



SOBRE COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS CÚBICOS

Diana Sasaki de Souza Pereira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Simone Dantas de Souza
Myriam Preissmann

Rio de Janeiro
Outubro de 2013

SOBRE COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS CÚBICOS

Diana Sasaki de Souza Pereira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof^a. Simone Dantas de Souza, D.Sc.

Prof^a. Myriam Preissmann, Ph.D.

Prof^a. Sulamita Klein, D.Sc.

Prof^a. Renata Raposo Del-Vecchio, D.Sc.

Prof. Raphael Carlos Santos Machado, D.Sc.

Prof. Danilo Artigas da Rocha, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

OUTUBRO DE 2013

Pereira, Diana Sasaki de Souza

Sobre coloração total de grafos cúbicos/Diana Sasaki de Souza Pereira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XIII, 85 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Myriam Preissmann

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 82.

1. Coloração total. 2. Snarks. 3. Grafos cúbicos. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico esta tese a todos que
acreditaram em mim.*

Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao projeto franco-brasileiro Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior/Comité Français d'Évaluation de la Coopération Universitaire et Scientifique avec le Brésil (CAPES/COFECUB), pelo suporte financeiro.

Agradeço às minhas orientadoras brasileiras Celina de Figueiredo e Simone Dantas pela dedicação, ensinamento, apoio e competência com que me orientaram durante quase 6 anos, pois acreditaram em mim não só durante o mestrado, como também neste doutorado. Além disso, são pessoas maravilhosas e de muita determinação e energia, que eu vou tentar sempre imitar!

Je remercie ma directrice de thèse en France Myriam Preissmann pour toute sa compétence, son attention, son aide, son affection et pour avoir cru en moi, pas seulement durant l'année que j'ai passé à Grenoble, mais pendant tout le doctorat, car elle a toujours été présente quand j'en ai eu besoin.

Agradeço aos coautores Gunnar Brinkmann, Giuseppe Mazzuocolo, Vinícius dos Santos e Kaio Karam, pela oportunidade do trabalho em conjunto. Esta experiência foi um grande aprendizado para mim.

Agradeço aos professores Sulamita Klein e Zoltán Szigeti por terem me indicado para a bolsa de doutorado sanduíche na França pelo projeto CAPES/COFECUB, do qual eles são coordenadores.

Agradeço aos membros da banca, além da professora Sulamita acima citada, professores Renata Del-Vecchio, Raphael Machado e Danilo Artigas por terem aceitado examinar esta tese. Agradeço aos meus professores pelo conhecimento que me proporcionaram durante minha trajetória.

Agradeço aos membros de minha família por acreditarem em mim, por estarem sempre presentes me apoiando e amando, especialmente minha mãe Carmem, minha avó Regina, meu irmão João Paulo, minha tia Lúcia e meus tios queridos.

Agradeço aos meus amigos brasileiros e aos novos amigos estrangeiros, por todos os momentos que vivemos juntos, que de alguma forma me ajudaram neste desafio.

Por fim, também agradeço aos amigos do LAC, que sabem bem como é a vida de doutorando e que acreditam, assim como eu, que este desafio será recompensado. E é com este pensamento que desejo uma vida profissional realizada para cada um de

vocês. Em especial agradeço ao Hugo Nobrega, por ser o meu “Hugo tradutor” nos momentos de sufoco e por estar sempre presente me ajudando e topando os desafios comigo!

Muito obrigada a todos! Merci beaucoup a tous !

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS CÚBICOS

Diana Sasaki de Souza Pereira

Outubro/2013

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Simone Dantas de Souza
Myriam Preissmann

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo cúbico é dito Tipo 1 se este possui uma coloração total com 4 cores, e Tipo 2 caso contrário; neste caso, sabemos que este possui uma coloração total com 5 cores. Uma coloração total é equilibrada se as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem em no máximo 1. Similarmente, sabe-se que todo grafo cúbico possui uma coloração total equilibrada usando no máximo 5 cores.

O estudo de coloração total de grafos cúbicos abordado nesta tese foi motivado pela rica literatura existente e principalmente pela questão proposta por Cavicchioli et al. em 2003 de encontrar, caso exista, o menor snark (grafo cúbico não 3-aresta-colorível com propriedades adicionais de conectividade) com cintura pelo menos 5 que seja Tipo 2. De um modo geral, o principal objetivo desta tese é confirmar a dificuldade desta questão, através de resultados teóricos e computacionais que sugerem respostas positivas e negativas para a existência de tal grafo, e através da formulação de duas outras questões relacionadas. As duas novas questões abordam a não 4-total-colorabilidade dos grafos cúbicos com cintura pelo menos 5, uma considerando a coloração total e a outra considerando a coloração total equilibrada.

Contribuímos com as três questões acima, exibindo famílias de grafos cúbicos que indicam que as questões devem possuir resposta negativa. Por outro lado, apresentamos famílias de grafos cúbicos não 4-total-coloráveis, como pistas de que as questões devem possuir resposta positiva. Além disso, provamos a NP-completude do problema de determinar se um grafo cúbico bipartido possui uma 4-coloração-total equilibrada e analisamos propriedades gerais de coloração total, incluindo caracterizações de grafos cúbicos Tipo 1 e alguns exemplos pertinentes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ON TOTAL COLORING OF CUBIC GRAPHS

Diana Sasaki de Souza Pereira

October/2013

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Myriam Preissmann

Department: Systems Engineering and Computer Science

A cubic graph is Type 1 if it has a total coloring with 4 colors, and Type 2 otherwise; in this case, it is known that it has a total coloring with 5 colors. A total coloring is equitable if the cardinalities of any two color classes differ by at most 1. Similarly, it is known that every cubic graph has an equitable total coloring with at most 5 colors.

The study of total coloring of cubic graphs considered in this thesis was motivated by the rich existing literature, especially by the question proposed by Cavicchioli et al. in 2003 of finding, if one exists, the smallest snark (a cubic, non 3-edge-colorable graph with additional connectivity properties) of girth at least 5 that is Type 2. In general, the main goal of this thesis is to confirm the difficulty of this question, through theoretical and computational results suggesting positive and negative answers to the question of whether such a graph exists, and through the formulation of two other related questions. These two new questions concern the non-4-total-colorability of cubic graphs with girth at least 5, one considering the total coloring and the other considering the equitable total coloring.

We contribute to the three questions above, exhibiting families of cubic graphs that indicate that the questions may have a negative answer. On the other hand, we present families of cubic graphs that are not 4-total-colorable, suggesting that the questions may have a positive answer. Moreover, we prove that the problem of determining if a cubic bipartite graph has an equitable 4-total-coloring is NP-complete and we analyze general properties of total coloring, including characterizations of Type 1 cubic graphs and some relevant examples.

Sumário

Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
1.1 Definições e notações	4
1.2 Primeiros resultados	9
1.2.1 As famílias Loupekine e Goldberg	9
1.2.2 Relaxando um pouco	14
2 Os primeiros snarks Tipo 2	23
2.1 Investigando famílias de grafos cúbicos com membros Tipo 2	23
2.2 Ferramenta importante: Coloração de arestas forte	27
2.3 O princípio da construção: os tijolos	28
2.4 Encontrando tijolos Classe 2	29
2.5 Encontrando tijolos Tipo 2	34
2.6 Os snarks Tipo 2	36
3 E a busca continua	38
3.1 Grafos cúbicos Tipo 2	38
3.2 Grafos de Petersen generalizados Tipo 1	43
3.3 Snarks Tipo 1	50
4 A coloração total equilibrada	56
4.1 Número cromático de coloração total equilibrada igual a 5	57
4.2 Número cromático de coloração total equilibrada igual a 4	59
4.3 O problema é NP-completo	65
5 Um pouco sobre a Conjectura de Berge-Fulkerson	70
6 Conclusão e trabalhos futuros	74
6.1 Para o futuro	76
Referências Bibliográficas	78

A	Sobre a parte computacional	83
A.1	Aplicada no Capítulo 2	83
A.2	Aplicada nos Capítulos 3 e 4	84
A.2.1	Complexidade de tempo	84
A.2.2	Correção do programa	85

Lista de Figuras

1.1	Uma ilustração do poema “The Hunting of the Snark”	2
1.2	Grafo de Petersen com uma coloração total com 4 cores.	2
1.3	Exemplo de um semigrafo com 4 vértices.	5
1.4	Exemplo de um semigrafo e seu grafo subjacente.	5
1.5	Grafo cúbico ciclicamente 2-aresta conexo e com conectividade cíclica de aresta 2.	8
1.6	Uma representação da \mathcal{LG} -construção (exemplo com $k = 1$).	10
1.7	As duas maneiras de fazer junção dos pares de duas cópias de P' são isomorfas.	11
1.8	Os dois snarks de Loupekine para $k = 1$	12
1.9	As 4-colorações-totais de P' do tipo $c(1, 2), c(2, 4), c(3, 2), c(2, 3), c(4, 2)$	13
1.10	Duas 4-colorações-totais obtidas pelo Corolário 5.	14
1.11	Grafos Tipo 2 com grau máximo 3.	15
1.12	Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 1.	15
1.13	Grafo cúbico Tipo 2 com conectividade cíclica de aresta 2 tal que R e H são Tipo 1.	16
1.14	Uma ilustração dos elementos relevantes da 2-construção.	16
1.15	Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 2 que são Classe 1.	18
1.16	Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 2 que são Classe 2.	18
1.17	Ilustração dos elementos relevantes da 3-construção.	19
1.18	Exemplo do grafo cúbico Tipo 2 obtido pela 3-construção de duas cópias do grafo $G(3, 1)$ que é Tipo 1.	19
1.19	Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 3 que são Classe 1.	20
1.20	Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 3 que são Classe 2.	20
1.21	Ilustração dos elementos relevantes do produto interno.	21

1.22	Exemplo de grafo cúbico Tipo 2 obtido pelo produto interno de duas cópias do grafo $G(3, 1)$ que é Tipo 1.	21
1.23	Temos exemplos de grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 1, 2 e 3 de cada Classe e Tipo, e todos possuem triângulos ou quadrados. Vamos tentar completar esta tabela no próximo capítulo, apresentando exemplos de grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 4 que sejam Classe 2 e Tipo 2, ou seja, snarks Tipo 2. . . .	22
2.1	Os três primeiros membros da família extensão da 5-escada. Membros E_1 e E_2 são Tipo 2 [27] e membro E_3 é Tipo 1.	24
2.2	Os três primeiros membros da família extensão da 4-escada de Möbius que são Tipo 2 [27].	24
2.3	Esquema da 4-coloração-total para os grafos da família extensão da 5-escada E_{4i} , E_{4i+1} , E_{4i+2} e E_{4i+3} , $i \geq 1$	25
2.4	Esquema da 4-coloração-total para os grafos da família extensão da 4-escada de Möbius.	26
2.5	Tijolo que não é tijolo-direto.	30
2.6	Uma ilustração do produto interno de S_1 e S_2	31
2.7	Um dos menores tijolos Classe 2.	32
2.8	Snarks $BL_2S_0^1$ e $BL_1S_1^1$ com uma 4-coloração-total cada.	33
2.9	Os dois tijolos-diretos e o tijolo-aresta obtidos a partir do grafo de Petersen e usados na construção dos snarks $BL_iS_k^j$'s, com uma 4-coloração-total cada.	33
2.10	O tijolo Tipo 2 B^*	34
2.11	Figura auxiliar para encontrar uma 4-coloração de arestas forte de S	34
2.12	Uma 4-coloração de arestas forte aplicada à aresta x_2x_5 de D	35
2.13	Um dos 11 menores snarks Tipo 2 obtidos pela junção de tijolos das Figuras 2.7 e 2.10.	37
3.1	Grafos de Petersen generalizados que são Tipo 2: $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$	42
3.2	Grafo $K'_{3,3}$	43
3.3	As 4-colorações de arestas forte Φ_{2k} e Φ_{2k-1} para o caso k par. As cores das semiarestas estão em negrito.	46
3.4	As 4-colorações de arestas forte φ_{2k} e φ_{2k-1} para o caso k ímpar. As cores das semiarestas estão em negrito.	47
3.5	Aplicação do Teorema 34 para obter uma 4-coloração de arestas forte do grafo $G(11, 3)$	48
3.6	Aplicação do Teorema 36 para obter uma 4-coloração de arestas forte do $G(12, 5)$ a partir de uma 4-coloração de arestas forte do $G(4, 1)$. O grafo $G(12, 5)$ não é coberto pelo Teorema 34.	49

3.7	Os dois semigrafos S e B usados na construção.	51
3.8	4-colorações de arestas forte $\phi_1, \phi_2, \varphi_1$, e φ_2	52
3.9	Semigrafos usados na construção.	53
3.10	Exemplos das 4-colorações-totais C^1, C^2, C^3	54
3.11	Um esquema da superposição abordada.	55
4.1	Grafo tal que $\chi'' = \Delta + 1 < \chi_e'' = \Delta + 2$ [22].	56
4.2	Semigrafo cúbico K' gerado a partir do $K_{2,3}$	57
4.3	Dois exemplos de grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5.	59
4.4	Uma ilustração das 4-colorações-totais de BF_{2i+1} e BS_{2i+1} [53].	62
4.5	As duas 4-colorações de arestas forte Φ_4 e Φ_5	64
4.6	As quatro 4-colorações de arestas forte $\varphi_3, \varphi'_3, \varphi_4$ e φ_9	65
4.7	Semigrafos H' e D'	66
4.8	Semigrafo R' (as quatro semiarestas estão em negrito).	66
4.9	Semigrafos H' e D' com as 4-colorações-totais H_1, H_2 e D_1, D_2 , resp. A figura também apresenta os vértices de ligação, ou seja, os outros vértices extremos das semiarestas, para facilitar a análise da coloração.	67
4.10	A 4-coloração-total equilibrada R_1 de R'	69
4.11	Grafo G e esquema do grafo G^R cúbico e bipartido com uma 4- coloração-total equilibrada obtida a partir de uma 4-coloração de arestas de G	69
5.1	Blocos utilizados na construção dos n -SemiBlowups, com a rotulação para obter a dupla cobertura em seis emparelhamentos perfeitos.	72
5.2	Blocos utilizados na construção dos n -Blowups, com a rotulação para obter a dupla cobertura em seis emparelhamentos perfeitos.	72
5.3	Snarks 5-SemiBlowup e 6-SemiBlowup satisfazem a conjectura.	73
5.4	Snarks 5-Blowup e 6-Blowup satisfazem a conjectura.	73
6.1	Até agora, conhecemos somente grafos cúbicos Tipo 2 que possuem quadrados ou triângulos.	76
6.2	Até agora, conhecemos somente dois grafos de Petersen generalizados que são Tipo 2.	76

Capítulo 1

Introdução

Em 1852, o matemático Francis Guthrie propôs a famosa *Conjectura das Quatro Cores*, afirmando que todo mapa geográfico podia ser colorido com no máximo 4 cores. Mais tarde, na busca de uma prova ou de um contraexemplo para esta conjectura, os *grafos cúbicos*, foco deste trabalho, desempenharam um papel importante.

Em 1880, Tait [62] provou que a Conjectura das Quatro Cores era equivalente à afirmação de que todo grafo cúbico planar sem ponte possui índice cromático 3 (o leitor encontrará as principais definições e notações desta tese na Seção 1.1). A procura por um contraexemplo para a conjectura motivou o estudo dos grafos cúbicos sem ponte com índice cromático 4, que foram mais tarde batizados de *Snarks*. Este nome foi proposto por Gardner [24] baseado no poema “The Hunting of the Snark” de Lewis Carroll, no qual snarks eram animais difíceis de serem encontrados. A Figura 1.1 apresenta uma ilustração do poema.

A importância dos snarks se deve ao fato de que certas conjecturas teriam snarks como contraexemplos minimais, como por exemplo a Conjectura da dupla cobertura cíclica [57, 60], a Conjectura de Berge-Fulkerson [23, 32] e a Conjectura dos 5-fluxos de Tutte [63]. Além disso, oito conjecturas publicadas na literatura foram recentemente refutadas com a utilização dos snarks [6].

Após muitos anos, mais precisamente em 1976, a Conjectura das Quatro Cores foi provada por Appel e Haken com o uso do computador [1]. O famoso *Teorema das Quatro Cores* é referência na área de Teoria dos Grafos.

Até hoje, o problema de coloração de grafos é bastante estudado por pesquisadores da área. Este problema é desafiador e modela problemas reais de conflito. Nesta tese, abordaremos o problema de *coloração total* de grafos cúbicos.

De uma forma simplificada, um grafo consiste em um conjunto de vértices alguns dos quais ligados por arestas. Um grafo cúbico é aquele em que todos os vértices possuem três arestas incidentes e neste caso, todos os vértices possuem grau 3. Uma coloração total de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas do grafo de forma que elementos adjacentes e incidentes possuam cores diferentes. Veja

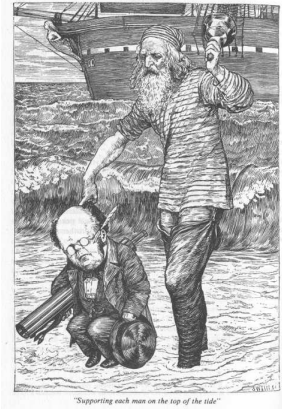


Figura 1.1: Uma ilustração do poema “The Hunting of the Snark”.

um exemplo de um grafo cúbico com uma coloração total na Figura 1.2.

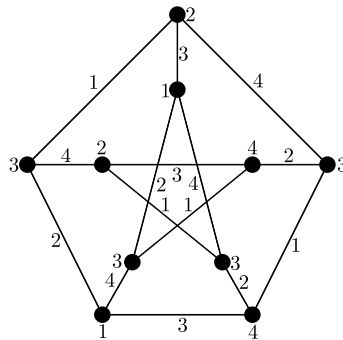


Figura 1.2: Grafo de Petersen com uma coloração total com 4 cores.

Dado um inteiro k , decidir se G possui uma coloração total com k cores é NP-completo (mais detalhes sobre os problemas NP-completos podem ser vistos em [61]) mesmo para grafos cúbicos bipartidos [49]. Assim, geralmente estudamos este problema para classes de grafos específicas. Para este problema na classe de grafos cúbicos, sabe-se que o menor número de cores, chamado de *número cromático total*, é 4 ou 5 [48]. Grafos cúbicos com número cromático total igual a 4 são chamados de *Tipo 1* e grafos cúbicos com número cromático total igual a 5 são chamados de *Tipo 2*.

É fácil ver que o número cromático total de um grafo cúbico é pelo menos 4, pois precisamos de três cores diferentes para cada aresta incidente a um vértice v e mais uma cor para v . Para mostrar que um grafo cúbico é Tipo 1, basta exibir uma coloração total com 4 cores. Porém, para mostrar que um grafo cúbico é Tipo 2, precisamos mostrar que este não possui nenhuma coloração total com apenas 4 cores. Sendo assim, encontrar grafos cúbicos Tipo 2 é um pouco mais complicado.

Motivados pela Questão 1 proposta por Cavicchioli et al. [15] em 2003 de encontrar, caso exista, o menor snark que seja Tipo 2, começamos um estudo sobre a

coloração total dos snarks. Existem diversas definições de snark na literatura. Para Cavicchioli et al., snarks são grafos cúbicos ciclicamente 4-aresta-conexos com índice cromático 4 e com cintura pelo menos 5. Em [58], snarks são simplesmente grafos cúbicos com índice cromático 4. Estas diversas definições se devem ao fato de que alguns autores incluem os snarks “triviais” e outros não. Sem entrar em detalhes, um snark é dito *trivial* se conseguimos construí-lo a partir de um snark menor. Na Seção 1.2.2 apresentamos as construções de snarks triviais definidas por Isaacs [31]. Nesta tese, snarks são grafos cúbicos com índice cromático 4 e ciclicamente 4-aresta-conexos, e portanto com cintura pelo menos 4.

Questão 1. (*Cavicchioli et al. [15]*) *Existe snark Tipo 2 com cintura pelo menos 5?*

Neste primeiro capítulo apresentamos as definições essenciais para esta tese, bem como os resultados mais importantes sobre o tema encontrados na literatura e algumas notações. Ainda neste capítulo, começamos a apresentar os resultados originais desta tese, vendo algumas famílias de snarks Tipo 1 que sugerem uma resposta negativa para a Questão 1 e também o que contribuímos sobre coloração total de grafos cúbicos quando permitimos índice cromático 3 e 4, e conectividade cíclica de aresta 1, 2 e 3. Assim, quando relaxamos as condições de ser ciclicamente 4-aresta-conexo e possuir índice cromático 4, conseguimos obter grafos cúbicos Tipo 1 e Tipo 2. Isto esclarece a definição de snark abordada nesta tese.

No Capítulo 2, apresentamos os inéditos snarks Tipo 2, o que responde parcialmente a questão de Cavicchioli et al. já que os snarks que construímos possuem cintura igual a 4. No Capítulo 3, ampliamos o estudo dos grafos cúbicos tanto para Tipo 2 com cintura pequena, quanto para Tipo 1 com cintura pelo menos 5. Acreditamos que a dificuldade de responder a questão de Cavicchioli et al. está relacionada com a cintura do grafo. Mais precisamente, entendemos melhor qual a relação entre o número cromático total e a cintura de um grafo, e propomos uma questão que generaliza a Questão 1. No Capítulo 4, iniciamos o estudo de uma coloração total mais restrita, a coloração total equilibrada. Considerando a cintura do grafo, fazemos uma análise análoga à feita com a coloração total, propomos outra questão relacionada com a Questão 1, e apresentamos resultados que sugerem respostas positivas e negativas. O Capítulo 5 é dedicado a um breve estudo sobre outra conjectura famosa envolvendo grafos cúbicos, a Conjectura de Berge-Fulkerson, apresentando uma evidência positiva para esta conjectura. O Capítulo 6 apresenta as conclusões finais e os trabalhos futuros. Por fim, encerramos esta tese com o Apêndice A, que apresenta uma discussão sobre os métodos computacionais utilizados para a obtenção de alguns resultados que serão apresentados.

A Questão 1 foi proposta por Cavicchioli et al. com base em resultados computacionais. O principal objetivo desta tese é confirmar a dificuldade da Questão 1,

através de resultados teóricos que sugerem respostas positivas e negativas para tal questão, da formulação de duas outras questões relacionadas, e de resultados computacionais que estendem os de Cavicchioli et al.

Esta tese incorpora os resultados desenvolvidos com as orientadoras brasileiras professora Celina Miraglia Herrera de Figueiredo (professora titular da COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro) e professora Simone Dantas de Souza (professora adjunta da UFF, Universidade Federal Fluminense), com a orientadora estrangeira professora Myriam Preissmann (professora e diretora de pesquisa do CNRS no Laboratório G-SCOP em Grenoble na França), com os pesquisadores estrangeiros professor Gunnar Brinkmann (professor da Universidade de Gante na Bélgica) e Giuseppe Mazzuocolo (pós-doutorando no Laboratório G-SCOP em Grenoble na França), e também com os pesquisadores brasileiros professor Vinícius Fernandes dos Santos (professor adjunto da UERJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro) e Kaio Karam (mestrando na Unicamp, Universidade Estadual de Campinas).

Este doutorado teve início em Março de 2010 sob orientação das professoras Celina Miraglia Herrera de Figueiredo e Simone Dantas de Souza, com período de doutorado sanduíche em Grenoble com duração de um ano sob orientação da professora Myriam Preissmann.

Os resultados do Capítulo 1 foram publicados na “Discrete Applied Mathematics” em Maio de 2013 [53], e parte deles foram apresentados no LAGOS’11 com resumo estendido publicado no “Electronic Notes of Discrete Mathematics” [51] e no LawCliques 2010 com resumo estendido publicado na Matemática Contemporânea [52]. O Capítulo 2 engloba os resultados que foram submetidos para a “Discrete Applied Mathematics” em Março de 2013 [10] e apresentados no CTW 2012, e também os resultados que foram apresentados no LawCliques 2012 com resumo estendido aceito em Agosto de 2013 para publicação na Matemática Contemporânea [54]. Os Capítulos 3 e 4 incluem resultados que foram submetidos para a “Discrete Applied Mathematics” em Setembro de 2013 [55] e apresentados no CTW 2013. E finalmente, o Capítulo 5 inclui um resultado apresentado em outro trabalho no CTW 2013 [35].

Após esta introdução sobre o tema abordado, a partir de agora apresentamos o que fizemos nesta “caça aos snarks no mundo da coloração total”.

1.1 Definições e notações

Esta seção é dedicada às definições e notações principais desta tese. Ao longo do texto, apresentaremos mais algumas definições, notações e conceitos que serão utilizados a partir de um determinado ponto da tese ou somente em um capítulo ou

seção. As definições foram extraídas das principais referências sobre coloração total, snarks e grafos cúbicos, e também do livro [4].

Um *semigrafo* é uma tripla $G = (V(G), E(G), S(G))$, onde $V(G)$ é o conjunto de vértices de G , $E(G)$ é o conjunto de arestas possuindo dois vértices extremos em $V(G)$, e $S(G)$ é o conjunto de *semiarestas* possuindo um vértice extremo em $V(G)$. Em alguns momentos da tese, $S(G)$ incluirá também *semiarestas isoladas*, aquelas que não possuem vértices extremos. Quando não houver ambiguidade, escreveremos simplesmente V , E ou S . A Figura 1.3 apresenta um semigrafo.

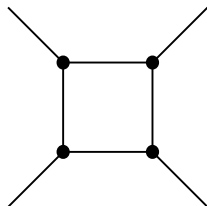


Figura 1.3: Exemplo de um semigrafo com 4 vértices.

Escrevemos arestas que possuem extremos v e w como vw e semiarestas com um extremo v como $v\cdot$. Quando um vértice v é um extremo de $e \in E \cup S$, dizemos que v e e são *incidentes*. Dois elementos de $E \cup S$ incidentes ao mesmo vértice, bem como dois vértices incidentes a uma mesma aresta, são chamados de *adjacentes*. A *junção* de duas semiarestas $a\cdot$ e $b\cdot$ é a aresta ab .

Um *grafo* G é um semigrafo sem semiarestas. Neste caso, denotamos como $G = (V, E)$. Dado um semigrafo $G = (V, E, S)$, chamamos o grafo (V, E) de *grafo subjacente de G* . A Figura 1.4 apresenta um semigrafo e seu grafo subjacente, que é neste caso, o grafo consistindo em um ciclo sem corda de tamanho 4.

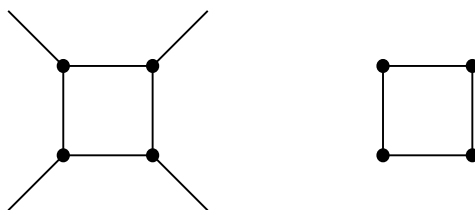


Figura 1.4: Exemplo de um semigrafo e seu grafo subjacente.

A partir de agora, todas as definições para semigrafos que não exigem a existência de semiarestas, também valem para grafos.

Seja $G = (V, E, S)$ um semigrafo. O *grau* $d(v)$ de um vértice v de G é o número de elementos de $E \cup S$ que são incidentes a v . Dizemos que G é *d -regular* se o grau de todos os vértices é igual a d . Nesta tese, estamos interessados em grafos e semigrafos 3-regulares, também chamados respectivamente de *grafos cúbicos* e *semigrafos cúbicos*. Dado um grafo G de grau máximo 3 (usaremos essencialmente

grafos com grau mínimo 2), o semigrafo obtido a partir de G pela adição de $3 - d(v)$ semiarestas com vértice extremo v , para cada vértice v de G , é dito o *semigrafo cúbico gerado a partir de G* .

Para $k \in \mathbb{N}$, uma k -coloração de vértices de G é uma função $C^V: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, tal que $C^V(x) \neq C^V(y)$ quando x e y são dois vértices adjacentes. O número cromático de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor k tal que G possui uma k -coloração de vértices.

Similarmente, uma k -coloração de arestas de G é uma função $C: E \cup S \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, tal que $C(e) \neq C(f)$ quando e e f são elementos adjacentes de $E \cup S$. O índice cromático de G , denotado por $\chi'(G)$, é o menor k tal que G possui uma k -coloração de arestas. Pelo Teorema de Vizing [65], temos que $\chi'(G)$ é igual a $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G . Se $\chi'(G) = \Delta(G)$, então G é dito *Classe 1*, caso contrário G é dito *Classe 2*. Note que o Teorema de Vizing foi originalmente enunciado para grafos bem como a classificação acima, porém é fácil observar que estes também valem para semigrafos.

Uma k -coloração-total de G é uma função $C^T: V \cup E \cup S \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, tal que

- (a) $C^T|_V$ é uma coloração de vértices,
- (b) $C^T|_{E \cup S}$ é uma coloração de arestas,
- (c) $C^T(e) \neq C^T(v)$ quando $e \in E \cup S$, $v \in V$, e e é incidente a v .

O número cromático total de G , denotado por $\chi''(G)$, é o menor k tal que G possui uma k -coloração-total. Claramente $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$. A Conjectura da Coloração Total (TCC) [2, 65] afirma que $\chi''(G) \leq \Delta + 2$. Um grafo é dito *Tipo 1* ou *Tipo 2* se o seu número cromático total é $\Delta + 1$ ou $\Delta + 2$, respectivamente. A TCC foi provada para os grafos cúbicos [48, 64] e uma recente prova sucinta pode ser vista em [20]. Assim, um grafo cúbico é *Tipo 1* ou *Tipo 2* se o seu número cromático total é 4 ou 5, respectivamente. Assim como para coloração de arestas, é fácil observar que o resultado e a classificação acima também valem para semigrafos.

O problema de decidir se um grafo é Tipo 1 foi provado ser NP-completo mesmo para grafos cúbicos bipartidos [42, 49]. Acreditamos que o problema de determinar se um snark é Tipo 1 é NP-completo. Existem poucas classes de grafos para as quais o número cromático total foi determinado. Exemplos incluem os ciclos [70], os grafos completos [70], os grafos bipartidos completos [70], e algumas grades (em inglês “grids”) [13].

Um *triângulo* é um grafo consistindo em um ciclo de tamanho 3 (ou o grafo completo com três vértices), um *quadrado* é um grafo consistindo em um ciclo sem corda de tamanho 4 e um *s-quadrado* é um semigrafo cúbico gerado a partir de um

quadrado (Figura 1.4). O K_4 é o grafo completo com 4 vértices e o $K_{3,3}$ é o grafo cúbico bipartido completo com 6 vértices.

Nos Capítulos 3 e 4, apresentamos resultados de coloração total dos grafos de Petersen generalizados, uma classe de grafos cúbicos bastante conhecida, introduzida por Watkins em [68]. Seguindo a notação de Watkins, o grafo de Petersen generalizado $G(n, k)$, $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n - 1$, é o grafo com conjunto de vértices $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $\{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : 0 \leq i \leq n - 1\}$, com índices tomados módulo n . Claramente, o grafo $G(n, k)$ e o grafo $G(n, n - k)$ são isomorfos, assim os grafos de Petersen generalizados são usualmente definidos para $k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. O grafo $G(5, 2)$ é o conhecido grafo de Petersen que é Tipo 1 e é o único grafo Classe 2 desta classe de grafos cúbicos [14]. Grafos $G(n, 1)$ são Tipo 1 com exceção do grafo $G(5, 1)$ [13, 18].

O seguinte resultado é bem conhecido e usado na literatura sobre coloração de arestas de grafos cúbicos.

