



MÉTODO DE ESCALARIZAÇÃO PROXIMAL E MÉTODO PROXIMAL DE VALOR VETORIAL EM PROGRAMAÇÃO MULTIOBJETIVO

Rogério Azevedo Rocha

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Ronaldo Malheiros Gregório

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2014

MÉTODO DE ESCALARIZAÇÃO PROXIMAL E MÉTODO PROXIMAL DE
VALOR VETORIAL EM PROGRAMAÇÃO MULTIOBJETIVO

Rogério Azevedo Rocha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:



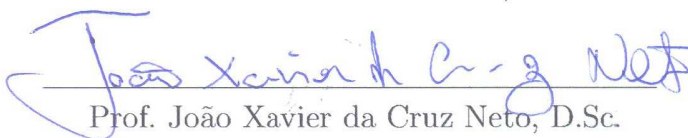
Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Ing.



Prof. Ronaldo Malheiros Gregório, D.Sc.



Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.



Prof. João Xavier da Cruz Neto, D.Sc.



Prof. Orizon Pereira Ferreira, D.Sc.



Prof. Michael Ferreira de Souza, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2014

Rocha, Rogério Azevedo

Método de escalarização proximal e método proximal de valor vetorial em programação multiobjetivo/Rogério Azevedo Rocha. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

VIII, 48 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira

Ronaldo Malheiros Gregório

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 45 – 48.

1. Algoritmo do ponto proximal. 2. Otimização multiobjetivo. 3. Solução Pareto. 4. Solução Pareto fraco. 5. Quase-distância. 6. Escalarização de aplicações. 7. Subdiferencial Fréchet. 8. Subdiferencial-limite. I. Oliveira, Paulo Roberto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Agradecimentos

Meu alicerce, meu amparo, meus Pais, Antônio Everton e Diomar Azevedo.

Meus irmãos e companheiros de longa data, Ricardo e Marcelo.

Minha alegria e suavidade, minha companheira, minha filha, Beatriz Soares.

Minha melhor amiga, meu sagrado amor, minha esposa, Sádía Soares.

Meus orientadores, meus amigos, os professores, Paulo R. Oliveira e Ronaldo M. Gregório.

A Banca Examinadora, pelo trabalho empenhado e pelas contribuições oferecidas.

Ao coordenador operacional do DINTER/Computação/UFT, professor Andreas Kneip (UFT).

A congregação do curso de Ciência da Computação da UFT pelo incentivo e apoio institucional durante estes quatro anos.

Aos amigos e colegas professores, que me acompanharam durante todo este processo: Gentil Veloso, Hellená Apolinário, Warley Gramacho e Sandra Regina.

Ao PESC/COPPE e seus professores na pessoa do professor Nelson Maculan pelos ensinamentos valiosos para toda a minha vida profissional e pessoal.

Aos funcionários do PESC/COPPE pelo empenho e dedicação em todo o processo.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MÉTODO DE ESCALARIZAÇÃO PROXIMAL E MÉTODO PROXIMAL DE VALOR VETORIAL EM PROGRAMAÇÃO MULTIOBJETIVO

Rogério Azevedo Rocha

Fevereiro/2014

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Ronaldo Malheiros Gregório

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, propomos dois métodos proximais para o problema de otimização multiobjetivo irrestrito. Em ambos os casos, consideramos que o vetor de funções objetivo é convexo e que possui pelo menos uma de suas funções objetivo coerciva. O primeiro método generaliza o método de escalarização proximal log-quadrático de Gregório e Oliveira e o segundo, generaliza o método proximal de valor vetorial de Bonnel et al.. Em ambos os casos, o termo quadrático dos subproblemas dos métodos que foram generalizados, é substituído pela quase-distância, que possui importantes aplicações em teoria da computação e economia, entre outras. O uso da quase-distância gerou a perda de importantes propriedades, como a convexidade e a diferenciabilidade. No entanto, mostramos a convergência do primeiro método para soluções Pareto e a convergência do segundo método, em versões exata e inexata, para soluções Pareto fraco. A análise de convergência do algoritmo exato (segundo método) só foi possível devido a uma variação de um importante resultado de escalarização.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

PROXIMAL SCALARIZATION METHOD AND VECTOR-VALUED
PROXIMAL METHOD IN MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING

Rogério Azevedo Rocha

February/2014

Advisors: Paulo Roberto Oliveira

Ronaldo Malheiros Gregório

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work, we propose two proximal methods for unconstrained multiobjective optimization problem. In both cases, we assume that the vector of objective functions is convex and has at least one of their objective functions is coercive. The first method, generalizes the log-quadratic proximal scalarization method of Gregório and Oliveira and the second method generalizes the vector-valued proximal method of Bonnel et al.. In both cases, the quadratic term of the subproblems of the methods that have been generalized, is replaced by the quasi-distance, which has important applications in computer theory and economics, among others. The use of quasi-distance caused the loss of important properties such as convexity and differentiability. However, we prove the convergence of the first method for Pareto solutions and the convergence of the second method, in exact and inexact versions, for weak Pareto solutions. The convergence analysis of the exact algorithm (second method) was possible due to a variation of an result important of scalarization.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 6 |
| 1.1 Resultados básicos | 6 |
| 1.2 Teoria do subdiferencial | 7 |
| 1.3 Quase-distância | 9 |
| 1.4 Programação multiobjetivo | 11 |
| 2 Método de escalarização proximal | 15 |
| 2.1 Propriedades e exemplos | 15 |
| 2.2 O método EPLQD | 18 |
| 2.2.1 Resultados preliminares | 18 |
| 2.2.2 Existência das iterações | 19 |
| 2.2.3 Critério de parada | 21 |
| 2.2.4 Convergência para soluções Pareto | 22 |
| 2.3 Uma variação do método EPLQD | 25 |
| 2.4 Exemplos numéricos | 27 |
| 3 Método proximal de valor vetorial | 30 |
| 3.1 Um algoritmo proximal exato | 30 |
| 3.1.1 Existência das iterações | 31 |
| 3.1.2 Escalarização dos subproblemas | 32 |
| 3.1.3 Convergência para soluções Pareto fraco | 34 |
| 3.1.4 Convergência para soluções Pareto | 37 |
| 3.2 Um algoritmo proximal inexato | 39 |
| 3.3 Exemplos numéricos | 40 |
| 4 Considerações finais | 43 |
| Referências Bibliográficas | 45 |

Notações

| | |
|-----------------------------------|---|
| \mathbb{N} | Conjunto dos números naturais. |
| \mathbb{R} | Conjunto dos números reais. |
| \mathbb{R}^m | Espaço Euclidiano m -dimensional. |
| \mathbb{R}_+^m | Ortante não-negativo de \mathbb{R}^m . |
| \mathbb{R}_{++}^m | Interior de \mathbb{R}_+^m . |
| $\langle x, y \rangle$ | Produto interno Euclidiano de x e y em \mathbb{R}^m . |
| $x \leq y$ | $x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, m$ ($x, y \in \mathbb{R}^m$). |
| $x \ll y$ | $x_i < y_i, \forall i = 1, \dots, m$ ($x, y \in \mathbb{R}^m$). |
| $x < y$ | $x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, m$ e $x_{i_0} < y_{i_0}$ para algum $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ ($x, y \in \mathbb{R}^m$). |
| $\ \cdot\ $ | Norma euclidiana. |
| $\ \cdot\ _1$ | Norma-1. |
| $B_\delta(a)$ | Bola aberta com centro em a e raio $\delta > 0$. |
| $\text{dom}(h)$ | Domínio efetivo da função h . |
| δ_C | Função indicadora do conjunto C . |
| $N_C(x)$ | Cone normal no ponto x em relação ao conjunto C . |
| $\hat{\partial}h(x)$ | Subdiferencial Fréchet da função h em x . |
| $\partial h(x)$ | Subdiferencial-limite da função h em x . |
| $A \pm B$ | $\{a \pm b \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$ com $A, B \subset \mathbb{R}^m$. |
| $\arg \min$ | Conjunto dos minimizadores. |
| ARG MIN | Conjunto das soluções Pareto. |
| ARG MIN _{w} | Conjunto das soluções Pareto fraco. |
| POM | Problema de Otimização Multiobjetivo. |

Introdução

Este trabalho considera o problema de otimização multiobjetivo (POM) irrestrito

$$\text{MINIMIZE } \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \quad (1)$$

onde $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(H1) F é convexa, i.e., $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa para todo $i \in \{1, \dots, m\}$;

(H2) F possui pelo menos uma de suas funções objetivo coerciva, i.e.,

$$\text{existe } r \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_r(x) = +\infty.$$

Nosso objetivo é analisar métodos para encontrar soluções Pareto fraco e/ou Pareto para o problema (1), significando, para o caso Pareto fraco, um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que não existe $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $F(x) \ll F(a)$ e, para o caso Pareto, um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que não existe $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $F(x) < F(a)$.

A importância da otimização multiobjetivo pode ser conferida em uma grande variedade de aplicações presentes na literatura. Stewart et al. [41] apresentam uma série de estudos de casos ilustrativos de uma ampla gama de aplicações de métodos de otimização multiobjetivo, em áreas que vão desde projeto de engenharia até tratamentos médicos. Além do trabalho de Stewart et al., podemos citar, dentre outros, o trabalho de White [43] que oferece uma bibliografia de 504 artigos descrevendo varias aplicações que abordam, por exemplo, problemas relacionados à agricultura, serviços bancários, serviços de saúde, energia, indústria e água. Mais informações, com respeito a otimização multiobjetivo, podem ser conferidas na seção 1.4 e Miettinen [29].

Existe uma classe mais geral de problemas, conhecida como otimização vetorial, que contém a otimização multiobjetivo. Conferir, por exemplo, Luc [27]. Os métodos desenvolvidos para esta classe de problemas podem ser classificados em dois tipos: métodos de escalarização e extensões de algoritmos de Programação Não-Linear para o caso vetorial. Algumas técnicas de otimização global são discutidas em Chinchuluun e Pardalos [12].

O algoritmo de ponto proximal (APP) clássico para minimizar uma função convexa de valor escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gera uma sequência $\{x^k\}$ através do seguinte procedimento iterativo: Dado um ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, então

$$x^{k+1} \in \arg \min \{f(x) + \lambda_k \|x - x^k\|^2 \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (2)$$

onde λ_k é uma sequência de números reais positivos e $\|\cdot\|$ é a norma usual. Este algoritmo foi inicialmente introduzido por Martinet [28] e desenvolvido e estudado por Rockafellar [36]. Nas últimas décadas, a análise de convergência da sequência $\{x^k\}$ vem sendo amplamente estudada, e então surgiram várias extensões deste método, no sentido de se considerar casos em que a função f é não convexa e/ou casos em que o termo quadrático em (2) é substituído por uma distância generalizada, como por exemplo, distância de Bregman, φ -divergências, distância proximal e quase-distância. Os trabalhos contendo estas generalizações incluem: Chen e Teboulle [7], Chen and Pan [8], Cruz Neto et al. [14], Cunha et al. [15], Kaplan and Tichatschke [23], Moreno et al. [31], Papa Quiroz e Oliveira [34], Pennanen [35] e Souza et al. [40]. Um ponto importante são as generalizações do APP clássico para espaços não-euclídeo, tais como Banach e Riemann, e neste sentido, podemos citar: Alber et al. [2] e Ferreira e Oliveira [17], entre outros.

