95, 185]. Melhores resultados foram obtidos implementando-se regras de ramificação baseadas nas variáveis originais  $\mathbf{v}$ , expressas no PM através da relação (3.101)-(3.104).

Suponha que uma solução ótima para o PMR definido no nó raiz de nossa árvore de enumeração foi obtida. Suponha ainda que um elemento (variável)  $v_j$  de  $\mathbf{v}$  assume um valor fracionário  $\bar{v}_j$  nessa solução. Suponha agora que essa variável  $v_j$  é descrita (através de (3.101)-(3.104)) pelos pontos extremos e raios extremos de  $\mathcal{A}$  respectivamente definidos por  $\{\mathbf{v}^p : p \in P_j \subset P\}$  e  $\{\mathbf{u}^r : r \in R_j \subset R\}$ . É então possível criar dois nós descendentes do nosso nó raiz, impondo a PM, uma de cada vez, as seguintes restrições:

$$\sum_{p \in P_j} v_j^p \lambda_p + \sum_{r \in R_j} u_j^r \mu_r \leq \lfloor \bar{v}_j \rfloor \quad (3.105)$$

e

$$\sum_{p \in P_j} v_j^p \lambda_p + \sum_{r \in R_j} u_j^r \mu_r \geq \lfloor \bar{v}_j \rfloor + 1. \quad (3.106)$$

Se, como proposto acima, as desigualdades de ramificação se encontram restritas a PM, as modificações por elas impostas aos subproblemas de geração de colunas, ao longo da árvore de Branch-and-Bound, ficarão limitadas à função objetivo daqueles subproblemas (não modificando assim as estruturas dos mesmos). Isso se torna evidente se é considerado o problema original, acrescido de restrições de ramificação

do tipo (3.105) ou (3.106), ou seja,

$$\min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{v} \quad (3.107)$$

$$\text{s.a.} \quad D\mathbf{v} \geq \mathbf{d} \quad (3.108)$$

$$G\mathbf{v} \geq \mathbf{g}, \quad (3.109)$$

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \quad (3.111)$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n \quad (3.112)$$

onde (3.109) representa as restrições de ramificação. Dessa forma, associando, em PM, variáveis duais  $\rho$  às restrições de ramificação, tem-se então um subproblema de geração de colunas dado por

$$\min\{(\mathbf{c} - \bar{\pi}D - \bar{\rho}G)\mathbf{v} - \bar{\sigma} : \mathbf{v} \in \mathcal{A}\}, \quad (3.113)$$

onde  $\bar{\pi}$ ,  $\bar{\rho}$  e  $\bar{\sigma}$  são valores ótimos correspondentes às variáveis duais. Como é evidente observar, o subproblema continua a ser definido em  $\mathcal{A}$ , não tendo sido então alterada a sua estrutura.

O esquema de ramificação descrito acima é geral e se aplica tanto a PPIP quanto a Problemas de Programação Inteira Mista. Em particular, se as variáveis inteiras do problema são binárias 0-1, adaptações podem ser feitas ao esquema [95].

Denomina-se *Branch-and-Cut-and-Price* (BCP) ao procedimento análogo a um algoritmo Branch-and-Cut ([188], para detalhes), quando conduzido sob uma Decomposição de Dantzig-Wolfe. Um algoritmo BCP gera desigualdades válidas fortes à medida que essas se fazem necessárias para reforçar os limites inferiores gerados pelos PMs. Tais desigualdades são globalmente válidas (ou seja, são válidas em qualquer nó da árvore de enumeração) e são específicas para cada problema tratado. Sua utilização, sob Decomposição de Dantzig-Wolfe, deve ficar restrita aos PMs. Assim sendo, essas desigualdades (e suas variáveis  $\mathbf{v}$ ) devem ser introduzidas nos PMs através das relações (3.101)-(3.104). Feito isso, a exemplo das restrições de ramificação, seu uso não altera a estrutura dos subproblemas de geração de colunas.

Para maiores detalhes sobre desigualdades fortes, veja [188], e para o seu uso em algoritmos BCP, veja [95]. Para recentes aplicações deste tipo de algoritmo citam-se em 2006, FUKASAWA *et al.* [167] que resolvem um problema de roteamento de veículos, e em 2008, UCHOA *et al.* [189] que resolvem um problema de árvores geradoras de grafos. Em ambos os trabalhos os autores denominam *Robust Branch-and-Cut-and-Price* ao algoritmo de solução empregado, que pode ser entendido como um algoritmo BCP onde as desigualdades válidas não alteram a estrutura dos subproblemas de geração de colunas.



# Capítulo 4

## Reformulações para o MELP

Até recentemente, o módulo de Programação Inteira Mista do software CPLEX 11.0, associado ao procedimento de busca local (página 47), era o algoritmo de solução utilizado para resolver a formulação (2.42)-(2.53) do MELP. No entanto, para instâncias de muito grande porte, como aquela mencionada na Seção 2.4.1, o procedimento atual se mostrou incapaz de obter, em tempos de CPU aceitáveis, soluções viáveis de boa qualidade. De fato, sob um processador Intel Core 2Quad Q9550 de 2.83Ghz e 4Gb de memória RAM, até mesmo resolver a relaxação linear da formulação se mostrou impraticável para o CPLEX.

Essa limitação se aplica, indistintamente, a seu algoritmo de Pontos Interiores e à sua implementação do Método Simplex. Em ambos os casos, o processo de resolução foi automaticamente interrompido sob a justificativa de “instabilidades numéricas”, no caso do Algoritmo Simplex devido à singularidades encontradas, e no caso do Algoritmo de Pontos Interiores devido à grande quantidade de colunas “densas”, presentes no conjunto de restrições (2.46)-(2.50).

Em uma situação como a mencionada acima, uma forma de se tentar superar as dificuldades encontradas seria utilizar métodos de decomposição para resolver (2.42)-(2.53). Neste trabalho, optou-se por escolher a Decomposição de Dantzig-Wolfe (DDW) [62], tendo como justificativa os resultados expressivos que vêm sendo obtidos com a sua aplicação a uma ampla gama de problemas em Programação Inteira [190]. Outras razões seriam os resultados ainda limitados mas bastante promissores obtidos com a aplicação desse procedimento a problemas na área de planejamento elétrico [1].

### 4.1 Reformulações Proposta na Literatura

Uma aplicação pouco sofisticada de DDW a (2.42)-(2.53) pode ser feita observando-se que as restrições (2.46)-(2.50) ligam as  $|K|$  estruturas contínuas definidas por (2.44) e (2.45) a um Problema da Mochila 0-1 definido por (2.43). Dessa forma,

pode-se definir um Problema Mestre (PM) sobre as restrições (2.46)-(2.50), obtendo assim  $|K|$  Subproblemas de Geração de Colunas (SGCs), independentes, definidos pelas restrições (2.44)-(2.45). Entretanto, tal procedimento nos levaria a um PM sem nenhuma estrutura a explorar. Pior ainda, nos SGCs definidos, nenhum acoplamento existiria entre as variáveis inteiras de investimento e as variáveis contínuas utilizadas para operação do sistema. Como consequência, as colunas assim geradas trariam muito pouca informação para PM e a convergência do método seria, muito provavelmente, bastante lenta.

Em face das restrições enumeradas, optou-se então por investigar as reformulações sugeridas em [1]. Estas foram originalmente propostas para tratar de problemas estocásticos de planejamento de capacidade envolvendo múltiplos estágios. Entretanto, em nossa aplicação, são limitadas a um único (e assim sendo determinístico) cenário.

Vale mencionar que a reformulação adotada para um problema, visando a aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe, tem forte influência tanto no processo de convergência como na qualidade final da solução obtida. Algumas referências podem ser citadas no intuito de fundamentar esta afirmação.

Em 2001, BOLAND e SURENDONK [75] propuseram duas reformulações de Dantzig-Wolfe para um problema de logística. A primeira não apresentou nenhum ganho com relação ao limite inferior, sendo idêntico ao da relaxação linear do problema original. No entanto, na segunda reformulação, onde os subproblemas são modelados como problemas da mochila, houve ganhos substanciais no limite inferior, que passou a ser, para aquela aplicação específica, igual ao ótimo inteiro do problema.

Em 2006, VANDERBECK e SAVELSBERGH [191] mostraram que os limites duais variam consideravelmente com o tipo de reformulação de Dantzig-Wolfe escolhida. Ainda em 2006, UCHOA *et al.* [189] obtiveram resultados promissores com um Algoritmo *Branch-and-Cut-and-Price* aplicado a uma reformulação estendida de um problema de árvores geradoras capacitadas, em grafos.

Finalmente, em 2010, LIANG e WILHELM [192] mostraram, de forma analítica e computacional, que a Decomposição de Dantzig-Wolfe aplicada a uma reformulação estendida de um dado problema, onde aumenta-se o número de variáveis e restrições do problema mestre, mantendo-se inalterada, no entanto, a dimensão dos subproblemas, converge em um número menor de iterações.

O esquema de decomposição sugerido em SINGH *et al.* [1] se baseia em reformulações estendidas do problema original. Para isto os autores utilizam a técnica de *variable splitting*, bastante popular em Programação Estocástica. Esta, consiste em introduzir no problema variáveis auxiliares adicionais. Aplicando esta idéia ao caso do MELP, em sua formulação (2.42)-(2.48), seriam introduzidas no problema as

variáveis  $\{x_j^{hk} \in \{0, 1\} : \forall (j, h, k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\}\}$ . Em tal contexto,  $x_j^{hk} = 1$  garante que um projeto de investimento  $j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}$  estará necessariamente em operação no instante  $k \in K$ . Isso porque tal projeto teria entrado em operação num instante de tempo  $h \leq k$ ,  $h \in K$ . Perceba que as restrições (2.49) e (2.50) foram suprimidas do problema porque a reformulação em [1] não contempla restrições de limites mínimos. Dessa forma, sob tais variáveis, uma reformulação de (2.42)-(2.53), suprimindo-se (2.49) e (2.50), poderia ser então escrita como:

$$\min \sum_{k \in K} \beta^k \left( \sum_{\substack{j \in \hat{J}^e \\ j \in \hat{J}^g}} \phi_j^k x_j^k + \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^T \\ j \in Df_i^e}} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ l \in \mathcal{L}}} \hat{\gamma}_{i,j}^k \cdot ye_{i,j,s,l}^{md,k} + \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^g \\ j \in Df_i^g}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \hat{\mu}_{i,j}^k \cdot yg_{i,j,s}^{md,k} \right) \quad (4.1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{h \in K} x_j^h \leq 1, \quad \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\} \quad (4.2)$$

$$x_j^{hk} \leq x_j^h, \quad \forall (j,h,k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\} \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^e \cup Df_i^e\}} ye_{i,j,s,l}^{p,k} = \hat{D}_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l}, \quad \forall (p,i,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^g \cup Df_i^g\}} yg_{i,j,s}^{p,k} = Dg_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in J_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{i,j}^{eg} \cdot ye_{S_e(i,j),j,s,l}^{p,k}, \quad \forall (p,i,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, K, \mathcal{S}\} \quad (4.5)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq \sum_{h=1, \dots, k} E_{i,j,s}^p \cdot x_j^{hk}, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_e, \{J_i^H \cup J_i^T\}, K, \mathcal{S}\} \quad (4.6)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq \sum_{h=1, \dots, k} Ge_{i,j,s,l}^{max} \cdot x_j^{hk}, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (4.7)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \leq \sum_{h=1, \dots, k} Vg_{i,j,s}^{max} \cdot x_j^{hk}, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (4.8)$$

$$x_j^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.9)$$

$$x_j^{hk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (j,h,k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\} \quad (4.10)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (4.11)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (4.12)$$

A reformulação (4.1)-(4.12) apresenta duas vantagens básicas sobre sua congênera (2.42)-(2.53)/(2.49)-(2.50), que denota a formulação (2.42)-(2.53) com (2.49)-(2.50) suprimidos. A primeira delas é conter uma considerável dose de duplicação de informações. Para tirar proveito desse fato, o PM poderia ser formulado, por exemplo, sobre as restrições (4.2) e (4.3) enquanto os SGCs seriam então definidos sobre as restrições (4.4)-(4.8). Agindo dessa forma, todo SGC passaria a envolver não somente variáveis contínuas, mas também variáveis binárias 0-1. Estas, por sua vez, como se pode observar, expressariam, de uma forma mais detalhada, a mesma informação fornecida pelas variáveis inteiras do PM. Como efeito esperado dessa

decomposição, à medida que o procedimento de geração de colunas avançar, é de se esperar que a forte ligação existente entre o PM e os SGCs venha a favorecer sua convergência.

Como uma segunda vantagem de (4.1)-(4.12) sobre (2.42)-(2.53)/(2.49)-(2.50), note que o número de índices correspondentes às colunas geradas pelo esquema de decomposição descrito, é significativamente menor que aquele induzido pelo esquema sugerido para (2.42)-(2.53)/(2.49)-(2.50). Isso ocorre pelo deslocamento para os SGCs de muitas restrições que antes faziam parte do acoplamento entre o PM e os SGCs. Como consequência desse fato, PM passa agora a exibir uma estrutura que torna sempre viável sua relaxação contínua, fato esse expresso pelo uso de sinais “ $\leq$ ”, nas restrições (4.3).

Em conjunto com uma reformulação ao estilo da que foi analisada, uma outra reformulação estendida, no entanto mais compacta que a anterior, foi também sugerida em [1]. Por induzir um PM e SGCs mais compactos, essa segunda reformulação nos parece mais atraente que a anterior. Ela utiliza um conjunto adicional de variáveis  $\{z_j^k \in \{0, 1\} : \forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}\}$  e é adaptada à nossa aplicação da seguinte forma:

$$\min \sum_{k \in K} \beta^k \left( \sum_{\substack{j \in \hat{J}^e \\ j \in \hat{J}^g}} \phi_j^k x_j^k + \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^T \\ j \in Df_i^e}} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ l \in \mathcal{L}}} \hat{\gamma}_{i,j}^k \cdot ye_{i,j,s,l}^{md,k} + \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^g \\ j \in Df_i^g}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \hat{\mu}_{i,j}^k \cdot yg_{i,j,s}^{md,k} \right) \quad (4.13)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{h \in K} x_j^h \leq 1, \quad \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\} \quad (4.14)$$

$$z_j^k \leq \sum_{h=1, \dots, k} x_j^h, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.15)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^e \cup Df_i^e\}} ye_{i,j,s,l}^{p,k} = \hat{D}e_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l}, \quad \forall (p,i,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (4.16)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^g \cup Df_i^g\}} yg_{i,j,s}^{p,k} = Dg_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in J_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{i,j}^{eg} \cdot ye_{S_e(i,j),j,s,l}^{p,k}, \quad \forall (p,i,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, K, \mathcal{S}\} \quad (4.17)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq E_{i,j,s}^p \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_e, \{J_i^H \cup J_i^T\}, K, \mathcal{S}\} \quad (4.18)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq Ge_{i,j,s,l}^{max} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (4.19)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \leq Vg_{i,j,s}^{max} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (4.20)$$

$$x_j^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.21)$$

$$z_j^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.22)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (4.23)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, K, \mathcal{S}\} \quad (4.24)$$

Apesar dos inúmeros aspectos atraentes apontados nas duas reformulações que foi discutida, nenhuma delas satisfaz, de forma natural, uma imposição prática essencial imposta pelo MELP. Especificamente, nenhuma delas é capaz de acomodar diretamente os níveis mínimos de geração impostos à operação das usinas térmicas. Tal restrição, vale aqui ressaltar, ocorre em diversas aplicações práticas relativas ao planejamento energético. Tomando como exemplo o caso brasileiro, devido tanto a obrigações contratuais quanto a restrições práticas de operação, algumas usinas térmicas, sejam elas nucleares ou operadas à carvão mineral ou a gás natural, estão sujeitas a tal tipo de imposição.

Observando que custos não-nulos estão associados à operação das usinas termelétricas em condições de hidrologia média, vamos tentar agora adaptar as desigualdades (2.49) e (2.50) para uso nas reformulações propostas em [1]. Para tanto, desigualdades  $(ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq \sum_{h=1,\dots,k} Ge_{i,j,s,l}^{min} \cdot x_j^{hk})$  e  $(yg_{i,j,s}^{p,k} \geq \sum_{h=1,\dots,k} Vg_{i,j,s}^{min} \cdot x_j^{hk})$ , definidas para índices correspondentes, poderiam ser adicionadas à reformulação (4.1)-(4.12). De forma similar, o mesmo poderia ser feito com as desigualdades  $(ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq Ge_{i,j,s,l}^{min} \cdot z_j^k)$  e  $(yg_{i,j,s}^{p,k} \geq Vg_{i,j,s}^{min} \cdot z_j^k)$ , em relação à reformulação (4.13)-(4.24). Entretanto, sob tais famílias de desigualdades, os custos positivos impostos às variáveis  $\mathbf{y}$ , “empurrariam” a 0, num instante de tempo  $k \in K$ , suas variáveis associadas  $x_j^{hk}$  e  $z_j^k$ , pois poderiam existir, a partir deste instante de tempo, outras unidades candidatas de geração de energia com custos de investimento e operação mais atraentes. Em resumo, simplesmente incorporando aquelas desigualdades a suas reformulações correspondentes, não garantiria o atendimento de níveis mínimos de geração térmica. Uma forma de se tentar resolver essa questão, seria transformar as desigualdades (4.3) e (4.15) em restrições de igualdade, ou seja,

$$x_j^{hk} = x_j^h, \forall (j, h, k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\} \quad (4.25)$$

$$z_j^k = \sum_{h=1,\dots,k} x_j^h, \forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.26)$$

## 4.2 Reformulação Estendida

Em nossa aplicação, por razões que se tornarão evidentes mais adiante, uma reformulação para o MELP, adequada à geração de colunas, deve idealmente contemplar:

1. incorporação das restrições (2.46)-(2.50) aos SGCs, reduzindo a escala do PM;
2. SGCs que embora não pertençam à classe de problemas polinomiais, ainda assim sejam *suficientemente fáceis* de se resolver na prática, permitindo assim a geração de colunas inteiras e, dessa forma, aumentando o valor da relaxação linear do PM correspondente;

3. a formulação de um PM que seja viável mesmo com a geração de colunas inviáveis, ou seja, um PM onde as variáveis que correspondem a tais colunas tendam a zero, com a convergência do algoritmo de decomposição para o ótimo;
4. suficiente estrutura e esparsidade para permitir a um software de otimização, como o CPLEX 11.0, obter uma solução ótima para a sua relaxação linear.

Seja  $\delta_h = |K| - h + 1$ ,  $\forall h \in K$ , o número de períodos de tempo que vai de  $h$  até o final de nosso horizonte de planejamento, ou seja, o período de tempo  $|K|$ . Como será explicado a seguir, um caminho alternativo para acomodar as restrições (2.49) e (2.50) na reformulação (4.1)-(4.12) se baseia no uso das restrições

$$\sum_{k=h}^{|K|} x_j^{hk} = \delta_h x_j^h, \quad \forall (j, h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}. \quad (4.27)$$

**Proposição 2** *Para as variáveis binárias 0-1 correspondentes, uma relação biunívoca existe entre as soluções viáveis de  $\{(4.3), (4.27)\}$  e as de  $\{(4.25)\}$ .*

**Prova 2** *Seja  $(\bar{x}_j^h, \bar{x}_j^{hk})$  uma solução viável para  $\{(4.3), (4.27)\}$ . Um limite superior  $x_i^h$  é então imposto a  $x_i^{hk}$  por (4.3) e o sinal de igualdade da restrição (4.27) garante que  $(\bar{x}_j^h, \bar{x}_j^{hk})$  é viável para (4.25). De forma inversa, se  $(\bar{x}_j^h, \bar{x}_j^{hk})$  é viável para (4.25), somado essas restrições em  $k$ , chega-se a  $\sum_{k=h}^{|K|} \bar{x}_j^{hk} = \sum_{k=h}^{|K|} \bar{x}_j^h = \delta_h \bar{x}_j^h$ ,  $\forall (j, h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ , e conclui-se assim que  $(\bar{x}_j^h, \bar{x}_j^{hk})$  é viável para  $\{(4.3), (4.27)\}$ .*

Em sintonia com o plano de metas estabelecido para reformular o MELP, é possível tornar  $\{(4.2) - (4.12), (4.27)\}$  mais compacta, como será justificado a seguir, substituindo (4.3) por suas desigualdades *surrogate*

$$\sum_{h=1}^k x_j^{hk} \leq \sum_{h=1}^k x_j^h, \quad \forall (j, h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}. \quad (4.28)$$

**Proposição 3** *Para as variáveis binárias 0-1 utilizadas, a região de viabilidade definida pela interseção das restrições (4.27) e (4.28) é a mesma definida pela interseção de (4.27) com uma versão de igualdade de (4.28).*

**Prova 3**  $\sum_{h=1}^{|K|} \sum_{k=h}^{|K|} x_j^{hk} = \sum_{h=1}^{|K|} \delta_h \cdot x_j^h$ ,  $j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ , pode ser entendida como uma *surrogate* de (4.27). Da mesma forma,  $\sum_{k=1}^{|K|} \sum_{h=1}^k x_j^{hk} \leq \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{h=1}^k x_j^h$ ,  $j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ , pode ser entendida como uma *surrogate* de (4.28). Comparando as duas restrições e após alguma manipulação algébrica, a segunda dessas restrições pode ser escrita como  $\sum_{k=1}^{|K|} \sum_{h=1}^k x_j^{hk} = \sum_{k=1}^{|K|} \sum_{h=1}^k x_j^h$ ,  $j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ . Dessa forma, ambas as restrições passam a ter os mesmos lados esquerdo e direito e a proposição então se aplica.