Lema 1 (Lema de Paridade - Blanuša, 1946 [3] e Descartes, 1948 [19]). *Seja G um semigrafo cúbico contendo exatamente k semiarestas, seja C uma 3-coloração de arestas de G , e sejam k_1, k_2, k_3 as quantidades de semiarestas de G coloridas respectivamente com cores 1, 2, 3 por C . Temos que*

$$k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k \pmod{2},$$

ou seja, k, k_1, k_2, k_3 possuem a mesma paridade.

No resto da seção, assumimos que $G = (V, E)$ é um grafo.

Um *emparelhamento* de um grafo G é um conjunto de arestas, duas a duas não adjacentes. Um emparelhamento é *perfeito* se todo vértice de G é incidente a uma aresta do emparelhamento. Dizemos que um emparelhamento é *maximal* se este não pode ser estendido para um emparelhamento maior (todo emparelhamento perfeito é maximal). Um *conjunto independente* de G é um conjunto de vértices, dois a dois não adjacentes. Sabemos que um emparelhamento é maximal se e somente se o conjunto de vértices não cobertos por este emparelhamento constitui um conjunto independente.

A *cintura* de G é o tamanho do menor ciclo contido em G , ou se G não possui ciclos, a cintura é infinita. Um *subgrafo* de G é qualquer grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Um *subgrafo induzido* de G é qualquer subgrafo $G' = (V', E')$ tal que E' é igual ao conjunto de arestas de G com os dois extremos em V' , denotamos este por $G[V']$. Dado um grafo H , o grafo G é dito ser *livre de H* se nenhum dos seus subgrafos induzidos é isomorfo a H .

Seja A um subconjunto próprio de V . Denotamos por $\omega_G(A)$, o conjunto de arestas de G com um extremo em A e o outro em $V \setminus A$. Um subconjunto F de arestas de G é um *corte de arestas* se existe um subconjunto próprio não vazio A de V tal que $F = \omega_G(A)$ e dizemos que F é *induzido por A* . Se G possui um corte de arestas de tamanho 1, dizemos que G possui uma *ponte*. Se cada um dos $G[A]$ e $G[V \setminus A]$ possui pelo menos um ciclo, então $\omega_G(A)$ é um *c-corte*. Sabe-se que todo corte de arestas de tamanho 1 ou 2, ou ainda de tamanho 3, a menos do caso trivial, em um grafo cúbico é um c-corte [46]. Dizemos que G é *ciclicamente k -aresta-conexo* se este não possui um c-corte de cardinalidade menor que k . Se G possui pelo menos um c-corte, a *conectividade cíclica de aresta* de G é a cardinalidade do menor c-corte de G . A Figura 1.5 apresenta um exemplo de grafo ciclicamente 2-aresta-conexo e com conectividade cíclica de aresta 2. A seguinte observação é relevante.

Observação 2. *Um grafo cúbico é ciclicamente 4-aresta-conexo se e somente se cada um dos seus cortes de arestas de cardinalidade menor que 4 é induzido por um vértice.*

Demonstração. Por definição, um grafo cúbico é ciclicamente 4-aresta-conexo se este não possui c-corte de cardinalidade menor que 4. Assim, este não possui c-corte de tamanho 1 nem 2. Além disso, sabe-se que dentre os cortes de arestas de tamanho 3, o único que não é c-corte é aquele induzido por um vértice [46]. A volta é imediata. \square

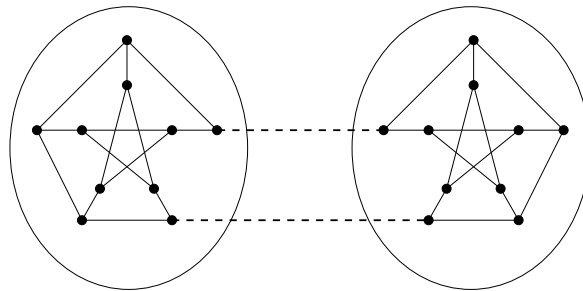


Figura 1.5: Grafo cúbico ciclicamente 2-aresta conexo e com conectividade cíclica de aresta 2.

Agora estamos preparados para apresentar a definição de snark que abordaremos nesta tese. Um *snark* é um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo Classe 2. Alguns autores utilizam outras definições: em [58], snarks são grafos cúbicos Classe 2, em [71] é adicionada a esta última, também a condição de não possuir ponte. Porém, o mais comum é definir os snarks como grafos cúbicos ciclicamente 4-aresta-conexos Classe 2, com a propriedade adicional de serem livres de quadrado (note que para um grafo cúbico, ser ciclicamente 4-aresta-conexo implica ser livre de triângulo). Esta última é a definição utilizada por Cavicchioli et al. [15].

Sem entrar em detalhes, um snark é dito *trivial* se conseguimos construí-lo a partir de um snark menor. Geralmente, um snark é trivial se este possui conectividade cíclica de aresta 2 ou 3. Como todo grafo cúbico com ponte é Classe 2, estes também são considerados triviais de serem encontrados. Além disso, para alguns autores, os snarks que possuem quadrado também são triviais. Porém, a trivialidade dos c -cortes e do quadrado não é a mesma (veja [45] e [46] para mais detalhes). Na verdade, enquanto os snarks com conectividade cíclica de aresta 2 ou 3 podem ser obtidos a partir de snarks menores através de construções apresentadas em [31], os snarks com quadrados também podem ser construídos a partir de snarks menores, porém sem construção associada. Por isso, Isaacs e Gardner sugeriram que a ideia de proibir quadrados era opcional.

A noção de trivialidade dos snarks foi definida no contexto de coloração de arestas. Da mesma forma, podemos nos perguntar se esta noção pode ser considerada, também, no contexto de coloração total. Não é possível a partir de um snark trivial que possua uma 4-coloração-total, construir um snark menor preservando a 4-coloração-total do grafo original ou vice-versa [50]. No contexto de coloração total, nem snarks com quadrados nem com conectividade cíclica de aresta pequena parecem ser triviais. Na próxima seção, analisamos as construções dos snarks triviais com respeito à coloração total: dentre os grafos cúbicos com c -corte menor que 4, existem grafos Tipo 1 e Tipo 2, sendo estes Classe 1 ou Classe 2. Porém, quando consideramos grafos cúbicos ciclicamente 4-aresta-conexos Classe 2 (snarks) mesmo contendo quadrados, não conseguimos construir exemplos facilmente.

1.2 Primeiros resultados

No primeiro momento do doutorado, aprimoramos um resultado obtido no mestrado [50]. Começamos esta seção provando que todos os membros das famílias Loupekine e Goldberg são Tipo 1. Estes resultados nos sugerem que a Questão 1 possui resposta negativa.

Porém, mesmo com todas as pistas, ainda sabemos muito pouco sobre o número cromático total destes grafos. Precisamos investigar qual é a verdadeira dificuldade de se encontrar o snark Tipo 2. Assim, na segunda parte desta seção, relaxamos as condições de conectividade cíclica de aresta e índice cromático para ver o que acontece. Neste caso, conseguimos exibir grafos cúbicos Tipo 2.

1.2.1 As famílias Loupekine e Goldberg

A seguir, apresentamos a construção das famílias Loupekine e Goldberg, e determinamos que o número cromático total de todos os seus membros é 4.

A LG-construção Dados $2k + 1$ grafos cúbicos $G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}$ ($k \geq 1$) e um semigrafo Z com $(2k + 1)$ semiarestas, denotamos por $\mathcal{LG}(G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}, Z)$ o conjunto de grafos cúbicos obtido da seguinte forma (Figura 1.6):

- Em cada G_i ($1 \leq i \leq 2k+1$), escolha um caminho sem corda com 3 vértices xyz (este caminho sempre existe em um snark, pois estes não possuem triângulos). Denotamos por G'_i o semigrafo obtido a partir de G_i pela remoção deste caminho. Em G'_i , as duas semiarestas incidentes aos vizinhos (em G_i) de x , respectivamente z , são chamadas de *pares*, e a semiaresta incidente ao vizinho (em G_i) de y é chamada de *solitária*.
- Insira os G'_i 's formando um “ciclo” através da junção de um par de G'_i com um par de G'_{i-1} e da junção do outro par de G'_i com um par de G'_{i+1} (onde $G'_0 = G'_{2k+1}$ e $G'_{2k+2} = G'_1$).
- Faça a junção das $(2k + 1)$ semiarestas solitárias deste novo semigrafo com as $(2k + 1)$ semiarestas de Z .

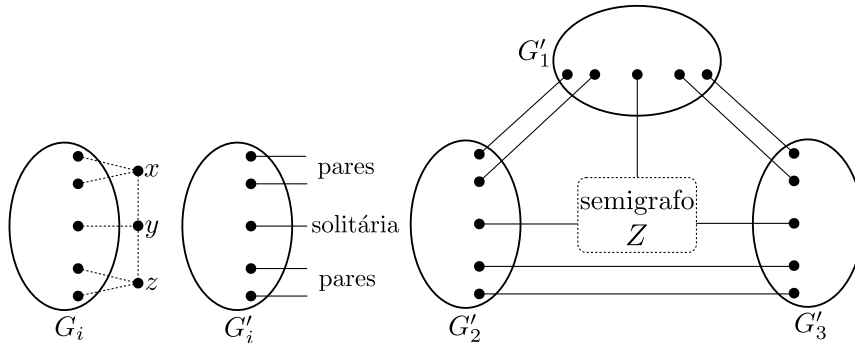


Figura 1.6: Uma representação da \mathcal{LG} -construção (exemplo com $k = 1$).

O teorema a seguir é bem conhecido na literatura dos snarks.

Teorema 3. *Se $G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}$ ($k \geq 1$) são grafos cúbicos Classe 2, para qualquer semigrafo Z com $(2k + 1)$ semiarestas, todos os grafos em $\mathcal{LG}(G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}, Z)$ são Classe 2.*

Além disso, se $G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}$ são snarks e Z é tal que, para todo $W \subseteq V(Z)$, se $Z[W]$ contém um ciclo então existem pelo menos 4 arestas ou semiarestas de Z com exatamente um extremo em W , então todos os grafos em $\mathcal{LG}(G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}, Z)$ são snarks.

Demonstração. Assuma que um grafo G em $\mathcal{LG}(G_1, G_2, \dots, G_{2k+1}, Z)$ seja Classe 1 e seja c uma 3-coloração de arestas de G . Então c induz uma 3-coloração de arestas de cada semigrafo G'_i com 5 semiarestas, usado na construção de G . Pelo Lema de

Paridade, esta coloração é tal que uma cor aparece três vezes e as outras duas cores aparecem somente uma vez nas semiarestas de G'_i . É fácil verificar que, se G_i não é 3-aresta colorível, um par de semiarestas de G'_i deve ser unicolorido por c e o outro não. Então no “ciclo” de G , as cores das duas arestas entre dois G'_i 's consecutivos devem ser alternadamente iguais e diferentes. Porém o “ciclo” é ímpar e isto não é possível, contradição. Assim, conclui-se que G não possui 3-coloração de arestas.

Para provar a segunda afirmação, note que se todos os G_i 's são ciclicamente 4-aresta-conexos, pela configuração dos G'_i 's na construção apresentada, a única forma de existir um c -corte menor do que 4 em G é se este c -corte estiver completamente contido em Z . Porém por hipótese, isto não é possível. \square

Dois famílias de snarks bem conhecidas são obtidas pela construção apresentada no Teorema 3. Para ambos os casos, todos os G_i 's são cópias do grafo de Petersen P . Devido à forte simetria de P , existe exatamente uma forma de escolher um caminho com 3 vértices neste grafo, e então temos que o semigrafo P' , obtido a partir de P pela remoção do caminho, é único. Além disso, como as duas formas de se fazer junção dos pares de duas cópias de P' são isomorfas, existem exatamente dois possíveis “ciclos” de $2k + 1$ cópias de P' (veja Figuras 1.7 e 1.8). Os semigrafos com $(2k + 1)$ semiarestas usados para completar, deixando o grafo cúbico, são específicos para cada família de snarks.

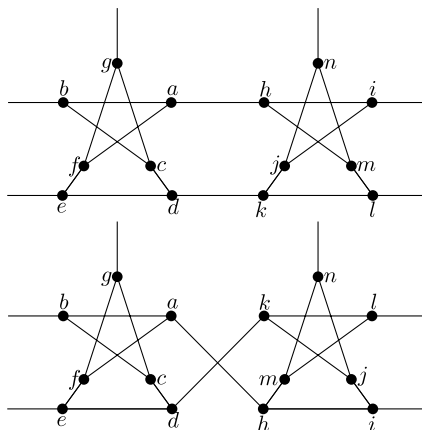


Figura 1.7: As duas maneiras de fazer junção dos pares de duas cópias de P' são isomorfas.

Para o caso dos *snarks de Loupekine*, o semigrafo Z com $(2k + 1)$ semiarestas é constituído por somente um vértice v incidente a três semiarestas e $k - 1$ semiarestas isoladas. Qualquer junção das semiarestas incidentes a v e semiarestas isoladas de Z com as semiarestas solitárias das cópias de P' , gera o chamado snark de Loupekine (Figura 1.8).

Para o caso dos *snarks de Goldberg*, o semigrafo Z com $(2k + 1)$ semiarestas é constituído por um ciclo sem corda $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ onde cada v_i é o vértice extremo

de uma semiaresta v_i . Assim, a junção de cada v_i com a semiaresta solitária da i -ésima cópia de P' , gera o chamado snark de Goldberg. Note que, para $k = 1$, a condição em Z no Teorema 3 não é respeitada, pois este possui um triângulo, logo os grafos obtidos pela construção não são snarks. Na verdade, para $k = 1$, os snarks de Goldberg são iguais aos snarks de Loupekine quando o vértice de Z é substituído por um triângulo.

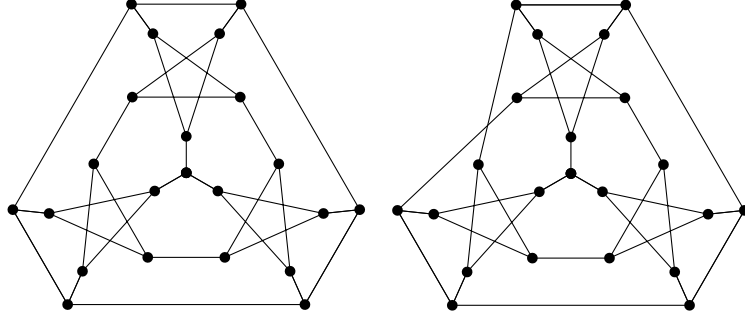


Figura 1.8: Os dois snarks de Loupekine para $k = 1$.

Teorema 4. *Sejam $P_1, P_2, \dots, P_{2k+1}$ ($k \geq 1$) cópias do grafo de Petersen e seja Z um semigrafo com $(2k + 1)$ semiarestas. Se Z possui uma 4-coloração-total tal que no máximo três cores são usadas para os vértices extremos de suas semiarestas, então qualquer grafo em $\mathcal{LG}(P_1, P_2, \dots, P_{2k+1}, Z)$ possui uma 4-coloração-total.*

Demonstração. Mostraremos como podemos estender a 4-coloração-total de Z para uma 4-coloração-total do grafo G em $\mathcal{LG}(P_1, P_2, \dots, P_{2k+1}, Z)$, usando as cores de P' definidas abaixo.

Na Figura 1.9 temos representadas cinco 4-colorações-totais diferentes para P' . Todas possuem a propriedade de que semiarestas que estão em um par possuem a cor 1, os vértices extremos dos pares do lado esquerdo possuem cor 2 e os vértices extremos dos pares do lado direito possuem cores 3 e/ou 4. Então, qualquer “ciclo” de cópias de P' usando estas colorações é uma 4-coloração-total. Todas as colorações de P' representadas na Figura 1.9 diferem na semiaresta solitária e seu vértice extremo. Chamamos de $c(i, j)$ a coloração de P' possuindo as propriedades acima e tal que a semiaresta solitária possui a cor i e seu vértice extremo possui cor j . A Figura 1.9 apresenta as colorações do tipo $c(1, 2), c(2, 4), c(3, 2), c(2, 3), c(4, 2)$.

Agora, considere uma 4-coloração-total c de Z com cores 1, 2, 3, 4 tal que nenhum vértice extremo de uma semiaresta receba a cor 2 (por hipótese existe uma). Além disso, podemos escolher c tal que todas as semiarestas isoladas possuam a cor 2, caso existam.

Estendemos c para todo o grafo $\mathcal{LG}(P_1, P_2, \dots, P_{2k+1}, Z)$ da seguinte forma:

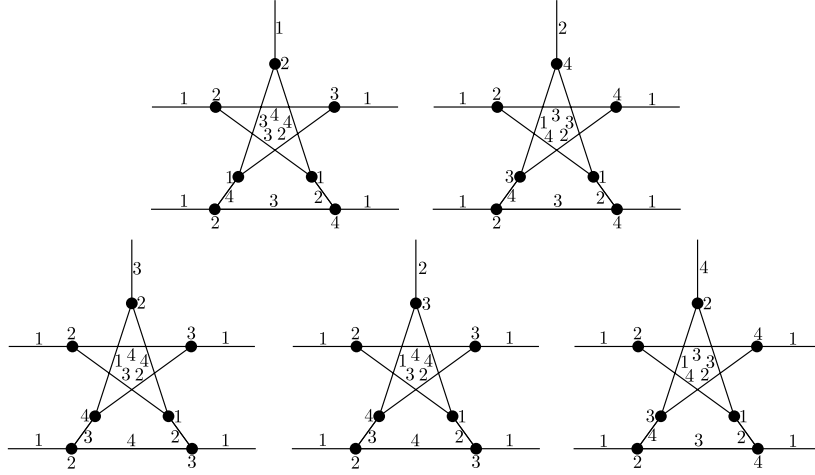


Figura 1.9: As 4-colorações-totais de P' do tipo $c(1, 2)$, $c(2, 4)$, $c(3, 2)$, $c(2, 3)$, $c(4, 2)$.

- Para cada semiaresta s de Z que faça junção com a semiaresta solitária de P'_i , se c colore s com 1, 3 ou 4, utilize respectivamente $c(1, 2)$, $c(3, 2)$ ou $c(4, 2)$ para P'_i , ou se c colore s com 2, utilize $c(2, 3)$ ou $c(2, 4)$ para P_i dependendo da cor do vértice extremo de s .
- Para cada semiaresta isolada de Z que faça junção com a semiaresta solitária de P'_i e P'_j , utilize $c(2, 3)$ para P'_i e $c(2, 4)$ para P'_j . \square

Corolário 5. *Todos os snarks de Loupekine e Goldberg são Tipo 1.*

Demonstração. Pelo Teorema 4, é suficiente mostrar que os semigrafos usados pela \mathcal{LG} -construção para obter os snarks das famílias Loupekine e Goldberg, possuem uma 4-coloração-total tal que uma das cores não aparece nos vértices que são extremos de uma semiaresta.

No caso da família Loupekine, para qualquer valor de $k \geq 1$, o semigrafo Z possui exatamente um vértice. Então este é 4-total-colorível e somente uma cor é usada para este vértice. Podemos então aplicar o Teorema 4.

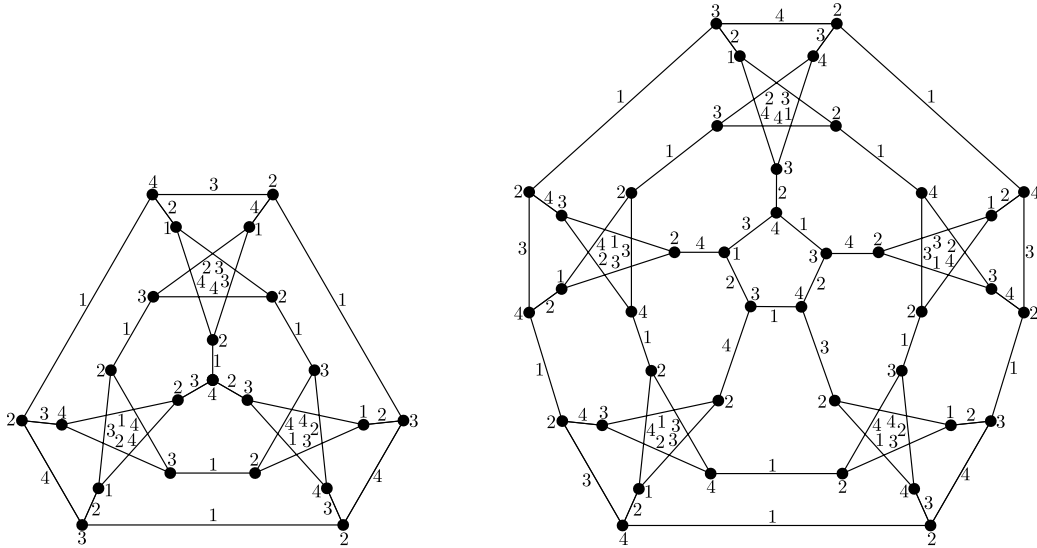
No caso da família Goldberg, para cada valor de $k \geq 2$, o semigrafo Z é um ciclo sem corda $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$, onde v_i é o vértice extremo de uma semiaresta $v_i \cdot$, para $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$. Definimos a coloração c a seguir dos elementos deste semigrafo:

- $c(v_1 v_2) = c(v_3 v_4) = \dots = c(v_{2k-1} v_{2k}) = 1$, $c(v_{2k+1}, v_1) = 3$,
- $c(v_2 v_3) = c(v_4 v_5) = \dots = c(v_{2k} v_{2k+1}) = 2$,
- $c(v_1) = c(v_3) = \dots = c(v_{2k-1}) = 4$, $c(v_{2k+1}) = 1$,
- $c(v_2) = c(v_4) = \dots = c(v_{2k}) = 3$,
- $c(v_2 \cdot) = c(v_4 \cdot) = \dots = c(v_{2k} \cdot) = 4 = c(v_{2k+1} \cdot)$,

- $c(v_1 \cdot) = 2$ e $c(v_3 \cdot) = c(v_5 \cdot) = \dots = c(v_{2k-1} \cdot) = 3$.

Esta é uma 4-coloração-total de Z não utilizando a cor 2 para os vértices. Assim, pelo Teorema 4, os snarks de Goldberg são Tipo 1. \square

A Figura 1.10(a) (resp. (b)) apresenta uma 4-coloração-total para o primeiro snark de Loupequine (resp. Goldberg).



(a) Uma 4-coloração-total para o menor snark de Loupequine.

(b) Uma 4-coloração-total para o menor snark de Goldberg.

Figura 1.10: Duas 4-colorações-totais obtidas pelo Corolário 5.

1.2.2 Relaxando um pouco

Na seção anterior, apresentamos resultados que sugerem que todos os snarks são Tipo 1, ou seja, de que a Questão 1 possui resposta negativa. No entanto, se relaxarmos as condições de conectividade cíclica de aresta e índice cromático, podemos exibir grafos cúbicos Tipo 2.

Para construir tais grafos, utilizamos alguns grafos Tipo 2 com o grau máximo 3. Os menores são o K_4 e o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ menos uma aresta, que denotamos por $K_{3,3} - e$ [29]. A lista apresentada em [27] de grafos Tipo 2 críticos com grau máximo 3 também foi bem útil. Os grafos desta lista que usaremos estão apresentados na Figura 1.11 e são nomeados H_1, H_2, H_3, H_4 .

Observação 6. *Um grafo G contendo um subgrafo Tipo 2 com grau máximo $\Delta(G)$ é Tipo 2.*

Uma forma fácil de se obter um grafo cúbico Tipo 2 é completar um grafo com grau máximo 3 que seja Tipo 2, até se obter um grafo cúbico. Com isso,

obviamente podemos construir infinitos grafos cúbicos, porém estes não possuem estruturas interessantes.

Utilizamos a Observação 6, grafos Tipo 2 com grau máximo 3, e duas construções propostas por Isaacs [31] para mostrar que, para conectividade cíclica de aresta menor que 4, existem grafos cúbicos de cada Classe e Tipo.

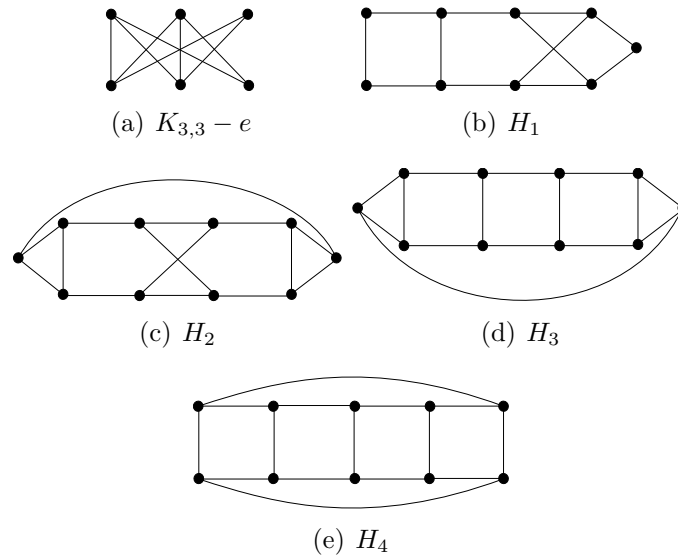


Figura 1.11: Grafos Tipo 2 com grau máximo 3.

Grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 1 Sabe-se que todo grafo cúbico com ponte é Classe 2. A Figura 1.12 (a) (resp. (b)) apresenta um exemplo de grafo cúbico Tipo 1 (resp. Tipo 2) com conectividade cíclica de aresta 1.

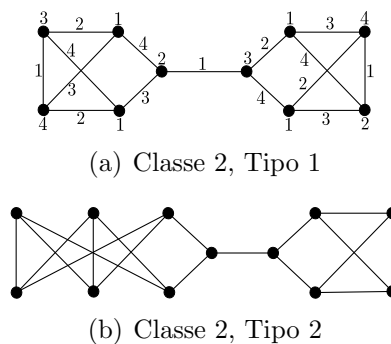


Figura 1.12: Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 1.

É verdade que se R e H são dois grafos Tipo 1 com um vértice de grau 2 e todos os outros de grau 3, então o grafo cúbico G obtido pela inserção de uma aresta conectando os vértices de grau 2, também é Tipo 1. Assim, qualquer grafo cúbico

Tipo 2 que contém ponte pode ser obtido da forma reversa, onde pelo menos um dos R e H é Tipo 2.

Esta forma de construir grafos cúbicos Tipo 2 a partir de grafo Tipo 2 menor deixa de valer para grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta de cardinalidade maior que 1. Em outras palavras, existe exemplo de grafo cúbico Tipo 2 com conectividade cíclica de aresta pelo menos 2 tal que as componentes R e H obtidas na remoção deste corte sejam ambas Tipo 1 (veja Figura 1.13).

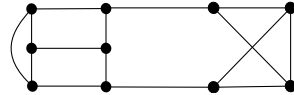


Figura 1.13: Grafo cúbico Tipo 2 com conectividade cíclica de aresta 2 tal que R e H são Tipo 1.

Grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 2 A *2-construção*: dado um grafo cúbico G e uma aresta e de G , o semigrafo com duas semiarestas gerado a partir de G pela remoção de e , é denotado por G^e . Dados dois grafos cúbicos G e H , um grafo cúbico obtido a partir de G^e e H^f para arestas e de G e f de H , pela junção das semiarestas de G^e com as semiarestas de H^f é dito ser *obtido por uma 2-construção* de G e H [31] e é denotado por $G2H$ (veja Figura 1.14).

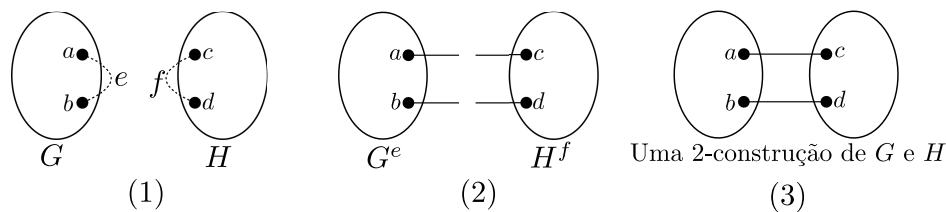


Figura 1.14: Uma ilustração dos elementos relevantes da 2-construção.

Propriedade 7. (Isaacs, 1975 [31]) Um grafo obtido por uma 2-construção de grafos cúbicos G e H é Classe 1 se e somente se G e H são Classe 1.

Propriedade 8. Seja H um grafo cúbico e G um grafo cúbico contendo aresta e tal que o semigrafo cúbico G^e é Tipo 2. Um grafo obtido pela 2-construção, baseada em e de G e no grafo H , é Tipo 2.

Demonstração. Consequência direta da Observação 6. □

Teorema 9. Sejam G e H dois grafos cúbicos Tipo 1. Um grafo cúbico $G2H$ gerado a partir destes grafos pela 2-construção é Tipo 1.

Demonstração. Sejam $e = ab$ e $f = cd$ arestas de G e H , resp., utilizadas na 2-construção de $G2H$, e sejam ac e bd as duas arestas resultantes desta construção.

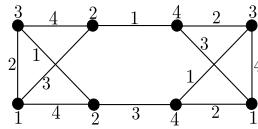
Grafos G e H são Tipo 1, então cada grafo possui pelo menos uma 4-coloração-total com cores 1, 2, 3, 4. Suponha que π_G e π_H são 4-colorações-totais de G e H , respectivamente. Possivelmente permutando as cores, podemos assumir que $\pi_G(e) = \pi_H(f) = 1$, $\pi_G(a) = \pi_H(d) = 2$, e $\pi_G(b) = \pi_H(c) = 3$. Então, a 4-coloração-total de π de $G2H$ é obtida mantendo as cores dadas por π_G e π_H e fixando $\pi(ac) = \pi(bd) = 1$. \square

Portanto, se um grafo cúbico G Tipo 2 possui conectividade cíclica de aresta 2, sabemos construir um grafo cúbico Tipo 2 menor que G da seguinte forma: sejam R e H as duas componentes obtidas na remoção do corte. Adicione uma aresta em cada componente de forma a se obter dois grafos cúbicos R' e H' . Pelo Teorema 9, pelo menos um destes grafos cúbicos é Tipo 2. Porém, não sabemos construir um grafo cúbico Tipo 2 a partir de um grafo Tipo 2 menor fazendo a operação reversa (veja na Figura 1.15 (a) um grafo cúbico Tipo 1 obtido de dois duas cópias do K_4 que é Tipo 2).

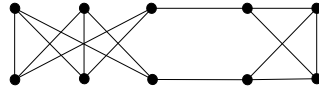
Como consequência do Teorema 9, e Propriedades 7 e 8, existem grafos cúbicos Classe i e Tipo j com conectividade cíclica de aresta 2, para todo $i, j \in \{1, 2\}$.

- Classe 1 - Tipo 1: qualquer 2-construção de dois grafos cúbicos Classe 1 e Tipo 1. Porém também, por exemplo, a 2-construção de duas cópias do K_4 , que é Tipo 2 (veja a Figura 1.15 (a)).
- Classe 1 - Tipo 2: qualquer 2-construção de dois grafos cúbicos Classe 1 tal que pelo menos um deles contenha uma aresta cuja remoção resulte em um grafo Tipo 2, por exemplo uma 2-construção de $K_{3,3}$ e K_4 , já que $K_{3,3} - e$ é Tipo 2. Veja a Figura 1.15 (b).
- Classe 2 - Tipo 1: qualquer 2-construção de dois grafos cúbicos Tipo 1 tal que pelo menos um destes seja Classe 2, por exemplo P e o grafo $G(3, 1)$ (Figura 1.19 (a)), como mostra a Figura 1.16 (a).
- Classe 2 - Tipo 2: qualquer 2-construção de um grafo cúbico Classe 2 com um grafo cúbico contendo uma aresta cuja remoção resulte em um grafo Tipo 2, por exemplo P e $K_{3,3}$ como na Figura 1.16 (b).

Grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 3 *A 3-construção:* dados um grafo cúbico G e um vértice x de G , o semigrafo com três semiarestas obtido a partir de G pela remoção de x , é denotado por G^{-x} . Dados dois grafos cúbicos G e H , qualquer grafo cúbico obtido a partir de G^{-x} e H^{-y} para alguns vértices x de

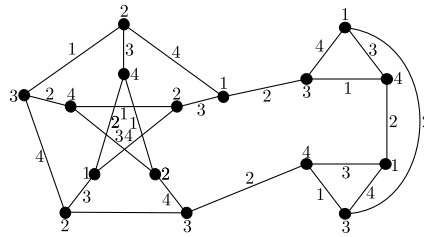


(a) Classe 1, Tipo 1

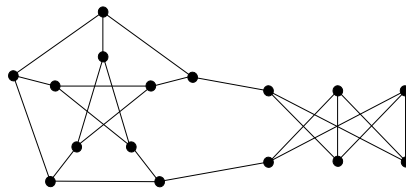


(b) Classe 1, Tipo 2

Figura 1.15: Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 2 que são Classe 1.



(a) Classe 2, Tipo 1



(b) Classe 2, Tipo 2

Figura 1.16: Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 2 que são Classe 2.

G e y de H , pela junção das semiarestas de G^{-x} com as semiarestas de H^{-y} é dito obtido pela 3-construção a partir de G e H [31] (veja Figura 1.17).

Propriedade 10. (Isaacs, 1975 [31]) Um grafo obtido pela 3-construção de grafos cúbicos G e H é Classe 1 se e somente se G e H são Classe 1.

Propriedade 11. Seja G um grafo cúbico contendo um vértice x tal que o semigrafo cúbico G^{-x} seja Tipo 2, e H um grafo cúbico. Um grafo obtido pela 3-construção, baseada em x de G e no grafo H é Tipo 2.

Demonstração. Consequência direta da Observação 6. □

Figura 1.18 apresenta um exemplo interessante de um grafo cúbico Tipo 2 (H_3 , Figura 1.11 (d)) obtido pela 3-construção de duas cópias do grafo $G(3,1)$ que é Tipo 1 (veja uma 4-coloração-total na Figura 1.19 (a)). Isto indica que para esta construção não há resultado análogo ao Teorema 9.

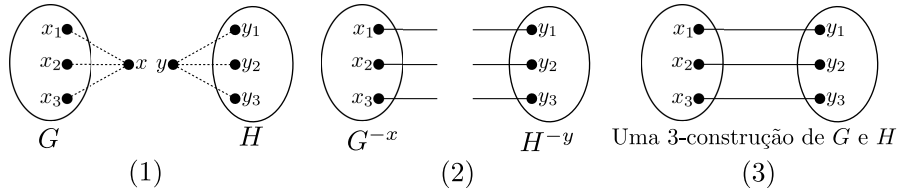


Figura 1.17: Ilustração dos elementos relevantes da 3-construção.

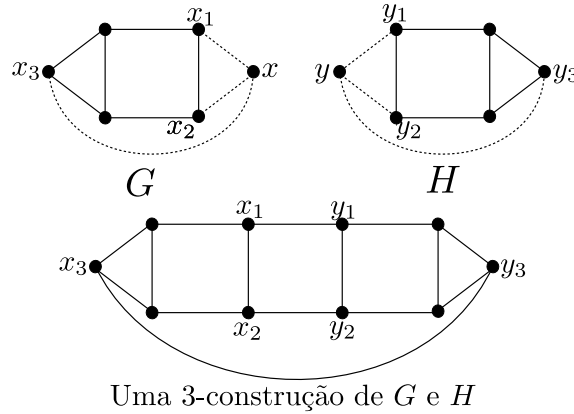
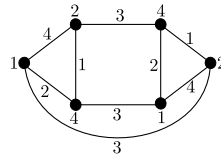


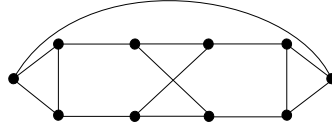
Figura 1.18: Exemplo do grafo cúbico Tipo 2 obtido pela 3-construção de duas cópias do grafo $G(3, 1)$ que é Tipo 1.

Encontramos grafos cúbicos Classe i e Tipo j com conectividade cíclica de aresta 3, para todo $i, j \in \{1, 2\}$:

- Classe 1 - Tipo 1: o grafo $G(3, 1)$ (veja Figura 1.19 (a)) é um exemplo (note que o grafo $G(3, 1)$ é obtido pela 3-construção de dois K_4 's);
- Classe 1 - Tipo 2: o grafo H_2 apresentado na Figura 1.11 (c) (veja também Figura 1.19 (b));
- Classe 2 - Tipo 1: como apresentado na Figura 1.20 (a), a 3-construção de dois grafos de Petersen é Tipo 1. Pela Propriedade 10, sabemos que este é Classe 2;
- Classe 2 - Tipo 2: qualquer 3-construção de um grafo cúbico Classe 2 com um grafo cúbico contendo um vértice tal que a remoção resulta em um grafo Tipo 2 (Propriedade 11). Por exemplo uma 3-construção de P e de um grafo cúbico obtido a partir do grafo H_1 (Figura 1.11 (b)) pela adição de um vértice a cada vértice de grau 2 (veja este produto na Figura 1.20 (b)). Pela Propriedade 10, sabemos que este é Classe 2.

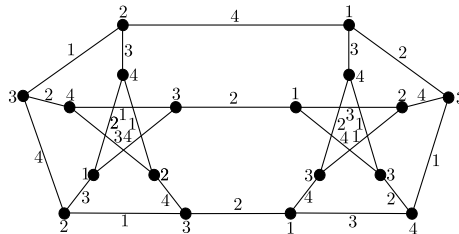


(a) Classe 1, Tipo 1

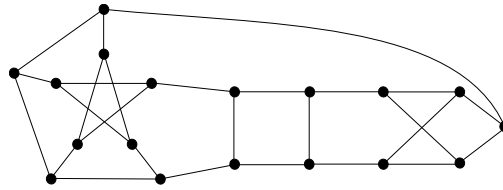


(b) Classe 1, Tipo 2

Figura 1.19: Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 3 que são Classe 1.



(a) Classe 2, Tipo 1



(b) Classe 2, Tipo 2

Figura 1.20: Exemplos de grafos cúbicos de cada Tipo com conectividade cíclica de aresta 3 que são Classe 2.

Consideração sobre o produto interno *O produto interno*: Dados um grafo cúbico G e duas arestas não-adjacentes e e f de G , o semigrafo obtido a partir de G pela remoção das arestas e e f , é denotado por G^{ef} . As duas semiarestas correspondendo à aresta e , resp. f , são chamadas de *par* de G^{ef} .

Dados um grafo cúbico H e uma aresta xy de H , o semigrafo obtido a partir de H pela remoção dos vértices x e y , é denotado por H^{-xy} . As duas semiarestas correspondendo às arestas incidentes a x , resp. y , são chamadas de *par* de H^{-xy} .

O produto interno de dois grafos cúbicos H e G é qualquer grafo cúbico obtido a partir de H^{-xy} e G^{ef} (para algumas arestas xy de H e e, f de G), pela junção dos pares de H^{-xy} com os pares de G^{ef} (veja Figura 1.21).

Esta construção foi introduzida por Isaacs [31] e no mesmo trabalho ele mostrou que o produto interno de dois grafos cúbicos Classe 2 é Classe 2. Além disso, o

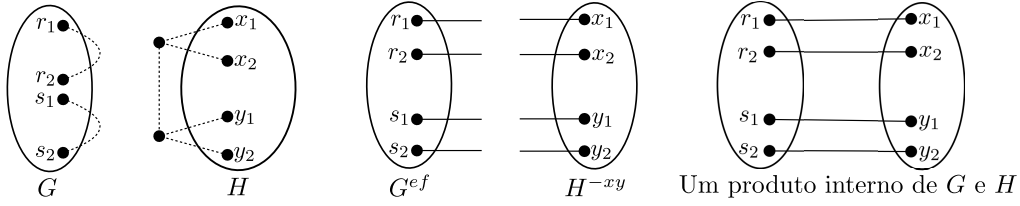


Figura 1.21: Ilustração dos elementos relevantes do produto interno.

produto interno de dois snarks é um snark.

Muitos grafos cúbicos obtidos pelo produto interno são Tipo 1, por exemplo todos os membros das duas famílias Blanuša [53]. Porém, apresentamos um exemplo de grafo cúbico Tipo 2, obtido pelo produto interno de dois grafos cúbicos Tipo 1.

Observação 12. *O produto interno de dois grafos cúbicos Tipo 1 pode ser um grafo cúbico Tipo 2.*

Demonstração. O grafo cúbico H_4 é um elemento da lista de grafos Tipo 2 na Figura 1.11. Como este grafo pode ser obtido pelo produto interno de duas cópias do grafo $G(3, 1)$, temos o resultado (Figura 1.22). \square

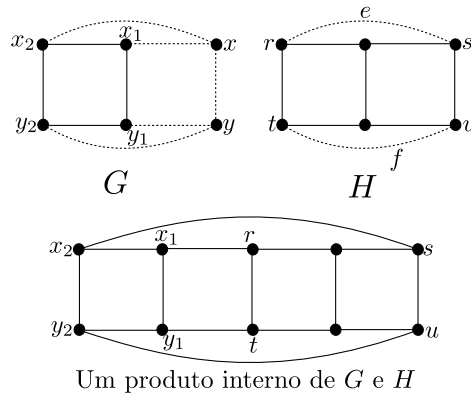


Figura 1.22: Exemplo de grafo cúbico Tipo 2 obtido pelo produto interno de duas cópias do grafo $G(3, 1)$ que é Tipo 1.

Até então, percebemos que o número cromático total não tem relação com o índice cromático de um grafo cúbico com conectividade cíclica de aresta menor que 4. Além disso, observamos que todos os exemplos de grafos cúbicos Tipo 2 que apresentamos possuem quadrados ou triângulos.

Vimos que o produto interno de duas cópias do grafo $G(3, 1)$ que é Tipo 1 (Figura 1.22) é um grafo cúbico Tipo 2 com conectividade cíclica de aresta 4 e Classe 1. Então, ainda não encontramos um grafo cúbico Tipo 2 com conectividade cíclica de aresta 4 que seja Classe 2, mesmo possuindo quadrados. Abordaremos este assunto no próximo capítulo.

conectividade cíclica de aresta 1		conectividade cíclica de aresta 2	
	Classe 1	Classe 2	
Tipo 1	\emptyset	✓	
Tipo 2	\emptyset	✓	
conectividade cíclica de aresta 3		conectividade cíclica de aresta 4	
	Classe 1	Classe 2	
Tipo 1	✓	✓	
Tipo 2	✓	✓	<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> ? ↷ </div> Snark Tipo 2

Figura 1.23: Temos exemplos de grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 1, 2 e 3 de cada Classe e Tipo, e todos possuem triângulos ou quadrados. Vamos tentar completar esta tabela no próximo capítulo, apresentando exemplos de grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta 4 que sejam Classe 2 e Tipo 2, ou seja, snarks Tipo 2.

A Tabela 1.2.2 resume os exemplos que apresentamos neste capítulo de grafos cúbicos com conectividade cíclica de aresta pequena.

Capítulo 2

Os primeiros snarks Tipo 2

A questão proposta por Cavicchioli et al. [15] requer duas condições para os grafos cúbicos Tipo 2, porém nenhum grafo cúbico que satisfaça pelo menos uma das condições é conhecido. Assim, esta questão pode ser dividida em duas partes, com o objetivo de investigar qual é a real dificuldade que deixa esta questão tão difícil de ser respondida: ser snark ou possuir cintura pelo menos 5.

Para lembrar:

Questão 1. (Cavicchioli et al. [15]) *Existe snark Tipo 2 com cintura pelo menos 5?*

✓ Existe snark Tipo 2?

- Existe grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5?

Neste capítulo respondemos positivamente ao primeiro item e a construção destes grafos fornece famílias infinitas de snarks Tipo 2. O segundo item continua em aberto, porém os resultados computacionais obtidos em [10] mostram que um candidato para esta pergunta deve possuir pelo menos 34 vértices.

2.1 Investigando famílias de grafos cúbicos com membros Tipo 2

Em um primeiro momento, para conhecer um pouco mais os grafos cúbicos Tipo 2, estudamos duas famílias que julgamos interessantes por possuírem grafos deste Tipo. Assim, a determinação do número cromático total dos demais membros das famílias tornou-se indispensável. Nesta seção, apresentamos o número cromático total de todos os membros das famílias *extensão da 5-escada* e *extensão da 4-escada de Möbius*.

A família extensão da 5-escada é construída a partir do grafo 5-escada (grafo de Petersen generalizado $G(5, 1)$), que chamamos de E_1 , adicionando-se sequência de quadrados como mostra a Figura 2.1.

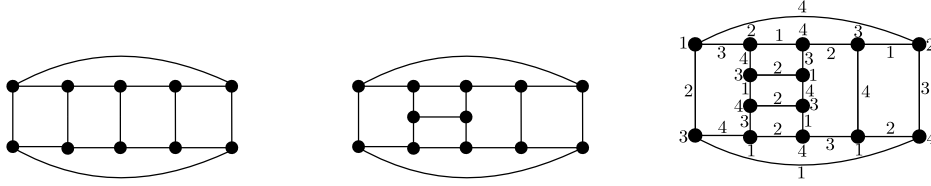


Figura 2.1: Os três primeiros membros da família extensão da 5-escada. Membros E_1 e E_2 são Tipo 2 [27] e membro E_3 é Tipo 1.

Teorema 13. *Com exceção dos dois primeiros membros E_1 e E_2 da família extensão da 5-escada, todos os demais membros são Tipo 1.*

Demonstração. Os dois primeiros membros desta família estão na lista de grafos Tipo 2 apresentada em [27]. Para cada $i \geq 1$, a partir de cada grafo E_{4i} , E_{4i+1} , E_{4i+2} e E_{4i+3} , ou seja, com sequência de quadrados de tamanho $4i$, $4i + 1$, $4i + 2$ e $4i + 3$, construímos a coloração do membro seguinte, repetindo consecutivamente a 4-coloração-total do conjunto de três quadrados, indicados pelos retângulos na Figura 2.3. É simples ver como cada 4-coloração-total se comporta e que não há conflito entre os elementos incidentes ou adjacentes. \square

Similarmente, a família extensão da 4-escada de Möbius é construída a partir do grafo 4-escada de Möbius adicionando-se sequência de quadrados como mostra a Figura 2.2.

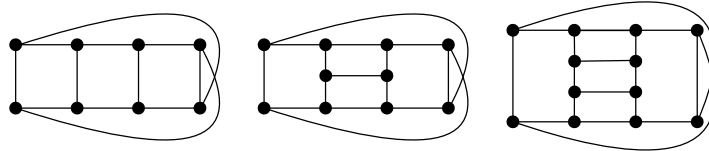


Figura 2.2: Os três primeiros membros da família extensão da 4-escada de Möbius que são Tipo 2 [27].

Teorema 14. *Com exceção dos três primeiros membros da família extensão da 4-escada de Möbius, todos os demais membros são Tipo 1.* \square

A prova deste resultado é similar à prova anterior. Veja o esquema das 4-colorações-totais na Figura 2.4.

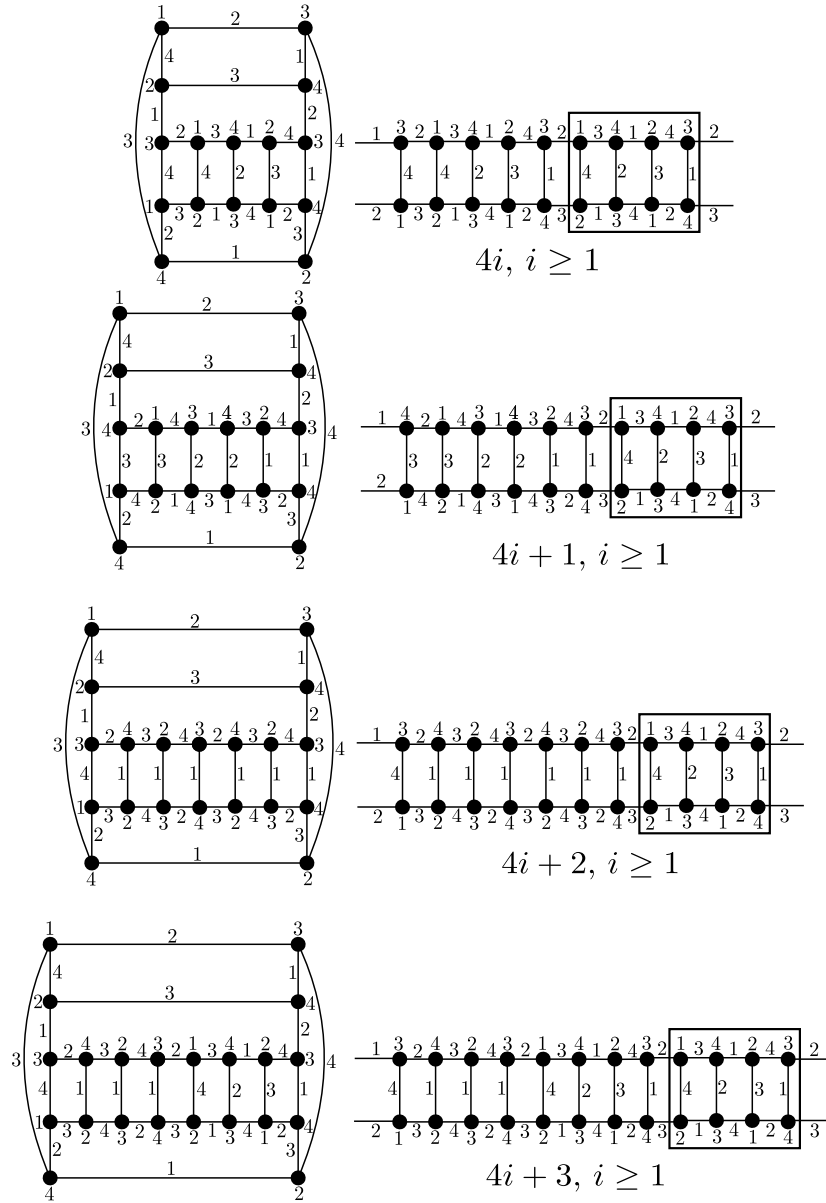


Figura 2.3: Esquema da 4-coloração-total para os grafos da família extensão da 5-escada E_{4i} , E_{4i+1} , E_{4i+2} e E_{4i+3} , $i \geq 1$.

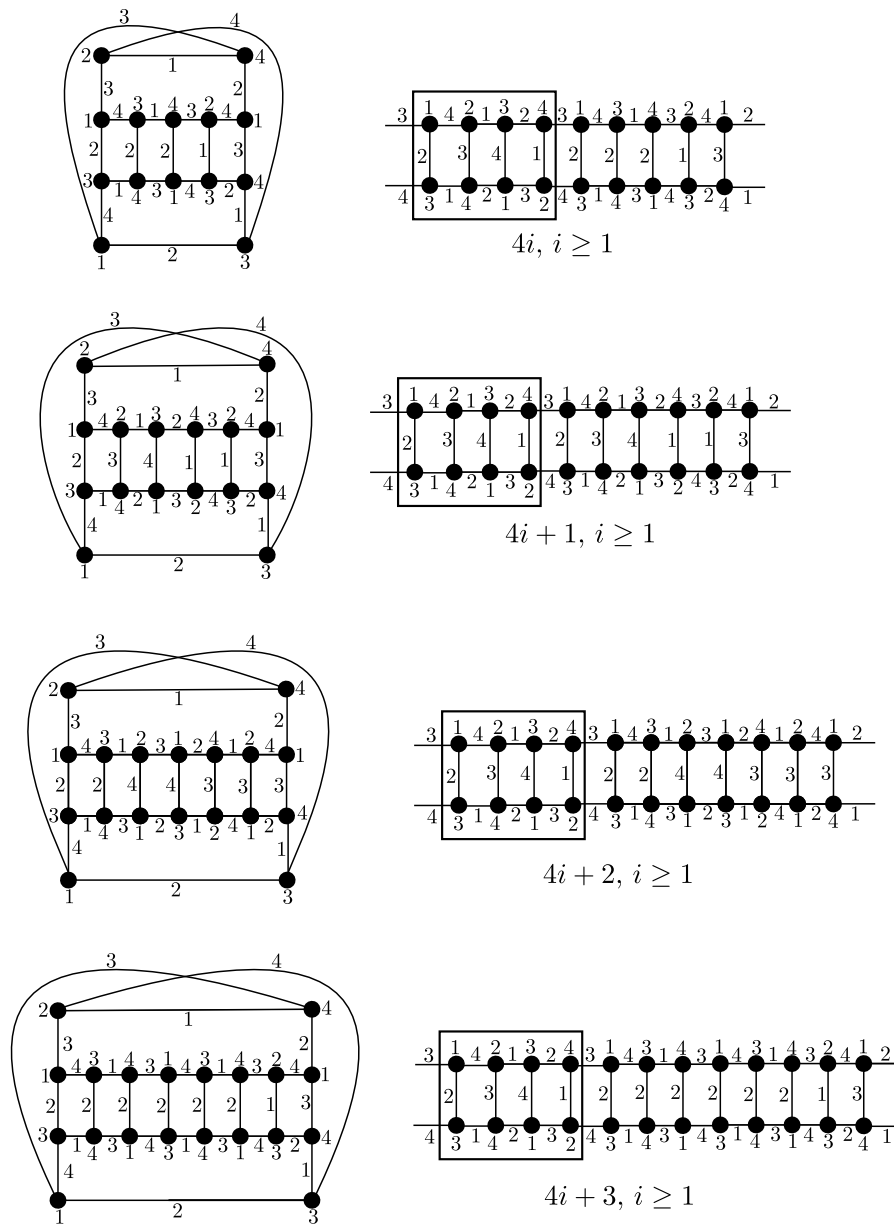


Figura 2.4: Esquema da 4-coloração-total para os grafos da família extensão da 4-escada de Möbius.

2.2 Ferramenta importante: Coloração de arestas forte

A partir de agora, começamos a busca pelos snarks Tipo 2 e, para tanto, iremos utilizar uma ferramenta importante. Mostramos que $(k + 1)$ -colorações-totais de semigrafos k -regulares são caracterizadas por $(k + 1)$ -colorações de arestas mais restritas. Isto irá facilitar o nosso trabalho, pois não precisamos nos preocupar com a coloração de vértices.

Definição 1. Uma $(k + 1)$ -coloração de arestas de um semigrafo k -regular $G = (V, E, S)$ é dita uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte se para cada aresta $vw \in E$, todas as $k + 1$ cores aparecem no conjunto de arestas ou semiarestas incidentes a v ou w .

Equivalentemente, uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte de um semigrafo k -regular é uma $(k + 1)$ -coloração de arestas tal que para cada aresta vw , a cor não usada para os elementos de $E \cup S$ incidentes a v deve ser usada para um elemento incidente a w . Uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte possui a propriedade de que não é possível obter uma outra $(k + 1)$ -coloração de arestas, trocando-se a cor de uma única aresta.

Lema 15. *Seja $G = (V, E, S)$ um semigrafo k -regular. Cada $(k + 1)$ -coloração de arestas forte C de G pode ser estendida para uma $(k + 1)$ -coloração-total C^T com $C^T|_{E \cup S} = C$ e, para cada $(k + 1)$ -coloração-total C^T de G , $C^T|_{E \cup S}$ é uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte.*

Isto implica que existe uma $(k + 1)$ -coloração-total C^T de G se e somente se existe uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte C de G .

Demonstração. Seja C uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte de G . Como G é k -regular, para cada vértice v de G há exatamente uma cor c_v que não aparece nas arestas ou semiarestas incidentes a v . Afirmamos que para cada par de vértices adjacentes u e v , temos $c_u \neq c_v$. De fato, suponha que u e v sejam adjacentes e tais que $c_u = c_v$. Logo c_u não aparece no conjunto de arestas ou semiarestas incidentes a u ou v , o que contraria o fato de que C é uma $(k + 1)$ -coloração de arestas forte.

Portanto, podemos definir uma $(k + 1)$ -coloração-total C^T de G da seguinte forma: atribuímos a cor $C(e)$ para $e \in E \cup S$ e a cor c_v para $v \in V$.

Por outro lado, seja C^T uma $(k + 1)$ -coloração-total de G , e seja $vw \in E$. Nesta coloração temos exatamente k cores usadas para as arestas ou semiarestas incidentes a v , a única não utilizada é $C^T(v)$. Pelo mesmo raciocínio, a única cor não utilizada nas arestas ou semiarestas incidentes a w é $C^T(w)$. Logo, como por definição $C^T(v) \neq C^T(w)$, temos que todas as cores aparecem no conjunto de arestas ou semiarestas de v ou w . \square

Portanto, uma 4-coloração de arestas forte de um grafo cúbico G possui a propriedade de que se atribuirmos a cada vértice v de G a cor c que não é usada nas três arestas incidentes a v , produzimos uma 4-coloração-total de G . Assim, dizemos que c é a *cor induzida em v* pela 4-coloração de arestas forte.

Pelo Lema 15, um semigrafo cúbico G é Tipo 1 se e somente se existe uma 4-coloração de arestas forte de G . Isto será utilizado a partir de agora para mostrar que alguns grafos e semigrafos são Tipo 1. Vale ressaltar que esta propriedade também foi utilizada em programa de computador, para determinar o Tipo de alguns grafos cúbicos.

2.3 O princípio da construção: os tijolos

A ideia da construção de snarks Tipo 2 é baseada no seguinte fato (utilizado também no capítulo anterior):

Observação 16. *Um grafo G contendo um subgrafo Classe 2 (resp. Tipo 2) com grau máximo $\Delta(G)$, é Classe 2 (resp. Tipo 2).*

Então, uma forma de obter um snark Tipo 2 é, por exemplo, construir um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo a partir de um grafo com grau máximo 3 que seja Classe 2 e um grafo com grau máximo 3 que seja Tipo 2. Para tanto, apresentamos a seguir as definições principais deste capítulo.

Definição 2. Um *tijolo* é um semigrafo cúbico $B = (V, E, S)$ com exatamente quatro semiarestas não adjacentes duas a duas e tal que o grafo subjacente (V, E) é um subgrafo de um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo.

Dados dois tijolos disjuntos $B = (V, E, S)$ e $B' = (V', E', S')$, qualquer grafo $G = (V \cup V', E \cup E' \cup E'')$ com E'' um conjunto de quatro arestas disjuntas xy com $x \in S$ e $y \in S'$, é dito uma *junção de B e B'* .

Lembrando, um *quadrado* é um ciclo sem corda com 4 vértices e um *s-quadrado* é um semigrafo cúbico gerado a partir de um quadrado.

As seguintes propriedades dos tijolos são úteis e uma prova parecida é apresentada em [46].

Lema 17. (a) *O grafo subjacente de um tijolo não possui ponte.*

(b) *Qualquer junção de dois tijolos é um grafo ciclicamente 4-aresta-conexo.*

(c) *Um s-quadrado é um tijolo e nenhum tijolo possui menos que 4 vértices.*

Isto implica que um semigrafo cúbico $B = (V, E, S)$ com exatamente 4 semiarestas não adjacentes duas a duas é um tijolo se e somente se qualquer junção de B e um s-quadrado é ciclicamente 4-aresta-conexo.

Demonstração. (a) Seja G_B o grafo subjacente de um tijolo B . Então, G_B possui 4 vértices de grau 2 e todos os outros de grau 3. Como B é um tijolo, G_B é um subgrafo de algum grafo cúbico H ciclicamente 4-aresta-conexo.

Se G_B possuísse ponte, o fato de que G_B possui grau mínimo 2 implicaria que depois da remoção da ponte, as duas componentes possuiriam um ciclo. Pelo menos uma das componentes possuiria no máximo dois vértices de grau 2, mas em H esta componente seria conectada ao restante do grafo por no máximo 3 arestas. Assim, H teria um c -corte de arestas de tamanho no máximo 3. Contradição.

(b) Sejam $B = (V, E, S)$ e $B' = (V', E', S')$ dois tijolos disjuntos e G um grafo obtido pela junção de B e B' . Se G contivesse um c -corte de tamanho no máximo 3, então um de B, B' conteria pelo menos 2 arestas deste c -corte, caso contrário, por (a), ambos B e B' seriam conexos após a remoção das arestas e também conectados um ao outro por pelo menos 1 aresta.

Então assuma que B contém pelo menos duas arestas do c -corte, implicando que B' contém no máximo uma. Mas assim, como B' continua conexo por (a), ele está contido em somente uma componente. Portanto, uma das componentes com ciclo, após a remoção do c -corte, deve estar toda em B . Assim, esta componente pode ser separada pela remoção de no máximo 3 arestas em qualquer grafo cúbico contendo o grafo subjacente de B , contradição.

(c) A prova é imediata, pois existem grafos cúbicos ciclicamente 4-aresta-conexos que possuem quadrados como subgrafos, como por exemplo o K_4 ou o $G(4, 1)$. Além disso, por definição um tijolo deve conter pelo menos 4 vértices. \square

Teorema 18. *Um grafo obtido pela junção de um tijolo Classe 2 e um tijolo Tipo 2 é um snark Tipo 2.*

Demonstração. É imediato pelo Lema 17 e pela Observação 16. \square

Agora estamos preparados para encontrar um tijolo Classe 2 e um tijolo Tipo 2.

2.4 Encontrando tijolos Classe 2

Nesta seção, mostramos como obter tijolos Classe 2 e provamos que o menor deles possui 18 vértices.

Definição 3. Seja G um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo. Removendo duas arestas não adjacentes de G , obtemos um grafo que gera um semigrafo cúbico B com exatamente quatro semiarestas não adjacentes duas a duas, que é por definição um tijolo. Este tijolo é chamado *tijolo-direto de G* . Dois vértices não adjacentes de um tijolo-direto B de G que são adjacentes em G são chamados de *par de B* (em relação à G). Duas semiarestas incidentes aos vértices do mesmo par de B são

também chamadas de *par*. Por definição, um tijolo-direto de G contém dois pares de semiarestas.

Removendo dois vértices adjacentes de G e todas arestas incidentes, se G possui pelo menos seis vértices, podemos obter um grafo que gera um semigrafo cúbico B com exatamente quatro pares de semiarestas não adjacentes duas a duas, que é por definição um tijolo. Este tijolo é chamado *tijolo-aresta de G* . Dois vértices de B que em G são adjacentes ao mesmo vértice que não está em B são chamados de *par de B* (em relação à G). Duas semiarestas incidentes aos vértices do mesmo par de B são também chamadas de *par*. Por definição, um tijolo-aresta de G contém dois pares de semiarestas.

Note que existem tijolos que não são tijolos-diretos. Um exemplo pode ser visto na Figura 2.5 e também pode ser buscado na base de dados HoG [8] procurando pela palavra-chave `Not_direct_brick`. Observe que qualquer junção de pares das semiarestas produz um grafo cúbico que não é ciclicamente 4-aresta-conexo.

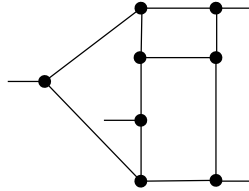


Figura 2.5: Tijolo que não é tijolo-direto.

Por outro lado, é possível mostrar que qualquer tijolo é um tijolo-aresta de um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo [9].

