



DOMINAÇÃO E DOMINAÇÃO TOTAL EM GRAFOS CÚBICOS DE CINTURA GRANDE

Deiwison Sousa Machado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Luis Alfredo Vidal de Carvalho
Simone Dantas de Souza

Rio de Janeiro
Março de 2014

DOMINAÇÃO E DOMINAÇÃO TOTAL EM GRAFOS CÚBICOS DE
CINTURA GRANDE

Deiwison Sousa Machado

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Luis Alfredo Vidal de Carvalho, D.Sc.

Prof^a. Simone Dantas de Souza, D.Sc.

Prof. Dieter Rautenbach, Ph.D.

Prof^a. Sulamita Klein, D.Sc.

Prof^a. Telma Silveira Pará, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2014

Machado, Deiwison Sousa

Dominação e Dominação Total em Grafos Cúbicos de Cintura Grande/Deiwison Sousa Machado. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

IX, 39 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Luis Alfredo Vidal de Carvalho

Simone Dantas de Souza

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 36 – 39.

1. Conjuntos Dominantes. 2. Grafos Cúbicos. 3. Dominação Total. I. Carvalho, Luis Alfredo Vidal de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico a minha mãe, a Deus e a
minha orientadora.*

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus, sem o qual certamente não teria chegado tão longe e, em segundo lugar, agradeço a minha falecida mãe, simplesmente por tudo.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro que possibilitou meus estudos durante o mestrado.

Agradeço aos meus orientadores Luis Alfredo Vidal de Carvalho e Simone Dantas de Souza por toda cooperação, paciência, motivação e pelo trabalho desenvolvido.

Em especial, gostaria de agradecer ao Professor Titular Dieter Rautenbach, da Universidade de Ulm na Alemanha, pelo trabalho desenvolvido conosco, assim como aos pesquisadores alemães Christian Löwenstein e Felix Joos.

Agradeço aos meus familiares, sobretudo a meu irmão e minha tia, pelo apoio e pela compreensão nos inúmeros momentos de ausência.

Por fim, agradeço a todos amigos e colegas de longa data que me possibilitaram de alguma forma chegar até aqui. Em particular, aos amigos Poly Hannah da Silva e Vitor Costa Silva por todos esses anos de trabalho e conhecimento compartilhados.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DOMINAÇÃO E DOMINAÇÃO TOTAL EM GRAFOS CÚBICOS DE CINTURA GRANDE

Deiwison Sousa Machado

Março/2014

Orientadores: Luis Alfredo Vidal de Carvalho

Simone Dantas de Souza

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Essa dissertação versa sobre conjuntos dominantes em grafos cúbicos de cintura grande. Nosso objetivo é comparar os números de dominação e dominação total de um grafo cúbico G de forma a contribuir para uma melhor compreensão da relação existente entre estes dois parâmetros e, como consequência da nossa pesquisa, melhoramos os limites existentes na literatura.

Para um grafo cúbico G de ordem n , cintura pelo menos g e número de dominação $\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n$, para algum $\epsilon \geq 0$, mostramos que o número de dominação total de G é no máximo $\frac{13}{32}n + O\left(\frac{n}{g}\right) + O(\epsilon n)$, o que implica que $\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq 1.89714 + O\left(\frac{1}{g}\right)$.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DOMINATION AND TOTAL DOMINATION IN CUBIC GRAPHS OF LARGE GIRTH

Deiwison Sousa Machado

March/2014

Advisors: Luis Alfredo Vidal de Carvalho

Simone Dantas de Souza

Department: Systems Engineering and Computer Science

This dissertation discuss the dominating sets in cubic graphs of large girth. Our goal is to compare the total domination number and the domination number of a cubic graph G in order to better understand the relationship between these two parameters. With our research, we have improved the bounds found in the literature.

For a cubic graph G of order n , girth at least g , and domination number $\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n$, for some $\epsilon \geq 0$, we proved that the total domination number of G is at most $\frac{13}{32}n + O\left(\frac{n}{g}\right) + O(\epsilon n)$, which implies $\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq 1.89714 + O\left(\frac{1}{g}\right)$.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Preliminares	7
3 Resultados	20
4 Conclusões e Trabalhos Futuros	35
Referências Bibliográficas	36

Lista de Figuras

1.1	Grafo relativo aos movimentos do rei no tabuleiro de xadrez.	2
2.1	Conjunto dominante em um grafo.	10
2.2	Conjunto dominante minimal e mínimo.	11
2.3	Conjuntos dominantes em alguns grafos especiais.	12
2.4	Conjunto dominante total em um grafo.	13
2.5	Conjunto dominante total minimal e mínimo.	13
2.6	Conjunto dominante e conjunto dominante total.	14
2.7	Redução de 3-SAT a DOMINATING SET.	16
3.1	Exemplo de conjuntos dominante e dominante total de uma subdivisão do K_3	21
3.2	Exemplo de grafo em que $a = k = 2$	23
3.3	Partição do conjunto dominante D em D_0 e D_1	27
3.4	Representação esquemática dos conjuntos D_0 , D_1 , U e R	29
3.5	Vértices do tipo A e do tipo B	30
3.6	Conjunto T'	31

Capítulo 1

Introdução

Os primeiros trabalhos envolvendo a ideia de conjuntos dominantes remontam a meados do século XIX com o estudo de problemas em tabuleiros de xadrez. Segundo Haynes *et al.* [26], o alemão Max Bezzel [6], jogador de xadrez, publicou em 1848 um trabalho onde propôs o problema das n -rainhas, que consiste em determinar o número de maneiras nas quais n rainhas podem ser posicionadas em um tabuleiro de xadrez $n \times n$ de modo que nenhuma rainha possa atacar alguma outra.

No jogo de xadrez as peças podem somente efetuar movimentos específicos:

- (i) Uma rainha pode mover-se horizontal, vertical ou diagonalmente um número qualquer de casas;
- (ii) Um rei pode mover-se apenas uma casa nas direções horizontal, vertical ou diagonal.
- (iii) Uma torre pode mover-se um número qualquer de quadrados horizontal ou verticalmente;
- (iv) Um bispo pode mover-se um número qualquer de casas somente na direção diagonal;
- (v) Um cavalo no quadrado de coordenadas (i, j) pode mover-se para qualquer quadrado do tabuleiro com índices $(i \pm 2, j \pm 1)$ ou $(i \pm 1, j \pm 2)$.

Em 1892, Ball [3] menciona o Problema das Oito Rainhas que consiste em alocar oito rainhas em um tabuleiro de xadrez padrão de tamanho 8×8 de modo que todas as casas do tabuleiro sejam ocupadas ou dominadas pelas rainhas. Ele conclui que existem 92 soluções distintas, sendo 12 soluções fundamentais e a partir dessas, por meio de operações de rotação e reflexão, chega-se ao total de 92 soluções.

Ball analisa também o caso mais geral, em que n rainhas podem ser colocadas em um tabuleiro de xadrez de n^2 células, com $n \geq 4$. Para tabuleiros de 4^2 , 5^2 , 6^2 , 7^2 , 8^2 , 9^2 , 10^2 células existem, respectivamente, 1, 2, 1, 6, 12, 46, 92 soluções fundamentais, enquanto que todas as soluções juntas perfazem 2, 10, 4, 40, 92, 352, 724 soluções.

Posteriormente, o problema foi estendido a outras peças do jogo de xadrez: rei, bispo, torre e cavalo. Todos esses problemas podem ser modelados utilizando Teoria dos Grafos. Um grafo $G(V, E)$ é um conjunto finito não-vazio de vértices V e um conjunto de arestas E de pares não-ordenados de elementos distintos de V . Modelamos este problema associando um vértice para cada casa do tabuleiro de xadrez e dois vértices são adjacentes no grafo se, e somente se, a peça pode mover-se para casa representada pelo vértice. Assim, podem ser definidos o grafo-rainha, o grafo-rei, o grafo-torre, o grafo-bispo e o grafo-cavalo, representados por Q_n , K_n , R_n , B_n e N_n , respectivamente. Como exemplo, considere o grafo-rei ilustrado na Figura 2.1.

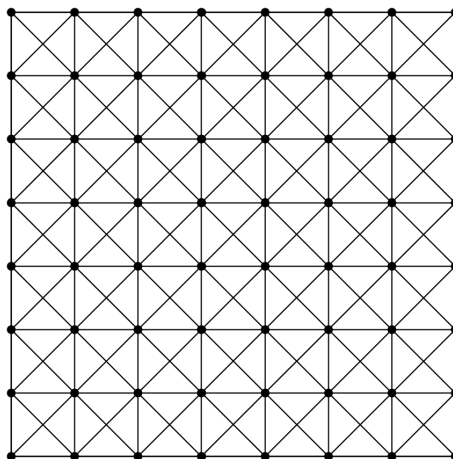


Figura 1.1: Grafo relativo aos movimentos do rei no tabuleiro de xadrez.

Em 1958, Claude Berge [4] definiu pela primeira vez o conceito de conjunto dominante, entretanto, com o nome de conjunto estável externamente, em oposição ao conjunto estável internamente, que equivale ao atual nome de conjunto independente. Berge definiu também o número de dominação de um grafo G , mas com nome de coeficiente de estabilidade externa, utilizando a notação de $\beta(G)$.

Um conjunto dominante é um subconjunto de vértices D de $V(G)$ tal que todo vértice de G que não pertence a D é adjacente a algum vértice em D . O número de dominação de um grafo G , denotado por $\gamma(G)$ é a cardinalidade do menor conjunto

dominante de G .

Também em [4], Berge transcreveu o Problema das Cinco Rainhas, que consiste em posicionar em um tabuleiro de xadrez padrão o menor número possível de rainhas de modo que toda casa do tabuleiro seja alcançada por ao menos uma rainha. Berge modela o problema utilizando a Teoria dos Grafos considerando que cada quadrado do tabuleiro corresponde a um vértice do grafo e dois vértices são ligados por uma aresta se as casas que eles representam no tabuleiro de xadrez estão em uma mesma linha, coluna ou diagonal. Berge, então, nota que o problema é equivalente a encontrar um conjunto dominante mínimo nesse grafo com 64 vértices. Como resposta, chega a conclusão que $\gamma(G_1) = 5$, onde G_1 é o grafo em questão, conhecido como grafo das rainhas. Além disso, ele oferece as soluções para os problemas dos cavalos [$\gamma(G_2) = 12$] e dos bispos [$\gamma(G_3) = 8$].

