



## SOBRE O NÚMERO DE OVERLAP EM GRAFOS

Rafael Oliveira Lopes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter  
Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2013

SOBRE O NÚMERO DE OVERLAP EM GRAFOS

Rafael Oliveira Lopes

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

---

Prof<sup>a</sup>. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

---

Prof. Claudson Ferreira Bornstein, Ph.D.

---

Prof. Daniel Morgato Martin, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2013

Lopes, Rafael Oliveira

Sobre o Número de Overlap em Grafos/Rafael Oliveira  
Lopes. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

X, 85 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 79.

1. Número de Overlap.
2. Teoria de Grafos.
3. Classes de Grafos. I. Szwarcfiter, Jayme Luiz  
*et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III.  
Título.

# Agradecimentos

“Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo, é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com você.”

---

Carl Sagan (adaptado)

Se eu fosse agradecer nominalmente a todas as pessoas que me ajudaram, seja colaborando diretamente em meu trabalho ou apenas dando apoio para que eu prosseguisse, provavelmente esta seção teria mais páginas que todo o resto da dissertação. Agruparei então os agradecimentos em conjuntos de pessoas (têm overlap entre si).

Agradeço inicialmente a meus familiares - especialmente meu pai, minha mãe e minha irmã - pelas conversas, conselhos, discussões, apoio moral e financeiro e companheirismo. Nada disso teria ocorrido sem a ajuda de vocês.

Agradeço a meus amigos de Ensino Médio, seja do CEFET ou do ISERJ. Amizades que ultrapassam a década de existência e que sempre me ajudaram a caminhar, mesmo em momentos difíceis. Nunca deixaremos de ser “corações que proclamam os hinos da justiça, da paz e do amor.”

Aos meus amigos da Vila da Penha, vocês são aqueles que sempre pude ligar de última hora para nos reunirmos e conversarmos em algum lugar. Agradeço imensamente por terem me ouvido falar durante três anos. Aos amigos monicólatras, agradeço pelos longos papos furados e pelo estabelecimento da Liga Pequeno Colar.

Estive na UFRJ durante sete anos e meio. O que levarei com mais carinho são as inúmeras amizades feitas durante a graduação e mestrado. Agradeço especialmente a meus amigos da turma de 2006/2. O sonho do mestrado foi cultivado na companhia de vocês. A meus amigos do LabAC, agradeço pelas intermináveis discussões sobre os mais variados assuntos, que iam desde trivialidades até os assuntos de pesquisa de todos. Boa parte deste trabalho tem a colaboração de vocês.

Agradeço a todos os professores que me guiaram nesta vida. Dedico um agradecimento especial a meus orientadores Jayme e Márcia pelas longas discussões e ajuda prestadas durante a elaboração deste trabalho. Agradeço aos professores que integram a banca por darem a honra de avaliarem meu trabalho de forma criteriosa. Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## SOBRE O NÚMERO DE OVERLAP EM GRAFOS

Rafael Oliveira Lopes

Dezembro/2013

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter  
Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Para todo grafo podemos associar uma família de conjuntos de forma que cada vértice do grafo está associado a um conjunto da família e que, para toda aresta do grafo, os conjuntos associados ao par de vértices possuem interseção não vazia e não estão contidos um no outro. A esta relação entre um par de conjuntos chamamos de relação de overlap e esta família de conjuntos é chamada representação overlap.

O número de overlap de um grafo é o tamanho do menor conjunto-base possível de uma representação overlap do grafo. Neste trabalho fazemos um estudo sobre o problema Número de Overlap de grafos, apresentando resultados já existentes na literatura, como o valor extremal do número de overlap de um grafo e limites do número de overlap de um grafo a partir de suas propriedades, como número de arestas e conjunto estável máximo.

Restringindo o problema, conseguimos determinar resultados exatos ou limites superiores do número de overlap para grafos de classes específicas. Apresentamos inicialmente resultados conhecidos na literatura para algumas classes. Em seguida apresentamos nossos resultados: um aprimoramento do limite superior do número de overlap para grafos cordais e de intervalo, estabelecimento de um limite superior do número de overlap de grafos de limiar e uma representação overlap ótima dos grafos cadeia.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## ON THE OVERLAP NUMBER OF GRAPHS

Rafael Oliveira Lopes

December/2013

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter

Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

For each graph we may associate a family of sets in a way that each vertex maps to a set in the family and, for each edge of the graph, the pair of mapped sets have a non empty intersection and one does not contain the other. We call that relation an overlap relation and this family of sets is called an overlap representation of the graph.

The overlap number of a graph is the size of the smallest base set possible for an overlap representation of it. In this work we present a study of the Overlap Number Problem for graphs, showing well-known results, like the extremal value of the overlap number of a graph and bounds on the overlap number of a graph relating to its properties, such as number of edges and maximum stable set.

When we restrict the problem, we are able to get exact results and upper bounds for the overlap number of graphs for specific classes of graphs. We first present the known results for some graph classes. Then we present our results: an improved upper bound for the overlap number for chordal and interval graphs, then we find an upper bound for the overlap number for threshold graphs and an optimal overlap representation for chain graphs.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definições de teoria de conjuntos . . . . .	2
1.2 Definições de teoria de grafos . . . . .	5
<b>2 Número de Overlap</b>	<b>8</b>
2.1 Representação de interseção . . . . .	11
2.2 Resultados iniciais . . . . .	13
2.3 Grafos desconexos . . . . .	19
2.4 Limite a partir do conjunto estável máximo . . . . .	20
2.5 Limite a partir do número de arestas . . . . .	22
2.6 Valor extremal do número de overlap . . . . .	28
<b>3 Resultados Anteriores para Classes de Grafos</b>	<b>35</b>
3.1 Caminho, ciclo, centopéia e árvore . . . . .	35
3.2 Grafos completos e $k$ -partidos completos . . . . .	43
3.3 Grafos de co-comparabilidade . . . . .	45
3.4 Grafos planares . . . . .	47
<b>4 Novos Resultados para Classes de Grafos</b>	<b>53</b>
4.1 Grafos cordais . . . . .	53
4.1.1 Limite a partir do esquema de eliminação perfeito . . . . .	56
4.1.2 Limite a partir da família de subárvores . . . . .	57
4.1.3 Comparando as representações - grafos de partição . . . . .	60
4.1.4 Cota inferior para o número de overlap de cordais . . . . .	62
4.2 Grafos de limiar . . . . .	63
4.3 Grafos de intervalo . . . . .	67
4.4 Grafos cadeia . . . . .	70
<b>5 Conclusões</b>	<b>75</b>

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>
<b>A Número de Overlap de Grafos</b>	<b>80</b>
<b>B Número de Overlap Próprio de Grafos</b>	<b>83</b>



# Lista de Figuras

1.1	Três possíveis relações entre dois conjuntos. . . . .	4
2.1	Grafo associado à família $\mathcal{E}$ de conjuntos. . . . .	9
2.2	Construção de representação overlap de um grafo através do Lema 2.1. . . . .	10
2.3	Outra representação overlap do grafo da Figura 2.2. . . . .	10
2.4	Representações do $K_{3,3}$ : à esquerda, de interseção; à direita, de overlap. . . . .	12
2.5	Representações do $K_6$ : à esquerda, de interseção; à direita, de overlap. . . . .	13
2.6	Subconjuntos de $V(G)$ atendendo o Lema 2.5 . . . . .	15
2.7	Duas representações overlap do grafo de Hajós. . . . .	16
2.8	Grafo $G$ e uma representação overlap $\mathcal{C}$ de $G$ . . . . .	18
2.9	Esquema de inclusão entre conjuntos de uma família $\mathcal{X}$ . . . . .	21
2.10	Grafo e uma possível partição por completos. . . . .	23
2.11	Uma segunda partição por completos do grafo da Figura 2.10. . . . .	24
2.12	Grafo de Petersen e uma representação overlap ótima . . . . .	28
2.13	Representação do último caso do Lema 2.28. . . . .	34
3.1	Exemplo de esqueleto. . . . .	36
3.2	Esquema da prova do Lema 3.1. . . . .	37
3.3	Representação overlap ótima do $P_5$ . . . . .	38
3.4	Representação overlap ótima do $C_6$ . . . . .	39
3.5	Exemplo de centopéia. . . . .	39
3.6	Representação overlap ótima da centopéia da Figura 3.5. . . . .	40
3.7	Exemplo de árvore. Em destaque, seu esqueleto máximo. . . . .	42
3.8	Construção iterativa da representação overlap da árvore da Figura 3.7. . . . .	43
3.9	Representação overlap do grafo $K_{10}$ . . . . .	44
3.10	Grafo de co-comparabilidade e uma orientação transitiva de seu complemento. . . . .	45
3.11	Construção de uma representação overlap para o grafo da Figura 3.10 . . . . .	47
3.12	Duas representações planas de um mesmo grafo planar. . . . .	47
3.13	Grafo planar com 10 vértices e número de overlap igual a 15. . . . .	52
3.14	Grafo planar com 11 vértices e número de overlap igual a 17. . . . .	52

4.1	Exemplo de grafo cordal . . . . .	54
4.2	Árvore $T$ e uma família $\mathcal{T}$ de subárvores de $T$ . . . . .	55
4.3	Construção de representação overlap $\mathcal{C}$ do grafo da Figura 4.1. . . . .	56
4.4	Árvore $T'$ e família $\mathcal{T}'$ e árvore resultante das extensões $T$ com família $\mathcal{T}$ . . . . .	58
4.5	Os quatro relacionamentos entre duas subárvores de uma árvore $T$ . . . . .	59
4.6	Grafo de partição e uma respectiva família de subárvores de estrela. . . . .	61
4.7	Representação overlap do grafo $S_4$ dada através do Lema 4.7. . . . .	63
4.8	Exemplo de grafo de limiar e sua bipartição. . . . .	64
4.9	Representação overlap para o grafo da Figura 4.8. . . . .	66
4.10	Grafo de limiar com número de overlap inferior aos limites propostos. . . . .	67
4.11	(a) Grafo de intervalo $G$ e uma família de intervalos da reta real que representam $G$ . (b) Caminho $T$ e família de subcaminhos de $G$ . . . . .	68
4.12	Ilustração da prova do Teorema 4.10 para os dois casos de $k$ . . . . .	70
4.13	Duas representações overlap para o grafo da Figura 4.11. . . . .	71
4.14	Exemplo de grafo cadeia. . . . .	71
4.15	Exemplo de um grafo $H_q$ , no caso o $H_4$ . . . . .	72
4.16	Grafo cadeia. Os vértices que possuem um gêmeo falso estão destacados. . . . .	73
4.17	Construção esquemática de uma representação overlap do $H_4$ . . . . .	74

# Capítulo 1

## Introdução

Um grafo, através de seus vértices e arestas, pode modelar grupos de objetos e as relações entre pares de objetos deste grupo. Encontramos vastos exemplos na literatura especializada sobre o assunto, envolvendo outras áreas do conhecimento como química, física, sociologia e biologia [11].

Associar a um grafo uma família de conjuntos de elementos, como números naturais, é então um caminho natural a ser trilhado. Escolhemos uma relação entre os pares de objetos de forma que os vértices são adjacentes se e somente se existe a propriedade ou relação escolhida entre o par de objetos associados ao par de vértices. O objetivo de fazer tais associações com conjuntos de elementos se encontra na busca de uma representação computacional sucinta e eficiente de grafos [14].

A relação entre conjuntos mais utilizada para representar as adjacências do grafo é a relação de interseção entre um par de conjuntos. Através desta relação criou-se o problema de calcular o *Número de Interseção* de um grafo, problema com vários resultados já apresentados [5, 12]. Entretanto, existe outra relação entre conjuntos que, apesar de bem similar à relação de interseção, é pouco estudada, chamada relação de overlap.

A relação de overlap entre um par de conjuntos, também chamada de *interseção com disjunção*, exige que a interseção entre os dois conjuntos não seja vazia e que um dos conjuntos não contenha ou esteja contido no outro. Motivado por esta relação foi criado o problema de calcular o *Número de Overlap* de um grafo. Este problema é apresentado por Rosgen [12], seguindo as condições necessárias e suficientes apresentadas por Golubic e Scheinerman para uma família de grafos ser grafo de overlap de uma família de conjuntos [7]. Entretanto, este problema recebeu muito menos atenção que o problema do Número de Interseção.

Resultados sobre o problema do número de overlap de um grafo são apresentados por Rosgen [12, 13] e Cranston et. al. [4], que apresentam limites para grafos de algumas classes, além de algoritmos para determinar o número de overlap para grafos de outras classes. Nosso trabalho se inicia apresentando estes resultados já

consolidados na literatura.

O objetivo do trabalho é de buscar estabelecer novos limites superiores para o número de overlap para grafos em certas classes, seja aprimorando limites já existentes ou apresentando limites para grafos em classes ainda não estudadas, mais especificamente em grafos cordais e grafos bipartidos. Para os grafos cordais conseguimos dois resultados através de propriedades existentes em grafos específicos desta classe. Analisando algumas subclasses de grafos cordais, conseguimos um novo resultado para grafos de limiar e um aprimoramento no limite superior do número de overlap de grafos de intervalo. Por fim, apresentamos um resultado exato do problema para uma subclasse dos grafos bipartidos, os grafos cadeia.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos de Teoria de Conjuntos e Teoria de Grafos usados em nosso trabalho. Grande parte dos conceitos é conhecida por uma pessoa familiarizada em ambas as áreas do conhecimento, entretanto apresentamos para evitar problemas e confusões com notações utilizadas de formas diferentes por autores. O capítulo seguinte faz a união entre as duas áreas do conhecimento, apresentando formalmente o problema *Número de Overlap*, apresentando lemas básicos e alguns resultados para grafos em geral. No terceiro capítulo, são apresentados os resultados já existentes na literatura para classes de grafos. O quarto capítulo, apresenta os resultados de nossos trabalhos. Por fim, o capítulo final apresenta um resumo de nosso trabalho, além de indicar direções que acreditamos serem promissoras na continuidade do estudo deste problema.

## 1.1 Definições de teoria de conjuntos

Nesta seção apresentamos uma série de conceitos e definições sobre uma família de conjuntos e as relações entre os conjuntos desta família. Estes conceitos, agregados aos conceitos sobre Teoria de Grafos apresentados na próxima seção, formam a base teórica de nosso trabalho.

Inicialmente definimos uma família de conjuntos, seu conjunto base e tamanho. Após isso, apresentamos as relações entre conjuntos da família que usamos neste trabalho, dando ênfase na relação de overlap, a mais importante em nosso estudo. Por fim, apresentamos mais algumas definições que são utilizadas em nosso texto.

Cada **conjunto**  $S_i$  é composto por uma quantidade finita e não vazia de números naturais não-nulos. Durante o trabalho, alguns elementos podem ser representados como letras ou símbolos para facilitar o entendimento e visualização das provas. Os números naturais são chamados de **elementos** de um conjunto.

Chamamos de **família de conjuntos** uma coleção finita de conjuntos. Esta família é representada como  $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , representação simplificada para  $\mathcal{C}$

quando não houver necessidade de especificar quais são os conjuntos pertencentes a  $\mathcal{C}$ . Cada conjunto é indexado e, portanto, podemos ter mais de um conjunto constituído por exatamente os mesmos elementos.

O **conjunto-base** de uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  é a união dos elementos pertencentes a todos os conjuntos de  $\mathcal{C}$ . Como temos uma quantidade finita de conjuntos, cada conjunto com uma quantidade finita de elementos, o conjunto-base também é finito. Chamamos de **tamanho** da família  $\mathcal{C}$  a cardinalidade do conjunto-base da família de conjuntos.

Por exemplo, seja a família  $\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 5\}\}$ . Esta família possui seis conjuntos, seu conjunto base é  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e portanto  $\mathcal{E}$  tem tamanho 6.

Utilizaremos esta mesma família  $\mathcal{E}$  como exemplo para as próximas definições apresentadas nesta seção, de forma que sempre que mencionarmos a família  $\mathcal{E}$ , estamos nos referindo aos conjuntos apresentados no parágrafo anterior.

A seguir apresentamos as relações que dois conjuntos de uma mesma família podem ter, fixando a notação e a terminologia usada em todo nosso trabalho. Para definir tais relações, usaremos dois conjuntos  $S_i$  e  $S_j$  quaisquer de uma família  $\mathcal{C}$ .

Se  $S_i = S_j$ , então dizemos que  $S_i$  é **igual** a  $S_j$ , ou  $S_i$  e  $S_j$  são iguais. Caso contrário,  $S_i$  é **diferente** de  $S_j$ , ou  $S_i$  e  $S_j$  são diferentes, relação representada por  $S_i \neq S_j$ . Na família  $\mathcal{E}$  os conjuntos  $\{1, 5\}$  e  $\{1, 5\}$  são iguais, porém  $\{1, 3\} \neq \{1, 4\}$ .

Se  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , então dizemos que  $S_i$  é **disjunto** de  $S_j$ , ou  $S_i$  e  $S_j$  são disjuntos entre si. Também representamos a relação como  $S_i \parallel S_j$  para indicar que os conjuntos  $S_i$  e  $S_j$  são disjuntos entre si. Na família  $\mathcal{E}$ , o conjunto  $\{1, 2, 3, 6\}$  é disjunto de  $\{4, 5\}$ , isto é,  $\{1, 2, 3, 6\} \parallel \{4, 5\}$ .

Se  $S_i \subseteq S_j$ , então dizemos que  $S_i$  está **contido** em  $S_j$ , ou  $S_j$  contém  $S_i$ . Se  $S_i \subset S_j$ , então dizemos que  $S_i$  está **estritamente contido** em  $S_j$ , ou que  $S_j$  contém estritamente  $S_i$ . Na família  $\mathcal{E}$ , o conjunto  $\{1, 5\}$  está contido em  $\{1, 5\}$ , isto é,  $\{1, 5\} \subseteq \{1, 5\}$ . O conjunto  $\{1, 3\}$  está estritamente contido em  $\{1, 2, 3, 6\}$ , isto é,  $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 6\}$ . Entretanto, o conjunto  $\{4, 5\}$  não está contido em  $\{1, 2, 3, 6\}$  porque  $5 \notin \{1, 2, 3, 6\}$ .

Se  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ ,  $S_i \not\subseteq S_j$  e  $S_j \not\subseteq S_i$ , então dizemos que  $S_i$  tem **overlap** com  $S_j$ , ou  $S_i$  e  $S_j$  têm overlap. Utilizamos a notação  $S_i \bowtie S_j$  para indicar que  $S_i$  tem overlap com  $S_j$ . Na família  $\mathcal{E}$ , os conjuntos  $\{1, 2, 3, 6\}$  e  $\{1, 5\}$  têm overlap, isto é,  $\{1, 2, 3, 6\} \bowtie \{1, 5\}$ . Entretanto, os conjuntos  $\{1, 3\}$  e  $\{1, 2, 3, 6\}$  não têm overlap pois  $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 6\}$ .

Uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  é **própria** se não existe par de conjuntos  $S_i, S_j$  tal que  $S_i \subseteq S_j$ .

A partir de uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$ , podemos nos questionar se a criação de uma nova família  $\mathcal{C}'$  a partir da família anterior, mas com alterações como adição

ou remoção de elementos, altera as relações entre os conjuntos desta nova família em relação à família anterior. Isto conduz à Observação 1.1, que nos indica onde adicionar elementos para manter as relações originais entre pares de conjuntos.

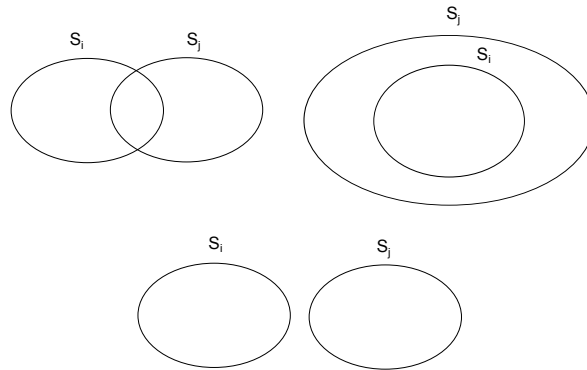


Figura 1.1: Três possíveis relações entre dois conjuntos.

**Observação 1.1** *Sejam  $S_i$  e  $S_j$  dois conjuntos de uma família  $\mathcal{C}$ . Se  $S_i \not\cap S_j$  ou  $S_i \subseteq S_j$ , então a criação de uma nova família  $\mathcal{C}'$  a partir da inclusão de um elemento que não pertença ao conjunto-base de  $\mathcal{C}$  exclusivamente em  $S_j$  ou em  $S_i \cap S_j$  preserva a relação entre os novos conjuntos  $S'_i$  e  $S'_j$ . Por outro lado, se  $S_i \cap S_j$  então a relação é preservada entre os novos conjuntos  $S'_i$  e  $S'_j$  apenas se incluirmos um novo elemento exclusivamente em  $S_i$  ou em  $S_j$ .*

Como exemplo da Observação 1.1, se a partir da família  $\mathcal{E}$  criarmos uma nova família  $\mathcal{E}'$  através da inclusão do elemento 7 ao conjunto  $\{1, 4\}$ , este conjunto continua tendo overlap com os conjuntos  $\{1, 3\}$ ,  $\{4, 5\}$  e  $\{1, 5\}$ , mas deixa de estar contido em  $\{1, 2, 3, 6\}$ . Desta forma, para preservarmos em  $\mathcal{E}'$  as relações entre conjuntos originais em  $\mathcal{E}$ , também devemos incluir o elemento 7 no conjunto  $\{1, 2, 3, 6\}$ .

Vamos agora apresentar uma operação de criação de uma nova família de conjuntos a partir de uma família anterior, através da remoção de elementos do conjunto-base da família original. Também veremos que essa propriedade não necessariamente mantém as relações originais entre pares de conjuntos.

Seja  $\mathcal{C}$  uma família e  $S$  um subconjunto do conjunto-base de  $\mathcal{C}$  com  $S \notin \mathcal{C}$ . A operação **corta-S**, simbolizada por  $\mathcal{C}_{\setminus S}$ , gera uma família de conjuntos a partir de  $\mathcal{C}$  e  $S$  de forma que  $\mathcal{C}_{\setminus S} = \{S'_1, \dots, S'_n\}$ , onde  $S'_i = S_i \setminus S$ .

Por exemplo, a partir da família  $\mathcal{E}$  temos a seguinte família construída utilizando a operação corta- $\{1\}$ :  $\mathcal{E}_{\setminus \{1\}} = \{\{2, 3, 6\}, \{3\}, \{4\}, \{4, 5\}, \{5\}, \{5\}\}$ . Podemos notar que esta operação não necessariamente preserva as relações entre os respectivos conjuntos da família. Por exemplo, em  $\mathcal{E}$  tínhamos  $\{1, 3\} \cap \{1, 4\}$ , enquanto na nova família gerada por  $\mathcal{E}_{\setminus \{1\}}$  temos  $\{3\} \cap \{4\}$ . Desta forma, é importante encontrar alguma propriedade existente no conjunto  $S$  para que as relações entre os pares de

conjuntos da nova família sejam equivalentes às relações entre os pares de conjuntos na família original.

Seja  $\mathcal{C}$  uma família e  $S$  um subconjunto do conjunto-base de  $\mathcal{C}$  com  $S \notin \mathcal{C}$ . O conjunto  $S$  é **uniforme em  $\mathcal{C}$**  se, para todo  $S_i \in \mathcal{C}$ ,  $S \not\subseteq S_i$ .

Por exemplo, o conjunto  $S = \{2, 6\}$  é uniforme em  $\mathcal{E}$ , pois  $S \subset \{1, 2, 3, 6\}$  e é disjunto dos outros conjuntos de  $\mathcal{E}$ . O conjunto  $S = \{4, 6\}$ , entretanto, não é uniforme em  $\mathcal{E}$ , pois  $S \cap \{4, 6\} \neq \emptyset$ .

Notamos que qualquer subconjunto de apenas um elemento é uniforme em  $\mathcal{C}$ . Entretanto, estamos preocupados em encontrar um conjunto  $S$  uniforme em  $\mathcal{C}$  que tenha mais de um elemento, pois como  $S$  sempre está contido ou é disjunto de todos os conjuntos da família, podemos selecionar um subconjunto  $S' \subset S$  e através da operação  $\mathcal{C}_{\setminus S'}$  gerar uma nova família  $\mathcal{C}'$  de forma que as relações entre todo par de conjuntos de  $\mathcal{C}'$  sejam equivalentes às relações entre os pares de conjuntos de  $\mathcal{C}$ .

Por exemplo, os pares de conjuntos da família  $\mathcal{E}_{\setminus \{2\}}$  terão sua relação preservada com relação à relação entre os pares de conjuntos de  $\mathcal{E}$  que originaram os novos conjuntos e sua respectiva relação na família anterior. O mesmo ocorre com a nova família  $\mathcal{E}_{\setminus \{6\}}$ .

Por fim, definimos o conceito de minimalidade de um conjunto em uma família. Um conjunto  $S_i \in \mathcal{C}$  é **minimal em  $\mathcal{C}$**  se não houver conjunto  $S_j \in \mathcal{C}$  tal que  $S_j \subset S_i$ . O conjunto  $\{1, 3\}$  é minimal em  $\mathcal{E}$ , enquanto  $\{1, 2, 3, 6\}$  não é minimal em  $\mathcal{E}$ , pois  $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 6\}$ .

Definindo um subconjunto próprio  $S$  de  $S_i \in \mathcal{C}$ , dizemos que  $S_i$  é **S-minimal em  $\mathcal{C}$**  se não houver conjunto  $S_j \in \mathcal{C}$  tal que  $S \subseteq S_j$  e  $S_j \subset S_i$ . O conjunto  $\{1, 2, 3, 6\}$ , que vimos não ser minimal em  $\mathcal{E}$ , é  $\{2, 6\}$ -minimal em  $\mathcal{E}$  pois não existe conjunto nesta família que contenha os elementos 2 e 6 e esteja contido em  $\{1, 2, 3, 6\}$ .

## 1.2 Definições de teoria de grafos

Nesta seção definimos os conceitos de Teoria de Grafos que são utilizados ao longo de todo nosso trabalho. As definições e nomenclaturas buscam se aproximar da utilizada em livros referência sobre o assunto [2, 3].

Um **grafo** é um par  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito de elementos chamados **vértices** e  $E$  é um conjunto finito de pares de elementos de  $V$ , chamados **arestas**. Quando há possibilidade de confusão utilizamos  $V(G)$  e  $E(G)$  para nos referirmos aos conjuntos, enfatizando o grafo a quem os vértices e arestas pertencem. Durante nosso trabalho, utilizamos tanto a nomenclatura  $G$  quanto  $G(V, E)$  para nos referirmos a um grafo.

Uma aresta é representada no trabalho como  $uv$ , onde  $u$  e  $v$  são vértices distintos de  $G$ . Se  $uv \in E$ , dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são **adjacentes** e que a aresta  $uv$  é

**incidente** ao par de vértices  $u$  e  $v$ .

O **complemento** de  $G = (V, E)$  é o grafo  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  tal que  $uv \in \overline{E}$  se e somente se  $uv \notin E$  e  $u \neq v$ .

A quantidade de arestas incidentes em um vértice  $v$  é chamado de **grau** de  $v$  e denotado por  $d(v)$ . O **menor grau** de um vértice de  $G$  é denotado por  $\delta(G)$  enquanto que o **maior grau** de um vértice de  $G$  é representado por  $\Delta(G)$ . Quando  $d(v) = 1$ , dizemos que  $v$  é **vértice pendente** de  $G$ .

A **vizinhança** de um vértice  $v$ ,  $N(v)$ , é o conjunto  $S \subset V(G)$  de forma que para todo vértice  $u \in S$ ,  $uv \in E(G)$ . A **vizinhança fechada** de um vértice  $v$ ,  $N[v]$ , é o conjunto  $N(v) \cup \{v\}$ .

Um **subgrafo**  $G'(V', E')$  de  $G(V, E)$  é um grafo onde  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ . Dado  $V' \subset V$ , o subgrafo  $G'(V', E')$  de  $G(V, E)$  é chamado **subgrafo induzido** se para todo par de vértices  $u, v \in V'$ ,  $uv \in E' \Leftrightarrow uv \in E$ . Denotamos o subgrafo induzido gerado a partir do subconjunto  $S$  como  $G[S]$ . Já o subgrafo induzido gerado a partir de  $V' = V \setminus S$  é denotado como  $G - S$ .

Se um subconjunto de  $V(G)$  induz um subgrafo de  $G$  onde todo par de vértices são adjacentes, dizemos que este conjunto de vértices é uma **clique** de  $G$ . Se um subconjunto de  $V(G)$  induz um subgrafo de  $G$  onde nenhum par de vértices é adjacente, dizemos que este conjunto de vértices é um **conjunto independente** de  $G$  ou **conjunto estável** de  $G$ .

Um grafo é  **$k$ -degenerado** se, para todo subgrafo  $G'$  de  $G$ ,  $\delta(G') \leq k$ .

Um **caminho**  $P_n$  é um grafo conexo com  $n$  vértices tal que seus vértices podem ser ordenados linearmente de forma que dois vértices são adjacentes se e somente se são consecutivos na ordem. Um **ciclo**  $C_n$  é um grafo conexo com  $n \geq 3$  vértices tal que seus vértices podem ser ordenados linearmente de forma que dois vértices são adjacentes se e somente se são consecutivos na ordem ou se são o primeiro e o último vértices da ordem.

Se para todo par de vértices de  $G$  existe como subgrafo de  $G$  um caminho contendo estes dois vértices, este grafo é **conexo**. Caso contrário, o grafo é **desconexo**. Em um grafo  $G$  desconexo, cada subgrafo conexo maximal com  $S \subset V$  vértices é chamado de **componente conexa**, denotado por  $G[S]$ .

Um **corte-estrela** de  $G$  é um conjunto  $S \subset V$  de vértices onde existe um vértice  $x \in S$  de forma que ele é adjacente a todos os outros vértices de  $S$  e  $G - S$  é desconexo.

O grafo  $C_3$  é chamado **triângulo**. Se um grafo não possui  $C_3$  como subgrafo induzido, dizemos que  $G$  é **livre de triângulos**. Um grafo que não possui nenhum  $C_n$  induzido é chamado **acíclico**. Os caminhos, por exemplo, são acíclicos. Um **grafo completo** com  $n$  vértices  $K_n$  é um grafo de forma que todo par de vértices do grafo é adjacente.



Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico. As árvores com  $n$  vértices têm  $n - 1$  arestas, os vértices com grau superior a 1 são chamados **vértices internos** e os vértices com grau igual a 1 são chamados de **folhas**.

Podemos orientar o conjunto de arestas de um grafo, de forma que passamos a ter  $G(V, \vec{E})$ , onde  $\vec{uv} \neq \vec{vu}$ . Se, para quaisquer três vértices  $u, v, z$  de  $G$ , temos uma orientação de forma que se  $\vec{uv} \in \vec{E}(G)$  e  $\vec{vz} \in \vec{E}(G)$ , então  $\vec{uz} \in \vec{E}(G)$ , temos então uma **orientação transitiva** de  $G$ . Se para um vértice  $v$ ,  $\vec{vz}$  para todo  $z \in N(v)$ , então  $v$  é uma **fonte** de  $G$ . Se para um vértice  $v$ ,  $\vec{zv}$  para todo  $z \in N(v)$ , então  $v$  é um **sumidouro** de  $G$ .

Uma **ordenação topológica**  $\sigma = [1, \dots, n]$  de  $G$  transitivamente orientado é uma ordem de seus vértices de forma que o  $i$ -ésimo vértice de  $\sigma$  é fonte no subgrafo induzido por todos os vértices que aparecem antes de  $i$  em  $\sigma$ .

Podemos particionar o conjunto de vértices em subconjuntos, e passamos a ter o grafo  $G(V_1, V_2, \dots, V_k, E)$ , sendo que para todo  $i, j$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$  e  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$ . Cada conjunto  $V_i$  é chamado de **parte**.

Se a parte  $V_i$  de uma partição for um conjunto estável em  $G$ , chamamos  $V_i$  de **parte estável**. Caso  $V_i$  seja uma parte tal que seu conjunto de vértices induz um subgrafo completo, chamamos de **parte completa**. Um grafo **bipartido**,  $G(V, E)$  é um grafo que admite uma partição de seu conjunto de vértices em dois conjuntos  $X, Y$ , de forma que  $X$  e  $Y$  são partes estáveis de  $G$ .

Chamamos de **família de grafos** um conjunto de grafos que apresentam uma propriedade em comum. Os caminhos  $P_n$ , os ciclos  $C_n$  e as árvores são exemplos de famílias de grafos.