Finalmente, para reduzir o grande número de variáveis binárias 0-1 existentes nos SGCs e também para acomodar as colunas inviáveis que estes eventualmente geram para PM, é introduzido nesta formulação as variáveis  $\{z_j^k \in \{0, 1\} : \forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}\}$  e  $\{w_j^h \in [0, 1] : \forall (j, h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}\}$ , penalizadas na função objetivo através do parâmetro  $\{\rho_j \in \mathbb{R}_+ : \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}\}$ . Adicionalmente, as variáveis  $\{x_j^{hk} \in [0, 1] : \forall (j, h, k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\}\}$ , antes definidas como binárias 0-1, passam a ser, agora, contínuas, no intervalo  $[0, 1]$ . A reformulação proposta neste trabalho para o MELP é então dada por:

$$\min \sum_{k \in K} \beta^k \left[ \sum_{\substack{j \in \hat{J}^e \\ j \in \hat{J}^g}} (\phi_j^k x_j^k + \rho_j w_j^k) + \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^T \\ j \in Df_i^e}} \sum_{\substack{s \in S \\ l \in \mathcal{L}}} \hat{\gamma}_{i,j}^k y e_{i,j,s,l}^{md,k} + \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^g \\ j \in Df_i^g}} \sum_{s \in S} \hat{\mu}_{i,j}^k y g_{i,j,s}^{md,k} \right] \quad (4.29)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{h \in K} x_j^h \leq 1, \quad \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\} \quad (4.30)$$

$$\sum_{k=h}^{|K|} x_j^{hk} = \delta_h(x_j^h - w_j^h), \quad \forall (j,h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.31)$$

$$\sum_{h=1}^k x_j^{hk} \leq \sum_{h=1}^k x_j^h, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.32)$$

$$\sum_{h=1}^k x_j^{hk} = z_j^k, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.33)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^e \cup Df_i^e\}} y e_{i,j,s,l}^{p,k} = \hat{D} e_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l}, \quad \forall (p,i,k,s,l) \in \{C, I_e, K, S, \mathcal{L}\} \quad (4.34)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^g \cup Df_i^g\}} y g_{i,j,s}^{p,k} = D g_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in \mathcal{J}_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{i,j}^{eg} \cdot y e_{S_e(i,j),j,s,l}^{p,k}, \quad \forall (p,i,k,s) \in \{C, I_g, K, S\} \quad (4.35)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} y e_{i,j,s,l}^{p,k} \leq E_{i,j,s}^p \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{C, I_e, \{J_i^H \cup J_i^T\}, K, S\} \quad (4.36)$$

$$y e_{i,j,s,l}^{p,k} \leq G e_{i,j,s,l}^{max} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{C, I_e, J_i^e, K, S, \mathcal{L}\} \quad (4.37)$$

$$y g_{i,j,s}^{p,k} \leq V g_{i,j,s}^{max} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{C, I_g, J_i^g, K, S\} \quad (4.38)$$

$$y e_{i,j,s,l}^{p,k} \geq G e_{i,j,s,l}^{min} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{C, I_e, J_i^e, K, S, \mathcal{L}\} \quad (4.39)$$

$$y g_{i,j,s}^{p,k} \geq V g_{i,j,s}^{min} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{C, I_g, J_i^g, K, S\} \quad (4.40)$$

$$x_j^h \in \{0, 1\}, \quad w_j^h \in [0, 1], \quad \forall (j,h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.41)$$

$$z_j^k \in \{0, 1\}, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (4.42)$$

$$x_j^{hk} \in [0, 1], \quad \forall (j,h,k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\} \quad (4.43)$$

$$y e_{i,j,s,l}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{C, I_e, J_i^e, K, S, \mathcal{L}\} \quad (4.44)$$

$$y g_{i,j,s}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{C, I_g, J_i^g, K, S\} \quad (4.45)$$

## 4.2.1 Notação Matricial

Na Subseção 2.3.2 foi apresentada uma notação matricial para a formulação original do MELP (2.42)-(2.53). De maneira análoga será aqui apresentada uma notação matricial tanto para a reformulação estendida do MELP (4.29)-(4.45), quanto para a reformulação (4.13)-(4.24), sugerida em SINGH *et al.* [1]. Para a segunda reformulação foram adicionadas as desigualdades  $(ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq Ge_{i,j,s,l}^{min} \cdot z_j^k)$  e  $(yg_{i,j,s}^{p,k} \geq Vg_{i,j,s}^{min} \cdot z_j^k)$ , e as restrições (4.15) foram substituídas pelas restrições de igualdade (4.26), com suas respectivas variáveis artificiais  $\{\hat{w}_j^h \in [0, 1] : \forall(j, h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}\}$  penalizadas na função objetivo através do parâmetro  $\{\rho_j \in \mathbb{R}_+ : \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}\}$ . Para isto são definidos novos parâmetros e variáveis adicionais àqueles já definidos na Subseção 2.3.2.

### Dimensões

$n_{inv}, n_{opr}, m_{inv}, m_{opr}, m_{acpu}, m_{acpl}, m_{acpp}$  – conforme definidos na Subseção 2.3.2;

$n_{ref1}$  – número máximo de variáveis contínuas de acoplamento  $x_j^{hk}$ , que somam o número total de projetos  $|\hat{J}^e| + |\hat{J}^g|$ , vezes a soma dos termos de uma progressão aritmética que vai de 1 a  $|K|$ , ou seja,  $\frac{(1+|K|) \cdot |K|}{2}$ ;

$n_{ref2}$  – número máximo de variáveis contínuas auxiliares  $w_j^h$  ou de variáveis binárias de decisão  $z_j^k$ , que somam o número total de projetos  $|\hat{J}^e| + |\hat{J}^g|$ , vezes o número de períodos  $|K|$ , ou seja,  $n_{ref2} = n_{inv}$ ;

$m_{ref}$  – número máximo de restrições de acoplamento envolvendo as variáveis  $x_j^{hk}$ , que somam o número total de projetos  $|\hat{J}^e| + |\hat{J}^g|$ , vezes o número de períodos  $|K|$ ;

### Parâmetros

$\mathbf{q}, \mathbf{d}, \mathbf{H}, \mathbf{p}, \mathbf{M}, \mathbf{m}, \mathbf{F}, \mathbf{I}$  – conforme definidos na Subseção 2.3.2;

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_+^{m_{ref} \times n_{ref1}}$  – matrizes de coeficientes das restrições de acoplamento;

$\mathbf{I}_{ref} \in \mathbb{R}_+^{m_{ref} \times m_{ref}}$  – matriz identidade;

$\mathbf{E} \in \mathbb{R}_+^{m_{acpp} \times m_{ref}}$  – matriz contendo os elementos da matriz  $\mathbf{E}$  (seção 2.3.2), no entanto, organizados de forma diferente sem a presença de colunas densas;

$\overline{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}_+^{m_{acpu} \times m_{ref}}$  – matriz contendo os elementos da matriz  $\overline{\mathbf{G}}$  (seção 2.3.2), no entanto, organizados de forma diferente sem a presença de colunas densas;

$\underline{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}_+^{m_{acpl} \times m_{ref}}$  – matriz contendo os elementos da matriz  $\underline{\mathbf{G}}$  (seção 2.3.2), no entanto, organizados de forma diferente sem a presença de colunas densas;

$\mathbf{N}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}_+^{m_{ref} \times n_{inv}}$  – matrizes de coeficientes das restrições de acoplamento;

### Variáveis

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$  – conforme definidos na Subseção 2.3.2;

$\mathbf{x}_{ref} \in [0, 1]^{n_{ref1}}$  – variáveis contínuas de acoplamento;

$\mathbf{w} \in [0, 1]^{n_{ref2}}$  – variáveis contínuas auxiliares;

$\mathbf{z} \in \{0, 1\}^{n_{ref2}}$  – variáveis binárias de decisão;





as restrições de operação dos sistemas elétrico e de gás natural (4.16) e (4.17) são agrupadas nas restrições  $\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{m}$ .

$$\left. \begin{array}{l}
 \min \quad \mathbf{q}^T \mathbf{x} \quad + \quad \rho^T \hat{\mathbf{w}} \quad \quad \quad + \quad \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\
 \text{s.t.} \quad \mathbf{H}\mathbf{x} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \leq \quad \mathbf{p} \\
 \text{-----} \\
 \quad \quad - \quad \mathbf{T}\mathbf{x} \quad + \quad \mathbf{I}_{\text{ref}} \hat{\mathbf{w}} \quad + \quad \mathbf{I}_{\text{ref}} \mathbf{z} \quad \quad \quad \quad \quad = \quad 0 \\
 \text{-----} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{m} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \mathbf{E}\mathbf{z} \quad + \quad \mathbf{F}\mathbf{y} \leq 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{z} \quad + \quad \mathbf{I}\mathbf{y} \leq 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \underline{\mathbf{G}}\mathbf{z} \quad + \quad \mathbf{I}\mathbf{y} \geq 0 \\
 \quad \quad \quad \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n_{inv}} \quad , \quad \mathbf{w} \in [0,1]^{n_{ref2}} \quad , \quad \mathbf{z} \in \{0,1\}^{n_{ref2}} \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n_{opr}}
 \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Através desta notação é possível observar que o grupo de restrições em destaque,  $-\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{I}_{\text{ref}} \mathbf{w} + \mathbf{I}_{\text{ref}} \mathbf{z} = 0$ , acopla o problema de investimento com os  $|K|$  subproblemas de operação, que de forma análoga ao sistema anterior (4.46), são problemas de Programação Linear Inteira Mista totalmente independentes.

Em uma primeira análise, a reformulação (4.47), além de ser muito mais clara e simples que a reformulação (4.46), parece ser a mais adequada para a aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe ao MELP, devido ao seu menor número de variáveis e restrições. Note que (4.47) pode ser obtida de (4.46), eliminando-se as variáveis  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  e penalizando na função objetivo do problema a variável de folga  $\hat{\mathbf{w}}$ , da restrição  $\mathbf{I}_{\text{ref}} \mathbf{z} \leq \mathbf{T}\mathbf{x}$ .

No entanto, como será apresentado mais adiante, a estrutura das matrizes presentes na reformulação (4.46) dá a mesma uma propriedade muito interessante e importante. Perceba que no processo de decomposição de Dantzig-Wolfe os  $|K|$  subproblemas de operação podem fornecer cronogramas de expansão, representados pelas variáveis  $\mathbf{z}$ , completamente diferentes entre si. Isto porque tais subproblemas são totalmente independentes um do outro. Em uma iteração qualquer do processo de decomposição é mostrado que o limite superior do problema, para um mesmo parâmetro de penalidade  $\rho$ , é bem menor para a reformulação (4.46) do que para a reformulação (4.47). Isto acontece porque o valor correspondente da variável  $\mathbf{w}$  em (4.46) é significativamente menor que aquele da variável  $\hat{\mathbf{w}}$  em (4.47).

Na seção seguinte será apresentado um exemplo meramente ilustrativo onde será possível visualizar em detalhes todos os vetores e matrizes apresentados, que estão presentes tanto na formulação original em notação matricial (2.54), como nas reformulações em notação matricial (4.46) e (4.47).

## 4.2.2 Reformulação Estendida $\times$ Formulação Original: Exemplo Ilustrativo

No intuito de destacar alguns aspectos relevantes das reformulações estendidas (4.46) e (4.47), em comparação com a formulação original (2.42)-(2.53), nesta seção é apresentado um exemplo meramente ilustrativo que, apesar de bastante simples e com solução trivial, possibilita ao leitor visualizar a estrutura matricial das formulações citadas. Desta forma, considere um caso envolvendo somente o sistema elétrico e contendo um único subsistema. O período de planejamento é de três anos e existe apenas uma unidade geradora (termelétrica) candidata a expansão. Considera-se no problema de operação apenas o cenário de hidrologia média, que neste exemplo não admite cortes de carga, com discretização anual (sem estações sazonais) e dois patamares da curva de carga da demanda.

Por questões de simplicidade grande parte dos índices das variáveis utilizadas neste exemplo serão suprimidos. Considere então  $K = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{L} = \{1, 2\}$  e dado que existe apenas um projeto de geração de energia pode-se assumir que  $\{x^k : k \in K\}$ , sujeito aos custos  $\{c^k : k \in K\}$ , são as variáveis de investimento. De maneira análoga,  $\{y_l^k : l \in \mathcal{L}, k \in K\}$ , sujeito aos custos  $\{d_l^k : l \in \mathcal{L}, k \in K\}$ , são as variáveis de operação. O problema então seria determinar a capacidade a instalar para atender a demanda de energia elétrica  $\{D_l^k : l \in \mathcal{L}, k \in K\}$ . A quantidade de energia produzida em cada patamar de carga  $l \in \mathcal{L}$  deve variar entre o valor mínimo  $G_l^l$  e o valor máximo  $G_l^u$ , enquanto o parâmetro referente a energia média  $E_{i,j,s}^{md}$  será representado apenas por  $E$ . Considerando-se a formulação original (2.42)-(2.53), esta seria descrita como representado na Figura 4.1.

Pode-se perceber, através deste exemplo ilustrativo, que uma aplicação direta da Decomposição de Dantzig-Wolfe (DW) na formulação original (2.42)-(2.53) poderia ser realizada tomando-se o conjunto de restrições (2.46)-(2.50) como o Problema Mestre (PM). No entanto, este PM envolveria um conjunto muito grande de restrições, o que iria contra a observação feita por LASDON [62] de que um esquema eficiente de decomposição de DW precisa ter um PM com um número reduzido de restrições. No caso do MELP, por exemplo, em instâncias de grande porte o número de restrições (2.46)-(2.53) alcança facilmente a marca de meio milhão.

Outro ponto importante a ser destacado é que, em instâncias de grande porte, a relaxação linear desta formulação não foi obtida nem pelo Método Simplex, nem pelo Algoritmo de Pontos Interiores, ambos disponíveis no pacote comercial de otimização IBM/CPLEX versão 11.0. O processo de resolução, para ambos os algoritmos, foi automaticamente interrompido sob a justificativa de “instabilidade numérica”, no caso do Algoritmo Simplex, devido a singularidades encontradas, e no caso do Algoritmo de Pontos Interiores devido a grande quantidade de colunas “densas”, pre-

$\min_{s.t.}$	$c^1x^1 + c^2x^2 + c^3x^3 + d^1y_1^1 + d^1y_2^1 + d^2y_1^2 + d^2y_2^2 + d^3y_1^3 + d^3y_2^3$	$\leq 1$
	$x^1 + x^2 + x^3$	$\geq D_1^1$
	$y_1^1$	$\geq D_2^1$
	$y_2^1$	$\geq D_1^2$
	$y_1^2$	$\geq D_2^2$
	$y_2^2$	$\geq D_1^3$
	$y_1^3$	$\geq D_2^3$
	$y_2^3$	$\geq D_1^3$
$- G_1^u x^1$	$y_1^1$	$\leq 0$
$- G_1^l x^1$	$y_1^1$	$\geq 0$
$- G_2^u x^1$	$+ y_2^1$	$\leq 0$
$- G_2^l x^1$	$+ y_2^1$	$\geq 0$
$- E x^1$	$y_1^1 + y_2^1$	$\leq 0$
$- G_1^u x^1 - G_1^u x^2$	$+ y_1^2$	$\leq 0$
$- G_1^l x^1 - G_1^l x^2$	$+ y_1^2$	$\geq 0$
$- G_2^u x^1 - G_2^u x^2$	$+ y_2^2$	$\leq 0$
$- G_2^l x^1 - G_2^l x^2$	$+ y_2^2$	$\geq 0$
$- E x^1 - E x^2$	$+ y_1^2 + y_2^2$	$\leq 0$
$- G_1^u x^1 - G_1^u x^2 - G_1^u x^3$	$+ y_1^3$	$\leq 0$
$- G_1^l x^1 - G_1^l x^2 - G_1^l x^3$	$+ y_1^3$	$\geq 0$
$- G_2^u x^1 - G_2^u x^2 - G_2^u x^3$	$+ y_2^3$	$\leq 0$
$- G_2^l x^1 - G_2^l x^2 - G_2^l x^3$	$+ y_2^3$	$\geq 0$
$- E x^1 - E x^2 - E x^3$	$+ y_1^3 + y_2^3$	$\leq 0$

Figura 4.1: Formulação Original do MELP

sentes em (2.46)-(2.53). Considerando-se agora as reformulações extendidas (4.46) e (4.47), o caso exemplo seria representado respectivamente pelas Figuras 4.2 e 4.3, apresentadas no final desta seção.

No que concerne a estas reformulações, alguns aspectos importantes merecem ser destacados. O primeiro deles é que a Decomposição de Dantzig-Wolfe poderia ser realizada, de acordo com as observações feitas por LASDON [62], através dos conjuntos de restrições de acoplamento (4.33) e (4.15), respectivamente. Neste exemplo, as variáveis de acoplamento indicadas são aquelas contidas no retângulo pontilhado. Note que o número destas restrições é bastante reduzido, quando comparado com a descrição da formulação original, para instâncias de grande porte. Este número é dado pela quantidade de variáveis de acoplamento  $z_j^k$ , que têm número máximo limitado pelo número de projetos vezes o número de períodos. Como exemplo, em instâncias de grande porte, o número de projetos seria em torno de 1500 e o número de anos de planejamento em torno de 25, o que daria um total de 37500 restrições.

Outro ponto importante em relação às reformulações (4.46) e (4.47), é que apesar de suas relaxações lineares, em instâncias de grande porte, quando utilizado o Algoritmo Simplex, continuam a apresentar os mesmos problemas de convergência da formulação original, sua resolução através do Algoritmo de Pontos Interiores passou a ser extremamente eficiente, alcançando a otimalidade em poucos minutos de processamento.

De acordo com SAUNDERS [193], a fatoração de Cholesky é o método mais eficiente para a resolução de sistemas lineares, semelhantes àqueles resolvidos por um



$\min_{s.t.}$	$c^1x^1 + c^2x^2 + c^3x^3 + \rho\hat{w}^1 + \rho\hat{w}^2 + \rho\hat{w}^3$	$+ d^1y_1^1 + d^1y_2^1$	$+ d^2y_1^2 + d^2y_2^2$	$+ d^3y_1^3 + d^3y_2^3$	
	$x^1 + x^2 + x^3$				$\leq 1$
	$-x^1 - x^2 - x^3$	$+ \hat{w}^1$	$+ z^1$		$= 0$
	$-x^1 - x^2 - x^3$	$+ \hat{w}^1$	$+ z^2$		$= 0$
	$-x^1 - x^2 - x^3$	$+ \hat{w}^1$		$+ z^3$	$= 0$
		$y_1^1$			$\geq D_1^1$
			$y_2^1$		$\geq D_2^1$
		$-G_1^u z^1 + y_1^1$			$\leq 0$
		$-G_1^l z^1 + y_1^1$			$\geq 0$
		$-G_2^u z^1 + y_2^1$			$\leq 0$
		$-G_2^l z^1 + y_2^1$			$\geq 0$
		$-Ez^1 + y_1^1 + y_2^1$			$\leq 0$
			$y_1^2$		$\geq D_1^2$
				$y_2^2$	$\geq D_2^2$
		$-G_1^u z^2 + y_1^2$			$\leq 0$
		$-G_1^l z^2 + y_1^2$			$\geq 0$
		$-G_2^u z^2 + y_2^2$			$\leq 0$
		$-G_2^l z^2 + y_2^2$			$\geq 0$
		$-Ez^2 + y_1^2 + y_2^2$			$\leq 0$
			$y_1^3$		$\geq D_1^3$
				$y_2^3$	$\geq D_2^3$
		$-G_1^u z^3 + y_1^3$			$\leq 0$
		$-G_1^l z^3 + y_1^3$			$\geq 0$
		$-G_2^u z^3 + y_2^3$			$\leq 0$
		$-G_2^l z^3 + y_2^3$			$\geq 0$
		$-Ez^3 + y_1^3 + y_2^3$			$\leq 0$

Figura 4.3: Formulação Extendida do MELP (SINGH *et al.* [1])

### 4.2.3 Propriedades das Matrizes de Restrições de (4.46)

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades particulares da reformulação estendida (4.29)-(4.45), no que concerne a sua matriz de restrições. Considere a notação matricial (4.46) desta reformulação, especificamente observando com mais detalhes as matrizes retangulares  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , a matriz diagonal quadrada  $\mathbf{N}$  e a matriz unitária triangular inferior  $\mathbf{T}$ , que descrevem as seguintes restrições:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{N}(\mathbf{x} - \mathbf{w}) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{ref}} \leq \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (4.49)$$

Para tornar claro a definição destas matrizes, considere novamente o exemplo numérico da Figura 4.2 e, com base nele, preenche-se estas matrizes com seus respectivos valores.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Duas relações importantes podem ser obtidas destas matrizes. Tais relações, por sua vez, podem por sua vez ser facilmente demonstradas pelo princípio da indução

matemática. São elas:

$$\mathbf{BA}^T = \mathbf{T} \quad (4.50)$$

e

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{N}. \quad (4.51)$$

Diante destas novas relações, as restrições (4.48) e (4.49) podem ser novamente escritas, substituindo-se os valores das matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{T}$ , obtendo-se então:

$$\mathbf{Ax}_{\text{ref}} = \mathbf{AA}^T(\mathbf{x} - \mathbf{w}) \quad (4.52)$$

$$\mathbf{Bx}_{\text{ref}} \leq \mathbf{BA}^T\mathbf{x} \quad (4.53)$$

Considere também a matriz  $\mathbf{M}$ , obtida através do produto da matriz  $\mathbf{B}$  pela sua transposta  $\mathbf{B}^T$ , definida por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{BB}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz  $\mathbf{N}$  é uma matriz diagonal com elementos ordenados em progressão aritmética decrescente com razão unitária, variando do número de períodos  $|K|$  a 1. Note também que a matriz  $\mathbf{M}$  é uma matriz diagonal onde seus elementos estão ordenados em uma progressão aritmética crescente com razão unitária, variando de 1 ao número de períodos  $|K|$ . Desta forma, é possível então escrever as seguintes relações, considerando a matriz identidade  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{N} + \mathbf{M} = (|K| + 1)\mathbf{I} \quad (4.54)$$

e

$$\Delta\mathbf{N} + \Delta\mathbf{M} = \mathbf{I}, \text{ onde } \Delta = \frac{1}{|K| + 1}. \quad (4.55)$$

Recordando-se das reformulações (4.46) e (4.47), pode-se perceber que a variável de folga  $\hat{\mathbf{w}}$  da restrição  $\mathbf{z} \leq \mathbf{T}\mathbf{x}$  em (4.47) é a mesma variável de folga da restrição (4.53), considerando-se para as duas reformulações os mesmos valores de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{z}$ , onde  $\mathbf{Bx}_{\text{ref}} = \mathbf{z}$ . Desta forma, é possível estabelecer uma relação entre  $\mathbf{w}$  e  $\hat{\mathbf{w}}$  que nos levará também a uma relação existente entre as reformulações (4.46) e (4.47). Multiplicando-se ambos os lados da restrição (4.52) por  $\mathbf{BA}^T\mathbf{N}^{-1}$  e fazendo uso de (4.53), obtêm-se:

$$\mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Ax}_{\text{ref}} = \mathbf{BA}^T \mathbf{x} - \mathbf{BA}^T \mathbf{w} \quad (4.56)$$

e

$$\mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Ax}_{\text{ref}} = \mathbf{z} + \hat{\mathbf{w}} - \mathbf{BA}^T \mathbf{w}. \quad (4.57)$$