Mostraremos que tijolos Classe 2 podem ser obtidos a partir do produto interno de snarks. Antes disto, listaremos algumas propriedades importantes apontadas por Isaacs.

Lema 19. (Isaacs, 1975 [31]) *Seja G um snark e seja B um tijolo-direto de G . Em toda 3-coloração de arestas de B , pelo menos duas semiarestas que formam um par em relação a G , devem possuir cores diferentes.*

Demonstração. É imediato pelo fato de que G é Classe 2 e pelo Lema de Paridade. □

Lema 20. (Isaacs, 1975 [31]) *Seja G um snark e seja B um tijolo-aresta de G . Em toda 3-coloração de arestas de B , pelo menos as semiarestas que são um par em relação a G , devem possuir a mesma cor.*

Demonstração. Novamente, pelo fato de que G é Classe 2 e pelo Lema de Paridade. □

Definição 4. Sejam S_1, S_2 dois snarks, seja $B_1 = (V_1, E_1, S_1)$ um tijolo-direto de S_1 com pares de vértices r_1, r_2 e s_1, s_2 e seja $B_2 = (V_2, E_2, S_2)$ um tijolo-aresta de S_2 com pares de vértices x_1, x_2 e y_1, y_2 .

Então $D = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{r_1x_1, r_2x_2, s_1y_1, s_2y_2\})$ é dito *produto interno* de S_1, S_2 .

Assim, o produto interno é uma junção par-a-par de um tijolo-direto com um tijolo-aresta, ambos tijolos obtidos de snarks. O produto interno é ilustrado na Figura 2.6. Lembremos que o produto interno já foi apresentado no capítulo anterior.

Teorema 21. (Isaacs, 1975 [31]) *O produto interno de dois snarks é um snark.*

Demonstração. Seja S o grafo resultante do produto interno de dois snarks. Por definição, S é a junção de B_1 , um tijolo-direto de um snark S_1 , e B_2 , um tijolo-aresta de um snark S_2 . Então, pelo Lema 17, S é ciclicamente 4-aresta-conexo. Qualquer 3-coloração de arestas de S irá induzir 3-colorações de arestas de B_1 e B_2 que coincidem nas semiarestas que formam uma aresta em S . Como S é uma junção par-a-par de B_1 e B_2 , Lemas 19 e 20 fornecem resultados contraditórios – dependendo das cores examinadas serem de B_1 ou B_2 . Então, S é Classe 2. \square

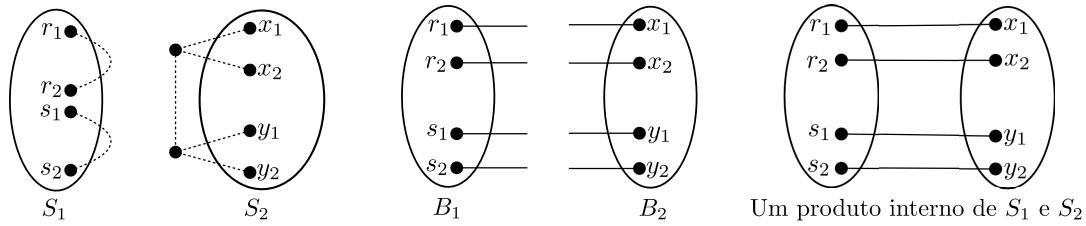


Figura 2.6: Uma ilustração do produto interno de S_1 e S_2 .

Definição 5. Sejam S_1, S_2 dois snarks, seja B_1 um tijolo-direto de S_1 com pares de vértices r_1, r_2 e s_1, s_2 , e seja B_2 um tijolo-aresta de S_2 com pares de vértices x_1, x_2 e y_1, y_2 . Além disso, seja $D = (V, E)$ o produto interno de S_1, S_2 com arestas $\{r_1x_1, r_2x_2, s_1y_1, s_2y_2\}$ e z um vizinho de r_2 em D .

Então $Z = (V, E', S')$ com $E' = E \setminus \{r_1x_1, r_2z\}$ e $S' = \{r_1\cdot, x_1\cdot, r_2\cdot, z\cdot\}$ é dito um *semi-produto interno* de S_1, S_2 .

Lema 22. *Um semi-produto interno Z de dois snarks é um tijolo Classe 2.*

Demonstração. Por definição, Z é um tijolo-direto de um produto interno de dois snarks. Precisamos mostrar que este é Classe 2. Utilizamos a notação como na Definição 5.

Se $z = x_2$ o resultado segue exatamente como na prova do Teorema 21, já que a contradição naquela prova segue das conexões entre um dos dois conjuntos de vértices pareados.

Então, assumamos que $z \neq x_2$ e que C é uma 3-coloração de arestas de Z . C induz uma 3-coloração de arestas de B_2 , e pelo Lema 20: $C(r_2x_2) = C(x_1\cdot)$ é, sem perda de generalidade, igual a 1. Assim, podemos fixar $C(r_2\cdot) = 2$ e pelo Lema de Paridade e Lema 19 aplicado à Z , temos que $C(r_1\cdot) = 2$ e $C(z\cdot) = 1$.

Mas então C' definido como $C' = C$ em $E(B_1) \setminus \{r_2z\}$, $C'(r_2z) = 1$, $C'(s_1\cdot) = C'(s_2\cdot) = C(s_1y_1)$ e $C'(r_1\cdot) = C'(r_2\cdot) = 2$ é uma 3-coloração de arestas de B_1 , contradizendo o Lema 19. \square

Teorema 23. *O menor tijolo Classe 2 possui 18 vértices e existem 5 deles.*

Demonstração. O grafo de Petersen é o menor snark, então os menores tijolos Classe 2 que podem ser obtidos pelo semi-produto interno são gerados a partir de um tijolo-aresta e um tijolo-direto de um grafo de Petersen e possuem 18 vértices. Pela forte simetria do grafo de Petersen, existem somente dois tijolos-diretos e um tijolo-aresta gerados a partir deste grafo. Assim, temos 5 tijolos Classe 2 não isomorfos de ordem 18, obtidos por este semi-produto interno.

Usando o computador e enumerando todos os semigrafos cúbicos de exatamente 4 semiarestas não adjacentes duas a duas até 18 vértices e filtrando os tijolos Classe 2, foi mostrado que estes são os menores tijolos Classe 2 e que todos possuem 18 vértices. Figura 2.7 apresenta um destes grafos. \square

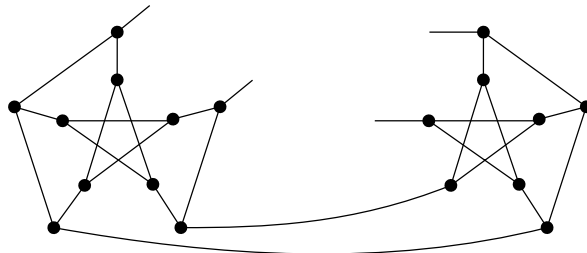


Figura 2.7: Um dos menores tijolos Classe 2.

Um exemplo de tijolo-direto Classe 2 construído a partir de um snark de Loupekinine [30], é o grafo com 22 vértices e grau máximo 3 construído por Goldberg [25].

Experimentando tijolos Com o objetivo de construir snarks usando tijolos, definimos uma família infinita de snarks com quadrados. Considere o tijolo-direto BL , que é um semi-produto interno de dois grafos de Petersen, obtido pela remoção das arestas r_1x_1, r_2x_2 (veja Figura 2.6) do snark de Blanuša. Vimos que este tijolo possui 18 vértices e é o menor. Existem exatamente dois snarks obtidos pelo produto

interno de dois grafos de Petersen [44]. Assim, construímos duas famílias de snarks: uma a partir do tijolo-direto BL_1 e outra a partir do tijolo-direto BL_2 .

Construímos o grafo $BL_iS_k^j$, $i = 1, 2$ e $j, k \geq 0$, da seguinte forma:

- Pela junção do tijolo BL_i com o tijolo gerado a partir de uma sequência de j quadrados, dando origem ao grafo cúbico BL_iS^j , $i = 1, 2$ e $j \geq 0$;
- Em seguida, pela junção do tijolo obtido pela remoção das arestas s_1y_1, s_2y_2 (veja Figura 2.6) de BL_iS^j , com o tijolo gerado a partir de uma sequência de k quadrados, dando origem ao grafo cúbico $BL_iS_k^j$, $i = 1, 2$ e $j, k \geq 0$.

O grafo $BL_iS_k^j$, $i = 1, 2$ e $j, k \geq 0$, é um snark. A Figura 2.8 apresenta um exemplo Tipo 1 de cada família. Utilizando as 4-colorações-totais para as sequências de quadrados do Teorema 13 e as 4-colorações-totais dos semigrafos da Figura 2.9, é fácil ver que todo snark $BL_iS_k^j$, $i = 1, 2$ e $j, k \geq 4$, é Tipo 1.

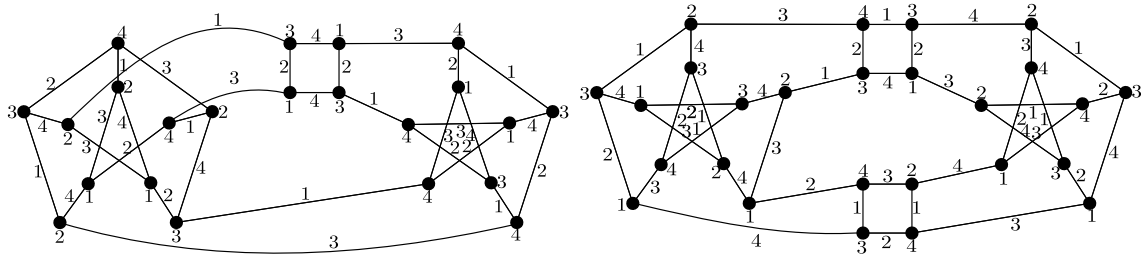


Figura 2.8: Snarks $BL_2S_0^1$ e $BL_1S_1^1$ com uma 4-coloração-total cada.

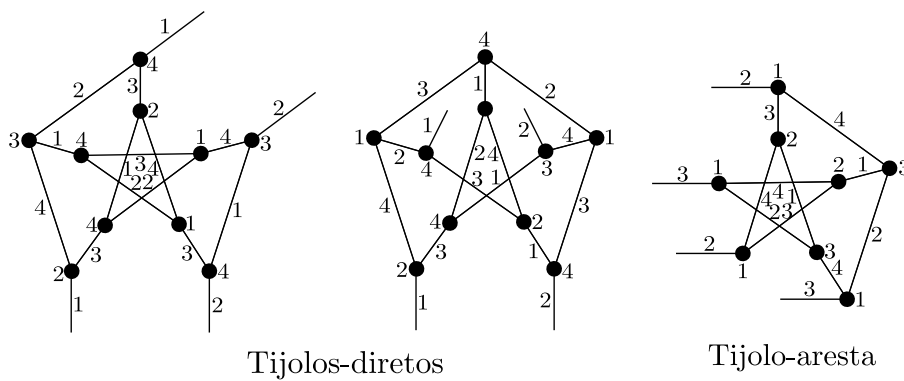


Figura 2.9: Os dois tijolos-diretos e o tijolo-aresta obtidos a partir do grafo de Petersen e usados na construção dos snarks $BL_iS_k^j$'s, com uma 4-coloração-total cada.

2.5 Encontrando tijolos Tipo 2

Tijolos Tipo 2 não foram fáceis de serem encontrados. Pela lista apresentada em [27], sabemos que um tijolo Tipo 2 deve possuir pelo menos 18 vértices. Com o auxílio de computador, foi determinado que o menor tijolo Tipo 2 possui 22 vértices. Este é apresentado na Figura 2.10 e é denotado por B^* . A seguir, mostramos que este grafo é um tijolo Tipo 2.

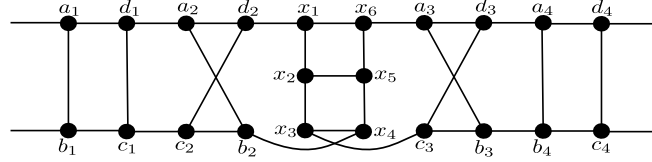


Figura 2.10: O tijolo Tipo 2 B^* .

Lema 24. *Em toda 4-coloração total de um s-quadrado, semiarestas incidentes aos vértices adjacentes possuem cores diferentes.*

Demonstração. Considere um s-quadrado S com arestas ab, bc, cd, da (Figura 2.11). Assuma que o lema não é verdadeiro. Neste caso, existe uma 4-coloração-total C^T de S tal que a e b possuem mesma cor. Pelo Lema 15 aplicado a aresta ab , podemos assumir sem perda de generalidade que $C^T(a) = 1, C^T(b) = 1, C^T(ab) = 2, C^T(ad) = 3$, e $C^T(bc) = 4$. Além disso, aplicando o Lema 15 às arestas ad e bc , temos que $C^T(d) = 4$ e $C^T(c) = 3$, mas então a aresta cd não satisfaz o Lema 15, contradição. \square

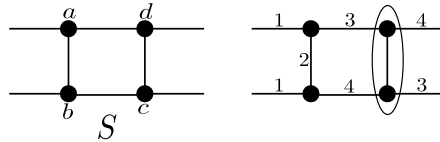


Figura 2.11: Figura auxiliar para encontrar uma 4-coloração de arestas forte de S .

Chamamos o grafo consistindo em dois quadrados compartilhando uma aresta, de um *dominó*, e o semigrafo cúbico gerado a partir de um dominó, de um *s-dominó*. Dois vértices com distância máxima em um s-dominó são chamados de vértices *opostos*. Um s-dominó contém dois pares de vértices opostos.

Lema 25. *Toda 4-coloração-total C^T de um s-dominó é tal que para um par de vértices opostos x e y , o seguinte fato acontece: $C^T(x) = C^T(y)$ e $C^T(x) \neq C^T(y)$.*

Demonstração. Considere um s-dominó D com arestas $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1, x_2x_5$, e seja C^T uma 4-coloração-total de D (Figura 2.12).

Por simetria, pelo Lema 15 para a aresta x_2x_5 , e pelo Lema 24, assumimos sem perda de generalidade que $C^T(x_2x_5) = 1$, $C^T(x_1x_2) = C^T(x_5x_4) = 2$, $C^T(x_2x_3) = 3$, e $C^T(x_5x_6) = 4$.

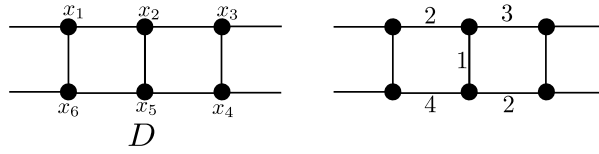


Figura 2.12: Uma 4-coloração de arestas forte aplicada à aresta x_2x_5 de D .

Pelo Lema 15 para a aresta x_1x_2 , e pelo fato de que $C^T(x_5x_6) = 4$, temos que $C^T(x_1\cdot) = 4$; similarmente, temos que $C^T(x_4\cdot) = 3$. Lema 15 para a aresta x_1x_6 implica que a aresta x_1x_6 e a semiaresta $(x_6\cdot)$ devem possuir cores 1 e 3 (não necessariamente nesta ordem). Similarmente, Lema 15 para a aresta x_3x_4 implica que a aresta x_3x_4 e a semiaresta $(x_3\cdot)$ devem possuir cores 1 e 4.

Em qualquer caso, x_6 e x_3 recebem cor 2. Assim, estes vértices satisfazem a propriedade desejada, exceto no caso em que $C^T(x_6\cdot) = C^T(x_3\cdot) = 1$. Porém neste caso temos que $C^T(x_3x_4) = 4$ e $C^T(x_1x_6) = 3$, e os vértices x_1 e x_4 satisfazem a propriedade desejada. \square

Teorema 26. *O semigrafo B^* da Figura 2.10 é um tijolo Tipo 2.*

Demonstração. Considere o semigrafo B^* na Figura 2.10: este é um semigrafo cúbico com exatamente 4 pares de semiarestas não adjacentes e, adicionando, por exemplo, as arestas não adjacentes a_1d_4 e b_1c_4 , obtemos um grafo cúbico ciclicamente 4-aresta-conexo. Então, B^* é um tijolo-(direto). Agora, mostraremos que este é Tipo 2.

Observe que os vértices x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , e x_6 de B^* induzem um dominó em B^* . Além disso, os pares opostos deste dominó estão ligados de forma similar ao mesmo grafo, pois $B^*[a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2]$ é isomorfo à $B^*[a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4]$.

Assuma que existe uma 4-coloração-total C^T de B^* . Então, pelo Lema 25 e pela simetria de B^* , podemos assumir, sem perda de generalidade, que $C^T(x_1) = C^T(x_4) = 1$, $C^T(x_1d_2) = 2$, e $C^T(x_4b_2) = 3$.

Agora, pelo Lema 24 aplicado ao s -quadrado gerado por a_2, b_2, c_2, d_2 , arestas d_1a_2 e c_1c_2 não podem ser coloridas com cores 2 ou 3 em C^T . Por outro lado, pelo Lema 24 aplicado ao s -quadrado gerado a partir do quadrado a_1, b_1, c_1, d_1 , arestas d_1a_2 e c_1c_2 não podem ser coloridas com a mesma cor em C^T .

Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $C^T(d_1a_2) = 1$ e $C^T(c_1c_2) = 4$.

Observe que, como os vértices x_1 e x_4 são coloridos com cor 1, não existe aresta incidente a eles colorida com a cor 1. Então, pelo Lema 15 aplicado às arestas x_1d_2 e x_4b_2 , e pelo fato de que a aresta d_1a_2 é colorida com cor 1, temos que

$C^T(d_2c_2) = C^T(b_2c_2) = 1$, o que é impossível. Temos uma contradição e assim não existe nenhuma 4-coloração total de B^* . \square

Claro que qualquer tijolo que possua o grafo subjacente de B^* como um subgrafo, é Tipo 2. Uma busca computacional verificou que até 26 vértices, esta é a única forma de se obter tijolos Tipo 2 maiores:

Observação 27. *Existe somente um tijolo Tipo 2 com 22 vértices e é o tijolo B^* apresentado na Figura 2.10. Existem dois tijolos Tipo 2 com 24 vértices e existem dez tijolos Tipo 2 com 26 vértices. Todos estes contêm o grafo subjacente de B^* como subgrafo.*

O tijolo Tipo 2 com 22 vértices pode ser encontrado através da base de dados HoG [8] buscando pela palavra chave `Type2_brick_22`.

2.6 Os snarks Tipo 2

Agora estamos preparados para apresentar o principal resultado deste capítulo. Como a junção de um tijolo Classe 2 e um tijolo Tipo 2 gera um snark Tipo 2, podemos construir snarks Tipo 2.

Teorema 28. *Existem snarks Tipo 2 para cada ordem par $n \geq 40$.*

Demonstração. Qualquer junção do tijolo Tipo 2 de ordem 22 da Figura 2.10 com um tijolo Classe 2 de ordem 18 que descrevemos na Seção 2.4 (Figura 2.7) é um snark Tipo 2 de ordem 40. Usando o computador para gerar todas as possíveis combinações, foram encontrados, a menos de isomorfismo, 11 snarks Tipo 2 de ordem 40. A Figura 2.13 apresenta um destes grafos. Todos os grafos podem ser obtidos na base de dados HoG [8] buscando pela palavra chave `Type2_Class2_40`.

A partir de qualquer tijolo Classe 2 ou Tipo 2 B é fácil obter um novo com mais dois vértices v e w : remova duas semiarestas $x\cdot$, $y\cdot$ e adicione arestas xv , vw , wy e semiarestas $v\cdot$, $w\cdot$. Além disso, o semigrafo obtido é um tijolo-aresta de um grafo ciclicamente 4-aresta-conexo obtido pela junção de B e um s-quadrado; e este contém o grafo subjacente de B como subgrafo. Então, existem snarks Tipo 2 para toda ordem par a partir de 40. \square

Neste contexto, encerramos este capítulo com a seguinte pergunta: Existe um snark Tipo 2 de ordem menor que 40?

Uma busca computacional listou todos os snarks com até 34 vértices e todos são Tipo 1. Assim, as únicas possíveis ordens ainda desconhecidas são 36 e 38. Mais detalhes sobre a parte computacional deste capítulo podem ser vistos no Apêndice A.

No próximo capítulo daremos continuidade a busca pelo snark Tipo 2 sem quadrados.

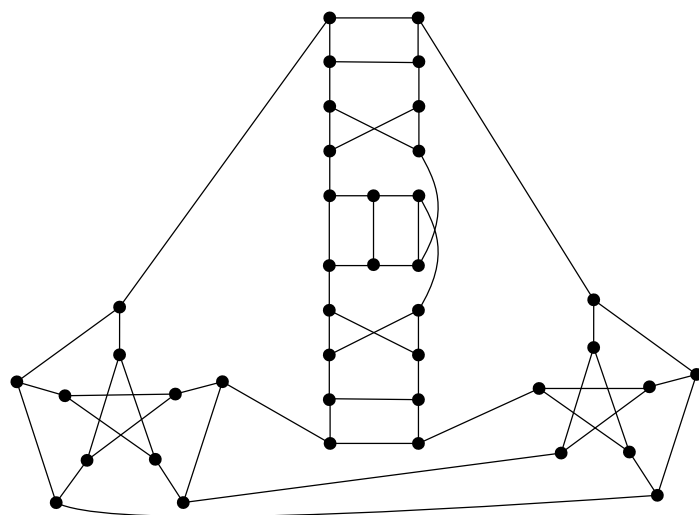


Figura 2.13: Um dos 11 menores snarks Tipo 2 obtidos pela junção de tijolos das Figuras 2.7 e 2.10.

Capítulo 3

E a busca continua

Até o presente momento, todo snark Tipo 2 que conhecemos possui quadrados e todo grafo cúbico Tipo 2 conhecido na literatura, qualquer que seja o índice cromático ou conectividade cíclica de aresta, possui quadrados ou triângulos (famílias de grafos cúbicos Tipo 2 são conhecidas desde 1988 [18]). Então, poderíamos pensar que não existem grafos cúbicos Tipo 2 com cintura pelo menos 5. Neste contexto, investigamos a Questão 2, brevemente abordada como um item no início do Capítulo 2.

Questão 2. *Existe grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5?*

Esta questão é mais geral que a questão proposta por Cavicchioli et al. [15], já que esta última se refere somente aos snarks.

Buscando responder positivamente a Questão 2, apresentamos uma condição suficiente para grafos cúbicos serem Tipo 2, que nos permitiu mostrar que alguns grafos são Tipo 2 sem o uso do computador. Por outro lado, analisamos outras famílias de snarks e também a classe de grafos cúbicos bastante conhecida dos grafos de Petersen generalizados, contribuindo com as evidências de que a Questão 2 possui resposta negativa.

3.1 Grafos cúbicos Tipo 2

Foram apresentados nos capítulos anteriores, diversos exemplos de grafos cúbicos Tipo 2, porém todos contendo quadrados ou triângulos.

Chetwynd e Hilton [18] provaram que todos os membros da família escada de Möbius são Tipo 2 (um grafo cúbico escada de Möbius, em inglês “Möbius ladder graph”, consiste em um ciclo par tal que os vértices das diagonais opostas são conectados por uma aresta). Utilizando o computador, Hamilton e Hilton [27] listaram todos os grafos com grau máximo 3 que são Tipo 2 e críticos até ordem 16, continuando a lista obtida por Chetwynd [17] de grafos até ordem 10. Dentre estes 165 grafos, somente um não possui quadrado: é o grafo cúbico $K'_{3,3}$ de ordem 12

obtido a partir do $K_{3,3}$ na substituição de cada um dos três vértices de uma parte da bipartição por um triângulo (Figura 3.2). Além disso, também com uma busca computacional, foi verificado que dentre os grafos cúbicos sem quadrado com cintura pequena, somente mais um é Tipo 2: o grafo de Petersen generalizado $G(9, 3)$ [10] (veja Figura 3.1). Portanto, até então não conhecemos nenhum outro grafo cúbico sem quadrado que seja Tipo 2 e os dois grafos $K'_{3,3}$ e $G(9, 3)$ possuem triângulos. Além disso, não temos ideia de como explicar porque um grafo cúbico Tipo 2 “precisa” de ciclos pequenos.

De qualquer forma, a cintura parece desempenhar um papel relevante na coloração total. Uma *coloração total fracionária* é uma atribuição de valores no intervalo $[0, 1]$ a cada conjunto independente de elementos de um grafo, ou seja, conjuntos de vértices e arestas dois a dois não incidentes nem adjacentes, de forma que a soma dos valores atribuídos a todos os conjuntos independentes nos quais cada elemento do grafo está contido, deve ser pelo menos 1. O *tamanho* de uma coloração total fracionária é a soma dos valores atribuídos a todos os conjuntos independentes do grafo. O *número cromático de coloração total fracionária* de G , denotado por χ''_f , é o menor tamanho de uma coloração total fracionária de G (veja [56] para mais detalhes sobre colorações fracionárias). Sabe-se que $4 \leq \chi''_f \leq \chi'' \leq 5$ para grafos cúbicos [56]. Reed [47] conjecturou que para todo $\epsilon > 0$ e todo inteiro Δ , existe g tal que o número cromático de coloração total fracionária de qualquer grafo com grau máximo Δ e cintura pelo menos g é no máximo $\Delta + 1 + \epsilon$. Esta conjectura foi provada em [33] para $\Delta = 3$ e Δ par, e em [36] para os demais casos. Em particular, o resultado seguinte é provado para o caso cúbico em [33].

Teorema 29 ([33]). *O número cromático de coloração total fracionária de qualquer grafo com grau máximo 3 e cintura pelo menos 15840 é 4.*

Caso não existam grafos cúbicos com cintura pelo menos 5 que sejam Tipo 2, poderemos então substituir 15840 por 5 no Teorema 29, porque a partir de uma coloração total sempre conseguimos construir uma coloração total fracionária de mesmo tamanho.

Como o problema de decidir se um grafo cúbico é Tipo 1 é *NP*-completo [42], não é fácil encontrar uma caracterização para os grafos Tipo 2 e, em geral, para mostrar que um grafo cúbico é Tipo 2, não conhecemos outra estratégia, além de tentar colorir o grafo com quatro cores até encontrar uma impossibilidade.

Porém, apresentamos uma condição suficiente que garante que um grafo cúbico é Tipo 2. Esta condição nos permite provar que alguns grafos cúbicos são Tipo 2 apresentando uma prova teórica, sem utilizar o computador. Esta condição é baseada na seguinte observação.

Dada uma 4-coloração-total de um grafo cúbico G Tipo 1, seja M_i o conjunto de

arestas com a cor i . Pela definição de uma coloração total, M_i é um emparelhamento. Além disso, como temos uma 4-coloração-total de um grafo cúbico, todo vértice que não é incidente a uma aresta deste emparelhamento deve ser colorido com a cor i . Assim, estes vértices formam um conjunto independente e nenhuma outra aresta pode ser adicionada ao emparelhamento, ou seja, M_i é um emparelhamento maximal. Isto nos dá, juntamente com o Lema 15, mais uma caracterização dos grafos cúbicos Tipo 1.

Propriedade 30. *Um grafo cúbico é Tipo 1 se e somente se seu conjunto de arestas pode ser particionado em quatro emparelhamentos maximais.*

Demonstração. Já mostramos que esta condição é necessária. Assuma que um grafo cúbico G possui uma partição de suas arestas em quatro emparelhamentos maximais M_1, M_2, M_3, M_4 . Seja S_i o conjunto de vértices não cobertos por M_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Como M_i é maximal, cada S_i é um conjunto independente. Além disso, como G é cúbico, para todo vértice v de G existe uma única cor $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que nenhuma aresta incidente a v em G está em M_i . Assim, S_1, S_2, S_3, S_4 é uma partição dos vértices de G em conjuntos independentes (podemos ter algum S_i vazio) e a função que atribui cor i a um elemento de $M_i \cup S_i$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) é uma 4-coloração-total de G . \square

Logo, se um grafo cúbico G não pode ser particionado em quatro emparelhamentos maximais, então o grafo é Tipo 2. Uma forma de um grafo cúbico não poder ser particionado em quatro emparelhamentos maximais é se este não possuir emparelhamento maximal de tamanho pelo menos $\frac{|E|}{4}$ (todos os emparelhamentos maximais teriam tamanho menor que $\frac{|E|}{4}$ e, neste caso, a soma do tamanho de quatro emparelhamentos seria menor que $|E|$). Porém, sabemos que todo grafo cúbico sem ponte admite um emparelhamento perfeito [43], ou seja, de tamanho $\frac{n}{2}$, que é sempre maior que $\frac{|E|}{4} = \frac{3n}{8}$. Assim, os grafos cúbicos sem ponte sempre possuem um emparelhamento maximal “grande”.

A partir de uma outra forma de um grafo cúbico não poder ser particionado em quatro emparelhamentos maximais, derivamos a seguinte condição suficiente para um grafo cúbico precisar de cinco cores em qualquer coloração total:

Propriedade 31. *Se um grafo cúbico G não possui emparelhamento maximal de tamanho no máximo $\frac{|E|}{4}$, então G é Tipo 2.*

Ou seja, todos os emparelhamentos maximais teriam tamanho maior que $\frac{|E|}{4}$ e, neste caso, a soma do tamanho de quatro emparelhamentos seria maior que $|E|$.

Como veremos mais tarde, esta condição não é necessária para ser Tipo 2, porém pode ser usada ainda com sucesso. Denotamos por $MMM(G)$ o emparelhamento maximal de tamanho mínimo de um grafo G . Em [69], foi mostrado que o problema

de computar o $MMM(G)$ é NP-difícil mesmo para grafos bipartidos de grau máximo 3 ou grafos planares de grau máximo 3. Observe que a Proposição 31 pode ser generalizada como: se um grafo G k -regular não possui emparelhamento maximal de tamanho no máximo $\frac{|E|}{k+1}$, então G não possui uma $(k+1)$ -coloração-total ($k \geq 1$).

Corolário 32. *Grafos K_4 , $K_{3,3}$, $G(5,1)$ e $G(9,3)$ são Tipo 2.*

Demonstração. Como o K_4 é um grafo completo, todo emparelhamento maximal é um emparelhamento perfeito e a condição da Proposição 31 é satisfeita.

No caso do $K_{3,3}$ o mesmo acontece, ou seja, todos os emparelhamentos maximais são perfeitos e então $K_{3,3}$ também satisfaz a condição da Proposição 31.

Agora, suponha que o grafo de Petersen generalizado $G(5,1)$ (veja Figura 3.1) possui um emparelhamento maximal M de tamanho no máximo $3 = \lfloor \frac{15}{4} \rfloor$. Este deixa um conjunto independente S de vértices não cobertos por M tal que $|S| \geq 4$. Assim, S contém precisamente dois vértices do ciclo $u_0u_1u_2u_3u_4$ e dois vértices do ciclo $v_0v_1v_2v_3v_4$ (pela estrutura do grafo). Assumindo, sem perda de generalidade, que u_1 e u_3 estão em S , temos que u_2v_2 está em M , e dessa forma, somente mais um vértice (v_4 ou v_0) pode estar em S , contradição com o fato de que S contém pelo menos 4 vértices.

Considere agora o grafo $G(9,3)$ (veja Figura 3.1). Este grafo possui 18 vértices e 27 arestas. Suponha que $G(9,3)$ possui emparelhamento maximal M de tamanho no máximo $6 = \lfloor \frac{27}{4} \rfloor$, e seja S o conjunto de vértices não cobertos por M , então $|S| \geq 6$. Por definição, $G(9,3)$ consiste em um ciclo externo C de 9 vértices e três triângulos conectados a C por três arestas incidentes aos vértices que estão mutuamente a distância 3 em C .