Esta classe de APP foi estendida para várias classes de problemas e em especial para otimização vetorial. O primeiro método a apontar nesta direção foi o método feixes proximal multiobjetivo apresentado por Miettinen e Mäkelä (conf. Miettinen [29]). Göpfert et al. [19] apresentaram um método do ponto proximal para uma representação escalar $\langle F(x), z \rangle$ com uma regularização baseada em funções de Bregman sobre espaços de dimensão finita. Bonnel et al. [4], desenvolveram um APP de valor vetorial com regularização quadrática para investigar problemas de otimização vetorial convexo em espaços de Hilbert. Motivados pelo trabalho de Bonnel et al., outros estudos surgem na literatura apresentando APPs de valor vetorial e neste sentido, podemos citar: Ceng e Yao [6], Chen e Zhao [9], Chen et al. [10], Chen et al. [11], Chuog [13] e Villacorta e Oliveira [44]. Finalmente, observamos que Gregório e Oliveira [20] apresentaram um método de escalarização proximal em otimização multiobjetivo para uma representação escalar estrita abstrata com uma variação da função log-quadrática de Auslender et al. [3] como regularização.

Nos capítulos 2 e 3 vamos apresentar generalizações do método de escalarização proximal de Gregório e Oliveira [20] e do APP de valor vetorial de Bonnel et al. [4] (quando este estiver restrito à otimização multiobjetivo), respectivamente. A seguir, apresentaremos uma breve descrição dos métodos a serem generalizados.

1) Gregório e Oliveira [20]: Dados os pontos iniciais $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $z^0 \in \mathbb{R}_{++}^m$ e sequências $\beta_k, \mu_k > 0, k = 0, 1, \dots$, o método gera uma sequência $\{(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m$ via

o seguinte procedimento iterativo:

$$(x^{k+1}, z^{k+1}) \in \arg \min \{f(x, z) + \beta_k H_{z^k}(z) + \frac{\alpha_k}{2} \|x - x^k\|^2 \mid x \in \Omega^k, z \in \mathbb{R}_{++}^m\} \quad (3)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades (P1) a (P4) [conferir, seção 2.1 e Observação 2.1.1], $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$ e $H_{z^k} : \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $H_{z^k}(z) = \langle z/z^k - \log(z/z^k) - e, e \rangle$, com $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $z/z^k = (z_1/z_1^k, \dots, z_m/z_m^k)$ e $\log(z/z^k) = (\log(z_1/z_1^k), \dots, \log(z_m/z_m^k))$.

2) Bonnel et al. [4] (Restrito à otimização multiobjetivo):

versão exata: Dado um ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, o método gera uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ via o seguinte procedimento iterativo:

$$x^{k+1} \in \text{ARG MIN}_w \{F(x) + \frac{\alpha_k}{2} \|x - x^k\|^2 e_k \mid x \in \Omega^k\}, \quad (4)$$

onde $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{++}^m$ tal que $\|e_k\| = 1$ para todo k e $0 < \alpha_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Versão inexata: Dado um ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, o método gera uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ via o seguinte procedimento iterativo: Dada a k -ésima iterada x^k , tome como próxima iterada qualquer $x^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ tal que existe $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

$$0 \in \partial_{\varepsilon_k} (\langle F(\cdot), z^k \rangle + \delta_{\Omega^k})(x^{k+1}) + \alpha_k \langle e_k, z^k \rangle (x^{k+1} - x^k),$$

$$\varepsilon_k \leq \sigma \frac{\alpha_k}{2} \langle e_k, z^k \rangle \|x^{k+1} - x^k\|^2.$$

onde $\sigma \in [0, 1)$, $0 < \alpha_k, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ tal que $\|z^k\| = 1$ para todo k .

Recordamos que, para $\varepsilon \geq 0$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa,

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(y) - f(x) - \langle u, x - y \rangle \geq -\varepsilon \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Uma aplicação quase-distância (q.d.) em \mathbb{R}^n é uma aplicação $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x, y) = q(y, x) = 0 \iff x = y \quad \text{e} \quad q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z).$$

Segue que se uma q.d. satisfaz também a propriedade de simetria então ela é uma distância. Logo, quase-distâncias generalizam distâncias. Elas desempenham um papel fundamental nos algoritmos proximais desenvolvidos (capítulos 2 e 3), pois são empregadas como regularização. Mais especificamente, a q.d. q substitui as regularizações quadráticas em (3) e (4). O primeiro desafio que surge é que uma q.d. não necessariamente é uma função convexa, nem continuamente diferenciável e nem mesmo uma função coerciva em nenhum de seus argumentos. Vamos considerar a classe de q.d. que satisfaz: existem constantes positivas α e β tal que

$$\alpha \|x - y\| \leq q(x, y) \leq \beta \|x - y\|, \quad \forall x, y.$$

Isto permitirá a recuperação de propriedades, tais como coercividade e condição de Lipschitz (conf. Proposição 1.3.1). No entanto, outras propriedades, tais como a convexidade e a diferenciabilidade não são asseguradas. Consequentemente, os procedimentos utilizados para garantir os resultados de convergência dos nossos métodos foram diferentes dos procedimentos utilizados por Gregório e Oliveira e por Bonnel et al.

A motivação em se considerar a q.d. é que elas aparecem naturalmente em teoria da computação (Brattka [5] e Kunzi et al. [24]) e economia (Romaguera e Sanchis [38] e Moreno et al. [31]), dentre outras áreas. Vale ressaltar que Morero et al. [31] desenvolveram um algoritmo proximal com quase-distância como regularização, aplicado a funções escalares não diferenciáveis e não convexas e satisfazendo a desigualdade de Kurdyka-Lojasiewicz. Como a quase-distância não necessariamente é simétrica eles derivaram uma interpretação econômica para este algoritmo, aplicada à formação do hábito. Neste sentido, o trabalho de Moreno et al. sinaliza a possibilidade de uma interpretação econômica para os nossos algoritmos aplicada a problemas multiobjetivos relacionados com a economia.

Dentre as contribuições do trabalho, destacamos:

1º) A hipótese ($\mathcal{H}2$) - Esta hipótese, em conjunto com a hipótese de convexidade ($\mathcal{H}1$), implica na compacidade das restrições, Ω^k , dos subproblemas dos nossos algoritmos (Lema 2.2.1) e, consequentemente, na limitação de qualquer sequência gerada por eles (Proposições 2.2.4 e 3.1.3). Mais detalhes, em relação a esta hipótese, podem ser conferidos na introdução da seção 2.2.1 e na Observação 3.1.1;

2º) Uma nova aplicação $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades (P1) a (P4) abaixo que foram fundamentais para a análise de convergência do algoritmo que propomos no capítulo 2 (conf. Proposição 2.1.1).

(P1) f é limitada inferiormente por algum $\alpha \in \mathbb{R}$;

(P2) f é convexa em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$;

(P3) f é uma representação escalar de F , com respeito a x , i.e.,

$$F(x) \leq F(y) \Rightarrow f(x, z) \leq f(y, z) \quad \text{e} \quad F(x) < F(y) \Rightarrow f(x, z) < f(y, z)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}_+^m$;

(P4) f é diferenciável, com respeito a z e $\frac{\partial}{\partial z} f(x, z) = h(x, z)$, onde h é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ para \mathbb{R}_+^m .

3º) A propriedade (P3) - Esta propriedade foi fundamental para garantir a convergência do método que propomos no capítulo 2, para solução Pareto (em vez de Pareto fraco). Mais informações sobre esta propriedade podem ser encontradas na Observação 2.1.1.

4º) A Proposição 1.4.4 - Esta proposição é uma variação de um importante resultado de escalarização e permite a escalarização de aplicações que satisfazem apenas uma condição necessária da convexidade. A escalarização dos subproblemas do algoritmo proximal exato que propomos no capítulo 3 só foi viável devido a esta Proposição (conf. Proposição 3.1.2).

Vale ressaltar que os resultados obtidos nos capítulos 2 e 3 foram submetidos, para apreciação e possível publicação, nas revistas *Applied Mathematics and Computation* e *European Journal of Operational Research*, respectivamente.

No capítulo 1 apresentamos as definições básicas e notações, como também alguns conceitos e resultados a respeito da quase-distância, da teoria do subdiferencial Fréchet e limite e da teoria da programação multiobjetivo. No capítulo 2, desenvolvemos o método de escalarização (Método EPLQD), onde garantimos a boa definição da sequência gerada, o critério de parada e a convergência para soluções Pareto. Por último, testamos o método EPLQD apresentando alguns exemplos numéricos. No capítulo 3, desenvolvemos um método proximal de valor vetorial, apresentando uma versão exata (Algoritmo VQD-I) e uma versão inexata (Algoritmo VQD-II). Em ambos os casos, garantimos a boa definição da sequência gerada e a convergência para soluções Pareto fraco. Além disto, verificamos a existência de sequências que são geradas pelo algoritmo e que convergem para soluções Pareto (ao invés de Pareto fraco) e finalmente testamos o método apresentando alguns exemplos numéricos.

Nas seções 2.4 e 3.3, referentes as implementações dos algoritmos, contamos com o apoio do Dr. Michael Souza (UFC).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, além das notações e resultados básicos, recordamos os conceitos e algumas propriedades, dos subdiferenciais Fréchet e limite e da aplicação quase-distância, e por último faremos uma breve revisão da programação multiobjetivo. Além disto, destacamos neste capítulo a Proposição 1.4.4, que é uma variação de um importante resultado de escalarização (Proposição 1.4.3), e que permite a escalarização de aplicações que satisfazem apenas uma certa condição necessária da convexidade.

1.1 Resultados básicos

Nesta seção, com o objetivo de facilitar a leitura deste documento, grande parte das notações e dos resultados básicos que farão parte do nosso trabalho serão relembrados. Todos os conceitos e resultados podem ser conferidos em livros relacionados à análise matemática e análise convexa, tais como ([26], [32], [37]).

i) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. O domínio efetivo de f , $\text{dom}f$, é dado por $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$. Temos: f é própria se, e somente se, $\text{dom}(f) \neq \emptyset$.

ii) Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa e $\bar{x} \in \text{dom}(f)$. Então, o subdiferencial de f em \bar{x} , $\partial f(\bar{x})$, é definido por

$$\partial f(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \geq f(\bar{x}) + \langle y, z - \bar{x} \rangle \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

iii) Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\bar{x} \in \text{dom}(f)$. Então o ε -subdiferencial de f em \bar{x} , $\partial_\varepsilon f(\bar{x})$, é definido por

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \geq f(\bar{x}) + \langle y, z - \bar{x} \rangle - \varepsilon \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

iv) Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $U \subseteq \text{dom}(f)$. Então: a) f é lipschitziana em U se existe $L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$, $\forall x, y \in U$; b) f é localmente lipschitziana em $\bar{x} \in U$ se existe $\delta > 0$ tal que f é lipschitziana em $U \cap B_\delta(\bar{x})$.

v) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dizemos que f é semicontínua inferior (s.c.i.) no ponto $x \in \mathbb{R}^n$, quando para qualquer sequência $\{x^l\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\lim_{l \rightarrow +\infty} x^l = x$, tem-se $f(x) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} f(x^l)$. Além disto, f é s.c.i. em \mathbb{R}^n , ou simplesmente s.c.i., quando ela é s.c.i em todos os pontos de \mathbb{R}^n .

vi) Seja $C \subset \mathbb{R}^n$. Então a função indicadora de C , δ_C , é definida por $\delta_C(x) = 0$ se $x \in C$ e $\delta_C(x) = +\infty$ se $x \notin C$. Temos: (a) Se C é convexo, então δ_C é convexa; (b) Se C é fechado, então δ_C é semicontínua inferior; (c) Se C é limitado, então δ_C é coerciva.

vii) Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $\bar{x} \in C$. O cone normal (Cone de direções normais) no ponto \bar{x} em relação ao conjunto C é dado por $N_C(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \forall x \in C\}$. Temos: Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e $\bar{x} \in C$ então $\partial\delta_C(\bar{x}) = N_C(\bar{x})$.