Com relação ao vetor  $\mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Ax}_{\text{ref}}$ , pode-se utilizar a expressão (4.55) e obter:

$$\mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} (\Delta \mathbf{N} + \Delta \mathbf{M}) \mathbf{Ax}_{\text{ref}} = \Delta \mathbf{BA}^T \mathbf{Ax}_{\text{ref}} + \Delta \mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{MAx}_{\text{ref}}. \quad (4.58)$$

Visto que todos os vetores e matrizes que compõem esta última expressão são constituídos apenas de elementos positivos ou nulos, a seguinte expressão é verdadeira:

$$\mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Ax}_{\text{ref}} \geq \Delta \mathbf{BA}^T \mathbf{Ax}_{\text{ref}} \quad (4.59)$$

A matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é uma matriz quadrada com a diagonal principal igual a da matriz identidade, pois a  $n$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}^T$ , que possui apenas um elemento unitário e os restantes nulos, é igual a  $n$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{A}$ . Além disso os outros elementos fora da diagonal principal são todos positivos ou nulos, devido a própria constituição da matriz  $\mathbf{A}$ . Desta forma, é possível escrever:

$$\mathbf{BA}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{Ax}_{\text{ref}} \geq \Delta \mathbf{BA}^T \mathbf{Ax}_{\text{ref}} \geq \Delta \mathbf{Bx}_{\text{ref}}. \quad (4.60)$$

Substituindo-se a expressão (4.57) nesta última relação obtêm-se:

$$\mathbf{z} + \hat{\mathbf{w}} - \mathbf{BA}^T \mathbf{w} \geq \Delta \mathbf{z} \quad (4.61)$$

e

$$\mathbf{BA}^T \mathbf{w} \leq \hat{\mathbf{w}} + \mathbf{z} \left( 1 - \frac{1}{|K| + 1} \right). \quad (4.62)$$

No intuito de analisar a situação de maior diferença entre as folgas  $\mathbf{w}$  e  $\hat{\mathbf{w}}$ , considere o caso em que  $\mathbf{z}$  seja nulo, ou seja, em termos práticos, o que significaria dizer que em uma certa iteração do processo de decomposição não ocorreu expansão em nenhum período. Considere também que as coordenadas  $\mathbf{w}_k$  e  $\hat{\mathbf{w}}_k$  de cada vetor são idênticas. Desta forma, os valores de  $\mathbf{w}_k$  e  $\hat{\mathbf{w}}_k$  que satisfazem ao conjunto de restrições (4.62), lembrando que  $\mathbf{BA}^T$  é uma matriz triangular inferior unitária, são aqueles que satisfazem a restrição mais restritiva do conjunto, ou seja:

$$\sum_{k=1}^{|K|} \mathbf{w}_k \leq \hat{\mathbf{w}}_k \Rightarrow \mathbf{w}_k \leq \frac{\hat{\mathbf{w}}_k}{|K|}. \quad (4.63)$$



Esta última relação nos diz que a folga  $\mathbf{w}_k$  da reformulação (4.46) tem seu valor máximo limitado a  $\frac{1}{|K|}$  do valor da folga  $\hat{\mathbf{w}}_k$  da reformulação (4.47). Este fato tem repercussão direta no processo de decomposição de Dantzig-Wolfe pois o valor da função objetivo do problema em uma certa iteração do método, ou seja seu limite superior, para um mesmo valor de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{z}$  será menor em (4.46), e esta magnitude depende diretamente do número de períodos de planejamento  $|K|$  e do valor escolhido para o parâmetro de penalidade  $\rho$ .

### Exemplo Numérico

No intuito de tornar ainda mais claro as diferenças entre as reformulações (4.46) e (4.47), considere o exemplo ilustrativo apresentado na Subseção 4.2.2 e as reformulações das figuras 4.2 e 4.3.

Considere, em uma certa iteração do processo de decomposição, que os subproblemas de ambas as reformulações retornaram para o Problema Mestre o seguinte valor de  $\mathbf{z}$ :  $z^1 = 1$ ,  $z^2 = 0$  e  $z^3 = 0$ . Para que esta solução seja “viável”, para o problema mestre, o vetor  $\mathbf{x}$  deve assumir os valores,  $x^1 = 1$ ,  $x^2 = 0$  e  $x^3 = 0$ , o vetor  $\hat{\mathbf{w}}$  os valores,  $\hat{w}^1 = 0$ ,  $\hat{w}^2 = 1$  e  $\hat{w}^3 = 1$ , e o vetor  $\mathbf{w}$  os valores,  $w^1 = 0.66$ ,  $w^2 = 0$  e  $w^3 = 0$ . Estes valores satisfazem perfeitamente as relações definidas em (4.62), como pode ser observado a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.75 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No que diz respeito a parcela da função objetivo de ambas as reformulações referente às penalidades, na reformulação (4.46) tem-se um total de  $0.66\rho$ , e em (4.47) um total de  $2\rho$ . Em outras palavras esta parcela na reformulação (4.46) é 0.33, ou seja,  $\frac{1}{|K|}$  daquela em (4.47). Como observado anteriormente, esta diferença fica cada vez mais acentuada com o aumento do número de períodos de planejamento  $|K|$  e, pode ser extremamente significativa, dependendo do valor escolhido para o parâmetro de penalidade  $\rho$ .

### Considerações Finais

Note, no entanto, que o fato das folgas  $\mathbf{w}$  serem consideravelmente menores que  $\hat{\mathbf{w}}$  não significa que o Problema Mestre esta mais próximo de obter a viabilidade primal para o problema. Na verdade esta somente é alcançada quando as folgas  $\hat{\mathbf{w}}$  forem nulas, o que, por sua vez, ocorrerá apenas quando  $\mathbf{w}$  também for nulo (Proposição 3).

Considere então um valor para o parâmetro de penalidade  $\rho$  suficientemente

grande para garantir que no ótimo da relaxação linear das reformulações (4.46) e (4.47) os respectivos valores de  $\mathbf{w}$  e  $\hat{\mathbf{w}}$  sejam nulos. Fazendo uso da relação (4.62) pode-se concluir que para uma mesma solução  $\mathbf{z}$ , fornecida pelos subproblemas no processo de Decomposição de Dantzig-Wolfe, o valor da solução do Problema Mestre Restrito (limite superior do problema) será menor na reformulação (4.46) do que em (4.47). Além disso, esta diferença será mais acentuada quanto maior for o número de períodos de estudo de planejamento. No apêndice A é proposta uma metodologia para computar um valor válido para o parâmetro  $\rho$  em (4.46). Procedimento equivalente pode também ser obtido para a reformulação (4.47).

# Capítulo 5

## Geração de Colunas para o MELP

Conforme mencionado no capítulo anterior, uma decomposição de (4.29)-(4.45) poderia ser conduzida através das restrições (4.33) e das variáveis  $\mathbf{z}$ . Para tanto, assumamos que  $\mathbf{Z}_k$  define, no tempo  $k \in K$ , o conjunto viável associado às variáveis  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{y}$ . Da mesma forma, denotemos por  $\mathbf{z}^k$  e  $\mathbf{y}^k$  as variáveis respectivamente contidas em  $\mathbf{z}$  and  $\mathbf{y}$ , correspondentes ao tempo  $k$ . Pode-se então escrever  $\mathbf{Z}_k = \{ \mathbf{z}^k : (\mathbf{z}^k, \mathbf{y}^k) \in (\mathbb{B}^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}) \cap \{(4.34) - (4.40)\} \}$ , onde  $n_1$  e  $n_2$  são as dimensões apropriadas e  $\mathbb{B}^{n_1}$  denota o espaço  $n_1$ -dimensional binário 0-1. Deve-se notar que, para qualquer  $\mathbf{z}^k \in \mathbf{Z}_k$ , estaremos sempre interessados em operar o sistema ao menor custo possível. Dessa forma, não precisaremos nos preocupar, nesse estágio, com a porção  $\mathbf{y}^k$  da solução. Como será visto adiante,  $\mathbf{y}^k$  será definido implicitamente pelas soluções dos SGCs.

Seja  $\mathcal{Q}_k$  o conjunto dos índices associados ao número finito de pontos inteiros contidos em  $\mathbf{Z}_k$  e denotemos por  $\hat{\mathbf{z}}_u^k$ ,  $u \in \mathcal{Q}_k$ , um tal ponto. Consequentemente, é possível escrever, de forma alternativa, que  $\mathbf{Z}_k = \{ \hat{\mathbf{z}}_u^k : u \in \mathcal{Q}_k \}$ . Para nossos propósitos, no entanto, uma representação mais adequada de  $\mathbf{Z}_k$  é obtida, restringindo nossa atenção aos pontos extremos daquele conjunto, que são aqui indexados por  $\hat{\mathcal{Q}}_k \subseteq \mathcal{Q}_k$ . Qualquer  $\mathbf{z}^k \in \mathbf{Z}_k$  pode então ser escrito como  $\mathbf{z}^k = \sum_{u \in \hat{\mathcal{Q}}_k} \lambda_u^k \cdot \hat{\mathbf{z}}_u^k$ , onde  $\sum_{u \in \hat{\mathcal{Q}}_k} \lambda_u^k = 1$ ,  $\lambda_u^k \in [0, 1]$ ,  $\forall (k, u) \in \{K, \hat{\mathcal{Q}}_k\}$ .

### 5.1 O Problema Mestre

Abandonando a notação matricial que estava sendo utilizada e passando agora a utilizar uma notação estendida, pode-se escrever  $(\mathbf{z}^k, \mathbf{y}^k) = ((z_j^k)_{\substack{\forall j \in \\ \{j^e \cup j^g\}}}, (ye_{i,j,s,l}^{p,k})_{\substack{\forall (p,i,j,s,l) \in \\ \{C, I_e, J_i^e, S, \mathcal{L}\}}}, (yg_{i,j,s}^{p,k})_{\substack{\forall (p,i,j,s) \in \\ \{C, I_g, J_i^g, S\}}})$ . Da mesma forma,  $(\hat{\mathbf{z}}_u^k, \hat{\mathbf{y}}_u^k) = ((\hat{z}_j^k)_{\substack{\forall j \in \\ \{j^e \cup j^g\}}}, (\hat{ye}_{i,j,s,l}^{p,k})_{\substack{\forall (p,i,j,s,l) \in \\ \{C, I_e, J_i^e, S, \mathcal{L}\}}}, (\hat{yg}_{i,j,s}^{p,k})_{\substack{\forall (p,i,j,s) \in \\ \{C, I_g, J_i^g, S\}}})^u$  também se aplica. Uma descrição de PM é então dado por

$$\min \sum_{k \in K} \beta^k \left[ \sum_{\substack{j \in \hat{J}^e \\ j \in \hat{J}^g}} (\phi_j^k x_j^k + \rho_j w_j^k) + \sum_{u \in \hat{Q}_k} \lambda_u^k \left( \begin{aligned} & \hat{\gamma}_{i,j}^k (\hat{y} e_{i,j,s,l}^{md,k})^{\forall (i,j,s,l) \in \{I_e, \hat{J}_i^e, S, \mathcal{L}\}} \\ & + \hat{\mu}_{i,j}^k (\hat{y} g_{i,j,s}^{md,k})^{\forall (i,j,s) \in \{I_g, \hat{J}_i^g, S\}} \end{aligned} \right) \right] \quad (5.1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{h \in K} x_j^h \leq 1, \quad \forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\} \quad (5.2)$$

$$\sum_{k=h}^{|K|} x_j^{hk} = \delta_h(x_j^h - w_j^h), \quad \forall (j,h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (5.3)$$

$$\sum_{h=1}^k x_j^{hk} \leq \sum_{h=1}^k x_j^h, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (5.4)$$

$$\sum_{h=1}^k x_j^{hk} = \sum_{u \in \hat{Q}_k} \lambda_u^k \cdot (\hat{z}_j^k)^u, \quad \forall (j,k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (5.5)$$

$$\sum_{u \in \hat{Q}_k} \lambda_u^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (5.6)$$

$$\lambda_u^k \in [0, 1], \quad \forall (k,u) \in \{K, \hat{Q}_k\} \quad (5.7)$$

$$x_j^h \in \{0, 1\}, \quad w_j^h \in [0, 1], \quad \forall (j,h) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\} \quad (5.8)$$

$$x_j^{hk} \in [0, 1], \quad \forall (j,h,k)_{k \geq h} \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K, K\} \quad (5.9)$$

O número de pontos extremos de  $\mathbf{Z}_k$  é normalmente muito elevado. Dessa forma, em termos algorítmicos, deve-se idealmente trabalhar com um subconjunto pequeno dos mesmos. Denote por  $\{\hat{\mathbf{z}}_u^k : u \in \hat{Q}'_k\}$  um tal subconjunto, sendo  $\hat{Q}'_k \subseteq \hat{Q}_k$ . Pontos extremos adicionais deverão ser agregados a este subconjunto, à medida que se façam necessários.

Se, na formulação de PM descrita acima, for substituído  $\hat{Q}_k$  por  $\hat{Q}'_k$ , passaríamos a formular, alternativamente, um PM Restrito (PMR). Inicialmente,  $\hat{Q}'_k = \{\emptyset\}$ , sendo este expandido com as colunas correspondentes às soluções dos SGCs que serão introduzidas a seguir. Pode-se também, alternativamente, inicializar o algoritmo de decomposição utilizando pontos extremos de  $\mathbf{Z}_k$ , obtidos através de um procedimento heurístico de solução para o MELP.

### 5.1.1 Problema Mestre Restrito: Notação Matricial

Tomando como referência a notação definida na Subseção 4.2.1, é apresentada nesta Subseção a notação matricial para o PMR. Para isto, defina-se os vetores  $\tilde{\lambda}_u = (\lambda_u^k)_{\forall k \in K}$  e  $(\tilde{z}_u, \tilde{y}_u) = (\hat{\mathbf{z}}_u^k, \hat{\mathbf{y}}_u^k)_{\forall k \in K}$ . De maneira análoga, considere também a união de todos os conjuntos  $\hat{Q}'_k$  ao longo do horizonte de estudo, como sendo  $\tilde{Q} = \bigcup_{k \in K} \hat{Q}'_k$ .

Tem-se então a seguinte estrutura matricial para o PMR:

$$\left. \begin{array}{l}
\min \quad \mathbf{q}^T \mathbf{x} \quad + \quad \rho^T \mathbf{w} \quad + \quad \mathbf{d}^T \left( \sum_{u \in \tilde{\mathcal{Q}}} \tilde{\lambda}_u \cdot \tilde{y}_u \right) \\
\text{s.t.} \quad \mathbf{Hx} \quad \leq \quad \mathbf{p} \\
\quad - \quad \mathbf{Nx} \quad + \quad \mathbf{Ax}_{\text{ref}} \quad + \quad \mathbf{Nw} \quad = \quad 0 \\
\quad - \quad \mathbf{Tx} \quad + \quad \mathbf{Bx}_{\text{ref}} \quad \leq \quad 0 \\
\quad \quad \quad - \quad \mathbf{Bx}_{\text{ref}} \quad + \quad \mathbf{I} \left( \sum_{u \in \tilde{\mathcal{Q}}} \tilde{\lambda}_u \cdot \tilde{z}_u \right) \quad = \quad 0 \\
\quad \quad \quad \quad \quad \quad + \quad \sum_{u \in \tilde{\mathcal{Q}}} \tilde{\lambda}_u \quad = \quad 1 \\
\quad \quad \quad \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n_{inv}} \quad , \quad \mathbf{x}_{\text{ref}} \in [0,1]^{n_{ref1}} \quad , \quad \mathbf{w} \in [0,1]^{n_{ref2}} \quad , \quad \tilde{\lambda}_u \in [0,1]^{|K|}
\end{array} \right\} \quad (5.10)$$

## 5.2 Subproblemas de Geração de Colunas

Recordando-se novamente da reformulação (4.29)-(4.45), considere uma dada iteração  $u$  do algoritmo de decomposição. Após resolver a relaxação linear de PMR, valores duais correspondentes às restrições de acoplamento,  $-\mathbf{Bx}_{\text{ref}} + \mathbf{I} \left( \sum_{u \in \tilde{\mathcal{Q}}} \tilde{\lambda}_u \cdot \tilde{z}_u \right) = 0$ , e convexificação,  $\sum_{u \in \tilde{\mathcal{Q}}} \tilde{\lambda}_u = 1$ , estão disponíveis para uso. Para  $k \in K$ , denote respectivamente por  $(\hat{\pi}_j^k)^u$ ,  $\forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}$  e  $(\hat{\chi}^k)^u$  esses valores.

Tomando como base as equações de (4.30)-(4.45) que são relativas à operação do sistema, percebe-se que ao dualizar-se as restrições de acoplamento (4.33), são obtidos  $|K|$  problemas (SGCs) independentes de Programação Linear Inteira Mista. Assim sendo, na iteração  $u$  do algoritmo de decomposição, denote por  $SP(k)$  o SGC que corresponde ao período de tempo  $k \in K$ . Uma formulação para  $SP(k)$  é então

dada por:

$$\min \beta^k \left( \sum_{\substack{i \in I_e \\ j \in J_i^T \\ j \in Df_i^e}} \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ l \in \mathcal{L}}} \hat{\gamma}_{i,j}^k \cdot ye_{i,j,s,l}^{md,k} + \sum_{\substack{i \in I_g \\ j \in J_i^g \\ j \in Df_i^g}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \hat{\mu}_{i,j}^k \cdot yg_{i,j,s}^{md,k} \right) - \sum_{\substack{j \in J^e \\ j \in J^g}} (\hat{\pi}_j^k)^u \cdot z_j^k \quad (5.11)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in \{J_i^e \cup Df_i^e\}} ye_{i,j,s,l}^{p,k} = \hat{D}_{i,s,l}^k \cdot \theta_{s,l}, \quad \forall (p,i,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (5.12)$$

$$\sum_{j \in \{J_i^g \cup Df_i^g\}} yg_{i,j,s}^{p,k} = Dg_{i,s}^k + \sum_{\substack{j \in J_i^{TG} \\ l \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{i,j}^{eg} \cdot ye_{S_e(i,j),j,s,l}^{p,k}, \quad \forall (p,i,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, \mathcal{S}\} \quad (5.13)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq E_{i,j,s}^p \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,s) \in \{\mathcal{C}, I_e, \{J_i^H \cup J_i^T\}, \mathcal{S}\} \quad (5.14)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq Ge_{i,j,s,l}^{max} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (5.15)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \leq Vg_{i,j,s}^{max} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, \mathcal{S}\} \quad (5.16)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq Ge_{i,j,s,l}^{min} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (5.17)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \geq Vg_{i,j,s}^{min} \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, \mathcal{S}\} \quad (5.18)$$

$$z_j^k \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \{J^e \cup J^g\} \quad (5.19)$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (5.20)$$

$$yg_{i,j,s}^{p,k} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,s) \in \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, \mathcal{S}\} \quad (5.21)$$

Se uma solução ótima  $((\hat{z}_j^k)_{\substack{\forall j \in \\ \{J^e \cup J^g\}}}, (\hat{y}_{i,j,s,l}^{p,k})_{\substack{\forall (p,i,j,s,l) \in \\ \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, \mathcal{S}, \mathcal{L}\}}}, (\hat{y}_{i,j,s}^{p,k})_{\substack{\forall (p,i,j,s) \in \\ \{\mathcal{C}, I_g, J_i^g, \mathcal{S}\}}})^u$ , tem custo reduzido negativo, dado por  $SP(k) - (\hat{\chi}^k)^u$ , é então vantajoso incorporá-la ao PMR. Isso é feito tomando-se  $\hat{Q}'_k := \hat{Q}'_k \cup \{u\}$  e o PMR resultante pode vir a ter uma relaxação linear de valor mais baixo que o anterior. Caso contrário, se nenhuma coluna atraente é gerada por  $SP(k)$ , para qualquer  $k \in K$ , a relaxação linear corrente de PMR é ótima para PM e, conseqüentemente, é também ótima para a relaxação linear de (4.29)-(4.45). Caso as variáveis inteiras  $\mathbf{x}$  nessa solução tenham todas valores discretos, a mesma seria, simultaneamente, uma solução inteira ótima para (4.29)-(4.45).

Em cada iteração do algoritmo de decomposição de Dantzig-Wolfe, sempre que  $\{SP(k) : k \in K\}$  são todos resolvidos à otimalidade inteira, uma solução ótima para PMR se situa entre o valor da relaxação linear de (4.29)-(4.45) e de seu correspondente valor ótimo inteiro.

### 5.2.1 SGC: Notação Matricial

Analogamente ao que foi apresentado para o PMR, é definida nesta seção uma notação matricial para os subproblemas de geração de colunas. Para isto, defina-se

o vetor  $\tilde{\pi}_u = (\hat{\pi}_j^k)^u_{\substack{\forall (j,k) \in \\ \{j^e \cup j^g, K\}}}$ . A formulação a seguir representa de forma agregada os  $|K|$  subproblemas independentes de Programação Linear Inteira Mista, podendo a estrutura bloco-diagonal da matriz de restrições ser observada através do exemplo citado no capítulo anterior (Figura 4.2).

$$\left. \begin{array}{llll} \min & -\tilde{\pi}_u^T \mathbf{z} & + & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} & & & \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{m} \\ & -\mathbf{E}\mathbf{z} & + & \mathbf{F}\mathbf{y} \leq 0 \\ & -\overline{\mathbf{G}}\mathbf{z} & + & \mathbf{I}\mathbf{y} \leq 0 \\ & -\underline{\mathbf{G}}\mathbf{z} & + & \mathbf{I}\mathbf{y} \geq 0 \\ & \mathbf{z} \in \{0, 1\}^{n_{ref2}} & , & \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{n_{opr}} \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

### 5.3 Algoritmo de Geração de Colunas

A aplicação do Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe à reformulação do MELP que foi introduzida, consiste, em qualquer uma de suas iterações, na resolução da relaxação linear de PMR, seguida da formulação dos SGCs correspondentes (em termos dos valores duais obtidos), da resolução à otimalidade inteira desses subproblemas pelo software CPLEX 11.0 e da expansão do PMR com as colunas assim geradas. Como não é incomum para esse tipo de esquema, nos deparamos com sérios *problemas de estabilidade* em sua implementação. O problema ocorre em função da grande variação imposta, de uma iteração para a outra do algoritmo, aos valores associados a uma mesma variável dual.