Um **grafo de interseção** é aquele que representa uma família de objetos de forma que associamos a cada vértice um único objeto da família e dois vértices são adjacentes se e somente se os respectivos objetos associados se intersectam. Reunindo em uma família todos os grafos existentes que são caracterizados como grafos de interseção de uma família de objetos semelhantes, definimos esta família como **classe de interseção**. Por exemplo, na classe de interseção dos grafos de intervalo cada grafo desta família representa uma família de intervalos da reta real.

Existem várias classes de interseção catalogadas, em livros [3, 6] e páginas na internet [1]. A vantagem de trabalhar em problemas especificamente para classes de interseção ou famílias de grafos é que podemos utilizar as propriedades em comum desta família para auxiliar na resolução dos problemas.

# Capítulo 2

## Número de Overlap

Neste capítulo apresentamos formalmente o problema *Número de Overlap*, indicando inicialmente exemplos e resultados básicos para este problema. Após esta introdução ao problema, na Seção 2.1 argumentamos sobre uma possível comparação entre o problema *Número de Overlap* e *Número de Interseção*, justificando que nem sempre é interessante calcular inicialmente o número de interseção de um grafo para então buscar seu número de overlap. A seguir, na Seção 2.2, apresentamos resultados iniciais sobre o problema, resultados de autoria de Rosgen [12, 13], Cranston et. al. [4] e Henderson [8].

Na Seção 2.3 indicamos como calcular o número de overlap de grafos desconexos, dado que sabemos o número de overlap de cada componente conexa, resultado de Rosgen [12]. As seções seguintes contém limites do número de overlap a partir de propriedades dos grafos, como número de arestas, de autoria de Cranston et. al. [4], ou tamanho do conjunto estável máximo, de autoria de Henderson [8]. Por fim, apresentamos um resultado extremal do número de overlap, além de um grafo que atinge este valor, resultado de Cranston et. al. [4].

Com exceção do limite inferior do número de overlap a partir do conjunto estável máximo, todos os resultados são apresentados com sua argumentação original da prova. O resultado original de Henderson é apresentado utilizando outra argumentação, encontrado de forma independente no decorrer de nosso trabalho.

Inicialmente verificamos que podemos representar uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  como um determinado grafo  $G$ . A partir da família de conjuntos  $\mathcal{C}$ , associamos a cada conjunto  $S_v$  de  $\mathcal{C}$  um único vértice  $v$  de  $G$  e criamos uma aresta  $uv$  se os dois conjuntos associados  $S_u$  e  $S_v$  têm overlap.

A Figura 2.1 mostra o grafo resultante da família  $\mathcal{E}$ , dado como exemplo durante a Seção 1.1. Notemos que associamos um vértice diferente para cada um dos dois conjuntos  $\{1, 5\}$  existentes, pois são dois conjuntos únicos. Podemos notar também que ambos possuem a mesma vizinhança.

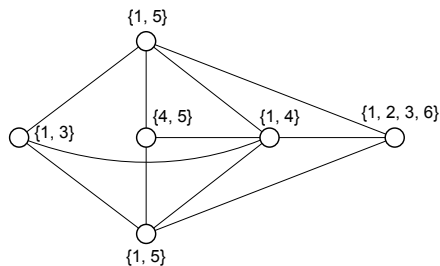


Figura 2.1: Grafo associado à família  $\mathcal{E}$  de conjuntos.

**Definição 2.1** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma família  $\mathcal{C} = \{S_v : v \in V\}$  é uma **representação overlap** de  $G$  se  $uv \in E \Leftrightarrow S_u \not\cap S_v$ .

Pela Definição 2.1 damos o nome de representação overlap para uma família de conjuntos que representa um grafo através das relações de overlap entre seus pares de conjuntos. O Lema 2.1 nos mostra que, por outro lado, todo grafo possui uma representação overlap, apresentando uma forma de construir uma representação overlap de qualquer grafo.

**Lema 2.1** Todo grafo  $G = (V, E)$  possui uma representação overlap.

*Prova:* Vamos construir uma família  $\mathcal{C}$  que seja uma representação overlap de  $G$ . Inicialmente, cada vértice e aresta de  $G$  recebe como rótulo um elemento tal que o conjunto  $S_v$  seja formado pelo elemento do vértice  $v$  e o elemento de cada aresta incidente a ele. Como o elemento de cada aresta  $uv$  estará tanto em  $S_u$  quanto em  $S_v$ , temos que  $S_u \cap S_v \neq \emptyset$  quando  $uv \in E$ . Como cada conjunto  $S_v$  possui um elemento exclusivo, não existe em  $\mathcal{C}$  conjunto contido em outro. Assim,  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$ . ■

A Figura 2.2 apresenta uma forma de gerar uma representação overlap de um grafo  $G$ . Inicialmente atribuímos um rótulo para cada vértice e aresta, como na Figura 2.2(a), e definimos cada conjunto com o rótulo exclusivo de cada vértice mais os rótulos associados às arestas incidentes ao vértice, como na Figura 2.2(b).

Entretanto, esta representação apresentada não é única. Podemos notar que a representação overlap gerada como descrito no Lema 2.1 associa um par de vértices não adjacentes a um par de conjuntos disjuntos. Podemos então buscar uma representação overlap para o mesmo grafo onde a não existência de uma aresta  $uv$  seja consequência da relação  $S_u \subseteq S_v$ . A Figura 2.3 mostra outra família de conjuntos, que é uma representação overlap do mesmo grafo. Nesta nova família podemos ver que existem conjuntos contidos em outros.

Durante este trabalho, ao construir representações overlap de um grafo, fazemos constantemente a associação entre um vértice  $v$  de  $G$  e um conjunto  $S_v$  de  $\mathcal{C}$ . Exceto

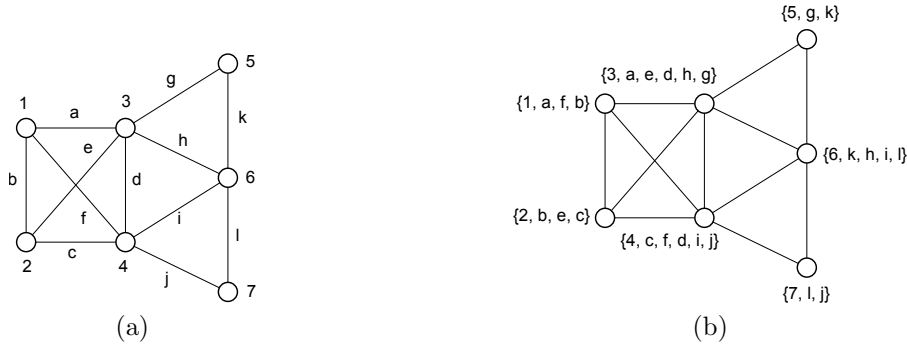


Figura 2.2: Construção de representação overlap de um grafo através do Lema 2.1.

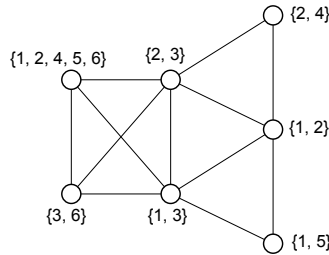


Figura 2.3: Outra representação overlap do grafo da Figura 2.2.

quando indicado explicitamente no texto, um conjunto  $S_u$  está associado ao vértice com o mesmo rótulo de seu índice, no caso o vértice  $u$ .

Vamos apresentar a seguir uma segunda definição de representação overlap, incluindo uma nova restrição. Esta representação overlap mais restrita é utilizada durante nosso trabalho pois em alguns momentos é mais fácil calcular o número de overlap com esta restrição.

**Definição 2.2** Uma família  $\mathcal{C}$  é uma **representação overlap própria** de um grafo  $G = (V, E)$  se  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$  e  $\mathcal{C}$  é uma família própria.

Podemos ver rapidamente que o Lema 2.1 também prova que todo grafo possui representação overlap própria, pelo simples fato de que a construção apresentada produz uma família de conjuntos que é representação de overlap e não existe nenhum par de conjuntos  $S_u, S_v$  tais que  $S_u \subseteq S_v$ .

**Definição 2.3** O **tamanho** de uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de um grafo  $G$  é o tamanho da família  $\mathcal{C}$ .

A representação overlap própria apresentada pela Figura 2.2 tem tamanho 19, a quantidade de vértices (sete) e arestas (doze) existentes em  $G$ . Entretanto, a representação overlap apresentada na Figura 2.3 para o mesmo grafo tem tamanho 6. Uma pergunta que podemos fazer é se existe uma representação overlap de  $G$  com tamanho menor que 6 ou seja, se  $\mathcal{D}$  é mínima.

**Definição 2.4** *O menor tamanho possível de uma família  $\mathcal{C}$  que seja representação overlap de  $G$  é chamado **número de overlap** de  $G$ , denotado por  $\varphi(G)$ .*

Desta forma, sempre que nos referirmos a uma **representação overlap ótima** de  $G$  nos referimos a uma representação overlap de  $G$  de tamanho igual a  $\varphi(G)$ . Da mesma forma que fizemos com o número de overlap, podemos nos perguntar se existe uma representação overlap própria do grafo da Figura 2.2 ou se aquela representação overlap própria é mínima, o que nos leva à definição a seguir.

**Definição 2.5** *O menor tamanho possível de uma família  $\mathcal{C}$  que seja representação overlap própria de  $G$  é chamado **número de overlap próprio** de  $G$ , denotado por  $\Phi(G)$ .*

Podemos rapidamente perceber que  $\varphi(G) \leq \Phi(G)$  pelo simples fato de que uma representação overlap própria também é uma representação overlap de um grafo. Vamos definir mais formalmente a pergunta anteriormente feita sobre o valor de  $\varphi(G)$ .

**Problema:** NÚMERO DE OVERLAP

*Instância:* Grafo  $G$ , inteiro positivo  $k$

*Questão:* Existe representação overlap de  $G$  de tamanho  $f \leq k$ ?

Rosgen conjecturou [12] que o problema NÚMERO DE OVERLAP pertence à classe dos problemas  $\mathcal{NP}$ -Completo. De fato, é fácil ver que o problema está em  $\mathcal{NP}$ . Um certificado seria uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  de tamanho  $f$  pois verificar se  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$  é polinomial no tamanho da entrada. Alguns outros problemas relacionados ao número de overlap foram provados como  $\mathcal{NP}$ -Completo por Rosgen [12, 13], mas ainda não existe uma transformação polinomial de um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo para NÚMERO DE OVERLAP.

Uma consequência direta do Lema 2.1 consiste em um limite superior para o número de overlap para qualquer grafo, de forma que o problema está bem definido para qualquer instância.

**Corolário 2.2** *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas, então  $\varphi(G) \leq n + m$ .*

A prova do Corolário 2.2 é direta da prova apresentada no Lema 2.1. Construímos uma representação overlap com exatamente  $n + m$  elementos.

## 2.1 Representação de interseção

Em uma representação de interseção de um grafo  $G$  uma aresta  $uv \in G$  se e somente se temos  $S_u \cap S_v \neq \emptyset$ . A partir de uma representação de interseção existe o

problema NÚMERO DE INTERSEÇÃO, semelhante a NÚMERO DE OVERLAP porém alterando a questão de forma a perguntar se existe uma representação de interseção para  $G$ .

Erdős, Pósa e Goodman mostram que o valor extremal do número de interseção de um grafo é  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  [5]. Observando que a representação dada na prova do Lema 2.1 é também uma representação de interseção do grafo, concluímos então que o problema NÚMERO DE INTERSEÇÃO está bem definido para qualquer instância de  $G$ .

A partir de uma representação de interseção de um grafo, podemos construir uma segunda família de conjuntos que seja representação overlap do mesmo grafo. Para isso, basta atribuir a cada conjunto um elemento exclusivo e portanto evitamos que para qualquer par  $S_u, S_v$  da família tenhamos  $S_u \subseteq S_v$ , garantido que todas as relações de interseção entre pares de conjuntos da primeira família sejam relações de overlap entre pares de conjuntos da segunda família. Desta forma, temos um segundo limite superior para o número de overlap de um grafo:  $\varphi(G) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + n$ .

Como a relação overlap possui mais restrições que a relação de interseção, é natural pensar inicialmente que o número de interseção será sempre menor ou igual ao número de overlap do mesmo grafo. Entretanto, podemos mostrar rapidamente que tal relação entre os dois parâmetros é incorreta. Um contra-exemplo é dado pelo grafo bipartido completo de  $n \geq 4$  vértices com suas duas partes tendo exatamente  $\frac{n}{2}$  vértices. Erdős, Pósa e Goodman mostram que tais grafos têm número de interseção igual a  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , mas a família formada por  $\frac{n}{2}$  conjuntos  $\{1, 2\}$  e  $\frac{n}{2}$  conjuntos  $\{2, 3\}$  é uma representação overlap ótima de tamanho 3 do mesmo grafo, valor bem inferior ao número de interseção.

Na Figura 2.4 temos duas representações por conjuntos do grafo  $K_{3,3}$ . Na Figura 2.4(a), temos uma representação de interseção ótima de tamanho 9. Já a Figura 2.4(b) nos apresenta uma representação overlap ótima de tamanho 3. Esta figura é um exemplo de grafos que possuem número de overlap inferior ao número de interseção.



Figura 2.4: Representações do  $K_{3,3}$ : à esquerda, de interseção; à direita, de overlap.

A Figura 2.5 mostra uma representação de interseção ótima e uma representação overlap ótima do grafo  $K_6$ . Na Figura 2.5(a), temos uma representação de interseção

ótima, de tamanho 1. Já a Figura 2.5(b) nos apresenta uma representação overlap ótima, de tamanho 5. Observamos que no modelo de interseção um mesmo elemento em todos os conjuntos é suficiente para representar todas as arestas entre os pares de vértices de um grafo completo, enquanto essa pequena quantidade de elementos não é suficiente para produzir relações de overlap entre os pares de conjuntos de uma representação overlap de um grafo completo.

Estas considerações mostram que, apesar de a primeira vista parecer promissor, pensar em construir uma representação de interseção de um grafo e atribuir mais  $n$  elementos no conjunto-base da família, um exclusivo para cada conjunto, em geral não produz resultados muito interessantes para nosso problema.

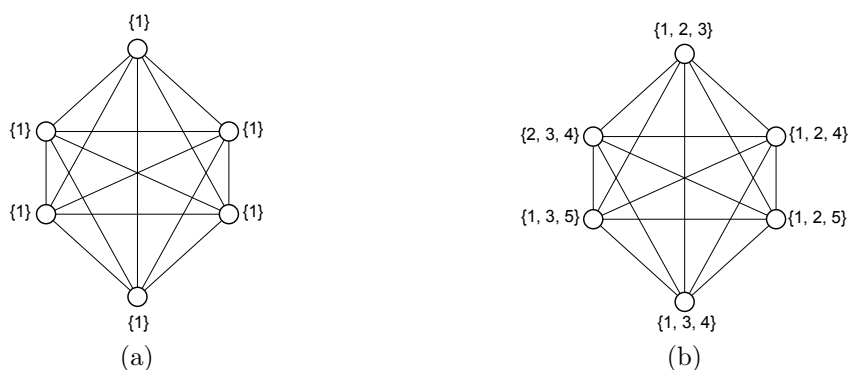


Figura 2.5: Representações do  $K_6$ : à esquerda, de interseção; à direita, de overlap.

## 2.2 Resultados iniciais

No momento em que não podemos simplesmente nos aproveitar das representações de interseção para buscar uma representação overlap ótima de um grafo, precisamos caminhar por lemas e observações iniciais que serão utilizados no decorrer do trabalho. Estes resultados são apresentados nos trabalhos de Rosgen [12] e Cranston et. al. [4].

**Lema 2.3** *Se  $H$  é um subgrafo induzido de  $G$ , então  $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ .*

*Prova:* Basta observar que, se  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap ótima de  $G$ , a família  $\mathcal{F}$  que contém apenas os conjuntos de  $\mathcal{C}$  associados aos vértices em  $V(H)$  é uma representação overlap de  $H$ , mas não necessariamente ótima. ■

A partir do Lema 2.3, conseguimos construir provas do número de overlap de grafos a partir do número de overlap de um subgrafo. No lema a seguir, mostramos um segundo resultado relacionado com subgrafo, com a propriedade especial de vértices possuírem a mesma vizinhança.

**Lema 2.4 (Lema dos Gêmeos Falsos)** *Seja  $v$  um vértice de  $H$  com vizinhança  $N(v)$ . Se  $G$  é formado pela adição em  $H$  de um vértice  $u$  de forma que  $N(u) = N(v)$ , então  $\varphi(G) = \varphi(H)$ .*

*Prova:* Pelo Lema 2.3, temos que  $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ . Vamos construir agora uma representação overlap de  $G$  com tamanho  $\varphi(H)$ .

Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap ótima de  $H$  e considere a família  $\mathcal{F}$ , formada por todos os conjuntos de  $\mathcal{C}$  mais um novo conjunto  $S_u$  tal que  $S_u = S_v$ . Desta forma  $u$  e  $v$  terão a mesma vizinhança,  $\mathcal{F}$  é uma representação overlap de  $G$  de mesmo tamanho que a família  $\mathcal{C}$ .

Portanto,  $\varphi(G) = \varphi(H)$ . ■

Através do Lema 2.4 concluímos que a inclusão ou remoção de vértices gêmeos falsos não afeta o número de overlap do grafo. Desta forma, assumimos que neste texto, salvo explicitamente avisado, assumimos que  $G$  não possui nenhum par de vértices gêmeos falsos nos resultados associados ao número de overlap de  $G$ .

O lema a seguir é um dos mais importantes no que diz respeito às relações de overlap entre conjuntos de uma família, e será utilizado como ferramenta em várias ocasiões no decorrer de todo nosso trabalho.

**Lema 2.5** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com uma representação overlap  $\mathcal{C}$  e sejam  $X$  e  $Y$  dois subconjuntos não vazios de  $V$  tais que  $G[X]$  e  $G[Y]$  são conexos e para todo par de vértices  $x \in X$  e  $y \in Y$ ,  $xy \notin E(G)$ . Considerando  $U_X = \bigcup_{x \in X} S_x$  e  $U_Y = \bigcup_{y \in Y} S_y$ , as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se existem  $x \in X$ ,  $y \in Y$  tais que  $S_x \subseteq S_y$ , então  $U_X \subseteq S_y$ ;*
2. *Se existem  $x \in X$ ,  $y \in Y$  tais que  $S_x = S_y$ , então  $|X| = |Y| = 1$ ;*
3. *Se existem  $x \in X$ ,  $y \in Y$  tais que  $S_x \subseteq S_y$  e  $|Y| \geq 2$ , então para todo  $z \in Y$ ,  $U_X \subseteq S_z$  ou  $U_X \cap S_z = \emptyset$ .*

*Prova:* Vamos provar cada afirmação individualmente:

1. Como  $S_x \subseteq S_y$ , todo conjunto  $S_u$  associado a um vértice  $u$  de  $X$  adjacente a  $x$  possui ao menos um elemento em comum com  $S_x$ , já que  $S_u \not\propto S_x$ . Logo,  $S_u$  possui ao menos um elemento em comum com  $S_y$  e desta forma  $S_u \subseteq S_y$  ou  $S_u \not\propto S_y$ . Como a aresta  $uy$  não existe em  $G$ , a única relação possível entre o par de conjuntos é  $S_u \not\propto S_y$ . Argumentando iterativamente para todos os conjuntos associados a vértices de  $X$ , temos que  $U_X \subseteq S_y$ .
2. Como  $S_x = S_y$ , temos que  $N(x) = N(y)$ . Como não existe nenhuma aresta entre um par de vértices  $x \in X$  e  $y \in Y$ ,  $|X| = |Y| = 1$ .



3. Por absurdo, supomos que existe  $S_{y'}$ ,  $y' \in Y$ , tal que  $S_{y'} \subseteq U_x$ . Como  $S_{y'}$  não tem overlap com nenhum conjunto associado a vértices de  $X$ , então  $S_{y'} \subseteq S_{x'}$  para algum  $x' \in X$ . Desta forma,  $S_{y'} \subseteq U_Y \subseteq S_{x'} \subseteq U_X$ . Pela hipótese, temos que  $U_X \subseteq S_y \subseteq U_Y$  e portanto  $S_{y'} \subseteq U_Y \subseteq S_{x'} \subseteq U_X \subseteq S_y \subseteq U_Y$ , implicando em  $S_{x'} = S_y$  e  $|X| = |Y| = 1$ , contradição. ■

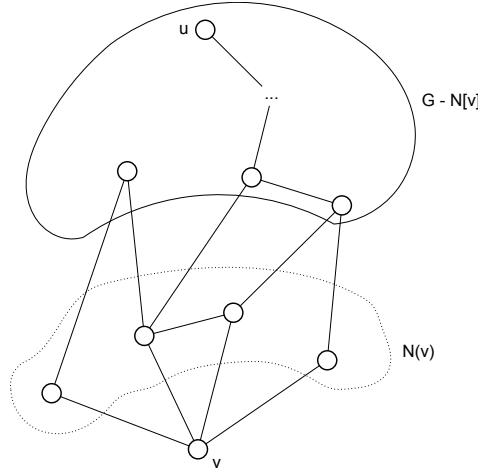


Figura 2.6: Subconjuntos de  $V(G)$  atendendo o Lema 2.5

Aplicando o Lema 2.5 para um grafo  $G$ , podemos definir o conjunto  $X$  como um único vértice  $v$  de  $G$ , e o conjunto  $Y$  como os vértices de uma componente conexa de  $G - N[v]$ , chegando à conclusão de que se existe  $u \in Y$  tal que  $S_u \subseteq S_v$ , então  $U_Y \subseteq S_v$ , como ilustrado na Figura 2.6. Esta forma de aplicar o Lema 2.5 será usada constantemente no decorrer do trabalho.

O lema a seguir indica que conjunto  $S$  de elementos podemos remover do conjunto-base de uma representação overlap de um grafo  $G$  de forma que a nova família proveniente da operação corta- $S$  preserva todas as relações de overlap originais entre os pares de conjuntos, isto é, também seja uma representação overlap de  $G$ .

**Lema 2.6** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma representação overlap de  $G$  e  $S \notin \mathcal{C}$  um conjunto de elementos do conjunto-base de  $\mathcal{C}$ . A família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\setminus S}$  é uma representação overlap de  $G$  se e somente se  $S_u \cap S_v \not\subseteq S$  e  $S_u \setminus S_v \not\subseteq S$  para todo par  $S_u, S_v$  de conjuntos de  $\mathcal{C}$  tal que  $S_u \not\subseteq S_v$ .*

*Prova:* Se  $S$  contivesse  $S_u \cap S_v$ , em  $\mathcal{F}$  teríamos  $S'_u \parallel S'_v$  de forma que a aresta  $uv$  de  $G$  não estaria representada em  $\mathcal{F}$  e portanto  $\mathcal{F}$  não é representação overlap de  $G$ . Analogamente, se  $S$  contivesse  $S_u \setminus S_v$ , em  $\mathcal{F}$  teríamos  $S'_u \subseteq S'_v$ , e  $\mathcal{F}$  também não seria representação overlap de  $G$ .

Por outro lado, se  $S$  não contém a interseção ou diferença de dois conjuntos,  $\mathcal{F}$  manterá a relação entre os conjuntos de forma que, como  $\mathcal{C}$  era uma representação overlap de  $G$ , a família  $\mathcal{F}$  também é uma representação overlap de  $G$ . ■

Na Figura 2.7(a), se  $S = \{2, 3\}$ , a nova família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\setminus S}$  não é uma representação overlap do grafo Hajós. Basta verificar que os conjuntos  $\{1, 2\}$  e  $\{2, 4\}$  de  $\mathcal{C}$  passam a ser respectivamente os conjuntos  $\{1\}$  e  $\{4\}$  de  $\mathcal{F}$ , sendo que  $\{1\} \parallel \{4\}$ . Entretanto, se  $S = \{6\}$ , a nova família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\setminus S}$  mantém a relação de overlap entre todo par de conjuntos que possuía esta relação em  $\mathcal{C}$ , continuando a ser uma representação overlap do grafo de Hajós, como indicado na Figura 2.7(b).

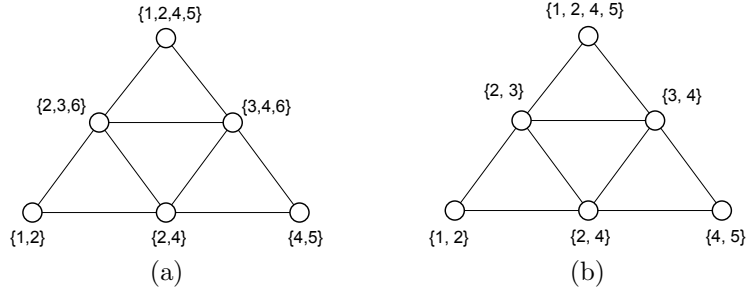


Figura 2.7: Duas representações overlap do grafo de Hajós.

Relembrando a definição de conjunto uniforme em  $\mathcal{C}$ , apresentada no Capítulo 1, a Figura 2.7(a) mostra uma representação overlap  $\mathcal{C}$  do grafo de Hajós onde o conjunto  $\{3, 6\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}$ . Podemos rapidamente concluir uma observação sobre as consequências de construção de uma nova família derivada de  $\mathcal{C}$  pela função corta- $S$ , quando  $S$  é um subconjunto próprio de um conjunto uniforme em  $\mathcal{C}$ . Esta observação se encontra a seguir.

**Observação 2.7** *Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap de  $G$  e  $S \notin \mathcal{C}$  um subconjunto do conjunto-base de  $\mathcal{C}$ . Se  $S$  é uniforme em  $\mathcal{C}$ , então para qualquer subconjunto próprio  $S'$  de  $S$ , a família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\setminus S'}$  também é representação overlap de  $G$ .*

De fato, se  $S$  é uniforme em  $\mathcal{C}$ , para qualquer par de conjuntos  $S_u$  e  $S_v$ , nenhum subconjunto próprio  $S'$  de  $S$  é igual a  $S_u \cap S_v$  ou  $S_u \setminus S_v$ . Utilizando então o Lema 2.6 podemos criar uma nova-família de conjuntos sem os elementos de  $S'$  no conjunto-base, de forma que  $\mathcal{C}_{\setminus S'}$  também é uma representação overlap de  $G$ .

Portanto, se uma representação overlap  $\mathcal{C}$  possui um conjunto  $S$  com pelo menos dois elementos que é uniforme em  $\mathcal{C}$ , esta representação overlap não é ótima.

**Lema 2.8** *Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap de um grafo  $G$  que contém um vértice  $v$  tal que  $N(v)$  é estável e para todo vértice  $u \in N(v)$  tem-se  $d(u) \geq 2$ . Seja também  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{S_v\}$ . Se  $\{a, b\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}'$ , então  $\mathcal{C}_{\setminus \{a\}}$  ou  $\mathcal{C}_{\setminus \{b\}}$  é representação overlap de  $G$ .*

*Prova:* Se  $\{a, b\} \subset S_v$  ou  $\{a, b\} \parallel S_v$ , então  $\{a, b\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}$  e a implicação é direta. Portanto, um dos dois elementos deve pertencer a  $S_v$  enquanto o outro não. Assumimos, sem perda de generalidade, que  $a \notin S_v$  e  $b \in S_v$ .

Supomos então que  $\mathcal{C}_{\{a\}}$  não é representação overlap de  $G$ . Como  $\{a, b\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}'$ , sabemos que  $\mathcal{C}'_{\{a\}}$  é representação overlap de  $G - \{v\}$ . Logo, existe  $uv \in E(G)$  tal que  $S_u \setminus S_v = \{a\}$ . Como  $\{a, b\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}'$ ,  $b \in S_u$ .

Supomos agora que  $\mathcal{C}_{\{b\}}$  também não é uma representação overlap de  $G$ . Se  $u$  for o único vizinho de  $v$ , temos dois casos:  $S_v \setminus S_u = \{b\}$ , uma contradição pois  $b \in S_u$ ; ou  $S_v \cap S_u = \{b\}$ , outra contradição pois implica em  $S_u \setminus S_v \neq \{a\}$ . Portanto concluímos que  $d(v) \geq 2$ . Seja  $w \in N(v)$  um segundo vizinho de  $v$ .

Como  $d(u) \geq 2$  e  $d(w) \geq 2$ , existe  $c_1 \in S_u$  e  $c_2 \in S_w$  para representar as relações de overlap com os conjuntos associados aos outros vizinhos de  $u$  e  $w$ . Temos então as seguintes informações sobre os conjuntos  $S_v$ ,  $S_u$  e  $S_w$ :  $b \in S_v$ ,  $\{a, b, c_1\} \subseteq S_u$  e  $c_2 \in S_w$ .

Como  $\mathcal{C}_{\{b\}}$  também não é representação overlap de  $G$ , a aresta  $wv$  não é representada em  $\mathcal{C}_{\{b\}}$ . Para que isso aconteça, ou  $S_v \cap S_w = \{b\}$  ou  $S_v \setminus S_w = \{b\}$ .

Caso  $S_v \cap S_w = \{b\}$ : Temos que  $\{c_2, b\} \subseteq S_w$ . Como  $\{a, b\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}'$  temos  $\{c_2, a, b\} \subseteq S_w$ . Para que não tenhamos  $S_u \not\setminus S_w$ , é necessário que  $c_1 = c_2$ . Porém, o fato  $S_u \setminus S_v = \{a\}$  implica em  $c_1 \in S_v$  enquanto o fato  $S_w \cap S_v = \{b\}$  implica em  $c_1 \notin S_v$ , uma contradição.

Caso  $S_v \setminus S_w = \{b\}$ : Como  $\{a, b\}$  é uniforme em  $\mathcal{C}'$  temos  $\{a, b\} \parallel S_w$ . Sabendo que  $S_u \setminus S_v = \{a\}$ , temos que  $c_1 \in S_v$  e portanto  $\{b, c_1\} \in S_v$ . Como  $S_v \setminus S_w = \{b\}$ , temos que  $c_1 \in S_w$ . Se  $c_1 \neq c_2$ , temos diretamente  $S_u \not\setminus S_v$ , uma contradição. Se  $c_2 = c_1$ ,  $S_w$  deve possuir outro elemento  $d$  para que  $S_w \not\subseteq S_v$ . Desta forma temos  $S_u \not\setminus S_v$ , uma contradição.

Portanto, concluímos que caso  $\mathcal{C}_{\{a\}}$  não seja representação overlap de  $G$ , então  $\mathcal{C}_{\{b\}}$  é representação overlap de  $G$ . ■

Apresentamos a seguir duas definições para vértices minimais em uma representação overlap  $\mathcal{C}$ . Estas definições se apoiam nas definições de conjuntos minimais apresentados anteriormente no Capítulo 1.

**Definição 2.6** *Um vértice  $v$ ,  $v \in V(G)$  é **minimal em  $\mathcal{C}$**  se  $S_v$  é minimal em  $\mathcal{C}$ .*

**Definição 2.7** *Um vértice  $v$ ,  $v \in V(G)$  é **S-minimal em  $\mathcal{C}$**  se  $S_v$  é S-minimal em  $\mathcal{C}$ .*

Na representação overlap  $\mathcal{C}$  mostrada na Figura 2.8, o vértice associado ao conjunto  $\{1, 2\}$  é um exemplo de vértice minimal em  $\mathcal{C}$ , enquanto os vértices associados aos conjuntos  $\{1, 2, 4\}$  e  $\{1, 2, 3\}$  são não-minimais em  $\mathcal{C}$ . Entretanto, o vértice associado ao conjunto  $\{1, 2, 4\}$  é  $\{4\}$ -minimal em  $\mathcal{C}$ , pois nenhum conjunto que contenha o elemento 4 está contido em  $\{1, 2, 4\}$  na representação overlap  $\mathcal{C}$ .

Uma observação que podemos fazer sobre conjuntos minimais em uma representação overlap, associado ao Lema 2.5, se encontra a seguir.

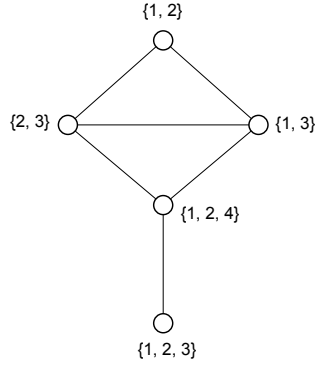


Figura 2.8: Grafo  $G$  e uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de  $G$ .

**Observação 2.9** *Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap de  $G$ . Se  $S_v$  é minimal em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  é uma representação overlap de  $G - N[v]$  criada a partir da remoção em  $\mathcal{C}$  dos conjuntos associados aos vértices de  $N[v]$ , então  $S_v$  é uniforme em  $\mathcal{C}'$ .*

Encerramos esta seção com um teorema sobre o número de overlap de um grafo que possui um vértice pendente. Este lema será útil durante provas de limites superiores do número de overlap de certos grafos, ao indicar que a remoção de vértices pendentes não afetará o cálculo de limites superiores do número de overlap em determinados casos.