1.2 Teoria do subdiferencial

Os subproblemas dos nossos algoritmos (capítulos 2 e 3) não necessariamente são convexos nem diferenciáveis. Portanto, para obtermos as condições de otimalidade, necessárias ao desenvolvimento do nosso trabalho, faz-se necessário o estudo de algum tipo de subdiferencial generalizado. Optamos pelo subdiferencial-limite, que está intimamente ligado com o subdiferencial Fréchet, pois suas propriedades suprem as necessidades da análise de convergência dos algoritmos propostos. Enunciaremos somente as propriedades que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Para mais detalhes, conferir, por exemplo ([32],[37]).

Definição 1.2.1 *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e semicontínua inferior e seja $x \in \mathbb{R}^n$.*

a) *O subdiferencial Fréchet de h em $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\partial}h(x)$, é dado por:*

$$\hat{\partial}h(x) := \begin{cases} \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{y \neq x, y \rightarrow x} \frac{h(y) - h(x) - \langle x^*, y - x \rangle}{\|x - y\|} \geq 0 \right\}, & \text{if } x \in \text{dom}(h) \\ \emptyset, & \text{if } x \notin \text{dom}(h) \end{cases}$$

b) O **subdiferencial-limite** de h em $x \in \mathbb{R}^n$, $\partial h(x)$, é dado por:

$$\partial h(x) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_n \rightarrow x, \quad h(x_n) \rightarrow h(x), \quad x_n^* \in \hat{\partial} h(x_n) \text{ e } x_n^* \rightarrow x^* \right\}$$

Proposição 1.2.1 Para uma função $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e um ponto $\bar{x} \in \text{dom}(h)$, os conjuntos $\hat{\partial} h(\bar{x})$ e $\partial h(\bar{x})$ são fechados, com $\hat{\partial} h(\bar{x})$ convexo e $\hat{\partial} h(\bar{x}) \subset \partial h(\bar{x})$.

Prova: Conferir Rockafellar e Wets [37], Teorema 8.6. ■

A Proposição seguinte mostra que os subdiferenciais Fréchet e limite generalizam o subdiferencial de funções convexas.

Proposição 1.2.2 Sejam $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa e própria, e $\bar{x} \in \text{dom}(h)$. Então,

$$\hat{\partial} h(\bar{x}) = \partial h(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid h(z) \geq h(\bar{x}) + \langle y, z - \bar{x} \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Além disto, se h for contínua em \bar{x} , então o subdiferencial é um conjunto convexo, compacto e não vazio.

Prova: Conferir Rockafellar e Wets [37], Proposição 8.12. ■

Observação 1.2.1 Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função contínua em $\bar{x} \in \text{dom}(h)$. Caso h seja não convexa, os conjuntos $\hat{\partial} h(\bar{x})$ e $\partial h(\bar{x})$ podem ser vazios. Por exemplo, para a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 0.6(|x-1|^{1/2} - |x+1|^{1/2}) + x^{1/3}$, os conjuntos $\partial h(0)$ e $\partial h(-1)$ são vazios (Conferir, Rockafellar e Wets [37], página 303).

A Proposição e Observação seguintes fornecem, em relação aos subdiferenciais Fréchet e limite, as condições necessárias de otimalidade. Quando as funções e restrições em questão são convexas, as condições necessárias de otimalidade passam a ser também suficientes, i.e., as recíprocas dos resultados passam a ser verdadeiras.

Proposição 1.2.3 Se uma função própria $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possui um mínimo local em $\bar{x} \in \text{dom}(h)$, então $0 \in \hat{\partial} h(\bar{x})$ e $0 \in \partial h(\bar{x})$.

Prova: Conferir Rockafellar e Wets [37], Teorema 10.1. ■

Observação 1.2.2 Seja $C \subset \mathbb{R}^n$. Se uma função própria $h : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possui um mínimo local $\bar{x} \in C$, então $0 \in \hat{\partial}(h + \delta_C)(\bar{x})$, $0 \in \partial(h + \delta_C)(\bar{x})$, onde δ_C é a função indicadora do conjunto C , definida na seção 1.1 item vi.

Quando a função é localmente lipschitziana, o subdiferencial-limite é limitado pela constante de Lipschitz. Segue o resultado:

Proposição 1.2.4 *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ localmente lipschitziana em \bar{x} e com constante de lipschitz $\mathcal{L} \geq 0$. Então $\|x^*\| \leq \mathcal{L}$ para todo $x^* \in \partial h(\bar{x})$.*

Prova: Conferir Mordukhovich [32], Corolário 1.81. ■

O Subdiferencial-limite possui importantes propriedades, em relação a soma e o produto de funções. Seguem os resultados:

Proposição 1.2.5 *Se $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, i = 1, 2$ são funções tais que h_1 é localmente lipschitziana em $\bar{x} \in \text{dom}(h_1) \cap \text{dom}(h_2)$ e h_2 é semicontínua inferior neste ponto, então*

$$\partial(h_1 + h_2)(\bar{x}) \subset \partial h_1(\bar{x}) + \partial h_2(\bar{x}).$$

Prova: Conferir Mordukhovich [32], Teorema 2.33. ■

Proposição 1.2.6 *Sejam $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ funções localmente lipschitzianas em \bar{x} . Então, se tem uma regra do produto na forma de igualdade:*

$$\partial(h_1 \cdot h_2)(\bar{x}) = \partial(h_2(\bar{x})h_1 + h_1(\bar{x})h_2)(\bar{x}).$$

Prova: Conferir Mordukhovich e Shao [33], Teorema 7.1. ■

1.3 Quase-distância

As funções objetivo de cada iteração dos métodos de ponto proximal propostos (capítulos 2 e 3), consistem de determinadas aplicações regularizadas por um termo adequado envolvendo uma quase-distância. Nesta seção, apresentamos o conceito de quase-distância e os resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho. Para mais detalhes, conferir, por exemplo ([1], [16], [31]).

Definição 1.3.1 ([42]) *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Uma aplicação $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma quase-distância em X se, para todos $x, y, z \in X$,*

a) $q(x, y) = q(y, x) = 0 \iff x = y$

b) $q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z)$.

Observação 1.3.1 **a)** *Se q também satisfaz a propriedade de simetria, i.e., para quaisquer $x, y \in X$, $q(x, y) = q(y, x)$, então q é uma distância em X ; **b)** *Para cada $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ fixado, as funções $q(\cdot, \bar{z})$ e $q(\bar{z}, \cdot)$ não necessariamente são convexas, nem diferenciáveis e nem mesmo coercivas (conferir [31], Exemplo 3.1 e Observação 3).**

O próximo resultado nos fornece uma classe de quase-distâncias que satisfazem importantes propriedades. Ao longo do nosso trabalho, vamos nos limitar a quase-distâncias que pertencem a esta classe.

Proposição 1.3.1 *Seja $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma quase-distância em \mathbb{R}^n . Suponha que existem constantes positivas α e β tais que*

$$\alpha\|x - y\| \leq q(x, y) \leq \beta\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Então, para cada $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$,

- a) As funções $q(\bar{z}, \cdot)$ e $q(\cdot, \bar{z})$ são lipschitzianas em \mathbb{R}^n ;
- b) As funções $q^2(\bar{z}, \cdot)$ e $q^2(\cdot, \bar{z})$ são localmente lipschitzianas em \mathbb{R}^n ;
- c) As funções $q(\bar{z}, \cdot)$, $q(\cdot, \bar{z})$, $q^2(\bar{z}, \cdot)$ e $q^2(\cdot, \bar{z})$ são coercivas.

Prova: Conferir Moreno et al. [31], Proposições 3.6 e 3.7 e Observação 5. ■

A seguir enunciamos um exemplo de uma quase-distância em \mathbb{R}^n , que satisfaz a propriedade (1.1) e é uma função convexa em cada um dos argumentos. Este exemplo foi apresentado por Moreno et al. em [31].

Exemplo 1.3.1 *Para cada $i = 1, \dots, n$, considere $c_i^-, c_i^+ > 0$ e $q_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por*

$$q_i(x_i, y_i) = \begin{cases} c_i^+(y_i - x_i) & \text{se } y_i - x_i > 0 \\ c_i^-(x_i - y_i) & \text{se } y_i - x_i \leq 0. \end{cases}$$

Então q_i é uma quase-distância sobre \mathbb{R} e $q(x, y) = \sum_{i=1}^n q_i(x_i, y_i)$ é uma quase-distância sobre \mathbb{R}^n . Além disto, para cada $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ temos

$$q(x, \bar{z}) = \sum_{i=1}^n q_i(x_i, \bar{z}_i) = \sum_{i=1}^n \max\{c_i^+(\bar{z}_i - x_i), c_i^-(x_i - \bar{z}_i)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim $q(\cdot, \bar{z})$ é uma função convexa. De forma análoga, $q(\bar{z}, \cdot)$ é convexa.

A seguinte proposição é uma consequência da Proposição 1.2.4 e garante a limitação uniforme de $\partial(q(\cdot, \bar{v}))(\bar{u})$ quando a q.d. q satisfaz a propriedade (1.1).

Proposição 1.3.2 *Sejam $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ fixados e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma quase-distância satisfazendo (1.1). Então, existe $M > 0$ (que não depende de \bar{u} e \bar{v}), tal que*

$$\|x^*\| \leq M \text{ para todo } x^* \in \partial(q(\cdot, \bar{v}))(\bar{u}).$$

Prova: Conferir Moreno [30], Lema 2.2.1. ■

1.4 Programação multiobjetivo

Nesta seção apresentamos as definições e propriedades relacionadas à programação multiobjetivo que serão fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho. Mais detalhes podem ser conferidos em Miettinen [29] e Sawaragi et al. [39].

Definição 1.4.1 *Considere os vetores $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$. Definimos:*

- a) $y \leq \bar{y} \iff y_i \leq \bar{y}_i \quad \forall i = 1, \dots, m;$
- b) $y < \bar{y} \iff y_i \leq \bar{y}_i \quad \forall i = 1, \dots, m$, com a desigualdade estrita assegurada para pelo menos um índice;
- c) $y \ll \bar{y} \iff y_i < \bar{y}_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$

Considere uma aplicação multiobjetivo $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e o seguinte Problema de Otimização Multiobjetivo (POM) irrestrito

$$\text{MINIMIZE}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.2)$$

Definição 1.4.2 *Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é uma solução Pareto local para o problema (1.2) se existe um disco $B_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$, com $\delta > 0$, tal que não existe $x \in B_\delta(a)$ satisfazendo $G(x) < G(a)$.*

Definição 1.4.3 *Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é uma solução Pareto local fraco para o problema (1.2) se existe um disco $B_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$, com $\delta > 0$, tal que não existe $x \in B_\delta(a)$ satisfazendo $G(x) \ll G(a)$.*

Denotemos por $\text{ARG MIN}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ e $\text{ARG MIN}_w\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ o conjunto das soluções Pareto local e o conjunto das soluções Pareto local fraco para o problema (1.2). É fácil ver que

$$\text{ARG MIN}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset \text{ARG MIN}_w\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Em geral, se um problema de otimização multiobjetivo restrito ou irrestrito é um problema convexo, a dizer, se a função objetivo $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função convexa, então toda solução Pareto local (fraco) é também uma solução Pareto global (fraco). Este resultado é discutido no Teorema 2.2.3, em Miettinen [29].