Embora diversas sugestões, baseadas em métodos lineares, tenham sido feitas na literatura para lidar com esse problema (veja [175], por exemplo), a aplicação direta daquelas mais conhecidas não surtiu, neste trabalho, o efeito desejado. Especificamente, foram implementados os procedimentos de estabilização propostos em [175, 177], descritos em detalhes na seção 3.2.2. Infelizmente, fazendo uso destas metodologias, nem mesmo a relaxação linear do problema (gerando-se colunas através da relaxação linear dos SGCs) pôde ser obtida em tempo computacional aceitável.

Na aplicação feita em [1], um Algoritmo de Pontos Interiores (API), e não o Método Simplex, é utilizado para resolver a relaxação linear de PMR. A expectativa sendo, nesse caso, que a troca de *pontos extremos* do politopo correspondente por *pontos interiores* do mesmo, levasse à almejada estabilidade (veja [196] para um estudo mais aprofundado dessa proposta). No entanto, ao contrário do que ocorre em [1], o uso dessa idéia nesta aplicação trouxe benefícios bastante marginais. Eventualmente, o que acabou funcionando neste trabalho, foi combinar tal procedimento com a melhor inicialização possível para o procedimento de estabilização sugerido em [177].

A inicialização proposta é possível apenas quando a relaxação linear da reformulação utilizada, (4.29)-(4.45) neste trabalho, pode ser resolvida à otimalidade por um API. Como pode ser visto em [193] a fatoração de Cholesky é a metodologia mais eficiente empregada na resolução dos sistemas lineares em cada iteração de um API. No entanto, o desempenho computacional desta fatoração é inversamente proporcional a densidade das colunas da matriz de restrições. Ainda de acordo com SAUNDERS [193] o método mais eficiente para lidar com colunas densas em um sistema de equações lineares é através do método de divisão de colunas densas proposto, aproximadamente na mesma época, por VANDERBEI [194] e GONDZIO [195], o qual consiste em dividir uma coluna densa em diversas colunas esparsas.

Note que na formulação original do MELP (2.42)-(2.53) o número de colunas densas, relacionada as restrições de acoplamento (2.46)-(2.50) é extremamente alto, fato este que pode ser observado através do exemplo citado no capítulo anterior (Figura 4.1). Na prática este fato comprometeu o desempenho do API presente no pacote computacional CPLEX 11.0 que mostrou-se ineficiente na resolução da relaxação linear de instâncias de grande porte como o caso base de validação do MELP [59, 60], considerando patamares de carga e sazonalidade.

No entanto, a reformulação proposta para o MELP (4.29)-(4.45), também representada em forma matricial em (4.46), assim como aquela proposta por SINGH *et al.* [1] representada em (4.47), são naturalmente uma aplicação direta da metodologia proposta em [194, 195], pois as colunas densas são particionadas em  $|K|$  parcelas referentes aos SGCs.

A aplicação do API presente no pacote computacional CPLEX 11.0 a reformulação proposta, mostrou-se extremamente eficiente. Na instância mencionada anteriormente a relaxação linear aproximada fornecida por um ponto interior, com uma tolerância máxima de erro de  $10^{-6}$  em relação aquela fornecida por uma solução ótima básica, foi obtida em um tempo computacional inferior a 5 minutos. Note que os valores duais assim obtidos para as restrições de acoplamento (4.33) seriam tão fortes quanto aqueles obtidos na convergência do procedimento de decomposição (gerando-se colunas através da relaxação linear dos SGCs e não através de suas soluções ótimas inteiras).

Utilizando o procedimento de estabilização sugerido em [177], sob a inicialização que acabou de ser descrita, uma sequência de valores duais é obtida através de combinações convexas  $(\pi_j^k, \chi^k)^u = \alpha \cdot (\pi_j^k, \chi^k)^{best} + (1 - \alpha) \cdot (\hat{\pi}_j^k, \hat{\chi}^k)^u, \forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ , onde  $0 \leq \alpha \leq 1$  se aplica. Nesse caso,  $(\pi_j^k, \chi^k)^{best}$  identifica os valores duais associados ao melhor limite inferior até então obtido para (4.29)-(4.45) (diretamente, através da inicialização proposta, ou indiretamente, ao longo do procedimento, através da resolução da relaxação linear dos PMRs, gerados à partir de soluções ótimas inteiras para os SGCs).



Notadamente, verificou-se neste trabalho, de forma experimental, que valores de  $\alpha$  próximos da unidade (ou seja, gerando-se vetores duais próximos ao melhor dual conhecido) favorecem, de forma significativa, o processo de convergência do algoritmo de decomposição a ser apresentado.

Uma característica importante da aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe ao modelo MELP, é que ao contrário da grande maioria das aplicações na literatura onde os subproblemas possuem uma estrutura adequada à aplicação de um algoritmo exato, idealmente um problema NP-Difícil com estrutura que possibilite sua resolução exata para as dimensões envolvidas, no MELP os subproblemas obtidos com a aplicação desta técnica são problemas de Programação Inteira Mista que necessitam de um algoritmo do tipo Branch-and-Bound para sua resolução.

Desta forma, para qualquer subproblema  $SP(k)$ , sendo  $k \in K$ , poderá existir uma *gap* de integralidade, e sendo assim, foi utilizado o software CPLEX 11.0, numa tentativa de obter soluções ótimas inteiras para esses SGCs. Assim procedendo, em caso de êxito, os limites inferiores gerados para (4.29)-(4.45) pelas relaxações lineares de PMR seriam, na convergência do método, teoricamente (e quase certamente, na prática), mais fortes que aqueles obtidos pela relaxação linear de (4.29)-(4.45) (utilizado neste trabalho para inicializar o procedimento de estabilização sugerido em [177]).

No entanto, o desempenho do CPLEX 11.0 na resolução exata dos SGCs não foi das mais satisfatórias. Tipicamente, o software demandou tempos de CPU elevados para cumprir tal tarefa. Aceitando soluções viáveis inteiras geradas a um tempo de CPU aceitável frequentemente resultava em colunas com custo reduzido positivo e/ou que já haviam sido previamente geradas.

Para evitar a geração de colunas repetidas, foi desenvolvido um corte disjuntivo a ser adicionado à cada SGC, em cada iteração da metodologia de decomposição adotada. Este corte elimina do conjunto viável dos SGCs as soluções inteiras obtidas em cada iteração, preservando, no entanto, as demais. A inclusão destes cortes assegura que ao final do processo de decomposição o “banco de colunas” obtido é constituído apenas por colunas distintas umas das outras. Segue então a seguinte proposição.

**Proposição 4** *Seja  $\hat{\mathbf{z}}_u^k$ , numa iteração  $u$  do algoritmo de decomposição, a parte inteira da solução associada ao subproblema  $SP(k)$ . A desigualdade seguinte elimina o ponto inteiro  $\hat{\mathbf{z}}_u^k$  de seu espaço de soluções (sendo  $G_0$  e  $G_1$  o conjunto de índices do vetor com valores 0 e 1, respectivamente):*

$$-\sum_{v \in G_0} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v + \sum_{v \in G_1} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v \leq |G_1| - 1.$$

**Prova 4** Defina os conjuntos de índices,  $G_0 = \{v : (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v = 0\}$  e  $G_1 = \{v : (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v = 1\}$ . As desigualdades  $\sum_{v \in G_1} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v \leq |G_1| - \xi$  e  $\sum_{v \in G_0} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v \geq 1 - \xi$ , onde  $\xi \in [0, 1]$ , quando associadas, separam o ponto inteiro  $\hat{\mathbf{z}}_u^k$  de seu espaço de soluções, pois garantem que pelo menos uma coordenada  $v$  do vetor será alterada. Tais desigualdades, por sua vez, satisfazem a relação  $1 - \sum_{v \in G_0} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v \leq \xi \leq |G_1| - \sum_{v \in G_1} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v$ , que levam ao corte disjuntivo citado.

A necessidade de utilizar um algoritmo do tipo Branch-and-Bound para a solução dos subproblemas  $SP(k)$ , impõe-se pelo fato de não ser possível provar a otimalidade das soluções viáveis encontradas em um tempo computacional aceitável. Assim sendo, o algoritmo Branch-and-Bound é interrompido ao encontrar uma solução viável com um *gap* relativo aceitável  $\epsilon$ . Este fato implica em dizer que ao final do processo de Decomposição de Dantzig-Wolfe, quando os subproblemas sinalizariam que os custos reduzidos das variáveis são todos positivos ou nulos, podem ainda existir colunas “atraentes”, capazes de reduzir ainda mais o valor do PMR. A identificação destas colunas não teria ocorrido, ao longo das iterações, devido à necessidade de se interromper o algoritmo Branch-and-Bound precocemente (por questões relativas ao esforço computacional).

Diante do exposto acima, não é possível garantir a otimalidade do processo de decomposição de Dantzig-Wolfe, podendo o valor ótimo da relaxação linear do PMR “estagnar”, em um valor acima do ótimo inteiro do problema, ao invés de ser menor ou igual a este último, conforme mostra a teoria. No entanto, observou-se que resolvendo o PMR à otimalidade inteira, após efetuar poucos ciclos de geração de colunas, soluções viáveis de muito boa qualidade são obtidas para o MELP. Como exemplo, constatação semelhante foi mencionada também em 2001 por LEE e PARK [155] que trabalharam em um problema de telecomunicações modelado como um problema de coloração de grafos em um multi-grafo bipartido.

Dessa forma, o primeiro algoritmo desenvolvido neste trabalho para a reformulação (4.29)-(4.45), denominado Heurística de Dantzig-Wolfe (HDW), apresentado em [12], faz exatamente o que foi descrito acima. Este algoritmo é dividido em três fases, quais sejam a *Inicialização*, onde é obtido o vetor dual ótimo da relaxação linear da reformulação proposta para o MELP através do método de pontos interiores, o *Procedimento Iterativo*, que refere-se a metodologia de Decomposição de Dantzig-Wolfe, e a fase de *Finalização*, onde o PMR considerando o “banco de colunas” gerado é resolvido através de um algoritmo do tipo Branch-and-Bound. Defina-se inicialmente os seguintes parâmetros:

1.  $NGC_{max}$  - número máximo de iterações de geração de colunas;
2.  $L_{sup}^{lin}$  - melhor limite superior para a relaxação linear do PMR;

3.  $L_{sup}^{int}$  - limite superior para o ótimo inteiro da formulação (4.29)-(4.45);
4.  $L_{inf}^{best}$  - melhor limite inferior conhecido para o problema;
5.  $\mathcal{D}_{int}$  - distância relativa (*gap*) entre, o melhor limite superior conhecido para o ótimo inteiro ( $L_{sup}^{int}$ ) e o melhor limite inferior ( $L_{inf}^{best}$ ) conhecido para a formulação (4.29)-(4.45), dado por  $\frac{L_{sup}^{int} - L_{inf}^{best}}{L_{inf}^{best}}$ ;
6.  $\varrho$  - tolerância relativa de convergência para a Decomposição de Dantzig-Wolfe, quando  $\frac{L_{sup}^{lin} - L_{inf}^{best}}{L_{inf}^{best}} \leq \varrho$  o procedimento iterativo é interrompido;
7.  $\epsilon$  - tolerância relativa de convergência para o algoritmo Branch-and-Bound, ou seja, distância relativa entre o valor da melhor solução inteira conhecida e o menor valor de relaxação linear existente entre os nós abertos;
8.  $\hat{\mathcal{Q}}'_k$  - conjunto de pontos extremos (colunas) gerados até o momento pelo sub-problema  $SP(k)$ ,  $\forall k \in K$ . Inicialmente adota-se  $\hat{\mathcal{Q}}'_k = \{\emptyset\}$ ,  $\forall k \in K$ ;
9.  $\Delta(\mathbf{x})$  - conjunto de desigualdades, em função da variável  $\mathbf{x}$ , adicionadas à formulação proposta para o MELP (4.29)-(4.45) e ao PMR (5.10). Inicialmente considera-se  $\Delta(\mathbf{x}) = \{\emptyset\}$ .

Na página seguinte o algoritmo Heurística de Dantzig-Wolfe (HDW) é descrito em detalhes.

## Heurística de Dantzig-Wolfe - HDW( $\hat{\mathcal{Q}}'_k, \Delta(\mathbf{x})$ )

$\Rightarrow$  *Inicializações (Obtenção do Vetor Dual Ótimo da Relaxação Linear)*

**Passo 0:** Considere os parâmetros de convergência predefinidos  $\varrho$ ,  $\epsilon$ ,  $NGC_{max}$  e um valor suficientemente grande para o parâmetro de penalidade  $\rho$ . Faça  $u = 1$  e  $(\hat{\pi}_j^k, \hat{\chi}^k)^u = 0$ ,  $\forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ ;

**Passo 1:** Resolva a relaxação linear da reformulação proposta para o MELP (4.29)-(4.45), adicionando o conjunto  $\Delta(\mathbf{x})$ , através do método de pontos interiores, obtendo os vetores duais ótimos  $(\pi_j^k, \chi^k)^{best}$  e o valor ótimo da relaxação  $L_{inf}^{best}$ ;

**Passo 2:** Atualize,  $(\pi_j^k, \chi^k)^u = (\pi_j^k, \chi^k)^{best}$ ,  $\forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ ;

$\Rightarrow$  *Procedimento Iterativo (Decomposição de Dantzig-Wolfe)*

**Passo 3:** Fazendo uso de um algoritmo do tipo Branch-and-Bound, adotando o *gap* relativo de convergência  $\epsilon$ , resolva os  $|K|$  subproblemas de geração de colunas  $SP(k)$  com o vetor dual  $(\pi_j^k)^u$ ,  $\forall j \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g\}$ , obtendo a solução  $(\hat{\mathbf{z}}_u^k, \hat{\mathbf{y}}_u^k)$  com valor na função objetivo dado por  $\widehat{SP}(k)$ ;

**Passo 4:** Considere  $(\hat{\chi}^k)^{u-1}$  o vetor dual da restrição de convexificação do PMR (5.10),  $\forall k \in K$ . Se  $\widehat{SP}(k) - (\hat{\chi}^k)^{u-1} \geq 0$ ,  $\forall k \in K$ , ou seja, se todos os custos reduzidos são positivos, conclui-se que dentro da tolerância  $\epsilon$  não existem mais colunas “atrantes”, para entrar na base e diminuir o valor atual do PMR, então vá para o **Passo 9**;

**Passo 5:** Para cada período de tempo  $k$  atualize  $\hat{\mathcal{Q}}'_k := \hat{\mathcal{Q}}'_k \cup \{u\}$  e acrescente a cada subproblema de geração de colunas  $SP(k)$  o corte disjuntivo  $-\sum_{v \in G_0} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v + \sum_{v \in G_1} (\hat{\mathbf{z}}_u^k)^v \leq |G_1| - 1$ ;

**Passo 6:** Resolva a relaxação linear do PMR (5.10), adicionando o conjunto  $\Delta(\mathbf{x})$  e considerando o conjunto finito de pontos  $\tilde{\mathcal{Q}} = \bigcup_{k \in K} \hat{\mathcal{Q}}'_k$ , através do Método de Pontos Interiores, obtendo os vetores duais ótimos  $(\hat{\pi}_j^k, \hat{\chi}^k)^u$ ,  $\forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$  e o valor da relaxação linear  $(L_{sup}^{lin})$ ;

**Passo 7:** Seja  $L_{inf}^u$  o limite inferior do problema relativo a iteração  $u$ . Se  $L_{inf}^u > L_{inf}^{best}$ , então faça,  $L_{inf}^{best} = L_{inf}^u$  e  $(\pi_j^k, \chi^k)^{best} = (\hat{\pi}_j^k, \hat{\chi}^k)^u$ ,  $\forall (j, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, K\}$ ;

**Passo 8:** Atualize  $u = u + 1$ . Se  $u > NGC_{max}$  ou  $\frac{L_{sup}^{lin} - L_{inf}^{best}}{L_{inf}^{best}} \leq \varrho$ , então vá para o

**Passo 9.** Caso contrário, atualize o vetor dual  $(\pi_j^k, \chi^k)^u = \alpha \cdot (\pi_j^k, \chi^k)^{best} + (1 - \alpha) \cdot (\hat{\pi}_j^k, \hat{\chi}^k)^{u-1}$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$ , e retorne ao **Passo 3**;

$\Rightarrow$  *Finalização (Obtenção de uma Solução Inteira)*

**Passo 9:** Considere o PMR (5.10), com  $\Delta(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\mathcal{Q}} = \bigcup_{k \in K} \hat{\mathcal{Q}}'_k$ , e fazendo  $\mathbf{w} = 0$ . Utilizando um algoritmo Branch-and-Bound, com o *gap* relativo de convergência  $\epsilon$ , resolva este problema obtendo  $(\hat{x}_j^k, \hat{\lambda}_u^k)$ ,  $\forall (j, u, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, \hat{\mathcal{Q}}'_k, K\}$ , e  $L_{sup}^{int}$ . Retorne a solução inteira mista correspondente e o valor de  $\mathcal{D}_{int}$ ;

## 5.4 Algoritmo Branch-and-Price para o MELP

Tradicionalmente, em uma aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe em Programação Inteira Mista, quando as variáveis inteiras do problema original assumem valores fracionários no nó raiz, são gerados dois subproblemas descendentes (*branching*) através da imposição de limites para alguma variável fracionária que deveria assumir valores inteiros. Além disso, em cada subproblema a sua relaxação linear é obtida através da geração de novas colunas pelo método de decomposição em estudo. A este procedimento, explicado de maneira bastante simplificada, dá-se o nome de *Branch-and-Price*. Adicionalmente, quando desigualdades válidas são introduzidas no PMR, como no intuito de aproximar o fecho convexo dos pontos inteiros, a este procedimento dá-se o nome de *Branch-and-Cut-Price*.

Algumas referências, dentre as muitas existentes, para este último método, podem ser citadas. Por exemplo, FUKASAWA *et al.* [167] e KALLEHAUGE *et al.* [168] aplicaram o mesmo ao problema de roteamento de veículos. Por outro lado, BELOV e SCHEITHAUER [140] o aplicaram ao problema de corte unidimensional.

Uma característica importante das referências ao algoritmo Branch-and-Price mencionadas neste trabalho, reside no fato de que as variáveis sobre as quais são impostos limites nos nós descendentes, ou seja, aquelas que farão parte da ramificação (*branching*), também fazem parte da restrição de convexificação. Caso uma restrição de ramificação, envolvendo as variáveis de convexificação  $\lambda$ , seja adicionada ao PMR, então o seu multiplicador dual associado também deve ser considerado na função objetivo dos subproblemas de geração de colunas. Por outro lado, se restrições de integralidade são adicionadas aos subproblemas, ao invés de consideradas no PMR, a estrutura dos mesmos podem ser modificadas o que na prática pode inviabilizar a utilização de algoritmos eficientes para sua solução. Vale mencionar que recentemente, em 2011, VANDERBECK [187] desenvolveu o primeiro esquema geral de branching aplicado aos subproblemas que não modifica sua estrutura inicial.

No caso da reformulação proposta para o MELP, percebe-se que as variáveis binárias de decisão  $\mathbf{x}$  presentes no PMR (5.10) não fazem parte da restrição de convexificação. Desta forma, um algoritmo Branch-and-Price para a reformulação proposta para o MELP poderia ser visto como um algoritmo Branch-and-Bound tradicional, onde a ramificação é feita nas variáveis  $\mathbf{x}$  e em cada nó descendente colunas adicionais são geradas para se obter a relaxação linear do problema. Esta metodologia de solução foi implementada no MELP utilizando como regra de ramificação o *best bound*. Infelizmente, os resultados desta aplicação foram frustrantes pois raramente eram obtidas nos subproblemas descendentes relaxações lineares onde as variáveis eram naturalmente inteiras, e conseqüentemente o algoritmo enumerava um conjunto grande de nós, comprometendo desta forma o tempo computacional.

Como mencionado na seção anterior, o algoritmo **HDW** é capaz de encontrar soluções viáveis de muito boa qualidade, em um número relativamente pequeno de iterações de geração de colunas. Associado ao fato de se ter acesso a uma solução primal viável de qualidade, proveniente de **HDW**, e considerando que estamos trabalhando praticamente com um algoritmo Branch-and-Bound tradicional (com a diferença de que colunas adicionais são geradas nos nós descendentes), decidiu-se por explorar um procedimento bastante difundido na literatura, conhecido por *Local Branching* [11].

### 5.4.1 Algoritmo Local Branching

A idéia central da estratégia de *local branching* [11] é dividir a região viável de um problema de Programação Inteira em subconjuntos que possam ser explorados mais facilmente por softwares de Otimização Inteira como o CPLEX 11.0. Em função disso, os ótimos inteiros destes subconjuntos, ou pelo menos soluções viáveis de melhor qualidade poderiam ser obtidas. Para explorar estes subconjuntos é utilizada a distância de Hamming que, para um certo vetor binário  $\mathbf{x}$ , mede a quantidade de substituições necessárias para transformar este último no vetor binário  $\bar{\mathbf{x}}$ , onde  $(\mathbf{x})^v$  representa a coordenada  $v$  de  $\mathbf{x}$ . Seja então,

$$\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{\{v: (\bar{\mathbf{x}})^v=1\}} [1 - (\mathbf{x})^v] + \sum_{\{v: (\bar{\mathbf{x}})^v=0\}} (\mathbf{x})^v \quad (5.23)$$

a distância de Hamming a considerar.

Utilizando esta métrica a região viável de um problema de Programação Inteira, pode ser subdividida em duas regiões. Considerando uma solução viável inicial  $\bar{\mathbf{x}}$  e um número máximo de substituições  $\kappa$ , pode-se obter um subproblema com região viável menor que a do original acrescentando-se ao mesmo a restrição  $\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq \kappa$  e resolvendo este novo problema com o objetivo de encontrar uma nova solução viável melhor do que a original  $\bar{\mathbf{x}}$ . O outro subproblema é obtido pelo acréscimo da restrição  $\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \geq \kappa + 1$ , ou seja, o mesmo seria complementar ao subproblema anterior no sentido de que a união destes dois subconjuntos é idêntico ao espaço de soluções do problema original.