**Teorema 2.10** *Se  $G$  é um grafo tal que existe um vértice pendente  $v$ , então temos  $\varphi(G) \leq \varphi(G - \{v\}) + 2$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{C}'$  uma representação overlap ótima de tamanho  $\varphi(G - \{v\})$  do grafo  $G - \{v\}$ . Vamos construir uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de  $G$  a partir de  $\mathcal{C}'$ .

Criamos o conjunto  $S_v = \{a, b\}$ , de forma que tanto  $a$  quanto  $b$  não pertençam ao conjunto-base de  $\mathcal{C}'$ . Seja  $u$  o vértice adjacente de  $v$ . Construimos seu conjunto em  $\mathcal{C}$  tal que  $S'_u = \{a\} \cup S_u$ ,  $S_u \in \mathcal{C}'$ . Para todo conjunto  $S_z$  de  $\mathcal{C}'$  tal que  $S_u \subseteq S_z$ , seu novo conjunto em  $\mathcal{C}$  é  $S'_z = S_z \cup \{a, b\}$ . Para todos os conjuntos  $S_w$  de  $\mathcal{C}'$  que não contêm  $S_z$ , em  $\mathcal{C}$  temos  $S'_w = S_w$ .

Analisando a relação entre um par de conjuntos de  $\mathcal{C}'$  na segunda família  $\mathcal{C}$ , verificamos que um par de conjuntos não alterados possui a mesma relação em  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{C}$ . O mesmo ocorre para um par de conjuntos alterados, pois como  $S_u$  está contido em ambos os conjuntos, a interseção entre esse par de conjuntos já era não vazia e os novos elementos  $a, b$  não alteram a relação. Por fim, um conjunto alterado e um conjunto não alterado mantêm suas relações pois  $a$  e  $b$  são incluídos na parte exclusiva do conjunto alterado, não alterando a interseção entre o par de conjuntos.

Como todos os pares de conjuntos de  $\mathcal{C}'$  preservam suas relações em  $\mathcal{C}$ ,  $S_v \not\cap S_u$  e  $S_v$  está contido ou é disjunto de qualquer outro conjunto de  $\mathcal{C}$ , concluimos que  $\mathcal{C}$  é representação overlap de  $G$  e  $\varphi(G) \leq \varphi(G - \{v\}) + 2$ . ■

## 2.3 Grafos desconexos

Nesta seção apresentamos o resultado de Rosgen [12], sobre o número de overlap de um grafo desconexo. Desta forma, o estudo do número de overlap de um grafo pode se restringir a grafos conexos. Como a prova é construtiva, temos também como obter uma representação overlap ótima a partir das representações overlap ótimas de suas componentes conexas.

Seja  $G$  um grafo desconexo com  $k$  componentes conexas,  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , cada componente conexa com seu respectivo número de overlap  $\varphi(G_1), \varphi(G_2), \dots, \varphi(G_k)$ , representações overlap ótimas com conjuntos-base disjuntos.

Podemos rapidamente encontrar um primeiro limite superior para o número de overlap de grafos desconexos, que consiste no somatório do número de overlap de todas suas componentes conexas. Como cada elemento pertence ao conjunto-base de apenas uma família de conjuntos, se criarmos uma família de conjuntos através da união das representações overlap ótimas de cada componente conexa, todo par de conjuntos associado a vértices de componentes conexas distintas será disjunto. Podemos, entretanto, diminuir o tamanho de uma representação overlap de um grafo desconexo, como vemos no teorema a seguir.

**Teorema 2.11** *Se  $G$  um grafo desconexo com  $k \geq 2$  componentes conexas  $G_1, \dots, G_k$ , então  $\varphi(G) = \sum_{i=1}^k \varphi(G_i) - (k - 1)$ .*

*Prova:* Provamos por indução no número de componentes conexas de  $G$ .

Caso  $k = 2$ , sejam  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  representações overlap de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, com seus respectivos conjuntos-base  $U_1$  e  $U_2$ . Caso exista um elemento  $e \in U_1$  de forma que  $e \in U_2$ , pelo Lema 2.5 concluímos que  $U_1 \subseteq U_2$ . O tamanho de  $\mathcal{C}_2$  pode então ser calculado como  $|\mathcal{C}_2| \leq |\mathcal{C}| - |\mathcal{C}_1| + 1$ , onde esta constante 1 representa todo o conjunto-base  $U_1$  que está contido em  $U_2$  representando um elemento de  $U_2$  caso não houvesse interseção entre o par de conjuntos-base. Chegamos então a  $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| - 1$ , que se aplicarmos ao número de overlap de cada grafo resulta em  $\varphi(G) \geq \varphi(G_1) + \varphi(G_2) - 1$ .

Para  $k \geq 3$ , seja  $G_k$  a  $k$ -ésima componente conexa com sua representação overlap  $\mathcal{C}_k$  e conjunto-base  $U_k$ . Os conjuntos-base das componentes conexas  $U_1, \dots, U_{k-1}$  podem substituir entre 1 e  $k - 1$  elementos de  $U_k$ , porém se já temos para um par  $U_i, U_j$  de conjuntos-base a relação  $U_i \subseteq U_j$ , este par de conjuntos-base podem substituir apenas um elemento em  $U_k$ , como consequência do Lema 2.5.

Consideremos então que  $\mathcal{C}_k$  tem  $q \leq k - 1$  elementos substituídos em seu conjunto-base, de cada subgrafo  $G'_q$ . Cada subgrafo  $G'_q$  é formado pelas componentes conexas cujos conjuntos-base estão contidos um no outro. O tamanho de  $\mathcal{C}_k$  pode ser calculado como  $|\mathcal{C}_k| \leq |\mathcal{C}| - (|\mathcal{C}_{G'_1}| + \dots + |\mathcal{C}_{G'_q}|) + q$ , que nos leva a  $|\mathcal{C}| \geq |\mathcal{C}_k| + (|\mathcal{C}_{G'_1}| + \dots + |\mathcal{C}_{G'_q}|) - q$ .

Aplicando o último resultado para a representação overlap ótima de cada subgrafo, temos então  $\varphi(G) \geq \varphi(G_k) + (\varphi(G'_1) + \dots + \varphi(G'_q)) - q$ . Aplicando a hipótese de indução em cada subgrafo  $G'_i$ , temos  $\varphi(G'_i) \geq (\sum_{\forall j, G_j \in G'_i} \varphi(G_j) - 1) + 1$ . Ou seja, o somatório do número de overlap de cada componente conexa menos a quantidade de componentes conexas mais um. Como cada componente conexa está em apenas um  $G'_i$ , resultamos em  $\varphi(G) \geq \varphi(G_1) + \dots + \varphi(G_k) - (k - 1)$ , conseqüentemente  $\varphi(G) \geq \sum_{i=1}^k \varphi(G_i) - (k - 1)$ .

Uma representação overlap com este tamanho é conseguida substituindo um elemento de  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \geq 2$ , por todo o conjunto-base de  $\mathcal{C}_{i-1}$ . Desta forma, as relações entre os conjuntos das famílias se mantêm e esta nova família é uma representação overlap do grafo desconexo  $G$ . ■

O Teorema 2.11 nos mostra que a forma que você escolhe substituir os elementos do conjunto-base de uma componente conexa pelo conjunto-base de outras componentes resulta no mesmo número de overlap do grafo. Em outras palavras, buscar economizar dois elementos em um conjunto-base ocasiona uma economia verdadeira.

Através deste resultado conseguimos calcular o número de overlap de grafos desconexos, desde que saibamos calcular o número de overlap de suas componentes conexas. Desta forma, em nossos estudos trataremos apenas dos casos em que os grafos são conexos.

## 2.4 Limite a partir do conjunto estável máximo

Nesta seção vamos mostrar um limite inferior do número de overlap a partir do conjunto estável máximo de um grafo, resultado provado por Henderson [8]. Iniciamos a argumentação encontrando um resultado sobre o tamanho de conjuntos minimais associados aos vértices de um conjunto estável de  $G$ .

Após esta observação, verificamos que ela nos entrega como corolário um valor mínimo do número de overlap de  $G$  se olharmos apenas para os conjuntos associados a estes vértices do conjunto estável máximo. Por fim, voltamos a analisar toda a representação overlap e conseguimos um limite inferior mais alto para o número de overlap de  $G$ .

**Lema 2.12** *Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap de um grafo  $G$  e  $\mathcal{X}$  uma subfamília de  $\mathcal{C}$  com  $q$  conjuntos, associados aos vértices de um conjunto estável de  $G$ . Se  $\mathcal{X}$  tem tamanho  $q + 1$ , então qualquer conjunto minimal em  $\mathcal{X}$  tem tamanho 2.*

*Prova:* Lembramos inicialmente que qualquer conjunto minimal em  $\mathcal{X}$  deve possuir ao menos dois elementos, caso contrário seria associado a um vértice isolado. Como

$G$  é conexo, existem vértices fora deste conjunto estável e portanto todos os conjuntos de  $\mathcal{X}$  têm overlap com ao menos um conjunto fora de  $\mathcal{X}$ .

Dos  $q$  conjuntos de  $\mathcal{X}$ ,  $x$  são minimais em  $\mathcal{X}$  e  $y$  são não minimais em  $\mathcal{X}$ . Analisando um conjunto  $S_x$  não minimal em  $\mathcal{X}$ , caso exista apenas um conjunto  $S_u$  contido em  $S_x$ ,  $S_x$  deve possuir ao menos um elemento além dos elementos de  $S_y$ , para que os dois conjuntos não sejam iguais e seus vértices associados tenham a mesma vizinhança. Caso existam pelo menos dois conjuntos  $S_y$  e  $S_z$  contidos em  $S_x$ , este elemento extra não é necessário em  $S_x$ . Os elementos de  $S_z$  garantem que a vizinhança de  $x$  e  $y$  sejam distintas, o mesmo acontecendo com os elementos de  $S_y$  garantindo as vizinhanças distintas entre os vértices  $x$  e  $z$ .

Desta forma, cada conjunto minimal em  $\mathcal{X}$  acrescenta ao menos dois elementos novos no conjunto-base de  $\mathcal{X}$ , um conjunto não-minimal com apenas um conjunto contido acrescenta ao menos um elemento novo no conjunto-base de  $\mathcal{X}$  e um conjunto não-minimal com mais de um conjunto contido não necessita acrescentar nenhum elemento novo no conjunto-base de  $\mathcal{X}$ . A Figura 2.9 ilustra estas considerações sobre os conjuntos de  $\mathcal{X}$ .

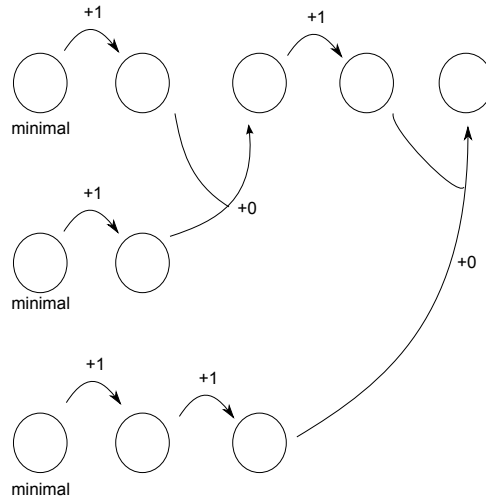


Figura 2.9: Esquema de inclusão entre conjuntos de uma família  $\mathcal{X}$ .

Podemos considerar, entretanto, que este último “acrescenta” um elemento novo no conjunto-base de  $\mathcal{X}$ , enquanto um de seus conjuntos minimais contidos acrescenta  $k - 1$  elementos novos no conjunto-base. Desta forma, temos  $x'$  conjuntos minimais não alterados em  $\mathcal{X}$  e  $x''$  conjuntos minimais não-alterados em  $\mathcal{X}$ , além dos  $y$  conjuntos não-minimais em  $\mathcal{X}$ . Lembrando que  $\mathcal{X}$  tem tamanho  $q + 1$ , chegamos à Equação 2.1, que após algumas manipulações nos retorna a Equação 2.2. Através delas, chegamos ao resultado de que  $k \leq 3$ .

$$kx' + (k - 1)x'' + y = q + 1 \quad (2.1)$$

$$k = 2 + \frac{x''}{x} \tag{2.2}$$

Porém, substituindo  $k$  por 3 na Equação 2.1, temos como resultado  $x+x' = 1$ , que nos diz que a quantidade de conjuntos minimais, somados à quantidade de conjuntos-minimais não alterados, deve ser igual a 1, resultado impossível. Logo temos que  $k = 2$  e portanto todo conjunto minimal deve ter exatamente dois elementos. ■

Podemos verificar que, em uma família  $\mathcal{C}$ , uma subfamília  $\mathcal{X}$  formada por conjuntos associados a vértices de um conjunto estável com  $q$  vértices terá sempre tamanho maior ou igual a  $q + 1$  pois cada conjunto minimal em  $\mathcal{X}$  necessita ao menos de dois elementos no conjunto-base que não pertençam a nenhum outro conjunto minimal em  $\mathcal{X}$ .

Selecionando um conjunto estável máximo de  $G$ , observamos rapidamente que o corolário a seguir é verdadeiro.

**Corolário 2.13** *Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap ótima de  $G$ . Se o tamanho do conjunto estável máximo de  $G$  é igual a  $\alpha(G)$ , então  $\varphi(G) \geq \alpha(G) + 1$ .*

*Prova:* Ao nos restringirmos à subfamília dos conjuntos associados aos vértices do conjunto estável máximo, esta subfamília não poderá ter tamanho  $\alpha(G)$ , tendo no mínimo tamanho igual a  $\alpha(G) + 1$ , que é justamente o caso abordado no Lema 2.12. Portanto,  $\varphi(G) \geq \alpha(G) + 1$ . ■

A seguir, apresentamos o teorema com o limite inferior a partir do conjunto estável máximo de  $G$ .

**Teorema 2.14** *Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap ótima de  $G$ . Se o tamanho do conjunto estável máximo de  $G$  é igual a  $\alpha(G)$ , então  $\varphi(G) \geq \alpha(G) + 2$ .*

*Prova:* Vimos no Corolário 2.13 que  $\varphi(G) \geq \alpha(G) + 1$ . Entretanto, sabemos que o grafo é conexo e todos os vértices de  $G$  possuem vizinhanças distintas.

Seja  $S_v \in \mathcal{C}$  um conjunto com  $\alpha(G) + 1$  elementos na subfamília  $\mathcal{X}$  dos conjuntos associados aos vértices do conjunto estável máximo. Existe um conjunto  $S_u \in \mathcal{C}$  e  $S_u \notin \mathcal{X}$  de forma que  $S_v \not\cap S_u$ , senão  $S_u$  estaria associado a um vértice isolado. Para termos relação de overlap,  $S_u$  necessita um elemento que não pertence ao conjunto-base de  $\mathcal{X}$ . Desta forma,  $\varphi(G) \geq \alpha(G) + 2$ . ■

## 2.5 Limite a partir do número de arestas

Nesta seção apresentamos limites do número de overlap que dependem apenas da quantidade de arestas para certos grafos. Iniciamos apresentando uma forma de



construir uma representação overlap própria de grafos com algumas restrições. Em seguida, diminuímos as restrições necessárias em um grafo e conseguimos calcular um limite inferior do seu número de overlap próprio. Com este limite inferior do número de overlap próprio, calculamos um limite inferior do número de overlap destes grafos. Durante a seção, mostramos que existe uma família de grafos em que o número de overlap é exatamente o limite inferior apresentado. Terminamos a seção apresentando o número de overlap para o grafo de Petersen, um exemplo de grafo desta família.

**Definição 2.8** Uma *partição por completos* de um grafo não trivial  $G$  é uma família  $\mathcal{F}$  de subgrafos completos de  $G$  contendo cada aresta de  $G$  exatamente uma vez.

A Figura 2.10 apresenta uma partição por completos de um grafo. Uma observação a ser mencionada consiste no fato de que os subgrafos completos da decomposição por completos não necessitam necessariamente ser maximais. Como podemos notar, na Figura 2.10(b) os subgrafos completos  $bc$ ,  $be$ ,  $ef$  e  $cf$  não são subgrafos completos maximais.

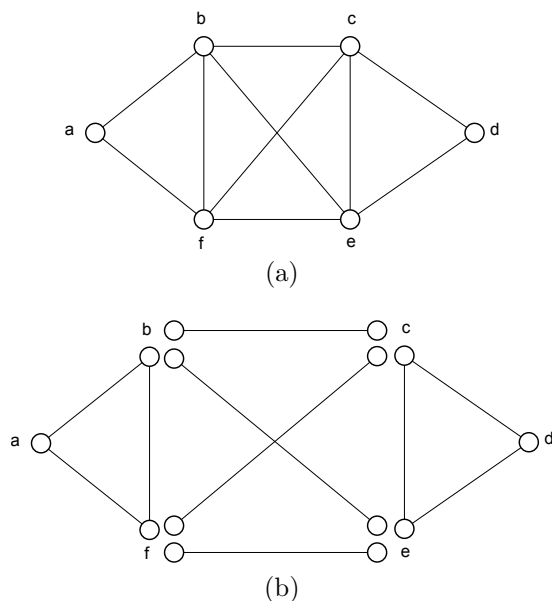


Figura 2.10: Grafo e uma possível partição por completos.

**Lema 2.15** Seja  $\mathcal{F}$  uma partição por completos de um grafo  $G$ , cada subgrafo com até  $k \geq 2$  vértices. Se  $\delta(G) \geq k$ , então  $\Phi(G) \leq |\mathcal{F}|$ .

*Prova:* Vamos construir uma família  $\mathcal{C}$  de conjuntos a partir da partição por completos  $\mathcal{F}$  de  $G$ . Cada subgrafo de  $\mathcal{F}$  receberá um rótulo exclusivo e cada conjunto  $S_x$  será formado por todos os rótulos dos subgrafos completos que contêm suas arestas. Como  $\delta(G) \geq k$ , cada conjunto terá mais de um elemento.

Se dois vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes, a aresta  $uv$  pertence a apenas um subgrafo de  $\mathcal{F}$ , de forma que  $S_u$  tem overlap com  $S_v$ , tanto  $S_u$  quanto  $S_v$  conterão o rótulo do subgrafo completo que contém a aresta  $uv$ , além do fato de cada conjunto possuir ao menos um elemento que não existe no outro conjunto.

Se os dois vértices não são adjacentes, os conjuntos serão disjuntos. Como não temos conjuntos contendo ambos, esta família  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap própria de  $G$ . ■

Na Figura 2.10, se associarmos um rótulo a cada subgrafo completo e criarmos os conjuntos de acordo com partição por completos, percebemos que não teremos uma representação overlap do grafo da Figura 2.10(a). Como  $k = 3$  e  $\delta(G) = 2$ , a condição do Lema 2.15 não é atendida e alguns conjuntos criados podem ter apenas um elemento em seu conjunto, estando contido propriamente nos outros conjuntos.

Na Figura 2.11 temos o caso em que  $\delta(G) = k = 2$  e pelo Lema 2.15 temos que  $\Phi(G) \leq |\mathcal{F}|$ . Se rotularmos cada aresta e construirmos uma família de conjuntos a partir da partição por completos, vemos que esta família de conjuntos é uma representação overlap própria. Por fim, podemos observar através do Lema 2.15 que se o grau mínimo de um grafo  $G$  for superior a dois,  $\Phi(G) \leq |E(G)|$ .

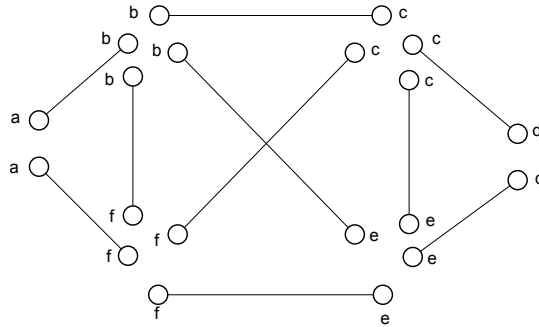


Figura 2.11: Uma segunda partição por completos do grafo da Figura 2.10.

A partir do Lema 2.16 a seguir vemos que para certos grafos, seu número de overlap próprio é igual ao número de arestas do grafo.

**Lema 2.16** *Se  $G$  é livre de triângulos, então  $\Phi(G) \geq |E(G)|$ , atingindo a igualdade quando  $\delta(G) \geq 2$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap própria de  $G$ , com dois conjuntos  $S_u$  e  $S_v$ . Se  $uv \in E(G)$ , então existe um elemento  $e$  tal que  $e \in S_u \cap S_v$ . Este elemento  $e$ , caso pertença a qualquer conjunto diferente de  $S_u$  ou  $S_v$  ocasiona a existência de um triângulo, caso este conjunto extra tenha overlap com  $S_u$  e  $S_v$ , ou teremos conjuntos contidos em outros da mesma família. Em ambos os casos temos uma contradição.

Como todas as  $|E(G)|$  relações de overlap entre os conjuntos da família terão um elemento  $e$  único na interseção do par de conjuntos, o tamanho desta família será no mínimo a quantidade de arestas do grafo.

Quando o grafo tem grau mínimo maior que um, conseguimos fazer uma representação overlap própria com o tamanho de sua partição por completos, que é igual ao seu número de arestas. Logo, atinge a igualdade. ■

A partir do Lema 2.16 conseguimos calcular o número de overlap próprio de caminhos, ciclos e estrelas pois todos estes grafos, com exceção do  $K_3$ , são livres de triângulo e portanto, para um grafo  $G$  que seja caminho, ciclo ou estrela, temos que  $\Phi(G) \geq |E(G)|$ .

Por inspeção, podemos ver rapidamente que  $\Phi(K_3) = 3$  e  $\Phi(C_n) = n$ , para  $n \geq 3$ .

Para um caminho  $P_n$ ,  $n \geq 2$ , vemos que  $\Phi(P_n) = n + 1$  criando uma família  $\mathcal{C}$  com  $n$  conjuntos:  $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n, n + 1\}\}$ . Podemos ver rapidamente que o  $S_i \cap S_{i+1}$  e portanto esta família é uma representação overlap própria de  $P_n$ .

Para uma estrela  $K_{1,n-1}$ , todos os conjuntos associados aos vértices da parte estável devem ser disjuntos dois a dois e portanto  $\Phi(K_{1,n-1}) \geq 2(n - 1)$ . Atribuindo ao conjunto associado ao vértice central um elemento de cada conjunto associado a vértices da parte estável, temos uma representação overlap própria de tamanho  $2(n - 1)$  e portanto  $\Phi(K_{1,n-1}) = 2(n - 1)$ .

Assim como no Teorema 2.10, vamos mostrar uma desigualdade no número de overlap próprio entre um grafo e seu subgrafo gerado através da remoção de um vértice, desta vez com grau menor ou igual a dois.

**Lema 2.17** *Seja um grafo  $G$  com no mínimo três vértices. Se um vértice  $v$  tem grau no máximo 2, então  $\Phi(G) \leq \Phi(G - v) + 2$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{C}'$  uma representação overlap própria ótima de tamanho  $\Phi(G - v)$  do grafo  $G - \{v\}$ . Definimos uma nova família de conjuntos  $\mathcal{C}$  a partir de  $\mathcal{C}'$ . Construímos  $S_v = \{a, b\}$  tal que  $a$  e  $b$  não pertençam ao conjunto-base de  $\mathcal{C}'$ .

Seja  $x$  um vértice de  $N(v)$ . Em  $\mathcal{C}$  definimos  $S_x = S'_x \cup \{a\}$ . Na existência de um segundo vizinho  $y$  de  $v$ , criamos seu conjunto  $S_y = S'_y \cup \{b\}$ . Para todo vértice  $u$  não adjacente a  $v$ , definimos  $S_u = S'_u$ .

Para todo par  $S_i$  e  $S_j$ ,  $\{i, j\} \cap N(v)$ , a relação entre este par de conjuntos em  $\mathcal{C}$  é a mesma que em  $\mathcal{C}'$ . Estes conjuntos também serão disjuntos de  $S_v$ . Por fim, a relação entre os conjuntos associados aos vértices não adjacentes a  $v$  e o conjunto  $S_x$  é equivalente nas famílias  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{C}$ .

Desta forma, a família  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap própria de  $G$ . Como utilizamos dois elementos a mais que a representação overlap ótima de  $G - v$ , temos então que  $\Phi(G) \leq \Phi(G - v) + 2$ . ■

Com algumas desigualdades estabelecidas para o número de overlap próprio, vamos retornar ao estudo do número de overlap destes grafos. No lema a seguir,

vamos nos basear na idéia da partição por completos para aprimorar o limite superior do número de overlap de grafos sem vértice pendente.

**Lema 2.18** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $G \neq K_3$ . Se  $\delta(G) \geq 2$  e  $uv \in E(G)$ , então  $G$  possui uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de tamanho  $|E(G)| - 1$  de forma os conjuntos  $S_u$  e  $S_v$  não estejam contidos em nenhum outro conjunto de  $\mathcal{C}$ .*

*Prova:* Vamos construir uma representação overlap  $\mathcal{C}$  a partir das arestas de  $G$ . Rotulamos todas as arestas de  $G$  com exceção da aresta  $uv$  e, com exceção dos conjuntos  $S_u$  e  $S_v$ , cada conjunto  $S_x$  associado ao vértice  $x$  terá os rótulos das suas arestas incidentes.

A subfamília  $\mathcal{C} \setminus \{S_u, S_v\}$  é representação overlap própria do grafo  $G - \{u, v\}$ . Vamos agora definir os dois conjuntos restantes.

Os conjuntos  $S_u$  e  $S_v$  receberão os rótulos das arestas não incidentes aos vértices  $u$  e  $v$ , respectivamente. Desta forma, se um vértice  $x$  não é vizinho de  $u$ ,  $S_x \subseteq S_u$ . O mesmo argumento vale para  $v$ .

Se um vértice  $x$  é vizinho de  $u$ ,  $ux \in S_x$  e  $ux \notin S_u$ . Como  $d(x) \geq 2$ , ao menos um elemento estará em  $S_x \cap S_u$ . Para termos  $S_x \not\subseteq S_u$ , o grafo necessita ter ao menos mais uma aresta não incidente nem a  $u$  nem a  $x$ . Se toda aresta for incidente a  $u$  ou  $x$ , temos um  $K_3$  ou um par de gêmeos falsos. Portanto, esta aresta existe. O mesmo argumento vale para  $v$ .

Para termos  $S_u \not\subseteq S_v$ , é necessário uma aresta não incidente a nenhum dos dois vértices, para ambos os conjuntos possuírem ao menos um elemento em comum. Se todas as arestas forem incidentes a um dos vértices, o grafo é um  $K_3$  ou possui par de gêmeos falsos e portanto esta aresta existe.

Desta forma, a família  $\mathcal{C}$  construída é uma representação overlap de  $G$  de tamanho  $|E(G)| - 1$ . ■

Neste momento vamos nos focar nos grafos sem corte-estrela e na implicação para suas representações overlap, através do lema a seguir. Já o Lema 2.20 nos apresenta um resultado sobre as vizinhanças de um grafo sem corte-estrela.

**Lema 2.19** *Se  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de um grafo  $G$  sem corte-estrela, então quaisquer vértices não minimais em  $\mathcal{C}$  são adjacentes.*

*Prova:* Seja a representação overlap  $\mathcal{C}$  e dois conjuntos  $S_u$  e  $S_v$  não minimais. Supomos que  $uv \notin E(G)$ , portanto  $v \in V(G - N[u])$  e  $u \in V(G - N[v])$ . Como  $G$  é sem corte-estrela, tanto  $G - N[u]$  quanto  $G - N[v]$  são conexos. Aplicando o Lema 2.5 para  $S_u$  e  $S_v$ , chegamos à conclusão de que  $S_u = S_v$  e portanto  $N(u) = N(v)$ .

Como  $S_u$  e  $S_v$  são não minimais em  $\mathcal{C}$ , existe um conjunto  $S_x$  de forma que  $S_x \subseteq S_u$  e  $S_x \subseteq S_v$ . A remoção dos vértices de  $N[v]$  torna o grafo desconexo, uma contradição. Portanto,  $uv \in E(G)$ . ■

**Lema 2.20** *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices livre de triângulos, sem corte-estrela e não isomorfo a um  $K_{2,n-2}$ ,  $n - 2 \leq 2$ , então  $G$  não possui vértices distintos com mesma vizinhança.*

*Prova:* Suponha que  $N(u) = N(v)$ . Como  $G$  é sem corte-estrela, não existem vértices em  $V(G)$  fora do subconjunto  $(N[u] \cup \{v\})$ . Como  $G$  é livre de triângulo, os vértices de  $N(u)$  formam um conjunto independente. Temos então um  $K_{2,n-2}$

Caso  $n - 2 > 2$ ,  $d(u) > 2$ . Seja  $x$  um vértice adjacente a  $u$ . Como  $N(x) = \{u, v\}$ , o subgrafo  $G - N[x]$  é desconexo. Logo,  $N[x]$  é um corte-estrela, uma contradição. Portanto, o único caso em que  $N(u) = N(v)$  é quando temos  $K_{2,n-2}$ ,  $n - 2 \leq 2$ .

Os grafos  $K_{2,1}$  e  $K_{2,2}$  são isomorfos ao  $P_3$  e  $C_4$  respectivamente. Podemos rapidamente verificar que  $\varphi(P_3) = \varphi(C_4) = 3$  e portanto para os dois grafos vale a desigualdade  $\varphi(G) \geq |E(G)| - 1$ . O Teorema 2.21 a seguir estende esta desigualdade para os grafos sem corte-estrela e livre de triângulos.

**Teorema 2.21** *Se  $G$  é um grafo livre de triângulos e sem corte-estrela, então  $\varphi(G) \geq |E(G)| - 1$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{C}$  uma representação overlap de  $G$ . Podemos assumir que não temos conjuntos iguais em  $\mathcal{C}$  e que temos apenas dois conjuntos não minimais em  $\mathcal{C}$ , caso contrário teríamos um triângulo pelo Lema 2.19.

Caso todo conjunto seja minimal em  $\mathcal{C}$ , então esta família é uma representação overlap própria de  $G$  e portanto  $|\mathcal{C}| \geq |E(G)|$ .

Se um único conjunto  $S_u$  é não minimal em  $\mathcal{C}$ , o conjunto  $S_u$  contém todos os conjuntos associados aos vértices de  $G - N[u]$ , pois este subgrafo é conexo. A subfamília  $\mathcal{C} \setminus S_u$  é uma representação overlap própria de  $G - \{u\}$  e  $\Phi(G - \{u\}) \geq |E(G - \{u\})|$ . Como para todo par  $S_x, S_y$ ,  $\{x, y\} \subseteq N(u)$ , temos  $S_x \| S_y$ , o elemento existente em  $S_u \cap S_x$  não pode ser o mesmo que o existente em  $S_u \cap S_y$ . Logo, necessitamos de mais um elemento no conjunto-base para cada aresta de  $N(u)$  e portanto  $|\mathcal{C}| \geq |E(G)|$ .

Se dois conjuntos  $S_u$  e  $S_v$  são não minimais em  $\mathcal{C}$ , o conjunto  $S_u$  contém todos os conjuntos associados aos vértices de  $G - N[u]$  e o conjunto  $S_v$  contém todos os conjuntos associados aos vértices de  $G - N[v]$  pelo Lema 2.5. A subfamília  $\mathcal{C} \setminus \{S_u, S_v\}$  é uma representação overlap própria de  $G - \{u, v\}$  e  $\Phi(G - \{u, v\}) \geq |E(G - \{u, v\})|$ . Como no parágrafo anterior, cada vértice da vizinhança de  $u$  e  $v$ , com exceção destes próprios vértices, terá em seu conjunto um elemento exclusivo para ter a relação de overlap com  $S_u$  ou  $S_v$ . Com exceção da aresta  $uv$ , já verificamos que todas as arestas do grafo estão representadas por relações de overlap entre conjuntos, e a família tem tamanho no mínimo  $|E(G)| - 1$ .

Como  $G$  não tem corte estrela, existem arestas entre os vértices de  $N(u) - \{v\}$  e  $N(v) - \{u\}$ , caso contrário existiria um vértice  $x$  na interseção das vizinhanças de  $u$  e  $v$  tal que  $N[v]$  seja corte-estrela, uma contradição. Seja  $x \in N(u) - \{v\}$  e  $y \in N(v) - \{u\}$ , de forma que  $xy \in E(G)$ . Logo, há um elemento  $e$  em  $S_x \cap S_y$ . Como  $S_x \subset S_v$ ,  $e \in S_v$  e como  $S_y \subset S_u$ ,  $e \in S_u$ . Pelos mesmos motivos, o elemento exclusivo de  $S_y$  com relação a  $S_v$  está contido em  $S_u$ , além do elemento exclusivo de  $S_x$  com relação a  $S_u$  está contido em  $S_v$ . Portanto,  $S_u \not\propto S_v$  e  $|\mathcal{C}| \geq |E(G)| - 1$ .