Definição 1.4.4 *Uma função de valor escalar $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma*

- a) **Representação escalar** de uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ quando, dados $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $$G(x) \leq G(\bar{x}) \implies g(x) \leq g(\bar{x}), \quad \text{e}$$
- $$G(x) < G(\bar{x}) \implies g(x) < g(\bar{x});$$

b) **Representação escalar estrita** de uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ quando, dados $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$G(x) \leq G(\bar{x}) \implies g(x) \leq g(\bar{x}), \text{ e}$$

$$G(x) \ll G(\bar{x}) \implies g(x) < g(\bar{x});$$

c) **Representação escalar fraca** de uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ quando, dados $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$G(x) \ll G(\bar{x}) \implies g(x) < g(\bar{x}).$$

Segue imediatamente da definição acima que: a) \implies b) \implies c). O próximo resultado demonstra uma interessante forma de obter representações escalares para aplicações multiobjetivo.

Proposição 1.4.1 $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma representação escalar (resp., representação escalar estrita) de $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se, e somente se, $g = f \circ G$ onde f é uma função crescente (resp., estritamente crescente) sobre $G(\mathbb{R}^n)$.

Prova: Conferir Luc [27], Proposição 2.3. ■

Considere $\arg \min \{g(x) \mid x \in \Omega\}$ denotando o conjunto dos minimizadores locais de $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. O próximo resultado estabelece uma importante relação entre os conjuntos $\arg \min \{g(x) \mid x \in \Omega\}$ e $\text{ARG MIN}_w \{G(x) \mid x \in \Omega\}$.

Proposição 1.4.2 Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma representação escalar fraca de uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Temos a inclusão:

$$\arg \min \{g(x) \mid x \in \Omega\} \subset \text{ARG MIN}_w \{G(x) \mid x \in \Omega\}.$$

Prova: Consequência imediata da Definição 1.4.4. ■

Na literatura relacionada a APPs de valor vetorial, a proposição a seguir tem sido aplicada de forma recorrente para escalarizar as iterações principais dos respectivos métodos. Isto ocorre pois em todos os casos os subproblemas são convexos. Conferir, por exemplo ([4],[6],[10],[11],[13]).

Proposição 1.4.3 Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e um conjunto convexo e $G : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação convexa, então

$$\text{ARG MIN}_w \{G(x) \mid x \in S\} = \bigcup_{\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}} \arg \min \{ \langle G(x), \bar{z} \rangle \mid x \in S \}.$$

Prova: Conferir Luc [27], Teorema 2.10. ■

Em nosso trabalho consideramos a classe de quase-distâncias que satisfazem a propriedade (1.1). Como as quase-distâncias que pertencem a esta classe não necessariamente são convexas em nenhum de seus argumentos, os subproblemas do APP

de valor vetorial proposto no capítulo 3 não necessariamente são convexas. Portanto, a Proposição 1.4.3 não poderá ser aplicada para escalarizar os subproblemas deste algoritmo. Como forma alternativa, verificamos que a Proposição anterior continua válida se considerarmos como hipótese apenas uma certa condição necessária da convexidade. Sua prova é baseada na prova da Proposição 1.4.3. O resultado segue abaixo:

Proposição 1.4.4 *Seja $G : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação onde S é um conjunto convexo em \mathbb{R}^n . Suponha que $G(T) + \mathbb{R}_+^m$ é um conjunto convexo em \mathbb{R}^m para todo convexo $T \subseteq S$. Então*

$$\text{ARG MIN}_w \{G(x) \mid x \in S\} = \bigcup_{\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}} \arg \min \{ \langle G(x), \bar{z} \rangle \mid x \in S \}.$$

Prova: Suponha que $x^* \in \bigcup_{\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}} \arg \min \{ \langle G(x), \bar{z} \rangle \mid x \in S \}$. Então

$$x^* \in \arg \min \{ \langle G(x), \bar{z} \rangle \mid x \in S \} \text{ para algum } \bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}.$$

Desde que $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$, $\langle G(\cdot), \bar{z} \rangle$ é uma representação escalar estrita de G . Logo, pela Proposição 1.4.2, $x^* \in \text{ARG MIN}_w \{G(x) \mid x \in S\}$.

Suponha agora que $x^* \in \text{ARG MIN}_w \{G(x) \mid x \in S\}$. Então existe uma bola aberta $B_\delta(x^*) \subset \mathbb{R}^n$ com $\delta > 0$ tal que não existe $x \in B_\delta(x^*) \cap S$ satisfazendo $G(x) \ll G(x^*)$. Portanto

$$(G(B_\delta(x^*) \cap S) + \mathbb{R}_+^m) \cap (G(x^*) - \mathbb{R}_{++}^m) = \emptyset. \quad (1.3)$$

De fato, suponha por contradição, que existam $x \in B_\delta(x^*) \cap S$ e $c \in \mathbb{R}_+^m$ tal que

$$G(x) + c \in (G(x^*) - \mathbb{R}_{++}^m).$$

Então

$$G(x) \in [G(x^*) - (\mathbb{R}_{++}^m + c)] \subset [G(x^*) - \mathbb{R}_{++}^m],$$

que é uma contradição. Como $B_\delta(x^*) \cap S$ é um conjunto convexo contido em S , por hipótese, $G(B_\delta(x^*) \cap S) + \mathbb{R}_+^m$ é também um conjunto convexo. Portanto, por (1.3), os conjuntos $A = G(B_\delta(x^*) \cap S) + \mathbb{R}_+^m$ e $B = G(x^*) - \mathbb{R}_{++}^m$ são convexas e disjuntos. Então, pelo Teorema da separação (conf. [37], Teorema 2.39), existem $z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $d \in \mathbb{R}$ tal que $\langle x_1, z \rangle \leq d \leq \langle x_2, z \rangle, \forall x_1 \in B$ e $x_2 \in A$, i.e.,

$$\langle G(x^*) - c_b, z \rangle \leq \langle G(x) + c_a, z \rangle, \forall x \in B_\delta(x^*) \cap S, c_a \in \mathbb{R}_+^m \text{ e } c_b \in \mathbb{R}_{++}^m. \quad (1.4)$$

Em particular, tomando $c_a = (0, \dots, 0)$, obtemos

$$\langle G(x^*), z \rangle \leq \langle G(x), z \rangle + \langle c_b, z \rangle, \forall x \in B_\delta(x^*) \cap S \text{ e } c_b \in \mathbb{R}_{++}^m$$

e então, fazendo $c_b \rightarrow 0$, obtemos

$$\langle G(x^*), z \rangle \leq \langle G(x), z \rangle, \forall x \in B_\delta(x^*) \cap S,$$

i.e., $x^* \in \arg \min\{\langle G(x), z \rangle \mid x \in S\}$. Finalmente, provamos que $z \in \mathbb{R}_+^m$. Tomando $x = x^*$ em (1.4), obtemos

$$\langle G(x^*) - c_b, z \rangle \leq \langle G(x^*) + c_a, z \rangle, \forall c_a \in \mathbb{R}_+^m \text{ e } c_b \in \mathbb{R}_{++}^m,$$

isto é,

$$\langle c_a + c_b, z \rangle \geq 0, \forall c_a \in \mathbb{R}_+^m \text{ e } c_b \in \mathbb{R}_{++}^m.$$

Então, tomando $c_a = 0$, obtemos $\langle c_b, z \rangle \geq 0, \forall c_b \in \mathbb{R}_{++}^m$. Portanto, $z \in \mathbb{R}_+^m$. ■

O próximo resultado, além de ser útil para a análise de convergência do algoritmo proposto no capítulo 3, mostra que a hipótese da Proposição 1.4.4 é uma condição necessária da convexidade da aplicação.

Proposição 1.4.5 *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação convexa. Então $G(C) + \mathbb{R}_+^m$ é um conjunto convexo em \mathbb{R}^m .*

Prova: Conferir Sawaragi et al. [39], Proposição 2.1.22. ■

Abaixo enunciamos um resultado bem conhecido, que nos fornece um problema equivalente ao problema proposto aqui, e com a vantagem das funções objetivo serem todas positivas.

Proposição 1.4.6 *Dada uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, considere o POM irrestrito*

$$\text{MINIMIZE}\{\exp(G(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (1.5)$$

onde $\exp(G(x)) = (\exp(G_1(x)), \dots, \exp(G_m(x)))$. Então, os conjuntos das soluções Pareto (resp. Pareto fraco) dos problemas (1.2) e (1.5) são iguais.

Prova: Conferir Huang e Yang [21]. ■

Observação 1.4.1 *As hipóteses do nosso problema principal são preservadas, se passarmos do POM (1.2) para o POM (1.5). De fato, basta observar que se o problema (1.2) for um problema convexo então o problema (1.5) também será convexo. Além disto, se a aplicação multiobjetivo do problema (1.2) tiver uma das funções objetivo coerciva então o mesmo acontece com o problema (1.5). Portanto, sem perda de generalidades, podemos supor que, para todo $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$,*

$$\langle G(x), \bar{z} \rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Capítulo 2

Método de escalarização ponto proximal log-QD para programação multiobjetivo

Neste capítulo propomos um método de escalarização proximal para encontrar soluções Pareto para o problema (1), isto é, consideramos o POM

$$\text{MINIMIZE } \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (2.1)$$

onde $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(H1) F é convexa, i.e., $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa para todo $i \in \{1, \dots, m\}$;

(H2) F possui pelo menos uma de suas funções objetivo coerciva, i.e.,

$$\text{existe } r \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_r(x) = +\infty,$$

e propomos uma generalização do método de escalarização proximal log-quadrático de Gregório e Oliviera [20], a dizer, o método de escalarização proximal log-QD (método EPLQD). Estabelecemos a boa definição da sequência gerada, o critério de parada, e, conseqüentemente, apresentamos uma análise de convergência para soluções do problema. Além disto, uma variação do método é apresentada e por último realizamos alguns testes numéricos.