A idéia geral do método seria então partir de um ponto viável inicial  $\bar{\mathbf{x}}^1$  e, através de um algoritmo exato do tipo Branch-and-Bound, que gera uma árvore de enumeração  $\mathbf{T}$ , explorar a vizinhança deste ponto adicionando a distância de Hamming ( $\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^1) \leq \kappa$ ) ao conjunto de restrições do problema. Perceba que este problema mais restrito possui ao menos uma solução viável que seria o próprio ponto  $\bar{\mathbf{x}}^1$ . Caso exista uma solução ótima de, melhor qualidade que  $\bar{\mathbf{x}}^1$ , denota-se a mesma por  $\bar{\mathbf{x}}^2$ . Acrescenta-se então duas restrições adicionais, além daquela já adicionada,

que seria  $(\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^1) \geq \kappa + 1)$ , para explorar o espaço complementar ao anterior, e  $(\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^2) \leq \kappa)$  para que neste espaço complementar seja encontrada uma solução ótima, diga-se  $\bar{\mathbf{x}}^3$ , melhor do que a atual  $\bar{\mathbf{x}}^2$ . O processo então é repetido de acordo com estes passos até que algum critério de parada seja alcançado.

Perceba que se em cada “nó”,  $\mathbf{T}$  desta árvore enumerativa, o ótimo de cada subproblema for alcançado, é possível afirmar que este algoritmo é exato visto que o espaço de soluções do problema original seria explorado em sua totalidade. Este algoritmo pode ser visto então como um algoritmo Branch-and-Bound em que a árvore de busca é guiada por **limites primais**, ao contrário de um algoritmo Branch-and-Bound padrão em que a árvore de busca é guiada por **limites duais** (relaxação linear dos nós abertos). A Figura 5.1 a seguir ilustra este procedimento.

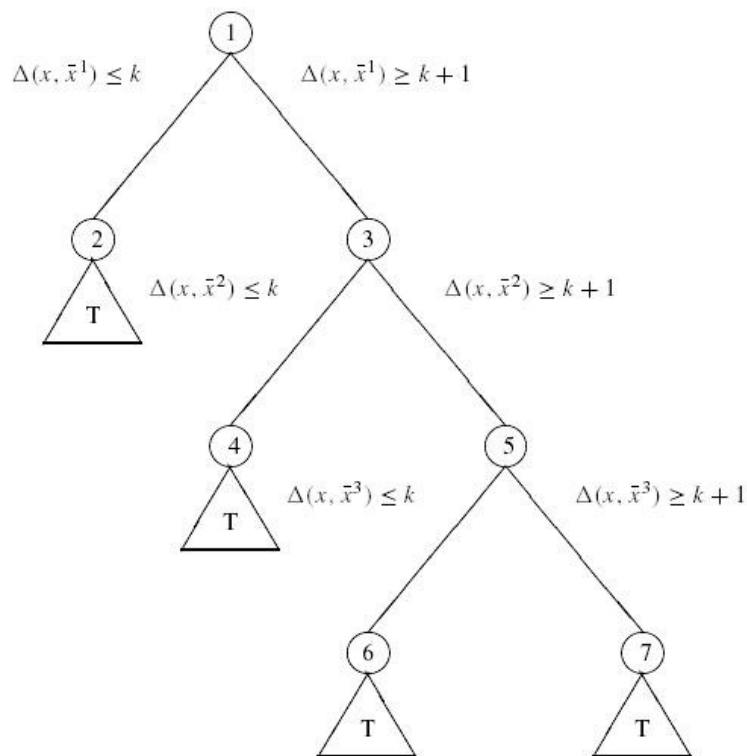


Figura 5.1: Esquema Padrão do *Local Branching*

### 5.4.2 Geração de Colunas em um contexto de Busca Local

Na literatura ainda é escasso a associação entre a técnica de geração de colunas e o algoritmo *Local Branching*, tomando-se como base a extensa revisão bibliográfica realizada neste trabalho. Apenas em 2009, STEINZEN *et al.* [79] associaram as duas metodologias para resolver um problema de escalonamento de pessoas em transporte público urbano. Este problema é formulado como um problema de recobrimento de conjuntos e a técnica de solução adotada é desenvolvida em duas etapas. Na primeira

é obtida a relaxação linear do problema com o uso de geração de colunas, onde as colunas consideradas são provenientes da solução, através de programação dinâmica, de um problema de caminhos mínimos com restrições. Na segunda etapa, considerando todo o conjunto de colunas gerado, utiliza-se o algoritmo *local branching* para encontrar uma solução viável de alta qualidade.

Uma característica a ser ressaltada nesta metodologia é que não são geradas novas colunas ao longo do processo de busca do *Local Branching*. Esta é a diferença principal em relação a técnica desenvolvida neste trabalho. Na aplicação da técnica de *Local Branching* ao PMR (5.10), além das colunas geradas no nó raiz, em cada ramificação são geradas novas colunas após a adição da métrica de Hamming. Contudo, não é possível classificar este algoritmo como exato porque em cada “nó”  $\mathbf{T}$  da árvore de busca do *Local Branching* deveria ser aplicado um algoritmo exato do tipo *Branch-and-Price* (para determinar o ótimo inteiro contido neste subespaço). Ao invés disto, no entanto, aplica-se o algoritmo **HDW** para encontrar uma solução de alta qualidade com a geração de novas colunas.

Apesar da característica não-exata de nossa metodologia, mesmo sendo um algoritmo *Branch-and-Price* heurístico, excelentes resultados computacionais foram obtidos para instâncias de grande porte do nosso problema. Observou-se que a geração de colunas dentro de um esquema de *Local Branching* possibilitou uma maior diversificação do conjunto de colunas geradas. Ao final do processo de busca e geração de colunas, aplica-se o algoritmo *Branch-and-Cut* do pacote CPLEX 11.0 para resolver o PMR (5.10) com o conjunto de todas as colunas geradas e, melhores soluções ainda foram obtidas. Defina-se os seguintes parâmetros:

1.  $NLB_{max}$  - número máximo de ramificações do tipo  $\mathbf{T}$  exploradas na árvore de busca do algoritmo *local branching*;
2.  $\kappa$  - número máximo de substituições permitidas para a métrica de Hamming;



## Branch-and-Price Local Branching - BPLB

$\Rightarrow$  *Inicializações (Nó Raiz - Obtenção de uma Solução Viável Inicial)*

**Passo 0:** Considere os parâmetros de convergência predefinidos  $\kappa$ ,  $NLB_{max}$  e faça  $n = 1$ ,  $\hat{Q}'_k = \{\emptyset\}$ ,  $\forall k \in K$ , e  $\Delta(\mathbf{x}) = \{\emptyset\}$ ;

**Passo 1:** Obtenha uma solução viável  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda})$  para o PMR (5.10), através de  $HDW(\hat{Q}'_k, \Delta(\mathbf{x}))$ ;

$\Rightarrow$  *Procedimento de Busca - Local Branching*

**Passo 2:** Considere o conjunto completo de pontos extremos (colunas) gerados  $\hat{Q}'_k$ ,  $\forall k \in K$  e, fazendo  $\bar{\mathbf{x}}^n = \hat{\mathbf{x}}$ , atualize o conjunto  $\Delta(\mathbf{x})$  incluindo a desigualdade de Hamming ( $\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^n) \leq \kappa$ ), obtendo assim  $\Delta(\mathbf{x}) := \Delta(\mathbf{x}) \cup \{\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^n) \leq \kappa\}$ ;

**Passo 3:** Obtenha uma solução viável  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda})$  para o PMR (5.10), através de  $HDW(\hat{Q}'_k, \Delta(\mathbf{x}))$ ;

**Passo 4:** Atualize o conjunto  $\Delta(\mathbf{x})$  substituindo a última desigualdade de Hamming acrescentada pelo seu complementar, obtendo assim  $\Delta(\mathbf{x}) := \{\Delta(\mathbf{x}) \setminus \{\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^n) \leq \kappa\}\} \cup \{\Delta(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}^n) \geq \kappa + 1\}$ ;

**Passo 5:** Atualize  $n = n + 1$ . Se  $n > NLB_{max}$  então vá para o **Passo 6**. Caso contrário, atualize  $\bar{\mathbf{x}}^n = \hat{\mathbf{x}}$  e retorne ao **Passo 2**;

$\Rightarrow$  *Finalização (Obtenção da Solução Inteira Final)*

**Passo 6:** Considere o PMR (5.10), com  $\Delta(\mathbf{x}) = \{\emptyset\}$ ,  $\tilde{Q} = \bigcup_{k \in K} \hat{Q}'_k$ , e fazendo  $\mathbf{w} = 0$ . Utilizando um algoritmo branch-and-bound, com o *gap* relativo de convergência  $\epsilon$ , resolva este problema obtendo  $(\hat{x}_j^k, \hat{\lambda}_u^k)$ ,  $\forall (j, u, k) \in \{\hat{J}^e \cup \hat{J}^g, \hat{Q}'_k, K\}$ , e  $L_{sup}^{int}$ .

## 5.5 Experimentos Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais para os algoritmos **HDW** e **BPLB**. Considerou-se nos experimentos realizados três conjuntos de instâncias, cada um com três casos de dimensões diferentes. Estes conjuntos serão denotados por Grupo A, Grupo B e Grupo C, e além de todos representarem casos reais de planejamento da expansão de longo prazo do sistema elétrico brasileiro, possuem também a característica comum de que a expansão a ser realizada até o ano de 2015 é considerada obrigatória e definida no Plano Decenal de Expansão de Energia Elétrica - PDEE 2006/2015 [61]. Do ano de 2016 em diante, a expansão necessária para atender o crescimento da demanda de energia elétrica será aquela definida pelo MELP.

Nestes conjuntos, o país foi dividido em 9 subsistemas elétricos, compreendendo a Região Nordeste, SE/CO (Regiões Sudeste e Centro-Oeste), Região Sul, Região Norte (contendo a hidrelétrica de Tucuruí), Usina de Itaipu Binacional, AC/RO (regiões definidas pelos estados de Acre e Rondônia, onde localiza-se o complexo da bacia hidrográfica do Madeira), Manaus, Usina de Belo Monte e TP (complexo da bacia hidrográfica do Teles Pires/Tapajós). Consideram-se ainda os nós fictícios de conexão de Altamira, Imperatriz, Ivaiporã e Colinas. Na Figura 5.2 as linhas cheias representam os troncos de interligação existentes e as linhas pontilhadas aqueles candidatos a expansão. Neste último, cada linha pontilhada pode conter diversas opções de linhas de transmissão, com diferentes custos de construção e capacidade de transmissão de energia.

O Grupo A representa um caso teste semelhante ao que foi utilizado no Plano Nacional de Energia 2030 [7], indo portanto o seu horizonte de planejamento até o ano de 2030. Neste sistema não é considerado o nó fictício de Colinas e, além disso, diversas restrições relacionadas as datas mínimas e máximas de construção de projetos de hidrelétricas e termelétricas são impostas, decorrentes de aspectos ambientais. Os Grupos B e C representam o Caso Base de Validação do MELP [59, 60] com horizontes de planejamento indo, respectivamente, até o ano de 2030 e 2035, considerando-se um crescimento anual na demanda de energia elétrica de aproximadamente 4% de 2030 a 2035. Os subsistemas elétricos, para cada conjunto, são descritos na Figura 5.2 a seguir:

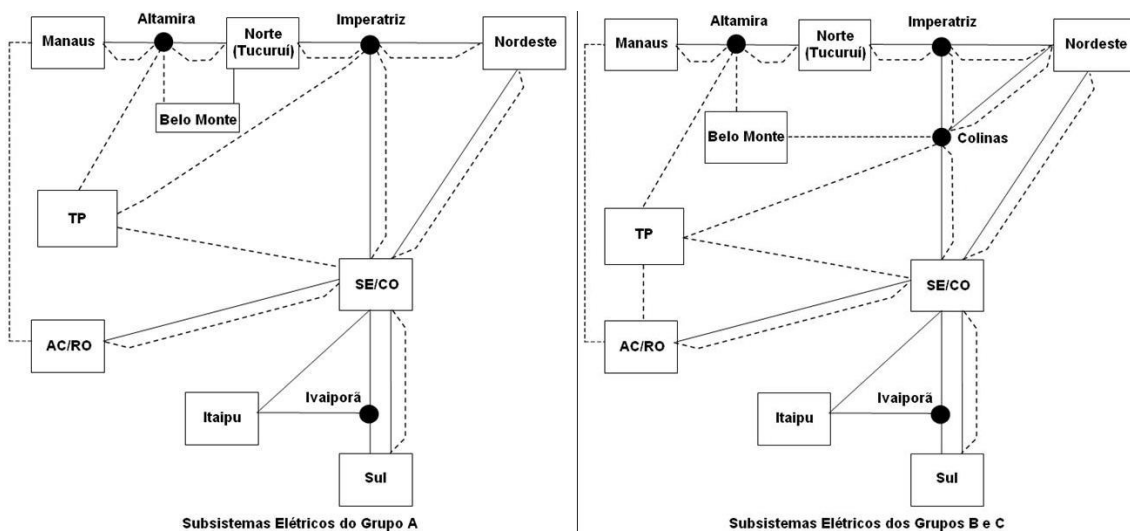


Figura 5.2: Subsistemas Elétricos dos Grupos Analisados

Cada grupo contém três casos (Caso I, Caso II e Caso III) que diferem entre si apenas pela discretização da análise da operação. O Caso I considera a análise da operação com apenas uma curva de carga e em base anual. O Caso II considera a análise da operação com três curvas de carga e em base anual. Finalmente, o Caso

III considera a análise da operação com três curvas de carga e em base semestral. Para cada grupo em análise são apresentadas a seguir, na Tabela 5.1, a descrição do conjunto de unidades geradoras (usinas hidrelétricas, usinas termelétricas, tecnologias renováveis não-convencionais) e interligações entre subsistemas, tanto as já existentes (Ex) quanto os projetos obrigatórios (Obr) e opcionais (Opc).

Tabela 5.1: Conjunto de Usinas Geradoras e Interligações

	Grupo A			Grupo B			Grupo C		
	Ex	Obr	Opc	Ex	Obr	Opc	Ex	Obr	Opc
Hidrelétricas	100	87	272	100	78	676	100	78	676
Termelétricas	60	32	88	59	26	88	59	30	173
Renováveis	2	60	0	2	3	70	2	3	110
Interligações	8	22	225	10	32	285	10	32	380

No que diz respeito ao sistema de gás natural, foram adotados os mesmos subsistemas apresentados na Figura 2.3 (página 22). Este sistema é análogo àquele apresentado em [8]. Foram considerados expansões para o gasoduto Brasil-Bolívia (GASBOL) e para o gasoduto GASENE, que interliga as regiões Sudeste/Centro-Oeste ao Nordeste do país. Além disto, foram consideradas expansões de unidades de regaseificação de GNL em ambas regiões.

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 são apresentadas as dimensões das instâncias em análise, para a formulação original do MELP (2.42)-(2.53) e para a formulação estendida (4.29)-(4.45), respectivamente. Estas dimensões são apresentadas, para todos os grupos e seus respectivos casos, em termos do número de variáveis binárias (Bin) e contínuas (Cont), bem como do número de restrições (Restr). No caso da formulação estendida, o número de variáveis inteiras está relacionado apenas com as variáveis  $\mathbf{x}$ , que são aquelas que no problema decomposto fazem parte do PMR (5.10).

Tabela 5.2: Dimensões das Instâncias na Formulação Original

	Grupo A			Grupo B			Grupo C		
	Bin	Cont	Restr	Bin	Cont	Restr	Bin	Cont	Restr
I	7576	39024	90451	15244	56834	137171	25409	87334	208051
II	7576	114840	209789	15244	170502	322419	25409	262002	486819
III	7576	229680	397427	15244	341004	620885	25409	524004	926425

Tabela 5.3: Dimensões das Instâncias na Formulação Estendida

	Grupo A			Grupo B			Grupo C		
	Bin	Cont	Restr	Bin	Cont	Restr	Bin	Cont	Restr
I	7576	123342	128421	15244	221777	198701	25409	417967	303121
II	7576	198776	247377	15244	335445	383949	25409	592635	581889
III	7576	313616	435015	15244	505947	682415	25409	854637	1021495

Fazendo uso destas nove instâncias, foi realizado um estudo comparativo entre os algoritmos **HDW** e **BPLB**. Em relação ao algoritmo **HDW**, foi feito um estudo comparativo, trabalhando apenas no nó raiz da árvore de busca, e gerando um conjunto com 75 colunas para cada período de tempo  $k \in K$  ( $NGC_{max}=75$ ) em um experimento e um outro conjunto com 150 colunas para cada período de tempo  $k \in K$  ( $NGC_{max}=150$ ) no outro, sendo que neste último as primeiras 75 colunas para cada período de tempo  $k \in K$  são idênticas a do primeiro experimento, porque os parâmetros do algoritmo são os mesmos. O que gostaríamos de verificar é o quão vantajoso seria, em termos do limite superior final, gerar o dobro de colunas no nó raiz da árvore.

Com relação ao algoritmo **BPLB** foi realizado um interessante estudo para verificar o quão vantajoso seria, em termos do limite superior final, a diversificação do conjunto de colunas gerados através do esquema de busca local apresentado. Tomando como base o estudo anterior realizado somente com o algoritmo **HDW** no nó raiz, gerou-se também com o algoritmo **BPLB** um conjunto de 150 colunas para cada período de tempo  $k \in K$ , mas ao longo da árvore de busca, ou seja, foi enumerado um total de 6 nós ( $NLB_{max}=6$ ) do tipo **T** utilizando para a desigualdade de Hamming  $\kappa = 5$  e em cada nó foi gerado um total de 25 colunas para cada período de tempo  $k \in K$  ( $NGC_{max}=25$ ).

A seguir é apresentada a Tabela 5.4 com os resultados obtidos para todas as instâncias, onde # Col. é o número total de colunas geradas para cada período de tempo  $k \in K$ , # Nós é o total de nós explorados na árvore de busca, Tempo é o tempo total de CPU, em horas, e Gap é a distância relativa entre, o melhor limite superior conhecido para o ótimo inteiro ( $L_{sup}^{int}$ ) e o melhor limite inferior ( $L_{inf}^{best}$ ) conhecido para o problema, dado por  $\frac{L_{sup}^{int} - L_{inf}^{best}}{L_{inf}^{best}}$ . A máquina utilizada nestes testes possui processador Intel Core 2Quad Q9550 de 2.83Ghz e 4Gb de memória RAM.

Tabela 5.4: Experimentos Computacionais Comparativos entre **HDW** e **BPLB**

Grupo	# Col.	# Nós	Caso I		Caso II		Caso III	
			Gap	Tempo	Gap	Tempo	Gap	Tempo
A	75	1	4.46 %	1.5 h	3.21 %	6.5 h	4.87 %	9.5 h
	150	1	4.34 %	3.8 h	2.97 %	14.3 h	2.94 %	20 h
	150	6	2.72 %	2.8 h	1.27 %	5.5 h	1.82 %	8 h
B	75	1	1.15 %	1.5 h	0.74 %	4.3 h	1.01 %	7 h
	150	1	0.67 %	4 h	0.67 %	9.7 h	0.82 %	15 h
	150	6	0.45 %	4 h	0.35 %	8 h	0.35 %	14 h
C	75	1	3.44 %	5.5 h	4.29 %	11 h	1.35 %	12 h
	150	1	1.39 %	15 h	1.28 %	25.5 h	1.04 %	27 h
	150	6	1.14 %	15 h	0.76 %	19 h	0.77 %	30 h

Prosseguindo então com a análise dos resultados apresentados na Tabela 5.4, primeiramente, é importante salientar que para os casos II e III dos grupos B e C, o algoritmo de solução **HBL** apresentado na Subseção 2.4, página 47, desenvolvido para resolver a formulação original do MELP (2.42)-(2.53), mostrou-se incapaz de sequer encontrar uma única solução inteira viável em tempo computacional aceitável. De fato, para estas instâncias mencionadas e sob a formulação original do MELP, até mesmo a relaxação linear mostrou-se difícil de ser alcançada tanto pelo Algoritmo Simplex como por um Algoritmo de Pontos Interiores.

Os algoritmos **HDW** e **BPLB** propostos neste trabalho, comprovaram sua eficiência. Instâncias de grandes dimensões, como o caso III do Grupo C, foram resolvidas a um *gap* relativo de otimalidade inferior a 1%, resultado este impossível de ser obtido atualmente pelos softwares que definem o estado-da-arte em Programação Inteira. Em particular, o algoritmo Branch-and-Price aqui proposto comprovou experimentalmente que a geração de colunas em um esquema de *Local Branching* possibilita a obtenção de um conjunto de colunas mais diversificado, como pode ser visto na comparação entre **HDW** e **BPLB**, gerando-se um mesmo número total de colunas para cada período de tempo  $k \in K$ . Por outro lado a geração de colunas no esquema definido por **BPLB** é mais eficiente no que se refere ao tempo computacional, pois em quase todos os testes realizados este se mostrou menor ou igual àquele gasto por **HDW**.

Portanto, o algoritmo **BPLB** é uma metodologia eficiente para a resolução de problemas de Programação Linear Inteira Mista de grandes dimensões. Apesar de ter sido desenvolvido para a aplicação específica ao problema de planejamento da expansão da geração de energia elétrica no longo prazo, o mesmo pode ser adaptado a outros problemas que compartilhem a mesma estrutura da matriz de restrições encontrada neste trabalho.

### 5.5.1 Análise dos Resultados Práticos

Nesta seção procurou-se apresentar um resumo dos resultados práticos obtidos com os experimentos computacionais realizados, do ponto de vista do problema de planejamento da expansão da geração. Na Tabela 5.5 são apresentados a composição, em termos percentuais, das usinas hidrelétricas e termelétricas/renováveis na capacidade instalada do parque gerador de energia ao final do horizonte de estudo de cada caso.

Primeiramente é possível perceber, em todos os grupos, que do Caso II para o Caso III existe uma redução na participação das usinas hidrelétricas ao final do horizonte. Este resultado é decorrente da consideração da sazonalidade da geração hidrelétrica ao longo do ano. Percebe-se também que, em todos os casos, quando se passa do grupo B para o C, existe também uma redução na participação hídrica, o que se explica pelo fato do grande potencial hidrelétrico esgotar até 2030, sendo então necessário investir até 2035 em uma maior quantidade de usinas termelétricas/renováveis.