Em 1962, Oystein Ore [42] empregou pela primeira vez os termos “conjunto dominante” e “número dominante”, embora tenha utilizado a notação $\delta(G)$ para representar o número dominante.

Ainda em [42], Ore exhibe uma condição necessária e suficiente para que um conjunto dominante D seja minimal (esse é considerado o primeiro teorema envolvendo conjuntos dominantes) e estabelece também quando um grafo pode ter seu conjunto de vértices particionado em dois conjuntos dominantes.

A notação $\gamma(G)$ para o número dominante de um grafo G foi introduzida por Cockayne e Hedetniemi [16] em 1977 em uma pesquisa que reuniu alguns poucos resultados conhecidos naquela época sobre conjuntos dominantes em grafos. A partir de então, a notação foi aceita pela comunidade científica.

No decorrer dos anos, conforme o estudo deste tema tornou-se mais intenso, surgiram diversas variações da definição clássica de conjunto dominante. Neste trabalho, estudamos mais profundamente a variação denominada conjunto dominante total, introduzida em 1980 por Cockayne *et al.* [13].

Um conjunto dominante total T de um grafo G é um subconjunto de vértices T de $V(G)$ tal que todo vértice de $V(G)$ é adjacente a algum vértice em T . O número de dominação total, denotado por $\gamma_t(G)$ é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total.

Cockayne *et al.* [13] relacionaram, entre outros parâmetros, o número de do-

minação total $\gamma_t(G)$ com o número de vértices n e o grau máximo Δ de um grafo G . Assim, obtiveram os seguintes limites superiores para o número de dominação total:

- (i) Se G é um grafo conexo com n vértices, então $\gamma_t(G) \leq \frac{2}{3}n$;
- (ii) Se G é conexo, sem vértices isolados e grau máximo Δ , então $\gamma_t(G) \leq n - \Delta + 1$;
- (iii) Se G é conexo e $\Delta < n - 1$, então $\gamma_t(G) \leq n - \Delta$.

Há muitos resultados que oferecem limites isoladamente para os números de dominação e dominação total de um grafo G , porém a relação entre esses dois parâmetros ainda não foi muito bem compreendida na literatura. Portanto, o objetivo do nosso trabalho foi tentar compreender melhor a relação entre esses dois parâmetros e melhorar os limites existentes que os relacionam.

Seja G um grafo sem vértices isolados. Como todo conjunto dominante total também é um conjunto dominante, temos que:

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G).$$

A partir de um conjunto dominante D podemos obter um conjunto dominante total incluindo no conjunto D , para cada vértice isolado u do subgrafo de G induzido por D , um vizinho de u em G . Logo:

$$\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G).$$

Assim, os dois parâmetros estão relacionados pela desigualdade trivial:

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G).$$

O grafo completo bipartido $K_{p,p}$ tem $\gamma(K_{p,p}) = 2 = \gamma_t(K_{p,p})$; e o grafo completo com n vértices K_n tem $\gamma(K_n) = 1$ e $\gamma_t(K_n) = 2$. Estes dois exemplos mostram que ambos os lados desta desigualdade são atingidos. Em [23, 29], os autores caracterizam construtivamente as árvores que atingem os lados da desigualdade acima.

Conjuntos dominantes ocorrem naturalmente em uma variedade de situações da vida real. Em [26], podemos encontrar diversas aplicações de dominação em grafos tais como: rota de ônibus, relação entre pessoas, rede de comunicação em computadores, estações de rádio, agrimensura de terras, entre outras aplicações. Há uma vasta pesquisa sobre problemas combinatórios relacionados a dominação em tabuleiros de xadrez [14, 15, 24, 27, 38].

Os números de dominação e dominação total estão entre os mais fundamentais e bem-estudados parâmetros em teoria de grafos [1, 26–28, 30, 33]. Estudamos a relação entre esses parâmetros nos grafos cúbicos com cintura grande. Há uma vasta pesquisa na literatura sobre este problema condicionado a grafos cúbicos.

Em 1996, Reed [44] conjecturou que todo grafo cúbico tem número de dominação no máximo $\lceil n/3 \rceil$. Somente em 2005, Kostochka e Stodolsky [36] mostraram que a conjectura era falsa, mas tornava-se verdadeira quando impunha-se a condição de que o grafo cúbico tivesse cintura pelo menos g .

Em 2006, Kawarabayashi *et al.* [34] encontraram o limite superior $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3g+3}\right)n$ para grafos cúbicos, com n vértices, cintura no mínimo g , com g divisível por três, e sem pontes.

Em 2008, Löwenstein e Rautenbach [39] mostraram que grafos cúbicos, com n vértices e cintura $g \geq 5$ possuem número de dominação no máximo $\left(\frac{44}{135} + \frac{82}{135g}\right)n$. Mais precisamente, provaram que:

$$\gamma(G) \leq 0.325926n + O\left(\frac{n}{g}\right).$$

Ainda em 2008, Rautenbach e Reed [43] melhoram a desigualdade acima para $0.321216n + O\left(\frac{n}{g}\right)$.

Em 2009, Kostochka e Stodolsky [35] provaram que para todo grafo cúbico de n vértices e cintura pelo menos g :

$$\gamma(G) \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3g^2}\right)n.$$

Em 2012, Kral *et al.* [37] obtiveram o melhor limite superior conhecido até o momento para o número de dominação de um grafo cúbico com n vértices e cintura pelo menos g :

$$\gamma(G) \leq 0.299871n + O\left(\frac{n}{g}\right) < \frac{3}{10}n + O\left(\frac{n}{g}\right).$$

Neste trabalho mostramos que o número de dominação total de um grafo cúbico com cintura grande G é no máximo:

$$\frac{13}{32}n + O\left(\frac{n}{g}\right) + O(\epsilon n).$$

Consequentemente, provamos que:

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq 1.89714 + O\left(\frac{1}{g}\right),$$

o que constitui uma melhora significativa para o limite $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$.

Esta dissertação está estruturada como segue. No Capítulo 2, apresentamos as definições que usaremos ao longo do texto, no Capítulo 3 elencamos os resultados e, por fim, no Capítulo 4 expomos as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos básicos de Teoria de Grafos, conceitos específicos sobre dominação em grafos, de complexidade computacional e de probabilidade.

Para fins de terminologia, adotamos os livros clássicos de Bondy e Murty [8] e de Jayme Luiz Szwarcfiter [45]. Também utilizamos algumas definições contidas nos livros de West [46], Diestel [22], Chartrand [12] e Brandstädt *et al.* [10]. A respeito do problema de complexidade, usamos Papadimitrou *et al.* [20], Cormen *et al.* [17] e Garey e Johnson [25]. Especificamente em relação à dominação em grafos, seguimos os livros de Haynes, Hedetniemi e Slater [26, 27]. Em relação à probabilidade, utilizamos os livros de Meyer [40], Alon e Spencer [2] e Molloy e Reed [41].

Um grafo $G(V, E)$ é um conjunto finito não-vazio $V = V(G)$ e um conjunto $E = E(G)$ de pares não-ordenados de elementos distintos de $V(G)$. Os elementos de $V(G)$ são os *vértices* e os de $E(G)$ são as *arestas* de G , respectivamente.

Denotamos por (v, w) uma aresta $e \in E(G)$ formada pelos vértices v e w . Nesse caso, os vértices v, w são os *extremos* da aresta e , sendo denominados *adjacentes*. Uma aresta em que os extremos coincidem é chamada de *laço*. Duas arestas que possuem os mesmos extremos são chamadas de *arestas paralelas*. Um grafo é dito *simples* se não possui laços e arestas paralelas.

Um *subgrafo* $G_2(V_2, E_2)$ de um grafo $G_1(V_1, E_1)$ é um grafo tal que $V_2 \subseteq V_1$ e $E_2 \subseteq E_1$. Se além disso, G_2 possuir toda aresta (v, w) de G_1 tal que ambos v e w estejam em V_2 , então G_2 é o *subgrafo induzido* pelo subconjuntos de vértices V_2 . Diz-se então que V_2 *induz* G_2 e representamos por $G[V_2]$.

O *grau* de um vértice v em um grafo simples, denotado por $d(v)$, é o número de vértices adjacentes a v . Um vértice de grau zero é chamado de *vértice isolado*. O *grau mínimo* de um grafo G , denotado por $\delta(G)$, é o menor grau dentre os graus de todos os vértices de G . Em contrapartida, o *grau máximo* de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, corresponde ao maior grau dos vértices de G .

A *vizinhança aberta* de um vértice v de um grafo G é definida como $N(v) = \{u \in V(G) \mid (u, v) \in E(G)\}$, ao passo que a *vizinhança fechada* de um vértice v é definida como $N[v] = \{v\} \cup N(v)$.

Para um conjunto $S \subseteq V(G)$ a *vizinhança aberta do conjunto de vértices S* é definida como $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$. Analogamente, a *vizinhança fechada do conjunto de vértices S* é definida por $N[S] = N(S) \cup S$. Para um conjunto $D \subseteq V$, o vértice $v \in D$ é chamado de *enclave* de D se $N[v] \subseteq D$. Um conjunto de vértices é dito *livre de enclave* se não possui nenhum enclave.

Um grafo é dito *regular* se possui todos os vértices com o mesmo grau. Se um grafo é regular de grau r , dizemos que ele é *r -regular*. Um grafo *cúbico* é um grafo 3-regular. Um grafo é denominado *completo* se todo par de vértices é adjacente. Denotamos por K_n o grafo completo de n vértices. Note que todo grafo completo é $(n - 1)$ -regular.

Uma k -coloração de vértices de um grafo G é uma função $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ para toda aresta $(u, v) \in E(G)$. O *número cromático* $\chi(G)$ é o menor k tal que G admite uma k -coloração.

Na prova do Corolário 3.2 usamos o Teorema de Brooks:

Teorema 2.1 *Seja G um grafo conexo. Se G não é um grafo completo nem um ciclo ímpar, então*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

□

Um *caminho* é um grafo simples cujos vértices podem ser dispostos em uma sequência linear na qual dois vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência e são não adjacentes caso contrário. Similarmente, um *ciclo* é um grafo simples em que os vértices podem ser colocados em sequência cíclica na qual dois vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência e são não adjacentes caso contrário. Em um ciclo, uma aresta que une dois vértices não-adjacentes é

chamada de *corda*.