2.1 Propriedades e exemplos

Os subproblemas do método EPLQD proposto na próxima seção, consistem em encontrar minimizadores para uma função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ regularizada. Como

hipóteses necessárias a análise de convergência do método, supomos que a aplicação f satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) f é limitada inferiormente por algum $\alpha \in \mathbb{R}$, i.e.,

$$f(x, z) \geq \alpha \text{ para todo } (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m;$$

(P2) f é convexa em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$, i.e., dados $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ e $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\lambda(x_1, z_1) + (1 - \lambda)(x_2, z_2)) \leq \lambda f(x_1, z_1) + (1 - \lambda)f(x_2, z_2);$$

(P3) f é uma representação escalar de F , com respeito a x , i.e.,

$$F(x) \leq F(y) \Rightarrow f(x, z) \leq f(y, z)$$

e

$$F(x) < F(y) \Rightarrow f(x, z) < f(y, z)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}_+^m$;

(P4) f é diferenciável, com respeito a z e

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, z) = h(x, z),$$

onde $h(x, z) = (h_1(x, z), \dots, h_m(x, z))^T$ é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ para \mathbb{R}_+^m , i.e., $h_i(x, z) \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Observação 2.1.1 (a) *Nosso objetivo é encontrar, via método do ponto proximal,*

$$x^* \in \arg \min \{f(x, z^*) \mid x \in \Omega\},$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação satisfazendo as propriedades (P1) a (P4), $z^* \in \mathbb{R}_+^m$ e Ω é dado pela Observação 2.2.1 apresentada na próxima seção. Mostraremos (conf. dem. do Teorema 2.2.1) que x^* é uma solução Pareto do POM irrestrito (2.1); (b) Gregório e Oliveira [20], consideram a função f satisfazendo estas mesmas propriedades, exceto a propriedade (P3), onde é exigido que a aplicação f seja uma representação escalar estrita de F (conf. seção 1.4), com respeito a x . Com base nisso, eles obtêm a convergência do método para soluções Pareto fraco. Neste sentido, estamos assumindo uma hipótese mais forte. Em contrapartida, garantimos a convergência para soluções Pareto.

É observado em Gregório e Oliveira [20] que dada uma aplicação multiobjetivo convexa, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a aplicação escalar $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, z) = \sum_{i=1}^m \exp(z_i + F_i(x)) \tag{2.2}$$

satisfaz as propriedades (P1), (P2) e (P4). Além disto, é fácil ver que f também satisfaz a propriedade (P3). Portanto, apesar de não ter sido observado por Gregório e Oliveira [20], a convergência de seu algoritmo é também para soluções Pareto (ao invés de Pareto fraco). E, como contribuição, apresentamos um novo exemplo:

Proposição 2.1.1 *Seja $F = (F_1, F_2, \dots, F_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação convexa. Então $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, z) = \sum_{i=1}^m [z_i + h(F_i(x))]$ onde*

$$h(F_i(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2-F_i(x)} & \text{if } F_i(x) \leq 1 \\ (F_i(x))^2 & \text{if } F_i(x) > 1 \end{cases}$$

satisfaz as propriedades (P1) a (P4).

Prova: É fácil verificar que $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{if } x \leq 1 \\ x^2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

é positiva, convexa e estritamente crescente. Demonstraremos agora que $f(x, z) = \sum_{i=1}^m [z_i + h(F_i(x))]$ satisfaz as propriedades (P1) a (P4).

(P1): $h(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $z_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m$ implica $f(x, z) > 0 \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

(P2): Sejam $(x, z), (\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ e $\alpha \in [0, 1]$. Então, como F_i é convexa para todo $i = 1, \dots, m$ e h é estritamente crescente e convexa, temos:

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, z) + (1 - \alpha)(\bar{x}, \bar{z})) &= \sum_{i=1}^m [\alpha z_i + (1 - \alpha)\bar{z}_i + h(F_i(\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}))] \\ &\leq \sum_{i=1}^m [\alpha z_i + (1 - \alpha)\bar{z}_i + h(\alpha F_i(x) + (1 - \alpha)F_i(\bar{x}))] \\ &\leq \sum_{i=1}^m [\alpha z_i + (1 - \alpha)\bar{z}_i + \alpha h(F_i(x)) + (1 - \alpha)h(F_i(\bar{x}))] \\ &= \alpha \sum_{i=1}^m (z_i + h(F_i(x))) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m (\bar{z}_i + h(F_i(\bar{x}))) \\ &= \alpha f(x, z) + (1 - \alpha)f(\bar{x}, \bar{z}). \end{aligned}$$

(P3): Considere $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m$ fixo. Suponha que $F_i(x) \leq F_i(y) \forall i = 1, \dots, m$. Logo, como h é estritamente crescente, temos

$$\bar{z}_i + h(F_i(x)) \leq \bar{z}_i + h(F_i(y)), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Portanto $\sum_{i=1}^m [\bar{z}_i + h(F_i(x))] \leq \sum_{i=1}^m [\bar{z}_i + h(F_i(y))]$, i.e., $f(x, \bar{z}) \leq f(y, \bar{z})$. Suponha agora que $F(x) < F(y)$, i.e., $F_i(x) \leq F_i(y), \forall i = 1, \dots, m$ e $F_{i_0}(x) < F_{i_0}(y)$ para algum $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. Assim, como h é estritamente crescente temos: $\sum_{i=1}^m [\bar{z}_i + h(F_i(x))] < \sum_{i=1}^m [\bar{z}_i + h(F_i(y))]$, i.e., $f(x, \bar{z}) < f(y, \bar{z})$.

(P4): É fácil verificar que $\frac{\partial}{\partial z} f(x, z) = (1, 1, \dots, 1)$. ■

2.2 O método EPLQD

Seja $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$. Para a definição do método, consideramos as seguintes hipóteses.

- (a) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades (P1) à (P4);
- (b) $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ quase-distância atende (1.1);
- (c) para $\bar{z} \in \mathbb{R}_{++}^m$ (fixo), $H_{\bar{z}} : \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $H_{\bar{z}}(z) = \langle \frac{z}{\bar{z}} - \log \frac{z}{\bar{z}} - e, e \rangle$, onde $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $\frac{z}{\bar{z}} = (\frac{z_1}{\bar{z}_1}, \dots, \frac{z_m}{\bar{z}_m})$ e $\log \frac{z}{\bar{z}} = (\log \frac{z_1}{\bar{z}_1}, \dots, \log \frac{z_m}{\bar{z}_m})$;
- (d) $\{\beta^k\}$ e $\{\mu^k\}$ são seqüências de parâmetros reais que satisfazem: $\beta^k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ e $0 < l < \mu^k < L < +\infty, \forall k \in \mathbb{N}$.

O método gera uma seqüência $\{(x^k, z^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m$ da seguinte forma:

Método EPLQD

1. Tome $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $z^0 \in \mathbb{R}_{++}^m$.
2. Dados $x^k \in \mathbb{R}^n$ e $z^k \in \mathbb{R}_{++}^m$, encontre $x^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ e $z^{k+1} \in \mathbb{R}_{++}^m$ tais que

$$(x^{k+1}, z^{k+1}) \in \arg \min \{ \varphi^k(x, z) \mid (x, z) \in \Omega^k \times \mathbb{R}_{++}^m \}, \quad (2.3)$$

onde $\varphi^k(x, z) = f(x, z) + \beta^k H_{z^k}(z) + \frac{\mu^k}{2} q^2(x, x^k)$ e $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$.

3. Se $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, z^k)$, então pare (pois $x^k \in \text{ARG MIN}\{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$).

2.2.1 Resultados preliminares

Baseados no trabalho de Fliege e Svaiter [18], Gregório and Oliveira [20] supuseram que o conjunto Ω^0 é limitado e conseqüentemente estabeleceram a convergência do método LQPS. No nosso caso, vamos impor a condição $(\mathcal{H}2)$, que possui como uma de suas conseqüências a limitação do conjunto Ω^0 (conf. Lema seguinte). A importância da limitação do conjunto Ω^0 é a garantia da limitação de qualquer seqüência gerada pelo nosso algoritmo (conf. Proposição 2.2.4).

Lema 2.2.1 *Seja $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$. Então, para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (fixado), o conjunto $\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(\bar{x})\}$ é convexo e compacto. Particularmente, $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^m$ é um conjunto convexo e fechado.*

Prova: Suponha, por contradição, que $\bar{\Omega}$ é ilimitado. Então existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{\Omega}$ tal que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{\Omega}$ temos $F(x_n) \leq F(\bar{x})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $F_i(x_n) \leq F_i(\bar{x})$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, em particular, $F_r(x_n) \leq F_r(\bar{x})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Desde que F_r é coerciva e $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ temos “ $+\infty \leq F_r(\bar{x}) < +\infty$ ”, que é uma contradição. Logo $\bar{\Omega}$ é limitado. A convexidade de F implica em sua continuidade e na convexidade de $\bar{\Omega}$. Segue pela continuidade de F que $\bar{\Omega}$ é fechado. Portanto $\bar{\Omega}$ é um conjunto convexo e compacto. ■

Observação 2.2.1 *Suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência gerada pelo algoritmo EPLQD. Pelo Lema 2.2.1, $\Omega^k, \forall k \in \mathbb{N}$ é um conjunto compacto. Portanto, como $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k, \forall k \in \mathbb{N}$, temos: $\Omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega^k \neq \emptyset$.*

A aplicação $H_{\bar{z}}(\cdot)$, que faz parte da regularização dos subproblemas do método EPLQD, possui algumas úteis propriedades que são sintetizadas no resultado a seguir.

Lema 2.2.2 *Seja $\bar{z} \in \mathbb{R}_{++}^m$ fixado. Então a função $H_{\bar{z}} : \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$H_{\bar{z}}(z) = \left\langle \frac{z}{\bar{z}} - \log \frac{z}{\bar{z}} - e, e \right\rangle = \left\| \frac{z}{\bar{z}} - \log \frac{z}{\bar{z}} - e \right\|_1$$

onde $\|\cdot\|_1$ é a norma-1 sobre \mathbb{R}^m , é estritamente convexa, não negativa e coerciva.

Prova: Conferir Gregório e Oliveira [20], demonstração do Lema 1. ■

2.2.2 Existência das iterações

Gregório e Oliveira [20] consideraram a aplicação $\varphi^k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ em (2.3) com a distância euclidiana em substituição à quase-distância, e, neste caso, devido à convexidade estrita da função $\varphi^k(\cdot, z)$, eles demonstraram que as iterações (x^{k+1}) do método são únicas. Como consideramos quase-distâncias, que não necessariamente são aplicações convexas em nenhum de seus argumentos, não garantimos a unicidade dos iterados, bem como que os mesmos são interiores às restrições Ω^k . Portanto, procedemos de maneira diferente para garantir a boa definição das sequências e suas respectivas caracterizações.

Proposição 2.2.1 (Boa Definição) *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo às hipóteses (H1) e (H2), $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1) e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação verificando as propriedades (P1) a (P4). Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução (x^{k+1}, z^{k+1}) para o problema (2.3).*

Prova: A aplicação $\varphi^k : \Omega^k \times \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é coerciva. De fato, por (P1) temos:

$$\begin{aligned}\varphi^k(x, z) &= f(x, z) + \beta^k \left\langle \frac{z}{z^k} - \log \frac{z}{z^k} - e, e \right\rangle + \frac{\mu^k}{2} q^2(x, x^k) \\ &\geq \alpha + \beta^k (\| \frac{z}{z^k} - \log \frac{z}{z^k} - e \|_1) + \frac{\mu^k}{2} q^2(x, x^k).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Defina $\|(x, z)\| = \|x\| + \|z\|$ e suponha que $\|(x, z)\| \rightarrow +\infty$. Então, $\|x\| \rightarrow +\infty$ e/ou $\|z\| \rightarrow +\infty$. Como Ω^k é compacto (conf. Lema 2.2.1) e a função $\| \frac{z}{z^k} - \log \frac{z}{z^k} - e \|_1$ é coerciva em \mathbb{R}_{++}^m (conf. Lema 2.2.2), segue de (2.4) que φ^k é coerciva em $\Omega^k \times \mathbb{R}_{++}^m$. A aplicação $\varphi^k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m$. De fato: (P2) implica f contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m$. O Lema 2.2.2 implica $H(z) = \langle \frac{z}{z^k} - \log \frac{z}{z^k} - e, e \rangle$ contínua em \mathbb{R}_{++}^m . Pela Proposição 1.3.1, $q^2(\cdot, x^k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua em \mathbb{R}^n . Portanto a aplicação $\varphi^k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}^m$. Como $\varphi^k : \Omega^k \times \mathbb{R}_{++}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, coerciva e própria em $\Omega^k \times \mathbb{R}_{++}^m$, temos que o conjunto

$$\arg \min \{ \varphi^k(x, z) \mid (x, z) \in \Omega^k \times \mathbb{R}_{++}^m \}$$

é não vazio, i.e., para todo k , existe uma solução (x^{k+1}, z^{k+1}) para o problema (2.3).