Tabela 5.5: Participação Final das Hidrelétricas e Termelétricas/Renováveis

Grupo	Caso I		Caso II		Caso III	
	Hidr.	Term./Ren.	Hidr.	Term./Ren.	Hidr.	Term./Ren.
A	76.3 %	23.7 %	76.8 %	23.2 %	73.2 %	26.8 %
B	80.4 %	19.6 %	80.0 %	20.0 %	77.2 %	22.8 %
C	73.8 %	26.2 %	73.4 %	26.6 %	69.2 %	30.8 %

Finalmente, apresenta-se então a evolução da expansão acumulada das usinas hidrelétricas e termelétricas/renováveis ao longo do período de decisão do MELP, ou seja, a partir de 2016 até o final do horizonte. Devido a grande quantidade de casos, decidiu-se por analisar apenas os casos mais representativos daquelas instâncias antes intratáveis do ponto de vista computacional e, conseqüentemente, sem solução conhecida.

Tomou-se então os Casos II e III do Grupo C, atualmente intratáveis pelos softwares que definem o estado-da-arte em Programação Inteira, e fez-se uma análise comparativa da evolução da expansão acumulada. Como mencionado anteriormente, a diferença entre estes casos é a consideração da sazonalidade. Analisando as Figuras 5.3 e 5.4 é possível perceber que a consideração desta característica acarreta em uma maior expansão de usinas termelétricas/renováveis desde os primeiros períodos de decisão, e em uma menor participação das usinas hidrelétricas na participação final da capacidade instalada do parque gerador em 2035.

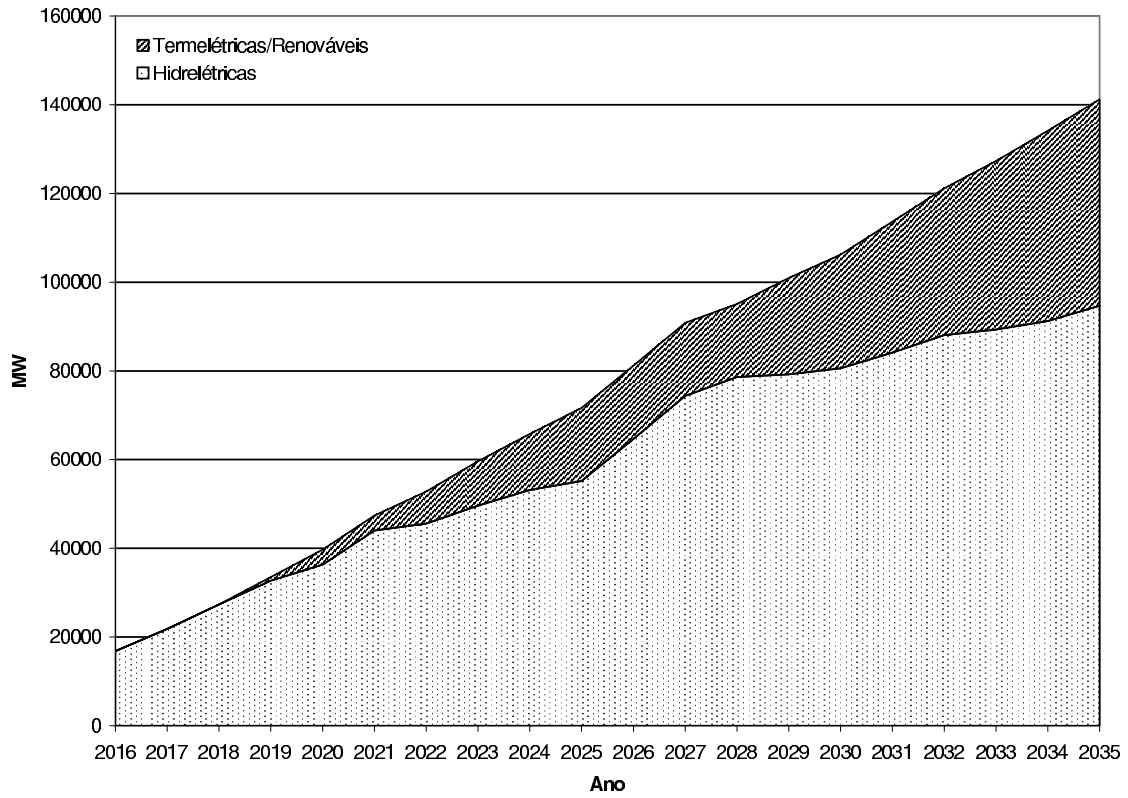


Figura 5.3: Expansão Acumulada de 2016 a 2035 (Grupo C / Caso II)

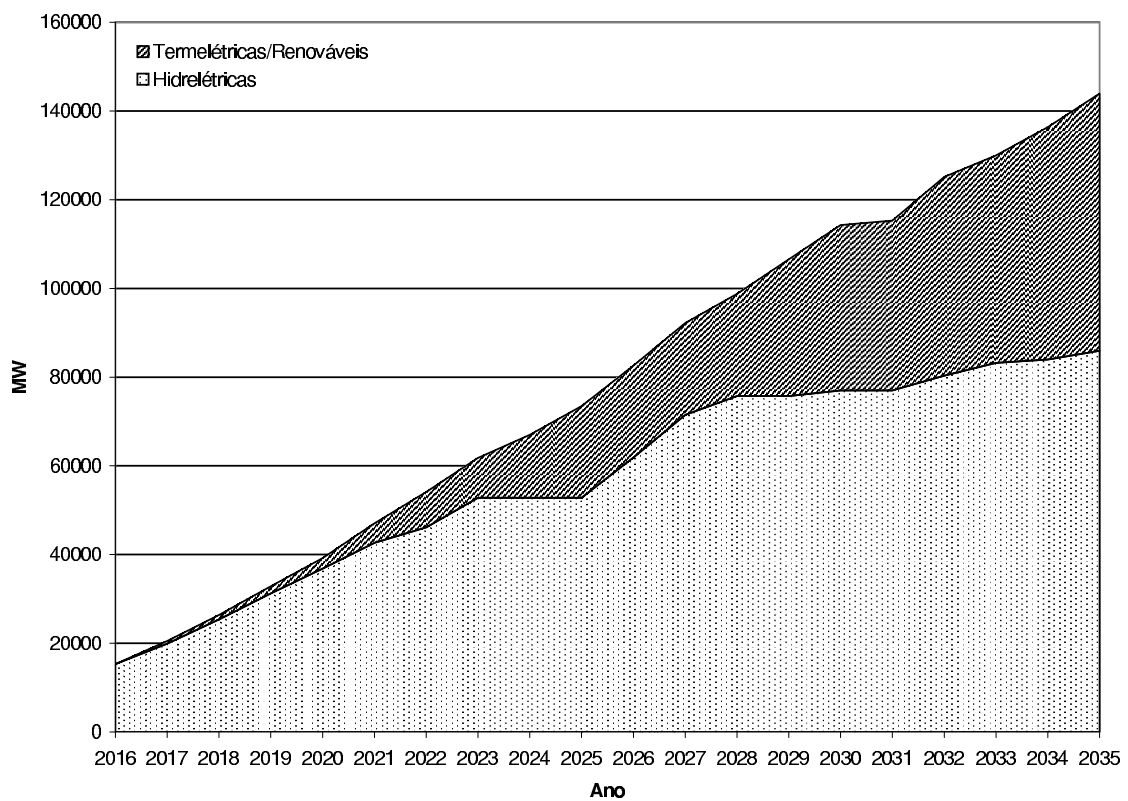


Figura 5.4: Expansão Acumulada de 2016 a 2035 (Grupo C / Caso III)

# Conclusões e Perspectivas

O CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, empresa do sistema Eletrobras, vem desenvolvendo ao longo de vários anos o MELP (**M**odelo de **E**xpansão de **L**ongo **P**razo), voltado para o problema de planejamento da expansão da geração de energia elétrica no longo prazo (PEG). O MELP envolve desde a modelagem conceitual do problema (impondo simplificações aceitáveis ao PEG, de forma a permitir o seu tratamento) até o desenvolvimento de algoritmos de solução para a formulação de Programação Linear Inteira Mista, sugerida para o modelo proposto. Em sua versão atual o MELP emprega em sua metodologia de solução o algoritmo Branch-and-Cut do pacote computacional IBM/CPLEX 11.0, fazendo uso também de heurísticas primais para a obtenção de soluções viáveis iniciais de boa qualidade.

No entanto, como é bastante conhecido, a dificuldade de resolução de problemas de Programação Inteira tende a aumentar com o aumento da dimensão das instâncias do problema. Desta forma, para instâncias de grandes dimensões, principalmente aquelas que envolviam uma grande cesta de projetos e um maior detalhamento da modelagem da operação do sistema elétrico, o algoritmo de solução adotado sequer conseguia obter uma solução inteira qualquer em tempo computacional aceitável. De fato, em alguns casos nem mesmo a relaxação linear do problema era obtida.

A motivação deste trabalho de tese consistiu então no desenvolvimento de um algoritmo de solução voltado para instâncias de grandes dimensões do PEG, enfocados sob a ótica do MELP. Resolveu-se então explorar a metodologia de Decomposição de Dantzig-Wolfe para Programação Inteira, devido a sua vasta e bem sucedida aplicação a problemas de grande porte nesta área específica, sob a denominação geral de "Algoritmos Branch-and-Price".

Na aplicação desta metodologia ao MELP diversas dificuldades tiveram de ser superadas, o que por sua vez, possibilitou o desenvolvimento de contribuições, muitas delas originais, que vão desde o desenvolvimento de uma nova reformulação para o problema até o desenvolvimento de um novo tipo de algoritmo Branch-and-Price. Segue então uma breve descrição de todas as contribuições oferecidas por esta tese.

1. Apesar da Decomposição de Dantzig-Wolfe ter sido recentemente aplicada em SINGH *et al.* [1] a um problema de planejamento da expansão da geração, com



uma formulação matemática próxima àquela adota no MELP, esta é a primeira vez que este tipo de decomposição é utilizada em um modelo desenvolvido para o setor elétrico brasileiro, como pode ser verificado na extensa revisão bibliográfica realizada;

2. A reformulação desenvolvida para o MELP é verdadeiramente uma contribuição original. Não existe na literatura algo similar ao que foi proposto neste trabalho com a utilização das variáveis  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$ , nas restrições  $\mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{N}(\mathbf{x} - \mathbf{w})$  e  $\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{ref}} \leq \mathbf{T}\mathbf{x}$  da reformulação (4.46). As relações existentes entre as matrizes retangulares  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  possibilitam que, diante de múltiplos subproblemas de geração de colunas independentes entre si, as colunas geradas mesmo não compondo uma solução inteira viável para o problema mestre restrito (PMR), sejam inseridas no mesmo de forma vantajosa. Isso porque o custo referente à utilização das variáveis artificiais é muito menor do que seria o caso se uma outra reformulação "mais natural" tivesse sido adotada. Em outras palavras, ao longo das iterações da decomposição os limites superiores para o PMR são muito melhores, o que por sua vez, implica diretamente na convergência do método;
3. O esquema de estabilização proposto para os duais, inicializado com o dual da relaxação linear do problema sem decomposição, obtido através de um algoritmo de pontos interiores, também pode ser visto como uma contribuição original. Isto decorre do fato de que a obtenção deste dual somente foi possível devido à estrutura esparsa da matriz de restrições da reformulação proposta, estudada nos trabalhos de VANDERBEI [194] e GONDZIO [195];
4. A geração de colunas inserida em um esquema do tipo *Local Branching* é uma contribuição original. Uma das grandes dificuldades de um algoritmo do tipo Branch-and-Price é que ao longo das ramificações a estrutura dos subproblemas pode ser modificada. Talvez este seja um dos motivos pelo qual a geração de colunas inserida em um esquema do tipo *Local Branching* ainda não tenha sido explorada, devido a necessidade de incorporar a desigualdade de Hamming aos subproblemas. Em nossa reformulação não existe este problema porque as variáveis  $\mathbf{x}$  a serem ramificadas não fazem parte das restrições de convexificação;
5. O algoritmo **BPLB** resolveu instâncias do PEG que estão fora do alcance do estado-da-arte dos pacotes comerciais de Programação Inteira Mista;

Apesar de ter sido desenvolvido para resolver o Problema de Planejamento da Expansão da Geração de Energia Elétrica no Longo Prazo formulado sob a ótica do

MELP, o algoritmo **BPLB** pode ser aplicado a diversos problemas de Programação Linear Inteira Mista de grandes dimensões, com estrutura da matriz de restrições semelhante àquela encontrada neste trabalho.

O desenvolvimento do algoritmo **BPLB** abre diversas possibilidades de trabalhos futuros. Primeiramente, possibilita a inclusão de novas restrições no MELP que antes poderiam comprometer seu desempenho computacional. Outra possibilidade poderia ser a consideração de incertezas na demanda de energia elétrica e no preço dos combustíveis para as usinas termelétricas, ou seja, passa a tratar Problemas de Programação Estocástica Linear Inteira Mista.

Em relação a este último tópico podem ser citados alguns exemplos da literatura que desenvolvem um algoritmo Branch-and-Price para resolver problemas estocásticos. Dentre estes destacam-se, SILVA e WOOD [144] que resolvem um problema estocástico de localização de facilidades, e CHRISTIANSEN e LYSGAARD [145] que resolvem um problema estocástico de roteamento de veículos capacitado.

No entanto, para o tratamento de problemas estocásticos, é necessário desenvolver uma versão com processamento paralelo do algoritmo **BPLB**, de tal forma que os subproblemas de geração de colunas possam ser resolvidos em máquinas diferentes. Um outra possibilidade seria continuar trabalhando com um algoritmo sequencial mas desenvolver uma metodologia de solução específica para os subproblemas. Isto implicaria em resolvê-los de forma mais eficiente do que simplesmente utilizar diretamente os pacotes computacionais disponíveis no mercado. De qualquer forma, estes são temas para um novo trabalho de tese.

# Referências Bibliográficas

- [1] SINGH, K. J., PHILPOTT, A. B., WOOD, R. K. “Dantzig-Wolfe Decomposition for Solving Multi-Stage Stochastic Capacity-Planning Problems”, *Operations Research*, v. 57, pp. 1271–1286, 2009.
- [2] TRINKENREICH, J., PINHEIRO, S. “Planejamento da Expansão de Longo Prazo Usando Programação Linear.” In: *XV SOBRAPO*, v. 1, pp. 243–258, 1982.
- [3] GORENSTEIN, B., CAMPADÓNICO, N., COSTA, J., et al. “Power System Expansion Planning Under Uncertainty”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 8, n. 1, pp. 129–136, 1993.
- [4] MACHADO JUNIOR, Z. S., COSTA, J., BINATO, S., et al. “Generation Expansion Planning considering Uncertainties”. In: *VIII SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*, n. IP-075, 2002.
- [5] TERRY, L., MELO, A., LISBOA, M., et al. “Application of the MELP Program to Define a Long Term Generation and Interconnection Expansion Plan for the Brazilian System”. In: *IX SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*, n. SP-006, 2004.
- [6] LISBOA, M. L., MARZANO, L. G. B., SABÓIA, C. H. M., et al. “A mixed-integer programming model for long term generation expansion planning of the brazilian system.” In: *16th Power System Computation Conference*. 16th Power System Computation Conference, July 2008.
- [7] MME. *Plano Nacional de Energia 2030*. Ministério de Minas e Energia - MME, Novembro 2007.
- [8] LISBOA, M. L., MARZANO, L. G. B., SABÓIA, C. H. M., et al. “Incorporation of the Natural Gas System into MELP model (in Portuguese)”. In: *Proceedings of XI Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning - XI SEPOPE*, 2009.

- [9] LISBOA, M. L., MARZANO, L. G. B., JUSTINO, T. C., et al. “Análise de Parâmetros Operativos do Sistema Hidrotérmico Brasileiro”, *Cadernos do IME - Série Estatística*, v. 29, pp. 31–45, 2010.
- [10] LISBOA, M. L. V., SABÓIA, C. H. M., MARZANO, L. G. B., et al. “Integrated Long Term Expansion Planning Model for the Brazilian Natural Gas and Electrical Power Systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Submetido em 04/Junho/2013.
- [11] M.FISCHETTI, A.LODI. “Local branching”, *Mathematical Programming*, v. Series B, pp. 23–47, 2003.
- [12] SABÓIA, C. H. M., LUCENA, A. “A Column Generation Approach for Solving Very Large Scale Instances of the Brazilian Long Term Power Expansion Planning Model”. In: Curran Associates, I. (Ed.), *Proceedings of 17th Power System Computation Conference - PSCC 2011*, v. 1, ISBN 978-1-61839-227-5, pp. 15–22, Stockholm, August 2011.
- [13] FORTUNATO, L., ARARIPE NETO, T., ALBUQUERQUE, J., et al. *Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica*. EDUFF - Editora Universitária, 1990.
- [14] MACEIRA, M. E. P., DUARTE, V. S., PENNA, D. D. J., et al. “Ten years of application of stochastic dual dynamic programming in official and agent studies in brazil description of the NEWAVE program.” In: *Proceedings of 16th Power System Computation Conference - PSCC 2008*, Glasgow, 2008.
- [15] PEREIRA, M., PINTO, L. “Multi Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning”, *Mathematical Programming*, v. 52, pp. 359–375, 1991.
- [16] PHUPHA, V., LANTHARTHONG, T., RUGTHAICHAROENCHEEP, N. “Generation Expansion Planning Strategies on Power System: A Review”, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, v. 64, pp. 480–483, 2012.
- [17] KAGIANNAS, A. G., ASKOUNIS, D. T., PSARRAS, J. “Power generation planning: a survey from monopoly to competition”, *Electrical Power and Energy Systems*, v. 26, pp. 413–421, 2004.
- [18] RUBIO, R., OJEDA-ESTEYBAR, D., ANÓ, O., et al. “Integrated natural gas and electricity market: A survey of the state of the art in operation planning and market issues”. In: *Proceedings of Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2008 IEEE/PES*, 2008.

- [19] SANGHVI, A. P., SHAVEL, I. H. “Investment Planning for Hydro-Thermal Power System Expansion: Stochastic Programming Employing the Dantzig-Wolfe Decomposition Principle”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. PWRS-1, n. 2, May 1986.
- [20] DANTZIG, G., WOLFE, P. “Decomposition principle for linear programs.” *Operations Research*, v. 8, pp. 101–111, 1960.
- [21] HALTER, A., DEAN, G. *Decisions Under Uncertainty, with Research Applications*. South-Western Publishing Co ,U.S., December 1971.
- [22] BENDERS, J. “Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems”, *Numerisch Mathematik*, v. 4, pp. 238–252, 1962.
- [23] KENFACK, F., GUINET, A., NGUNDAM, J. M. “Investment planning for electricity generation expansion in a hydro dominated environment”, *International Journal of Energy Research*, v. 25, pp. 927 – 937, 2001.
- [24] FIRMO, H. T., LEGEY, L. F. L. “Generation expansion planning: an iterative genetic algorithm approach”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 3, pp. 901 – 906, 2002.
- [25] CAMPODÓNICO, N., BINATO, S., KELMAN, R., et al. *Expansion planning of generation and interconnections under uncertainty*. Relatório técnico, Power Systems Research (PSR), 2002.
- [26] ANTUNES, H., MARTINS, A. G., BRITO, I. S. “A multiple objective mixed integer programming model for power generation expansion planning”, *Energy*, v. 29, pp. 613 – 627, 2004.
- [27] MEZA, J. L. C., YILDIRIM, M. B., MASUD, A. S. M. “A Model for the Multiperiod Multiobjective Power Generation Expansion Problem”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, n. 2, May 2007.
- [28] TEKINER, H., COIT, D. W., FELDER, F. A. “Multi-period multi-objective electricity generation expansion planning problem with Monte-Carlo simulation”, *Electric Power Systems Research*, v. 80, pp. 1394 – 1405, 2010.
- [29] PEREIRA, S., FERREIRA, P., VAZ, A. I. F. *Electricity Planning in a Mixed Hydro-Thermal-Wind Power System*. Relatório Técnico 2, Portugal, 2011. PTDC/SEN-ENR/099578/2008.
- [30] UNSIHUAY-VILA, C., MARANGON-LIMA, J. W., DE SOUZA, A. C. Z., et al. “Multistage expansion planning of generation and interconnections

- with sustainable energy development criteria: A multiobjective model”, *Electrical Power and Energy Systems*, v. 33, pp. 258 – 270, 2011.
- [31] SIRIKUM, J., TECHANITISAWAD, A. “Power generation expansion planning with emission control: a nonlinear model and a GA-based heuristic approach”, *International Journal of Energy Research*, v. 30, n. 2, pp. 81 – 99, February 2006.
- [32] MUIS, Z., HASHIM, H., MANAN, Z., et al. “Optimal planning of renewable energy-integrated electricity generation schemes with CO2 reduction target”, *Renewable Energy*, v. 35, pp. 2562–2570, 2010.
- [33] GIRALDO, D. A. M., LEZAMA, J. M. L., PAREJA, L. A. G. “Energy Generation Expansion Planning Model Considering Emissions Constraints”, *Dyna*, v. 163, pp. 75–84, September 2010. doi: ISSN 0012η7353.
- [34] CHEN, Q., KANG, C., XIA, Q., et al. “Power Generation Expansion Planning Model Towards Low-Carbon Economy and Its Application in China”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 25, n. 2, 2010.
- [35] BAKIRTZIS, G. A., BISKAS, P. N., CHATZIATHANASIOU, V. “Generation Expansion Planning by MILP considering mid-term scheduling decisions”, *Electric Power Systems Research*, v. 86, pp. 98 – 112, 2012.
- [36] GIRALDO, D. A. M., LEZAMA, J. M. L., PAREJA, L. A. G. “Power system capacity expansion planning model considering carbon emissions constraints”, *Revista Facultad de Ingenieria Universidad de Antioquia*, v. 62, pp. 114 – 125, 2012.
- [37] SANTOS, H. L., LEGEY, L. F. L. “A model for long-term electricity expansion planning with endogenous environmental costs”, *Electrical Power and Energy Systems*, v. 51, pp. 98–105, 2013.
- [38] JÚNIOR, Z. S. M. *Modelo da Expansão da Geração a Longo Prazo Considerando Incertezas e Garantia de Suprimento*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ - Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Dezembro 2000.
- [39] UNSIHUAY, C., MARANGON-LIMA, J. W., DE SOUZA, A. C. Z. “Integrated Power Generation and Natural Gas Expansion Planning”. In: *IEEE PES PowerTech Conference*, Lausanne, Switzerland, July 2007.