Afirmção 1: Os três vizinhos em C dos vértices de um triângulo não podem estar todos em S .

Prova da Afirmção 1: Assuma que os vértices de um triângulo são adjacentes a três vértices de S . Assim, os três vértices do triângulo deveriam ser dois a dois emparelhados pelas arestas de M . Isto é impossível.

Afirmção 2: Se uma das arestas que conectam um triângulo a C está em M , e um dos vizinhos em C de um vértice deste mesmo triângulo está em S , então o triângulo não possui vértices em S .

Prova da Afirmção 2: Denote por t_1, t_2, t_3 os vértices do triângulo, por t_1c a aresta em M e por t_2c' a aresta tal que $c' \in C \cap S$. De fato, o vértice t_2 não pode estar em S , e a única maneira deste vértice ser coberto é se a aresta t_2t_3 estiver em M . Assim, nenhum vértice do triângulo está em S .

Como um triângulo possui no máximo um vértice em S , pelo menos três vértices de S estão em C . Pela Afirmção 1, dois vértices com distância 2 em C deverão estar em S . Assuma, sem perda de generalidade, que estes vértices são u_1 e u_3 .

Portanto, u_2v_2 deve estar em M .

Assuma que o triângulo $v_2v_5v_8$ contém um vértice em S , por simetria, podemos assumir que $v_5 \in S$. Assim, v_8u_8 está em M e u_0 deve ser coberto pela aresta u_0v_0 em M . Agora, C contém no máximo mais um vértice em S (u_6 ou u_7), e pela Afirmação 2, o triângulo $v_3v_6v_0$ não contém nenhum vértice em S . Contradição com o fato de que S contém pelo menos 6 vértices.

Assuma que $v_2v_5v_8$ não contém vértices em S . Então, C deve conter mais do que 3 vértices e um deles deve ser u_5 ou u_8 . Por simetria, podemos assumir que $u_8 \in S$. Assim, novamente u_0v_0 deve estar em M e pela Afirmação 2, o triângulo $v_3v_6v_0$ não contém vértices de S . Como C contém no máximo 4 vértices de S , chegamos a uma contradição com o fato de que S contém pelo menos 6 vértices. Isto completa a prova. \square

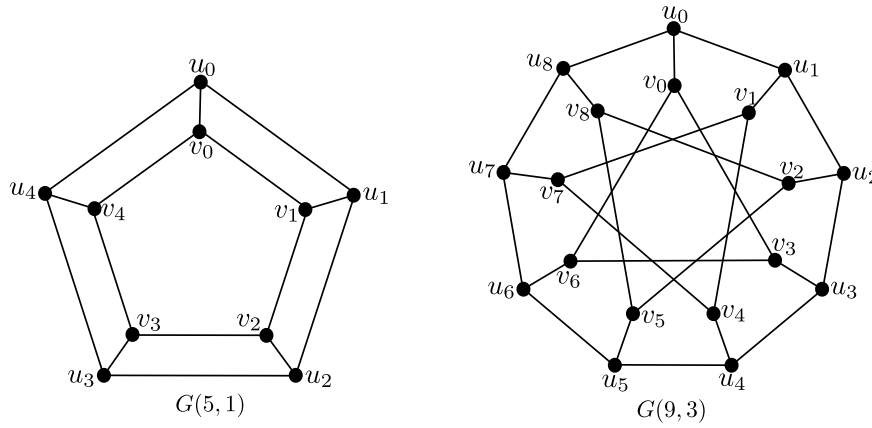


Figura 3.1: Grafos de Petersen generalizados que são Tipo 2: $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$.

Por [13, 18], sabemos que dentre os grafos de Petersen generalizados $G(n, 1)$ com $n \geq 3$, o único que não possui emparelhamento maximal de tamanho no máximo $\frac{|E|}{4}$ é o grafo $G(5, 1)$ que é Tipo 2. Na Seção 3.2, pelo Teorema 34 e resultados computacionais, mostramos que dentre todos os grafos de Petersen generalizados $G(n, 3)$ com $n \geq 7$, o único que não possui emparelhamento maximal de tamanho no máximo $\frac{|E|}{4}$ é o grafo $G(9, 3)$ que é Tipo 2.

A condição suficiente não é necessária. Por exemplo, não podemos utilizar a condição para provar que o grafo $K'_{3,3}$ (Figura 3.2) é Tipo 2. No $K'_{3,3}$ existe um emparelhamento maximal de tamanho 4, que é menor ou igual a $\frac{|E|}{4} = \lfloor \frac{18}{4} \rfloor$. Veja a seguir uma prova de que o grafo $K'_{3,3}$ é Tipo 2.

Propriedade 33. *O grafo $K'_{3,3}$ é Tipo 2.*

Demonstração. Denotamos por $A, B, C, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ os vértices do $K'_{3,3}$, onde a_i, b_i, c_i são os três vértices dos triângulos, A é adjacente a todos os

a_i 's, B a todos os b_i 's e C a todos os c_i 's ($1 \leq i \leq 3$). Não existe emparelhamento maximal de tamanho menor que 4, pois não existe nenhum conjunto independente de cardinalidade 6 no $K'_{3,3}$.

Afirmção 1: Para qualquer emparelhamento maximal M do $K'_{3,3}$ de tamanho 4, o conjunto independente S de quatro vértices não cobertos contém exatamente dois vértices dos A, B, C .

Prova da Afirmção 1: O conjunto S contém pelo menos um vértice dos A, B, C , pois existem quatro vértices em S e cada triângulo contém no máximo um vértice em S . Assim, podemos assumir, sem perda de generalidade, que o vértice A está em S . Então, a_1, a_2, a_3 devem ser cobertos por três arestas distintas de M que estão nos triângulos. Portanto, como $|M| = 4$ existe precisamente uma aresta de M conectando um dos triângulos aos vértices B e C , e precisamente um dos dois vértices B e C continuam não cobertos por M .

A Afirmção 1 prova que quaisquer dois emparelhamentos maximais de tamanho 4 não possuem conjuntos de vértices não cobertos que são disjuntos, e pela Propriedade 30, a partição das arestas de $K'_{3,3}$ em quatro emparelhamentos maximais não pode conter mais do que um emparelhamento maximal de tamanho 4. Dessa forma, $K'_{3,3}$ não admite uma partição das 18 arestas em quatro emparelhamentos maximais. \square

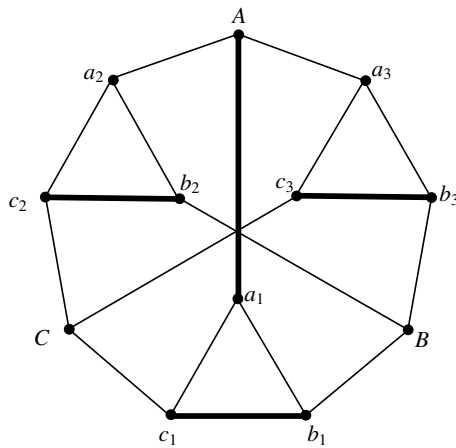


Figura 3.2: Grafo $K'_{3,3}$.

3.2 Grafos de Petersen generalizados Tipo 1

Na Seção 3.1 provamos que os grafos $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$ são Tipo 2 e, até onde sabemos, estes são os únicos exemplos de grafos de Petersen generalizados Tipo 2. Além disso, por [18] sabemos que todos os grafos de Petersen generalizados $G(n, 1)$, também

conhecidos como prismas ou “ladders” são Tipo 1, com exceção de $G(5, 1)$. Os resultados que apresentamos nesta seção indicam que dificilmente encontraremos mais grafos Tipo 2 nesta classe de grafos cúbicos.

Evidenciamos isto provando que, para cada inteiro positivo $k \geq 2$, existe no máximo uma quantidade finita de grafos de Petersen generalizados $G(n, k)$ que são Tipo 2.

Para provar o próximo teorema, definimos o seguinte semigrafo $F_{l,k}$, para $l \geq 2k - 1$:

- Os vértices de $F_{l,k}$ são
 $u_1, u_2, \dots, u_l, v_1, v_2, \dots, v_l$,
- As arestas de $F_{l,k}$ são
 $u_i u_{i+1}$ para $1 \leq i < l$,
 $u_i v_i$ para $1 \leq i \leq l$,
 $v_i v_{i+k}$ para $1 \leq i \leq l - k$,
- As semiarestas de $F_{l,k}$ são divididas em duas classes: semiarestas da esquerda e semiarestas da direita. Cada classe contém $k + 1$ semiarestas numeradas de 0 à k :
A 0-ésima semiaresta da esquerda é $u_1 \cdot$,
A i -ésima semiaresta da esquerda é $v_i \cdot$, para $1 \leq i \leq k$,
A 0-ésima semiaresta da direita é $u_l \cdot$,
A $(i - l + k)$ -ésima semiaresta da direita é $v_i \cdot$, para $l - k + 1 \leq i \leq l$.

Todo semigrafo isomorfo a $F_{l,k}$ é chamado de k -bordado de tamanho l .

Definimos a *mistura* de um k -bordado F de tamanho l e um k -bordado F' de tamanho l' , como o k -bordado FF' de tamanho $l + l'$ obtido pela junção da i -ésima semiaresta da direita de F com a i -ésima semiaresta da esquerda de F' para $0 \leq i \leq k$. As semiarestas da esquerda de FF' são de F e as semiarestas da direita são de F' .

Definimos o *fechamento* de um k -bordado F como o grafo obtido pela junção, para cada $0 \leq i \leq k$, da i -ésima semiaresta da esquerda de F com a i -ésima semiaresta da direita do mesmo F . É simples verificar que o fechamento de um k -bordado de tamanho $l > 2k$ é um grafo de Petersen generalizado $G(l, k)$. Veja na Figura 3.5 o grafo $G(11, 3)$ obtido a partir dos 3-bordados $F_{5,3}$ e $F_{6,3}$.

Dadas duas 4-colorações de arestas forte ϕ e ϕ' dos k -bordados $F = F_{l,k}$ e $F' = F_{l',k}$, respectivamente, dizemos que ϕ é *compatível* com ϕ' se para cada i de 0 a k :

- a cor dada por ϕ para a i -ésima semiaresta da direita de F é igual a cor dada por ϕ' para a i -ésima semiaresta da esquerda de F' ;

- a cor induzida por ϕ no vértice extremo da i -ésima semiaresta da direita de F é diferente da cor induzida por ϕ' no vértice extremo da i -ésima semiaresta da esquerda de F' .

Assim, ϕ e ϕ' geram uma 4-coloração de arestas forte para a mistura de F e F' .

As 4-colorações de arestas forte de uma família \mathcal{F} de k -bordados, para um dado k , são chamadas de *mutuamente compatíveis* se, para quaisquer duas colorações ϕ e ϕ' (não necessariamente distintas), temos que ϕ é compatível com ϕ' . Note que 4-colorações de arestas forte da família \mathcal{F} de k -bordados são mutuamente compatíveis se e somente se para cada i de 0 a k :

- todas as i -ésimas semiarestas possuem mesma cor;
- a cor induzida no vértice extremo de qualquer i -ésima semiaresta da direita é diferente da cor induzida no vértice extremo de qualquer i -ésima semiaresta da esquerda.

Assim, qualquer sequência de misturas em \mathcal{F} e também de seus fechamentos possuem uma 4-coloração de arestas forte.

Teorema 34. *O grafo de Petersen generalizado $G(n, k)$ é Tipo 1 para $k \geq 2$ e n tal que $n = 2k\lambda + (2k - 1)\mu$ para inteiros não-negativos λ e μ .*

Demonstração. A prova segue da seguinte forma: para todo $k \geq 2$, definimos duas 4-colorações de arestas forte, uma para o k -bordado $F_{2k,k}$ e outra para o k -bordado $F_{2k-1,k}$, que são mutuamente compatíveis.

Como podemos obter $G(n, k)$ pela mistura de λ k -bordados de tamanho $2k$ e μ k -bordados de tamanho $2k - 1$, a afirmação está provada.

Temos que separar em dois casos de acordo com a paridade de k .

- Caso k par:

Definimos uma 4-coloração de arestas forte Φ_{2k} com cores 1,2,3,4 para um k -bordado de tamanho $2k$. A Figura 3.3 apresenta a coloração.

O conjunto

$$\Phi_{2k}(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i < k, i \text{ par,} \\ 2 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar,} \\ 3 & \text{se } i \geq k, i \text{ par,} \\ 4 & \text{se } i \geq k, i \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\Phi_{2k}(u_i v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq i < 2k, i \text{ par,} \\ 2 & \text{se } k < i < 2k, i \text{ ímpar,} \\ 3 & \text{se } i < k, i \text{ par, ou } i = 2k, \\ 4 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\Phi_{2k}(v_i v_{i+k}) = \begin{cases} 3 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar,} \\ 4 & \text{se } i \leq k, i \text{ par.} \end{cases}$$

$$\Phi_{2k}(i\text{-ésima semiaresta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ ímpar, ou } i = 0, \\ 2 & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

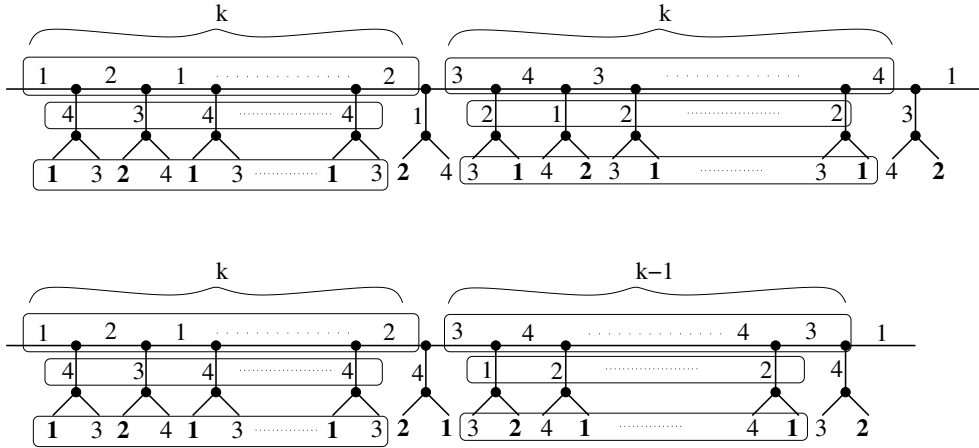


Figura 3.3: As 4-colorações de arestas forte Φ_{2k} e Φ_{2k-1} para o caso k par. As cores das semiarestas estão em negrito.

Agora, definimos uma 4-coloração de arestas forte Φ_{2k-1} para um k -bordado de tamanho $2k - 1$. A Figura 3.3 apresenta a coloração.

O conjunto

$$\Phi_{2k-1}(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i < k, i \text{ par,} \\ 2 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar,} \\ 3 & \text{se } i \geq k, i \text{ par,} \\ 4 & \text{se } i \geq k, i \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\Phi_{2k-1}(u_i v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k < i < 2k, i \text{ ímpar,} \\ 2 & \text{se } k < i < 2k, i \text{ par,} \\ 3 & \text{se } i < k, i \text{ par,} \\ 4 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar, ou } i = k, 2k - 1, \end{cases}$$

$$\Phi_{2k-1}(v_i v_{i+k}) = \begin{cases} 3 & \text{se } i \text{ ímpar,} \\ 4 & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

$$\Phi_{2k-1}(i\text{-ésima semiaresta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ ímpar, ou } i = 0, \\ 2 & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

- Caso k ímpar:

Definimos uma 4-coloração de arestas forte φ_{2k} com cores 1,2,3,4 para um k -bordado de tamanho $2k$. A Figura 3.4 apresenta a coloração.

O conjunto

$$\varphi_{2k}(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i < k, i \text{ par, ou } i = 2k - 1, \\ 2 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar,} \\ 3 & \text{se } i > k, i \text{ par,} \\ 4 & \text{se } k \leq i < 2k - 1, i \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\varphi_{2k}(u_i v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k < i < 2k - 1, i \text{ ímpar,} \\ 2 & \text{se } k < i < 2k, i \text{ par, ou } i = 2k - 1, \\ 3 & \text{se } i < k, i \text{ par, ou } i = k, \\ 4 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar, ou } i = 2k. \end{cases}$$

$$\varphi_{2k}(v_i v_{i+k}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq k, i \text{ ímpar, ou } i = k - 1, \\ 2 & \text{se } i < k - 1, i \text{ par.} \end{cases}$$

$$\varphi_{2k}(i\text{-ésima semiaresta}) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = k, \\ 3 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar, ou } i = 0, \\ 4 & \text{se } i \text{ par e } i \neq 0. \end{cases}$$

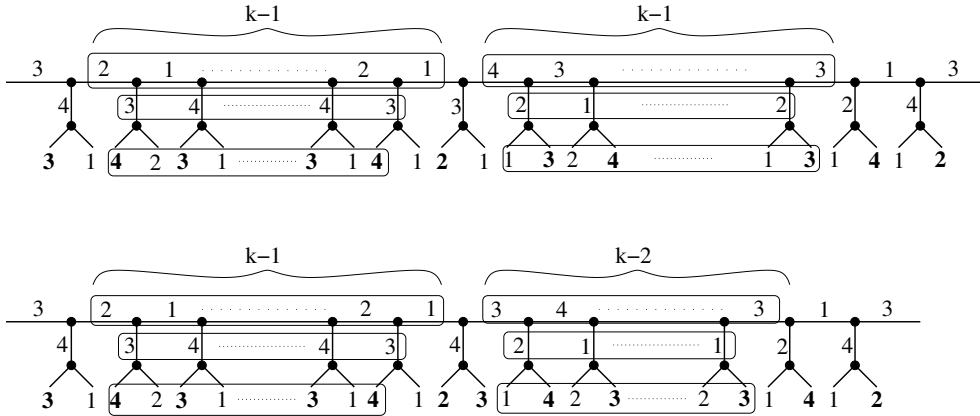


Figura 3.4: As 4-colorações de arestas forte φ_{2k} e φ_{2k-1} para o caso k ímpar. As cores das semiarestas estão em negrito.

Definimos uma 4-coloração de arestas forte φ_{2k-1} para um k -bordado de tamanho $2k - 1$. A Figura 3.4 apresenta a coloração.

O conjunto

$$\varphi_{2k-1}(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i < k, i \text{ par, ou } i = 2k - 2, \\ 2 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar,} \\ 3 & \text{se } i \geq k, i \text{ ímpar,} \\ 4 & \text{se } k < i < 2k - 2, i \text{ par.} \end{cases}$$

$$\varphi_{2k-1}(u_i v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k < i < 2k - 1, i \text{ ímpar,} \\ 2 & \text{se } k < i < 2k - 1, i \text{ par,} \\ 3 & \text{se } i < k, i \text{ par,} \\ 4 & \text{se } i \leq k, i \text{ ímpar, ou } i = 2k - 1. \end{cases}$$

$$\varphi_{2k-1}(v_i v_{i+k}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar, ou } i = k - 1, \\ 2 & \text{se } i < k - 1, i \text{ par.} \end{cases}$$

$$\varphi_{2k-1}(i\text{-ésima semiaresta}) = \begin{cases} 2 & \text{se } i = k, \\ 3 & \text{se } i < k, i \text{ ímpar, ou } i = 0, \\ 4 & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

Fazendo uma análise, veremos que as 4-colorações de arestas forte Φ_{2k} e Φ_{2k-1} , assim como φ_{2k} e φ_{2k-1} , são mutuamente compatíveis. Isto completa a prova. \square

A Figura 3.5 apresenta um exemplo.

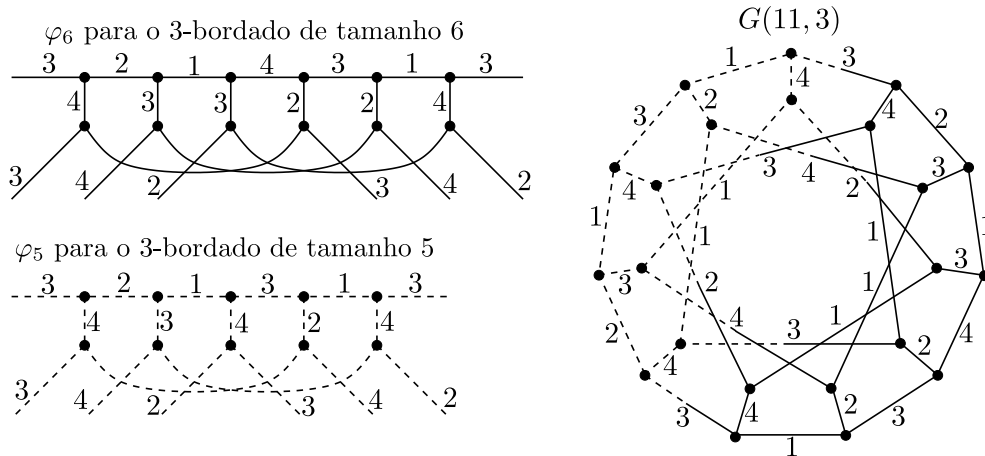


Figura 3.5: Aplicação do Teorema 34 para obter uma 4-coloração de arestas forte do grafo $G(11, 3)$.

Corolário 35. Para $n \geq (2k - 1)(2k - 2)$, o grafo de Petersen generalizado $G(n, k)$ é Tipo 1.

Demonstração. Foi provado por Sylvester [59] que cada inteiro $n \geq (2k - 1)(2k - 2)$ pode ser obtido pela combinação adequada dos números $2k$ e $2k - 1$. Assim, a afirmação acima é consequência direta do Teorema 34. \square

Teorema 36. *Se $G(n, k)$ é Tipo 1, então $G(n', k')$ é Tipo 1, para todo $n' \equiv 0 \pmod n$ e todo $k' \equiv k \pmod n$.*

Demonstração. Sejam $n \geq 3$ e k dois inteiros tais que $G(n, k)$ é Tipo 1. Assim, existe uma 4-coloração de arestas forte c do k -bordado $F = F_{n,k}$ satisfazendo as propriedades indicadas anteriormente, para a prova do Teorema 34, que garante que qualquer sequência de misturas de cópias de F e também seus fechamentos, possuem uma 4-coloração de arestas forte.

Então, para qualquer n' que é um p -ésimo múltiplo de n , obtemos uma 4-coloração de arestas forte c' de $G(n', k)$ fazendo a mistura de p cópias de F e esta coloração possui a propriedade de que para cada $1 \leq i \leq n$ e $0 \leq p' \leq p$ as arestas $v_i u_i$, $v_i v_{i+k}$ e $v_i v_{i-k}$ possuem mesma cor respectivamente de $v_{i+p'n} u_{i+p'n}$, $v_{i+p'n} v_{i+p'n+k}$ e $v_{i+p'n} v_{i+p'n-k}$ (qualquer j maior que n' é considerado como $j - n'$).

Como consequência, se $k' - k$ é um q -ésimo múltiplo de n ($1 \leq q \leq p$), substituindo cada aresta $v_i v_{i+k}$ por uma aresta $v_i v_{i+k+qn}$ de mesma cor, obtemos uma 4-coloração de arestas forte de $G(n', k')$. Veja um exemplo na Figura 3.6. \square

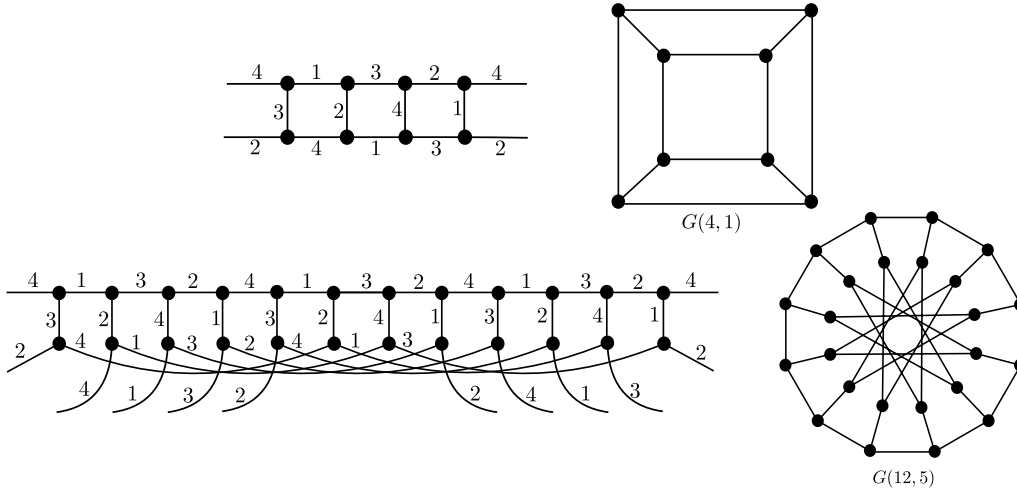


Figura 3.6: Aplicação do Teorema 36 para obter uma 4-coloração de arestas forte do $G(12, 5)$ a partir de uma 4-coloração de arestas forte do $G(4, 1)$. O grafo $G(12, 5)$ não é coberto pelo Teorema 34.

Além dos resultados teóricos que apresentamos nesta seção, também foi feita uma busca computacional para tentar encontrar outros grafos de Petersen generalizados que fossem Tipo 2. Com esta busca, verificamos que todos os grafos de Petersen generalizados de ordem até 70 são Tipo 1 com apenas duas exceções que já conhecemos: $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$. Para valores pequenos de k , a combinação do Teorema 34,

Teorema 36 e a busca computacional deixou em aberto alguns casos. Por exemplo, para $k = 4$, o único caso em aberto é do grafo $G(41, 4)$. Para $k = 5$, também não conseguimos cobrir os casos $G(41, 5)$, $G(43, 5)$, $G(53, 5)$, $G(61, 5)$ e $G(71, 5)$ com os argumentos anteriores. Finalmente, para $k = 6$, oito casos não foram cobertos e o maior deles é o $G(109, 6)$, grafo com mais de 200 vértices. Portanto, uma nova busca computacional somente destes casos específicos nos permitiu provar o seguinte teorema.

Teorema 37. *Todos os grafos de Petersen generalizados $G(n, k)$, $k \leq 6$, são Tipo 1 com exceção dos $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$.* \square

Mais detalhes sobre a parte computacional deste capítulo podem ser vistos no Apêndice A.

3.3 Snarks Tipo 1

Nesta seção, estabelecemos que todos os membros de duas famílias infinitas de snarks Semi blowup e Blowup, recentemente definidas por Hägglund [26], são Tipo 1. Além disso, estabelecemos que todos os membros de uma família infinita de snarks, obtida pela superposição definida por Kochol [37] em 1996, também são Tipo 1. Vale lembrar que todos estes snarks possuem cintura maior que 4.

Snarks SemiBlowup e Blowup Em [26], Hägglund definiu duas construções de snarks que possuem como parâmetros um grafo G e um subgrafo 2-regular D de G . Consideramos os snarks obtidos quando G é o grafo de Petersen generalizado $G(n, 1)$ e D é o ciclo de tamanho n de $G(n, 1)$ gerado por u_0, u_1, \dots, u_{n-1} . Definimos estas famílias diretamente.

Cada construção utiliza um semigrafo cúbico com seis semiarestas: S no caso SemiBlowup e B no caso Blowup, como indica a Figura 3.7. Para um dado n , denotamos por:

- n -SemiBlowup, o grafo constituído por um “ciclo” de n cópias de S tal que duas cópias consecutivas são conectadas como mostra a Figura 3.8 (a).
- n -Blowup, o grafo constituído por um “ciclo” de n cópias de B tal que duas cópias consecutivas são conectadas como mostra a Figura 3.8 (b).

Por [26], sabemos que os grafos n -SemiBlowup e n -Blowup são snarks; e para todo $n \geq 5$, estes possuem cintura igual a 5.

Teorema 38. *Para todo $n \geq 5$, os snarks n -SemiBlowup e n -Blowup são Tipo 1.*

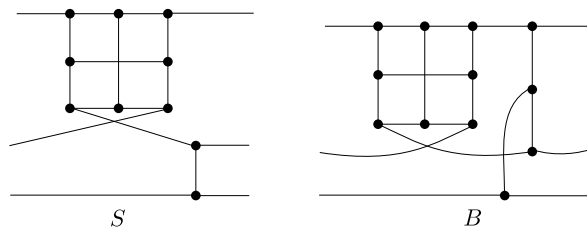


Figura 3.7: Os dois semigrafos S e B usados na construção.

Demonstração. Definimos 4-colorações-totais dos snarks n -SemiBlowup e n -Blowup usando colorações parciais que podem ser combinadas de forma a não haver conflito.

Nas Figuras 3.8 (a) e (c), ϕ_1 é uma 4-coloração de arestas forte do semigrafo gerado por duas cópias consecutivas de S no n -SemiBlowup e φ_1 é uma 4-coloração de arestas forte do semigrafo gerado por três cópias consecutivas de S no n -SemiBlowup. É fácil observar que estas colorações são mutuamente compatíveis (como para os k -bordados).

Assim, para n par, usando ϕ_1 para $\frac{n}{2}$ cópias consecutivas de pares de S , obtemos uma 4-coloração de arestas forte do snark n -SemiBlowup. Para n ímpar, precisamos usar uma vez a 4-coloração de arestas forte φ_1 para três cópias consecutivas de S , seguida de ϕ_1 para $\frac{n-3}{2}$ cópias consecutivas de pares de S . Dessa forma, temos uma 4-coloração de arestas forte do snark n -SemiBlowup, para n ímpar.

A coloração do snark n -Blowup é obtida de mesma forma, substituindo ϕ_1 e φ_1 por ϕ_2 e φ_2 , resp. Veja as Figuras 3.8 (b) e (d). \square

Superposição A seguir, apresentamos uma família de snarks construída através do método chamado de *superposição*, proposto por Kochol [37] em 1996, e provamos que todos os seus membros são Tipo 1. Com este método, Kochol foi capaz de construir uma quantidade infinita de snarks com cintura grande. Portanto, sem dúvida, trabalhar mais com estas construções será um bom caminho para a busca do grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5. Continuaremos uma investigação mais profunda sobre este método nos trabalhos futuros.

Para a construção, utilizamos os semigrafos cúbicos que admitem semiarestas isoladas, ou seja, semiarestas sem vértices extremos. Considere o semigrafo cúbico $M = (V, E, S)$. S é particionado em n conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos S_1, S_2, \dots, S_n , tais que $|S_i| = k_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Os conjuntos S_i 's são chamados de *conectores* do (k_1, k_2, \dots, k_n) -semigrafo M . Consideramos uma semiaresta isolada como dois elementos em S , um para cada extremo da semiaresta isolada.

Uma *superaresta* é um semigrafo com dois conectores e um *supervértice* é um semigrafo com três conectores. Os seguintes semigrafos serão usados na construção e estão ilustrados na Figura 3.9.