Para qualquer possibilidade de construir uma representação overlap de  $G$ , precisamos de pelo menos  $|E(G)| - 1$  arestas, logo  $\varphi(G) \geq |E(G)| - 1$ . ■

O Teorema 2.21 é utilizado para apresentar o limite superior do número de overlap de grafos planares, através de uma subfamília dos grafos planares que são sem corte-estrela e livre de triângulos. Também usamos este teorema para apresentar uma família de grafos bipartidos com número de overlap quadrático em relação ao número de vértices.

Terminamos esta seção apresentando o número de overlap próprio para o grafo de Petersen. O grafo de Petersen é livre de triângulos e sem corte-estrela, portanto através do Lema 2.21 seu número de overlap é maior ou igual a 14, valor igualado através do Lema 2.18. A Figura 2.12 apresenta uma representação overlap de tamanho 14 para o grafo de Petersen.

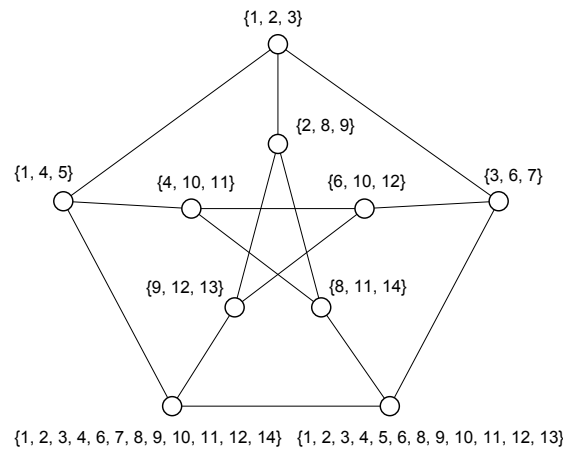


Figura 2.12: Grafo de Petersen e uma representação overlap ótima

## 2.6 Valor extremal do número de overlap

Vimos no início deste capítulo que o número de overlap é bem definido para qualquer grafo e que sempre existe uma representação overlap de tamanho igual a soma do número de vértices com o número de arestas. Entretanto podemos nos perguntar sobre qual seria o maior número de overlap possível para um grafo qualquer.

Henderson [8] apresenta argumentos para a existência de grafos com número de overlap proporcional ao quadrado do número de vértices do grafo, mas foi Cranston et. al. [4] quem apresenta um grafo com seu número de overlap desta ordem.

O grafo  $G$  dado como exemplo é obtido a partir de um grafo bipartido completo  $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ ,  $n$  par, removendo um emparelhamento perfeito. Este grafo não possui corte-estrela e é livre de triângulos e portanto temos a partir dos Lemas 2.18 e 2.21 que seu número de overlap é igual a  $|E(G)| - 1$ . Como  $|E(G)| = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ , concluímos que  $\varphi(G) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$ .

Mostramos nesta seção que esta família de grafos possui o maior número de overlap possível, e para qualquer grafo  $G$ ,  $\varphi(G) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$ .

**Lema 2.22** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, com um triângulo  $T$ . Se  $n'$  é o número de vértices pendentes em  $G - T$ , então  $\Phi(G) \leq \Phi(G - T) + n - n'$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{C}'$  uma representação overlap própria ótima de  $G - T$ . Para construir uma representação overlap de  $G$ , inicialmente produzimos três conjuntos formados por elementos inexistentes no conjunto-base de  $\mathcal{C}'$ :  $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$ .

Para cada vértice  $v$  em  $G - T$  não adjacente a algum vértice de  $T$  em  $G$ , produzimos em  $\mathcal{C}$  o conjunto  $S_v = S'_v$ .

Caso  $v$  seja vértice pendente em  $G - T$  e adjacente a algum vértice de  $T$ , seu conjunto associado em  $\mathcal{C}'$  possui ao menos um elemento  $x$  não pertencente a nenhum outro conjunto de  $\mathcal{C}'$ . Incluímos este elemento  $x$  nos conjuntos associados aos vértices de  $T$  adjacentes a  $v$ .

Caso  $v$  não seja vértice pendente em  $G - T$ , em  $\mathcal{C}$  adicionamos um elemento novo ao conjunto associado a  $v$  e aos conjuntos associados aos vértices de  $T$  adjacentes a  $v$ .

Desta forma, no pior caso criamos uma representação overlap a partir de  $\mathcal{C}'$ , adicionando ao conjunto-base três novos elementos para os conjuntos associados a  $T$  e  $n - 3 - n'$  elementos para os vértices não pendentes em  $G - T$ . Com isso, a representação overlap  $\mathcal{C}$  tem tamanho  $\Phi(G - T) + n - n'$ . ■

O Lema 2.22 é muito utilizado na argumentação final, para os casos em que existem triângulos no grafo. Antes de provarmos o próximo lema, vamos apresentar uma observação que é feita olhando diretamente o Apêndice B, mas será importante para o lema.

**Observação 2.23** *Com exceção dos grafos  $K_{1, n-1}$ , para todo grafo  $G$  com  $n$  vértices,  $3 \leq n \leq 5$ , temos  $\Phi(G) \leq 2n - 3$ .*

Com a Observação 2.23 provamos o Lema 2.24 a seguir, que nos indica um limite superior usado como informação inicial durante as provas de outros resultados relacionados ao assunto que veremos mais a frente.

**Lema 2.24** *Se  $G$  é um grafo com  $n \geq 6$  vértices e  $G$  não é isomorfo ao  $K_{1,5}$ , então  $\Phi(G) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , atingindo a igualdade para  $n \geq 7$  quando  $G$  é isomorfo a  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .*

*Prova:* Dividimos a prova em três casos.

No primeiro caso, assumimos que existe um vértice  $v$  tal que  $d(v) \leq 2$ . Provamos por indução no número de vértices.

Como base, assumimos  $n = 6$ . Sabemos que  $\Phi(G) \leq \Phi(G - \{v\}) + 2$  e pela Observação 2.23, se  $G - \{v\} \neq K_{1,4}$  então  $\Phi(G - \{v\}) \leq 2(n - 1) - 3$  e portanto  $\Phi(G - \{v\}) \leq 2n - 5$ . Desta forma,  $\Phi(G) \leq 2n - 3 \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ . Caso  $G - \{v\} = K_{1,4}$ , temos que  $d(v) = \delta(G) = 1$  e com isso  $G = K_{1,5}$  ou  $v$  é vizinho a um vértice pendente em  $G - \{v\}$ . Verificando este segundo caso, vemos que  $\Phi(G) \leq \Phi(G - \{v\}) + 1 = 9$ , de acordo com a desigualdade proposta.

Para  $n \geq 7$ , temos então pelo Lema 2.17 que  $\Phi(G) \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 2 < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ , com exceção do caso de  $G - \{v\}$  ser o  $K_{1,5}$ . Neste caso, sabemos que  $\Phi(K_{1,5}) = 10$  e verificando rapidamente notamos que a inclusão de  $v$  no grafo torna  $\Phi(G) \leq 11$ , valor inferior a  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ .

No segundo caso, supomos que  $G$  é livre de triângulos e  $\delta(G) \geq 3$ . Pelo Lema 2.15 vemos que  $\Phi(G) = |E(G)| \leq \lfloor \frac{(n)^2}{4} \rfloor$ , igualdade ocorrendo quando  $G$  for justamente o grafo  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .

No último caso, assumimos que existe um triângulo  $T$  e  $\delta(G) \geq 3$ . Pelo Lema 2.22, veremos que  $\Phi(G - T) + n - n' \leq \lfloor \frac{(n)^2}{4} \rfloor$ , sendo  $n'$  o número de vértices pendentes em  $G - T$ .

Provamos por indução no número de vértices, tomando como base os casos em que  $n = 6$ ,  $n = 7$  e  $n = 8$ . Para  $n = 6$ , verificamos que em seus dois casos possíveis a desigualdade é válida. Quando  $G - T = P_3$ , temos que  $\Phi(G - T) = 4$  e  $G - T$  possui dois vértices pendentes. Então  $\Phi(G - T) + n - n' \leq 9$ . Se  $G - T = C_3$ , temos que  $\Phi(G - T) = 3$  e que  $\Phi(G - T) + n - n' = 9$ . Em ambos os casos a desigualdade é válida.

Para o caso em que  $n = 7$ , verificamos que  $\Phi(G - T) + 7 - n' \leq 11$ . Para que esta desigualdade seja verdadeira,  $\Phi(G - T) - n' \leq 4$ . Verificando os casos para os subgrafos  $G - T$  possíveis, percebemos que a desigualdade é atingida para todos os casos. Para  $n = 8$  procedemos da mesma forma, chegando à condição  $\Phi(G - T) - n' \leq 7$ , também atendida.

Para  $n \geq 9$ , pela base da indução temos que  $\Phi(G - T) \leq \lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \rfloor$  e portanto  $\Phi(G) \leq \lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \rfloor + n < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ . O único caso em que não ocorre a condição anterior vem de  $G - T = K_{1,5}$ , mas neste caso  $\Phi(K_{1,5}) = 10$  e portanto  $\Phi(G) \leq 10 + 9 < 20$ . ■

**Lema 2.25** *Seja  $G$  um grafo bipartido com  $n$  vértices. Se  $n \geq 7$  vértices e  $\delta(G) \geq 2$ , então  $\varphi(G) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$ .*



*Prova:* Como  $\delta(G) \geq 2$ , pelo Lema 2.18 sabemos que  $\varphi(G) \leq |E(G)| - 1$ . Desta forma, podemos assumir que  $|E(G)| > \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ .

Seja  $X$  e  $Y$  as duas partes da bipartição de  $G$ . Assumimos, sem perda de generalidade, que  $|X| \leq |Y|$  e que  $|X| = k$ . Em  $Y$ , no máximo um vértice  $y$  será adjacente a todos os vértices de  $X$ , caso contrário teríamos dois vértices com a mesma vizinhança. O grau de  $y$  é  $k$  e todos os outros vértices de  $Y$  possuem no máximo  $k - 1$  vizinhos em  $X$ . Desta forma,  $|E(G)| \leq (k - 1)(n - k) + 1$ .

Analisando os valores de  $k$  vemos que, caso  $k \leq \frac{n-1}{2}$ , a quantidade de arestas do grafo é inferior a  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ , de forma que utilizamos o Lema 2.18 para chegar em um limite superior de seu número de overlap. Portanto,  $k = \frac{n}{2}$  e assim temos que  $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1$ , chegando na igualdade  $|E(G)| = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1$ .

Removendo o vértice  $y$  de  $G$ , temos  $G' = G - \{y\}$ , que também possui  $\delta(G') \geq 2$ . O grafo  $G'$  possui no máximo  $\frac{n^2}{4} - n + 1$  arestas e através do Lema 2.15 temos que  $\Phi(G') \leq |E(G')|$ . Seja  $\mathcal{C}'$  uma representação overlap própria de  $G'$  de tamanho  $\frac{n^2}{4} - n + 1$ , produzida a partir da rotulação das arestas de  $G'$ .

Construímos uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de  $G$  a partir de  $\mathcal{C}'$ . Sejam  $x' \in X$  e  $y' \in Y$ ,  $y' \neq y$  dois vértices não adjacentes em  $G'$ . O conjunto  $S_y$  é formado como  $S_y = S'_{y'} \cup \{a\}$ , sendo  $a$  um elemento não pertencente ao conjunto-base de  $\mathcal{C}'$  e o conjunto  $S_{x'}$  é formado como  $S_{x'} = S'_{x'} \cup \{a\}$ . Todos os outros conjuntos em  $\mathcal{C}$  são iguais aos de  $\mathcal{C}'$ .

Desta forma,  $S_{y'} \subset S_y$  e  $S_y$  é disjunto de todo conjunto associado a vértice de  $Y$ . O conjunto  $S_y$  tem overlap com todo conjunto associado a vértice de  $X$ , principalmente  $S_{x'}$ , pois  $S_y \cap S_{x'} = \{a\}$  e  $S_{y'} \not\cap S_v$  para todo  $v \in X$ . Portanto,  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$  de tamanho igual a  $\frac{n^2}{4} - n + 2$ . Como  $n \geq 7$ , temos que a família tem tamanho inferior a  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$  e portanto o lema é válido. ■

Vamos agora estender o limite superior do número de overlap apresentado no Lema 2.25 para qualquer grafo bipartido, independentemente de seu número de vértices e grau mínimo. O resultado do Lema 2.26 a seguir será usado como uma das partes no argumento para provar o valor extremal do número de overlap de qualquer grafo com pelo menos quatorze vértices.

**Lema 2.26** *Se  $G$  é um grafo bipartido com  $n$  vértices, então temos que  $\varphi(G) \leq \max\{2n, \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1\}$ .*

*Prova:* Verificamos rapidamente que  $2n > \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$  para  $n \leq 10$ . Provamos então o lema por indução no número de vértices.

Utilizamos como base os grafos com até oito vértices. Através do Lema 2.24, sabemos que  $\varphi(G) \leq \Phi(G) \leq 2n - 2 < 2n$  ou  $\varphi(G) \leq \Phi(G) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \leq 2n$ .

Para  $n > 8$ , seja  $v$  um vértice onde  $d(v) = \delta(G)$ . Se  $d(v) \geq 2$ , pelo Lema 2.25 sabemos que  $\varphi(G) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$ . Caso  $d(v) = 1$ ,  $\varphi(G) \leq \varphi(G - \{v\}) + 2$ . Pela

hipótese de indução,  $\varphi(G - \{v\}) \leq \max\{2n - 2, \frac{(n-1)^2}{4} - \frac{(n-1)}{2} - 1\}$  e em ambos os casos a inclusão de 2 elementos no conjunto-base não torna o número de overlap superior a  $\max\{2n, \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1\}$ . ■

**Lema 2.27** *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices,  $G$  é livre de triângulos e  $G$  não é bipartido, então  $\varphi(G) \leq \max\{2n + 7, \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1\}$ .*

*Prova:* Verificamos rapidamente que  $2n - 7 \geq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$  para  $n \leq 12$ . Provamos então o lema por indução no número de vértices.

Utilizamos como base os grafos com até dez vértices. Através do Lema 2.24, sabemos que  $\varphi(G) \leq \Phi(G) \leq 2n - 2 < 2n + 7$  ou  $\varphi(G) \leq \Phi(G) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \leq 2n + 7$ .

Assumimos  $n > 10$ . Verificamos que os dois limites superiores crescem em pelo menos dois elementos com o aumento do valor de  $n$ . Logo, a inclusão de vértices pendentos em um grafo não ultrapassa os limites superiores propostos. Podemos considerar então que  $\delta(G) \geq 2$ , de forma que, através do Lema 2.15, sabemos que  $\varphi(G) \leq \Phi(G) \leq |E(G)|$ . Vamos então mostrar que não existe grafo livre de triângulo, não bipartido e com  $\delta(G) \geq 2$  que possua mais que  $\max\{2n + 8, \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}\}$  arestas.

Seja  $C$  o conjunto de vértices que induzem o menor ciclo ímpar em  $G$ , com  $2k + 1$  vértices, e seja o grafo  $G' = G - C$ . O grafo  $G[C]$  possui  $2k + 1$  arestas, enquanto  $G'$ , por ser livre de triângulo, possui no máximo  $\frac{(n-2k-1)^2}{4}$  arestas. Cada um dos  $n - 2k - 1$  vértices de  $G'$  podem ser adjacentes a no máximo  $k$  vértices de  $C$ , caso contrário teríamos um triângulo no grafo. Somando os três grupos de arestas possíveis em  $G$ , temos  $|E(G)| \leq 2k + 1 + k(n - 2k - 1) + \frac{(n-2k-1)^2}{4}$ . Isto nos leva a  $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - (k^2 - 2k - \frac{5}{4})$ . Caso  $k \geq 3$ , o número de arestas é inferior a  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ , logo vamos considerar o caso em que  $k = 2$  e portanto  $C$  tem cinco vértices.

Vamos agora calcular um limite superior mais próximo da realidade para o grafo  $G'$ , diminuindo assim  $|E(G)|$ . Caso  $G'$  não seja bipartido, existe um menor ciclo ímpar induzido  $C'$  de tamanho  $2l + 1$ . Utilizando o mesmo argumento, verificamos que  $|E(G')| \leq (2l + 1) + l(n - 2l - 6) + \frac{(n-2l-6)^2}{4}$ . Substituindo  $\frac{(n-2k-1)^2}{4}$  por este valor, temos que  $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4} - n + 5 - l(l - 2)$ . Como  $\frac{n}{2} \leq n - 5$  para  $n \geq 10$  e  $l \geq 2$ , temos que este  $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ .

Caso  $G'$  seja bipartido, não podemos reduzir mais o número de arestas através de um ciclo induzido, de forma que  $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{5}{4}$ . Vamos analisar as adjacências entre vértices de  $G'$  e  $C$ . Suponha que existe um vértice  $v$  em  $G'$  seja adjacente a dois vértices  $x$  e  $y$  não consecutivos de  $C$  e também adjacente a todos os vértices da outra parte da bipartição. Nenhum vértice desta mesma partição poderá ter esta mesma adjacência, senão formaria um par de gêmeos falsos com  $v$ . Da mesma forma, se existe um vértice  $u$  também adjacente a  $x$  e  $y$  a todos os vértices da outra parte da bipartição (incluindo  $v$ ), temos um triângulo  $vux$  formado. Desta forma,

apenas cinco vértices em  $G'$  podem ter esta propriedade e os outros  $n - 10$  vértices de  $G$  deixam de ter uma aresta. Com isso,  $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{5}{4} - (n - 10)$ . Este valor é inferior a  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$ . ■

Os Lemas 2.26 e 2.27 nos indicam o maior número de overlap possível para um grafo livre de triângulos. Para fechar todas as possibilidades de grafos possíveis, o lema a seguir nos mostra o maior número de overlap possível para um grafo com triângulos. Assim como nos lemas anteriores, nos basearemos fortemente no fato de que  $\varphi(G) \leq \Phi(G)$ .

**Lema 2.28** *Se  $G$  é um grafo com  $n \geq 14$  vértices e com um triângulo  $T$ , então  $\varphi(G) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$ .*

*Prova:* Vamos dividir em quatro casos, mostrando em cada um deles que  $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$  é um valor suficiente para construir uma representação overlap para  $G$ . Em todos os casos, vamos também levar em consideração o grafo  $G' = G - T$ .

No primeiro caso, assumimos que  $G'$  também possui um triângulo,  $T'$ . Sabemos, pelo Lema 2.22, que  $\Phi(G) \leq \Phi(G') + n - n'$ , onde  $n'$  é o número de vértices pendentes em  $G'$ . Como  $G'$  também tem triângulo,  $\Phi(G') \leq \Phi(G' - T') + (n - 3) - n'$ . Logo,  $\Phi(G) \leq \Phi(G' - T') + 2n - 2n' - 3$ . Podemos retirar  $2n'$  da equação que não altera a desigualdade de  $\Phi(G)$ . Pelo Lema 2.24,  $\Phi(G' - T') \leq \frac{(n-6)^2}{4}$ , de forma que temos  $\Phi(G) \leq \frac{(n-6)^2}{4} + 2n - 3 = \frac{n^2}{4} - n + 6$ , que é inferior ao limite proposto para  $n \geq 14$ .

No segundo caso, assumimos que existe um vértice  $v$  pendente em  $G'$ . Portanto, sabemos que  $\Phi(G') \leq \Phi(G - \{v\}) + 2$  e desta forma  $\Phi(G) \leq \Phi(G' - \{v\}) + 2 + n - n'$ . Pelo Lema 2.24,  $\Phi(G' - \{v\}) \leq \frac{(n-4)^2}{4}$  e portanto  $\Phi(G) \leq \frac{(n-4)^2}{4} + 2 + n = \frac{n^2}{4} - n + 6$ , valor que é inferior ao proposto quando  $n \geq 14$ .

No terceiro caso, assumimos que  $\delta(G') \geq 2$ ,  $G'$  é livre de triângulos, mas não é bipartido. Utilizando o mesmo argumento do Lema 2.27, no que diz respeito a contar arestas do grafo a partir de um ciclo de tamanho  $2k + 1$ , temos a desigualdade  $|E(G')| \leq \frac{(n-3)^2}{4} - \frac{(n-3)}{4} + \frac{5}{4} - k^2 - 2k \leq \frac{n^2}{4} - 2n + 5$ . Portanto, chegamos a  $\Phi(G) \leq \frac{n^2}{4} - 2n + 5 + n - n'$  e concluímos que  $\Phi(G) \leq \frac{n^2}{4} - n + 5$ , valor inferior ao proposto quando  $n \geq 14$ .

No último caso, assumimos  $\delta(G') \geq 2$  e que  $G'$  é bipartido. Caso exista algum vértice  $v \in G'$  adjacente aos três vértices de  $T$ , podemos alterar o argumento da prova do Lema 2.22 para o caso com  $K_4$  ao invés de triângulo, visto que  $\Phi(K_4) = 4$ . Portanto temos  $\Phi(G' - \{v\}) \leq \frac{(n-4)^2}{4}$ , que aplicando em  $\Phi(G) \leq \Phi(G' - \{v\}) + n$  nos retorna  $\Phi(G) \leq \frac{n^2}{4} - n + 4$ . Portanto, podemos considerar o caso em que nenhum vértice de  $G'$  é adjacente a todos os vértices de  $T$ .

Chamamos de **vértice cheio** um vértice  $v$  de  $G'$  adjacente a pelo menos um vértice de  $T$  e a todos os vértices da partição de  $G'$  que  $v$  não está contido. Existem

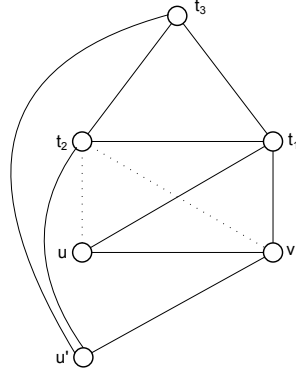


Figura 2.13: Representação do último caso do Lema 2.28.

apenas 6 possibilidades de vizinhança em  $T$ , de forma que inicialmente podemos considerar que apenas 12 vértices de  $G'$  são cheios. Vamos reduzir a quantidade de vértices cheios em  $G'$  a apenas 6: sejam  $x$  e  $y$  dois vértices cheios tal que  $xy \in E(G')$  e ambos sejam adjacentes a  $t_1 \in T$ . Caso tenhamos pelo menos sete vértices cheios, existe um vértice cheio  $u'$ ,  $u'v \in E(G')$ , tal que os outros dois vértices de  $T$ ,  $t_2$  e  $t_3$ , sejam adjacentes a  $u'$ . Desta forma, temos dois triângulos  $\{t_1, u, v\}$ ,  $\{t_2, t_3, u'\}$ , e  $G$  seria coberto pelo primeiro caso da prova. A Figura 2.13 mostra os dois triângulos existentes. As arestas pontilhadas podem existir, de forma que igualmente temos os dois triângulos, tornando todos os casos cobertos.

Se um vértice  $v$  de  $G'$  não é cheio por não ser adjacente a nenhum vértice de  $T$ , ao construir a representação overlap de acordo com o Lema 2.22, não incluímos um elemento exclusivo em sua família e seus vizinhos de  $T$ . Desta forma, podemos dizer que economizamos um elemento na representação overlap de  $G$ . Caso  $v$  não é cheio por não ser adjacente a todos os vértices da segunda partição de  $G'$ , podemos dizer que economizamos um elemento na representação overlap própria de  $G'$  através da rotulação de arestas. Desta forma, economizamos  $(n-9)$  elementos na representação overlap de  $G$  e então  $\Phi(G) \leq \frac{(n-3)^2}{4} + n - (n-9) = \frac{n^2}{4} - \frac{3n}{2} + \frac{45}{4}$ . Quando  $n \geq 13$ , este valor é inferior ao proposto. ■

A partir dos Lemas 2.26, 2.27 e 2.28, chegamos ao Teorema 2.29 a seguir.

**Teorema 2.29** *Se  $G$  é um grafo com  $n \geq 14$  vértices, então  $\varphi(G) \leq \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1$ .*

Cranston et. al. conjecturam que este limite é válido quando o valor de  $n$  for pelo menos oito [4]. Entretanto, as contas precisam ser feitas com maior precisão, provavelmente considerando mais casos a serem analisados.

# Capítulo 3

## Resultados Anteriores para Classes de Grafos

Neste capítulo, apresentamos os resultados já existentes sobre número de overlap quando restringimos o problema para grafos de classes específicas.

Iniciamos com o número de overlap de caminhos, ciclos, centopéias e árvores. As três primeiras classes foram resolvidas inicialmente por Rosgen [12], que também apresenta um limite superior do número de overlap para árvores, limite que é aprimorado por Henderson [8]. O valor exato do número de overlap para as árvores, entretanto, foi determinado por Cranston et. al [4]. Apresentaremos na seção o argumento utilizado por Cranston et. al. para provar o resultado de árvores, que implica como corolário o resultado de caminhos, ciclos e centopéias.

Em seguida, mostramos o resultado de Rosgen e Stewart para o número de overlap de grafos completos e  $k$ -partidos completos [12, 13]. Nas seções seguintes, mostramos os limites superiores para grafos de co-comparabilidade, de autoria de Rosgen [12] e para grafos planares, de autoria de Cranston et. al. [4]. Todos os resultados serão apresentados com sua respectiva argumentação original da prova.

### 3.1 Caminho, ciclo, centopéia e árvore

Nesta seção calculamos o número de overlap de árvores. No decorrer da argumentação, conseguimos provar também o número de overlap de caminhos, ciclos e centopéias. Inicialmente, definimos uma família de árvores com restrições sobre suas folhas.

**Definição 3.1** *Um esqueleto é uma árvore com  $n \geq 4$  vértices em que, para toda folha  $v$  com vizinho  $u$ ,  $d(u) = 2$ .*

A Figura 3.1 apresenta um exemplo de esqueleto. Vamos definir um limite inferior do número de overlap de esqueletos para em seguida chegarmos aos resultados

das para grafos que pertencem às classes desta seção.

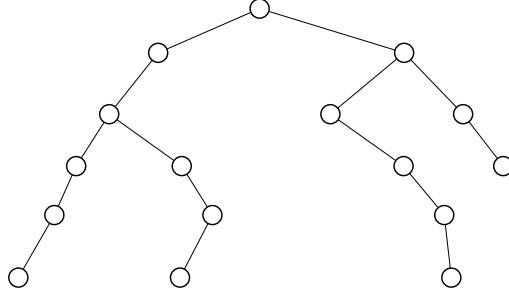


Figura 3.1: Exemplo de esqueleto.

**Definição 3.2** *Em uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de um esqueleto, uma folha  $x$  é duplamente minimal em  $\mathcal{C}$  se tanto  $x$  quanto seu vizinho  $v$  forem minimais em  $\mathcal{C}$ .*

O esqueleto  $P_4$  possui uma representação overlap  $\mathcal{C}$  em que não existe folha duplamente minimal em  $\mathcal{C}$ :  $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{5, 6\}\}$ . Este é o único esqueleto que possui uma representação overlap sem folha duplamente minimal em  $\mathcal{C}$ .

**Lema 3.1** *Em um esqueleto  $T$  com representação overlap  $\mathcal{C}$  existe no máximo uma folha não minimal em  $\mathcal{C}$ . Se  $T \neq P_4$ , existe uma folha duplamente minimal em  $\mathcal{C}$ .*

*Prova:* Seja o esqueleto  $T$  com folha  $x$  e seu respectivo vizinho  $v$ . O grafo  $T - \{x, v\}$  é conexo e portanto se  $x$  não for minimal em  $\mathcal{C}$ , existe  $S_u$  tal que  $S_u \subseteq S_x$ . Pelo Lema 2.5 todos os conjuntos associados a vértices de  $T - \{x, v\}$  estão contidos em  $S_x$ . Se houvesse em  $T$  outra folha  $y$  não minimal em  $\mathcal{C}$ , teríamos  $S_x \subseteq S_y$  e portanto  $S_x = S_y$ , uma contradição pois todos os conjuntos são distintos. Portanto, apenas uma folha será não-minimal em  $\mathcal{C}$ .

Para a segunda afirmação, seja  $A$  o conjunto dos vértices vizinhos das folhas minimais em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  a subfamília formada pelos conjuntos associados aos vértices de  $A$ . Seja  $S_v$  um conjunto minimal em  $\mathcal{C}'$ . Seleccionamos esse vértice  $v$  e seus dois vizinhos  $x, u$ , respectivamente folha e nó interno de  $T$ . Pelo fato de  $u$  não ser folha, toda componente conexa de  $T - N[v]$  é não trivial.

Se  $x$  não é duplamente minimal em  $\mathcal{C}$  então existe uma componente  $T'$  onde todos os conjuntos associados aos vértices de  $T'$  estão contidos em  $S_v$ . Sejam  $x'$  e  $v'$  uma folha de  $T'$  e seu vizinho, respectivamente. O conjunto  $S_{x'}$  não pode ser minimal, senão  $v' \in A$  e  $S_v$  não seria minimal em  $\mathcal{C}'$ . Desta forma,  $S_{x'}$  contém todos os outros conjuntos de  $\mathcal{C}$ , inclusive  $S_v$ . Mas vimos antes que  $S_{x'} \subseteq S_v$ , e portanto  $S_{x'} = S_v$ , uma contradição. ■

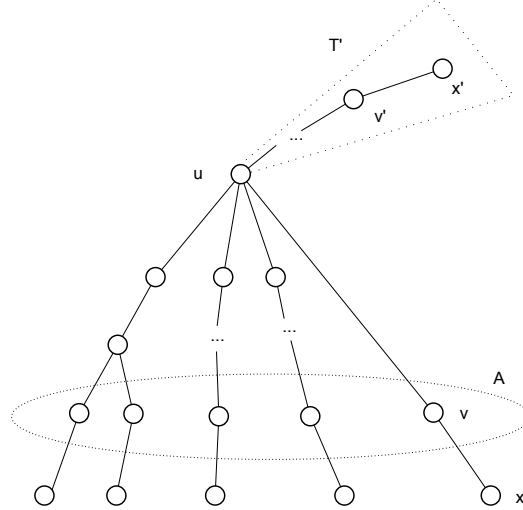


Figura 3.2: Esquema da prova do Lema 3.1.

A partir do Lema 3.1, junto com a Observação 2.9, temos um limite inferior no número de overlap de esqueletos.

**Lema 3.2** *Se  $T$  é um esqueleto com  $n \geq 4$  vértices então  $\varphi(T) \geq n$ .*

*Prova:* Indução no número de vértices do esqueleto.

Podemos ver rapidamente que o único esqueleto de quatro vértices é o  $P_4$  e que  $\varphi(P_4) \geq 4$ .

Seja  $T$  um esqueleto com pelo menos cinco vértices e  $\mathcal{C}$  uma representação overlap ótima de  $T$ . Como  $T \neq P_4$ , existe uma folha  $x$  duplamente minimal em  $T$ . Seja  $v$  o vizinho de  $x$ . Como  $d(v) = 2$ , existe um vértice  $u$  tal que  $N(v) = \{x, u\}$ . Definimos o subgrafo  $T' = T - \{x\}$  com representação overlap  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{S_x\}$ , e o subgrafo  $T'' = T - \{v, x\}$  com representação overlap  $\mathcal{C}'' = \mathcal{C} \setminus \{S_v, S_x\}$ .

Como  $S_x \not\cap S_v$ , os conjuntos  $S_x$  e  $S_v$  possuem ao menos um elemento  $c$  em comum. O conjunto  $S_x$  contém um elemento  $a$ ,  $a \notin S_v$  e  $S_v$  possui um elemento  $b$ ,  $b \notin S_x$ . Como  $x$  é minimal em  $\mathcal{C}$ , pela Observação 2.9 temos que  $S_x$  é uniforme em  $\mathcal{C}''$  e portanto  $\{a, c\} \subseteq S_w$  ou  $\{a, c\} \parallel S_w$ , para cada  $S_w \in \mathcal{C}''$ .

Se  $d(u) = 2$ , a árvore  $T'$  também é um esqueleto pois  $v$  é uma folha e seu vizinho,  $u$ , tem grau dois. Como  $S_x$  é uniforme em  $\mathcal{C}''$  e  $a \notin S_v$ , a família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}''_{\setminus \{a\}}$  é uma representação overlap de  $T'$ . Pela hipótese de indução,  $\varphi(T') \geq n - 1$  e portanto concluímos que  $\varphi(T) \geq \varphi(T') + 1 = n$ .