Um caminho com n vértices representamos por P_n . Um ciclo com n vértices denotamos por C_n . O comprimento de um caminho ou ciclo corresponde ao número de suas arestas. Um caminho ou ciclo de tamanho k é chamado de k -caminho ou k -ciclo, respectivamente. Um grafo que não contém ciclos é chamado *acíclico*. A *cintura* de um grafo G é o comprimento de seu menor ciclo.

Denomina-se distância $d(u, v)$ entre dois vértices u e v de um grafo ao comprimento do menor caminho entre u e v . O *diâmetro* de um grafo G é a maior distância entre dois vértices de G . Um grafo G é dito *conexo* se existe um caminho entre cada par de vértices de G , caso contrário é denominado *desconexo*. Um *corte de vértices* de um grafo conexo G é subconjunto minimal de vértices $V'(G) \subseteq V(G)$ cuja remoção de G torna o grafo desconexo ou trivial. Sendo k um inteiro positivo, dizemos que um grafo G é k -vértice conexo se não existe corte de vértices de tamanho menor do que k .

Um grafo G é *bipartido* quando seu conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G tenha um extremo em V_1 e outra extremidade em V_2 . Uma outra maneira de definir um grafo bipartido é afirmar que seu número cromático é no máximo dois. Representamos um grafo bipartido por $K_{p,q}$, onde $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$. Um grafo é chamado de *bipartido completo* se contém todas as arestas possíveis entre as partições V_1 e V_2 .

Denomina-se *estrela* S_n o grafo bipartido completo em que uma das partições possui cardinalidade unitária e a outra tem n vértices. Uma *roda* W_n , com $n \geq 4$, é um grafo que contém um ciclo com $n - 1$ vértices e um vértice central que é adjacente a todos os vértices do ciclo. Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo.

O *grafo linha* $L(G)$ de um grafo G é o grafo que possui as arestas de G como vértices e dois vértices são adjacentes em $L(G)$ se as arestas que eles representam são adjacentes em G .

A k -ésima-potência de um grafo simples $G(V, E)$ é grafo G^k cujo conjunto de vértices é V e dois vértices distintos são adjacentes em G^k se, e somente se, a distância entre eles no grafo G é no máximo k .

Um grafo G é chamado *cordal* se todo ciclo de tamanho pelo menos quatro contém uma corda. Na literatura, também são conhecidos como *grafos triangulari-*

zados.

Passemos agora as definições específicas de dominação em grafos.

Um subconjunto de vértices $D \subseteq V(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é chamado *conjunto dominante* se todo vértice $v \in V(G)$ é um elemento de D ou é adjacente a algum elemento de D . Note que todo grafo G possui um conjunto dominante trivial que corresponde ao próprio $V(G)$. Na Figura 2.1 o conjunto $D = \{1, 3, 5\}$ é um conjunto dominante.

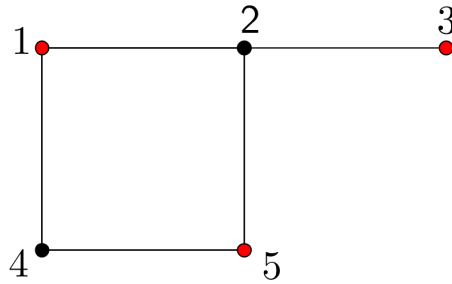


Figura 2.1: Conjunto dominante em um grafo.

Existem diversas maneiras de definir um conjunto dominante em um grafo. As seguintes definições são equivalentes entre si e podem ser encontradas em [26]. Um conjunto de vértices D de um grafo G é dito dominante se, e somente se:

(i) para cada vértice $v \in V - D$, existe um vértice $u \in D$ tal que v é vizinho de u ;

(ii) para todo $v \in V - D$, tem-se que $d(v, D) \leq 1$;

(iii) $N[D] = V$;

(iv) para cada vértice $v \in V - D$, ocorre que $|N(v) \cap D| \geq 1$, ou seja, todo vértice que não está no conjunto dominante D é adjacente a pelo menos um vértice de D ;

(v) para cada vértice $v \in V$, ocorre que $|N[v] \cap D| \geq 1$;

(vi) $V - D$ é livre de enclave.

Um conjunto dominante D de um grafo G também pode ser visto como uma função $f : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ definida por $f(v) = 0$, quando $v \in V(G) \setminus D$, e $f(v) = 1$,

se $v \in D$, que satisfaz a seguinte condição, para todo $v \in V(G)$:

$$\sum_{u \in N_G[v]} f(u) \geq 1.$$

Seja D um conjunto dominante de um grafo G . Então, todo superconjunto $D'' \supseteq D$ também é um conjunto dominante de G . Por outro lado, é fácil ver que nem todo subconjunto $D' \subseteq D$ é necessariamente dominante.

Dizemos que D é um *conjunto dominante minimal* se nenhum subconjunto próprio de $D \subset D$ também é um conjunto dominante. Dizemos que um D é um *conjunto dominante mínimo* se não existe nenhum outro conjunto dominante de cardinalidade menor do que a cardinalidade de D . Obviamente, todo conjunto dominante mínimo é minimal, mas nem todo conjunto dominante minimal é mínimo. O conjunto de todos os conjuntos dominantes minimais de um grafo G é denotado por $MDS(G)$.

Na Figura 2.2(A) o conjunto $D = \{1, 3, 6\}$ é um conjunto dominante minimal, mas não é mínimo. Já na Figura 2.2(B), o conjunto $D' = \{1, 5\}$ é um conjunto dominante mínimo.

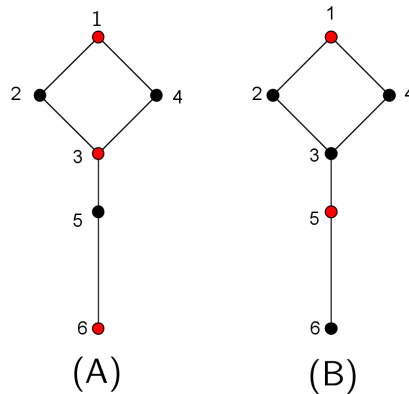


Figura 2.2: Conjunto dominante minimal e mínimo.

O *número de dominação*, denotado por $\gamma(G)$, de um grafo G é cardinalidade mínima de um conjunto dominante em G . No exemplo anterior, o número de dominação $\gamma(G) = 2$. Equivalentemente podemos dizer que o número de dominação

é a cardinalidade mínima de um conjunto em $MDS(G)$. Para qualquer grafo G , claramente $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

É fácil de verificar que $\gamma(K_n) = 1$, $\gamma(S_n) = 1$ e $\gamma(W_n) = 1$. Também é trivial determinar o número de dominação de alguns grafos pequenos, representados na Figura 2.3, que recebem nomes especiais na literatura: $\gamma(\text{diamante}) = 1$, $\gamma(\text{pata}) = 1$, $\gamma(\text{touro}) = 2$, $\gamma(\text{casa}) = 2$, $\gamma(\text{cadeira}) = 2$, $\gamma(\text{dardo}) = 1$, $\gamma(\text{gema}) = 1$, $\gamma(\text{dominó}) = 2$ e $\gamma(\text{3-sol}) = 2$.

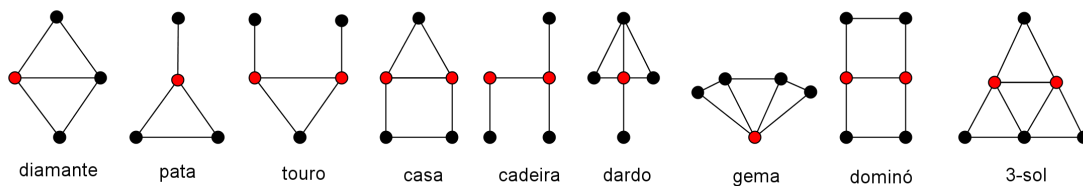


Figura 2.3: Conjuntos dominantes em alguns grafos especiais.

É fácil ver que $\gamma(K_{p,q}) = 2$, para $p \geq 2, q \geq 2$, e $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$. No caso dos grafos bipartidos, um vértice selecionado em uma das duas partições do grafo domina todos os vértices da outra partição, logo são necessários apenas dois vértices (um de cada partição) para dominar todos os vértices do grafo. Para os caminhos e ciclos, a cada vértice selecionado para o conjunto dominante são dominados, no máximo, três vértices (o próprio vértice e seus dois vizinhos, ou um vizinho se for um extremo de caminho). Portanto, para um caminho com n vértices e para um ciclo com n vértices são necessários $\lceil n/3 \rceil$ vértices para dominar todos os vértices do grafo.

Ao longo das últimas cinco décadas foram definidas diversas variações do conceito de conjunto dominante clássico. Uma variedade de condições podem ser impostas ou no conjunto dominado $V - D$ ou em V , ou ainda no método pelo qual os vértices em $V - D$ são dominados. Dentre essas variantes, estudamos mais profundamente a dominação total, também chamada de aberta, que foi introduzida na década de 80 por Cockayne *et al.* [13].

Um subconjunto de vértices $T \subseteq V(G)$ é chamado de *conjunto dominante total* se para todo vértice $v \in V(G)$ existe um vértice $u \in T$ que é adjacente a v . Perceba que, pela definição, a cardinalidade de qualquer conjunto dominante total é pelo menos dois. Note que, também pela definição, grafos com vértices isolados não

admitem conjunto dominante total. Na Figura 2.4 o conjunto $D = \{1, 2\}$ é um conjunto dominante total.

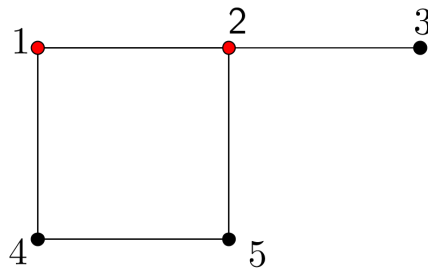


Figura 2.4: Conjunto dominante total em um grafo.

Dizemos que T é um *conjunto dominante total minimal* se nenhum subconjunto próprio de $T' \subset T$ também é um conjunto dominante total. Dizemos que T é um *conjunto dominante total mínimo* se não existe nenhum outro conjunto dominante total de cardinalidade menor do que a cardinalidade de T .

Na Figura 2.5(A) temos que $T = \{1, 4, 5, 6\}$ é um conjunto dominante total minimal ao passo que na Figura 2.5(B) tem-se que $T' = \{2, 3, 5\}$ é um conjunto dominante total mínimo.