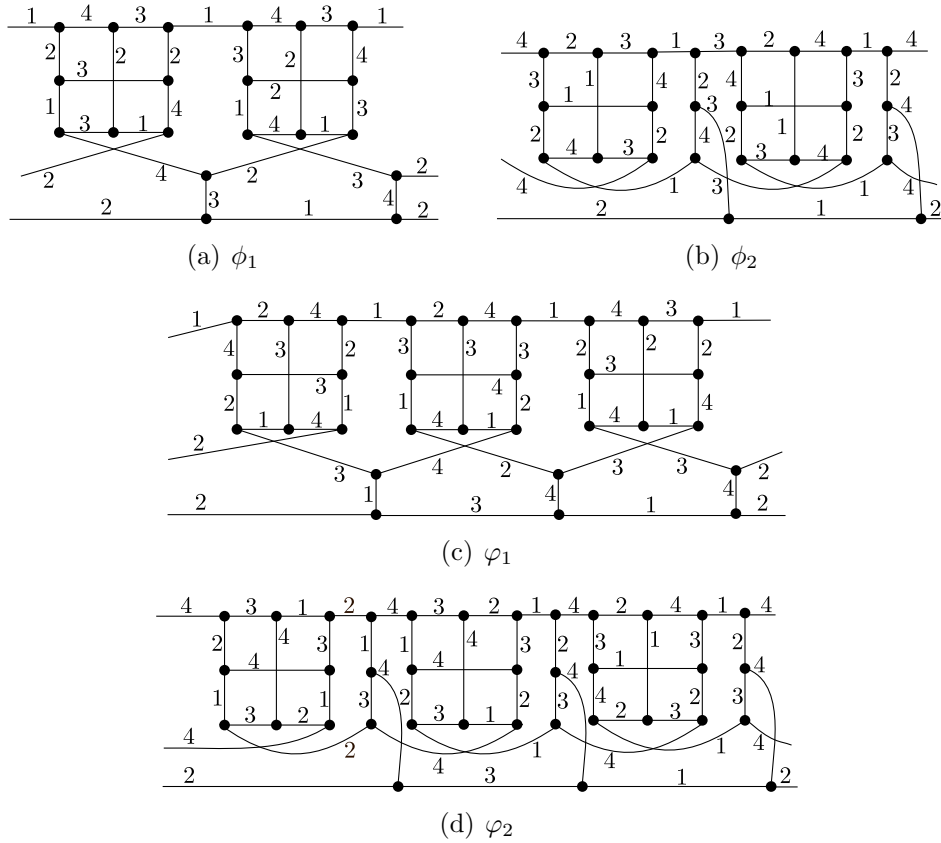


Figura 3.8: 4-colorações de arestas forte ϕ_1 , ϕ_2 , φ_1 , e φ_2 .

- (a) Seja G um snark e sejam u_1 e u_2 dois vértices não adjacentes de G . O $(3, 3)$ -semigrafo G' obtido a partir de G pela remoção destes vértices é uma superaresta. Na construção a seguir, utilizamos os snarks da família Snark-Flor;
- (b) O $(1, 1)$ -semigrafo L' consistindo em uma semiaresta isolada é uma superaresta;
- (c) O $(1, 3, 3)$ -semigrafo J' consistindo em duas semiarestas isoladas e um vértice extremo de três semiarestas é um supervértice;
- (d) O $(1, 1, 1)$ -semigrafo N' consistindo em um vértice extremo de três semiarestas é um supervértice.

Seja G um grafo cúbico. Substitua cada aresta $e \in E$ por uma superaresta $\xi(e)$ e cada vértice $v \in V$ por um supervértice $\vartheta(v)$. Assuma que, se $v \in V$ é incidente a $e \in E$, então um conector de $\vartheta(v)$ é pareado com um conector de $\xi(e)$, ambos possuindo a mesma quantidade de semiarestas. Fazendo a junção das semiarestas, obtemos um grafo cúbico que é chamado *grafo de superposição de G* , denotado por $G(\vartheta, \xi)$. As Figuras 3.9 e 3.11 apresentam todos os elementos envolvidos na construção.

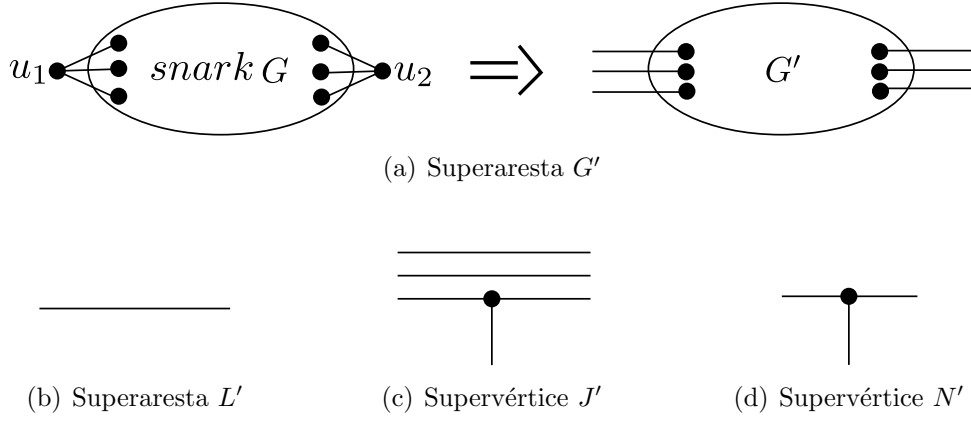


Figura 3.9: Semigrafos usados na construção.

De uma forma sucinta, apresentaremos a superposição que constrói um novo snark a partir do snark de Petersen, pela substituição de vértices e arestas pelos supervértices e superarestas listados acima.

Denotamos por F_i , $i \geq 5$ ímpar, o membro da conhecida família Snark-Flor, definida por Isaacs [31]. Para cada i , a partir do snark de Petersen, construímos um novo snark de ordem $24i - 2$.

Acompanhe a seguir as etapas da construção do snark $P_i(\vartheta, \xi)$, $i \geq 5$ ímpar.

- (1) Considere o Snark-Flor F_5 da Figura 3.10. O $(3, 3)$ -semigrafo F'_i de ordem $4i - 2$ obtido a partir de F_i pela remoção dos vértices u_1 e u_2 (Figura 3.9 (a)), que são preservados em todos os snarks F_i , $i \geq 5$, é uma superaresta usada na construção do novo snark $P_i(\vartheta, \xi)$.
- (2) Considere agora o grafo de Petersen P ilustrado na Figura 3.11. Para cada i , substitua as seis arestas $x_1y_1, y_1z_1, z_1x_2, x_2y_2, y_2z_2, z_2x_1$ de P por seis cópias da superaresta F'_i , denotadas como $A_i^1, A_i^2, A_i^3, A_i^4, A_i^5, A_i^6$, respectivamente.
- (3) Substitua os seis vértices $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ de P por seis cópias do supervértice J' representado na Figura 3.9 (c).
- (4) Por fim, os demais elementos de P são preservados no novo snark $P_i(\vartheta, \xi)$. Mais precisamente, todas as arestas e vértices restantes são substituídos por cópias da superaresta L' e por cópias do supervértice N' , resp. representados nas Figuras 3.9 (b) e (d).

O grafo cúbico $P_i(\vartheta, \xi)$ obtido por esta construção é um snark [37]. Como sempre removemos o mesmo par de vértices u_1 e u_2 de F_i , temos que esta família é bem particular. Portanto, outras famílias infinitas de snarks podem ser obtidas com esta mesma construção, utilizando os mesmos elementos e tomando outros pares de vértices em F_i , por exemplo.

Teorema 39. Cada snark $P_i(\vartheta, \xi)$, $i \geq 5$ ímpar, é Tipo 1.

Demonstração. A prova deste resultado requer três 4-colorações-totais para cada $(3, 3)$ -semigrafo F'_i obtido a partir de cada Snark-Flor F_i , $i \geq 5$ ímpar, pela forma apresentada anteriormente. Utilizamos a 4-coloração-total da família Snark-Flor determinada por Campos et al. [12] e, com base neste trabalho, determinamos as outras duas 4-colorações-totais para os F'_i 's, que serão utilizadas nesta prova. Para mais detalhes sobre a construção da família Snark-Flor, indicamos [12, 31].

Considere as três 4-colorações-totais C^1, C^2, C^3 do $(3, 3)$ -semigrafo F'_i apresentadas na Figura 3.10 para o F'_5 (a coloração C^3 foi determinada por Campos et al. [12]). Para cada C^j , $j = 1, 2, 3$, seja $C^{j'}$ a 4-coloração-total obtida a partir de C^j , pela seguinte troca de cores: cor 2 em C^j pela cor 4 em $C^{j'}$, para $j = 1, 3$; e cor 3 em C^j pela cor 2 em $C^{j'}$, para $j = 2$.

As 4-colorações-totais C^1, C^2, C^3 e $C^{1'}, C^{2'}, C^{3'}$ serão utilizadas na 4-coloração-total do snark $P_i(\vartheta, \xi)$.

Nas 4-colorações-totais C^j , $j = 1, 2, 3$, indicadas na Figura 3.10, as três semiarestas de cada conector S_k , $k = 1, 2$, do $(3, 3)$ -semigrafo cúbico F'_i estão em negrito para facilitar a visualização. Além disso, exibimos somente as cores em C^j atribuídas aos vértices extremos de cada semiaresta.

Cada C^j pode ser estendida de forma a colorir todos os F'_i 's, $i \geq 7$, seguindo o que foi feito em [12]. A Figura 3.10 exhibe C^j para o $(3, 3)$ -semigrafo F'_5 .

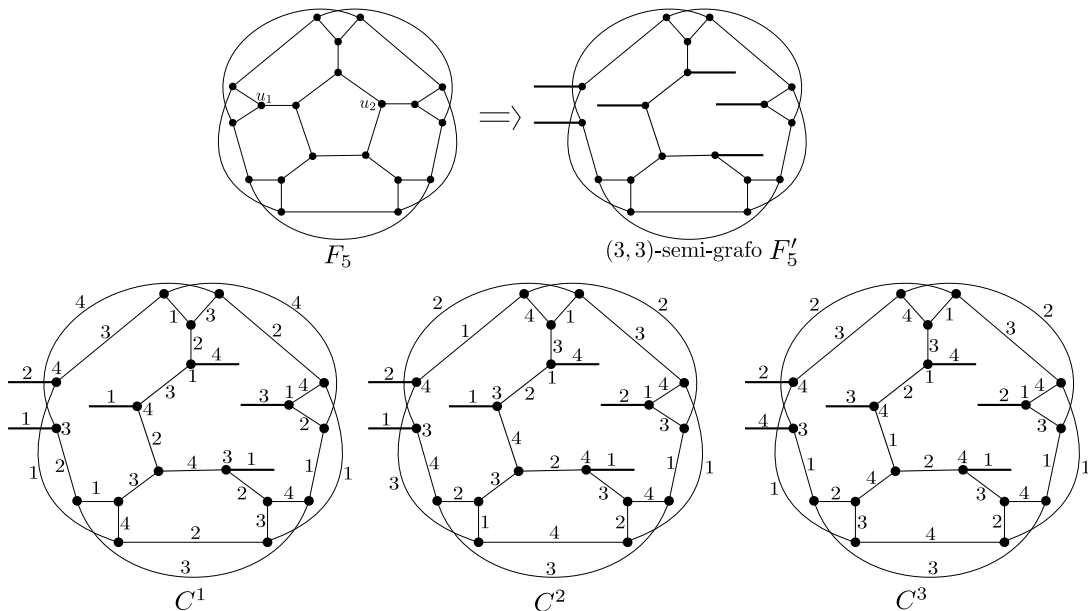


Figura 3.10: Exemplos das 4-colorações-totais C^1, C^2, C^3 .

A 4-coloração-total do novo snark $P_i(\vartheta, \xi)$, $i \geq 5$ ímpar, utiliza a coloração $C^{1'}$ para a cópia A_1 , $C^{2'}$ para A_2 , C^3 para A_3 , C^1 para A_4 , $C^{3'}$ para A_5 , e finalmente

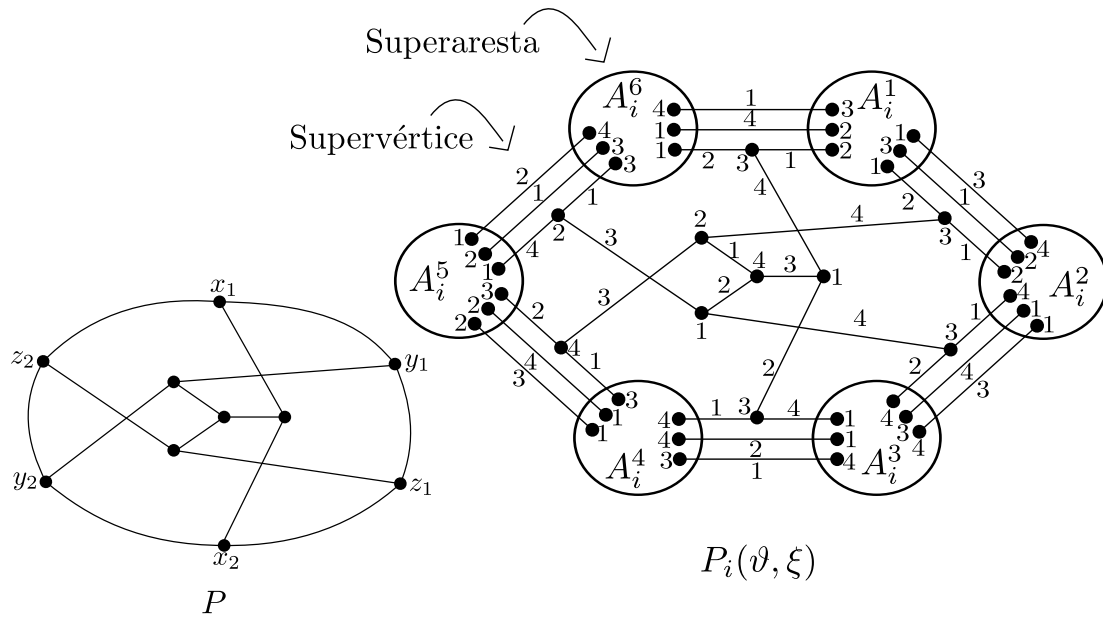


Figura 3.11: Um esquema da superposição abordada.

C^2 para A_6 . Estendemos esta 4-coloração-total para o snark $P_i(\vartheta, \xi)$ como na Figura 3.11; observe que não há conflito de cores entre os elementos. Assim, concluímos a prova. \square

Uma generalização desta construção consiste em alterar a etapa (2) para: Substituir as seis arestas de P por seis superarestas obtidas a partir de F_i , considerando qualquer i , e esta generalização nos permite construir snarks de ordem $118 + 8l$, $l \geq 0$, que são Tipo 1.

Chegamos ao final do terceiro capítulo sobre coloração total de grafos cúbicos. Foram apresentados os resultados obtidos na busca de respostas para as seguintes questões:

Questão 1. (Cavicchioli et al. [15]) *Existe snark Tipo 2 com cintura pelo menos 5?*

Questão 2. *Existe grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5?*

Repare que uma resposta positiva para a Questão 1 é também uma resposta positiva para a Questão 2. Até então, foram encontrados resultados indicando que ambas questões possuem resposta negativa ou, pelo menos, que uma resposta positiva será um grafo com uma quantidade grande de vértices.

Nosso objetivo, a partir de agora, é investigar uma coloração total mais restrita que será apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 4

A coloração total equilibrada

Uma coloração total é *equilibrada* se as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem de no máximo 1. De forma similar às demais colorações, o *número cromático de coloração total equilibrada* de G , denotado por $\chi_e''(G)$, é o menor k tal que G possui uma coloração total equilibrada com k cores. Em [66] foi conjecturado que $\chi_e''(G) \leq \Delta + 2$ para todo grafo G e esta conjectura foi provada para todos os grafos cúbicos no mesmo trabalho. Na Seção 4.3 mostramos que o problema de determinar se um grafo cúbico bipartido possui uma 4-coloração-total equilibrada é NP-completo, o que já se acreditava em [38].

Conhecemos poucas classes de grafos para as quais o número cromático de coloração total equilibrada foi determinado. Podemos citar, por exemplo, os grafos completos e grafos bipartidos completos [38].

Até então, grafos Tipo 1 com o número cromático total estritamente menor que o número cromático de coloração total equilibrada, i.e., $\chi'' = \Delta + 1 < \chi_e'' = \Delta + 2$, eram conhecidos (um exemplo se encontra na Figura 4.1), porém nenhum cúbico [22]. Todos os exemplos conhecidos de grafos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada $\Delta + 2$ são regulares com $\Delta \geq 6$ e com triângulos [22]. Abrimos esta seção, apresentando os inéditos grafos cúbicos Tipo 1 tais que $\chi_e'' = 5$. Como estes grafos possuem quadrados ou triângulos, começamos o estudo desta coloração total mais restrita propondo a Questão 3, relacionada com a Questão 2.

Questão 3. *Existe grafo cúbico Tipo 1 tal que $\chi_e''(G) = 5$ com cintura pelo menos 5?*

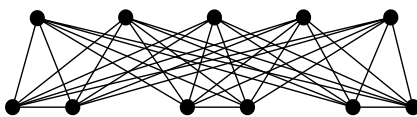


Figura 4.1: Grafo tal que $\chi'' = \Delta + 1 < \chi_e'' = \Delta + 2$ [22].

4.1 Número cromático de coloração total equilibrada igual a 5

Apresentamos a seguir os primeiros grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5. Para tanto, considere o semigrafo cúbico K' gerado a partir do grafo bipartido completo $K_{2,3}$. O semigrafo K' possui propriedades de coloração interessantes. Primeiro, citamos o Lema 24 já apresentado anteriormente, que será útil nesta seção e que pode facilmente ser verificado.

Lema 24. *Em toda 4-coloração-total de um semigrafo cúbico gerado a partir de um quadrado (um s -quadrado), semiarestas incidentes a vértices adjacentes possuem cores diferentes.* \square

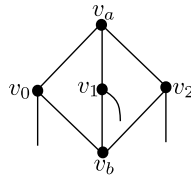


Figura 4.2: Semigrafo cúbico K' gerado a partir do $K_{2,3}$.

Lema 40. *Em toda 4-coloração-total de K' , todas as semiarestas possuem a mesma cor e seus vértices extremos possuem cores diferentes.*

Demonstração. Considere uma 4-coloração-total de K' . Seja s uma semiaresta de K' e e uma aresta de K' . De dois fatos, um acontece: ou s e e são incidentes e neste caso possuem cores diferentes; ou s e e são incidentes a vértices adjacentes de um quadrado em K' e neste caso, considerando os s -quadrados envolvidos, pelo Lema 24, possuem cores diferentes também. Por exemplo, para concluir que a semiaresta v_0 possui cor diferente da aresta $v_a v_2$, considere o s -quadrado com vértices v_0, v_a, v_1, v_b . Como são necessárias três cores para colorir as arestas de K' , então são usadas exatamente três cores para as arestas de K' e a cor restante é usada nas semiarestas.

Suponha agora que os vértices extremos de duas semiarestas distintas recebem a mesma cor. Isto implica que as arestas do único quadrado que contém estas duas semiarestas são coloridas com somente duas cores. Assim, as duas arestas que não estão no quadrado devem possuir mesma cor, porém estas são adjacentes, contradição. Então, os vértices extremos das três semiarestas de K' possuem cores diferentes. \square

A seguir, usamos a seguinte construção: Seja G um grafo cúbico e seja K um grafo com exatamente três vértices de grau 2 e todos os demais com grau 3. Construímos um novo grafo cúbico, denotado por G_v^K da seguinte forma:

- Remova um vértice v de G (e todas as arestas incidentes a v),
- Conecte os três vértices de $G \setminus \{v\}$ de grau 2 com os três vértices de K de grau 2, pareando-os com três novas arestas.

Nesta seção, K é sempre um triângulo ou o grafo bipartido completo $K_{2,3}$. Pela simetria destes dois grafos, a escolha das conexões acima não é relevante. Assim, dizemos simplesmente que G_v^K é obtido pela substituição do vértice v de G por uma cópia de K . Denotamos por G^K o grafo cúbico obtido pela substituição de cada vértice de G por uma cópia de K .

Agora, estamos preparados para construir infinitos grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5. O grafo obtido a partir de um grafo cúbico H , pela substituição de cada vértice pelo $K = K_{2,3}$, é o grafo cúbico H^K com as propriedades desejadas.

Teorema 41. *O grafo cúbico H^K obtido a partir de um grafo cúbico H , pela substituição de cada vértice por K , é Tipo 1 e possui número cromático de coloração total equilibrada 5.*

Demonstração. Seja H um grafo cúbico com n vértices, H^T o grafo obtido a partir de H pela substituição de cada vértice de H por um triângulo e H^K o grafo obtido a partir de H pela substituição de cada vértice H por K .

Note que H^K pode também ser obtido a partir de H^T pela seguinte transformação: para todo triângulo $T = v_0v_1v_2$ que substitui um vértice v de H , removemos as três arestas do triângulo e adicionamos dois vértices v_a e v_b , ambos conectados aos vértices v_0, v_1 e v_2 (veja os rótulos da Figura 4.2).

Pelo conhecido Teorema de Brooks [11], existe uma 3-coloração de vértices c de H^T e, a partir de c e da construção acima, derivamos uma 4-coloração-total c' de H^K da seguinte forma: todos os vértices que já estavam em H^T preservam suas cores e todos os vértices novos são coloridos com cor 4; todas as arestas que já estavam em H^T também são coloridas com 4; e para todo vértice v de H , $c'(v_av_i) = c(v_{i+1})$ e $c'(v_bv_i) = c(v_{i-1})$ (onde os índices são tomados módulo 3). Portanto H^K é Tipo 1.

Denote o número de vértices de H^K por $\lambda = 5n$. Pelo Lema 40, em qualquer 4-coloração-total de H^K , $\frac{3n}{2}$ arestas e $2n$ vértices possuem a mesma cor, por exemplo 4. Assim, existem $\frac{7n}{2}$ elementos com a cor 4. Por outro lado, a cardinalidade de cada uma das outras três classes de cor é $3n$. Portanto, as cardinalidades da classe de cor 4 e das outras classes diferem de $\frac{n}{2}$. É interessante notar que esta diferença cresce de acordo com o número de vértices n de H .

Como um grafo cúbico possui número cromático de coloração total equilibrada no máximo 5 [66], H^K possui número cromático de coloração total equilibrada 5. \square

Note que todos os grafos H^K construídos possuem quadrados e, possivelmente, alguns são bipartidos. Além disso, é fácil ver que o grafo obtido pela substituição de $n - 1$ vértices de qualquer grafo cúbico H com pelo menos 6 vértices, pelo $K_{2,3}$ e um vértice por um triângulo, possui as propriedades desejadas e além de quadrados, também possui triângulo. A Figura 4.3 apresenta um exemplo somente com quadrados e um exemplo com quadrados e triângulo.

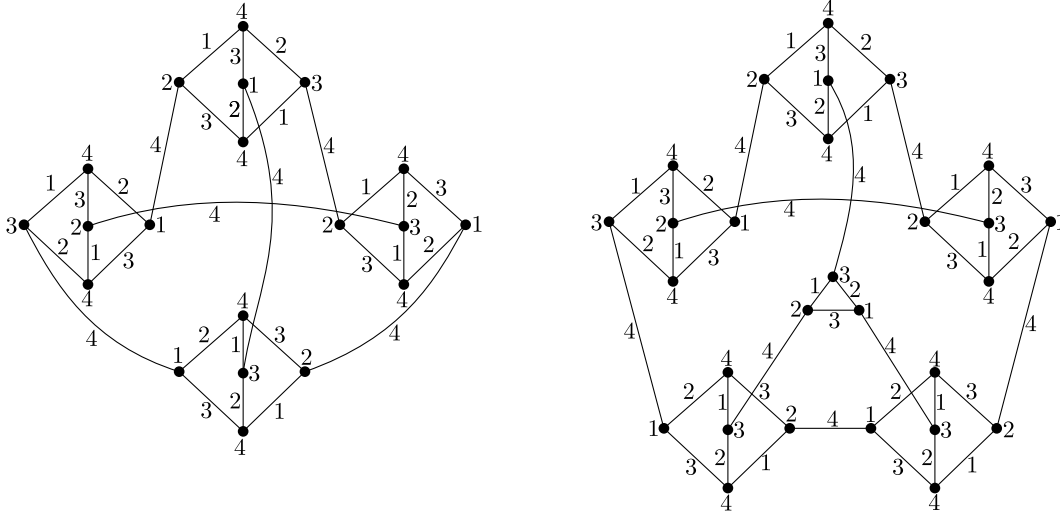


Figura 4.3: Dois exemplos de grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5.

Neste momento, é natural nos perguntarmos se existe relação entre as Questões 2 e 3. Para relembrar:

Questão 2. *Existe grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5?*

Questão 3. *Existe grafo cúbico Tipo 1 tal que $\chi_e''(G) = 5$ com cintura pelo menos 5?*

Existe uma relação interessante entre estas questões. Os exemplos apresentados acima, dos primeiros grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5, sugerem esta relação. O grafo $K_{2,3}$ usado na construção, foi obtido a partir do grafo $K_{3,3}$ que é Tipo 2, mas possui cintura pequena. O que nos permite pensar que uma resposta positiva para a Questão 2, ou seja, um grafo cúbico Tipo 2 com cintura grande, pode proporcionar um grafo que responda positivamente a Questão 3.

4.2 Número cromático de coloração total equilibrada igual a 4

A seguir, apresentamos propriedades sobre uma 4-coloração-total equilibrada de um grafo cúbico. Estas propriedades auxiliam na contagem de elementos de cada classe

de cor e usamos para determinar o número cromático de coloração total equilibrada de algumas famílias de grafos cúbicos, contribuindo para as evidências de que a Questão 3 possui resposta negativa.

Propriedades O número total de elementos que devem ser coloridos em uma 4-coloração-total C de um grafo cúbico G é $n + \frac{3n}{2} = \frac{5n}{2}$.

Seja $|x_i^e|$ o número de arestas coloridas com a cor i e $|x_i^v|$ o número de vértices coloridos com a cor i na 4-coloração-total C .

Como são quatro cores, o número de elementos é particionado em 4 conjuntos. Assim, o seguinte acontece em uma 4-coloração-total equilibrada de G em cada classe de cor i :

$$\textcircled{1} \lfloor \frac{5n}{8} \rfloor \leq |x_i^e| + |x_i^v| \leq \lceil \frac{5n}{8} \rceil$$

Como em toda 4-coloração-total de um grafo cúbico G , cada cor i ou é a cor de um vértice v ou é a cor de uma das três arestas incidentes ao vértice v , temos que

$$\textcircled{2} |x_i^v| + 2|x_i^e| = n \Rightarrow |x_i^v| + |x_i^e| = n - |x_i^e|$$

Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$:

$$\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor \leq n - |x_i^e| \leq \lceil \frac{5n}{8} \rceil \Rightarrow \lfloor \frac{5n}{8} \rfloor - n \leq -|x_i^e| \leq \lceil \frac{5n}{8} \rceil - n$$

$$\text{Assim, } n - \lceil \frac{5n}{8} \rceil \leq |x_i^e| \leq n - \lfloor \frac{5n}{8} \rfloor$$

Equivalentemente, $\lfloor \frac{3n}{8} \rfloor \leq |x_i^e| \leq \lceil \frac{3n}{8} \rceil$ e segue a Observação 42.

Observação 42. *Seja C uma 4-coloração-total de um grafo cúbico G . A 4-coloração-total C é equilibrada se e somente se a 4-coloração de arestas forte é equilibrada.* \square

$$\text{Em } \textcircled{2}, \text{ temos que } |x_i^e| = \frac{n - |x_i^v|}{2}$$

Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$:

$$\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor \leq \frac{n - |x_i^v|}{2} + |x_i^v| \leq \lceil \frac{5n}{8} \rceil \Rightarrow 2\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor \leq n + |x_i^v| \leq 2\lceil \frac{5n}{8} \rceil$$

Assim, $2\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor - n \leq |x_i^v| \leq 2\lceil \frac{5n}{8} \rceil - n$ e segue a Observação 43.

Observação 43. *Seja C uma 4-coloração-total de um grafo cúbico G . A 4-coloração-total C é equilibrada se e somente se o número de vértices de cada classe de cor difere de no máximo 2.* \square

Na verdade, as duas observações apresentadas acima podem ser generalizadas para $(\Delta + 1)$ -colorações-totais equilibradas.

Snarks Nesta seção, consideramos inicialmente as conhecidas famílias Blanuša que chamamos de Blanuša 1 e Blanuša 2. Estas famílias são construídas pelo produto interno (mencionado nos Capítulos 1 e 2) de grafos de Petersen, começando pelos dois snarks de Blanuša de ordem 18 [67]. Denotamos por BF_k (resp. BS_k), $k \geq 0$, um membro da família Blanuša 1 (resp. Blanuša 2).

O próximo resultado utiliza as 4-colorações-totais determinadas em [53], que foram obtidas da seguinte maneira: o subgrafo induzido pelos 10 vértices da esquerda e 8 vértices da direita das duas famílias é colorido como na Figura 4.4. Para BF_{2i} (resp. BS_{2i}), $i \geq 0$, uma cadeia de i cópias do semigrafo D com uma 4-coloração-total ϕ (Figura 4.4) é adicionado entre os 10 vértices da esquerda e 8 vértices da direita. Para BF_{2i+1} (resp. BS_{2i+1}), $i \geq 0$, a cadeia de i cópias de D com a 4-coloração-total ϕ é adicionada da mesma forma, seguida de uma cópia do semigrafo B com 4-coloração-total φ . Veja a Figura 4.4 para um exemplo de cada construção.

Para determinarmos o número cromático de coloração total equilibrada destas famílias de snarks, utilizamos a Observação 43 apresentada anteriormente.

Teorema 44. *Todos os snarks das duas famílias Blanuša possuem número cromático de coloração total equilibrada 4.*

Demonstração. Observe as 4-colorações-totais apresentadas na Figura 4.4. As cores de alguns vértices foram omitidas para facilitar a visualização. Na 4-coloração-total ϕ do semigrafo D da Figura 4.4, o número de vértices coloridos com cores 1, 2, 3, 4 é 4, 4, 4, 4, respectivamente. Considere a 4-coloração-total da família Blanuša 1. Para o subgrafo induzido pelos 10 vértices da esquerda e 8 vértices da direita, o número de vértices coloridos com cores 1, 2, 3, 4 é 4, 4, 6, 4, respectivamente. O número de vértices coloridos com cores 1, 2, 3, 4 na 4-coloração-total φ de B é 2, 2, 2, 2, resp. Assim, analisando as colorações, para o membro BF_{2i} , $i \geq 0$ (resp. BF_{2i+1} , $i \geq 0$), o número de vértices de cada classe de cor na 4-coloração-total difere de no máximo 2:

- cor 1: $4 + 4i$ ($4 + 2 + 4i = 6 + 4i$, resp.);
- cor 2: $4 + 4i$ ($4 + 2 + 4i = 6 + 4i$, resp.);
- cor 3: $6 + 4i$ ($6 + 2 + 4i = 8 + 4i$, resp.);
- cor 4: $4 + 4i$ ($4 + 2 + 4i = 6 + 4i$, resp.).

E pela Observação 43 todos estes grafos possuem número cromático de coloração total equilibrada 4.

O mesmo argumento de contagem é usado para mostrar que todos os snarks da família Blanuša 2 possuem número cromático de coloração total equilibrada 4. Agora, para o membro BS_{2i} (resp. BS_{2i+1}), $i \geq 0$, o número de vértices de cada classe de cor na 4-coloração-total também difere de no máximo 2:

- cor 1: $4 + 4i$ ($4 + 2 + 4i = 6 + 4i$, resp.);
- cor 2: $6 + 4i$ ($6 + 2 + 4i = 8 + 4i$, resp.);
- cor 3: $4 + 4i$ ($4 + 2 + 4i = 6 + 4i$, resp.);

- cor 4: $4 + 4i$ ($4 + 2 + 4i = 6 + 4i$, resp.).