■

Proposição 2.2.2 (Caracterização)

As soluções (x^{k+1}, z^{k+1}) do problema (2.3) são caracterizadas por:

- (i) Existem $\xi^{k+1} \in \partial f(\cdot, z^{k+1})(x^{k+1})$, $\zeta^{k+1} \in \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tal que

$$\xi^{k+1} = -\mu^k q(x^{k+1}, x^k) \zeta^{k+1} - v^{k+1}. \quad (2.5)$$

- (ii)

$$\frac{1}{z_i^{k+1}} - \frac{1}{z_i^k} = \frac{h_i(x^{k+1}, z^{k+1})}{\beta^k}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

$$x^{k+1} \in \Omega^k, z^{k+1} \in \mathbb{R}_{++}^m$$

Prova:

Pela Observação 1.2.2 temos

$$0 \in \partial \left(f(\cdot, z^{k+1}) + \beta^k \left\langle \frac{z^{k+1}}{z^k} - \log \frac{z^{k+1}}{z^k} - e, e \right\rangle + \frac{\mu^k}{2} q^2(\cdot, x^k) + \delta_{\Omega^k} \right) (x^{k+1}). \quad (2.7)$$

Por (P2), $f(\cdot, z^{k+1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em \mathbb{R}^n e portanto localmente lipschitziana em \mathbb{R}^n . Logo $f(\cdot, z^{k+1}) + \beta \left\langle \frac{z^{k+1}}{z^k} - \log \frac{z^{k+1}}{z^k} - e, e \right\rangle$ é localmente lipschitziana em

\mathbb{R}^n . Pela Proposição 1.3.1, $\frac{\mu^k}{2}q^2(\cdot, x^k)$ é localmente lipschitziana em \mathbb{R}^n . Ω^k fechado implica δ_{Ω^k} semicontínua inferior. Portanto, utilizando a Proposição 1.2.5 em (2.7) e observando que $\beta \left\langle \frac{z^{k+1}}{z^k} - \log \frac{z^{k+1}}{z^k} - e, e \right\rangle$ é constante em relação a Ω^k , obtemos

$$0 \in \partial (f(\cdot, z^{k+1})) (x^{k+1}) + \partial \left(\frac{\mu^k}{2} q^2(\cdot, x^k) \right) (x^{k+1}) + \partial (\delta_{\Omega^k}) (x^{k+1}). \quad (2.8)$$

Como Ω^k é convexo e $x^{k+1} \in \Omega^k$, $\partial (\delta_{\Omega^k}) (x^{k+1}) = N_{\Omega^k}(x^{k+1})$, onde $N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ denota o cone normal no ponto x^{k+1} em relação ao conjunto Ω^k (conf. seção 1.1 item vii)). Pela Proposição 1.3.1, $q(\cdot, x^k)$ é lipschitziana em \mathbb{R}^n . Portanto, tomando $h_1 = h_2 = q$ na Proposição 1.2.6, temos de (2.8) que

$$0 \in \partial (f(\cdot, z^{k+1})) (x^{k+1}) + \mu^k q(x^{k+1}, x^k) \partial (q(\cdot, x^k)) (x^{k+1}) + N_{\Omega^k}(x^{k+1}),$$

i.e., existem $\xi^{k+1} \in \partial f(\cdot, z^{k+1})(x^{k+1})$, $\zeta^{k+1} \in \partial (q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tal que

$$\xi^{k+1} = -\mu^k q(x^{k+1}, x^k) \zeta^{k+1} - v^{k+1}.$$

Para finalizar a demonstração, mostraremos que a equação (2.6) é verdadeira. Como (x^{k+1}, z^{k+1}) resolve o problema (2.3) e vale a propriedade (P4) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \varphi^k(x^{k+1}, \cdot)(z^{k+1}) \\ &= \nabla f(x^{k+1}, \cdot)(z^{k+1}) + \beta^k \nabla \left(\left\langle \frac{z}{z^k} - \log \frac{z}{z^k} - e, e \right\rangle \right) (z^{k+1}) \\ &= (h_1(x^{k+1}, z^{k+1}), \dots, h_m(x^{k+1}, z^{k+1})) + \beta^k \left(\frac{1}{z_1^k} - \frac{1}{z_1^{k+1}}, \dots, \frac{1}{z_m^k} - \frac{1}{z_m^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{z_i^{k+1}} - \frac{1}{z_i^k} = \frac{h_i(x^{k+1}, z^{k+1})}{\beta^k}, \quad i = 1, \dots, m.$$

$$x^{k+1} \in \Omega^k, z^{k+1} \in \mathbb{R}_{++}^m$$

■

2.2.3 Critério de parada

Assim como Gregório e Oliveira [20], estabeleceremos o mesmo critério de parada que foi utilizado por Bonnel et al. em [4].

Proposição 2.2.3 (Critério de Parada) *Seja $\{(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo método EPLQD. Se $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, z^k)$ para algum inteiro k então x^k é uma solução Pareto para o POM irrestrito (2.1).*

Prova: Suponha que o critério de parada é verificado na k -ésima iteração. Por contradição, suponha que x^k não seja uma solução Pareto para o POM (2.1). Logo, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{x}) < F(x^k)$. Então, por (P3), $f(\bar{x}, z^k) < f(x^k, z^k)$. Daí existe $\alpha > 0$ tal que $f(\bar{x}, z^k) = f(x^k, z^k) - \alpha$. Defina

$$x_\lambda = \lambda x^k + (1 - \lambda)\bar{x}, \lambda \in (0, 1).$$

Desde que (x^{k+1}, z^{k+1}) resolve (2.3), $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, z^k)$ e $q^2(x^k, x^k) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x^k, z^k) \leq f(x, z^k) + \frac{\mu^k}{2} q^2(x, x^k), \forall x \in B_\delta(x^k) \cap \Omega^k.$$

Como x_λ e x^k pertencem a Ω^k e $x_\lambda \rightarrow x^k$ quando $\lambda \rightarrow 1^-$, podemos supor sem perda de generalidades que $x_\lambda \in B_\delta(x^k) \cap \Omega^k$. Portanto

$$f(x^k, z^k) \leq f(x_\lambda, z^k) + \frac{\mu^k}{2} q^2(x_\lambda, x^k), \forall \lambda \in (0, 1) \text{ e } \lambda \approx 1.$$

De (1.1), temos

$$f(x^k, z^k) \leq f(x_\lambda, z^k) + \frac{\mu^k}{2} \beta^2 \|x_\lambda - x^k\|^2, \forall \lambda \in (0, 1) \text{ e } \lambda \approx 1. \quad (2.9)$$

Como $x_\lambda - x^k = (1 - \lambda)(\bar{x} - x^k)$, de (2.9) obtemos

$$f(x^k, z^k) \leq f(x_\lambda, z^k) + \frac{\mu^k}{2} \beta^2 (1 - \lambda)^2 \|\bar{x} - x^k\|^2, \forall \lambda \in (0, 1) \text{ e } \lambda \approx 1. \quad (2.10)$$

Desde que $(x_\lambda, z^k) = \lambda(x^k, z^k) + (1 - \lambda)(\bar{x}, z^k)$, a convexidade da f implica

$$\begin{aligned} f(x_\lambda, z^k) &\leq \lambda f(x^k, z^k) + (1 - \lambda) f(\bar{x}, z^k) \\ &= \lambda f(x^k, z^k) + (1 - \lambda) (f(x^k, z^k) - \alpha) \\ &= f(x^k, z^k) - (1 - \lambda)\alpha. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11), $f(x^k, z^k) \leq f(x^k, z^k) - (1 - \lambda)\alpha + \frac{\mu^k}{2} \beta^2 (1 - \lambda)^2 \|\bar{x} - x^k\|^2$. Logo

$$\alpha \leq (1 - \lambda) \frac{\mu^k}{2} \beta^2 \|\bar{x} - x^k\|^2, \forall \lambda \in (0, 1) \text{ e } \lambda \approx 1.$$

Daí $\alpha \leq \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} (1 - \lambda) \frac{\mu^k}{2} \beta^2 \|\bar{x} - x^k\|^2$. Portanto, $\alpha \leq 0$, que é uma contradição. Logo x^k é uma solução Pareto para o POM irrestrito (2.1). \blacksquare

2.2.4 Convergência para soluções Pareto

As sequências geradas pelo método EPLQD possui propriedades que são fundamentais para estabelecer o resultado principal deste capítulo. São elas.

Proposição 2.2.4 *Seja $\{(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo Método EPLQD. Então:*

- (i) $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada;
- (ii) $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente;
- (iii) $\{f(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente;
- (iv) $\sum_{k=0}^{+\infty} q^2(x^{k+1}, x^k) < +\infty$. Em particular $\lim_{k \rightarrow +\infty} q^2(x^{k+1}, x^k) = 0$;
- (v) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0$.

Prova: (i) Desde que $\Omega^k \supseteq \Omega^{k+1}; k = 0, 1, \dots$, temos $x^k \in \Omega^{k-1} \subseteq \Omega^0; \forall k \geq 1$. Como Ω^0 é limitado (conf. Lema 2.2.1), segue que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

(ii) Fixe $i \in \{1, \dots, m\}$. Por (P4), $h_i(x, z) \geq 0, \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Então, desde que $\beta^k > 0$, segue da equação (2.6) que $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não crescente. Adicionalmente $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente pelo zero, e $\{z_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Portanto, $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente.

(iii) Por (2.3), $\varphi^k(x^{k+1}, z^{k+1}) \leq \varphi^k(x^k, z^k), \forall k \in \mathbb{N}$, i.e., para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x^{k+1}, z^{k+1}) + \beta^k \left\langle \frac{z^{k+1}}{z^k} - \log \frac{z^{k+1}}{z^k} - e, e \right\rangle + \frac{\mu^k}{2} q^2(x^{k+1}, x^k) \leq f(x^k, z^k). \quad (2.12)$$

Como $\beta^k \left\langle \frac{z^{k+1}}{z^k} - \log \frac{z^{k+1}}{z^k} - e, e \right\rangle + \frac{\mu^k}{2} q^2(x^{k+1}, x^k) \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, temos

$$f(x^{k+1}, z^{k+1}) \leq f(x^k, z^k); \forall k \in \mathbb{N},$$

i.e., $\{f(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não crescente. Por (P1), $\{f(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, portanto convergente.