- [40] QUELHAS, A., GIL, E., MCCALLEY, J. D., et al. “A Multiperiod Generalized Network Flow Model of the U.S. Integrated Energy System: Part I - Model Description”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, n. 2, May 2007.
- [41] IBÁÑEZ, E., MCCALLEY, J., ALIPRANTIS, D., et al. “National Energy and Transportation Systems: Interdependencies within a Long Term Planning Model”. In: *IEEE Energy 2030*, Atlanta, GA, November 2008.
- [42] UNSIHUAY-VILA, C., MARANGON-LIMA, J. W., DE SOUZA, A. C. Z., et al. “A Model to Long-Term, Multiarea, Multistage, and Integrated Expansion Planning of Electricity and Natural Gas Systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 25, n. 2, 2010.
- [43] MCCALLEY, J., IBÁÑEZ, E., GU, Y., et al. “National Long-Term Investment Planning for Energy and Transportation Systems”. In: *IEEE Power and Energy Society General Meeting*, July 2010.
- [44] SHARAN, I., BALASUBRAMANIAN, R. “Integrated generation and transmission expansion planning including power and fuel transportation constraints”, *Energy Policy*, v. 43, pp. 275–284, 2012.
- [45] MARCATO, R. M., SAGASTIZABAL, C. “Introducing environmental constraints in generation expansion problems”, *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 14, n. 4, pp. 351 – 368, 2007.
- [46] SIRIKUM, J., TECHANITISAWAD, A., KACHITVICHYANUKUL, V. “A New Efficient GA-Benders’ Decomposition Method: For Power Generation Expansion Planning With Emission Controls”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, n. 3, August 2007.
- [47] CARERI, F., GENESI, C., MARANNINO, P., et al. “Generation Expansion Planning in the Age of Green Economy”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 26, n. 4, 2011.
- [48] KIM, H., SOHN, H.-S., BRICKER, D. L. “Generation Expansion Planning using Benders’ Decomposition and Generalized Networks”, *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Application and Practice*, v. 18, n. 1, pp. 25 – 39, 2011.
- [49] SAGASTIZÁBAL, C., SOLODOV, M. “Solving generation expansion planning problems with environmental constraints by a bundle method”, *Computational Management Science*, v. 9, pp. 163 – 182, 2012.

- [50] SAGASTIZÁBAL, C., SOLODOV, M. “An infeasible bundle method for nonsmooth convex constrained optimization without a penalty function or a filter”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 16, pp. 146 – 169, 2005.
- [51] MACEIRA, M. E. P., TERRY, L., COSTA, F. S., et al. “Chain of Optimization Models for Setting the Energy Dispatch and Spot Price in the Brazilian System”. In: *Proceedings of 14th Power System Computation Conference - PSCC 2002*, 2002.
- [52] MARZANO, L. G. B., MACEIRA, M. E. P., LISBOA, M. L. . V., et al. “Obtaining Mid-Term Generation Expansion Plan of Hydro Dominated System by Combining Short and Long-Term Energy Expansion Planning Tools.” In: *Proceedings of 17th Power System Computation Conference - PSCC 2011*, Stockholm, 2011.
- [53] CEPTEL. *Manual de Metodologia do Modelo MELP*. Relatório técnico, CEPTEL/DEA, 2010.
- [54] MACEIRA, M. E. P., XAVIER, L. N. R. “Aprimoramento para o cálculo da energia assegurada.” In: *XIX SNPTEE*, Rio de Janeiro, Outubro 2007.
- [55] ELETROBRAS. “SIPOT- Sistema de informações do Potencial Hidrelétrico Brasileiro”. 2007.
- [56] LISBOA, M. L. V., MARZANO, L. G. B., SABÓIA, C. H. M., et al. “Discussão de Premissas Básicas para a Modelagem do Problema de Planejamento da Expansão da Geração de Longo Prazo.” In: *X SEPOPE - Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*, 2006.
- [57] LISBOA, M. L., MACEIRA, M. E. P., DE MELO, A. C., et al. “A Simplified Approach to Estimate The Energy Production of Thermal Plants for Long Term Generation Expansion Planning Studies”. In: *VI Congresso Latino-Americano de Geração e Transporte de Energia Elétrica - CLAGTEE*, Mar del Plata, Argentina, 2005.
- [58] AARTS, E., LENSTRA, J. K. *Local Search in Combinatorial Optimization*. Princeton University Press, 1997.
- [59] LISBOA, M. L., MARZANO, L. G. B., SABÓIA, C. H. M., et al. “Validação do modelo MELP para utilização no Plano Nacional de Energia”. In: *XIX SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, 2007.



- [60] CEPEL. *Caso Base de Validação do Programa MELP: Sistema Elétrico Brasileiro e Horizonte 2006-2030*. Relatório técnico, CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, 2007.
- [61] MME-SPE, EPE. *Plano Decenal de Expansão de Energia Elétrica - PDEE 2006-2015*, 2006.
- [62] LASDON, L. S. *Optimization Theory for Large Systems*. Dover Publications, 2002.
- [63] BERTSIMAS, D., TSITSIKLIS, J. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
- [64] BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., et al. “Branch-and-price: column generation for solving huge integer programs.” *Operations Research*, v. 46, pp. 316–329, 1998.
- [65] JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., SAVELSBERGH, M. W. P. “Progress in linear programming based branch-and-bound algorithms: an exposition”, *NFORMS Journal on Computing*, , n. 12, pp. 2–23, 2000.
- [66] LUBBECKE, M., DESROSIERS, J. “Selected Topics in Column Generation”, *Operations Research*, v. 53, n. 6, pp. 1007–1023, November–December 2005.
- [67] GILMORE, P., GOMORY, R. “A linear programming approach to the cutting stock problem.” *Operations Research*, v. 9, pp. 849–859, 1961.
- [68] GILMORE, P., GOMORY, R. “A linear programming approach to the cutting stock problem: Part II.” *Operations Research*, v. 11, pp. 863–888, 1963.
- [69] DESROSIERS, J., SOUMIS, F., DESROCHERS, M. “Routing with time windows by column generation.” *Networks.*, v. 14, pp. 545–565, 1984.
- [70] SAVELSBERGH, M. W. P. “A branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem”, *Operations Research*, v. 45, pp. 831–841, 1997.
- [71] CORDEAU, J.-F., DESAULNIERS, G., LINGAYA, N., et al. “Simultaneous locomotive and car assignment at VIA Rail Canada”, *Transportation Research Part B*, v. 35, pp. 767–878, 2001.
- [72] LINGAYAC, N., CORDEAU, J.-F., DESAULNIERS, G., et al. “Operational car assignment at VIA Rail Canada”, *Transportation Research Part B*, v. 36, pp. 755 – 778, 2002.

- [73] LUBBECKE, M., ZIMMERMANN, U. “Engine Routing and Scheduling at Industrial In-Plant Railroads”, *Transportation Science*, v. 37, n. 2, pp. 183–197, May 2003.
- [74] LUBBECKE, M. *Engine Scheduling by Column Generation*. Tese de Doutorado, Braunschweig University of Technology, July 2001.
- [75] BOLAND, N., SURENDONK, T. “A Column Generation Approach to Delivery Planning over Time with Inhomogeneous Service Providers and Service Interval Constraints”, *Annals of Operations Research*, , n. 108, pp. 143–156, 2001.
- [76] BUTT, S., RYAN, D. “An optimal solution procedure for the multiple tour maximum collection problem using column generation”, *Computers and Operations Research*, , n. 26, pp. 427–441, 1999.
- [77] SAVELSBERGH, M. W. P., SOL, M. “DRIVE: Dynamic routing of independent vehicles”, *Operations Research*, , n. 46, pp. 474–490, 1998.
- [78] SOL, M. *Column Generation Techniques for Pickup and Delivery Problems*. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Eindhoven, 1994.
- [79] STEINZEN, I., SUHL, L., KLIOWER, N. “Branching strategies to improve regularity of crew schedules in ex-urban public transit.” *OR Spectrum*, v. 31, n. 4, pp. 727–743, 2009. doi: 10.1007/s00291-008-0136-5.
- [80] BARD, J. F., PURNOMO, H. W. “Preference scheduling for nurses using column generation”, *European Journal of Operational Research*, v. 164, pp. 510 – 534, 2005.
- [81] BORNDORFER, R., GROTSCHHEL, M., LOBEL, A. *Scheduling Duties by Adaptive Column Generation*. Relatório técnico, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2001.
- [82] DESROCHERS, M., SOUMIS, F. “A column generation approach to the urban transit crew scheduling problem”, *Transportation Science*, , n. 23, pp. 1–13, 1989.
- [83] MEHROTRA, A., MURPHY, K. E., TRICK, M. A. “Optimal shift scheduling: a branch-and-price approach”, *Naval Research Logistics*, , n. 47, pp. 185–200, 2000.
- [84] CAPRARA, A., MONACI, M., TOTH, P. “Models and algorithms for a staff scheduling problem”, *Mathematical Programming*, v. 98, pp. 445 – 476, 2003.

- [85] BELIEN, J., DEMEULEMEESTER, E. “Scheduling trainees at a hospital department using a branch-and-price approach”, *European Journal of Operational Research*, v. 175, pp. 258 – 278, 2006.
- [86] BELIEN, J., DEMEULEMEESTER, E. “A branch-and-price approach for integrating nurse and surgery scheduling”, *European Journal of Operational Research*, v. 189, pp. 652 – 668, 2008.
- [87] AKKER, J. M. V. D., HOOGEVEEN, H., VELDE, S. L. V. D. “Combining column generation and lagrangean relaxation to solve a single machine common due date problem”, *INFORMS Journal on Computing*, , n. 14, pp. 37–51, 2002.
- [88] AKKER, J. M., HURKENS, C. A. J., SAVELSBERGH, M. W. P. “Time-indexed formulations for single-machine scheduling problems: column generation”, *INFORMS Journal on Computing*, , n. 12, pp. 111–124, 2000.
- [89] AKKER, J. M. V. D., HOOGEVEEN, J. A., VELDE, S. L. V. D. “Parallel machine scheduling by column generation”, *Operations Research*, , n. 47, pp. 862–872, 1999.
- [90] CHEN, Z. L., POWELL, W. B. “A column generation based decomposition algorithm for a parallel machine just-in-time scheduling problem”, *European Journal of Operational Research*, , n. 116, pp. 220–232, 1999.
- [91] CRAMA, Y., OERLEMANS, A. G. “A column generation approach to job grouping for flexible manufacturing systems”, *European Journal of Operational Research*, v. 78, n. 1, pp. 58–80, 1994.
- [92] LOBEL, A. “Vehicle Scheduling in Public Transit and Lagrangean Pricing.” *Management Science*, v. 44, n. 12, pp. 1637–1649, December 1998.
- [93] LOBEL, A. *Optimal Vehicle Scheduling in Public Transit*. Tese de Doutorado, Technische Universitat Berlin, 1997.
- [94] RIBEIRO, C., SOUMIS, F. “A column generation approach to the multiple-depot vehicle scheduling problem.” *Operations Research*, v. 42, pp. 41–52, 1994.
- [95] DA CUNHA E ALVELOS, F. P. P. *Branch-and-Price and Multicommodity Flows*. Tese de Doutorado, Universidade do Minho, 2005.
- [96] ALVELOS, F., CARVALHO, J. M. V. *Solving multicommodity flow problems with branch-and-price*. Relatório técnico, Universidade do Minho, 2000.

- [97] BARNHART, C., HANE, C., VANCE, P. H. “Using branch-and-price-and-cut to solve origin-destination integer multicommodity network flow problems”, *Operations Research*, v. 48, n. 3, pp. 318–326, 2000.
- [98] DA CUNHA E ALVELOS, F. P. P. *Aplicação do Método de Partição e Geração de Colunas ao Problema do Fluxo Multicomodidade*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1999.
- [99] TOMBUS, O., BILGIÇ, T. “A column generation approach to the coalition formation problem in multi-agent systems”, *Computers and Operations Research*, , n. 31, pp. 1635–1653, 2004.
- [100] BREDSTRÖM, D., LUNDGREN, J. T., RÖNNQVIST, M., et al. “Supply chain optimization in the pulp mill industry - IP models”, *European Journal of Operational Research*, v. 156, pp. 2–22, 2004.
- [101] HANE, C., BARNHART, C., JOHNSON, E. L., et al. “The fleet assignment problem: solving a large-scale integer program”, *Mathematical Programming*, , n. 70, pp. 211–232, 1995.
- [102] PIMENTEL, A. L. G. *Uma abordagem heurística para a solução de problemas de recobrimento de conjuntos de grande porte, com aplicação a alocação de tripulações para companhias aéreas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
- [103] ANBIL, R., FORREST, J. J., PULLEYBLANK, W. R. “Column generation and the airline crew pairing problem”. In: *International Congress of Mathematicians Berlin*, pp. 677–686, 1998.
- [104] VANCE, P. H., ATAMTURK, A., BARNHART, C., et al. *A heuristic branch-and-price approach for the airline crew pairing problem*. Relatório Técnico TLI/LEC-97-06, Georgia Institute of Technology, 1997.
- [105] CRAINIC, T. G., ROUSSEAU, J. M. “The column generation principle and the airline crew pairing problem”, *Infor*, , n. 25, pp. 136–151, 1987.
- [106] YAN, S., CHANG, J. C. “Airline cockpit crew scheduling”, *European Journal of Operational Research*, , n. 136, 2002.
- [107] YAN, S., TUNG, T. T., TU, Y. P. “Optimal construction of airline individual crew pairings”, *Computers and Operations Research*, , n. 29, pp. 341–363, 2002.

- [108] VANCE, P. H., BARNHART, C., JOHNSON, E. L., et al. “Airline crew scheduling: A new formulation and decomposition algorithm”, *Operations Research*, , n. 45, pp. 188–200, 1997.
- [109] REY, P. A., MUÑOZ, J. A., WEINTRAUB, A. “A Column Generation Model for Truck Routing in the Chilean Forest Industry”, *INFOR: Information Systems and Operational Research*, v. 47, n. 3, pp. 215–221, August 2009. doi: 10.3138/infor.47.3.215.
- [110] MARTINS, I., CONSTANTINO, M., BORGES, J. G. “A column generation approach for solving a non-temporal forest harvest model with spatial structure constraints”, *European Journal of Operational Research*, v. 161, pp. 478–498, 2005. doi: 10.1016/j.ejor.2003.07.021.
- [111] WEINTRAUB, A., BARAHONA, F., EPSTEIN, R. “A Column Generation Algorithm for Solving General Forest Planning Problems with Adjacency Constraints”, *Forest Science*, v. 40, pp. 142–161, 1994.
- [112] RONNQVIST, M. “Optimization in forestry”, *Mathematical Programming*, v. 97, pp. 267 – 284, 2003.
- [113] CARLSSON, D., RONNQVIST, M. “Supply chain management in forestry—case studies at Sodra Cell AB”, *European Journal of Operational Research*, v. 163, pp. 589 – 616, 2005.
- [114] MARTINS, I., ALVELOS, F., CONSTANTINO, M. “A branch-and-price approach for harvest scheduling subject to maximum area restrictions”, *Computational Optimization and Applications*, v. 51, pp. 363–385, 2012.
- [115] PERSSON, J. A., GÖTHE-LUNDGREN, M. “Shipment planning at oil refineries using column generation and valid inequalities”, *European Journal of Operational Research*, v. 163, pp. 631–652, 2005.
- [116] KLOSE, A., GORTZ, S. “A branch-and-price algorithm for the capacitated facility location problem”, *European Journal of Operational Research*, v. 179, pp. 1109–1125, 2007.
- [117] KLOSE, A., DREXL, A. “Lower bounds for the capacitated facility location problem based on column generation”, *Management Science*, v. 51, pp. 1689–1705, 2005.
- [118] KLOSE, A., DREXL, A. *A partitioning and column generation approach for the capacitated facility location problem*. Relatório técnico, University of St. Gallen, 2002.

- [119] SHAW, D. X. “A unified limited column generation approach for facility location problems on trees”, *Annals of Operations Research*, v. 87, pp. 363–382, 1999.
- [120] HANSEN, P., JAUMARD, B., ARAGÃO, M. P. “Mixed-integer column generation algorithms and the probabilistic maximum satisfiability problem”, *European Journal of Operational Research*, , n. 108, pp. 671–683, 1998.
- [121] JAUMARD, B., HANSEN, P., ARAGÃO, M. P. “Column generation methods for probabilistic logic”, *ORSA Journal on Computing*, , n. 3, pp. 135–148, 1991.
- [122] CLARK, S. J., BARNHART, C., KOLITZ, S. E. “Large-Scale Optimization Planning Methods for the Distribution of United States Army Minutians”, *Mathematical and Computer Modelling*, v. 39, pp. 697 – 714, 2004.
- [123] SINDHUCHAO, S., ROMEIJN, H. E., AKÇALI, E., et al. “An Integrated Inventory-Routing System for Multi-item Joint Replenishment with Limited Vehicle Capacity”, *Journal of Global Optimization*, v. 32, pp. 93 – 118, 2005.
- [124] SARAC, A., BATTA, R., RUMP, C. M. “A branch-and-price approach for operational aircraft maintenance routing”, *European Journal of Operational Research*, v. 175, pp. 1850 – 1869, 2006.
- [125] PRECIADO-WALTERS, F., RARDIN, R., LANGER, M., et al. “A coupled column generation, mixed integer approach to optimal planning of intensity modulated radiation therapy for cancer”, *Mathematical Programming*, v. 101, pp. 319 – 338, 2004.
- [126] PRECIADO-WALTERS, F., LANGER, M. P., RARDIN, R. L., et al. “Column generation for IMRT cancer therapy optimization with implementable segments”, *Annals of Operations Research*, v. 148, pp. 65–79, 2006.
- [127] FEIA, H., CHUB, C., MESKENSE, N., et al. “Solving surgical cases assignment problem by a branch-and-price approach”, *International Journal of Production Economics*, v. 112, pp. 96 – 108, 2008.
- [128] CARDOEN, B., DEMEULEMEESTER, E., BELIEN, J. “Sequencing surgical cases in a day-care environment: An exact branch-and-price approach”, *Computers and Operations Research*, v. 36, pp. 2660 – 2669, 2009.

- [129] VANDERBECK, F. “Extending Dantzig’s bound to the bounded multiple-class binary Knapsack problem”, *Mathematical Programming*, v. 94, pp. 125 – 136, 2002.
- [130] VANDERBECK, F. “Computational study of a column generation algorithm for bin packing and cutting stock problems”, *Mathematical Programming*, v. 86, pp. 565–594, 1999.
- [131] CARVALHO, J. M. V. “Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound”, *Annals of Operations Research*, v. 86, pp. 629–659, 1999.
- [132] HURKENS, C., JONG, J. D., CHEN, Z. “A branch-and-price algorithm for solving the cutting strips problem”, *Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities*, v. 12, n. 2, pp. 215–224, 1997. doi: 10.1007/s11766-997-0022-y.
- [133] VANCE, P. H. “Branch-and-price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem”, *Computational Optimization and Applications*, v. 9, n. 3, pp. 211–228, 1996. doi: 10.1023/A:1018346107246.
- [134] VANCE, P. H., BARNHART, C., JOHNSON, E. L., et al. “Solving binary cutting stock problems by column generation and branch-and-bound”, *Computational Optimization and Applications*, v. 3, pp. 111–130, 1994.
- [135] SULIMAN, S. M. A. “Pattern generating procedure for the cutting stock problem”, *International Journal of Production Economics*, v. 74, pp. 293–301, 2001.
- [136] CAPRARA, A., TOTH, P. “Lower bounds and algorithms for the 2-dimensional vector packing problem”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 111, pp. 231 – 262, 2001.
- [137] VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. “LP models for bin packing and cutting stock problems”, *European Journal of Operational Research*, v. 141, pp. 253 – 273, 2002.
- [138] BELOV, G., SCHEITHAUER, G. “A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths”, *European Journal of Operational Research*, v. 141, pp. 274–294, 2002.
- [139] ZAK, E. J. “Row and column generation technique for a multistage cutting stock problem”, *Computers and Operations Research*, v. 29, pp. 1143 – 1156, 2002.

- [140] BELOV, G., SCHEITHAUER, G. “A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting”, *European Journal of Operational Research*, v. 171, pp. 85 – 106, 2006.
- [141] SIMO, T., KENFACK, F., NGUNDAM, J. M. “Contribution to the long-term generation scheduling of the Cameroonian electricity production system”, *Electric Power Systems Research*, v. 77, pp. 1265 – 1273, 2007.
- [142] EBEM-CHAIME, M., TOVEY, C. A., AMMONS, J. C. “Circuit partitioning via set partitioning and column generation”, *Operations Research*, v. 44, pp. 65–76, 1996.
- [143] DENTCHEVA, D., PRÉKOPA, A., RUSZCZYNSKI, A. “Bounds for probabilistic integer programming problems”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 124, pp. 55 – 65, 2002.
- [144] SILVA, E. F., WOOD, R. K. “Solving a class of stochastic mixed-integer programs with branch-and-price”, *Mathematical Programming*, v. 108, pp. 395 – 418, 2006.
- [145] CHRISTIANSEN, C. H., LYSGAARD, J. “A branch-and-price algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands”, *Operations Research Letters*, v. 35, pp. 773 – 781, 2007.
- [146] JEONG, G., LEE, K., PARK, S., et al. “A branch-and-price algorithm for the Steiner tree packing problem”, *Computers and Operations Research*, v. 29, pp. 221–241, 2002.
- [147] MEHROTRA, A., TRICK, M. A. “A column generation approach for graph coloring”, *INFORMS Journal on Computing*, v. 8, pp. 344–354, 1996.
- [148] HOSHINO, E. A., FROTA, Y. A., DE SOUZA, C. C. “A branch-and-price approach for the partition coloring problem”, *Operations Research Letters*, v. 39, pp. 132 – 137, 2011.
- [149] ANDREAS, A. K., SMITH, J. C., KÜÇÜKYAVUZ, S. “Branch-and-price-and-cut algorithms for solving the reliable h-paths problem”, *Journal of Global Optimization*, v. 42, pp. 443 – 466, 2008.
- [150] LARSSON, T., PATRIKSSON, M., RYDERGREN, C. “A column generation procedure for the side constrained traffic equilibrium problem”, *Transportation Research*, , n. 38, pp. 17–38, 2004.