Se  $d(u) > 2$ , a árvore  $T'$  não é um esqueleto, mas  $T''$  é, já que a remoção de  $x$  e  $v$  não cria nenhuma folha nova. Como  $S_x$  é uniforme em  $\mathcal{C}''$ , a família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}''_{\setminus \{a\}}$  é representação overlap de  $T''$ .

Restringindo à representação overlap  $\mathcal{C}''' = \mathcal{C}'' \setminus \{S_u\}$ , verificamos pela Observação 2.9 que  $S_v$  é uniforme em  $\mathcal{C}'''$ . Como  $N(u)$  é um conjunto estável observamos

através do Lema 2.8 que, para um elemento  $e \neq a$  de  $S_v$ , podemos construir uma família  $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\{e\}}'''$  que é representação overlap de  $T - \{u, v, x\}$ .

Pela hipótese de indução sabemos que  $\varphi(T'') \geq n - 2$ . Como  $\varphi(T') \geq \varphi(T'') + 1$  e  $\varphi(T) \geq \varphi(T') + 1$  temos, por fim, que  $\varphi(T) \geq n$ . ■

O Lema 3.2 nos dá um limite inferior para o número de overlap de esqueletos. A seguir, utilizaremos este limite inferior para determinar o número de overlap de caminhos, ciclos e centopéias. Com o número de overlap de centopéias definido, fazemos uma construção de árvores através de centopéias para determinar o número de overlap de árvores.

**Observação 3.3** *Um caminho  $P_n$  com  $n \geq 4$  vértices é um esqueleto.*

A partir da Observação 3.3, sabemos que  $\varphi(P_n) \geq n$ . A prova do Teorema 3.4 a seguir apresenta uma forma de construir uma representação overlap de tamanho  $n$  para um grafo  $P_n$ .

**Teorema 3.4** *Se  $n \geq 3$ , então  $\varphi(P_n) = n$ .*

*Prova:* Para  $n = 3$ , vemos rapidamente que  $\varphi(P_3) = 3$ . Pelo Lema 3.2,  $\varphi(P_n) \geq n$ . Vamos agora apresentar uma representação overlap de tamanho  $n$  para  $P_n$ . Considere  $S_i = \{i, i + 1\}$ , para  $i < n$ , e  $S_n = \{1, \dots, n - 1\}$ .

Para  $1 < i < n - 1$ , temos que  $S_i \not\subseteq S_{i+1}$ ,  $S_i \subseteq S_n$  e  $S_i \parallel S_j$ ,  $i + 1 < j < n$ . Temos também que  $S_1 \not\subseteq S_2$ ,  $S_n \not\subseteq S_{n-1}$ ,  $S_1 \subseteq S_n$  e  $S_1 \parallel S_j$ ,  $2 < j < n$ . Desta forma, esta família de conjuntos é uma representação overlap de tamanho  $n$  de um grafo  $P_n$ . ■

A Figura 3.3 apresenta uma representação overlap ótima do grafo  $P_5$ .

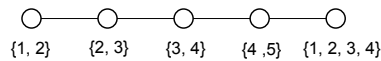


Figura 3.3: Representação overlap ótima do  $P_5$ .

Através da prova do número de overlap para um caminho  $P_n$  de  $n$  vértices, chegamos a corolários para ciclo de tamanho maior ou igual a quatro e centopéias de caminho mais longo maior ou igual a três.

**Corolário 3.5** *Seja o ciclo  $C_n$ . Se  $n \geq 4$ , então  $\varphi(C_n) = n - 1$ .*

*Prova:* Um ciclo  $C_n$  possui um  $P_{n-1}$  induzido, logo  $\varphi(C_n) \geq n - 1$ . Vamos agora apresentar uma família  $\mathcal{C}$  de tamanho  $n - 1$  que é uma representação overlap de um  $C_n$ . Considere:

$$S_i = \{i, i + 1\}, \text{ para } 1 \leq i < n - 1;$$

$$S_{n-1} = \{1, \dots, n - 2\};$$



$$S_n = \{2, \dots, n-1\}.$$

Os conjuntos  $S_1, \dots, S_{n-1}$  formam uma representação overlap ótima do  $P_{n-1}$ . Para o conjunto  $S_n$ , temos que  $S_n \not\propto S_1$  e  $S_n \not\propto S_{n-1}$  e  $S_i \subset S_n$  para  $2 \leq i \leq n-2$ . Desta forma,  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $C_n$ . ■

A Figura 3.4 apresenta uma representação overlap ótima do grafo  $C_6$ .

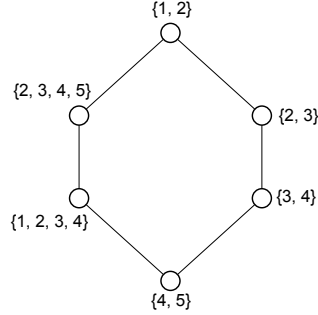


Figura 3.4: Representação overlap ótima do  $C_6$ .

**Definição 3.3** Uma *centopéia* é uma árvore em que todo vértice interno pertence ao mesmo caminho máximo.

A Figura 3.5 apresenta um exemplo de centopéia com caminho máximo igual a sete. Podemos notar que toda folha é adjacente a um nó do caminho máximo e que os dois extremos do caminho máximo também são folhas.

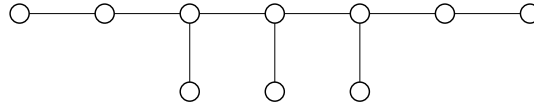


Figura 3.5: Exemplo de centopéia.

**Corolário 3.6** Seja  $T$  uma centopéia com caminho máximo de tamanho  $\ell$ . Se  $\ell \geq 3$ , então  $\varphi(T) = \ell$ .

*Prova:* Como  $T$  possui um  $P_\ell$  induzido, sabemos que  $\varphi(T) \geq \ell$ . Vamos agora apresentar uma família  $\mathcal{C}$  de tamanho  $\ell$  que é uma representação overlap de  $T$ .

Sejam  $v_1, \dots, v_\ell$  os vértices do caminho máximo de  $T$  e  $u_j$  o vértice de  $T$  que não pertence ao caminho máximo e é adjacente a  $v_j$ . Para os vértices  $v_i$ , associamos a estes vértices  $\ell$  conjuntos construídos de acordo com a construção para um  $P_\ell$ . Para cada vértice  $u_j$ ,  $S_{u_j} = \{1, \dots, j\}$ .

Como os conjuntos associados aos vértices de  $v_1, \dots, v_\ell$  seguem a construção de representação overlap de caminhos, já sabemos que as relações entre estes pares de conjuntos estão de acordo com o esperado. Para o conjunto  $S_{u_j}$ , vemos que  $S_{u_j} \not\propto S_{v_j}$ ,

$S_{v_i} \subseteq S_{u_j}$ , para  $i < j$ , e  $S_{u_j} \subseteq S_{v_i}$  se  $i > j$ . Para dois conjuntos  $S_{u_x}$  e  $S_{u_y}$ , se  $x < y$  então  $S_x \subset S_y$ .

Desta forma, esta família é uma representação overlap de tamanho  $\ell$  da centopéia  $T$ . ■

A Figura 3.6 apresenta a representação overlap apresentada pelo Corolário 3.6 para a centopéia da Figura 3.5. A seguir apresentamos uma observação sobre os conjuntos construídos na representação overlap ótima da centopéia.

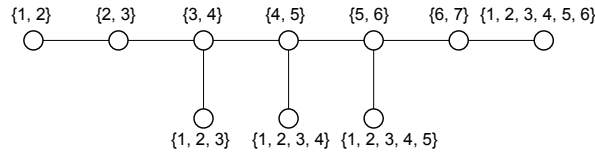


Figura 3.6: Representação overlap ótima da centopéia da Figura 3.5.

**Observação 3.7** Na construção da família de conjuntos  $\mathcal{C}$  apresentada no Corolário 3.6, todos os vértices  $v_i$  do caminho máximo são  $\{i\}$ -minimais em  $\mathcal{C}$ , com exceção de  $v_\ell$ .

Agora que sabemos como determinar o número de overlap de uma centopéia e de apresentar uma representação overlap ótima do grafo, vamos mostrar como usar essa atribuição para construir uma representação overlap de uma árvore. A construção da representação overlap da árvore  $T$  consiste na construção consecutiva de representações overlap de subgrafos centopéias maximais de  $T$ .

A Observação 3.7 nos apresenta a forma correta de reunir a representação overlap de uma centopéia com a representação overlap de outro grafo de forma a obtermos uma representação overlap desejada.

**Lema 3.8** Seja  $G$  um grafo formado por uma centopéia  $T$  com caminho máximo de tamanho  $\ell + 1$  e o grafo  $H$ , de forma que existe um único vértice  $v$  tal que  $v \in V(H) \cap V(T)$  e  $v$  é um extremo do caminho máximo de  $T$ .

Seja  $\mathcal{C}_H$ , uma representação overlap de tamanho  $\varphi(H)$  de  $H$ , e  $\mathcal{C}_T$ , uma representação overlap de tamanho  $\ell$  de  $T - \{v\}$ .

Se  $S_v$  é  $\{a\}$ -minimal para algum elemento  $a$ , então  $G$  tem uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de tamanho  $\varphi(H) + \ell$ . Ademais, se algum conjunto era  $\{b\}$ -minimal em  $\mathcal{C}_T$  ou  $\mathcal{C}_H$ , ele permanece  $\{b\}$ -minimal em  $\mathcal{C}$ .

*Prova:* Vamos construir a família  $\mathcal{C}$  a partir de  $\mathcal{C}_H$  e de  $\mathcal{C}_T$ . A família  $\mathcal{C}_T$  é construída de forma semelhante ao Corolário 3.6, com exceção do conjunto  $S_{v_\ell}$ . Para este conjunto teremos  $S_{v_\ell} = \{\ell, a\}$ . Esta alteração não altera em nada as relações entre os

conjuntos de  $\mathcal{C}_T$ , de forma que esta família é uma representação overlap de tamanho  $\ell + 1$  do grafo  $T - \{v\}$ . Chamemos de  $U_T$  o conjunto-base de  $\mathcal{C}_T$ .

Seja agora a família  $\mathcal{C}_H$ . Vamos alterar os conjuntos desta família, criando uma nova família  $\mathcal{C}'_H$  de forma que a família  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'_H \cup \mathcal{C}_T$  seja uma representação overlap de  $G$  com tamanho  $\varphi(H) + \ell$ .

$$S'_v = S_v;$$

$$S'_u = S_u, \text{ se } a \notin S_u;$$

$$S'_u = S_u \cup U_T, \text{ caso contrário.}$$

Desta forma, os únicos conjuntos a serem alterados são os que contém  $a$ .

Podemos ver rapidamente que as relações entre os pares conjuntos de  $\mathcal{C}'$  são as mesmas que apresentadas anteriormente em  $\mathcal{C}_H$  e  $\mathcal{C}_T$ . A relação entre um conjunto alterado  $S'_x$  e um inalterado  $S_y$  se manterá a mesma pois se  $S_x \parallel S_y$ ,  $S'_x \parallel S_y$ ; se  $S_x \bowtie S_y$ , apenas  $S_x$  receberá  $U_T$  e portanto  $S'_x \bowtie S_y$ ; e se  $S_y \subset S_x$  teremos  $S_y \subset S'_x$ .

Para todo  $S'_x$ ,  $S'_x \neq S'_v$ , caso  $a \in S'_x$  todo o conjunto-base de  $\mathcal{C}_T$  está contido em  $S'_x$ . Caso contrário,  $S'_x$  é disjunto de qualquer conjunto de  $\mathcal{C}_T$ . Por fim,  $S'_v \bowtie S_{v_\ell}$  e  $S'_v \parallel S_i$ ,  $i < \ell$ .

Portanto,  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de tamanho  $\varphi(H) + \ell$  do grafo  $G$ .

Analisando a questão da  $\{b\}$ -minimalidade em  $\mathcal{C}$ , verificamos que um conjunto  $\{b\}$ -mininal em  $\mathcal{C}_T$  é  $\{b\}$ -mininal em  $\mathcal{C}$  pois nenhum conjunto de  $\mathcal{C}_T$  passa a conter um novo conjunto em  $\mathcal{C}$ . Um conjunto  $\{b\}$ -mininal de  $\mathcal{C}_H$  também é  $\{b\}$ -mininal em  $\mathcal{C}$  pois caso tenha sido alterado, ele passa a conter o conjunto-base de  $\mathcal{C}_T$  e  $b$  não pertence a este conjunto-base, mantendo sua  $\{b\}$ -minimalidade em  $\mathcal{C}$ . ■

Através do Lema 3.8, conseguimos unir um grafo com uma centopéia, dadas suas condições expostas no lema. A seguir apresentamos uma observação sobre um esqueleto de um grafo

**Observação 3.9** *Toda árvore  $T$  com mais de três vértices possui ao menos um esqueleto como subgrafo induzido.*

Estamos preocupados em encontrar o esqueleto com maior número de vértices de uma árvore, chamado esqueleto máximo. A Figura 3.7 mostra uma árvore, enquanto os vértices que pertencem a seu esqueleto máximo se encontram destacados.

O Lema 3.10 a seguir demonstra como construir uma representação overlap ótima de uma árvore através da união sucessiva de centopéias. A representação overlap tem tamanho igual ao número de vértices do esqueleto máximo. Podemos perceber que todas as folhas que não estão em um esqueleto máximo de uma árvore  $T$  são folhas de uma centopéia a ser incluída e que seu conjunto não acrescenta nenhum elemento exclusivo ao conjunto-base da representação overlap da árvore.

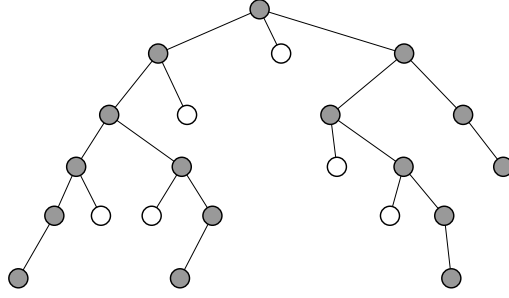


Figura 3.7: Exemplo de árvore. Em destaque, seu esqueleto máximo.

**Lema 3.10** *Toda árvore com pelo menos três vértices possui representação overlap do tamanho de seu esqueleto máximo.*

*Prova:* A ideia da prova é fazer um processo de união de centopéias maximais do grafo. A primeira centopéia  $T_0$  é uma centopéia maximal de tamanho  $\ell_0$  onde todas as folhas de  $T_0$  também são folhas em  $T$ . Atribuímos uma família  $\mathcal{C}_{T_0}$  para os vértices de  $T_0$ .

A centopéia maximal  $T_1$  é uma centopéia maximal de tamanho  $\ell_1$  de forma que o vértice  $v$  do extremo de  $T_1$  também seja vértice de  $T_0$  e todas as outras folhas de  $T_1$  também sejam folhas em  $T$ . O conjunto  $S_v$  é  $\{a\}$ -minimal para algum  $a$  e pelo Lema 3.8 construímos uma representação overlap para  $T_1 - \{v\}$ , unimos as representações overlap  $\mathcal{C}_{T_0}$  e  $\mathcal{C}_{T_1}$ , passando a ter uma nova família de conjuntos  $\mathcal{C}'_{T_1}$ , de tamanho  $\ell_0 + \ell_1 - 1$ , quantidade de vértices de  $T_0 \cup T_1$ .

Cada centopéia maximal  $T_i$  é construídas da mesma forma que  $T_1$ , se ligando a um vértice do grafo resultante do passo anterior. A ligação é feita por um vértice do caminho máximo de alguma das centopéias maximais anteriores, justamente pelo fato das centopéias anteriores possuírem como suas folhas vértices que são folhas também em  $T$ . Desta forma o processo de construção da representação overlap apresentado no Lema 3.8 pode ser sempre usado, construindo uma representação overlap de tamanho igual ao esqueleto máximo do subgrafo já selecionado. Por fim, temos uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de  $T$  de tamanho igual ao esqueleto máximo da árvore. ■

A Figura 3.8 mostra um exemplo de processo para determinar o número de overlap de uma árvore através da construção feita pelo Lema 3.10, aplicada à árvore da Figura 3.7. Em cada figura é destacada a centopéia maximal selecionada para construir a representação, além de destacar os conjuntos alterados com a criação dos conjuntos associados aos vértices desta centopéia incluída na iteração.

Com o Lema 3.10, aliado ao Lema 3.2, conseguimos provar o teorema a seguir.

**Teorema 3.11** *Se  $T$  é uma árvore com esqueleto máximo contendo  $\ell$  vértices, então  $\varphi(T) = \ell$ .*

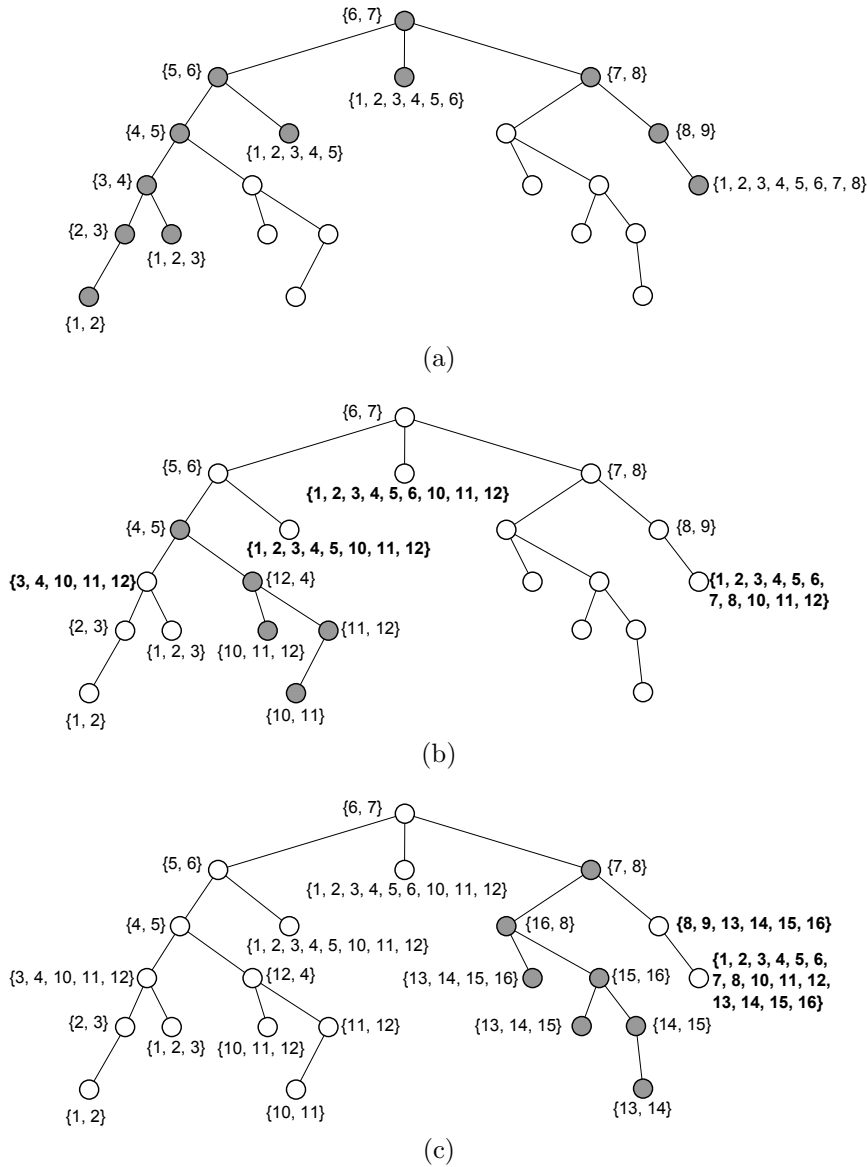


Figura 3.8: Construção iterativa da representação overlap da árvore da Figura 3.7.

## 3.2 Grafos completos e $k$ -partidos completos

Nesta seção mostramos o resultado exato para grafos completos e  $k$ -partidos completos. Este resultado foi obtido por Rosgen [12], utilizando um resultado anterior de Milner para famílias de conjuntos [10].

**Definição 3.4** Uma família  $\mathcal{K}$  tem a **propriedade overlap** se  $S_u \not\subseteq S_v$  para todo par de conjuntos  $S_u, S_v$  de  $\mathcal{K}$ .

Representamos como  $K(m)$  a quantidade máxima de conjuntos que uma família  $\mathcal{K}$  de tamanho  $m$  com propriedade overlap pode conter. O resultado de Milner, expresso pelo Teorema 3.12 a seguir, determina a quantidade máxima de conjuntos que podem existir em uma família de conjuntos com tamanho limitado e cujos pares de conjuntos apresentam esta propriedade.

**Teorema 3.12** *Se  $\mathcal{K}$  é uma família de conjuntos de tamanho  $m$  com a propriedade overlap, então  $K(m) = \binom{m}{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil}$ .*

Utilizando o resultado do Teorema 3.12 podemos identificar rapidamente a ideia do cálculo do número de overlap para grafos completos. O valor  $K(m)$  define a quantidade máxima de vértices que o grafo completo tenha de forma que a família  $\mathcal{K}$  seja uma representação overlap deste grafo.

**Teorema 3.13** *Se  $G$  é um  $K_n$ , então  $\varphi(G) = \min\{m : n \leq K(m)\}$ .*

*Prova:* Qualquer família de conjuntos que seja uma representação overlap de um  $K_n$  deve possuir a propriedade overlap. O Teorema 3.12 determina que para uma família de tamanho  $m$ , existem  $K(m)$  conjuntos que atendem estas propriedades. Basta então encontrar o menor valor possível de  $m$  de forma que  $n \leq K(m)$  Ou seja,  $\min\{m : n \leq K(m)\}$ .

Uma família de conjuntos que seja representação overlap do  $K_n$  pode ser construída da seguinte forma. Dados os  $m$  elementos necessários no conjunto-base, criamos conjuntos, todos de mesmo tamanho, com  $\lceil \frac{m+1}{2} \rceil$  elementos. Como cada conjunto possui mais da metade de  $m$  elementos, qualquer conjunto deste tamanho terá interseção não vazia com todos os outros conjuntos. Como todos os conjuntos são do mesmo tamanho, nenhum conjunto conterá o outro. Desta forma cada conjunto terá relação de overlap com todos os outros conjuntos desta família, sendo uma representação overlap de  $K_n$ . ■

A Figura 3.9 exemplifica uma atribuição dada pelo Teorema 3.13 para o grafo completo de 10 vértices. O menor valor de  $m$  tal que  $10 \leq K(m)$  é 5, sendo que cada conjunto desta família tem tamanho 3.

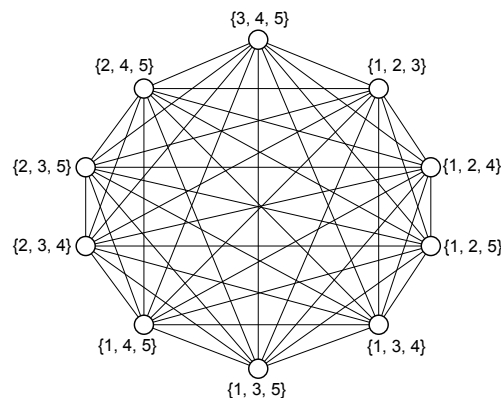


Figura 3.9: Representação overlap do grafo  $K_{10}$ .

Após apresentar o número de overlap dos grafos completos, vamos argumentar sobre os grafos  $k$ -partidos completos.

**Definição 3.5** Um grafo  $G(V, E)$  é um grafo ***k-partido completo*** se  $V(G)$  pode ser particionado em  $k$  partes estáveis  $N_1, N_2, \dots, N_k$  de forma que um vértice que pertence a  $N_i$  é adjacente a todos os vértices de  $N_j, j \neq i$ .

Um grafo  $k$ -partido completo nada mais é que um grafo completo  $K_k$  onde cada vértice  $i$  de  $K_k$  é um vértice da parte  $N_i$  e todos os outros vértices desta mesma parte são gêmeos falsos. Chegamos então ao Corolário 3.14 a seguir.

**Corolário 3.14** Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo, então  $\varphi(G) = \varphi(K_k)$ .

*Prova:* A prova é direta. Como todos os vértices em cada parte  $N_i$  são pares de gêmeos falsos, fazemos uma atribuição overlap para um grafo completo de  $k$  vértices e representamos todos os vértices de cada parte  $N_i$  com o mesmo conjunto, de forma que eles não terão relação de overlap entre si e terão relação de overlap com todos os conjuntos que representam vértices das outras partes. ■

### 3.3 Grafos de co-comparabilidade

O nome desta classe de grafos vem de *complemento de comparabilidade*, onde um grafo é de comparabilidade se suas arestas admitem uma orientação transitiva.

**Definição 3.6** Um grafo  $G(V, E)$  é de ***co-comparabilidade*** se o seu complemento  $\overline{G}$  admite uma orientação transitiva das arestas.

A Figura 3.10 mostra um exemplo de um grafo de co-comparabilidade e uma orientação transitiva das arestas de seu complemento.

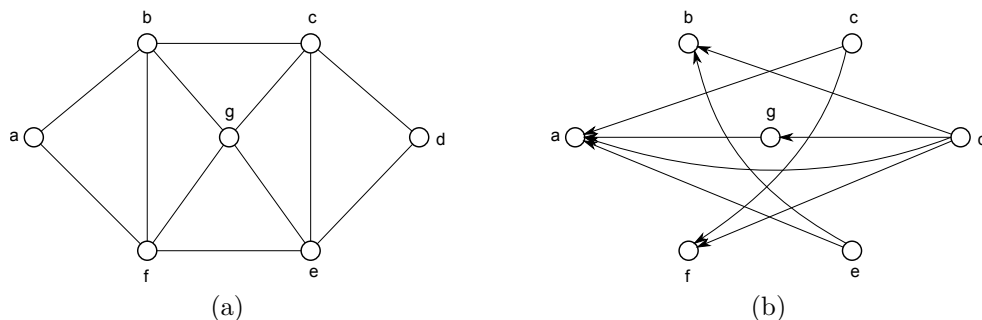


Figura 3.10: Grafo de co-comparabilidade e uma orientação transitiva de seu complemento.

A partir de uma orientação transitiva do complemento de  $G$ , podemos definir uma ordenação topológica  $\sigma = [v_1, \dots, v_n]$  para  $G$  de forma que para cada  $i$ , no subgrafo induzido de  $\overline{G}$  pelos vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ , o vértice  $v_i$  é uma fonte. O grafo da

Figura 3.10 admite, por exemplo, a ordenação topológica  $\sigma = [a, f, b, g, e, c, d]$  para seu complemento.

Usamos esta ordenação topológica a partir do complemento de  $G$  para construir uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de um grafo de co-comparabilidade. Podemos visualizar que na construção da representação overlap do grafo de co-comparabilidade, orientação transitiva de uma aresta  $\vec{uv}$  indica que o  $S_u \subseteq S_v$  em  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 3.15** *Se  $G$  é um grafo de co-comparabilidade com  $n \geq 2$  vértices, então  $\varphi(G) \leq n + 1$ .*

*Prova:* Vamos construir uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  de tamanho  $n + 1$  que seja representação overlap de  $G$ . Os conjuntos de  $\mathcal{C}$  serão definidos de acordo com a ordem  $\sigma$ , ordenação topológica de  $\overline{G}$ .

Para o vértice  $v_1$ , primeiro vértice da ordem,  $S_{v_1} = \{1, n + 1\}$ . Para o segundo vértice da ordem, temos  $S_{v_2} = \{2, n + 1\}$ . Caso  $v_2v_1 \in E(\overline{G})$  ela estará orientada de  $v_2$  para  $v_1$ , e alteramos  $S_{v_1}$  de forma a termos  $S_{v_1} := S_{v_1} \cup \{2\}$ . Desta forma, se  $v_2v_1 \in E(G)$  então  $S_{v_2} \not\subseteq S_{v_1}$ , enquanto  $S_{v_2} \subset S_{v_1}$  caso contrário.

Para o  $i$ -ésimo vértice da ordem, formamos o conjunto  $S_{v_i} = \{i, n + 1\}$  e para todo conjunto  $S_{v_j}$ ,  $j < i$ , se  $v_jv_i \in E(\overline{G})$  então passamos a ter  $S_{v_j} := S_{v_j} \cup \{i\}$ . Como o vértice  $v_i$  é no subgrafo considerado no momento em que seu conjunto é definido, qualquer aresta será orientada no sentido de  $v_i$  para seu outro extremo. Como a orientação em  $\overline{G}$  é transitiva, toda não-aresta em  $G$  é representada por  $S_{v_i} \subset S_{v_j}$  e caso a aresta exista em  $G$ ,  $S_{v_i} \not\subseteq S_{v_j}$ .

Como incluímos um novo elemento no conjunto-base da família a cada definição de conjunto, além do elemento 2 no primeiro passo, utilizamos ao final  $n+1$  elementos e esta família  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$ . ■

A Figura 3.11 apresenta uma representação overlap de tamanho 8 para o grafo apresentado na Figura 3.10, definida de acordo com a construção apresentada no Teorema 3.15 com a ordenação topológica  $[a, f, b, g, e, c, d]$  mostrada como exemplo no texto. A Figura 3.11(a) apresenta a representação overlap de  $G$ , visualizando a orientação transitiva de seu complemento utilizada para construir a família de conjuntos. A Figura 3.11(b) apresenta a representação overlap visualizada no grafo original, o grafo da Figura 3.10.

Este limite superior do número de overlap para grafos de co-comparabilidade é atingido pelo  $P_2$ . Porém não se conhece um grafo com mais de dois vértices que necessite de exatamente  $n + 1$  elementos em sua representação overlap, de forma que podemos conjecturar que o limite superior para grafos desta classe, com  $n \geq 3$ , é igual ao número de vértices do grafo. Este valor não pode ser reduzido ainda mais, visto que o número de overlap de caminhos é exatamente este limite.



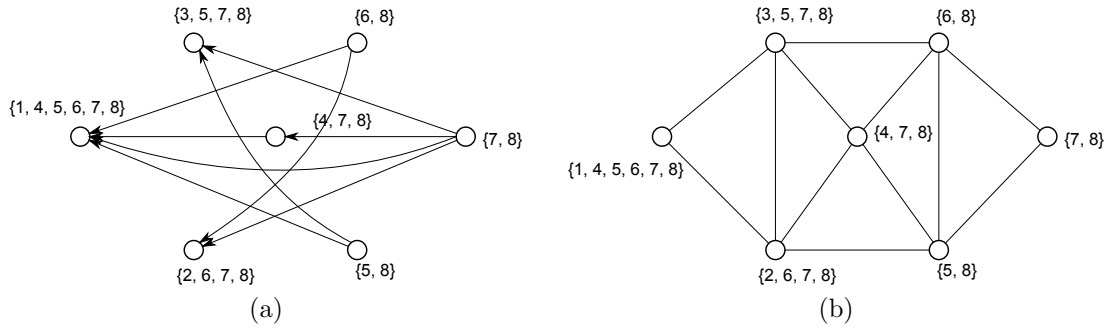


Figura 3.11: Construção de uma representação overlap para o grafo da Figura 3.10

### 3.4 Grafos planares

Os grafos planares formam uma das mais antigas classes de grafos já estudadas na literatura, visto que é associado a representações de mapas [2]. Iniciamos a seção definindo um grafo planar e apresentando propriedades relativas a grafos desta classe.

**Definição 3.7** Um grafo  $G$  é **planar** se admite uma representação no plano onde não ocorre cruzamento entre nenhum par de arestas.

Toda representação de  $G$  que atenda a Definição 3.7 é chamada de **representação plana** de  $G$ . As regiões delimitadas por arestas do grafo em uma representação plana de  $G$  são chamadas **faces**. A única face que não é delimitada por arestas do grafo é chamada **face externa**. A Figura 3.12 apresenta duas representações planas para um mesmo grafo planar.

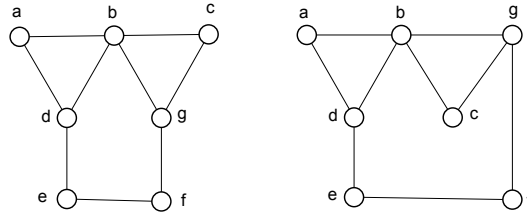


Figura 3.12: Duas representações planas de um mesmo grafo planar.

Na representação plana à esquerda, podemos ver que existem quatro faces:  $abd$ , um triângulo,  $bcg$ , um triângulo,  $bdefg$ , um  $C_5$ , além da face externa  $abcgfed$ , um  $C_7$ . Na representação plana à direita, as faces são diferentes:  $abd$ , um triângulo,  $bcg$ , um triângulo,  $bdefgc$ , um  $C_6$ , e a face externa  $abgfed$ , um  $C_6$ . Entretanto, a quantidade de faces se mantém inalterada.