□

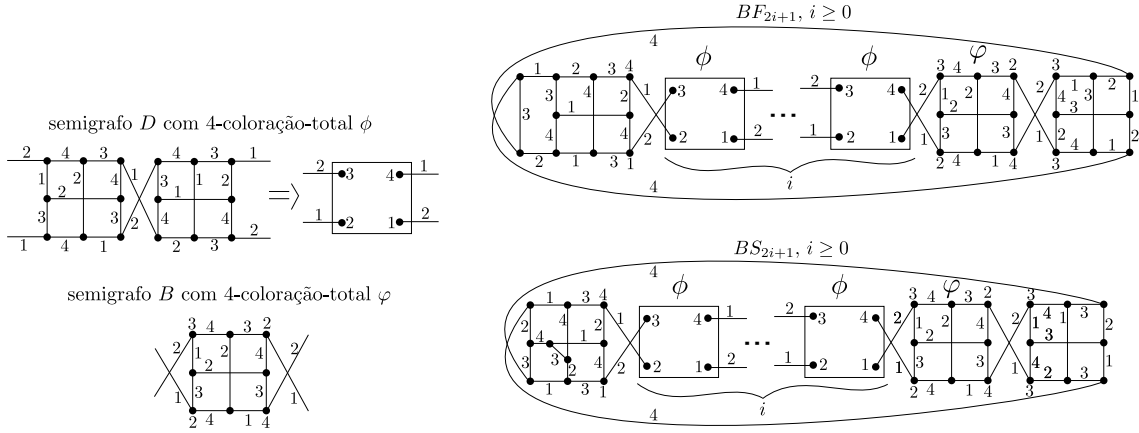


Figura 4.4: Uma ilustração das 4-colorações-totais de BF_{2i+1} e BS_{2i+1} [53].

Teorema 45. *Todos os membros da família Snark Flor possuem número cromático de coloração total equilibrada 4.* □

A prova deste teorema utiliza a 4-coloração-total determinada por Campos, Dantas e Mello [12]. Para os demais snarks Tipo 1 que conhecemos, ainda não determinamos o número cromático de coloração total equilibrada.

Grafos de Petersen generalizados Apresentamos evidências na classe dos grafos de Petersen generalizados de que a Questão 3 possui resposta negativa. Para os próximos resultados, usamos o Lema 15, definições apresentadas na Seção 3.2 e a Observação 43.

Teorema 46. *Para todo k par e $n \geq 2k$ tal que $n \equiv 0, -1$ ou $-2 \pmod{2k}$, o grafo de Petersen generalizado $G(n, k)$ possui número cromático de coloração total equilibrada 4.*

Demonstração. Mostraremos o resultado, usando as colorações Φ_{2k} e Φ_{2k-1} definidas na prova do Teorema 34.

Afirmção 1: A coloração C dos vértices do k -bordado $F_{2k,k}$ induzida pela 4-coloração de arestas forte Φ_{2k} é equilibrada, neste caso, todas as classes de cor possuem mesma cardinalidade k .

Prova da Afirmção 1: Verificando a sequência:

$$\begin{aligned} & C(u_1), C(u_2), \dots, C(u_{k-1}), C(u_k), C(u_{k+1}), C(u_{k+2}), \dots, C(u_{2k-1}), C(u_{2k}) \\ &= 3, 4, \dots, 3, 4, 1, 2, \dots, 1, 2, \end{aligned}$$

e a sequência:

$$\begin{aligned} C(v_1), C(v_2), \dots, C(v_{k-2}), C(v_{k-1}), C(v_k), C(v_{k+1}), \dots, C(v_{2k-2}), C(v_{2k-1}), C(v_{2k}) \\ = 2, 1, \dots, 1, 2, 3, 4, \dots, 3, 4, 1 \end{aligned}$$

(as reticências significam que as duas cores anteriores alternam), temos exatamente k vértices de cada cor.

Afirmção 2: A coloração c dos vértices do k -bordado $F_{2k-1,k}$ induzida pela 4-coloração de arestas forte Φ_{2k-1} é equilibrada, neste caso $k-2$ vértices são coloridos com cor 4 e as outras classes de cor possuem cardinalidade k .

Prova da Afirmção 2: Verificando a sequência:

$$\begin{aligned} c(u_1), c(u_2), \dots, c(u_{k-1}), c(u_k), c(u_{k+1}), \dots, c(u_{2k-2}), c(u_{2k-1}) \\ = 3, 4, \dots, 3, 1, 2, \dots, 1, 2, \end{aligned}$$

e a sequência:

$$\begin{aligned} c(v_1), c(v_2), \dots, c(v_{k-1}), c(v_k), c(v_{k+1}), \dots, c(v_{2k-2}), c(v_{2k-1}) \\ = 2, 1, \dots, 2, 3, 4, \dots, 3, 1, \end{aligned}$$

temos exatamente $k-2$ vértices coloridos com cor 4 e k vértices de cada outra cor.

Afirmção 3: A coloração Φ'_{2k-1} das arestas do k -bordado $F_{2k-1,k}$ obtida a partir da 4-coloração de arestas forte Φ_{2k-1} pela troca de cores 3 e 4 é forte e a coloração c' dos vértices de $F_{2k-1,k}$ induzidas por Φ'_{2k-1} é equilibrada, já neste caso temos $k-2$ vértices coloridos com cor 3 e todas as outras classes de cor possuem cardinalidade k . Esta prova é imediata.

Além disso, temos que as 4-colorações de arestas forte Φ_{2k} , Φ_{2k-1} , Φ'_{2k-1} são mutuamente compatíveis. Isto completa a prova, pois:

- para $n \equiv 0 \pmod{2k}$, $G(n, k)$ pode ser obtido pelo fechamento das misturas de $\frac{n}{2k}$ cópias de k -bordados $F_{2k,k}$,
- para $n \equiv -1 \pmod{2k}$, $G(n, k)$ pode ser obtido pelo fechamento das misturas de $\frac{n-(2k-1)}{2k}$ cópias de k -bordados $F_{2k,k}$ e uma cópia do k -bordado $F_{2k-1,k}$,
- para $n \equiv -2 \pmod{2k}$, $G(n, k)$ pode ser obtido pelo fechamento das misturas de $\frac{n-(4k-2)}{2k}$ cópias do k -bordado $F_{2k,k}$ e duas cópias do k -bordado $F_{2k-1,k}$.

Pela Observação 43, usando a 4-coloração de arestas forte Φ_{2k} e no máximo uma vez cada uma das 4-colorações de arestas forte Φ_{2k-1} e Φ'_{2k-1} , obtemos uma 4-coloração de arestas forte equilibrada para todos os casos. \square

Teorema 47. Para todo $n \geq 4$, o grafo de Petersen generalizado $G(n, 2)$ possui número cromático de coloração total equilibrada 4.

Demonstração. Pelo Teorema 46, resta mostrar que o grafo $G(n, 2)$ possui número cromático de coloração total equilibrada 4 quando $n \equiv 1 \pmod{4}$. Para tanto, considere as 4-colorações de arestas forte Φ_4 do $F_{4,2}$ e Φ_5 do $F_{5,2}$ apresentadas na Figura 4.5. Estas colorações são mutuamente compatíveis. A coloração dos 8 vértices do $F_{4,2}$ induzida por Φ_4 satisfaz a Observação 43 assim como a coloração dos 10 vértices do $F_{5,2}$ induzida por Φ_5 . Assim, usando $\frac{n-5}{4}$ vezes Φ_4 e uma vez Φ_5 , obtemos uma 4-coloração de arestas forte de $G(n, 2)$ quando $n \equiv 1 \pmod{4}$. \square

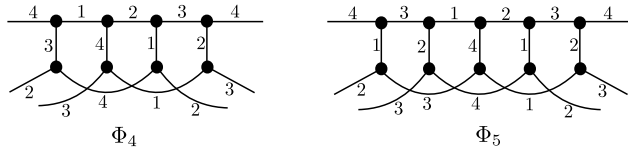


Figura 4.5: As duas 4-colorações de arestas forte Φ_4 e Φ_5 .

Teorema 48. Para todo $n \geq 3$ e $n \neq 5$, o grafo de Petersen generalizado $G(n, 1)$ possui número cromático de coloração total equilibrada 4.

Demonstração. Seguindo a mesma ideia utilizada na prova anterior, considere as 4-colorações de arestas forte φ_3 e φ'_3 do $F_{3,1}$, φ_4 do $F_{4,1}$ e φ_9 do $F_{9,1}$ apresentadas na Figura 4.6. Estas colorações são mutuamente compatíveis. Como as colorações dos vértices de cada 1-bordado, induzida pelas respectivas 4-colorações de arestas forte, satisfazem a Observação 43, obtemos uma 4-coloração de arestas forte de $G(n, 1)$ usando:

- $\frac{n}{4}$ vezes φ_4 , para $n \equiv 0 \pmod{4}$;
- $\frac{n-3}{4}$ vezes φ_4 e uma vez φ_3 , para $n \equiv 3 \pmod{4}$;
- $\frac{n-6}{4}$ vezes φ_4 , uma vez φ_3 e uma vez φ'_3 , para $n \geq 6$ e $n \equiv 2 \pmod{4}$;
- $\frac{n-9}{4}$ vezes φ_4 e uma vez φ_9 , para $n \geq 9$ e $n \equiv 1 \pmod{4}$.

\square

Note que as provas anteriores poderiam ter usado a Observação 42, porém fazer a contagem das semiarestas é um pouco mais delicado do que fazer a contagem dos vértices nos k -bordados.

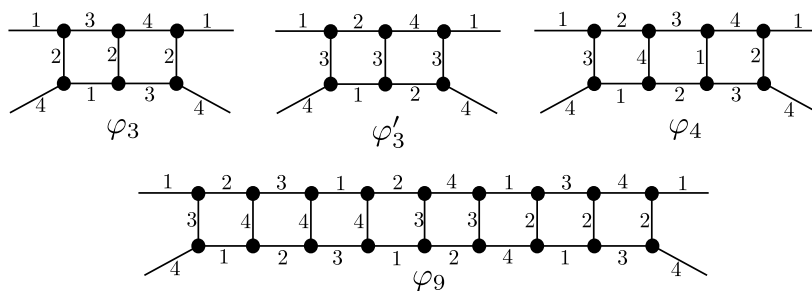


Figura 4.6: As quatro 4-colorações de arestas forte φ_3 , φ'_3 , φ_4 e φ_9 .

Para k ímpar, pela 4-coloração de arestas forte φ_{2k} definida na prova do Teorema 34, sabemos que $G(2k, k)$ possui número cromático de coloração total equilibrada 4. Além disso, por Campos e Mello [13], confirmamos que $G(n, 1)$ para $n \equiv 0 \pmod{4}$, possui número cromático de coloração total equilibrada 4.

Foi verificado com o auxílio de computador, que todos os grafos de Petersen generalizados de ordem $2n$ até 40 possuem número cromático de coloração total equilibrada 4 com as duas exceções $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$ que sabemos que são Tipo 2. Mais detalhes sobre a parte computacional deste capítulo podem ser vistos no Apêndice A.

4.3 O problema é NP-completo

Nesta seção, provamos que o problema de determinar se um grafo cúbico bipartido possui uma 4-coloração-total equilibrada é NP-completo.

Esta prova é baseada na prova de Sánchez-Arroyo para a NP-completude do problema de determinar se um grafo cúbico bipartido possui uma 4-coloração-total [49]. Dado um grafo 4-regular G , mostramos como construir um grafo cúbico bipartido G^R que possui uma 4-coloração-total equilibrada se e somente se G possui uma 4-coloração de arestas. O problema de determinar se um grafo 4-regular possui uma 4-coloração de arestas foi mostrado ser NP-completo em [39].

Sabe-se que um grafo 4-regular de ordem n ímpar é sobrecarregado, ou seja, o número de arestas do grafo é maior que $\Delta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, e portanto, este grafo é Classe 2. Sendo assim, consideramos apenas o caso em que n é par.

Para obter o grafo G^R , usaremos o grafo bipartido R que é construído usando quatro cópias do grafo H (veja o semigrafo H' gerado a partir de H na Figura 4.7), duas cópias do grafo D (veja o semigrafo D' gerado a partir de D na Figura 4.7), conectando-os através de seis vértices de ligação e arestas adicionais. Veja o semigrafo R' gerado a partir do grafo R na Figura 4.8. Com base nesta figura, é simples observar que R é bipartido com vértices pretos em uma parte da bipartição e os vértices brancos na outra. Além disso, as quatro semiarestas de R' possuem dois

vértices extremos brancos e dois vértices extremos pretos.

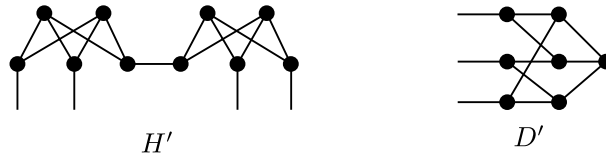


Figura 4.7: Semigrafos H' e D' .

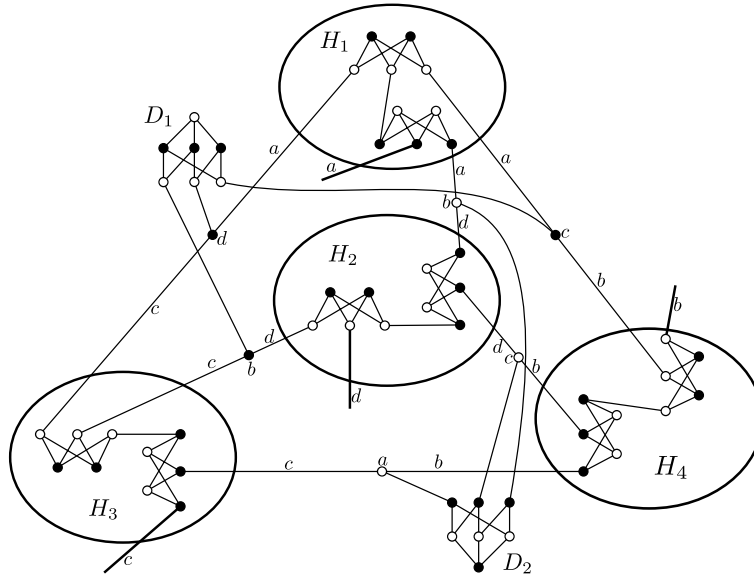


Figura 4.8: Semigrafo R' (as quatro semiarestas estão em negrito).

Construímos o grafo G^R a partir de G , substituindo cada vértice v de G pelo grafo R , seguindo a construção da Seção 4.1, qualquer semiaresta de uma cópia de R' possuindo vértice extremo preto pode se conectar com qualquer semiaresta de outra cópia de R' possuindo vértice extremo branco [49]. Claramente, o grafo G^R é cúbico e bipartido.

Veja na Figura 4.9 o modelo das 4-colorações-totais que serão utilizadas na prova: H_1, H_2 e D_1, D_2 , dos semigrafos H' e D' , resp. As cores de algumas arestas em H_1 e H_2 foram omitidas para facilitar a visualização. Note que o semigrafo H' possui propriedades de coloração total interessantes, pois este é obtido conectando-se duas cópias do semigrafo gerado a partir do $K_{2,3}$, visto na Seção 4.1, pela junção de uma semiaresta.

Afirmção 1: Em toda 4-coloração-total de R' , as quatro semiarestas possuem cores diferentes.

Prova da Afirmção 1: Isto decorre diretamente do Lema 40 na Seção 4.1 e pela construção de R .

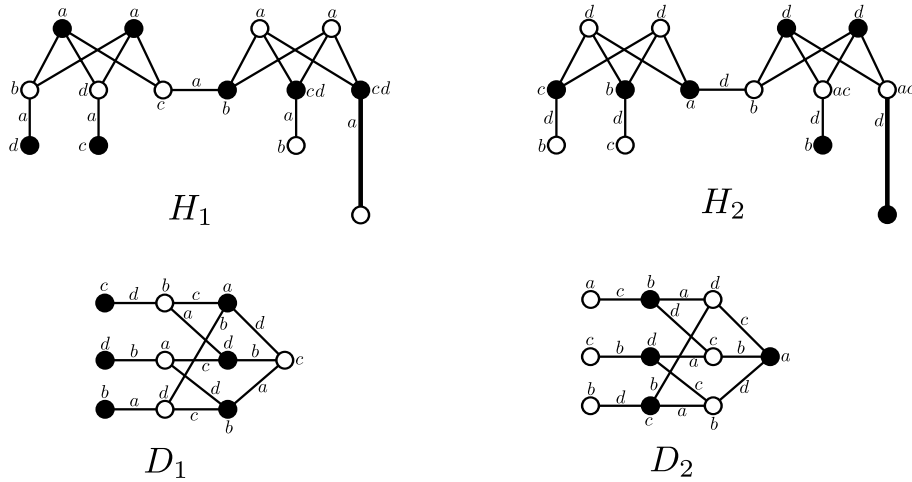


Figura 4.9: Semigrafos H' e D' com as 4-colorações-totais H_1, H_2 e D_1, D_2 , resp. A figura também apresenta os vértices de ligação, ou seja, os outros vértices extremos das semiarestas, para facilitar a análise da coloração.

Afirmção 2: O semigrafo R' possui 4-coloração-total equilibrada C , que utiliza as 4-colorações-totais de H' : H_1, H_2, H_3, H_4 , e as 4-colorações-totais de D' : D_1, D_2 .

Prova da Afirmção 2: Com base nas Figuras 4.8 e 4.9, podemos ver que R' possui uma 4-coloração-total que utiliza H_1, H_2, H_3, H_4 , e D_1, D_2 . As 4-colorações-totais H_1 e H_2 (resp. H_3 e H_4) são diferentes devido às cores atribuídas aos vértices de ligação: em H_1 estes possuem cores d, c, b enquanto em H_2 estes possuem cores b, c . Além disso, H_1 e H_3 (resp. H_2 e H_4) são análogas, por isso H_3 e H_4 não aparecem na Figura 4.9. Em cada uma destas quatro 4-colorações-totais, a classe de cor que aparece nas semiarestas possui 9 elementos enquanto as demais possuem 6 elementos cada. Como as 4-colorações-totais H_1, H_2, H_3, H_4 possuem classes de cor que aparecem nas semiarestas diferentes entre si, ao considerar estas quatro colorações, temos que a quantidade de elementos de cada classe se equilibra.

Além disso, as 4-colorações-totais D_1 e D_2 juntamente com os vértices de ligação também se equilibram: em D_1 juntamente com os respectivos vértices de ligação temos 5 elementos possuindo cores a e c , enquanto 6 elementos possuem cores b e d ; em D_2 juntamente com os respectivos vértices de ligação, a situação é invertida. Assim, R' possui uma 4-coloração-total equilibrada tal que todas as classes de cor possuem exatamente a mesma quantidade de elementos.

Afirmção 3: Se G é Classe 1, então existe uma 4-coloração-total de G^R obtida a partir de uma 4-coloração de arestas C' de G e da 4-coloração-total equilibrada C de R' .

Prova da Afirmção 3: Estabeleça uma 4-coloração de arestas C' de G . Estenda esta 4-coloração de arestas para uma 4-coloração-total de cada cópia de R (pelas Afirmções 1 e 2 isto é possível), obtendo uma coloração $C_{candidata}$ de G^R . Para es-

tabelecer que $C_{candidata}$ é uma 4-coloração-total de G^R , resta mostrar que os vértices extremos das arestas que ligam as cópias de R possuem cores diferentes. De fato, em cada coloração de H , o vértice extremo de uma aresta que liga as cópias de R possui sempre duas cores disponíveis e a escolha da cor afeta apenas as cores dos elementos próximos no mesmo H . Assim, sempre haverá uma cor disponível para cada vértice extremo de uma aresta que liga duas cópias de R .

Teorema 49. *O problema de determinar se um grafo cúbico bipartido possui uma 4-coloração-total equilibrada é NP-completo.*

Demonstração. Claramente o problema está em NP, pois podemos verificar se uma candidata é de fato uma 4-coloração-total em tempo polinomial e também podemos verificar se esta é equilibrada, contando a quantidade de elementos em cada classe de cor. Assim, resta provar que G possui uma 4-coloração de arestas se e somente se G^R possui uma 4-coloração-total equilibrada.

Pela Afirmação 1, se G^R possui uma 4-coloração-total equilibrada, então G de ordem n possui uma 4-coloração de arestas obtida contraindo cada uma das n cópias do subgrafo R a um vértice, preservando as cores das arestas que conectam estes vértices.

Por outro lado, suponha que G possui uma 4-coloração de arestas C' . Como G é de ordem n par, esta 4-coloração de arestas é equilibrada com cada classe de cor possuindo exatamente $\frac{n}{2}$ arestas.

Substituindo cada vértice de G pelo grafo R , pela Afirmação 3, a 4-coloração de arestas C' de G pode ser estendida para uma 4-coloração-total do grafo G^R . Além disso, como a 4-coloração de arestas C' de G é equilibrada com cada classe de cor possuindo exatamente $\frac{n}{2}$ arestas, e como a 4-coloração-total de cada cópia de R' (usada na Afirmação 3) é equilibrada, concluímos que a 4-coloração-total de G^R também é equilibrada com cada classe de cor possuindo exatamente $\frac{5n}{8}$ elementos. \square

Vale notar que toda 4-coloração-total de G^R é equilibrada.

A Figura 4.10 apresenta o semigrafo R' com uma 4-coloração-total equilibrada R_1 . As cores de algumas arestas foram omitidas para facilitar a visualização. Considere o grafo G de ordem 6 na Figura 4.11. Esta mesma figura apresenta um esquema do grafo cúbico e bipartido G^R construído a partir de G pela substituição de cada vértice de G pelo grafo R , com uma 4-coloração-total equilibrada. As colorações R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 foram obtidas a partir de permutações de cores da coloração R_1 . Observe que cada vértice extremo de uma aresta que ligue cópias de R 's possui duas cores disponíveis, e portanto, nunca haverá conflito entre eles.

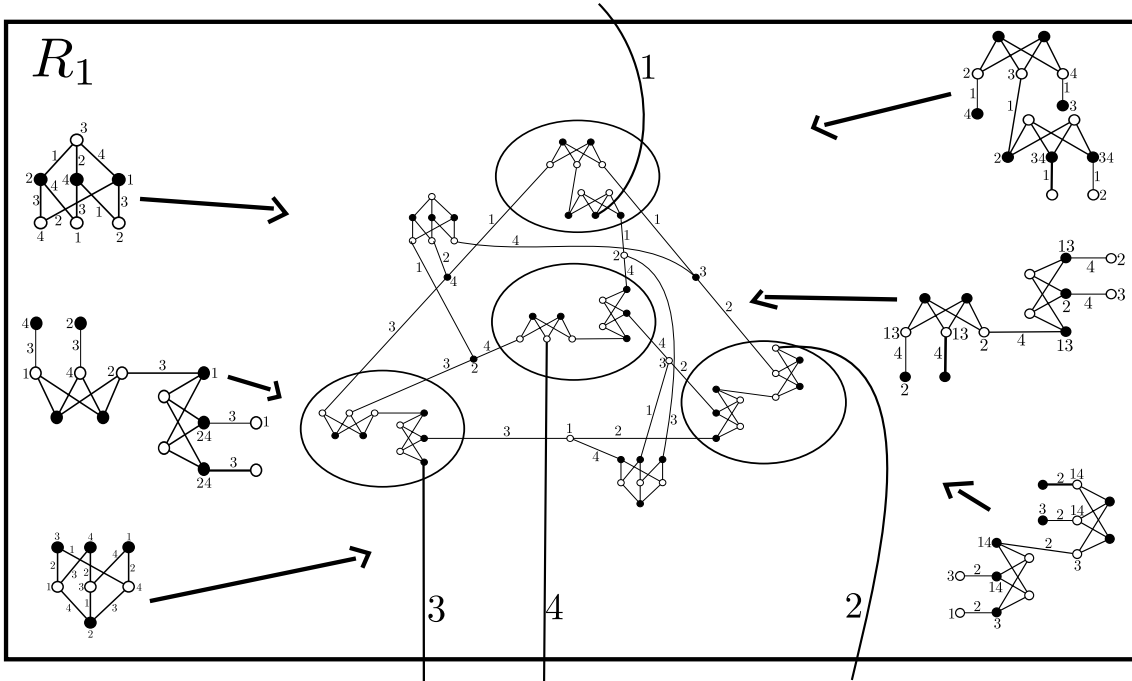


Figura 4.10: A 4-coloração-total equilibrada R_1 de R' .

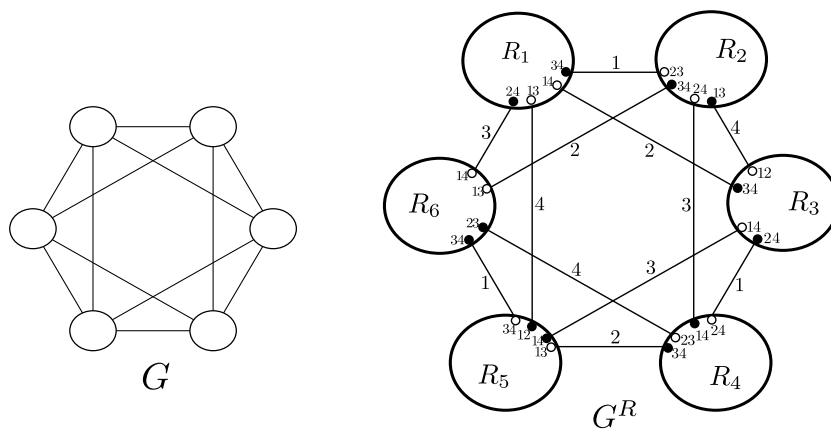


Figura 4.11: Grafo G e esquema do grafo G^R cúbico e bipartido com uma 4-coloração-total equilibrada obtida a partir de uma 4-coloração de arestas de G .

Capítulo 5

Um pouco sobre a Conjectura de Berge-Fulkerson

Como dito no início desta tese, a importância dos snarks se deve ao fato de que certas conjecturas teriam snarks como contraexemplos minimais, como por exemplo a Conjectura da dupla cobertura cíclica [57, 60], a Conjectura de Berge-Fulkerson [23, 32] e a Conjectura dos 5-fluxos de Tutte [63]. Além disso, oito conjecturas publicadas na literatura foram recentemente refutadas com a utilização dos snarks [6]. Neste contexto, estudamos um pouco sobre uma destas relevantes conjecturas, a Conjectura de Berge-Fulkerson.

Para relembrar, um grafo cúbico é ciclicamente 4-aresta-conexo se este não possui um c -corte de cardinalidade menor que 4. Um emparelhamento M de um grafo G é um subconjunto de $E(G)$ tal que nenhum par de arestas de M é adjacente. Se todo vértice de G é incidente a uma aresta de M , então M é um emparelhamento perfeito.

Uma *dupla cobertura de seis emparelhamentos perfeitos* de um grafo cúbico G é uma coleção de seis emparelhamentos perfeitos tal que toda aresta de G está exatamente em dois dos seis emparelhamentos perfeitos.

A famosa Conjectura de Berge-Fulkerson foi formulada independentemente por Berge e Fulkerson (maiores detalhes em [32]), mas publicada pela primeira vez por Fulkerson [23]. Na verdade, Mazzuocolo mostrou que as conjecturas de Berge e Fulkerson são equivalentes [41]. Até então, a Conjectura de Berge era apresentada como uma forma mais fraca da Conjectura de Fulkerson.

Conjectura 50 (Conjectura de Berge-Fulkerson, 1971). *Todo grafo cúbico sem ponte admite uma dupla cobertura de seis emparelhamentos perfeitos.*

Em um grafo cúbico Classe 1 é trivial obter uma cobertura dupla de seis emparelhamentos perfeitos, basta duplicar cada classe de cor. Assim, resta verificar a

conjectura para os grafos cúbicos Classe 2. Além disso, um contraexemplo minimal para esta conjectura seria um grafo cúbico Classe 2 ciclicamente 4-aresta-conexo [16].

Muitos snarks satisfazem a Conjectura de Berge-Fulkerson, por exemplo, a família Snark-Flor [16, 21, 28], os snarks de Goldberg [21, 28], as duas famílias Blanuša [21], o snark de Szekeres [21], uma outra família obtida pelo produto interno [16], e recentemente, uma família dos snarks de Loupekine [34]. Nesta seção, verificamos que as famílias Blowup e Semi blowup de snarks satisfazem esta conjectura.

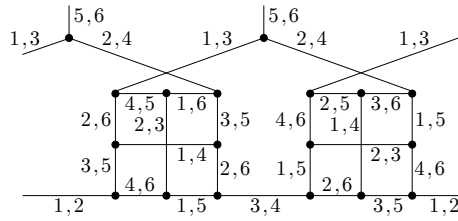
Snarks Semi blowup e Blowup Nesta parte final da tese, consideramos novamente as duas famílias de snarks recentemente definidas por Hägglund [26], que apresentamos no Capítulo 3. Contribuímos com a Conjectura de Berge-Fulkerson, provando que as duas famílias de snarks verificam a conjectura da forma a seguir.

Obtemos uma cobertura dupla de seis emparelhamentos perfeitos para cada n -SemiBlowup e n -Blowup, com $n \geq 3$, alternando as coberturas dos blocos apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2. Para cada uma das duas famílias, separamos a análise em dois casos: par e ímpar. Figuras 5.3 e 5.4 exibem exemplos contemplando todos estes casos.

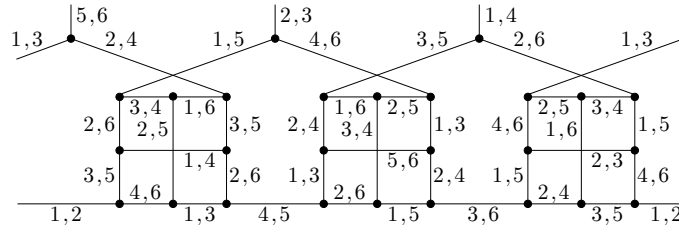
Teorema 51. *Para cada $n \geq 3$, todos os n -SemiBlowup e n -Blowup satisfazem a Conjectura de Berge-Fulkerson.*

Demonstração. Seja G um snark n -SemiBlowup. A prova consiste na construção da rotulação de G utilizando os rótulos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que cada aresta possui dois rótulos e, para cada rótulo, todo vértice é incidente a uma aresta que possui este rótulo. A construção utiliza os blocos do n -SemiBlowup rotulados apresentados na Figura 5.1. Se n é par, então é suficiente utilizar $\frac{n}{2}$ cópias do bloco de tamanho 2 na Figura 5.1 (a). Caso contrário, é preciso utilizar uma cópia do bloco de tamanho 3 na Figura 5.1 (b) seguida de $\frac{n-3}{2}$ cópias do bloco de tamanho 2. É simples observar que a rotulação é preservada na junção dos blocos e a rotulação é facilmente estendida para o ciclo central de G . Dessa forma, a rotulação das arestas de G induzem uma dupla cobertura de seis emparelhamentos perfeitos.

Para os n -Blowup, a prova é similar utilizando a rotulação das Figuras 5.2 (a) e (b). Figuras 5.3 e 5.4 apresentam exemplos de todos os casos mencionados. \square

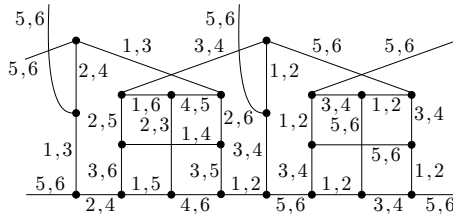


(a) Bloco de tamanho 2.

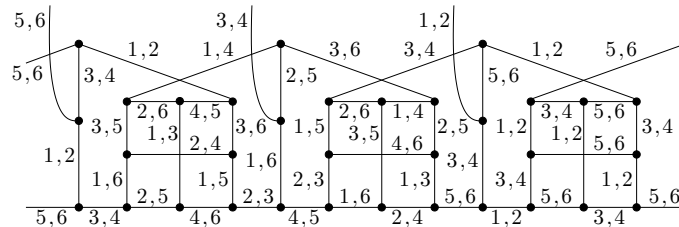


(b) Bloco de tamanho 3.