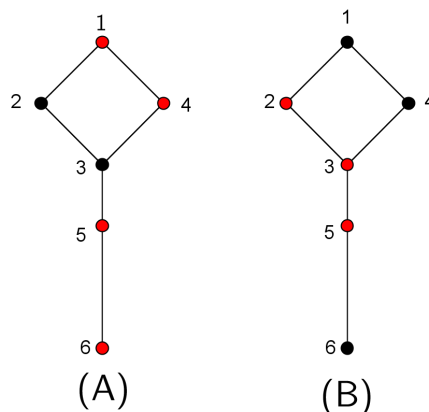


Figura 2.5: Conjunto dominante total minimal e mínimo.

Denominamos *número de dominação total*, denotado por $\gamma_t(G)$, a cardinalidade do menor conjunto dominante total de um grafo G . Obviamente todo conjunto dominante total também é um conjunto dominante em um grafo G , mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Na Figura 2.6(A) o conjunto $D = \{2, 3\}$ é um conjunto dominante, mas não é um conjunto dominante total ao passo que o conjunto

$T = \{2, 4\}$ na Figura 2.6(B) é um conjunto dominante total e um conjunto dominante.

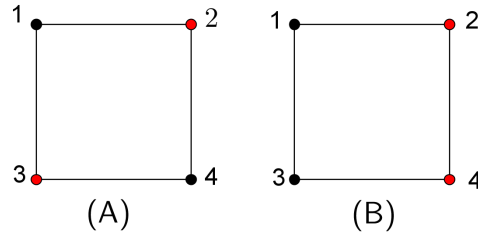


Figura 2.6: Conjunto dominante e conjunto dominante total.

Complexidade Computacional

Passaremos agora para as definições relacionadas à complexidade computacional. Dado um problema computacional, definimos como *instância* uma coleção de casos particulares do problema, onde cada instância é definida por um conjunto de dados.

Para Cormen [17], um algoritmo é um procedimento computacional bem definido que recebe um valor, ou conjunto de valores, como entrada e produz algum valor, ou conjunto de valores, como saída. Assim um algoritmo é uma sequência de passos computacionais que transforma uma entrada em uma saída. Dizemos que um algoritmo resolve um determinado problema se devolve uma solução para qualquer instância do problema ou diz que ele não possui solução.

Um *problema algorítmico* consiste de um conjunto de todos os possíveis dados do problema, denominado *conjunto de dados* e por uma questão solicitada, denominada *objetivo do problema*.

Há certas classes de problemas algorítmicos como, por exemplo, os *problemas de decisão* em que o objetivo é decidir se a resposta à questão levantada é SIM ou NÃO.

Um algoritmo é dito *polinomial* quando sua complexidade for uma função polinomial. Definimos a classe P de problemas de decisão como aquela que compreende os problemas que admitem um algoritmo polinomial.

Se um problema pode ser verificado em tempo polinomial dizemos que ele pertence a classe NP. Para estes problemas há algoritmos que geram um solução candidata ao problema, denominada *certificado* e verifica em tempo polinomial se o certificado é ou não uma solução para instância dada. Pela própria definição, podemos ver que todo problema que pertence a classe NP também pertence à classe P, ou seja, $P \subseteq NP$. Assim, a classe NP engloba todos os problemas da classe P e a pergunta central da teoria da complexidade é se $P=NP$.

Há também a classe dos problemas NP-completos. Um problema Π é NP-completo se satisfaz a ambas condições:

- (i) $\Pi \in NP$;
- (ii) um problema NP-completo Π' é polinomialmente transformado em Π .

Agora, estamos interessados em analisar a complexidade do problema de dominação em grafos. Garey e Johnson [25] estabeleceram o problema básico de decisão relacionado à dominação em grafos:

DOMINATING SET

INSTANCE: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k .

QUESTION: G possui um conjunto dominante de tamanho no máximo k ?

Também em [25], os autores provam que o problema DOMINATING SET é NP-completo, através de uma redução ao conhecido problema 3-SAT. Transcrevemos a seguir a prova da NP-completude do problema DOMINATING SET.

Teorema 2.2 *DOMINATING SET é NP-completo.*

Prova: Devemos provar duas coisas. Primeiro que $DOMINATING SET \in NP$. Mas, dado um grafo $G = (V, E)$, um inteiro k e um conjunto arbitrário $S \subseteq V(G)$ com $|S| \leq k$ é fácil verificar em tempo polinomial se S é um conjunto dominante.

Segundo, devemos construir uma redução de um problema NP-completo conhecido ao problema DOMINATING SET. Para isso, usaremos o problema 3-SAT.

3-SAT

INSTANCE: Um conjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de variáveis e um conjunto $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ de conjuntos com 3 elementos, chamados cláusulas, onde cada cláusula C_i contém três ocorrências distintas ou da variável u_i ou do seu

complemento u'_i . Por exemplo, uma cláusula pode ser $C_1 = \{u_1, u'_2, u_4\}$.

QUESTION: C possui uma atribuição verdadeira satisfatível, isto é, uma atribuição de Verdadeiro (T) e Falso (F) às variáveis em U de tal maneira que pelo menos uma variável em cada cláusula em C seja atribuído o valor T?

Dada uma instância C de 3-SAT, construímos uma instância $G(C)$ do problema DOMINATING SET como segue. Para cada variável u_i , construa um triângulo com vértices rotulados u_i , u'_i e v_i . Para cada cláusula $C_j = \{u_i, u_k, u_l\}$ crie um vértice único rotulado C_j , e adicione arestas (u_i, C_j) , (u_k, C_j) e (u_l, C_j) .

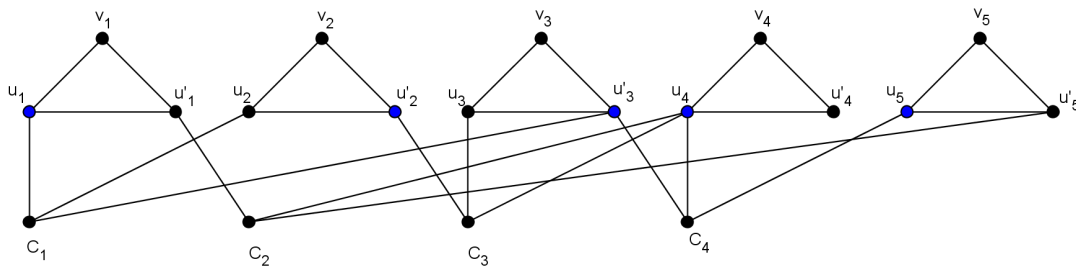


Figura 2.7: Redução de 3-SAT a DOMINATING SET.

Devemos mostrar que C tem uma atribuição satisfatível se, e somente se, $G(C)$ tem um conjunto dominante de cardinalidade menor do que k .

Suponha primeiro que C tenha uma atribuição satisfatível. Por exemplo na Figura 2.7, seja $u_1 = T$, $u_2 = F$, $u_3 = F$, $u_4 = T$ e $u_5 = T$. Crie um conjunto S de vértices em $G(C)$ da seguinte maneira: se $u_i = T$, então ponha o vértice u_i em S e se $u_i = F$, então coloque o vértice u'_i em S . O conjunto S será um conjunto dominante por dois motivos: (i) cada triângulo contém exatamente um vértice em S e, por isso, todos os vértices em um triângulo ou estão em S ou são dominados por um vértice em S ; e (ii) cada vértice-cláusula C_j é dominado por pelo menos um vértice em S já que, por hipótese, cada cláusula contém pelo menos uma variável cujo valor é verdadeiro e, por construção, o vértice correspondente pertence a S . Assim, $G(C)$ possui um conjunto dominante S de cardinalidade n .

Reciprocamente, suponha que $G(C)$ tem um conjunto dominante de cardinalidade $\leq n$. Devemos mostrar que C tem uma atribuição verdadeira satisfatível. Perceba primeiro que, como cada vértice da forma v_i deve ou estar em S ou ser dominado por um vértice em S , cada triângulo deve conter no mínimo um vértice em S , por isso $|S| \geq n$. De fato, cada triângulo deve conter exatamente um vértice em S . Assim, S não contém vértice-cláusula C_j . Mas, como S é um

conjunto dominante, cada cláusula deve ser dominada por pelo menos um vértice em S . Podemos então criar uma atribuição verdadeira satisfatível para C como segue: para cada variável u_i , atribua a u_i o valor Verdadeiro T se $u_i \in S$, caso contrário atribua a u_i o valor Falso F. Desse modo, é direto ver que essa atribuição é verdadeira e satisfatível para C .

Por fim, devemos mostrar também que a construção representada na Figura 2.7, para criar uma instância de DOMINATING SET a partir de uma instância de 3-SAT, pode ser construída em tempo polinomial. O tamanho de uma instância de 3-SAT é $O(3m + n)$, isto é, C é formada por m conjuntos de tamanho três mais n variáveis. O grafo $G(C)$ possui $3n + m$ vértices e $3n + 3m$ arestas. Portanto, a cardinalidade de $G(C)$ é no máximo uma constante multiplicada pela cardinalidade de C e, por isso, o grafo $G(C)$ pode ser construído a partir de uma instância do problema 3-SAT em tempo polinomial. \square

Vários pesquisadores estudaram a complexidade do problema de dominação em classes específicas de grafos. Por exemplo, Dewdney [21], Chang e Nemhauser [11], Bertossi [5] e vários outros autores mostraram independentemente que DOMINATING SET continua NP-completo para grafos bipartidos. Segundo Booth e Johnson [9], DOMINATING SET ainda permanece NP-completo para classe dos grafos cordais.

Probabilidade

Utilizamos na prova do teorema central da dissertação uma poderosa ferramenta denominada Método Probabilístico. Segundo Alon e Spencer [2], o método funciona da seguinte maneira: a fim de provar a existência de uma estrutura combinatória com certas propriedades, construímos um espaço probabilístico apropriado e mostramos que um elemento escolhido aleatoriamente nesse espaço tem as propriedades desejadas com probabilidade positiva. Inicialmente é necessário introduzir algumas definições de probabilidade e estatística a fim de compreender o método. Para isto, utilizamos o clássico livro do Meyer [40].

Determinado experimento é dito *aleatório* ou *não-determinístico* se satisfaz as seguintes características:

(i) É capaz de ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas;

(ii) Embora, não sejamos capazes de dizer em geral qual resultado particular ocorrerá, somos capazes de descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento;

(iii) Conforme o experimento é realizado repetidamente, os resultados individuais parecem ocorrer de uma maneira a esmo. Entretanto, à medida que o experimento é repetido um número grande de vezes, um padrão definitivo ou regularidade aparece.