A quantidade de faces de um grafo planar pode ser calculada a partir da sua quantidade de vértices e arestas, com a fórmula apresentada pelo Teorema 3.16 a seguir [2].

**Teorema 3.16 (Fórmula de Euler)** Se  $G$  é um grafo planar com  $n$  vértices,  $m$  arestas e  $f$  faces, então  $n - m + f = 2$ .

A partir da Fórmula de Euler verificamos que um grafo planar de  $n$  vértices possui no máximo  $3n - 6$  arestas. Entretanto, se o grafo é livre de triângulos, então ele possui no máximo  $2n - 4$  arestas, limite superior alcançado no caso de toda face do grafo ser um ciclo de tamanho quatro.

Nesta seção, vamos apresentar um limite superior do número de overlap para os grafos planares. Seguiremos a construção do limite de acordo com o proposto por Cranston et. al. [4], com leves alterações nas provas dos resultados.

Iniciamos mostrando uma partição por completos do grafo planar, que estabelece um primeiro parâmetro para o número de overlap próprio de um grafo planar. Após estabelecer este teto no número de overlap, uma sequência de refinamentos chega em um teto mais justo para o número de overlap próprio e o número de overlap de um grafo planar.

Encerramos a seção apresentando grafos planares de  $n = 8$  vértices ou  $n \geq 10$  vértices que atingem o limite superior apresentado de  $2n - 5$  para o número de overlap do grafo.

**Lema 3.17** *Se  $G$  é um grafo planar com  $n \geq 3$  vértices, então  $G$  tem uma partição por completos com no máximo  $2n - 5$  subgrafos completos de 2 ou 3 vértices, com exceção dos casos a seguir:*

1.  $G$  é um  $K_4$ , se decompondo em três subgrafos  $K_2$  e um subgrafo  $K_3$ .
2. Todas as faces de  $G$  são ciclos de tamanho 4, onde  $G$  tem uma partição por completos de  $2n - 4$  subgrafos  $K_2$ .

*Prova:* Caso o grafo possua menos de  $2n - 4$  arestas, como exemplo um caso em que existem ciclos de mais de quatro vértices, uma simples partição por completos das arestas nos apresenta uma representação overlap de tamanho menor que  $2n - 5$ . A prova para  $K_4$  é direta por verificação. Igualmente para o caso de todas as faces de  $G$  serem  $C_4$ 's, pois  $G$  tem exatamente  $2n - 4$  arestas e a clique máxima tem tamanho dois.

Seja então um grafo com todos as faces de tamanho 4 e  $x, y, z$  três vértices de  $G$ , com arestas  $xy$  e  $yz$ . Se acrescentarmos a  $G$  uma nova aresta  $xz$ , a partição por completos do grafo deixa de ter  $xy$  e  $yz$  como dois de seus subgrafos completos, passando a ter o triângulo  $xyz$ . Logo, temos  $2n - 4 - 2 + 1 = 2n - 5$  subgrafos na partição por completos de  $G$ . A cada inclusão de uma nova aresta, removemos dois subgrafos completos  $K_2$  e incluímos um subgrafo completo  $K_3$  na partição por completos. Desta forma, a cardinalidade da partição por completos nunca é superior a  $2n - 5$ . ■

A partir do Lema 3.17 conseguimos calcular o número de overlap próprio para os grafos planares que possuem grau mínimo superior a dois.

**Corolário 3.18** *Se  $G$  é um grafo planar com  $n$  vértices e  $\delta(G) \geq 3$ , então temos  $\Phi(G) \leq 2n - 4$  com igualdade apenas se toda face de  $G$  for um  $C_4$  ou  $G = K_4$ .*

*Prova:* Pelo Lema 3.17, os grafos planares possuem uma partição por completos com até  $2n - 4$  subgrafos  $K_2$  e  $K_3$ . Pelo Lema 2.15, esta decomposição constroi uma família de conjuntos que é representação overlap própria de  $G$ .

Por inspeção verificamos que o número de overlap próprio do  $K_4$  é igual a 4. Caso todo ciclo tenha tamanho quatro, sua partição por completos será apenas de subgrafos  $K_2$  e seu número de overlap próprio é igual a  $2n - 4$ . ■

A seguir retiramos a restrição de grau para grafos planares, chegando a um limite superior para o número de overlap próprio dos grafos com pelo menos três vértices. Através deste limite superior chegamos a um limite superior para o número de overlap de grafos planares.

**Lema 3.19** *Se  $G$  é planar com  $n \geq 3$  vértices, então  $\Phi(G) \leq 2n - 2$ , com igualdade se e somente se  $G = K_{1,n-1}$ .*

*Prova:* Por indução no número de vértices de  $G$ .

Se  $n = 3$ , verificamos que  $\Phi(P_3) = 4$  e que  $\Phi(K_3) = 3$ , o primeiro grafo atingindo o limite e o segundo estando abaixo. Logo, a desigualdade é válida para todo grafo com 3 vértices. Para  $n \geq 4$ , separamos em dois casos dependendo do valor de  $\delta(G)$ .

Se  $\delta(G) \geq 3$ , pelo Lema 3.18 temos que  $\Phi(G) \leq 2n - 4 < 2n - 2$ .

Se  $\delta(G) \leq 2$ , seja  $v$  um vértice onde  $d(v) = \delta(G)$ . Pelo Lema 2.17 sabemos que  $\Phi(G) \leq \Phi(G - \{v\}) + 2$ . Pela hipótese de indução,  $\Phi(G - \{v\}) \leq 2(n - 1) - 2$ . Logo,  $\Phi(G) \leq 2n - 2$ . Para atingir a igualdade,  $\Phi(G - \{v\}) = 2n - 4$  e  $G - \{v\}$  é isomorfo a  $K_{1,n-2}$ .

Se  $d(v) = 2$ ,  $G - \{v\}$  não pode ter mais de dois vértices folhas, ambas adjacentes a  $v$ . Logo,  $G = C_4$  e  $\Phi(C_4) = 4 \leq 2n - 2$ .

Se  $d(v) = 1$ , temos duas possibilidades. Na primeira,  $G$  é um  $P_3$  com  $n - 3$  vértices pendentos a um mesmo vértice do caminho. Neste caso,  $\Phi(G) \leq 2n - 3$ . No segundo caso,  $G$  é um  $K_{1,n-1}$  e portanto  $\Phi(G) = 2n - 2$ , o único caso em que temos a igualdade. ■

Lembrando que o número de overlap de um grafo é menor ou igual a seu número de overlap próprio, temos o corolário a seguir.

**Corolário 3.20** *Se  $G$  é um grafo planar com  $n \geq 3$  vértices, então  $\varphi(G) \leq 2n - 2$ .*

Os grafos planares que não são 2-degenerados, ou seja, possuem um subgrafo induzido com grau mínimo superior a dois, possuem um limite superior mais justo no para seu número de overlap próprio, mostrado no lema a seguir.

**Lema 3.21** *Se  $G$  é planar com  $n \geq 5$  vértices e  $G$  não é 2-degenerado, então  $\Phi(G) \leq 2n - 4$ , com igualdade quando  $\delta(G) \geq 2$  apenas se  $G$  tem  $2n - 4$  arestas ou  $G = K_4$ .*

*Prova:* Indução no número de vértices de  $G$ .

Para  $n = 5$ , verificamos rapidamente que existem três grafos que não são 2-degenerados. Nos três casos temos um  $K_4$  induzido com um quinto vértice adjacente a um, dois ou três vértices do  $K_4$  induzido. Como  $\Phi(K_4) = 4$ , verificamos rapidamente que  $\Phi(G) \leq 6$  para qualquer um dos três grafos que não são 2-degenerados, atendendo a desigualdade para os três grafos da base da indução.

Para  $n > 5$ , vamos separar inicialmente em casos de acordo com o grau mínimo de  $G$ . Se  $\delta(G) \geq 3$ , pelo Corolário 3.18 temos que  $\Phi(G) \leq 2n - 4$ .

Se  $\delta(G) \leq 2$ , seja  $v$  um vértice de  $G$  tal que  $d(v) = \delta(G)$ . O grafo  $G - \{v\}$  também não é 2-degenerado e pela hipótese de indução chegamos à conclusão que  $\Phi(G - \{v\}) \leq 2(n - 2) - 4 + 2 = 2n - 6$  e portanto  $\Phi(G) \leq 2n - 4$ , atingindo a igualdade quando  $\Phi(G - \{v\}) = 2n - 6$ .

Vamos agora confirmar os casos em que ocorre a igualdade. Já sabemos que  $\Phi(K_4) = 4$  e portanto a igualdade é válida. Vamos analisar apenas o segundo caso, em que  $|E(G)| = 2n - 4$ .

Caso  $\delta(G - \{v\}) \geq 2$ : Buscando a igualdade,  $G - \{v\}$  tem  $2n - 6$  arestas ou  $G - \{v\} = K_4$ . Caso  $G - \{v\} = K_4$ , temos uma representação overlap própria de tamanho 5: família  $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}\}$ , abaixo do valor. Caso  $G - \{v\}$  possui  $2n - 6$  arestas, sabemos que  $\Phi(G - \{v\}) = 2n - 6$ ,  $E(G - \{v\}) = 2n - 6$  e  $d(v) = 2$ . O grafo  $G$  terá então  $2n - 4$  arestas, atingindo a igualdade.

Se  $\delta(G - \{v\}) = 1$ , seja  $u$  vértice de  $G - \{v\}$  de grau 1. Ele deve ser adjacente a  $v$  para termos  $\delta(G) = 2$ . Suponha uma representação overlap própria de tamanho  $2n - 6$  para  $G - \{v\}$ . Existe um elemento  $a \in S_u$  que não pertence a nenhum outro conjunto da representação overlap própria. Criamos o conjunto  $S_v = \{a, b\}$ , com  $b$  não pertencente ao conjunto-base da representação overlap própria de  $G - \{v\}$ . Para o segundo vizinho de  $v$  construímos  $S_x = S'_x \cup \{b\}$ . Temos uma representação overlap própria de  $G$  com tamanho  $2n - 5$ . ■

A partir dos lemas apresentados anteriormente, vamos construir a prova para o número de overlap de grafos planares, mostrado a seguir.

**Teorema 3.22** *Se  $G$  é planar com  $n \geq 5$  vértices, então  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ .*

*Prova:* Por indução no número de vértices de  $G$ .

Para  $n = 5$ , o Apêndice A apresenta todos os grafos de cinco vértices e respectivas representações overlap ótimas, mostrando que a desigualdade é válida para todos os grafos planares de cinco vértices.

Para  $n > 5$ , caso  $G$  tenha vértice pendente  $v$ , pela hipótese de indução temos que  $\Phi(G - \{v\}) \leq 2(n - 1) - 5$  e portanto  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ . Podemos então assumir que  $\delta(G) \geq 2$ .

Caso  $G$  não seja 2-degenerado e  $\delta(G) \geq 2$ , ou temos que  $\Phi(G) \leq 2n - 5$  e portanto  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ , ou temos o fato de que  $G$  tem  $2n - 4$  arestas e portanto pelo Lema 2.18 temos que  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ .

Se  $G$  é 2-degenerado, então  $|E(G)| \leq 2n - 3$ , sendo que caso essa desigualdade seja estrita, pelo Lema 2.18 chegamos a  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ . Vamos considerar então apenas o caso em que  $|E(G)| = 2n - 3$ .

Como  $|E(G)| > 2n - 4$ , notamos que  $G$  possui ao menos um triângulo. Caso todo triângulo de  $G$  possua um vértice de grau 2, seja  $v$  um vértice de  $G$  tal que seja um dos vértices de grau dois de um triângulo. O subgrafo induzido  $G - \{v\}$  também é 2-degenerado e tem exatamente  $2(n - 1) - 3$  arestas. Aplicando constantemente a remoção de um vértice de grau 2 de um triângulo, terminamos com um único triângulo no grafo e percebemos que todos os vértices removidos são gêmeos falsos. Logo,  $\varphi(G) = 3$ .

Caso algum triângulo tenha seus vértices com grau superior a dois, fazemos uma partição por completos de  $G$ , de forma que temos um triângulo e  $2n - 6$  subgrafos  $K_2$ . Esta partição por completos é uma representação overlap própria de  $G$  e portanto  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ .

Para todos os casos possíveis de  $G$  planar com  $n \geq 5$  vértices,  $\varphi(G) \leq 2n - 5$ . ■

Encerramos a seção apresentando grafos que atingem a o limite superior do número de overlap para grafos planares definido pelo Teorema 3.22. Estes grafos são planares, livres de triângulos e sem corte-estrela, de forma que seu número de overlap é igual ao seu número de arestas menos um. Estes grafos, por terem todas as faces de tamanho quatro têm  $2n - 4$  arestas e, portanto, seu número de overlap é igual a  $2n - 5$ .

Para  $n$  par,  $n \geq 8$ , criamos um ciclo de tamanho  $n - 2$  e dois vértices  $x$  e  $y$ . O vértice  $x$  será adjacente a todos os vértices de um conjunto estável maximal do ciclo, enquanto o vértice  $y$  será adjacente a todos os vértices do segundo conjunto estável maximal do ciclo. A Figura 3.13 exemplifica o grafo para  $n = 10$ . Como é livre de triângulos e sem corte-estrela, o grafo tem  $2n - 4$  arestas.

Para  $n$  ímpar,  $n \geq 11$ , criamos o grafo de  $n - 1$  vértices como apresentado no parágrafo anterior. Seleccionamos o vértice  $x$  e dois vértices  $u$  e  $v$ , adjacentes a  $x$ , de forma que a distância entre eles no ciclo induzido seja superior a 2. Substituímos  $x$  por dois vértices  $x'$  e  $x''$ ,  $x'x'' \notin E(G)$ , de forma que todo vértice anteriormente vizinho de  $x$  será vizinho de  $x'$  ou  $x''$ , com exceção de  $u$  e  $v$  que serão vizinhos de  $x'$  e  $x''$ . A Figura 3.14 exemplifica o grafo para  $n = 11$ , a partir do grafo de dez

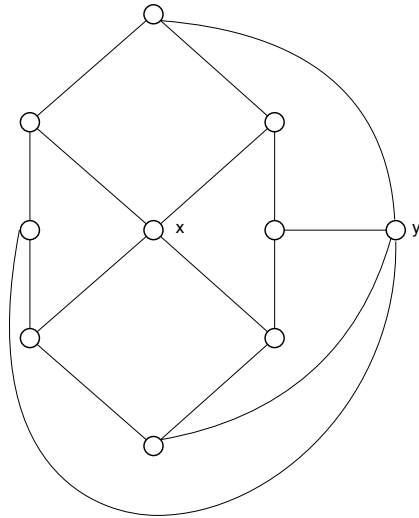


Figura 3.13: Grafo planar com 10 vértices e número de overlap igual a 15.

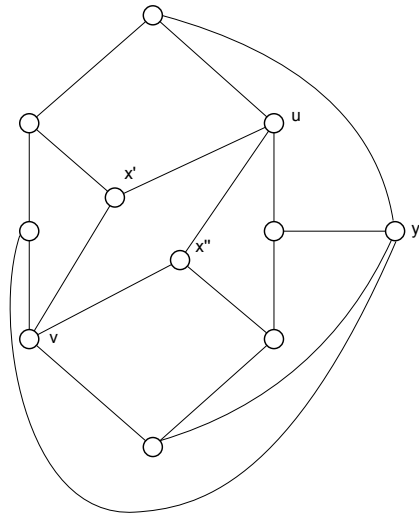


Figura 3.14: Grafo planar com 11 vértices e número de overlap igual a 17.

vértices da Figura 3.13. Como é livre de triângulos e sem corte-estrela, o grafo tem  $2n - 4$  arestas.

Com estas duas famílias de grafos, mostramos que o limite superior do número de overlap para os grafos planares é alcançado quando  $n \geq 10$  e  $n = 8$ .

# Capítulo 4

## Novos Resultados para Classes de Grafos

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos em nosso estudo sobre número de overlap quando restringimos o problema para grafos de classes específicas.

O número de overlap de grafos cordais foi previamente estudado por Rosgen, apresentando um limite superior do número de overlap para grafos desta classe [12]. Estudando propriedades dos grafos cordais, apresentamos dois novos limites superiores para o número de overlap de grafos desta classe, resultados inferiores ao proposto por Rosgen. Ademais, mostramos que existem grafos cordais cujo número de overlap é superior à sua quantidade de vértices.

Analisando algumas subclasses de grafos cordais, novamente nos valem de propriedades particulares dos grafos de intervalo e, ainda mais particularmente, dos grafos de limiar para apresentar limites superiores menores do número de overlap para grafos destas classes. Para grafos de limiar chegamos a um limite superior bem próximo do número de overlap de grafos desta classe. Já os grafos de intervalo têm um limite superior aprimorado em relação a seu resultado anterior, apresentado por Rosgen [12].

Por fim, apresentamos nosso estudo para grafos cadeia, subclasse dos grafos bipartidos onde os vértices de cada parte estável possuem vizinhança aninhada. Determinamos o número de overlap além de construir uma representação overlap para grafos desta classe.

### 4.1 Grafos cordais

Nesta seção apresentamos duas formas de construir representações overlap para um grafo cordal. Estas duas construções se baseiam em propriedades conhecidas de grafos cordais, que revisamos a seguir.

**Definição 4.1** Um grafo  $G$  é **cordal** se  $G$  não possui  $C_n$ ,  $n \geq 4$  induzido.

A Figura 4.1 nos mostra um exemplo de grafo cordal. A seguir, apresentamos uma definição usada para o reconhecimento de grafos cordais.

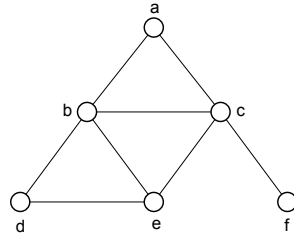


Figura 4.1: Exemplo de grafo cordal

**Definição 4.2** Um vértice  $v$  é **simplicial** se  $N(v)$  é uma clique.

Podemos observar que no grafo  $G$  da Figura 4.1 o vértice  $a$  é simplicial em  $G$  porque sua vizinhança  $\{b, c\}$  é uma clique. Os vértices  $d$  e  $f$  também são simpliciais em  $G$ , enquanto os vértices restantes de  $G$  não são simpliciais. Lekkerkerker e Boland [6], além de Dirac [6], apresentam o resultado a seguir sobre quantidade de vértices simpliciais em um grafo cordal.

**Teorema 4.1** Se  $G$  é um grafo cordal então  $G$  possui ao menos um vértice simplicial. Ademais, se  $G$  for cordal e não for completo, então  $G$  possui ao menos um par de vértices simpliciais não adjacentes.

Em seguida, apresentamos uma ordem dos vértices de um grafo cordal definida a partir dos vértices simpliciais do grafo cordal e dos subgrafos definidos por uma subordem desta ordem.

**Definição 4.3** Um **esquema de eliminação perfeito** de um grafo  $G$  é uma ordem dos vértices  $\sigma = [v_1, \dots, v_n]$  de forma que para todo vértice  $v_i$  o subgrafo induzido  $N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$  é completo.

O grafo da Figura 4.1 tem um seguinte esquema de eliminação perfeito:  $[f, d, a, b, c, e]$ . Este esquema não é único, pois podemos permutar os vértices simpliciais em  $G$  e gerar uma nova ordem. Através do esquema de eliminação perfeito podemos verificar que um grafo cordal de  $n \geq 2$  vértices possui no máximo  $n - 1$  cliques maximais.

Fulkerson e Gross [6] provam o seguinte teorema, que estabelece um algoritmo para reconhecimento de grafos cordais.

**Teorema 4.2** O grafo  $G$  é cordal se e somente se  $G$  possui um esquema de eliminação perfeito.



Seja  $v$  um vértice simplicial em  $G$ . Como  $N(v)$  é completo, o subgrafo  $G - \{v\}$  também é um grafo cordal, pois não geramos nenhum ciclo induzido. Dizemos então que a **remoção** de um vértice  $v$  simplicial em  $G$  consiste na criação de um subgrafo induzido  $G - \{v\}$  a partir de  $G$ .

Os grafos cordais também podem ser caracterizados como classe de grafos de interseção. O Teorema 4.3 a seguir, reunido desta forma por Golubic [6], estabelece a caracterização de grafos cordais como interseção de uma família de subárvores de uma árvore. Esta caracterização é provada originalmente por Gavril e Buneman e independentemente por Walter .

**Teorema 4.3** *Dado o grafo  $G$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é cordal
2.  $G$  é o grafo de interseção de uma família de subárvores de uma árvore.
3. Existe uma árvore  $T$  cujos nós representam as cliques maximais de  $G$  tal que, para cada vértice  $v$  de  $G$ , o subgrafo  $T_v$  induzido pelos nós de  $T$  que representam as cliques maximais de  $G$  em que  $v$  está contido é uma árvore.

O terceiro item do teorema anterior apresenta uma forma de construir uma árvore e uma família de subárvores a partir das cliques maximais do grafo cordal. A partir da Figura 4.1, podemos construir uma árvore  $T$  de cliques maximais do grafo e uma família  $\mathcal{T}$  de subárvores desta árvore, como exemplificado pela Figura 4.2.

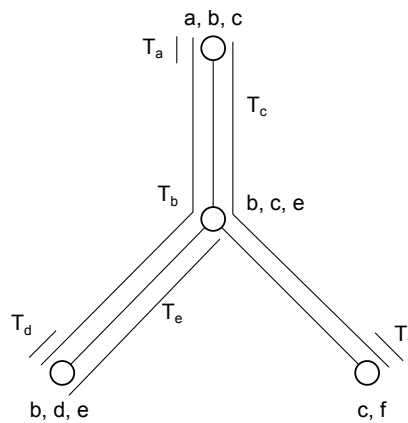


Figura 4.2: Árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{T}$  de subárvores de  $T$ .

Uma informação relevante a esta árvore  $T$  é que, devido ao fato de cada nó representar uma clique maximal do grafo cordal, ela terá no máximo  $|V(G)|$  nós, a quantidade máxima de cliques maximais que um grafo cordal possui [6].

Rosgen [12] mostra que  $\varphi(G) \leq 2n$ , argumentando que todo grafo cordal possui no máximo  $n$  cliques maximais e que ao incluirmos um elemento exclusivo em cada

conjunto temos uma representação overlap com no máximo este tamanho. Apresentamos a seguir duas novas formas de obter representações overlap de grafos cordais com tamanho inferior ao limite superior proposto anteriormente por Rosgen.

#### 4.1.1 Limite a partir do esquema de eliminação perfeito

Nesta seção apresentamos uma forma de utilizar o esquema de eliminação perfeito para construir uma representação overlap de um grafo cordal.

Dado um grafo  $G$  cordal com clique máxima com  $w$  vértices, encontramos um esquema de eliminação perfeito  $\sigma' = [v'_1, v'_2, \dots, v'_v]$  de  $G$  onde os vértices desta clique de tamanho  $w$  se encontram no fim da ordem. O Teorema 4.1 nos garante que sempre há um vértice simplicial fora desta clique de tamanho  $w$  e portanto este esquema de eliminação perfeito desejado pode ser obtido. Após encontrarmos esta ordem, a invertemos, gerando a nova ordem  $\sigma = [v_1, v_2, \dots, v_v]$ , onde  $v_i = v'_{n-i+1}$ .

Ao construir a representação overlap  $\mathcal{C}$  de  $G$ , cada conjunto  $S_i$  está associado ao vértice  $v_i$ ,  $i$ -ésimo vértice de  $\sigma$ . Iniciamos construindo uma subfamília com a propriedade overlap para os  $w$  primeiros vértices da ordem, visto que são uma clique de tamanho  $w$ . Esta subfamília tem tamanho  $\varphi(K_w)$ .

Para cada vértice  $i > w$  de  $\sigma$  temos  $S_i = \{\varphi(K_w) + 2(i - w) - 1, \varphi(K_w) + 2(i - w)\}$ . Após construir  $S_i$ , para todo vértice  $v_j$ ,  $j < i$  tal que  $v_j v_i \in E(G)$ , seu conjunto  $S_j$  é alterado para  $S_j := S_j \cup \{\varphi(K_w) + 2(i - w) - 1\}$ .

A Figura 4.3 mostra um exemplo de construção de uma representação overlap de tamanho 9 para o grafo mostrado anteriormente na Figura 4.1, com o esquema de eliminação perfeito  $\sigma = [e, c, b, a, d, f]$ .

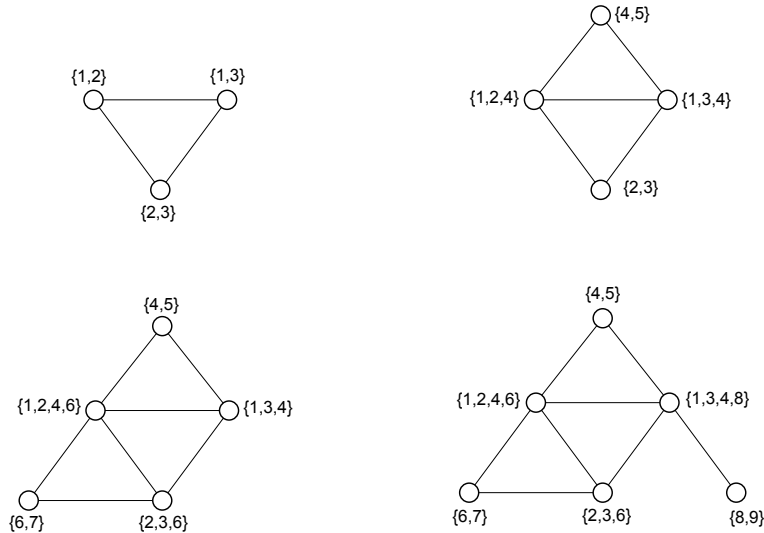


Figura 4.3: Construção de representação overlap  $\mathcal{C}$  do grafo da Figura 4.1.

Este processo produz uma família de conjuntos de tamanho  $2(n - w) + \varphi(K_w)$ . Vamos agora mostrar que a família de conjuntos gerada através deste processo é

uma representação overlap de um grafo cordal.

**Teorema 4.4** *Se  $G$  é cordal então ele possui uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de tamanho  $2(n - w) + \varphi(K_w)$ , onde  $w$  é o tamanho da clique máxima de  $G$ .*

*Prova:* Seja  $\sigma = [v_1, \dots, v_n]$  o esquema de eliminação perfeito do grafo cordal  $G$  usado no processo apresentado anteriormente para construir a família de conjuntos  $\mathcal{C}$ .

Os primeiros  $w$  elementos de  $\sigma$  formam uma clique e uma representação overlap de tamanho  $\varphi(K_w)$  para estes vértices é uma representação ótima desta clique induzida.

A cada construção de um conjunto  $S_i$ ,  $i > w$ , associado ao  $i$ -ésimo vértice de  $\sigma$ , todos os vértices  $v_j$  adjacentes a  $v_i$  formam uma clique, de forma que podemos incluir o elemento  $\varphi(K_w) + 2(i - w) - 1$ , pertencente a  $S_i$ , nos conjuntos associados aos vértices vizinhos de  $v_i$  que aparecem antes de  $v_i$  em  $\sigma$ , pois eles são uma clique induzida e a inclusão deste elemento não altera a relação de overlap já existente entre os pares de conjuntos associados a este vértice. Ademais, este elemento incluído cria a relação de overlap entre estes conjuntos e  $S_i$ .

Fazendo esta construção de conjuntos para todos os vértices em  $\sigma$ , criamos então uma representação overlap do grafo cordal  $G$  com tamanho  $2(n - w) + \varphi(K_w)$ . ■

Podemos rapidamente verificar que esta representação overlap tem tamanho menor que duas vezes o número de vértices de um grafo cordal. De fato, para que esta representação overlap tivesse tamanho maior ou igual a  $2n$ , o número de overlap de  $K_w$  deveria ser superior a  $2w$ , algo que não acontece pelo Teorema 3.13. Portanto, esta representação overlap tem tamanho menor que a apresentada anteriormente por Rosgen.

### 4.1.2 Limite a partir da família de subárvores

Nesta seção apresentamos nossa segunda forma de obter uma representação overlap de um grafo cordal  $G$ . Nesta construção utilizamos uma família  $\mathcal{T}'$  de subárvores de uma árvore  $T'$ , árvore que  $G$  é grafo de interseção, de acordo com o Teorema 4.3.

A árvore  $T'$  possui  $f$  nós folha. Consideramos que  $T'$  está enraizada em um dos nós folha. Para cada subárvore  $T'_i$  de  $\mathcal{T}'$ , definimos o início de  $T'_i$  como o primeiro nó da subárvore encontrado ao percorrer  $T'$  a partir de sua raiz. Tomando novamente o grafo da Figura 4.2, se definimos o nó  $abc$  como raiz de  $T'$ , o nó  $bce$  será o início da subárvore  $T'_e$ . Entretanto, se a raiz de  $T'$  for o nó  $bde$ , este mesmo nó será o início de  $T'_e$ .

A partir de  $T'$  e  $\mathcal{T}'$ , construímos uma nova árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{T}$  de subárvores de forma que  $G$  também seja grafo de interseção desta família  $\mathcal{T}$ . Esta árvore é criada a partir de uma sequência de alterações em  $T'$  que não alteram

as relações entre os pares de subárvores  $T_i$  e  $T_j$  de  $\mathcal{T}$ , criados a partir do par de subárvores  $T'_i$  e  $T'_j$  de  $\mathcal{T}'$ .

Com exceção da raiz, para cada nó folha  $u$  de  $T'$  criamos um novo nó  $v$ , adjacente apenas a  $u$ . Este novo nó  $v$  será o novo nó folha em  $T$  e  $u$  passa a ser um nó interno. Entretanto, não alteramos nenhuma subárvore de  $\mathcal{T}$ .

Após essa extensão dos nós folhas, estendemos os nós internos e a raiz de acordo com a seguinte condição: se em  $T'$  algum nó  $u$  é início de  $k$  subárvores,  $k \geq 2$ , em  $T$  transformamos este nó  $u$  em um caminho  $P_k$ , de  $k$  nós. Para cada subárvore  $T'_i$  cujo nó  $u$  é início em  $T'$ , em  $T$  estendemos a subárvore  $T'_i$  de modo que cada subárvore estendida  $T_i$  tenha início em um nó diferente de  $P_k$ . Cada subárvore  $T'_j$  de  $T'$ , que contém o nó  $u$  mas seu início é outro nó, seu nó  $T_j$  em  $T$  contém todo o caminho  $P_k$ . Esta extensão não altera as interseções entre os pares de subárvores que contenham o nó  $u$  pois um dos nós de  $P_k$  pertence a todas estas subárvores e portanto estes pares de subárvores terão interseção entre si.

A esta nova árvore  $T$  atribuímos um rótulo exclusivo a cada nó. Estes rótulos são utilizados para construir as famílias de conjuntos.

A Figura 4.4 mostra na esquerda a árvore  $T'$ , formada pelas cliques maximais do grafo da Figura 4.1 e na direita a árvore  $T$ , após o processo de extensões. Note que neste exemplo somente a raiz de  $T'$  deve ser estendida, pois é o único vértice de  $T'$  que é início de mais de uma subárvore de  $\mathcal{T}'$ .

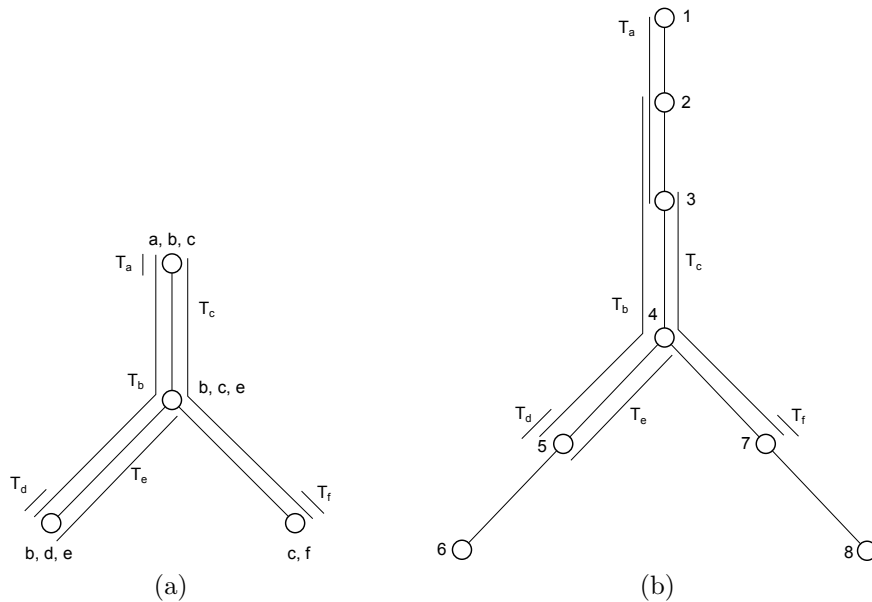


Figura 4.4: Árvore  $T'$  e família  $\mathcal{T}'$  e árvore resultante das extensões  $T$  com família  $\mathcal{T}$ .