(iv) Como $\beta^k \left\langle \frac{z^{k+1}}{z^k} - \log \frac{z^{k+1}}{z^k} - e, e \right\rangle \geq 0$, de (2.12) temos:

$$f(x^{k+1}, z^{k+1}) + \frac{\mu^k}{2} q^2(x^{k+1}, x^k) \leq f(x^k, z^k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Desde que $0 < l < \mu^k$, temos:

$$\begin{aligned} q^2(x^{k+1}, x^k) &\leq \frac{2}{\mu^k} (f(x^k, z^k) - f(x^{k+1}, z^{k+1})), \forall k \in \mathbb{N} \\ &\leq \frac{2}{l} (f(x^k, z^k) - f(x^{k+1}, z^{k+1})), \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Consequentemente, como $\{f(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente,

$$\sum_{k=0}^n q^2(x^{k+1}, x^k) \leq \frac{2}{l} \left(f(x^0, z^0) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{k+1}, z^{k+1}) \right) < \infty; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(v) (1.1) implica $\alpha^2 \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq q^2(x^{k+1}, x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo, de (iv),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0.$$

■

Agora podemos provar a convergência do nosso método se o critério de parada nunca se aplica.

Teorema 2.2.1 (convergência) *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$, $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1) e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação verificando as propriedades (P1) a (P4). Então, qualquer sequência $\{(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ gerada pelo método EPLQD satisfaz: $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente e $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada com seus pontos de acumulação sendo soluções Pareto para o POM (2.1).*

Prova: Pela Proposição 2.2.4, $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente e $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, existem $x^* \in \mathbb{R}^n$, $z^* \in \mathbb{R}_+^m$ e $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = x^*$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} z^k = z^*$. Pela Proposição 2.2.4, $\{f(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente. Por (P2), f é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$. Logo,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, z^k) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, z^{k_j}) = f(x^*, z^*) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{f(x^k, z^k)\}. \quad (2.13)$$

Pela Proposição 2.2.2(i), existem $\zeta^{k+1} \in \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tais que

$$-\mu^k q(x^{k+1}, x^k) \zeta^{k+1} - v^{k+1} \in \partial f(\cdot, z^{k+1})(x^{k+1}).$$

Daí, pela desigualdade do subgradiente para a função convexa $f(\cdot, z^{k+1})$ temos: $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x, z^{k_j+1}) &\geq f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) - \mu^{k_j} q(x^{k_j+1}, x^{k_j}) < \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} > \\ &- < v^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} > \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como $v^{k_j+1} \in N_{\Omega^{k_j}}(x^{k_j+1})$ temos $- < v^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} > \geq 0$, $\forall x \in \Omega^{k_j}$ (Conf. seção 1.1, item vii). Pela Observação 2.2.1, $\Omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega^k \neq \emptyset$. Portanto, em particular, de (2.14) temos: $\forall x \in \Omega$,

$$f(x, z^{k_j+1}) \geq f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) - \mu^{k_j} q(x^{k_j+1}, x^{k_j}) < \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} > \quad (2.15)$$

Pelas Proposições 1.3.2 e 2.2.4 (iv), $\|\zeta^{k_j+1}\| \leq M$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0$, respectivamente. Logo, como $0 < l < \mu^k < L, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$|\mu^{k_j} q(x^{k_j+1}, x^{k_j}) < \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} >| \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow +\infty.$$

De (2.13), $f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) \geq f(x^*, z^*)$. Portanto, de (2.15),

$$f(x, z^*) \geq f(x^*, z^*), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.16)$$

Mostraremos agora que x^* é um solução Pareto para o POM irrestrito (2.1). Suponha, por contradição, que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{x}) < F(x^*)$. Como $z^* \in \mathbb{R}_+^m$, por (P3),

$$f(\bar{x}, z^*) < f(x^*, z^*). \quad (2.17)$$

Como $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k$, $\forall k \geq 0$ e $x^{k_j} \in \Omega^{k_j-1}$, $\forall j$ com $x^{k_j} \rightarrow x^*$, $j \rightarrow +\infty$, temos que $x^* \in \Omega$, i.e., $F(x^*) \leq F(x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo $F(\bar{x}) \leq F(x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $\bar{x} \in \Omega$, o que contradiz (2.16) e (2.17). ■

2.3 Uma variação do método EPLQD

Nesta seção uma variação do método EPLQD é analisada. Mais especificamente, consideramos, na regularização dos subproblemas, a quase-distância q , em substituição a q^2 , i.e., propomos o método com a aplicação φ^k em (2.3) dada por:

$$\varphi^k(x, z) = f(x, z) + \beta^k H_{z^k}(z) + \frac{\mu^k}{2} q(x, x^k).$$

Mostraremos a boa definição da sequência gerada e que qualquer sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ gerada é limitada. No entanto, para garantir a convergência para soluções Pareto, assumiremos que

$$\mu^k > 0; \quad \forall k = 1, 2, \dots \text{ e } \mu^k \rightarrow 0,$$

verificando assim a importância de empregar a regularização com q^2 . Como consequência da substituição de q^2 por q , um novo critério de parada é introduzido.

Boa definição: Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ fixado. Como $q(\cdot, \bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é contínua (conf. Proposição 1.3.1), a Proposição 2.2.1 continua válida se substituirmos q^2 por q em (2.3).

Caracterização: O item (i) da Proposição 2.2.2 será substituído por:

- (i-1) Existem $\xi^{k+1} \in \partial f(\cdot, z^{k+1})(x^{k+1})$, $\zeta^{k+1} \in \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tais que

$$\xi^{k+1} = -\frac{\mu^k}{2} \zeta^{k+1} - v^{k+1}. \quad (2.18)$$

De fato: pela Proposição 1.3.1, $\frac{\mu^k}{2}q(\cdot, x^k)$ é lipschitziana em x^{k+1} . Logo, a demonstração de (i-1) é análoga à demonstração do item (i) na Proposição 2.2.2.

O item (ii) da Proposição 2.2.2 continua o mesmo.

Critério de Parada: Usaremos o seguinte critério.

Proposição 2.3.1 (Critério de Parada - Caso q) *Seja $\{(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo método EPLQD com q no lugar de q^2 . Se*

$$x^{k+1} \in \arg \min \{f(x, z^k); x \in \Omega^k\} \text{ para algum inteiro } k \geq 0,$$

então x^{k+1} é uma solução Pareto para o POM irrestrito (2.1).

Prova: Como $x^{k+1} \in \arg \min \{f(\cdot, z^k) \mid x \in \Omega^k\}$, temos

$$f(x^{k+1}, z^k) \leq f(x, z^k) \quad \forall x \in \Omega^k. \quad (2.19)$$

Suponha, por contradição, que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{x}) < F(x^{k+1})$. Então $F(\bar{x}) \leq F(x^{k+1})$ e $F_{i_0}(\bar{x}) < F_{i_0}(x^{k+1})$ para algum $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. Assim, por (P3), $f(\bar{x}, z^k) < f(x^{k+1}, z^k)$, o que contradiz (2.19) pois $\bar{x} \in \Omega^k$ ($F(\bar{x}) \leq F(x^{k+1})$ e $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k \quad \forall k \geq 0$). Portanto x^{k+1} é uma solução Pareto para o POM irrestrito (2.1). ■

Convergência: Seja $\{(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo Método EPLQD com q no lugar de q^2 . Os itens (i), (ii) e (iii) da Proposição 2.2.4 continuam válidos se substituirmos q^2 por q em (2.3). De fato, claramente, as Proposições 2.2.4(i) e 2.2.4(ii) continuam válidas. Como $q(x^k, x^k) = 0$ e $q(x, y) \in \mathbb{R}_+$, $\forall (x, y)$, se substituirmos q^2 por q em (2.3) a demonstração da Proposição 2.2.4 (iii) é análoga ao caso q^2 . Então temos: (a) $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada; (b) $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente; (c) $\{f(x^k, z^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente.

Suponha agora que $\mu^k > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$ e $\mu^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ (Devido a esta suposição, não foi possível mostrar que os itens (iv) e (v) da Proposição 2.2.4 continuam válidos para o caso q). Mostraremos agora, que nestas condições, o teorema 2.2.1 (convergência) continua válido se substituirmos q^2 por q em (2.3). Sejam $x^* \in \mathbb{R}^n$, $z^* \in \mathbb{R}_+^m$ e $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = x^*$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} z^k = z^*$. De forma análoga à demonstração do Teorema 2.2.1 concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k, z^k) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}, z^{k_j}) = f(x^*, z^*) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{f(x^k, z^k)\}. \quad (2.20)$$

É fácil ver que, se (2.18) é verdade, a desigualdade (2.15) será substituída por

$$f(x, z^{k_j+1}) \geq f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) - \frac{\mu^{k_j}}{2} \langle \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} \rangle, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.21)$$

Como $\|\zeta^{k_j+1}\| \leq M$ (conf. Proposição 1.3.2), $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu^{k_j} = 0$ e $\|x - x^{k_j+1}\| \leq M_1$ ($\{x^k\}$ é limitada), usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz concluímos que

$$|\frac{\mu^{k_j}}{2} \langle \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1} \rangle| \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Portanto, de (2.20) e (2.21),

$$f(x, z^*) \geq f(x^*, z^*), \quad \forall x \in \Omega,$$

e então, analogamente ao final da demonstração do Teorema 2.2.1 concluímos que x^* é uma solução Pareto para o POM irrestrito (2.1).

2.4 Exemplos numéricos

Nesta seção apresentamos alguns testes computacionais para uma implementação do método EPLQD definido na seção 2.2. Todas as experiências numéricas foram realizadas em um intel(R) Core(TM) 2 Duo com Windows 7 instalado e o código fonte é escrito em Matlab 7.9.0. Testamos o nosso método considerando seis funções testes multiobjetivo, isto é, consideramos as seguintes funções:

(a) ([25], função F1, pg. 287): $F_a = (F_a^1, F_a^2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F_a^1 = x_1 + 2(x_3 - x_1^2)^2$, $F_a^2 = 1 - \sqrt{x_1} + 2(x_2 - x_1^{0,5})^2$ e $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$ cujo conjunto de todos os pontos ótimos Pareto (PS) é dado por $x_2 = x_1^{0,5}$ e $x_3 = x_1^2$, $x_1 \in [0, 1]$.

(b) ([25], função F4, pg. 287): $F_b = (F_b^1, F_b^2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F_b^1 = x_1 + 2(x_3 - 0, 8x_1 \cos((6\pi x_1 + \pi)/3))^2$, $F_b^2 = 1 - \sqrt{x_1} + 2(x_2 - 0, 8x_1 \sin(6\pi x_1 + 2\pi/3))^2$ e $(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ com o conjunto PS dado por $x_2 = 0, 8x_1 \sin(6\pi x_1 + 2\pi/3)$ e $x_3 = 0, 8x_1 \cos((6\pi x_1 + \pi)/3)$, $x_1 \in [0, 1]$.