Considerando experimentos que possuem somente um número finito de resultados possíveis, chamamos o conjunto de todos resultados possíveis de *espaço amostral* e o denotamos por Ω . Um espaço amostral é chamado de *equiprovável* quando todos os resultados são igualmente prováveis.

Um *evento* A com respeito a um espaço amostral particular Ω associado a um experimento ε é simplesmente um conjunto de resultados possíveis, ou seja, um evento é um subconjunto do espaço amostral Ω . Dois eventos A e B são denominados *mutualmente exclusivos* se eles não podem ocorrer juntos.

Seja ε um experimento. Seja S um espaço amostral associado a ε . Para cada evento A associamos um número real, designado por $P(A)$ e denominado a *probabilidade de A* satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(ii) $P(S) = 1$;

(iii) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(iv) Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ são eventos mutuamente exclusivos dois a dois, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Considere Ω um espaço amostral equiprovável. Podemos calcular a probabilidade $P(A)$ de um evento A ocorrer através da seguinte fórmula:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Seja ε um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X atribuindo a cada elemento $\omega \in \Omega$, um número real, $X(\omega)$, é chamada *variável aleatória*. Na maioria das vezes não precisamos indicar a natureza funcional de X .

O *valor esperado*, também chamado de *esperança*, de uma variável aleatória X é:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega).$$

Intuitivamente, $E(X)$ é o valor que esperaríamos obter se repetíssemos o experimento aleatório várias vezes e tomássemos a média dos resultados de X .

Segundo Molloy e Reed [41], o chamado *Método do Primeiro Momento* é a ferramenta mais importante do método probabilístico e pode ser definido como segue.

Para um inteiro positivo k , o k -ésimo momento de uma variável aleatória de valor real X é definido como sendo $E(X^k)$, e assim o primeiro momento é simplesmente o valor esperado. A essência do método pode ser descrita pelas seguintes afirmações:

PRINCÍPIO DO PRIMEIRO MOMENTO: Se $E(X) \leq t$, então $P(X \leq t) > 0$.

DESIGUALDADE DE MARKOV: Para toda variável aleatória positiva X e para todo $t \geq 0$,

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Para uma variável aleatória discreta X ,

$$P(X \neq 0) = P(X > 0) = P(X \geq 1).$$

Mas, aplicando a desigualdade de Markov para $t = 1$, tem-se que:

$$P(X \geq 1) \leq E(X).$$

Ainda de acordo com Molloy e Reed [41], o Método do Primeiro Momento é o nome geralmente usado para descrever a aplicação dessas duas ferramentas.

Capítulo 3

Resultados

O objetivo do nosso trabalho é analisar a relação entre o número de dominação e o número de dominação total de grafos cúbicos com cintura grande.

Relembramos do Capítulo 1 que os números de dominação e dominação total são parâmetros que estão relacionados por algumas desigualdades simples:

$$\gamma_t(G) \geq \gamma(G). \quad (3.1)$$

$$\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G). \quad (3.2)$$

Embora haja numerosos resultados sobre limites dos números de dominação e de dominação total sob várias condições, a relação entre esses dois parâmetros ainda não foi muito bem entendida na literatura.

Considere o grafo G construído, por exemplo, subdividindo cada aresta do grafo completo K_n , com $n \geq 3$, exatamente duas vezes, então $\gamma(G) = n$ e $\gamma_t(G) = 2n - 1$.

Por exemplo, veja a Figura 3.1, onde exibimos o grafo K_3 e os grafos G_1 e G_2 , obtidos através da construção descrita anteriormente. No grafo G_1 destacamos um conjunto dominante $D = \{1, 4, 7\}$ e no grafo G_2 exibimos um conjunto dominante total $T = \{1, 2, 5, 6, 7\}$. Note que $\gamma(G_1) = 3 = n$ e $\gamma_t(G_2) = 5 = 2n - 1$, sendo $n = 3$.

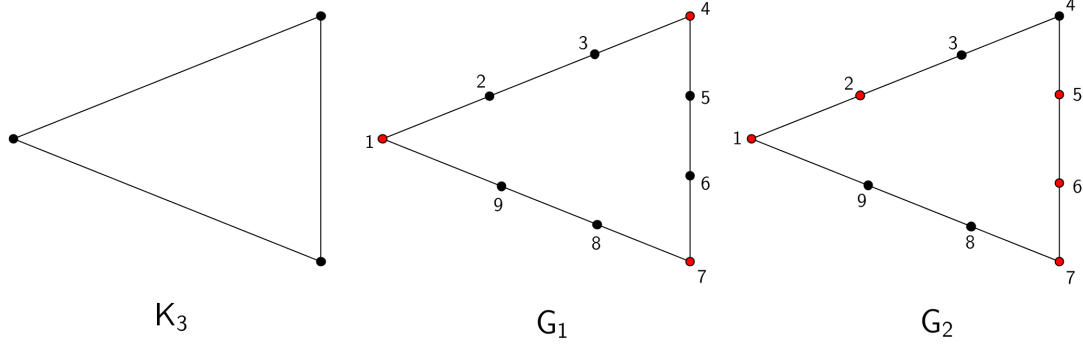


Figura 3.1: Exemplo de conjuntos dominante e dominante total de uma subdivisão do K_3 .

Similarmente, considere o grafo G que tem conjunto de vértices $\bigcup_{i \in [k]} (A_i \cup B_i \cup C_i)$, onde:

- os conjuntos A_i , B_i , e C_i são disjuntos para todo $i \in [k]$;
- $|A_i| = a$, $|B_i| = a + 1$, e $|C_i| = ka$ para todo $i \in [k]$ e algum $a \in \mathbb{N}$;
- a vizinhança fechada $N_G[u]$ de um vértice u em A_j para $j \in [k]$ é $B_j \cup \bigcup_{i \in [k]} A_i$;
- a vizinhança fechada $N_G[v]$ de v em B_j para $j \in [k]$ é $A_j \cup \{v\} \cup C_j$; e
- a vizinhança fechada $N_G[w]$ de um vértice w em C_j para $j \in [k]$ é $B_j \cup C_j$.

Então temos que G possui as seguintes características:

(i) é regular de grau $(k + 1)a$.

De fato:

- se $u \in A_j$, para $j \in [k]$, então $N[u] = B_j \cup \bigcup_{i \in [k]} A_i$, o que implica que $|N[u]| = (a + 1) + ka = a(k + 1) + 1$. Logo, $d(u) = (k + 1)a$, $\forall u \in A_j$;
- se $v \in B_j$, $j \in [k]$, então $N[v] = A_j \cup \{v\} \cup C_j$. Então, $|N[v]| = a + 1 + ka = a(k + 1) + 1$ e, conseqüentemente, $d(v) = (k + 1)a$, $\forall v \in B_j$;
- se $w \in C_j$, $N[w] = B_j \cup C_j$, o que acarreta $|N[w]| = (a + 1) + ka = a(k + 1) + 1$. Portanto, $d(w) = (k + 1)a$, $\forall w \in C_j$.

(ii) tem conectividade a .

O grafo G é a -vértice conexo porque para torná-lo desconexo basta retirar a vértices de um dos conjuntos A_i .

(iii) tem diâmetro 5.

Sejam $u, v \in G$. Consideremos todos os casos possíveis para a distância entre u e v :

- se $u, v \in A_j$, então $d(u, v) = 1$, para todo $j \in [k]$;
- se $u, v \in B_j$, então $d(u, v) = 2$, para todo $j \in [k]$;
- se $u, v \in C_j$, então $d(u, v) = 1$, para todo $j \in [k]$;
- se $u \in A_j$ e $v \in A_l$, com $j \neq l$, então $d(u, v) = 1$, para todo $j, l \in [k]$;
- se $u \in B_j$ e $v \in B_l$, com $j \neq l$, então $d(u, v) = 3$, para todo $j, l \in [k]$;
- se $u \in C_j$ e $v \in C_l$, com $j \neq l$, então $d(u, v) = 5$, para todo $j, l \in [k]$;
- se $u \in A_j$ e $v \in B_j$, então $d(u, v) = 1$, para todo $j \in [k]$;
- se $u \in A_j$ e $v \in C_j$, então $d(u, v) = 2$, para todo $j \in [k]$;
- se $u \in B_j$ e $v \in C_j$, então $d(u, v) = 1$, para todo $j \in [k]$;
- se $u \in A_j$ e $v \in B_l$, com $j \neq l$, então $d(u, v) = 2$, para todo $j, l \in [k]$;
- se $u \in A_j$ e $v \in C_l$, com $j \neq l$, então $d(u, v) = 3$, para todo $j, l \in [k]$;
- se $u \in B_j$ e $v \in C_l$, com $j \neq l$, então $d(u, v) = 4$, para todo $j, l \in [k]$.

Logo, $\max_{u,v \in V(G)} d(u,v) = 5$. Portanto, G possui diâmetro igual a 5.

(iv) $\gamma(G) = k + 1$.

Para construir um conjunto dominante mínimo basta selecionar um vértice em cada conjunto C_i , portanto k vértices, mais um vértice em algum conjunto A_i . Assim, obtemos um conjunto dominante mínimo com $k + 1$ vértices.

(v) $\gamma_t(G) = 2k$.

Para obter um conjunto dominante total mínimo é suficiente tomar um vértice em cada A_i , para todo $i \in [k]$, e um respectivo vizinho em cada B_i , para todo $i \in [k]$. Com isso, selecionaremos k vértices nos conjuntos A_i e mais k vértices nos conjuntos B_i . Logo, $\gamma_t(G) = 2k$.

Na Figura 3.2 exibimos um exemplo de um grafo G obtido a partir desta construção em que $k = a = 2$. Representamos os conjuntos $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $B_1 = \{5, 6, 7\}$, $B_2 = \{8, 9, 10\}$, $C_1 = \{11, 12, 13, 14\}$ e $C_2 = \{15, 16, 17, 18\}$. Perceba que o conjunto $D = \{1, 11, 17\}$ é um conjunto dominante em G e os vértices do conjunto $T = \{1, 3, 5, 8\}$ formam um conjunto dominante total no grafo G .