Como cada subárvore de  $\mathcal{T}$  iniciará em um nó único e todo nó interno da árvore é início de alguma subárvore, a árvore  $T$  terá  $n + f - 1$  nós. A partir desta árvore construímos uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  que seja representação overlap do grafo  $G$ .

O conjunto  $S_v$  é formado pelo rótulo do nó início de  $T_v$  e pelos rótulos dos nós de  $T$  que, partindo da raiz, se encontram depois da subárvore  $T_v$ . Através do grafo da Figura 4.4 e da família  $\mathcal{T}$  dada como exemplo, chegamos na seguinte família  $\mathcal{C}$  de conjuntos:

$$S_a = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$S_b = \{2, 6, 7, 8\}$$

$$S_c = \{3, 5, 6, 8\}$$

$$S_d = \{5, 6\}$$

$$S_e = \{4, 6, 7, 8\}$$

$$S_f = \{7, 8\}$$

Podemos verificar rapidamente que  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de tamanho 8 para o grafo da Figura 4.4.

Vamos provar agora que esta construção sempre gera uma família de conjuntos que seja representação overlap de um grafo cordal. Para isto, é útil considerar as possibilidades de posições relativas de duas subárvores  $T_u$  e  $T_v$  na representação de interseção considerada, como mostrado na Figura 4.5.

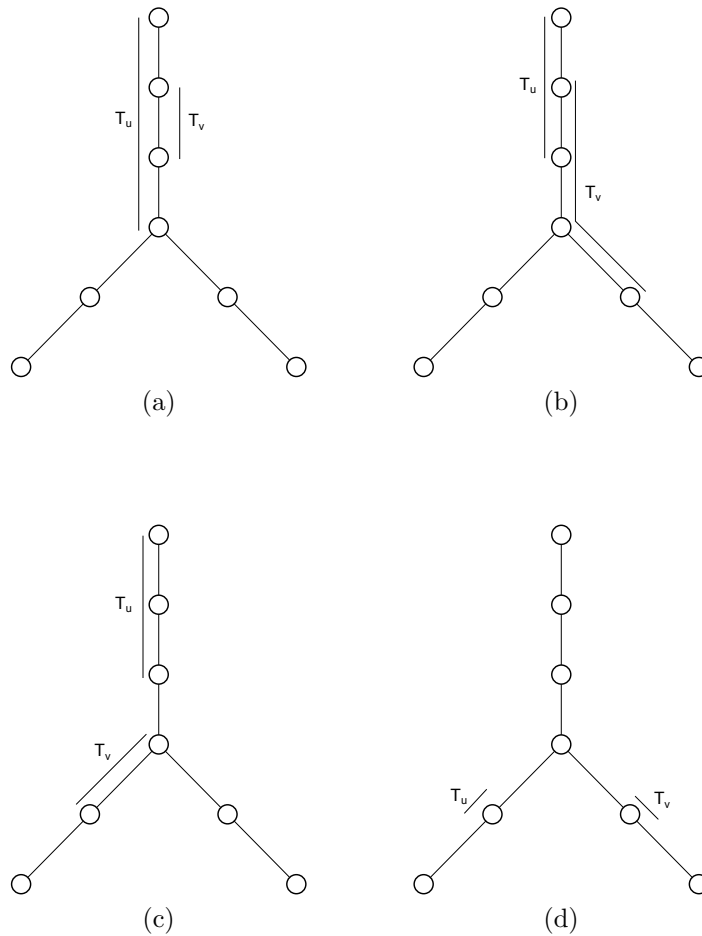


Figura 4.5: Os quatro relacionamentos entre duas subárvores de uma árvore  $T$ .

**Teorema 4.5** *Seja  $G$  um grafo cordal e uma árvore estendida  $T$ , da qual  $G$  é grafo de interseção. Se  $T$  tem  $f$  folhas, então  $G$  tem representação overlap de tamanho  $n + f - 1$ .*

*Prova:* Seja  $(T, \mathcal{T})$  uma representação em subárvores de  $G$  com a propriedade apresentada anteriormente, isto é,  $T$  é uma subárvore estendida de uma árvore  $T'$  de acordo com o Teorema 4.3. Seja  $\mathcal{C}$  uma família de conjuntos construída a partir da família  $\mathcal{T}$  de subárvores de  $T$ , como mostrado anteriormente.

Para mostrar que dois conjuntos  $S_u$  e  $S_v$  têm overlap se e somente se as subárvores  $T_u$  e  $T_v$  se intersectam, veremos as três possibilidades de relação entre subárvores em  $T$  e como ficam as relações entre seus respectivos conjuntos formados:

Se  $T_v \subset T_u$ : Como  $T_u$  e  $T_v$  se iniciam em nós diferentes de  $T$ , então cada conjunto terá um elemento exclusivo na relação, o seu rótulo início, de forma que um conjunto não contém o outro. Os rótulos relativos aos nós folhas garantem uma interseção não vazia entre os conjuntos de forma que  $S_u \not\propto S_v$ .

Se  $T_u \not\propto T_v$ : Como  $T_u$  e  $T_v$  se iniciam em nós diferentes de  $T$ , vamos supor sem perda de generalidade que o início de  $T_v$  é um nó de  $T_u$ . Então cada conjunto terá um elemento exclusivo na relação, seu rótulo início, de forma que nenhum dos dois conjuntos contém o outro. Os rótulos relativos aos nós folhas garantem uma interseção não vazia entre os conjuntos de forma que  $S_u \not\propto S_v$ .

Se  $T_u \cap T_v = \emptyset$ : Podemos ter o caso em que o início de uma das subárvores, sem perda de generalidade  $T_v$ , ocorre em um nó que não pertence à subárvore  $T_u$ , que tem início mais próximo à raiz. Desta forma temos que  $S_v \subseteq S_u$ . Caso as duas subárvores tenham início em ramificações diferentes da árvore, os rótulos dos nós nos conjuntos serão diferentes, de forma que  $S_u \parallel S_v$ . ■

Podemos perceber rapidamente que esta representação overlap tem tamanho menor que duas vezes o número de vértices do grafo pois, se fosse igual, a quantidade de nós folhas na árvore  $T$  deveria ser superior à quantidade de vértices do grafo. Entretanto, como sabemos que um grafo cordal possui no máximo  $n$  cliques maximais, a árvore  $T$  do Teorema 4.3 terá no máximo  $n$  nós,  $n - 1$  folhas no máximo. Estendendo estas folhas, passamos a ter no máximo  $2n - 1$  nós em  $T$ , construindo uma representação overlap de tamanho inferior ao limite superior proposto anteriormente por Rosgen.

### 4.1.3 Comparando as representações - grafos de partição

Apresentamos anteriormente duas formas de gerar uma representação overlap de um grafo cordal baseadas em propriedades existentes nestes grafos. Em muitos casos o tamanho da representação overlap construído através da família de subárvores é

inferior ao tamanho da representação overlap através do esquema de eliminação perfeito.

Nesta seção abordamos o caso dos grafos de partição, classe de grafos definida por Chvátal e Hammer [6], que costuma ser justamente um caso onde a representação overlap construída através do esquema de eliminação perfeito tem tamanho inferior à representação overlap construída através da família de subárvores. Alguns grafos desta classe também serão usados como exemplo de grafo cordal com número de overlap superior ao seu número de vértices.

**Definição 4.4** *Um grafo  $G$  é **de partição** se  $V(G)$  pode ser particionado em uma parte completa,  $K$ , e uma parte independente,  $S$ .*

Todo grafo de partição é cordal, já que nenhum ciclo de tamanho maior que três pode ser particionado da forma apresentada na Definição 4.4. Referente a interseção de subárvores de uma árvore, temos o resultado a seguir, de McMorris e Shier [6].

**Teorema 4.6** *O grafo  $G$  é de partição se e somente se  $G$  é o grafo de interseção de uma família de subestrelas distintas de uma estrela.*

A Figura 4.6 mostra um exemplo de grafo de partição e uma respectiva família de subárvores de uma estrela.

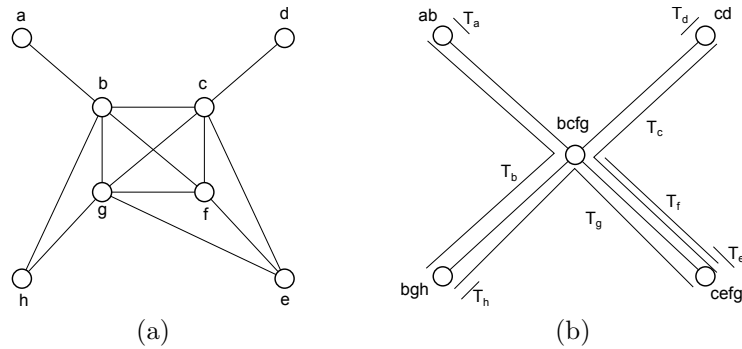


Figura 4.6: Grafo de partição e uma respectiva família de subárvores de estrela.

Podemos observar que cada vértice da parte estável pertence a apenas uma clique maximal, e portanto família de subárvores definida pelo Teorema 4.3 terá  $|S|$  nós folhas, cada um relacionado à clique maximal de cada vértice de  $S$ , além de um nó interno relacionado à clique formada por  $K$ . A representação overlap atribuída pelo método descrito no Teorema 4.5 tem tamanho  $|K| + 2|S| - 1 = n + |S| - 1$ .

Ao lembrarmos que a parte  $K$  é a clique máxima de  $G$ , aplicamos o Teorema 4.4, construindo uma representação overlap de tamanho  $2|S| + \varphi(K_{|K|})$ .

Neste momento podemos perceber rapidamente que uma representação overlap construída a partir do esquema de eliminação perfeito tem tamanho menor em

relação à construída a partir da família de subárvores de uma árvore quando a parte completa tem muitos vértices. Verificando quando  $\varphi(K_{|K|}) + 2|S| \leq |K| + 2|S| - 1$ , confirmamos que ocorre quando  $\varphi(K_{|K|}) \leq |K| - 1$ .

Desta forma, será vantajoso utilizar a representação overlap através do esquema de eliminação perfeito sempre que o número de overlap da parte completa do grafo de partição for menor que o tamanho desta parte. Isto acontece quando a parte completa tem pelo menos sete vértices, com número de overlap igual a cinco.

#### 4.1.4 Cota inferior para o número de overlap de cordais

Uma hipótese levantada sobre o número de overlap de grafos cordais se referia à possibilidade do número de overlap de grafos desta classe ser limitada superiormente por no máximo seu número de vértices. Nesta seção mostramos uma família de grafos cordais que contradiz esta hipótese. Os grafos desta família também são de partição.

**Definição 4.5** *O grafo  $M_k$  é um grafo de partição com  $k$  vértices em sua parte completa e, para cada par de vértices de sua parte completa, existe exatamente um vértice na parte estável adjacente apenas ao par.*

Vemos rapidamente que a parte estável do grafo  $M_k$  possui exatamente  $\binom{k}{2}$  vértices e portanto o grafo  $M_k$  tem  $\binom{k}{2} + k$  vértices. Esta família de grafos  $M_k$ , quando  $k > 3$ , é o nosso contra-exemplo para a hipótese levantada anteriormente.

**Lema 4.7** *Se  $k \geq 3$ , então  $\varphi(M_k) = 2\binom{k}{2} - 1$ .*

*Prova:* Seja  $(K, S)$  uma partição de  $M_k$ , onde  $K$  é a parte completa e  $S$  a parte estável. Seja também  $\mathcal{C}$  uma representação overlap ótima de  $M_k$ .

Se todo conjunto associado a vértice de  $S$  for minimal em  $\mathcal{C}$ ,  $|\mathcal{C}| \geq 2\binom{n}{2}$ . Logo, ao menos um conjunto associado a vértice de  $S$  deve ser não minimal em  $\mathcal{C}$ . Seja  $S_z$  este conjunto.

Como  $M_k - N[z]$  é conexo, se houver algum outro conjunto  $S_w$  associado a vértice de  $S$  não minimal em  $\mathcal{C}$ , temos  $S_w = S_z$ , contradição pois não temos um par de gêmeos falsos. Logo, temos apenas um conjunto não minimal em  $\mathcal{C}$  e desta forma vemos que  $|\mathcal{C}| \geq 2\binom{n}{2} - 2$ .

Seja  $U_{M_k - N[z]}$  o conjunto-base da subfamília de  $\mathcal{C}$  formada pelos conjuntos associados aos vértices de  $M_k - N[z]$ . Seja também os conjuntos  $S_k$  e  $S_{k-1}$ , associados aos vértices de  $N[z]$ . Para que  $S_z \not\propto S_{k-1}$  e  $S_z \not\propto S_k$ , ambos os conjuntos não podem ser formados apenas por elementos de  $U_{M_k - N[z]}$ . Logo,  $|\mathcal{C}| \geq 2\binom{n}{2} - 1$ .

Vamos agora apresentar uma família de conjuntos com este tamanho e que seja uma representação overlap de  $M_k$ .



Com exceção de  $S_z$ , para cada vértice  $v \in S$  tal que  $\{i, j\} = N(v)$  e  $\{i, j\} \subseteq X$ , temos  $S_v = \{x_{i,j}, y_{i,j}\}, i < j$ . Para o vértice  $i \in K$ , seu conjunto associado é  $S_i = \{y_{i,j}, i < j\} \cup \{y_{j,i}, j < i\}$ . Verificamos que  $S_i \not\subseteq S_v$  para todo  $v \in N(i)$ . Como  $y_{i,j} \in S_i$  e  $y_{i,j} \in S_j$ ,  $S_i \not\subseteq S_j$ .

Seja o conjunto-base  $U_{M_k - N[z]}$ . Para o vértice  $z \in S$ ,  $S_z = U_{M_k - N[z]}$ . Como  $y_{k-1,k} \notin S_z$ , temos que  $S_{k-1} \not\subseteq S_z$  e  $S_k \not\subseteq S_z$ .

Desta forma, vemos que o número de overlap do grafo  $G$ , com  $k \geq 3$ , é igual a  $2\binom{k}{2} - 1$ . ■

O grafo  $S_3$  é o grafo de Hajós e seu número de overlap é 5, valor abaixo da quantidade de vértices do grafo. Entretanto, a partir do  $S_4$  temos o número de overlap dessa família superior à quantidade de vértices do grafo. A Figura 4.7 mostra a representação overlap do grafo  $S_4$  dada através do Lema 4.7.

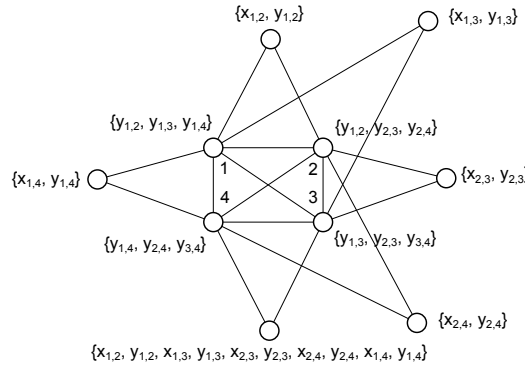


Figura 4.7: Representação overlap do grafo  $S_4$  dada através do Lema 4.7.

Utilizando a construção da família de conjuntos através do esquema de eliminação perfeito deste grafo da família, temos uma representação com  $\varphi(K_k) + 2\binom{n}{2}$ , de forma que esta atribuição utiliza  $\varphi(K_k) + 1$  elementos a mais que em relação a uma representação overlap ótima. Caso criemos uma representação overlap para o grafo através da construção pela família de subárvores, a família de conjuntos tem tamanho  $k + 2\binom{k}{2} - 1$ , utilizando  $k$  elementos a mais que uma representação overlap ótima.

Desta forma, vemos que as construções de representações overlap para grafos cordais apresentadas neste trabalho, apesar de não apresentarem representação overlap ótima, nos entrega uma representação overlap próxima do ótimo para certos grafos cordais.

## 4.2 Grafos de limiar

Os Grafos de limiar grafos de partição e portanto, cordais. Desta forma, já conhecemos duas formas de construir uma representação overlap para os grafos desta

classe. Entretanto, um grafo de limiar possui uma propriedade estrutural interessante que, sendo bem explorada, consegue produzir uma representação overlap de tamanho menor que as representações overlap de grafos cordais. Vamos inicialmente apresentar esta propriedade, na Definição 4.6.

**Definição 4.6** Um conjunto  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de vértices possui a propriedade da **vizinhança aninhada** se  $N(v_1) \subseteq N(v_2) \subseteq \dots \subseteq N(v_k)$ .

Os grafos de limiar foram definidos por Chvátal e Hammer [9], que também apresentaram a caracterização usada por nós, dada na Definição 4.7.

**Definição 4.7** O grafo  $G$  é **de limiar** se  $G$  é de partição e os vértices da sua parte estável possuem a propriedade da vizinhança aninhada.

Podemos ver rapidamente que existe a possibilidade de um grafo de limiar ser particionadoem parte completa e estável de diversas formas. Este é o caso em que temos algum vértice  $v$  de  $S$  vizinho a todos os vértices de  $K$ . Poderíamos formar uma nova partição  $(K \cup \{v\}, S \setminus \{v\})$ , também composta por uma parte estável e outra parte completa. Desta forma, sempre que nos referirmos nesta seção a uma parte completa ela será maximal.

A Figura 4.8 mostra um exemplo de grafo de limiar. Podemos notar que quando removemos do grafo o vértice  $v$  de maior grau da parte estável e sua vizinhança, todos os outros vértices da parte estável se tornam vértices isolados.

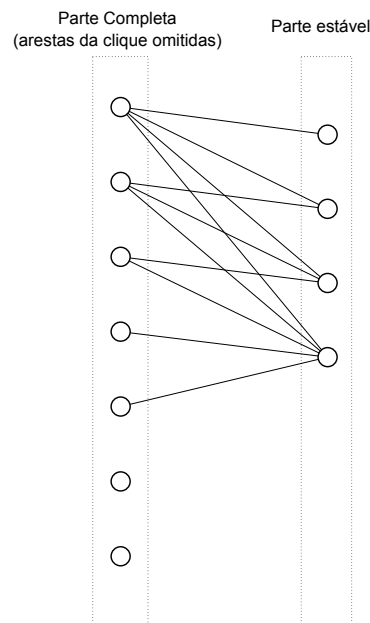


Figura 4.8: Exemplo de grafo de limiar e sua bipartição.

Da mesma forma, se removemos do grafo o segundo vértice de maior grau da parte estável e sua vizinhança, com exceção do vértice de maior grau todos os outros

vértices da parte estável se tornam vértices isolados. Este fato ocorre com todos os vértices da parte estável com exceção do vértice de grau um.

Através deste fato, podemos em uma representação overlap deste grafo associar estes vértices do conjunto estável a conjuntos de forma que para todo par de conjuntos, a relação entre eles será de continência. O Teorema 4.8 apresenta uma forma de construir uma representação overlap utilizando esta propriedade.

**Teorema 4.8** *Se  $G(K, S, E)$  é um grafo de limiar, então  $\varphi(G) \leq \varphi(K_{|K|}) + |S|$ .*

*Prova:* Para provar este limite superior, vamos apresentar uma representação overlap do tamanho proposto.

Os conjuntos associados aos vértices de  $K$  são construídos de acordo com uma representação overlap ótima de grafo completo de  $|K|$  vértices. Definimos como  $U_K$  o conjunto-base dessa subfamília de conjuntos associados aos vértices da parte completa.

Seja  $|S| = s$ . Ordenamos os vértices de acordo com a vizinhança, de forma que  $N(v_s) \subset N(v_{s-1}) \subset \dots \subset N(v_1)$ . Vamos fazer uma construção iterativa dos conjuntos associados aos vértices de  $S$ , alterando os conjuntos associados aos vértices de  $K$  quando necessario.

Definimos  $S_{v_1} = U_K$  e para todo  $u \in N(v_1)$ , alteramos seu conjunto tal que  $S_u := S_u \cup \{|U_K| + 1\}$ . A alteração no conjunto  $S_u$  não altera suas relações com os outros conjuntos, além de passarmos a ter  $S_u \not\subseteq S_{v_1}$ .

Para cada vértice  $v_i$ ,  $2 \leq i \leq s$ , definimos  $S_{v_i} = U_K \cup \{|U_K| + 1, \dots, |U_K| + i - 1\}$  e para todo  $u \in N(v_i)$ , alteramos seu conjunto  $S_u := S_u \cup \{|U_K| + i\}$ . Para todo  $S_{v_j}$ ,  $j < i$ , se  $S_u \not\subseteq S_{v_j}$  antes da alteração, a relação não se altera após alterar o conjunto  $S_u$ . Caso  $S_u \subset S_{v_j}$ ,  $uv_j \notin E(G)$  e portanto  $uv_i \notin E(G)$ , logo  $S_u$  não foi alterado e a relação entre o par de conjuntos se mantém.

A cada passo da construção iterativa incluímos um novo elemento no conjunto-base da família e portanto esta família de conjuntos é uma representação overlap de  $G$  de tamanho  $\varphi(|K|) + |S|$ . ■

A Figura 4.9 apresenta um exemplo de representação overlap para um grafo de limiar obtida de acordo com a prova do Teorema 4.8.

Comparando esta construção de uma representação overlap para grafos de limiar, vemos que ela tem efetivamente tamanho menor que as construções de representação overlap que podem ser dadas a um grafo de limiar apenas pelo fato de ser também um grafo cordal.

Podemos ver rapidamente que para um grafo de limiar  $G(K, S, E)$ , uma árvore  $T$  com família  $\mathcal{T}$  de subárvores das quais  $G$  é um grafo de interseção,  $T$  é uma estrela de  $|S|$  folhas [6]. Desta forma, utilizando a atribuição dada através da família de

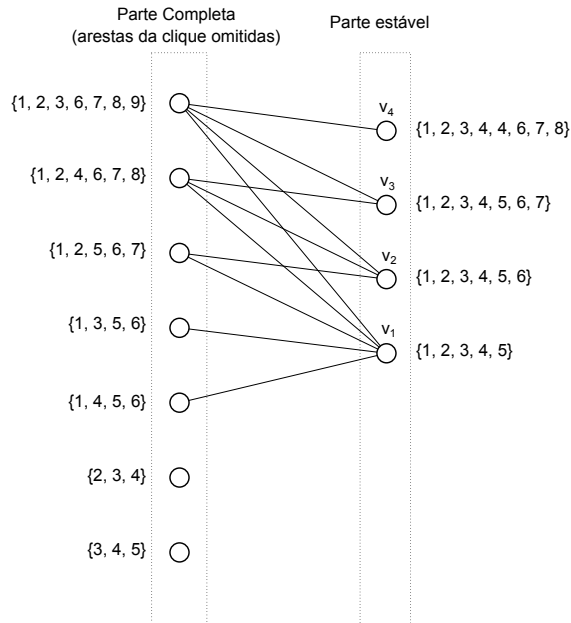


Figura 4.9: Representação overlap para o grafo da Figura 4.8.

subárvores, teremos uma representação overlap de tamanho  $|K| + |S| + |S| - 1$ . Utilizando a construção a partir do esquema de eliminação perfeito, temos uma representação overlap de tamanho  $\varphi(K_{|K|}) + 2|S|$ .

A construção feita nesta seção é muito próxima da atribuição construída através do esquema de eliminação perfeito, mas como as vizinhanças são aninhadas é possível fazer uma mudança de forma que adicionemos um único elemento para cada vértice da parte estável, ao invés de dois. Esta mudança, que não é possível de ser feita em qualquer grafo de partição, prova que para grafos de limiar de  $n$  vértices onde a parte completa possua mais que cinco vértices temos que  $\varphi(G) < n$ .

Como não há vértice na parte estável que seja adjacente a todos os vértices da parte completa, vemos rapidamente que  $\alpha(G) = |S| + 1$  e portanto  $\varphi(G) \geq |S| + 3$ . Este limite inferior do número de overlap de grafos de limiar nos garante que o número de overlap de grafos desta classe está próximo do limite superior proposto neste trabalho.

Encerramos a seção apresentando um grafo de limiar cujo número de overlap é inferior às três representações overlap propostas a ela. A Figura 4.10 mostra uma representação overlap ótima de  $G$ , de tamanho 4. Utilizando a construção através do esquema de eliminação perfeito, chegaríamos a uma representação overlap de tamanho 6. Caso utilizássemos a construção através de famílias de subárvores de uma árvore, o tamanho da família seria 5. Utilizando a construção feita especificamente para grafos de limiar, também conseguiríamos uma representação overlap de tamanho 5.

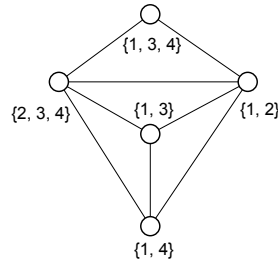


Figura 4.10: Grafo de limiar com número de overlap inferior aos limites propostos.

### 4.3 Grafos de intervalo

Os grafos de intervalo, assim como os grafos de limiar, formam uma subclasse dos grafos cordais amplamente estudada. Rosgen [12] prova que qualquer grafo de intervalo de  $n$  vértices admite uma representação overlap de tamanho  $n + 1$ . Nesta seção mostramos que qualquer grafo de intervalo de  $n \geq 3$  vértices admite uma representação overlap de tamanho  $n$ . Para chegar neste resultado fazemos uma pequena alteração na forma de construir os conjuntos através de uma família de subárvores de uma árvore.

Iniciamos a seção apresentando a definição de grafos de intervalo.

**Definição 4.8** *Um grafo  $G$  é de **intervalo** se  $G$  é grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real.*

A Figura 4.11(a) apresenta um exemplo de grafo de intervalo e uma respectiva família de intervalos da reta real para este grafo. A seguir apresentamos o Teorema 4.9, que usaremos para construir uma representação overlap dos grafos de intervalo.

**Teorema 4.9** *Seja  $G$  um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é de intervalo;
2.  $G$  é cordal e de co-comparabilidade;
3. Existe um caminho  $T$  cujos nós representam as cliques maximais de  $G$  tal que, para cada vértice  $v$  de  $G$ , o subgrafo induzido  $T_v$  de  $T$  induzido pelos nós que representam as cliques maximais que  $v$  está contido é um caminho.

A Figura 4.11(b) mostra um caminho  $T$  formado pelas cliques maximais de  $G$  e sua família de subcaminhos para o grafo da Figura 4.11(a).

Podemos rapidamente verificar que os grafos completos são grafos de intervalo. Basta associar o mesmo intervalo a todos os vértices do grafo e desta forma todas as adjacências serão representadas como intervalos se intersectando. Entretanto, não

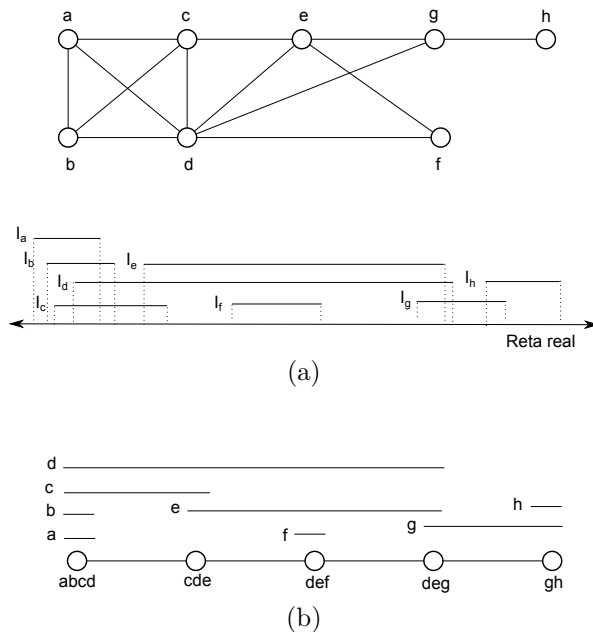


Figura 4.11: (a) Grafo de intervalo  $G$  e uma família de intervalos da reta real que representam  $G$ . (b) Caminho  $T$  e família de subcaminhos de  $G$ .

consideraremos os grafos completos nesta seção, visto que são uma família de grafos cujo número de overlap já é conhecido. A construção mostrada mais a frente não funcionará para o caso dos grafos completos.

Pelo fato dos grafos de intervalo formarem uma subclasse dos grafos de co-comparabilidade, o limite superior para o número de overlap estabelecido por Rosgen é um corolário direto da prova do número de overlap de grafos de co-comparabilidade. Na Subseção 4.1.2 apresentamos uma forma de construir uma representação overlap para grafos cordais de tamanho  $n + f - 1$ . Através deste resultado, conseguimos também o limite superior de  $n + 1$  para grafos de intervalo, já que a árvore  $T$  dos grafos de intervalo é um caminho e portanto possui apenas duas folhas.

Vamos utilizar a mesma ideia apresentada para grafos cordais, que consiste na construção de uma família de conjuntos através da representação de interseção de subárvores da árvore, para construirmos uma representação overlap para grafos de intervalo. Como um caminho e seus subcaminhos são árvores e subárvores, o processo de construção da árvore será basicamente o mesmo: enraizamos o caminho em um nó folha e estendemos os nós, com exceção do nó raiz, de forma a termos apenas um subcaminho com início em cada nó.

A mudança na construção, a ser apresentada no Teorema 4.10 consiste em termos mais de um subcaminho com início na raiz do caminho.

**Teorema 4.10** *Se  $G$  é um grafo de intervalo com  $n \geq 3$  vértices, então  $\varphi(G) \leq n$ .*

*Prova:* Se  $G$  é um grafo completo, definimos uma representação overlap para  $G$  de acordo com a atribuição ótima para grafos completos.

Se  $G$  não é completo, seja  $(T, \mathcal{T})$  uma representação em subcaminhos de  $G$ . Construímos uma família de conjuntos  $\mathcal{C}$  para  $G$  através da família  $\mathcal{T}$  de subcaminhos de  $T$  fazendo um processo semelhante ao visto na Subseção 4.1.2 para grafos cordais, com alteração nos subcaminhos que se iniciam na raiz de  $T$ .

Sabemos que o nó raiz possui pelo menos um subcaminho com início neste nó e que contém apenas o nó início. Este subcaminho está associado a um vértice simplicial do grafo. Como o grafo é conexo, existe pelo menos um subcaminho com início na raiz de  $T$  e que contém outros nós. Estendemos o nó raiz de  $T$  em um caminho de nós, de forma que o novo nó raiz tenha apenas subcaminhos associados a vértices simpliciais do grafo e exatamente um subcaminho associado a um vértice não simplicial.

Seja  $k$  o número de subcaminhos com início na raiz, ou seja, todos os subcaminhos associados a vértices simpliciais e um caminho associado a vértice não simplicial. A árvore  $T$  após as extensões possui exatamente  $n - k + 2$  nós.

A prova prossegue considerando dois possíveis casos para o número de caminhos que tem início na raiz de  $T$ .

Caso  $k = 2$ , com  $T_u$  associado a um vértice simplicial e  $T_v$  associado a um vértice não simplicial, criaremos todos os conjuntos de acordo com o processo descrito na Subseção 4.1.2, com exceção do conjunto  $S_u$  que será formado apenas pelos rótulos dos nós que não estão no subcaminho  $T_u$ . Esta família de conjuntos tem tamanho  $n$  e a Figura 4.12(a) ilustra esse caso.

O conjunto  $S_u$  não possui o elemento associado ao nó raiz, enquanto  $S_v$  possui. Já o conjunto  $S_v$  não possuirá pelo menos o elemento associado ao nó filho da raiz de  $T$ , enquanto o conjunto  $S_u$  conterà este elemento. Como o nó folha de  $T$  não pertence a nenhum subcaminho, ambos os conjuntos possuirão o elemento associado a este nó. Desta forma,  $S_u \not\propto S_v$ . Da mesma forma,  $S_u$  conterà todos os outros conjuntos de  $\mathcal{C}$  por construção. O conjunto  $S_v$  e todos os outros conjuntos da família  $\mathcal{C}$  foram construídos de acordo com a construção para subárvores de grafos cordais, de forma que as relações entre estes conjuntos já foram constatadas anteriormente. Concluimos portanto que,  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$ .