Figura 5.1: Blocos utilizados na construção dos n -SemiBlowups, com a rotulação para obter a dupla cobertura em seis emparelhamentos perfeitos.



(a) Bloco de tamanho 2.



(b) Bloco de tamanho 3.

Figura 5.2: Blocos utilizados na construção dos n -Blowups, com a rotulação para obter a dupla cobertura em seis emparelhamentos perfeitos.

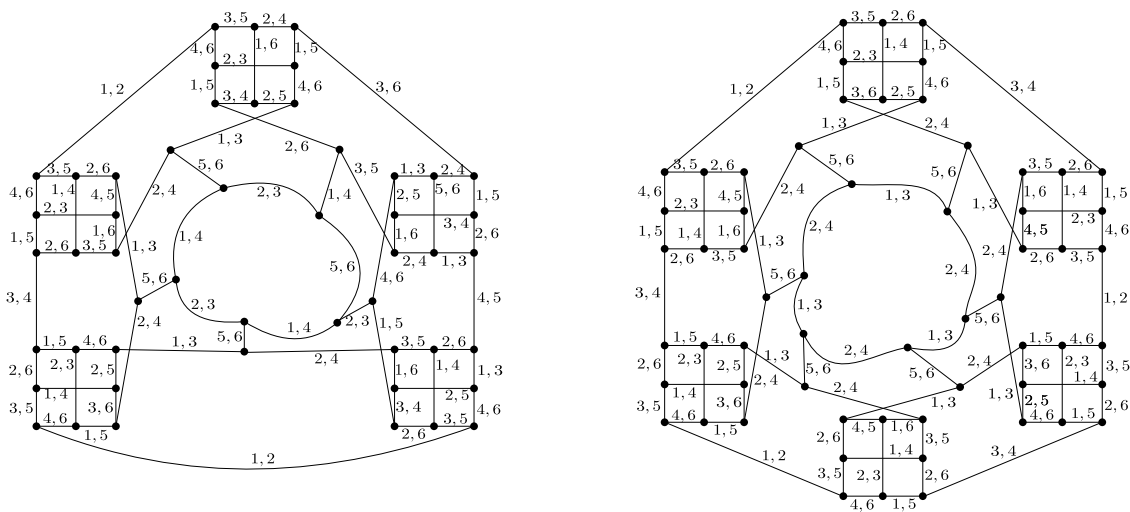


Figura 5.3: Snarks 5-SemiBlowup e 6-SemiBlowup satisfazem a conjectura.

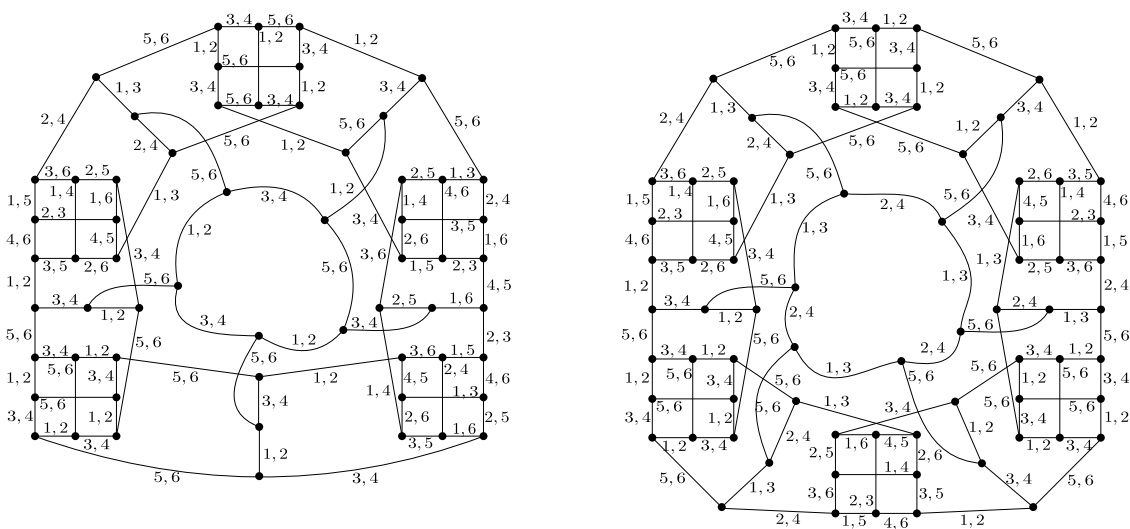


Figura 5.4: Snarks 5-Blowup e 6-Blowup satisfazem a conjectura.

Capítulo 6

Conclusão e trabalhos futuros

Esta tese foi motivada pela Questão 1, proposta por Cavicchioli et al. [15] de encontrar, caso exista, o menor snark com cintura pelo menos 5 que seja Tipo 2. No Capítulo 1, apresentamos famílias de snarks Tipo 1, indicando que esta questão possui uma resposta negativa. Porém, conseguimos responder parcialmente esta questão, apresentando inúmeros snarks Tipo 2 no Capítulo 2. Apresentamos uma construção para obter snarks Tipo 2 inéditos para toda ordem a partir de 40. Porém todos estes snarks possuem quadrado, ou seja, cintura menor que 5.

Além disso, motivados por esta construção de snarks que faz uso da junção de tijolos Classe 2 e tijolos Tipo 2, propomos a Questão 4.

Questão 4. *Qual o menor snark (se existir) que seja minimal com respeito a Classe e Tipo, ou seja, a remoção de qualquer elemento diminui Classe e Tipo simultaneamente?*

Continuamos a busca por um grafo cúbico com cintura pelo menos 5 que fosse Tipo 2. Esta busca nos permitiu propor no Capítulo 3, a Questão 2 de encontrar um grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5, e portanto, mais geral que a questão proposta por Cavicchioli et al. Também neste capítulo, apresentamos uma condição suficiente para um grafo cúbico ser Tipo 2 e com esta, conseguimos mostrar, sem o uso de computador, que alguns grafos com cintura pequena são Tipo 2. Por outro lado, ampliamos a busca do grafo cúbico Tipo 2 com cintura pelo menos 5, não só apresentando famílias de snarks Tipo 1, como também provando que existirá no máximo um número finito de grafos de Petersen generalizados que sejam Tipo 2.

No Capítulo 4, começamos a estudar a coloração total equilibrada, relacionando esta coloração total mais restrita, com a coloração total que investigamos até então. Assim, foi natural relacionar a coloração total equilibrada com a nossa busca pelo Tipo 2 com cintura pelo menos 5. Logo, a primeira investigação deu origem aos inéditos grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5. Como todo grafo cúbico Tipo 2 possui uma 5-coloração-total equi-

librada [66], o interessante é fazer a busca pelo “Tipo 2 com respeito a coloração total equilibrada” considerando então somente os grafos cúbicos Tipo 1. A procura por estes exemplos motivou a Questão 3, de encontrar um grafo cúbico Tipo 1 com cintura pelo menos 5 que possua número cromático de coloração total equilibrada 5, proposta também neste capítulo. O motivo se deve ao fato de que todos os exemplos de grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático de coloração total equilibrada 5 que construímos possuem quadrados ou triângulos. Na verdade, mesmo os exemplos que possuem triângulos (cintura igual a 3) também possuem quadrados, então uma formulação mais refinada para a Questão 3 seria substituir a condição de possuir cintura pelo menos 5 para a condição de não possuir quadrados.

Ainda neste capítulo, apresentamos famílias de grafos cúbicos que sugerem que a Questão 3 possui resposta negativa, estabelecendo também propriedades de coloração total equilibrada que auxiliaram na prova de que o número cromático de coloração total equilibrada dos membros destas famílias é 4. Por fim, provamos que o problema de determinar se um grafo cúbico bipartido possui uma 4-coloração-total equilibrada é NP-completo, o que já se acreditava em [38].

No Capítulo 4, vimos uma relação entre as Questões 2 e 3, que nos permite acreditar que uma resposta positiva para a Questão 2 pode proporcionar uma resposta positiva para a Questão 3.

Resumidamente, nesta tese investigamos duas novas questões que foram propostas motivadas pela rica literatura existente sobre coloração total de grafos cúbicos e principalmente motivada pela Questão 1, de Cavicchioli et al. As duas novas questões abordam a não 4-total-colorabilidade de grafos cúbicos com cintura grande, uma considerando a coloração total e a outra considerando a coloração total equilibrada. A Questão 2 busca um grafo cúbico com cintura pelo menos 5 que não seja 4-total-colorível, enquanto a Questão 3 busca um grafo cúbico Tipo 1 com cintura pelo menos 5 que não seja 4-total-colorível com uma 4-coloração-total equilibrada.

A Questão 1 foi proposta por Cavicchioli et al. com base em resultados computacionais. Assim, pode-se dizer que o objetivo principal desta tese foi confirmar a dificuldade da Questão 1, através de resultados teóricos que sugerem respostas positivas e negativas, da formulação de duas outras questões relacionadas, e de resultados computacionais que estendem os de Cavicchioli et al.

Vale ressaltar que as três questões envolvendo grafos cúbicos abordadas nesta tese podem ser estendidas para grafos com $\Delta = 3$, visto que não encontramos exemplos com $\Delta = 3$ na literatura existente.

A seguir, o diagrama da Figura 6.1 apresenta as famílias de grafos cúbicos para as quais o número cromático total foi determinado durante o doutorado. Os grafos de Petersen generalizados são analisados separadamente, na Figura 6.2.

Encerramos a tese com um diagrama na Figura 6.2 que resume os resultados

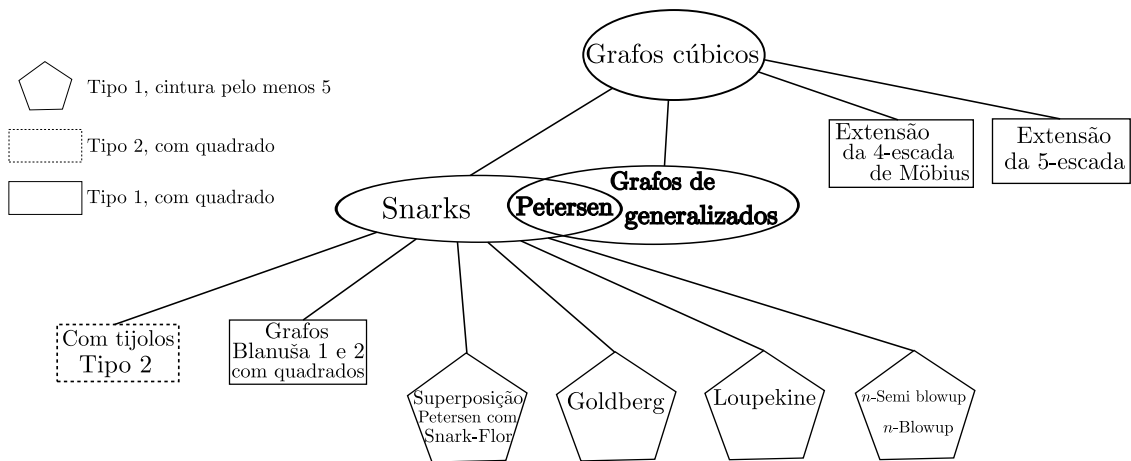


Figura 6.1: Até agora, conhecemos somente grafos cúbicos Tipo 2 que possuem quadrados ou triângulos.

de coloração total e coloração total equilibrada, apresentados nos Capítulos 3 e 4, dos grafos de Petersen generalizados. Note que os resultados também forneceram infinitos grafos de Petersen generalizados adicionais na região branca, que são Tipo 1 ou ainda, que possuem número cromático de coloração total equilibrada 4.

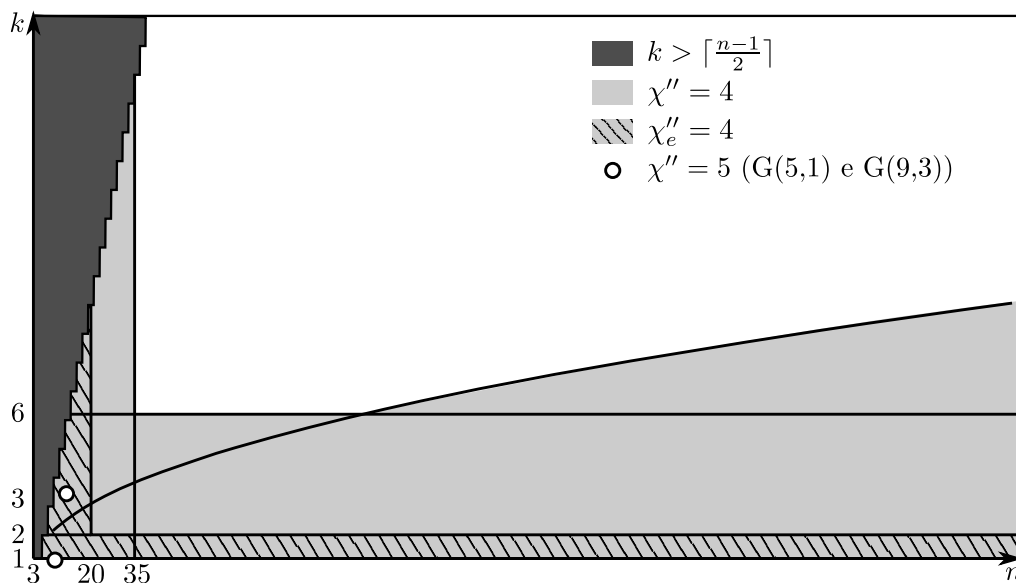


Figura 6.2: Até agora, conhecemos somente dois grafos de Petersen generalizados que são Tipo 2.

6.1 Para o futuro

Reservamos algumas ideias para os próximos trabalhos.

- Utilizando a recente prova sucinta de que a Conjectura da Coloração Total (TCC) é válida para os grafos com $\Delta = 3$ [20], tentar mostrar de forma sucinta, que a conjectura da coloração total equilibrada de que $\chi_e'' \leq \Delta + 2$ é válida para grafos com $\Delta = 3$ [66];
- Continuar investigando as famílias de snarks com cintura grande obtidas com a superposição [37], abordada no Capítulo 3, para tentar obter o snark Tipo 2 ou, pelo menos, entender mais esta construção de grafos cúbicos com cintura grande;
- Uniformizar as provas de determinação de 4-coloração-total de grafos cúbicos contendo sequência de quadrados, apresentadas no início do Capítulo 2;
- Continuar o estudo de coloração total equilibrada para as famílias conhecidas de snarks, como por exemplo, Goldberg e Loupekine, e também para os demais grafos de Petersen generalizados;
- Baseado no estudo de Raphael Machado e Celina de Figueiredo sobre as surpreendentes classes de grafos para as quais o problema de coloração total é polinomial enquanto o problema de coloração de arestas é NP-completo, como por exemplo a classe dos “{square,unichord}-free” [40], tentar buscar classes também surpreendentes, considerando a coloração total e a coloração total equilibrada. Uma ideia inicial é ver se para esta classe, o problema de coloração total equilibrada também é polinomial. O imediato é analisar as colorações totais determinadas e verificar se são equilibradas ou não.

Referências Bibliográficas

- [1] K. APPEL e W. HAKEN. “Every planar map is four colorable”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 82, n. 5, pp. 711–712, 1976.
- [2] M. BEHZAD, G. CHARTRAND e J. K. COOPER JR. “The colour numbers of complete graphs”, *J. Lond. Math. Soc.*, v. 42, pp. 226–228, 1967.
- [3] D. BLANUŠA. “Problem cetiriju boja (em russo)”, *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II*, v. 1, pp. 31–42, 1946.
- [4] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph theory with applications*, v. 290. Macmillan London, 1976.
- [5] G. BRINKMANN. “Fast Generation of Cubic Graphs”, *J. Graph Theory*, v. 23, n. 2, pp. 139–149, 1996.
- [6] G. BRINKMANN, J. GOEDGEBEUR, J. HÄGGLUND e K. MARKSTRÖM. “Generation and properties of snarks”, *J. Comb. Theory B*, v. 103, pp. 468–488, 2013.
- [7] G. BRINKMANN, J. GOEDGEBEUR e B. MCKAY. “Generation of Cubic graphs”, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, v. 13, n. 2, pp. 69–79, 2011.
- [8] G. BRINKMANN, J. GOEDGEBEUR, H. MÉLOT e K. COOLSAET. “House of Graphs: a database of interesting graphs”, *Discrete Appl. Math.*, v. 161, pp. 311–314, 2013. <http://hog.grinvin.org>.
- [9] G. BRINKMANN, M. PREISSMANN e D. SASAKI. *Construction of snarks with total chromatic number 5*. Relatório Técnico 203, Cahier Leibniz, Grenoble, França, 2013.
- [10] ————. “Snarks with total chromatic number 5”, 2013. Submetido para a *Discrete Appl. Math.*
- [11] R. L. BROOKS. “On colouring the nodes of a network”, *Proc. Cambridge Philosophical Society, Math. Phys. Sci.*, v. 37, pp. 194–197, 1941.

- [12] C. N. CAMPOS, S. DANTAS e C. P. MELLO. “The total-chromatic number of some families of snarks”, *Discrete Math.*, v. 311, pp. 984–988, 2011.
- [13] C. N. CAMPOS e C. P. MELLO. “The total chromatic number of some bipartite graphs”, *Ars Combin.*, v. 88, pp. 335–347, 2008.
- [14] F. CASTAGNA e G. PRINS. “Every generalized Petersen graph has a Tait coloring.” *Pacific J. Math.*, v. 40, n. 1, pp. 53–58, 1972.
- [15] A. CAVICCHIOLI, T. MURGOLO, B. RUINI e F. SPAGGIARI. “Special classes of snarks”, *Acta Appl. Math.*, v. 76, n. 1, pp. 57–88, 2003.
- [16] U. A. CELMINS. *A study of three conjectures on an infinite family of snarks*. Relatório Técnico CORR-79-19, Dept. of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Canadá, 1979.
- [17] A. G. CHETWYND. “Total Colourings of graphs” In: R. Nelson e R. J. Wilson (Eds.), *Graph Colourings*, pp. 65–77, Essex, Reino Unido, Pitman, 1990.
- [18] A. G. CHETWYND e A. J. W. HILTON. “Some refinements of the total chromatic number conjecture”, *Congr. Numer.*, v. 66, pp. 195–216, 1988.
- [19] B. DESCARTES. “Network-colourings”, *Math. Gazette*, v. 32, pp. 67–69, 1948.
- [20] Y. FENG e W. LIN. “A concise proof for total coloring subcubic graphs”, *Inform. Process. Lett.*, v. 113, pp. 664–665, 2013.
- [21] J. L. FOUQUET e J. M. VANHERPE. “On Fulkerson conjecture”, *Discuss. Math. Graph Theory*, v. 31, pp. 253–272, 2011.
- [22] H. L. FU. “Some results on equalized total coloring”, *Congr. Numer.*, v. 102, pp. 111–119, 1994.
- [23] D. R. FULKERSON. “Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra”, *Math. Programming*, v. 1, pp. 168–194, 1971.
- [24] M. GARDNER. “Mathematical Games: Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem”, *Sci. Am.*, v. 234 No. 4, pp. 126–130, 1976.
- [25] M. K. GOLDBERG. “Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3”, *J. Comb. Theory Ser. B*, v. 31, n. 3, pp. 282–291, 1981.
- [26] J. HÄGGLUND. “On snarks that are far from being 3-edge-colorable”, 2012. Disponível em: arxiv.org/abs/1203.2015.

- [27] G. M. HAMILTON e A. J. W. HILTON. “Graphs of maximum degree 3 and order at most 16 which are critical with respect to the total chromatic number”, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, v. 10, pp. 129–149, 1991.
- [28] R. HAO, J. NIU, X. WANG, C.-Q. ZHANG e T. ZHANG. “A note on Berge-Fulkerson coloring”, *Discrete Math.*, v. 309, pp. 4235–4240, 2009.
- [29] A. J. W. HILTON. “The total chromatic number of nearly complete bipartite graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 52, pp. 9–19, 1991.
- [30] R. ISAACS. *Loupekiné’s snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs*. Relatório Técnico 263, Dpt. of Math. Sci., The Johns Hopkins University, Maryland, EUA, 1976.
- [31] ————. “Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable”, *Amer. Math. Monthly*, v. 82, n. 3, pp. 221–239, 1975.
- [32] T. R. JENSEN e B. TOFT. *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, 1995.
- [33] T. KAISER, A. KING e D. KRÁL. “Fractional total colourings of graphs of high girth”, *J. Comb. Theory B*, v. 101, pp. 383–402, 2011.
- [34] K. KARAM e C. N. CAMPOS. “Fulkerson’s conjecture and Loupekiné’s snarks”, 2012. Proc. 11th CTW 2012, Munique, Alemanha.
- [35] K. KARAM e D. SASAKI. “Semi blowup and blowup snarks and Berge-Fulkerson Conjecture”, Proc. 12th CTW 2013, Enschede, Holanda.
- [36] F. KARDOS, D. KRÁL e J. SERENI. “The last fraction of a fractional conjecture”, *SIAM J. Discr. Math.*, v. 24, pp. 699–707, 2010.
- [37] M. KOCHOL. “Snarks without small cycles”, *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 67, pp. 34–47, 1996.
- [38] M. KUBALE. *Graph colorings*, v. 352. American Mathematical Soc., 2004.
- [39] D. LEVEN e Z. GALIL. “NP completeness of finding the chromatic index of regular graphs”, *J. Algorithms*, v. 4, n. 1, pp. 35–44, 1983.
- [40] R. MACHADO e C. DE FIGUEIREDO. “Complexity separating classes for edge-colouring and total-colouring”, *J. Braz. Comp. Soc.*, v. 17, n. 4, pp. 281–285, 2011.
- [41] G. MAZZUOCCOLO. “The equivalence of two conjectures of Berge and Fulkerson”, *J. Graph Theory*, v. 68, n. 2, pp. 125–128, 2011.

- [42] C. MCDIARMID e A. SÁNCHEZ-ARROYO. “Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard”, *Discrete Math.*, v. 124, pp. 155–162, 1994.
- [43] J. P. C. PETERSEN. “Die theorie der regulären graphen (em alemão)”, *Acta Math.*, v. 15, pp. 193–220, 1891.
- [44] M. PREISSMANN. “Snarks of order 18”, *Discrete Math.*, v. 42, pp. 125–126, 1982.
- [45] ————. “C-minimal snarks”, *Ann. Discrete Math.*, v. 17, pp. 559–565, 1983.
- [46] ————. *Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques (em francês)*. Tese de Doutorado, 1981. PhD thesis, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- [47] B. REED. “Fractional total colouring”, Princeton, EUA. Apresentação no DIMACS Workshop on Graph Coloring and Structure, 2009.
- [48] M. ROSENFELD. “On the total chromatic number of a graph”, *Israel J. Math.*, v. 9, pp. 396–402, 1971.
- [49] A. SÁNCHEZ-ARROYO. “Determining the total colouring number is NP-hard”, *Discrete Math.*, v. 78, pp. 315–319, 1989.
- [50] D. SASAKI. *Coloração total de famílias de snarks*. Dissertação de Mestrado, 2010. Programa de Engenharia de Sistemas e Computação COPPE/UFRJ.
- [51] D. SASAKI, S. DANTAS e C. M. H. DE FIGUEIREDO. “On Coloring Problems of Snark Families”, *Electron. Notes Discrete Math.*, v. 37, pp. 45–50, 2011.
- [52] ————. “On total coloring of snark products”, *Mat. Contemp.*, v. 39, pp. 39–50, 2010.
- [53] D. SASAKI, S. DANTAS, C. M. H. DE FIGUEIREDO e M. PREISSMANN. “The hunting of a snark with total chromatic number 5”, *Discrete Appl. Math.* Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2013.04.006>.
- [54] ————. “Total chromatic number of some families of graphs with maximum degree 3”, 2013. Aceito para publicação na *Mat. Contemp.*
- [55] D. SASAKI, S. DANTAS, C. M. H. DE FIGUEIREDO, M. PREISSMANN, G. MAZZUOCCOLO e V. F. DOS SANTOS. “On total coloring and equitable total coloring of cubic graphs with large girth”, 2013. Submetido para a *Discrete Appl. Math.*

- [56] E. SCHEINERMAN e D. ULLMAN. *Fractional Graph Theory: A rational approach to the theory of graphs*. Dover books on Mathematics, 2011.
- [57] P. D. SEYMOUR. “Disjoint paths in graphs”, *Discrete Math.*, v. 29, pp. 293–309, 1980.
- [58] E. STEFFEN. “Non-bicritical critical snarks”, *Graphs Combin.*, v. 15, pp. 473–480, 1999.
- [59] J. J. SYLVESTER. “Question 7382”, *Mathematical questions from the education times*, v. 41, pp. 21, 1884.
- [60] G. SZEKERES. “Polyhedral decompositions of cubic graphs”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, v. 8, pp. 367–387, 1973.
- [61] J. SZWARCFITER. *Grafos e algoritmos computacionais*, v. 2. Campus, 1988.
- [62] P. G. TAIT. “Remarks on the colouring of maps”, In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, v. 10, pp. 501–503, 1880.
- [63] W. T. TUTTE. “A contribution to the theory of chromatic polynomials”, *Can. J. Math.*, v. 6, pp. 80–91, 1954.
- [64] N. VIJAYADITYA. “On total chromatic number of a graph”, *J. London Math. Soc.*, v. 2, pp. 405–408, 1971.
- [65] V. G. VIZING. “On an estimate of the chromatic class of a p-graph”, *Metody Diskret. Analiz.*, v. 3, pp. 25–30, 1964.
- [66] W. F. WANG. “Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3”, *Graphs Combin.*, v. 18, pp. 677–685, 2002.
- [67] J. J. WATKINS. “On the construction of snarks”, *Ars Combin.*, v. 16-B, pp. 111–123, 1983.
- [68] M. E. WATKINS. “A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs”, *J. Combin. Theory*, v. 6, pp. 152–164, 1969.
- [69] M. YANNAKAKIS e M. GAVRIL. “Edge dominating sets in graphs”, *SIAM J. Appl. Math.*, v. 38, pp. 364–372, 1980.
- [70] H. P. YAP. *Total colourings of graphs*. in: *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Germany, 1996.
- [71] C. Q. ZHANG. “Circuit double cover of graphs”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, v. 399, pp. 253, 2012.

Apêndice A

Sobre a parte computacional

A.1 Aplicada no Capítulo 2

Para a geração dos grafos cúbicos, foi utilizado o programa “minibaum” descrito em [5]. Os snarks foram gerados pelo programa “snarkhunter”, do qual a construção e rotinas de isomorfismo são descritas em [7]. Os semigrafos cúbicos com 4 semiarestas duas a duas não adjacentes foram gerados pelo programa “multigraph”, que é baseado nas técnicas do “minibaum”. Este programa nunca foi publicado, porém é usado há quase 20 anos e durante este tempo, os resultados foram comparados com outros programas, nunca obtendo discrepâncias.

Com exceção do programa que testa a propriedade de ser tijolo, a maioria dos programas são usados há muito tempo. Este foram usados por exemplo em [6], onde muitos dos resultados foram comparados com outros resultados independentes. Para os casos grandes (por exemplo grafos cúbicos livres de quadrado com 32 vértices) onde o número cromático total foi determinado, um programa especial foi desenvolvido. Este usa o Lema 15 e busca 4-colorações de aresta fortes. Para propósito de teste, os resultados foram comparados com os resultados do programa independente mais antigo e bastante testado, para todos os grafos cúbicos até 24 vértices e para os grafos cúbicos livres de triângulos com 26 vértices, e os resultados tiveram total concordância.

Para testar se um semigrafo cúbico com 4 semiarestas duas a duas não adjacentes é um tijolo, dois programas foram escritos. Um checando os cortes e a distribuição das semiarestas nas componentes após a remoção dos cortes, e o outro (o mais rápido) usando o Lema 17, fazendo a junção do semigrafo cúbico com 4 semiarestas duas a duas não adjacentes com um s-quadrado e testando se o grafo resultante é ciclicamente 4-aresta-conexo. Os programas foram comparados para todos os semigrafos cúbicos com 4 semiarestas duas a duas não adjacentes com até 18 vértices (mais de 4.000.000 grafos), e os resultados tiveram total concordância.

A.2 Aplicada nos Capítulos 3 e 4

O programa desenvolvido para a coloração total dos grafos de Petersen generalizados é um algoritmo de “backtracking” que faz uso da estrutura destes grafos tentando obter uma 4-coloração-total. A ideia geral do algoritmo consiste nos seguintes passos.

Seja G um grafo de Petersen generalizado.

- (1) Defina uma ordem dos vértices do grafo.
- (2) Seja v o próximo vértice não colorido, de acordo com a ordem definida em (1).
 - (2.1) Se nenhum vértice v existe, G está colorido com 4 cores. Retorne esta coloração total.
 - (2.2) Para cada coloração possível de v e de suas arestas incidentes compatível com elementos coloridos previamente,
 - (2.2.1) Colora v e suas arestas incidentes e passe para o próximo vértice não colorido u ;
 - (2.2.2) Se nenhuma coloração for encontrada para u , descolora v e suas arestas incidentes, coloridos na etapa anterior.
 - (2.3) Se todas as possibilidades para v foram tentadas, retorne ao vértice anterior e tente recolorí-lo. Se v for o primeiro vértice, então G é Tipo 2.

A.2.1 Complexidade de tempo

Note que, para um vértice v , podem existir até $4! = 24$ colorações possíveis de v e suas arestas incidentes no passo (2.2). Isto poderia resultar em uma complexidade de $O(24^{|V(G)|})$ ao todo. Porém, com uma escolha cuidadosa da ordem no passo (1), o número de escolhas pode reduzir drasticamente. A heurística usada para definir esta ordem foi de maneira que, quando um vértice é escolhido para ser colorido, pelo menos um de seus vértices adjacentes já possui uma cor. Na verdade, foram utilizadas ordens nas quais o vértice a ser colorido já possui dois vértices adjacentes coloridos, com a maior frequência possível. Além disso, assim que uma 4-coloração-total é encontrada, o programa retorna esta, evitando passos desnecessários. Isto nos permitiu cobrir, além de todos os grafos de Petersen generalizados de ordem até 70, também algumas instâncias com mais de 200 vértices.

Para a coloração total equilibrada, uma abordagem similar foi usada, com o procedimento adicional de checar, após a determinação da 4-coloração-total, se esta coloração é equilibrada ou não. Se a coloração não é equilibrada, a busca continua. Neste caso, um custo computacional maior é necessário, pois para um dado grafo,

mais de uma 4-coloração-total pode ser determinada para se encontrar uma que seja equilibrada. Com exceção dos dois grafos Tipo 2 que conhecemos, $G(5, 1)$ e $G(9, 3)$, para todos os grafos de Petersen generalizados de ordem até 40, o número cromático de coloração total equilibrada foi determinado ser 4.

Os algoritmos foram implementados usando linguagem C e todas as instâncias foram rodadas no sistema Mac OS X com processador de dois núcleos.

A.2.2 Correção do programa

Apesar da ausência de erros na implementação não poder ser garantida, todos os resultados obtidos podem ser testados: para os dois casos de grafos Tipo 2 dentre os grafos de Petersen generalizados, apresentamos provas teóricas no Capítulo 3 de que estes grafos precisam de 5 cores para serem coloridos. Para todos os outros grafos testados pelo programa, este apresentou uma coloração total com 4 cores, confirmando que estes grafos são Tipo 1.