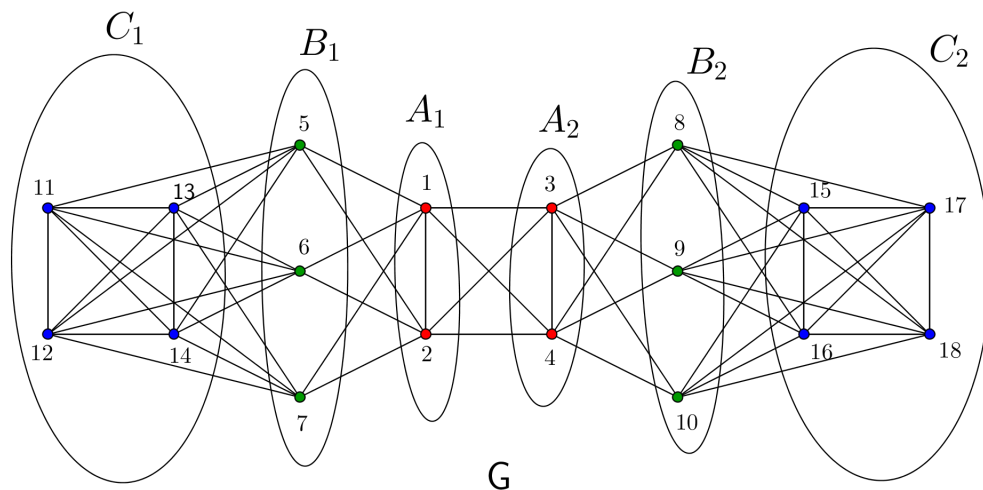


Figura 3.2: Exemplo de grafo em que $a = k = 2$.

O grafo G obtido através da construção descrita possui um grau mínimo grande, um alto grau de regularidade, uma grande conectividade, um diâmetro pequeno

e um grande número de dominação, entretanto não conseguimos uma melhora significativa para (3.2).

No exemplo da Figura 3.2, o grafo G é 6-regular, possui diâmetro 5, tem conectividade 2, possui $\gamma(G) = 3$ e $\gamma_t(G) = 4$.

Agora, mostraremos como melhorar as desigualdades já existentes que relacionam os números de dominação e dominação total para a classe dos grafos cúbicos com cintura grande.

Se G é um grafo cúbico com n vértices temos claramente os seguintes limites inferiores para $\gamma(G)$ e para $\gamma_t(G)$:

$$\gamma(G) \geq \frac{1}{4}n$$

e

$$\gamma_t(G) \geq \frac{1}{3}n.$$

Como G é 3-regular, um vértice $v \in G$ domina seus três vizinhos, além de si mesmo, logo $\gamma(G)$ é no mínimo $\frac{1}{4}n$. Da mesma forma, pelo fato do grafo G ser cúbico, dois vértices vizinhos u e v em um conjunto dominante total qualquer dominam, além deles mesmos, os dois outros vizinhos. Portanto, a cada dois vértices adjacentes selecionados em um conjunto dominante total, são dominados seis vértices ao todo. Assim, conclui-se que $\gamma_t(G)$ é pelos menos $\frac{2}{6}n = \frac{1}{3}n$.

O melhor limite superior conhecido até então para o número de dominação de grafos cúbicos de ordem n e cintura pelo menos g foi dado por Král *et al.* [37], que mostrou:

$$\gamma(G) \leq 0.299871n + O\left(\frac{n}{g}\right). \quad (3.3)$$

Combinando esta desigualdade com $\gamma_t(G) \geq \frac{1}{3}n$, conseguimos uma melhora para (3.1).

Corolário 3.1 *Se G é um grafo cúbico de ordem n e cintura pelo menos g , então*

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \geq 1.111589 - O\left(\frac{1}{g}\right). \square$$

O próximo corolário utiliza o resultado de Henning and Yeo [31, 32] enunciado a seguir:

Teorema 3.2 *Se G é um grafo de ordem n , grau mínimo pelo menos 2, e cintura pelo menos g , então*

$$\gamma_t(G) \leq \frac{1}{2}n + O\left(\frac{n}{g}\right). \quad \square$$

Aplicando um artifício de [39], que consiste em utilizar o Teorema de Brooks (Teorema 2.1), chegamos ao seguinte corolário a partir do resultado de Henning and Yeo [31, 32].

Corolário 3.3 *Se G é um grafo cúbico de ordem n e cintura pelo menos g , então*

$$\gamma_t(G) \leq \frac{121}{248}n + O\left(\frac{n}{g}\right) \leq 0.488n + O\left(\frac{n}{g}\right). \quad (3.4)$$

Prova: Considere G um grafo cúbico, com n vértices e cintura pelo menos g . Para obter o limite desejado, podemos assumir que g é suficientemente grande.

Seja H a quinta potência do grafo linha de G . Como G é cúbico, possui $\frac{3n}{2}$ arestas. Logo, $L(G)$, o grafo linha de G , é 4-regular e possui $\frac{3n}{2}$ vértices. Assim, H possui $\frac{3n}{2}$ vértices e, além disso, não é um ciclo ímpar nem um grafo completo porque tomamos g suficientemente grande.

Temos que H possui grau máximo igual a 124. Então, pelo Teorema 2.1, $\chi(H) \leq 124$. Ou seja, existe um conjunto M de pelo menos $\frac{V(H)}{\chi(H)} \geq \frac{3n}{248}$ arestas que estão duas a duas a uma distância pelo menos 5 em G .

Sejam T_0 o conjunto com $2|M|$ vértices incidentes às arestas M , e $G_1 = G \setminus N_G[T_0]$. Como $|T_0| = 2|M|$ e G é cúbico, temos que $|G_1| = n - 6|M|$. Além disso, G_1 tem grau pelo menos 2 e cintura pelo menos g .

Logo, pelo Teorema 3.2, o grafo G_1 possui um conjunto dominante total T_1 tal que:

$$\gamma_t(T_1) \leq \frac{1}{2}(n - 6|M|) + O\left(\frac{n}{g}\right).$$

Como $T_0 \cup T_1$ é um conjunto dominante total de G , obtemos:

$$\begin{aligned}\gamma_t(G) &\leq 2|M| + \frac{1}{2}(n - 6|M|) + O\left(\frac{n}{g}\right) \\ &= \frac{1}{2}n - |M| + O\left(\frac{n}{g}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}n - \frac{3}{248}n + O\left(\frac{n}{g}\right) \\ &= \frac{121}{248}n + O\left(\frac{n}{g}\right),\end{aligned}$$

o que completa a prova. \square

Combinando o corolário acima com $\gamma(G) \geq \frac{1}{4}n$, obtemos a seguinte melhora de (3.2).

Corolário 3.4 *Se G é um grafo cúbico de ordem n e cintura pelo menos g , então*

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq \frac{121}{62} + O\left(\frac{1}{g}\right) \leq 1.952 + O\left(\frac{1}{g}\right).$$

Prova: Pelo corolário 2, temos que:

$$\gamma_t(G) \leq \frac{121}{248}n + O\left(\frac{n}{g}\right).$$

Como $\gamma(G) \geq \frac{1}{4}n$, temos que

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq \frac{\frac{121}{248}n + O\left(\frac{n}{g}\right)}{\frac{1}{4}n},$$

o que implica que

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq \frac{484}{248} + O\left(\frac{1}{g}\right)$$

e, conseqüentemente

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq \frac{121}{62} + O\left(\frac{1}{g}\right) \leq 1.952 + O\left(\frac{1}{g}\right). \quad \square$$

A seguir enunciamos nosso principal resultado que mostra um limite para o número de dominação total melhor do que o estabelecido por (3.4). Especificamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 3.5 *Se G é um grafo cúbico com n vértices, cintura pelo menos g e número de dominação $\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n$ para algum $\epsilon \geq 0$, então*

$$\gamma_t(G) \leq \frac{13}{32}n + \frac{3n}{4(g-2)} + \frac{91}{8}\epsilon n \leq 0.40625n + O\left(\frac{n}{g}\right) + O(\epsilon n).$$

Prova:

Seja G um grafo cúbico de ordem n , cintura pelo menos g , e número de dominação $\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n$, para algum $\epsilon \geq 0$. Por questões de simplificação, considere $\gamma = \gamma(G)$ e $\gamma_t = \gamma_t(G)$.

Seja D um conjunto dominante mínimo de G . Então, $|D| = \gamma$. Associe arbitrariamente a cada vértice em $V(G) \setminus D$ algum vizinho em D . Por um resultado de Bollobás e Cockayne [7], podemos assumir que para todo vértice u em D , pelo menos um vértice em $V(G) \setminus D$ é associado a u .

Seja D_0 o conjunto de vértices de D para os quais três vértices em $V(G) \setminus D$ foram associados. Seja $D_1 = D \setminus D_0$. Note que D_0 e D_1 formam uma partição do conjunto dominante D , conforme esquematizado na Figura 3.3.

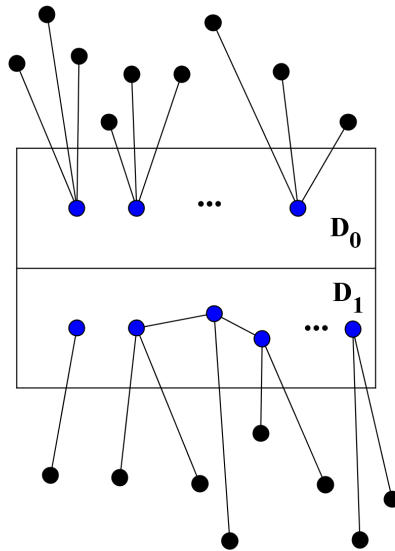


Figura 3.3: Partição do conjunto dominante D em D_0 e D_1 .

Sejam $\gamma_0 = |D_0|$ e $\gamma_1 = |D_1|$. Como $|D| = |D_0| + |D_1|$, tem-se que:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1. \tag{3.5}$$

Como as vizinhanças fechadas dos vértices em D_0 são distintas e, para todo vértice em D_1 , pelo menos um vértice foi associado, tem-se que:

$$4\gamma_0 + 2\gamma_1 \leq n. \quad (3.6)$$

Substituindo $\gamma_1 = \gamma - \gamma_0$ e $\gamma = \left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n$ na desigualdade 3.6, conclui-se que:

$$\gamma_0 \leq \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)n. \quad (3.7)$$

A partir de 3.7 e usando 3.5, concluímos que:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &\leq \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)n \\ \gamma - \gamma_1 &\leq \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)n \\ \gamma_1 &\geq \gamma - \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)n \\ \gamma_1 &\geq \gamma = \left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n - \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)n \\ \gamma_1 &\geq 2\epsilon n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como D é dominante, temos que:

$$\begin{aligned} n &\leq 4\gamma_0 + 3\gamma_1 = 4(\gamma - \gamma_1) + 3\gamma_1 \\ &= 4\gamma - \gamma_1 = 4\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n - \gamma_1 \\ &= (1 + 4\epsilon)n - \gamma_1, \end{aligned}$$

que implica

$$\gamma_1 \leq 4\epsilon n. \quad (3.9)$$

Seja U o conjunto de vértices de $V(G) \setminus D$ associados aos vértices em D_0 e $n_U = |U|$, conforme ilustrado na Figura 3.4.