Caso  $k \geq 3$ , para cada subcaminho  $T_{u_i}$  associado a vértice simplicial, seu conjunto  $S_{u_i}$  será formado por um elemento exclusivo  $i$  e todos os elementos associados aos rótulos dos nós que não pertencem a este subcaminho. Este nó exclusivo garante a relação de overlap entre os pares de conjuntos deste tipo e cada conjunto  $S_{u_i}$  conterà todos os outros conjuntos associados a subcaminhos com início em outro nó. O conjunto  $S_v$ , associado ao subcaminho de um vértice não simplicial, será formado com os elementos exclusivos de todos os conjuntos  $S_{u_i}$  associados aos subcaminhos de vértices simpliciais e todos os elementos associados aos rótulos dos nós que não pertencem a este subcaminho. Podemos ver que  $S_{u_i} \not\propto S_v$  para todo  $u_i$ . Com relação

a qualquer outro conjunto  $S_z$  da família, podemos ver que  $S_z \not\cap S_v$  se e somente se  $T_v$  e  $T_z$  se intersectam. Desta forma, esta família  $\mathcal{C}$  é uma representação overlap de  $G$ . A Figura 4.12(b) ilustra esse caso.

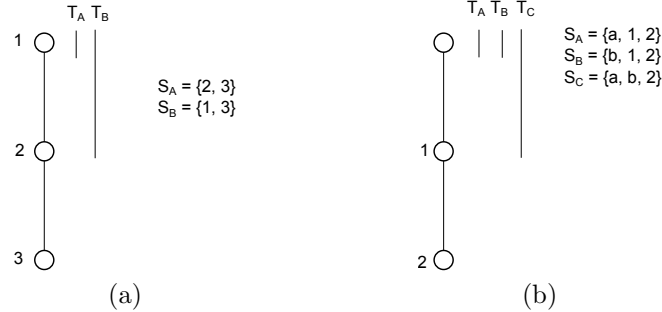


Figura 4.12: Ilustração da prova do Teorema 4.10 para os dois casos de  $k$ .

Em ambos os casos podemos ver que o conjunto-base da família tem tamanho  $n$ . No primeiro caso, a árvore possui  $n$  nós e usamos apenas elementos associados aos nós. Já no segundo caso, a árvore tem  $n - k + 2$ , mas não utilizamos o elemento associado ao nó raiz do grafo. Cada um dos  $k - 1$  conjuntos associados a um vértice simplicial acrescentam um elemento novo no conjunto-base da família, de forma que utilizamos  $n - k + 2 - 1 + k - 1 = n$  elementos no total. ■

A Figura 4.13 apresenta a construção de duas representações overlap para o grafo mostrado anteriormente na Figura 4.11. Em cada construção foi decidido enraizar o caminho em um nó folha diferente, de forma a contemplar os dois casos da prova do Teorema 4.10.

Encerramos esta seção argumentando que este limite superior para os grafos de intervalo é justo, sendo rapidamente confirmado com os grafos  $P_n$  com mais de 2 vértices. A verificação de que um  $P_n$  é grafo de intervalo é trivial, e o número de overlap destes grafos é igual a  $n$ , como visto anteriormente na Seção 3.1.

Outro grafo de intervalo que possui seu número de overlap igual ao número de vértices consiste em um grafo de partição de 4 vértices na parte completa e um vértice na parte estável, adjacente a apenas um vértice da parte completa. Este grafo, de 5 vértices, tem número de overlap 5 e portanto os caminhos não são os únicos grafos de intervalo igualando o limite superior do número de overlap para grafos de intervalo.

## 4.4 Grafos cadeia

Os grafos cadeia são grafos bipartidos que, assim como os grafos de limiar, apresentam a propriedade da vizinhança aninhada entre seus vértices. Nesta seção deter-



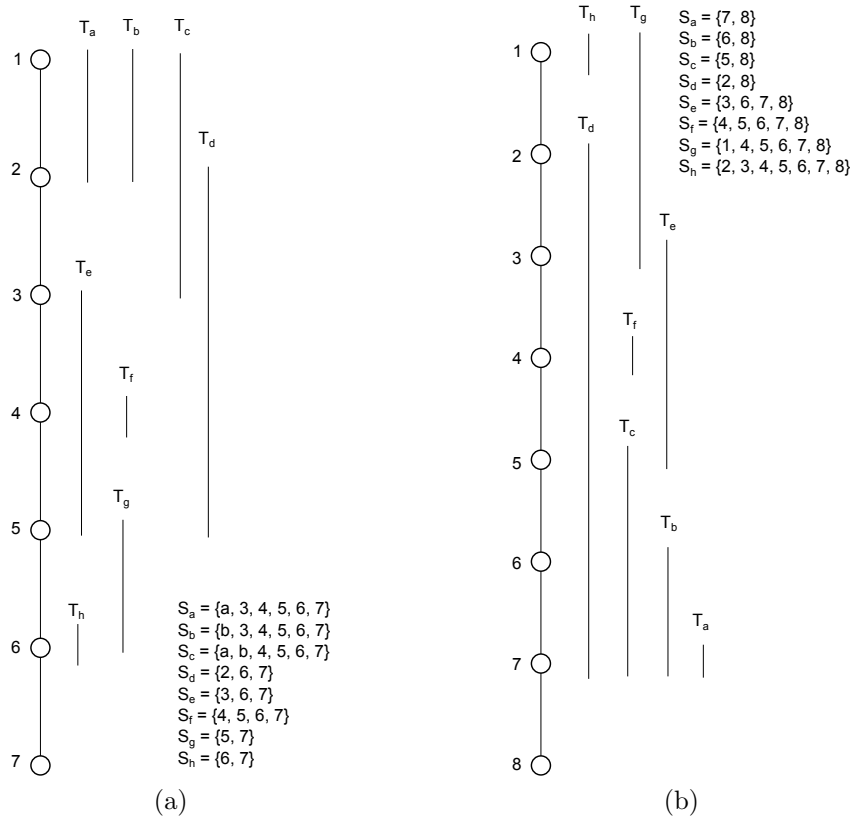


Figura 4.13: Duas representações overlap para o grafo da Figura 4.11.

minamos o valor exato do número de overlap para grafos desta classe e apresentamos uma representação overlap deste tamanho.

**Definição 4.9** Um grafo bipartido  $G = (X, Y, E)$  é *cadeia* se uma das partes estáveis possui a propriedade da vizinhança aninhada.

A Figura 4.14 mostra um grafo cadeia. Nos certificamos verificando as vizinhanças dos vértices de uma das partes do grafo:  $N(a) \subseteq N(b) \subseteq N(c) \subseteq N(d)$ . Podemos observar que os vértices da outra parte do grafo também possuem a propriedade da vizinhança aninhada, pois  $N(i) \subseteq N(h) \subseteq N(g) \subseteq N(f) \subseteq N(e)$ .

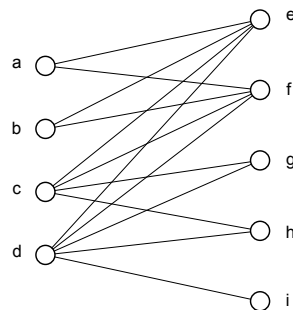


Figura 4.14: Exemplo de grafo cadeia.

Os grafos cadeia foram definidos por Yannakakis [9], dando originalmente o nome de grafos de diferença a esta classe. Yannakakis também prova o Lema 4.11, onde

mostra que este fato das duas partes estáveis de um grafo bipartido possuírem a propriedade da vizinhança aninhada não foi uma particularidade do exemplo da Figura 4.14.

**Lema 4.11** *Um grafo  $G = (V, E)$  é cadeia se e somente se existe uma bipartição de  $V(G)$  em partes estáveis  $X, Y$  de forma que os vértices de ambas as partes possuem a propriedade da vizinhança aninhada.*

*Prova:* Assuma que uma das partes, sem perda de generalidade  $X$ , não possua a vizinhança aninhada. Existem então dois vértices  $u$  e  $v$ , pertencentes a  $X$ , e dois outros vértices  $u'$  e  $v'$ , pertencentes a  $Y$ , de forma que temos  $u' \in N(u) \setminus N(v)$  e igualmente temos  $v' \in N(v) \setminus N(u)$ . Portanto, as arestas  $uv'$  e  $vu'$  não devem existir no grafo. Entretanto, como a parte  $Y$  possui a propriedade da vizinhança aninhada, sabemos que  $N(u') \subseteq N(v')$  ou  $N(v') \subseteq N(u')$  e em qualquer caso demanda a existência de uma das duas arestas  $uv'$  ou  $vu'$  no grafo. ■

Em sequência, definimos um grafo específico desta classe, que possui o maior número possível de vértices e não apresenta nenhum par de gêmeos falsos.

**Definição 4.10** *O grafo  $H_q$  é um grafo cadeia cujas partes possuem tamanho  $q$  e em cada parte não existem vértices com o mesmo grau.*

A Figura 4.15 mostra o grafo  $H_4$ . Notem que  $H_q$  tem  $2q$  vértices e  $\binom{q+1}{2}$  arestas. Podemos destacar também que  $H_1$  é o  $P_2$  e  $H_2$  é o  $P_4$ .

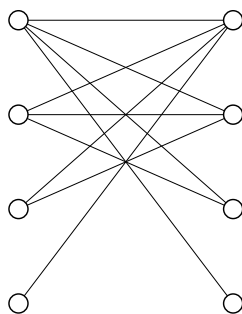


Figura 4.15: Exemplo de um grafo  $H_q$ , no caso o  $H_4$ .

Após apresentar os grafos  $H_q$ , mostramos a seguir que um grafo cadeia nada mais é que um grafo  $H_q$  com a inclusão de outros vértices gêmeos falsos de algum vértice de  $H_q$ .

**Lema 4.12** *Seja  $G$  um grafo cadeia. Se  $G$  não é isomorfo ao  $H_q$ , então  $G$  contém ao menos um par de vértices gêmeos falsos.*

*Prova:* Podemos notar que dois vértices pertencentes à mesma parte e com mesmo grau possuem a mesma vizinhança, caso contrário esta parte não teria a propriedade da vizinhança aninhada. Se as duas partes da partição de  $G$  não possuem a mesma quantidade de vértices, ao menos dois vértices da parte de maior quantidade de vértices têm o mesmo grau e conseqüentemente são um par de gêmeos falsos.

Caso as duas partes tenham a mesma quantidade de vértices, notamos que para não possuir gêmeos falsos, cada vértice da mesma parte precisa ter grau diferente entre 1 e o tamanho da parte. Mas desta forma temos um  $H_n$ . Portanto, existe em  $G$  ao menos um par de gêmeos falsos. ■

A Figura 4.16 apresenta um exemplo de grafo cadeia onde os vértices que possuem algum gêmeo falso estão destacados. O subgrafo induzido resultante da remoção destes vértices é um grafo  $H_q$ , no caso do exemplo um  $H_2$ . A partir deste momento, calcular o número de overlap de grafos cadeia se resume a calcular o número de overlap de um grafo  $H_q$ .

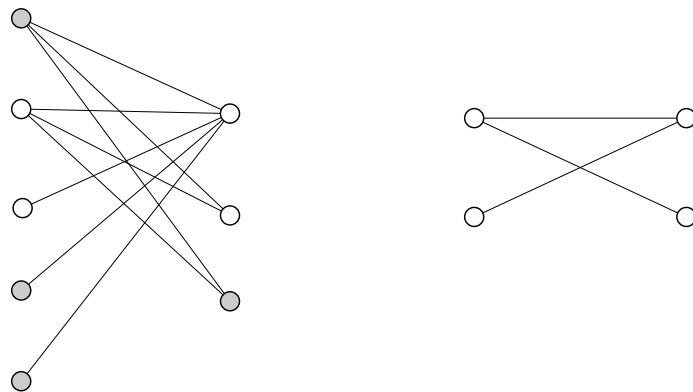


Figura 4.16: Grafo cadeia. Os vértices que possuem um gêmeo falso estão destacados.

A seguir apresentamos uma representação overlap para os grafos  $H_q$  e mostramos que esta representação overlap é ótima.

**Teorema 4.13** *Se  $q \geq 1$ , então  $\varphi(H_q) = q + 2$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo  $H_q$ . Verificamos que o conjunto estável máximo de  $H_q$  possui  $q$  vértices e de acordo com o Teorema 2.14 concluímos que  $\varphi(H_q) \geq q + 2$ . Vamos apresentar uma representação overlap de tamanho  $q + 2$  para o grafo  $H_q$ .

Para construir uma representação overlap  $\mathcal{C}$  de  $H_q$ , faremos uma construção iterativa de pares de conjuntos. A cada iteração, construímos um par de conjuntos  $S_{v_i}$  e  $S_{u_i}$ .

Para  $i = 1$ ,  $S_{v_1} = \{1, 2\}$  e  $S_{u_1} = \{2, 3\}$ . Para  $i = 2$ ,  $S_{v_2} = \{3, 4\}$  e  $S_{u_2} = \{1, 2, 3\}$ . Notemos que estes quatro conjuntos formam uma representação overlap ótima do grafo  $P_4$ .

Para  $3 \leq i \leq q$ ,  $S_{v_i} = S_{v_{i-1}} \cup \{i + 2\}$  e  $S_{u_i} = S_{u_{i-1}} \cup \{i + 1\}$ . Vamos agora verificar as relações entre os conjuntos.

Verificamos rapidamente que  $S_{v_i} \not\subseteq S_{u_i}$ . Para  $S_{v_i}$ , notamos que para  $2 < j < i$ ,  $S_{v_j} \subset S_{v_i}$  e que  $S_{v_i} \parallel S_{v_j}$ . Por fim, para  $j < i$ ,  $\{2\} \subseteq S_{v_i} \cap S_{u_j}$  e portanto  $S_{v_i} \not\subseteq S_{u_j}$ .

Avaliando o conjunto  $S_{u_i}$ , verificamos que para  $j < i$ ,  $S_{u_j} \subset S_{u_i}$  e  $S_{v_j} \subset S_{u_i}$ .

A cada formação de par de conjuntos  $S_{v_i}, S_{u_i}$ , o conjunto  $S_{v_i}$  tem overlap com todos os conjuntos  $S_{u_j}$ ,  $j \leq i$ , enquanto  $S_{u_i}$  tem overlap apenas com  $S_{v_i}$ . Estamos construindo iterativamente uma representação overlap de um grafo cadeia, incluindo um conjunto associado a um vértice adjacente a todos os vértices da outra parte estável e um conjunto associado a um vértice pendente.

Quando  $i = q$ , a família tem tamanho  $q + 2$ . ■

A Figura 4.17 exemplifica a construção iterativa de uma representação overlap ótima do grafo  $H_4$ . Na Figura 4.17(a) apresentamos o primeiro passo da iteração, que consiste na construção de uma representação overlap ótima do subgrafo  $H_2$ .

No segundo passo da iteração, representado pela Figura 4.17(b), construímos um novo par de conjuntos  $\{\{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$  de acordo com o Teorema 4.13. Reparemos que o conjunto  $\{3, 4, 5\}$  é associado a um vértice adjacente a todos os quatro vértices da outra parte estável e o conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  é associado a um vértice adjacente apenas ao seu par construído na iteração atual.

A Figura 4.17(b) mostra o terceiro e último passo da construção de uma representação overlap do  $H_4$ , através da construção de mais par de conjuntos de acordo com o Teorema 4.13.

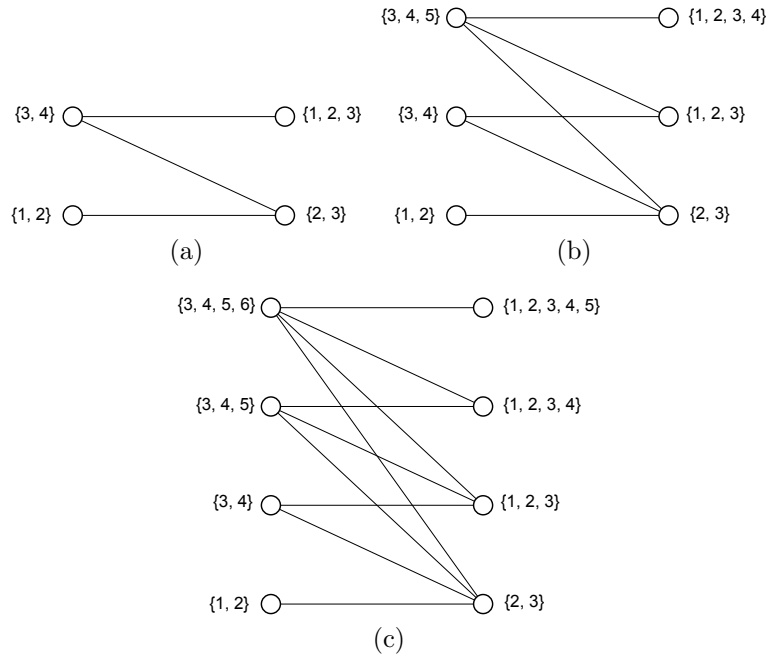


Figura 4.17: Construção esquemática de uma representação overlap do  $H_4$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho fizemos um estudo sistemático do número de overlap de grafos, em especial quando o problema está restrito a classes de grafos particulares. Inicialmente, apresentamos conceitos e propriedades básicas relativas ao número de overlap para grafos em geral. Em seguida, revisamos limites para o número de overlap de um grafo em função do seu número de arestas e um resultado extremal que exhibe uma representação overlap de um grafo qualquer.

No Capítulo 3, apresentamos resultados exatos existentes para árvores e grafos completos, além dos limites superiores para grafos planares e de co-comparabilidade. O resultado apresentado para esta última classe de grafos possui um aspecto interessante, mencionado ao decorrer do trabalho, que é o fato de não conhecermos um grafo de co-comparabilidade com pelo menos três vértices que tenha número de overlap igual ao apresentado na Seção 3.3. De fato, acreditamos que seja possível provar que o número de overlap de grafos de co-comparabilidade é igual a seu número de vértices. Um trabalho futuro promissor consiste em resolver essa conjectura, apresentando um exemplo de grafo de co-comparabilidade com o número de overlap igual ao apresentado, ou uma nova construção de família de conjuntos de tamanho igual ao número de vértices que seja representação overlap de um grafo de co-comparabilidade.

Nossas contribuições são apresentadas no Capítulo 4. Já era conhecido um limite superior para grafos cordais, atribuído a Rosgen [12]. Neste trabalho, aprimoramos este limite. Na Seção 4.1 apresentamos duas formas de construir representações overlap de tamanho inferior ao existente anteriormente. Estas duas representações overlap se baseiam em propriedades estruturais da classe dos grafos cordais: o esquema de eliminação perfeito, usado na representação overlap apresentada na Subseção 4.1.1, e a caracterização por interseção de subárvores de uma árvore, usado na representação overlap apresentada na Subseção 4.1.2. A seguir, na Subseção 4.1.3 apresentamos uma comparação entre as duas construções de famílias de conjunto para os grafos cordais, mostrando que para grafos de partição com clique

de tamanho pelo menos 7 a representação overlap a partir do esquema de eliminação perfeito do grafo tem tamanho menor que a representação overlap a partir da interseção de subárvores de árvore. Por fim, na Subseção 4.1.4, apresentamos uma família de grafos de partição com número de overlap superior ao número de vértices do grafo. Esta família de grafos nos mostra que, apesar de nossas representações overlap para grafos cordais não serem ótimas, elas estão próximas de ter tamanho ótimo. Existem dois problemas em aberto para os grafos cordais cujo estudo é indicado: encontrar um grafo cordal com maior número de overlap existente e encontrar uma representação overlap ótima para grafos cordais.

Nos aprofundando no estudo de subclasses dos grafos cordais, a Seção 4.2 apresenta nosso resultado para grafos de limiar. A representação overlap de grafos nesta classe se aproveita fortemente da propriedade da vizinhança aninhada apresentada pelos vértices da parte estável da partição. Entretanto, apresentamos um limite superior próximo do valor ótimo para os grafos da classe. Um problema em aberto sugerido consiste em encontrar o número de overlap ótimo para os grafos de limiar, além de uma forma de construir representações overlap deste tamanho.

Os grafos de intervalo, que são grafos cordais e de co-comparabilidade, são analisados na Seção 4.3. Nesta seção melhoramos o resultado existente, através do número de overlap de grafos de co-comparabilidade, em uma unidade, apresentando uma representação overlap para grafos de intervalo de tamanho igual ao seu número de vértices. Este limite é justo, pois sabemos que caminhos são grafos de intervalo e têm número de overlap igual a seu número de vértices. Está em aberto encontrar um algoritmo que calcule o número de overlap para cada grafo de intervalo.

Por fim, fazemos um estudo sobre os grafos cadeia, caso particular de grafos bipartidos, na Seção 4.4, onde mostramos que todo grafo cadeia possui um subgrafo induzido  $H_n$  de forma que todos os outros vértices do grafo que não pertencem a este subgrafo possuem a mesma vizinhança que um vértice de  $H_n$ . Portanto, o número de overlap de um grafo cadeia é o número de overlap deste subgrafo induzido. Apresentamos uma representação overlap de tamanho  $n+2$  deste grafo  $H_n$  e mostramos que essa representação overlap é ótima, através de uma consequência do limite de Henderson para conjuntos estáveis [8].

Outras classes de grafos foram estudadas buscando uma representação overlap ótima ou um limite superior interessante. Para os grafos círculo de  $n$  vértices, caracterizados como grafos de interseção de uma família de cordas de um círculo, conseguimos rapidamente uma representação overlap de tamanho  $2n$ , rotulando os extremos de cada corda. Entretanto, acreditamos que este seja um limite superior demasiado alto para a classe, visto que conhecemos grafos círculo com número de overlap bem abaixo deste limite superior, como grafos completos. Não encontramos nenhuma evidência que sustente a possibilidade de existir um grafo círculo com

este número de overlap e acreditamos que uma análise sobre formas de economizar rótulos dos extremos de cada borda pode tornar essa representação mais econômica. Este é um tema sugerido para pesquisa futura.

Por fim, um último problema sugerido como tema de pesquisa futura consiste em resolver a conjectura de Rosgen [12] de que o problema NÚMERO DE OVERLAP é  $\mathcal{NP}$ -Completo.

# Referências Bibliográficas

- [1] Information System on Graph Classes and their Inclusions. <http://www.graphclasses.org/>. Último acesso em: 12 de setembro de 2013.
- [2] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [3] A. BRANDSTÄDT, V. B. LE e J. P. SPINRAD. *Graph Classes: A Survey*. SIAM, 1999.
- [4] D. W. CRANSTON, N. KORULA, T. D. LESAULNIER, K. G. MILANS, C. J. STOCKER, J. VANDENBUSSCHE e D. B. WEST. Overlap number of graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 70, pp. 10–28, 2012.
- [5] P. ERDÖS, A. W. GOODMAN e L. POSA. The representation of a graph by set intersections. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 18, pp. 106–112, 1966.
- [6] M. C. GOLUMBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Elsevier, 2004.
- [7] M. C. GOLUMBIC e E. R. SCHEINERMAN. Containment graphs, posets, and related classes of graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 555, pp. 192–204, 1989.
- [8] P. HENDERSON. A lower bound on overlap number, 2010. Manuscrito.
- [9] N. V. R. MAHADEV e U. N. PELED. *Threshold Graphs and Related Topics*. Elsevier, 1995.
- [10] E. C. MILNER. A combinatorial theorem on systems of finite sets. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 43, pp. 204–206, 1966.
- [11] F. S. ROBERTS. *Graph Theory and Its Applications to Problems of Society*. SIAM, 1978.
- [12] B. ROSGEN. *Set Representation of Graphs*. Dissertação de mestrado, University of Alberta, Department of Computing Science, 2005.
- [13] B. ROSGEN e L. STEWART. The overlap number of a graph, 2010. Manuscrito.

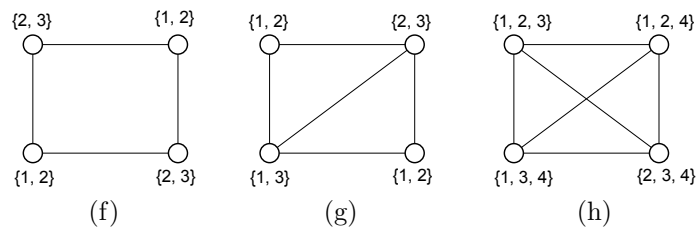
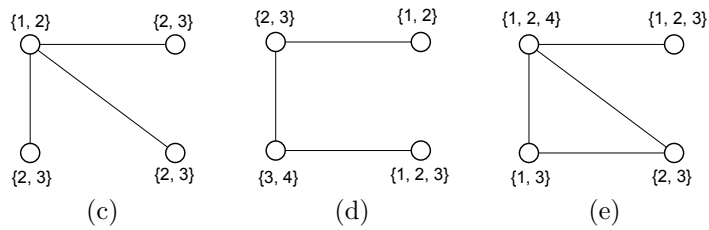
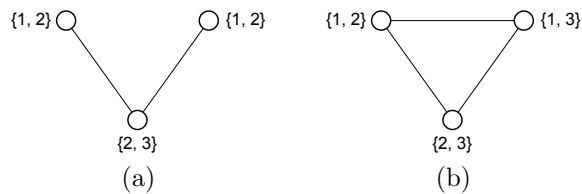


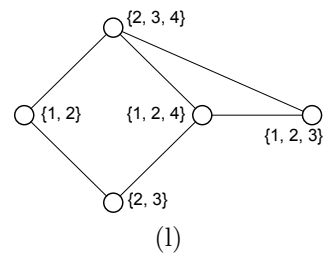
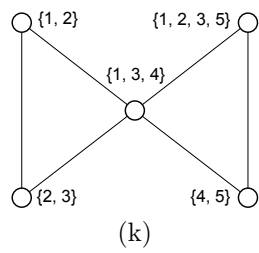
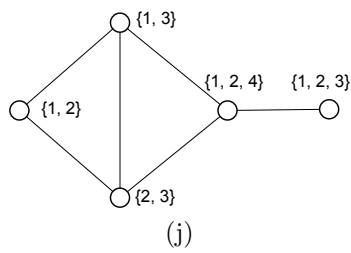
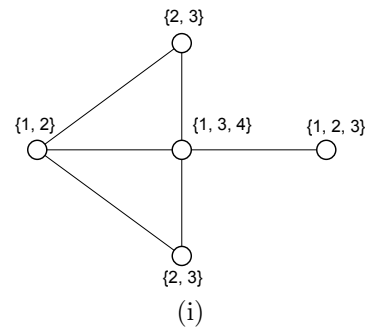
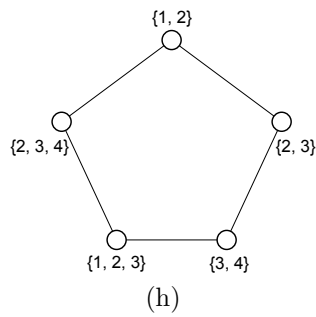
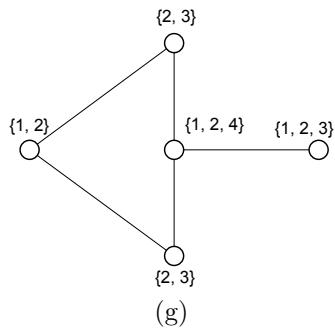
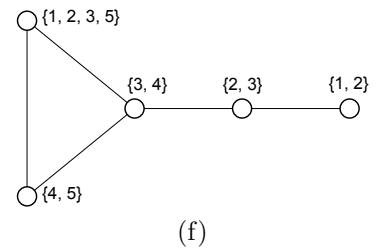
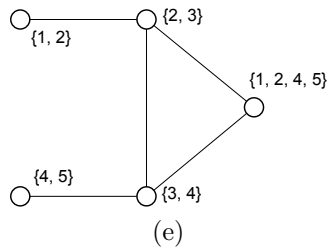
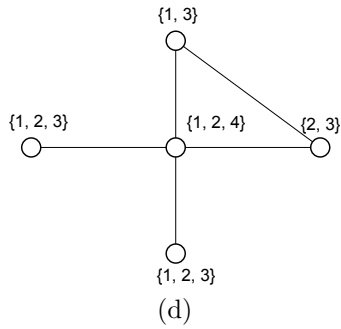
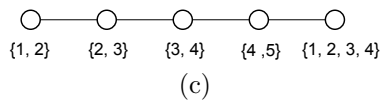
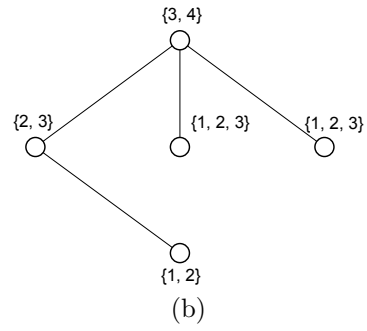
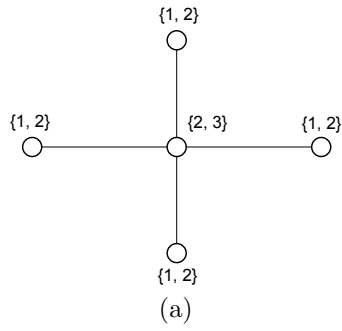
- [14] J. P. SPINRAD. *Efficient Graph Representations*. AMS, 2003.
- [15] R. J. WILSON e J. J. WATKINS. *Graphs: An Introductory Approach*. Wiley, 1990.

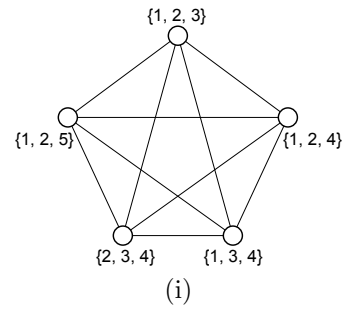
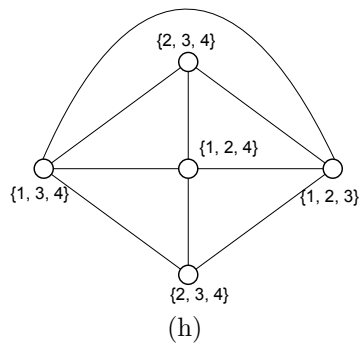
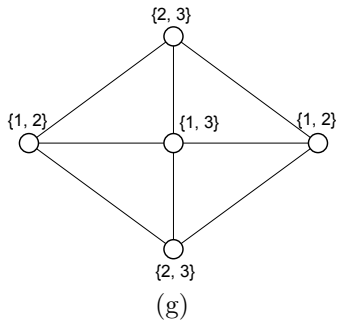
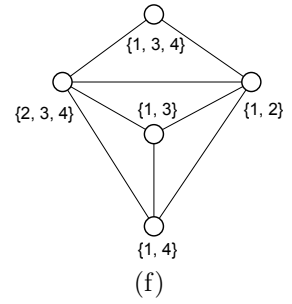
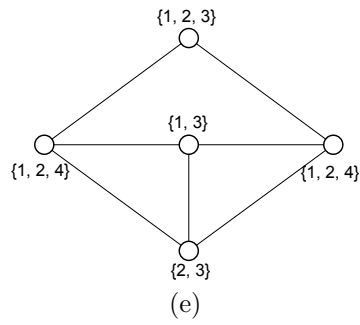
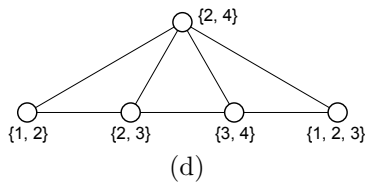
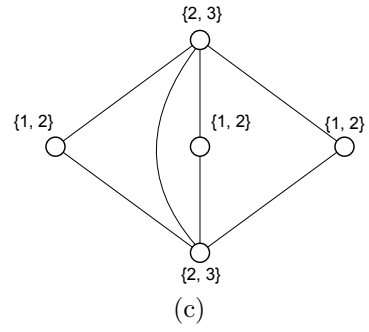
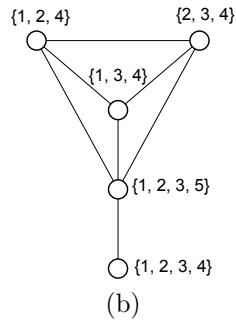
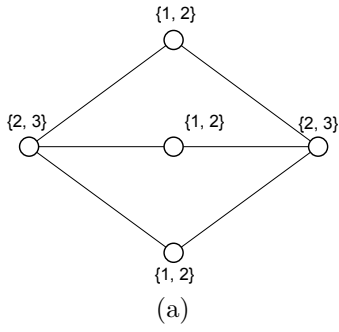
# Apêndice A

## Número de Overlap de Grafos

Neste apêndice apresentamos uma representação overlap ótima para todos os grafos conexos de até cinco vértices [15]. Estes grafos e suas respectivas representações overlap servem como base para a prova de alguns resultados no decorrer do trabalho. Os grafos estão ordenados inicialmente por número de vértices, número de arestas e por fim, pela ordem dos graus.







# Apêndice B

## Número de Overlap Próprio de Grafos

Neste apêndice apresentamos uma representação overlap própria ótima para todos os grafos conexos de até cinco vértices [15]. Estes grafos e suas respectivas representações overlap servem como base para a prova de alguns resultados no decorrer do trabalho. Os grafos estão ordenados inicialmente por número de vértices, número de arestas e por fim, pela ordem dos graus.