- [151] RIBEIRO, C., MINOUX, M., PENNA, M. C. “An optimal column-generation-withranking algorithm for very large scale set partitioning problems in traffic assignment”, *European Journal of Operational Research*, , n. 41, pp. 232–239, 1989.
- [152] MACAMBIRA, E. M., MACULAN, N., SOUZA, C. C. “A column generation approach for SONET ring assignment”, *Networks*, v. 47, n. 3, pp. 157–171, 2006.
- [153] MACULAN, N., PASSINI, M. M., BRITO, J. A. M., et al. “Column generation method for network design”. In: Gendreau, M., Marcotte, P. (Eds.), *Transportation and Network Analysis: Current Trends*, Kluwer Academic Publishers, pp. 165–179, 2002.
- [154] HENNINGSSON, M., HOLMBERG, K., RÖNNQVIST, M., et al. “Ring network design by lagrangean based column generation”, *Telecommunications Systems*, v. 21, pp. 301–318, 2002.
- [155] LEE, T., PARK, S. “An integer programming approach to the time slot assignment problem in SS/TDMA systems with intersatellite links”, *European Journal of Operations Research*, v. 135, pp. 57–66, 2001.
- [156] JAUMARD, B., MARCOTTE, O., MEYER, C., et al. “Comparison of column generation models for channel assignment in cellular networks”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 112, pp. 217–240, 2001.
- [157] THOMADSEN, T., STIDSEN, T. “Hierarchical Ring Network Design Using Branch-and-Price”, *Telecommunication Systems*, v. 29, pp. 61 – 76, 2005.
- [158] THOMADSEN, T., LARSEN, J. “A hub location problem with fully interconnected backbone and access networks”, *Computers and Operations Research*, v. 34, pp. 2520 – 2531, 2007.
- [159] CESELLI, A., RIGHINI, G. “A branch and price algorithm for the capacitated p-median problem”, *Networks*, v. 45, pp. 125–142, 2005.
- [160] SENNE, E. L. F., LORENA, L. A. N., PEREIRA, M. A. “A branch-and-price approach to p-median location problems”, *Computers and Operations Research*, v. 32, pp. 1655–1664, 2005.
- [161] LORENA, L. A. N., SENNE, E. L. F. “A column generation approach to capacitated p-median problems”, *Computers and Operations Research*, v. 31, pp. 863–876, 2004.

- [162] AVELLA, P., SASSANO, A., VASIL'EV, I. "Computational study of large-scale p-Median problems", *Mathematical Programming*, v. 109, pp. 89–114, 2007.
- [163] CESELLI, A., RIGHINI, G., SALANI, M. "A Column Generation Algorithm for a Rich Vehicle-Routing Problem." *Transportation Science*, v. 43, pp. 56–69, 2009.
- [164] JIN, M., LIU, K., EKSIÖGLU, B. "A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem." *Operations Research Letters*, v. 36, pp. 265–270, 2008.
- [165] DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., SOLOMON, M. "Accelerating strategies in column generation methods for vehicle routing and crew scheduling problems." In: Ribeiro, C., Hansen, P. (Eds.), *Essays and Surveys in Metaheuristics.*, Kluwer, pp. 309–324, 2001.
- [166] DESROCHERS, M., DESROSIERS, J., SOLOMON, M. "A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows." *Operations Research*, v. 40, pp. 342–354, 1992.
- [167] FUKASAWA, R., LONGO, H., LYSGAARD, J., et al. "Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem", *Mathematical Programming*, v. 106, pp. 491–511, 2006.
- [168] KALLEHAUGE, B., LARSEN, J., MADSEN, O. B. "Lagrangian duality applied to the vehicle routing problem with time Windows", *Computers and Operations Research*, v. 33, pp. 1464 – 1487, 2006.
- [169] MOURGAYA, M., VANDERBECK, F. "Column generation based heuristic for tactical planning in multi-period vehicle routing", *European Journal of Operational Research*, v. 183, pp. 1028 – 1041, 2007.
- [170] BALDACCI, R., CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A. "An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts", *Mathematical Programming*, v. 115, pp. 351 – 385, 2008.
- [171] SALANI, M., VACCA, I. "Branch-and-price for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and time Windows", *European Journal of Operational Research*, v. 213, pp. 470 – 477, 2011.
- [172] DANTZIG, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.

- [173] I.LUSTIG, R.E.MARSTEN, D.SHANNO. “Interior point methods: computational state of the art”, *ORSA Journal on Computing*, , n. 6, pp. 1–14, 1994.
- [174] R.E.MARSTEN, E.W.HOGAN, J.W.BLANKENSHIP. “The boxstep method for large scale optimization”, *Operations Research*, , n. 23, pp. 389–405, 1975.
- [175] DU MERLE, O., VILLENEUVE, D., DESROSIERS, J., et al. “Stabilized column generation”, *Discrete Mathematics*, v. 194, pp. 229–237, 1999.
- [176] WESTERLUND, A., GOTHE-LUNDGREN, M., LARSSON, T. “A stabilized column generation scheme for the traveling salesman subtour problem”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 154, pp. 2212 – 2238, 2006.
- [177] WENTGES, P. “Weighted Dantzig-Wolfe Decomposition for Linear Mixed-Integer Programming”, *International Transactions in Operational Research*, v. 4, n. 2, pp. 151–162, 1997.
- [178] DE CARVALHO, J. V. “Using extra dual cuts to accelerate convergence in column generation”, *INFORMS Journal on Computing*, v. 17, pp. 175 – 182, 2005.
- [179] AMOR, H. B., DESROSIERS, J. “A proximal trust-region algorithm for column generation stabilization”, *Computers and Operations Research*, v. 33, pp. 910 – 927, 2006.
- [180] BRIANT, O., LEMARÉCHAL, C., MEURDESOF, P., et al. “Comparison of bundle and classical column generation”, *Mathematical Programming*, v. 113, pp. 299–344, 2008.
- [181] AMOR, H. M. B., DESROSIERS, J., FRANGIONI, A. “On the choice of explicit stabilizing terms in column generation”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 157, pp. 1167 – 1184, 2009.
- [182] LEE, C., PARK, S. “Chebyshev center based column generation”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 159, pp. 2251 – 2265, 2011.
- [183] ELHEDHLI, S., GOFFIN, J.-L. “The integration of an interior-point cutting plane method within a branch-and-price algorithm”, *Mathematical Programming*, v. 100, pp. 267 – 294, 2004.
- [184] ROUSSEAU, L.-M., GENDREAU, M., FEILLET, D. “Interior point stabilization for column generation”, *Operations Research Letters*, v. 35, pp. 660 – 668, 2007.

- [185] VANDERBECK, F. “On Dantzig-Wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm”, *Operations Research*, v. 48, n. 1, pp. 111 – 128, 2000.
- [186] AHUJA, R. K., MAGNANTI, T. L., ORLIN, J. B. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. New Jersey, USA, Prentice Hall, 1993.
- [187] VANDERBECK, F. “Branching in branch-and-price: a generic scheme”, *Mathematical Programming*, v. 130, pp. 249 – 294, 2011.
- [188] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. John Wiley and Sons, 1998.
- [189] UCHOA, E., FUKASAWA, R., LYSGAARD, J., et al. “Robust branch-cut-and-price for the Capacitated Minimum Spanning Tree problem over a large extended formulation”, *Mathematical Programming*, v. 112, pp. 443–472, 2008.
- [190] DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., SOLOMON, M. M. *Column Generation*. Springer Science + Business Media, 2005.
- [191] VANDERBECK, F., SAVELSBERGH, M. W. “A generic view of Dantzig–Wolfe decomposition in mixed integer programming”, *Operations Research Letters*, v. 34, pp. 296 – 306, 2006.
- [192] LIANG, D., WILHELM, W. E. “A generalization of column generation to accelerate convergence”, *Mathematical Programming*, v. 122, pp. 349 – 378, 2010.
- [193] SAUNDERS, M. A. “Major Cholesky Would Feel Proud”, *ORSA Journal on Computing*, v. 6, n. 1, pp. 23–27, 1994.
- [194] VANDERBEI, R. J. “Splitting dense columns in sparse linear systems”, *Linear algebra and its Applications*, , n. 152, pp. 107–117, 1991.
- [195] GONDZIO, J. “Splitting dense columns of constraint matrix in interior point methods for large scale linear programming”, *Optimization*, v. 24, pp. 285–297, 1992.
- [196] ROUSSEAU, L.-M., GENDREAU, M., FEILLET, D. “Interior point stabilization for column generation”, *Operations Research Letters*, v. 35, n. 5, pp. 660–668, 2007.

# Apêndice A

## Parâmetros de Penalidade

Neste apêndice é proposta uma metodologia para calcular os parâmetros de penalidade  $\rho_j$  presentes na reformulação estendida (4.29)-(4.45). Ressalta-se que o mesmo raciocínio empregado para esta reformulação pode ser adaptado a reformulação (4.47).

Por questões de simplicidade iremos considerar apenas o setor elétrico nesta demonstração, podendo o setor de gás natural ser facilmente incorporado, caso seja necessário. Além disso, ainda por questões de simplicidade, consideraremos uma formulação mais restrita de (4.29)-(4.45) onde é possível expressar as variáveis de operação  $\mathbf{y}$  em termos das variáveis de acoplamento  $\mathbf{z}$ , o que também possibilita a representação através das variáveis  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$ , bastando para isto considerar a restrição  $\mathbf{I}_{\text{ref}} \mathbf{z} = \mathbf{Bx}_{\text{ref}}$  da notação matricial (4.46).

### Formulação Restrita

Consideremos uma formulação não-linear equivalente do conjunto de restrições (2.46), da formulação original do MELP (página 43), dada por:

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq \sum_{n=1,\dots,k} \left( \varphi_{i,j,l}^{p,s} \cdot E_{i,j,s}^p \right) \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,l,s) \in \{C, I_e, J_i^H \cup J_i^T, K, \mathcal{L}, \mathcal{S}\} \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \varphi_{i,j,l}^{p,s} = 1, \quad \varphi_{i,j,l}^{p,s} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{C, I_e, J_i^H \cup J_i^T, K, \mathcal{S}\} \quad (\text{A.2})$$

De forma análoga, consideremos um equivalente não-linear do conjunto de restrições (4.36), da reformulação estendida do MELP (página 75), dado por:

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} \leq \left( \varphi_{i,j,l}^{p,s} \cdot E_{i,j,s}^p \right) \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,l,s) \in \{C, I_e, J_i^H \cup J_i^T, K, \mathcal{L}, \mathcal{S}\} \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \varphi_{i,j,l}^{p,s} = 1, \quad \varphi_{i,j,l}^{p,s} \geq 0, \quad \forall (p,i,j,k,s) \in \{C, I_e, J_i^H \cup J_i^T, K, \mathcal{S}\} \quad (\text{A.4})$$

Por conveniência de notação defina-se a função  $\zeta(j) = i$  que retorna o subsistema

elétrico  $i \in I_e$  ao qual pertence o projeto  $j \in \{J_i^H \cup J_i^T\}$ . Um possível valor para o parâmetro  $\varphi$ , digamos  $\hat{\varphi}_{i,j,l}^{p,s}$ , poderia ser aquele que representa a participação percentual de cada projeto na distribuição da curva de carga, ou seja,

$$\hat{\varphi}_{\zeta(j),j,l}^{p,s} = \frac{Ge_{\zeta(j),j,s,l}^{max}}{\sum_{l \in \mathcal{L}} Ge_{\zeta(j),j,s,l}^{max}}.$$

Note que ao fixarmos um valor para o parâmetro  $\varphi$  teremos formado uma versão restrita para as formulações em análise, dado que a restrição não-linear foi considerada nestes respectivos problemas. Desta forma poderíamos, por exemplo, utilizar a constante  $\hat{\varphi}_{\zeta(j),j,l}^{p,s}$  para particionar o parâmetro  $E_{i,j,s}^p$  de cada projeto na mesma proporção da curva de carga.

Fazendo uso de  $\hat{\varphi}_{\zeta(j),j,l}^{p,s}$  podemos então propor a substituição do parâmetro  $Ge_{\zeta(j),j,s,l}^{min}$  por  $\hat{G}_{\zeta(j),j,s,l}^p = \min \left\{ Ge_{\zeta(j),j,s,l}^{max}, \left( \hat{\varphi}_{\zeta(j),j,l}^{p,s} \cdot E_{\zeta(j),j,s}^p \right) \right\}$ . Procedendo desta forma temos uma versão mais restrita das formulações em estudo, e o que é mais importante, os conjuntos de restrições (2.49), da formulação original do MELP (página 43), e (4.39), da reformulação estendida do MELP (página 75), passam a ser restrições de igualdade, respectivamente, dadas por:

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} = \sum_{n=1,\dots,k} \hat{G}_{i,j,s,l}^p \cdot x_j^n, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (\text{A.5})$$

$$ye_{i,j,s,l}^{p,k} = \hat{G}_{i,j,s,l}^p \cdot z_j^k, \quad \forall (p,i,j,k,s,l) \in \{\mathcal{C}, I_e, J_i^e, K, \mathcal{S}, \mathcal{L}\} \quad (\text{A.6})$$

De maneira análoga, nas notações matriciais (2.54) e (4.46), os conjuntos de restrições  $-\underline{\mathbf{G}}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} \geq 0$  e  $-\underline{\mathbf{G}}\mathbf{z} + \mathbf{I}\mathbf{y} \geq 0$ , assumem as seguintes formas, respectivamente:

$$\mathbf{I}\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{G}}\mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{I}\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{G}}\mathbf{z} \quad (\text{A.8})$$

## Notações Matriciais

Nesta seção, com base nos dois últimos conjuntos de restrições, as notações matriciais das formulações em análise serão reescritas. Substituindo-se (A.7) na formulação descrita em (2.54), obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad (\mathbf{q}^T \mathbf{I} + \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}}) \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{H} \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \\ \quad \mathbf{M} \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{x} = \mathbf{m} \\ \quad \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n_{inv}} \end{array} \right\} \quad (\text{A.9})$$

De forma análoga, substituindo-se (A.8) na formulação descrita em (4.46), obtemos:

$$\left. \begin{array}{ll} \min & \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \rho^T \mathbf{w} + \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} \\ \text{s.t.} & \mathbf{H} \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \\ & - \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{w} + \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{ref}} = 0 \\ & - \mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} \leq 0 \\ & \mathbf{M} \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{m} \\ & \mathbf{x} \in \{0,1\}^{n_{\text{inv}}} \quad , \quad \mathbf{w} \in [0,1]^{n_{\text{inv}}} \quad , \quad \mathbf{x}_{\text{ref}} \in [0,1]^{n_{\text{ref}1}} \end{array} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Note que de acordo com a Proposição 3, quando  $\mathbf{w} = 0$ , o conjunto de restrições  $-\mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} \leq 0$  passa a ser de restrições de igualdade, ou seja,  $\mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ . Desta forma ao substituirmos  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  no sistema (A.10) obteremos precisamente o sistema (A.9), considerando-se também que a matriz esparsa  $\widehat{\mathbf{G}}$  é transformada em sua forma de colunas densas  $\widehat{\mathbf{G}}$  através da aplicação da matriz triangular inferior  $\mathbf{T}$ , ou seja,  $\widehat{\mathbf{G}} = \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{T} = \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{A}^T$ .

No intuito de tornar claro o cálculo do parâmetro de penalidade  $\rho$  iremos introduzir no sistema (A.10) um conjunto de restrições redundantes dado por  $\mathbf{x} - \mathbf{w} = \phi$ , onde  $\phi \in [0,1]^{n_{\text{inv}}}$ . Um detalhe importante é que este conjunto redundante de restrições está correto apenas porque devido ao conjunto de restrições  $\mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{x} - \mathbf{w})$  podemos garantir que  $\mathbf{x} - \mathbf{w}$  não pode assumir valores negativos, pois poderia contradizer a expressão  $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{ref}}$ , que possui o lado direito constituído de matrizes e variáveis positivas.

Além disso, defina-se as seguintes funções  $\mathcal{P}(\cdot)$  e seu dual  $\mathcal{D}(\cdot)$ , necessárias para reescrever o sistema (A.10), tem-se então:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \min & \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A} \mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{x} - \mathbf{w}) \\ & \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} \leq \mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{M} \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{m} \\ & \mathbf{x}_{\text{ref}} \in [0,1]^{n_{\text{ref}1}} \end{array} \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$\left. \begin{array}{ll} \mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \max & \pi^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{x} - \mathbf{w})) - \mu^T (\mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{x}) + \psi^T \mathbf{m} \\ \text{s.t.} & \pi^T \mathbf{A} - \mu^T \mathbf{B} + \psi^T (\mathbf{M} \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B}) \leq \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \\ & \pi \in \mathbb{R}_+^{m_{\text{ref}}} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}_+^{m_{\text{ref}}} \quad , \quad \psi \in \mathbb{R}^{m_{\text{opr}}} \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

Considere  $\widehat{V}_{\phi \in [0,1], \mathbf{w} \geq 0}$ , como sendo o valor da solução ótima da relaxação linear do sistema (A.10) quando  $\phi \in [0,1]^{n_{\text{inv}}}$  e  $\mathbf{w} \in [0,1]^{n_{\text{inv}}}$ . Recordemos que quando  $\mathbf{w} = 0$  o sistema (A.10) é igual ao sistema (A.9), sendo  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$  a solução ótima da relaxação linear e  $\widehat{V}_{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \mathbf{w} = 0}$ , seu valor.

Com relação ao parâmetro de penalidade  $\rho$ , se o seu valor for nulo podemos con-

cluir que  $\widehat{V}_{\substack{\phi \in [0,1], \\ \mathbf{w} \geq 0}} \leq \widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} = 0}}$ . Por outro lado, caso seu valor seja próximo ao infinito podemos concluir que  $\widehat{V}_{\substack{\phi \in [0,1], \\ \mathbf{w} \geq 0}} = \widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} = 0}}$ . Desta forma podemos supor que existe um valor mínimo para o parâmetro  $\rho$  tal que a solução ótima da relaxação linear do sistema (A.10) será  $(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = (\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, 0)$ .

Para determinar este valor uma alternativa seria analisar a "vizinhança" do ponto ótimo  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$  e garantir que qualquer ponto nesta região, associado a um valor estritamente positivo para  $\mathbf{w}$ , tenha um valor ótimo estritamente maior que  $\widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} = 0}}$ , ou seja, podemos escrever:

$$\widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} > 0}} > \widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} = 0}}, \quad (\text{A.13})$$

Desta forma estaríamos garantindo que o ponto  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$  e seu valor ótimo  $\widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} = 0}}$  somente pode ser obtido se o valor do parâmetro de penalidade  $\rho$  for tal que leve a um valor nulo de  $\mathbf{w}$  na solução. Segue então o sistema (A.10) reescrito com o uso da restrição redundante  $\mathbf{x} - \mathbf{w} = \phi$  e da função  $\mathcal{P}(\cdot)$ :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{V}_{\substack{\phi \in [0,1], \\ \mathbf{w} \geq 0}} &= \min && \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \rho^T \mathbf{w} + \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ &\text{s.t.} && \mathbf{H} \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \\ &&& \mathbf{x} - \mathbf{w} = \phi \\ &&& \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n_{\text{inv}}}, \mathbf{w} \in [0, 1]^{n_{\text{inv}}} \\ &&& \phi \in [0, 1]^{n_{\text{inv}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

Poderíamos trabalhar também com a formulação dual  $\mathcal{D}(\cdot)$  de  $\mathcal{P}(\cdot)$ , desta forma obteríamos um limite inferior para  $\widehat{V}_{\substack{\phi \in [0,1], \\ \mathbf{w} \geq 0}}$ , dado por:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{V}_{\substack{\phi \in [0,1], \\ \mathbf{w} \geq 0}}^L &= \min && \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \rho^T \mathbf{w} + \mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ &\text{s.t.} && \mathbf{H} \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \\ &&& \mathbf{x} - \mathbf{w} = \phi \\ &&& \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n_{\text{inv}}}, \mathbf{w} \in [0, 1]^{n_{\text{inv}}} \\ &&& \phi \in [0, 1]^{n_{\text{inv}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.15})$$

Finalmente, determinaremos um valor para o parâmetro de penalidade  $\rho$  que satisfaça a seguinte relação:

$$\widehat{V}_{\substack{\phi = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}, \\ \mathbf{w} > 0}}^L > \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} + \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} \quad (\text{A.16})$$

Por hipótese assumimos que  $\mathbf{x} - \mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$ , desta forma  $\mathbf{q}^T (\mathbf{x} - \mathbf{w}) = \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$ , ou então,  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} + \mathbf{q}^T \mathbf{w}$ . Como  $\mathbf{w} > 0$ , temos então:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} > \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} \quad (\text{A.17})$$



Com relação ao valor ótimo da função  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ , que calcula a operação ótima do sistema dado  $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ , podemos ver que se determinarmos um ponto viável para este sistema, o seu valor na função objetivo será um limite inferior para a função  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ . Considere abaixo o conjunto de restrição de (A.12) onde ambos os lado da inequação foram multiplicados por  $\mathbf{A}^T$ .

$$\pi^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mu^T \mathbf{B} \mathbf{A}^T + \psi^T \mathbf{M} \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{A}^T \leq \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{A}^T \quad (\text{A.18})$$

Como um ponto viável para este conjunto poderíamos sugerir,

$$(\pi, \mu, \psi)^T = \left( 2\mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}, \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}}, 0 \right) \quad (\text{A.19})$$

Por hipótese assumimos que  $\mathbf{x} - \mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$ , desta forma este ponto dual viável teria na função objetivo de  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  o seguinte valor,

$$2\mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{A}^T) \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} - \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{B} \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \underline{2\mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} - \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{x}} \quad (\text{A.20})$$

Com base na relação (A.16) podemos então estimar o valor do parâmetro de penalidade  $\rho$  da seguinte forma:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} + \rho^T \mathbf{w} + \left( 2\mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} - \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \mathbf{x} \right) > \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} + \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}} \quad (\text{A.21})$$

$$\rho^T \mathbf{w} > -\mathbf{q}^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}) + \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}) \quad (\text{A.22})$$

$$\rho^T \mathbf{w} > \left( -\mathbf{q}^T + \mathbf{d}^T \widehat{\mathbf{G}} \right) \mathbf{w} \quad (\text{A.23})$$

Através da última relação podemos concluir que um valor válido para o parâmetro de penalidade  $\rho$  pode ser qualquer valor maior do que a diferença entre o custo total acumulado de operação e o custo total de investimento.