Como, pelo menos, um vértice foi associado a cada vértice em D_1 :

$$\begin{aligned}
n_U + \gamma_0 + 2\gamma_1 &\leq n \\
n_U &\leq n - \gamma_0 - 2\gamma_1 \\
n_U &\leq n - (\gamma - \gamma_1) - 2\gamma_1 \\
n_U &\leq n - \gamma - \gamma_1 \\
n_U &\leq n - \left(\frac{1}{4}n + \epsilon n\right) - \gamma_1 \\
n_U &\leq \frac{3}{4}n - \epsilon n - \gamma_1.
\end{aligned}$$

Mas, por 3.8, $-\gamma_1 \leq -2\epsilon n$. Então,

$$n_U \leq \frac{3}{4}n - \epsilon n - 2\epsilon n,$$

o que implica

$$n_U \leq \left(\frac{3}{4} - 3\epsilon\right)n. \quad (3.10)$$

Seja $R = V(G) \setminus (D_0 \cup U)$.

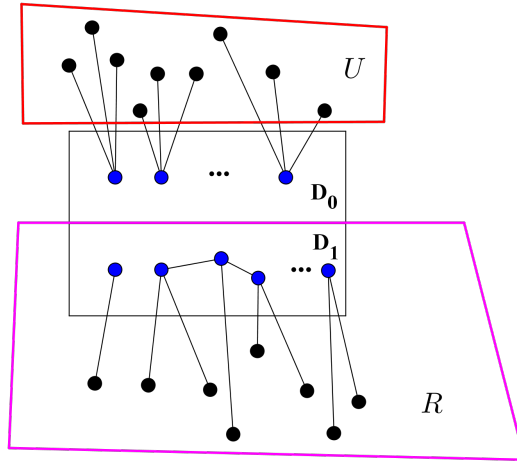


Figura 3.4: Representação esquemática dos conjuntos D_0 , D_1 , U e R .

Em D_1 há dois tipos de vértices: os do tipo A, que foram associados a apenas um vértice em $V(G) \setminus D$ e os do tipo B, aos quais foram associados dois vértices em $V(G) \setminus D$, como ilustrado na Figura 3.5.

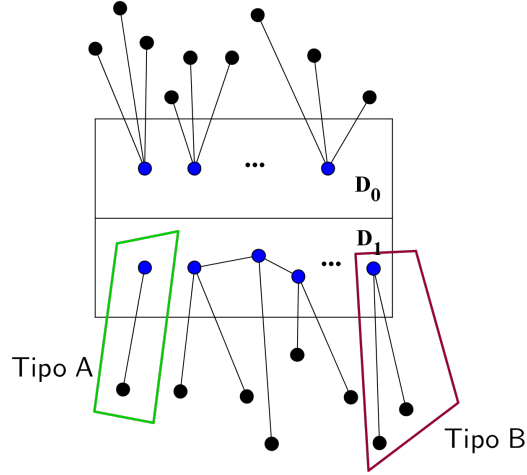


Figura 3.5: Vértices do tipo A e do tipo B

Se $u \in D_1$ é do tipo A, exatamente um vértice foi atribuído a ele, digamos v , então há no máximo 2 arestas entre u e U e no máximo 2 arestas entre v e U . Se $u \in D_1$ é do tipo B, exatamente dois vértices, digamos v_1 e v_2 , foram atribuídos a u , então há no máximo 1 aresta entre u e U , no máximo 2 arestas entre v_1 e U e no máximo 2 arestas entre v_2 e U . Logo, entre U e R há no máximo $5\gamma_1$ arestas. Utilizando 3.9, chegamos a conclusão que existem no máximo $5\gamma_1 \leq 20\epsilon n$ arestas entre U e R .

Já que cada vértice em U possui exatamente um vizinho em D_0 , o grafo $G[U]$ é a união disjunta de r ciclos e s caminhos porque o grau máximo de $G[U]$ é 2.

Para cada caminho precisamos de no mínimo uma aresta. Logo, a quantidade máxima de caminhos existentes em U é a metade no número máximo de arestas entre U e R . Assim, $2s \leq 5\gamma_1 \leq 20\epsilon n$, o que implica que:

$$s \leq 10\epsilon n.$$

Como n_u é a quantidade de vértices em U e todo ciclo contém pelo menos g vértices (porque o grafo tem cintura no mínimo g), tem-se que:

$$r \leq \frac{n_U}{g}.$$

Se H é um ciclo ou um caminho de tamanho ℓ , então podemos obter uma partição de $V(G)$ em no máximo $\frac{\ell}{g-2} + 1$ conjuntos, em que cada conjunto induz um caminho de tamanho no máximo $g-2$.

Portanto, é possível particionar U em k conjuntos que induzem k caminhos

P_1, \dots, P_k de tamanho no máximo $g - 2$ tais que:

$$k \leq \frac{n_U}{g-2} + r + s \leq \frac{n_U}{g-2} + \frac{n_U}{g} + s \leq \frac{2n_U}{g-2} + s \leq \frac{3n}{2(g-2)} + 10\epsilon n.$$

Assim, temos no máximo k caminhos, sendo:

$$k \leq \frac{3n}{2(g-2)} + 10\epsilon n.$$

Note que, pelo fato da cintura de G ser pelo menos g , nenhum vértice em $V(G) \setminus V(P_i)$ tem mais de um vizinho $V(P_i)$ para todo $i \in [k]$.

Construiremos agora um conjunto dominante total randômico T de G começando com um conjunto vazio da seguinte forma:

- adicione todos vértices em D_1 a T ;
- para todo vértice u em D_1 , escolha um dos vértices associados a u uniforme, independente e aleatoriamente e adicione-o ao conjunto T' ;
- adicione todos vértices em T' a T .

Se $v \in D_1$ é do tipo A, a probabilidade $u \in R$ ser escolhido ao acaso é igual a 1. Se $v \in D_1$ é do tipo B, a possibilidade de seu vizinho $u \in R$ ser escolhido para T é de $1/2$. Como para todo vértice em D_1 ou um ou dois vértices foram associados em $V(G) \setminus D$, todo vértice em R tem um vizinho em T e todo vértice em R pertence a T com probabilidade pelo menos $1/2$, como esquematizado na Figura 3.6.

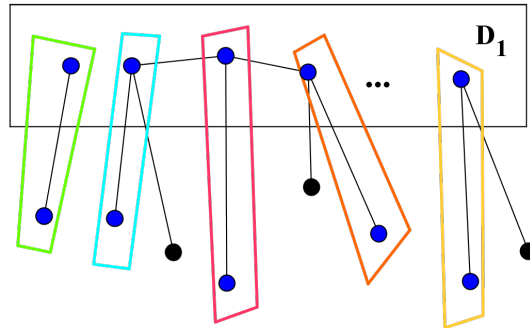


Figura 3.6: Conjunto T' .

- para cada $i \in [k]$, procedemos como segue:
 - seja $P_i = u_1 u_2 \dots u_\ell$;
 - escolhemos randomicamente $x_i \in \{0, 2\}$ independente e uniformemente;
 - adicione a T todos os vértices no conjunto T_i com

$$T_i = \{u_j : (j \in [\ell]) \wedge ((j \equiv x_i \pmod{4}) \vee ((j - 1) \equiv x_i \pmod{4}))\}.$$

Note que todo vértice em U pertence a T com probabilidade $\frac{1}{2}$, o que implica que o valor esperado da cardinalidade de $\bigcup_{i \in [k]} T_i$ satisfaz:

$$\mathbf{E} \left[\sum_{i \in [k]} |T_i| \right] = \frac{n_U}{2}.$$

Até agora, todos vértices internos dos caminhos P_1, \dots, P_k tem um vizinho em T . Além disso, todos os extremos de P_1, \dots, P_k não possuem vizinhos em T com probabilidade no máximo $\frac{1}{4}$.

- para cada vértice u em U que não possui vizinho T até então, adicione um vizinho de u ao conjunto T'' .
- adicione todos vértices em T'' a T .

Note que $\mathbf{E}[|T''|] \leq \frac{1}{4} \cdot 2k = \frac{k}{2}$.

- para cada vértice u em D_0 que ainda não possui vizinho em T até agora, adicione um vizinho de u ao conjunto T''' .
- adicione todos os vértices em T''' a T .

Como todo vértice em D_0 tem três vizinhos em U , onde dois a dois não pertencem a um mesmo caminho P_i , obtemos:

$$\mathbf{E}[|T'''|] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \gamma_0.$$

Agora T é um conjunto dominante total de G . Como γ_t é cardinalidade do menor conjunto dominante total, sabemos pelo Método do Primeiro Momento que é no máximo o valor esperado da cardinalidade de T :

$$\begin{aligned}
\gamma_t(G) &\leq \mathbf{E}[|T|] \\
&= |D_1| + \mathbf{E}[|T'|] + \mathbf{E}\left[\sum_{i \in [k]} |T_i|\right] + \mathbf{E}[|T''|] + \mathbf{E}[|T'''|] \\
&\leq \gamma_1 + \gamma_1 + \frac{n_U}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{8}\gamma_0 \\
&\leq 2\gamma_1 + \frac{n_U}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\epsilon - \epsilon n\right) \\
&\leq 2(4\epsilon n) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - 3\epsilon\right)n + \frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2(g-2)} + 10\epsilon n\right) + \frac{n}{32} - \frac{\epsilon n}{8} \\
&\leq 8\epsilon n + \frac{3n}{8} - \frac{3\epsilon n}{2} + \frac{3n}{4(g-2)} + 5\epsilon n + \frac{n}{32} - \frac{\epsilon n}{8} \\
&= \left(8 + 5 - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right)\epsilon n + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{32}\right)n + \frac{3n}{4(g-2)} \\
&= \frac{13}{32}n + \frac{3n}{4(g-2)} + \frac{91}{8}\epsilon n \\
&\leq 0.40625n + O\left(\frac{n}{g}\right) + O(\epsilon n),
\end{aligned}$$

que completa a prova do teorema. \square

Finalmente, a partir do resultado do Teorema 3.4 com o resultado fixado no Corolário 3.2, conseguimos obter uma melhora para o Corolário 3.3.

Corolário 3.6 *Se G é um grafo cúbico com n vértices e cintura pelo menos g , então*

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq \frac{11011}{5804} + O\left(\frac{1}{g}\right) \leq 1.89714 + O\left(\frac{1}{g}\right).$$

Prova: Seja G um grafo que atenda às hipóteses fixadas e seja $\gamma(G) = \left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)n$ para algum $\epsilon \geq 0$.

Pelo Corolário 3.3 e Teorema 3.5, obtemos:

$$\frac{\gamma_t(G)}{\gamma(G)} \leq \frac{\min\left\{\frac{13}{32} + \frac{91}{8}\epsilon, \frac{121}{248}\right\}}{\frac{1}{4} + \epsilon} + O\left(\frac{1}{g}\right).$$

Como $\left(\frac{13}{32} + \frac{91}{8}\epsilon\right) / \left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)$ é crescente como uma função de $\epsilon \geq 0$ e $\frac{13}{32} + \frac{91}{8}\epsilon = \frac{121}{248}$ para $\epsilon = \frac{81}{11284}$, o resultado desejado segue. \square

Capítulo 4

Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesse trabalho estudamos a relação entre o número de dominação $\gamma(G)$ e o número de dominação total $\gamma_t(G)$ para grafos cúbicos G de cintura grande. Para um grafo cúbico G com $n(G)$ vértices, claramente $\gamma(G)$ é pelo menos $n(G)/4$. Se $\gamma(G)$ é próximo de $n(G)/4$, então isso força uma certa estrutura dentro de G . Estudamos esta estrutura e provamos um limite superior para $\gamma_t(G)$, que depende do valor de $\gamma(G)$. Como consequência, melhoramos consideravelmente a desigualdade $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$ para classe dos grafos cúbicos de cintura grande.

Este trabalho foi apresentado no Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (Eurocomb 2013) e seu resumo estendido publicado em seus anais [18]. A versão completa deste trabalho foi submetida para a revista *Discrete Applied Mathematics* [19]. Embora nossos resultados melhorem os existentes na literatura, acreditamos que é possível que eles sejam melhorados ainda mais.

Modificando adequadamente a estratégia da prova do Teorema 3.4 é possível mostrar um limite superior para o número de dominação de um grafo cúbico de ordem $n(G)$, cintura pelo menos g e com número de dominação total próximo a $n(G)/3$. Mas, infelizmente, esse limite não é melhor do que o resultado estabelecido por Král *et al.* [37].

Como trabalhos futuros, podemos tentar melhorar ainda mais esse resultado obtido, além de estender o estudo para outras classes de grafos e considerar também outros tipos de dominação.

Desse modo, concluímos que nosso trabalho contribuiu significativamente para a compreensão da relação entre dominação e dominação total em grafos cúbicos com cintura grande.

Referências Bibliográficas

- [1] ALLAN, R. B., LASKAR, R., HEDETNIEMI, S. T. “A note on total domination”, **Discrete Math.** v.49, pp. 7-13, 1984.
- [2] ALON, N., SPENCER, J. H. **The probabilistic method**. New York, John Wiley & Sons, 2000.
- [3] BALL, W. W. R. **Mathematical recreations and essays**. New York, Macmillan, 1905.
- [4] BERGE, C. **Theory of graphs and its applications**. London, Methuen, 1962.
- [5] BERTOSSI, A. A. “Dominating sets for split and bipartite graphs”, **Inform. Process. Lett** v. 19, pp. 37-40, 1984.
- [6] BEZZEL, M. “Schachfreun”, **Berliner Schachzeitung** v.3, pp. 363, 1848.
- [7] BOLLOBÁS, B., COCKAYNE, E.J. “Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance”, **J. Graph Theory** v.3, pp. 241-249, 1979.
- [8] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. Graduate Texts in Mathematics, 244. New York, Springer, 2008.
- [9] BOOTH, K. S., JOHNSON, J. H. “Dominating sets in chordal graphs”, **SIAM J. Comput.** v.11, pp. 191-199, 1982.
- [10] BRANDSTÄDT, A., LE, V. B., SPINARD, J. P. **Graph Classes: a Survey**. SIAM, 1999.
- [11] CHANG, G. J., NEMHAUSER, G. L. “The k -domination e k -stability problems in sun-free chordal graphs”, **SIAM J. Algebraic Discrete Methods** v.5, pp. 332-345, 1984.
- [12] CHARTRAND, G. **Introductory Graph Theory**. New York, Dover, 1985.
- [13] COCKAYNE, E. J., DAWES, R. M., HEDETNIEMI, S. T. “Total domination in graphs”, **Networks** v.10, pp. 211-219, 1980.

- [14] COCKAYNE, E. J., GAMBLE, B., SHEPHERD, B. “Domination of chessboards by queens in a column”, **Ars Combin.** v.19, pp. 105-118, 1985.
- [15] COCKAYNE, E. J., GAMBLE, B., SHEPHERD, B. “Domination parameters for the bishops graph”, **Discrete Math.** v.58, pp. 221-227, 1986.
- [16] COCKAYNE, E. J., HEDETNIEMI, S. T. “Towards a theory of domination in graphs”, **Networks** v.7, pp. 247-261, 1977.
- [17] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., STEIN, C. **Introduction to Algorithms.** 3 ed. Massachusetts, MIT Press, 2009.
- [18] DANTAS, S., JOOS, F., LÖWENSTEIN, C., MACHADO, D., RAUTENBACH, D. “Relating ordinary and total domination in cubic graphs of large girth”, **CRM Series** v.16, pp. 53-57, 2013.
- [19] DANTAS, S., JOOS, F., LÖWENSTEIN, C., MACHADO, D., RAUTENBACH, D. “Domination and Total Domination in Cubic Graphs of Large Girth”, **Discrete Applied Mathematics** (submitted).
- [20] DASGUPTA, S., PAPADIMITROU, C. H., VAZIRANI, U.V. **Algorithms.** McGraw-Hill, 2006.
- [21] DEWDNEY, A. K. **Fast turing reductions between problems in NP.** In: Reductions between NP-complete problems. Technical Report 71, Department Computer Science, University Western Ontario, 1981.
- [22] DIESTEL, R. **Graph Theory.** Graduate Texts in Mathematics, 173. New York, Springer, 2005.
- [23] DORFLING, M., GODDARD, W., HENNING, M.A., MYNHARDT, C.M. “Construction of trees and graphs with equal domination parameters”, **Discrete Math.** v.306, pp. 2647-2654, 2006.
- [24] FRICKE, G. H., HEDETNIEMI, S. M., HEDETNIEMI, S. T., MCRAE, A. A., WALLIS, C. K., JACOBSON, M. S., MARTIN, W. W., WEAKLEY, W. D. “Combinatorial problems on chessboards: a brief survey”, **Graph Theory, Combinatorics, and Applications** v.1, pp. 507-528, 1995.
- [25] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability. A guide to the theory of NP-Completeness.** New York, W.H. Freeman and Company, 1979.
- [26] HAYNES, T.W., HEDETNIEMI, S.T., SLATER, P.J. **Fundamentals of Domination in Graphs.** New York, Marcel Dekker, Inc., 1998.

- [27] HAYNES, T.W., HEDETNIEMI, S.T., SLATER, P.J. **Domination in Graphs: Advanced Topics**. New York, Marcel Dekker, Inc., 1998.
- [28] HEDETNIEMI, S. T., LASKAR, R. “Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters”, **Discrete Math.** v.86, pp. 257-277, 1990.
- [29] HENNING, M.A. “Trees with large total domination number”, **Util. Math.** v.60, pp. 99-106, 2001.
- [30] HENNING, M.A. “A survey of selected recent results on total domination in graphs”, **Discrete Math.** v.309, pp. 32-63, 2009.
- [31] HENNING, M.A., YEO, A. “Total domination in graphs with given girth”, **Graphs Combin.** v.24, pp. 333-348, 2008.
- [32] HENNING, M.A., YEO, A. “Girth and Total Domination in Graphs”, **Graphs Combin.** v.28, pp. 199-214, 2012.
- [33] HENNING, M.A., YEO, A. **Total domination in graphs**. New York, Springer, 2013.
- [34] KAWARABAYASHI, K., PLUMMER, M. D., SAITO, A. “Domination in a graph with a 2-factor”, **J. Graph Theory** v.52, pp. 1-6, 2006.
- [35] KOSTOCHKA, A. V., STODOLSKY, B. Y. “An upper bound on the domination number of n -vertex connected cubic graphs”, **Discrete Math.** v.309, pp. 1142-1162, 2009.
- [36] KOSTOCHKA, A. V., STODOLSKY, B. Y. “On domination in connected cubic graphs”, **Discrete Math.** v.304, pp. 45-50, 2005.
- [37] KRÁL, D., ŠKODA, P., VOLEC, J. “Domination number of cubic graphs with large girth”, **J. Graph Theory** v.69, pp. 131-142, 2012.
- [38] LASKAR, R., WALLIS, C. “Chessboard graphs, related designs, and domination parameters”, **Journal of Statistical Planning and Inference** v.76, pp. 285-294, 1999.
- [39] LÖWENSTEIN, C., RAUTENBACH, D. “Domination in graphs with minimum degree at least two and large girth”, **Graphs Combin.** v.24, pp. 37-46, 2008.
- [40] MEYER, P. L. **Introductory Probability and Statistical Applications**. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

- [41] MOLLOY, M., REED, B. **Graph Colouring and the Probabilistic Method**. Springer, 2002.
- [42] ORE, O. **Theory of graphs**. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXXVIII, 1962.
- [43] RAUTENBACH, D., REED, B. “Domination in cubic graphs of large girth”, **LNCS** v.4535, pp. 186-190, 2008.
- [44] REED, B. “Paths, stars and the number three”, **Combin. Prob. Comput.** v.5, pp. 267-276, 1996.
- [45] SZWARCFITER, J. L. **Grafos e Algoritmos Computacionais**. Rio de Janeiro, Campus, 1986.
- [46] WEST, D. B. **Introduction to the Graph Theory**. Prentice Hall, 2001.