(c) ([25], função F6, pg. 287): $F_c = (F_c^1, F_c^2, F_c^3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $F_c^1 = \cos(0, 5x_1\pi)\cos(0, 5x_2\pi)$, $F_c^2 = \cos(0, 5x_1\pi)\sin(0, 5x_2\pi)$, $F_c^3 = \sin(0, 5x_1\pi) + 2(x_3 - 2x_2\sin(2\pi x_1 + \pi))^2$ e $(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [-2, 2]$ com o conjunto PS dado por $x_3 = 2x_2\sin(2\pi x_1 + \pi)$, $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Para os testes, utilizamos a função de escalarização proposta neste trabalho (cf. prop. 2.1.1) e a função de escalarização proposta por Gregório e Oliveira em [20] (cf. função dada por 2.2). Em todos os testes consideramos a aplicação quase-distância $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ apresentada por Moreno et al. em [31], mais especificamente, consideramos $q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $q(x, y) = \sum_{i=1}^3 q_i(x_i, y_i)$ onde

$$q_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 3(y_i - x_i) & \text{se } y_i - x_i > 0 \\ 2(x_i - y_i) & \text{se } y_i - x_i \leq 0. \end{cases}$$

Nas tabelas abaixo denotamos por tol , a tolerância em relação ao critério de parada ($\|x^k - x^{k+1}\|_\infty \leq tol$); μ^k, β^k são os parâmetros do método EPLQD; k_i^* , $i = 1, 2$ o número de iterações do algoritmo utilizando a função de escalarização $f_i : R^n \times R_+^m \rightarrow R$, $i = 1, 2$ onde f_1 é dada pela proposição 2.1.1 e f_2 é dada por (2.2) e $\|x_{k_i^*}^* - x^*\|_\infty$ é a distância, em relação à norma infinito, da solução aproximada em relação a f_i e a solução exata, i.e., o erro absoluto cometido em relação à função de escalarização f_i . O número máximo de iterações é 100.

Exemplo 2.4.1 Neste exemplo consideramos a função multiobjetivo $F_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida acima, e as iterações iniciais $x_0 = (0.5, 0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^3$ e $z_0 = (1, 1) \in \mathbb{R}_{++}^2$.

Os resultados numéricos são apresentados na tabela abaixo.

| No. | tol | μ_k | β_k | k_1^* | $\ x_{k_1^*}^* - x^*\ _\infty$ | k_2^* | $\ x_{k_2^*}^* - x^*\ _\infty$ |
|-----|-----------|-----------|-----------|---------|--------------------------------|---------|--------------------------------|
| 1 | 10^{-2} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 9 | 5.545339e-003 | 10 | 5.118762e-002 |
| 2 | 10^{-3} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 28 | 6.247045e-009 | 23 | 6.979995e-003 |
| 3 | 10^{-4} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 87 | 7.960987e-009 | 62 | 8.279647e-009 |
| 4 | 10^{-2} | $1 + 1/k$ | k | 7 | 1.701151e-002 | 9 | 5.726488e-002 |
| 5 | 10^{-3} | $1 + 1/k$ | k | 28 | 7.351215e-009 | 24 | 6.281176e-003 |
| 6 | 10^{-4} | $1 + 1/k$ | k | 100 | 3.576296e-009 | 41 | 8.260435e-009 |
| 7 | 10^{-2} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 7 | 2.273775e-002 | 8 | 9.389888e-002 |
| 8 | 10^{-3} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 15 | 2.790977e-003 | 32 | 1.040779e-002 |
| 9 | 10^{-4} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 28 | 1.071720e-008 | 100 | 9.213105e-009 |
| 10 | 10^{-2} | $2 - 1/k$ | k | 7 | 1.674806e-002 | 8 | 9.413130e-002 |
| 11 | 10^{-3} | $2 - 1/k$ | k | 27 | 8.168611e-009 | 32 | 1.039107e-002 |
| 12 | 10^{-4} | $2 - 1/k$ | k | 100 | 8.096220e-009 | 65 | 7.790086e-009 |
| 13 | 10^{-2} | 1 | 1 | 8 | 6.966285e-003 | 9 | 5.000950e-002 |
| 14 | 10^{-3} | 1 | 1 | 26 | 1.906054e-009 | 23 | 6.138829e-003 |
| 15 | 10^{-4} | 1 | 1 | 83 | 8.254353e-009 | 39 | 1.546241e-005 |

Exemplo 2.4.2 Neste exemplo consideramos a função multiobjetivo $F_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida acima, e as iterações iniciais $x_0 = (0.5, 0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^3$ e $z_0 = (1, 1) \in \mathbb{R}_{++}^2$.

Os resultados numéricos são apresentados na tabela abaixo.

| No. | tol | μ_k | β_k | k_1^* | $\ x_{k_1^*}^* - x^*\ $ | k_2^* | $\ x_{k_2^*}^* - x^*\ _\infty$ |
|-----|-----------|-----------|-----------|---------|-------------------------|---------|--------------------------------|
| 1 | 10^{-2} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 10 | 4.419117e-003 | 10 | 3.800596e-002 |
| 2 | 10^{-3} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 29 | 7.617346e-009 | 20 | 5.872760e-003 |
| 3 | 10^{-4} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 92 | 7.831306e-009 | 100 | 8.102059e-009 |
| 4 | 10^{-2} | $1 + 1/k$ | k | 7 | 1.423293e-002 | 10 | 3.771631e-002 |
| 5 | 10^{-3} | $1 + 1/k$ | k | 20 | 4.560126e-009 | 21 | 5.533943e-003 |
| 6 | 10^{-4} | $1 + 1/k$ | k | 98 | 6.872232e-009 | 38 | 1.000619e-007 |
| 7 | 10^{-2} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 7 | 2.265857e-002 | 9 | 6.038495e-002 |
| 8 | 10^{-3} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 15 | 3.304754e-003 | 25 | 8.176106e-003 |
| 9 | 10^{-4} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 28 | 7.814512e-009 | 100 | 7.497307e-009 |
| 10 | 10^{-2} | $2 - 1/k$ | k | 7 | 1.251182e-002 | 7 | 6.525365e-002 |
| 11 | 10^{-3} | $2 - 1/k$ | k | 30 | 8.735791e-009 | 23 | 8.117802e-003 |
| 12 | 10^{-4} | $2 - 1/k$ | k | 100 | 5.561728e-009 | 52 | 7.547563e-009 |
| 13 | 10^{-2} | 1 | 1 | 8 | 5.099261e-003 | 10 | 4.231940e-002 |
| 14 | 10^{-3} | 1 | 1 | 27 | 5.045036e-009 | 22 | 5.051759e-003 |
| 15 | 10^{-4} | 1 | 1 | 88 | 8.499673e-009 | 82 | 9.235203e-010 |

Exemplo 2.4.3 Neste exemplo consideramos a função multiobjetivo $F_c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida acima, e as iterações iniciais $x_0 = (0.5, 0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^3$ e $z_0 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}_{++}^3$.

Os resultados numéricos são apresentados na tabela abaixo.

| No. | tol | μ_k | β_k | k_1^* | $\ x_{k_1^*}^* - x^*\ $ | k_2^* | $\ x_{k_2^*}^* - x^*\ _\infty$ |
|-----|-----------|-----------|-----------|---------|-------------------------|---------|--------------------------------|
| 1 | 10^{-2} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 10 | 1.066481e-002 | 18 | 5.068830e-002 |
| 2 | 10^{-3} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 31 | 1.698174e-008 | 33 | 5.315241e-003 |
| 3 | 10^{-4} | $1 + 1/k$ | $1 + 1/k$ | 100 | 5.432795e-009 | 100 | 1.130028e-008 |
| 4 | 10^{-2} | $1 + 1/k$ | k | 10 | 9.733382e-003 | 19 | 5.908485e-002 |
| 5 | 10^{-3} | $1 + 1/k$ | k | 28 | 4.176586e-010 | 34 | 2.307318e-007 |
| 6 | 10^{-4} | $1 + 1/k$ | k | 100 | 7.086278e-011 | 35 | 7.450585e-009 |
| 7 | 10^{-2} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 11 | 2.653977e-002 | 20 | 9.899806e-002 |
| 8 | 10^{-3} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 18 | 2.046561e-007 | 47 | 1.059293e-002 |
| 9 | 10^{-4} | $2 - 1/k$ | $1/k$ | 33 | 1.161832e-008 | 100 | 9.253656e-009 |
| 10 | 10^{-2} | $2 - 1/k$ | k | 11 | 1.835990e-002 | 22 | 8.862843e-002 |
| 11 | 10^{-3} | $2 - 1/k$ | k | 28 | 5.441347e-010 | 48 | 1.047200e-002 |
| 12 | 10^{-4} | $2 - 1/k$ | k | 100 | 9.476497e-010 | 75 | 2.793537e-009 |
| 13 | 10^{-2} | 1 | 1 | 9 | 8.326796e-003 | 17 | 5.182457e-002 |
| 14 | 10^{-3} | 1 | 1 | 29 | 1.343175e-008 | 32 | 4.799238e-003 |
| 15 | 10^{-4} | 1 | 1 | 96 | 6.882171e-009 | 100 | 3.961009e-009 |

Capítulo 3

Método proximal de valor vetorial com regularização quase-distância em programação multiobjetivo

Neste capítulo, consideramos o POM irrestrito

$$\text{MINIMIZE } \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.1)$$

onde $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz as seguintes hipóteses:

($\mathcal{H}1$) F é convexa, i.e., $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa para todo $i \in \{1, \dots, m\}$;

($\mathcal{H}2$) F possui pelo menos uma de suas funções objetivo coerciva, i.e.,

$$\text{existe } r \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_r(x) = +\infty.$$

Para este problema desenvolvemos uma extensão do APP de valor vetorial para otimização convexa de valor vetorial. Nesta extensão os subproblemas consistem em encontrar pontos Pareto fraco para a aplicação original regularizada por um termo adequado envolvendo uma quase-distância. Apresentamos uma versão exata e uma versão inexata, e em ambos os casos provamos a convergência da sequência gerada para soluções Pareto fraco. Além disto, para a versão exata, exibiremos uma classe de sequências, que são geradas pelo algoritmo, e que convergem para soluções Pareto (ao invés de Pareto fraco). Por último, apresentamos alguns exemplos numéricos utilizando o Matlab.

3.1 Um algoritmo proximal exato

Seja $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses ($\mathcal{H}1$) e ($\mathcal{H}2$) e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1). Para

a definição do método, consideramos uma sequência de parâmetros reais $\{\alpha_k\}$ tal que $0 < l < \alpha_k < L; \forall k \in \mathbb{N}$.

O método gera uma sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

Algoritmo VQD-I

1. Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
2. Dado x^k , se $x^k \in \text{ARG MIN}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, então $x^{k+p} = x^k, \forall p \geq 1$.
3. Dado x^k , se $x^k \notin \text{ARG MIN}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, então tome como um próximo iterando qualquer x^{k+1} tal que

$$x^{k+1} \in \text{ARG MIN}_w \left\{ F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) e \mid x \in \Omega^k \right\}, \quad (3.2)$$

onde $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$ e $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$.

Observação 3.1.1 *Em geral, nos trabalhos da literatura que envolvem o APP de valor vetorial, é demonstrado que as sequências $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ geradas pelos métodos são Fejér convergentes com respeito ao conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k); \forall k \in \mathbb{N}\}$. E , nestes trabalhos, para que o conjunto E seja não vazio, é assumido (entre outras suposições básicas) que a aplicação F satisfaça a seguinte hipótese (aqui restrita à otimização multiobjetivo):*

- (A) *O conjunto $(F(x^0) - \mathbb{R}_+^m) \cap F(\mathbb{R}^n)$ é completo, significando que para toda sequência $\{a^k\} \subset \mathbb{R}^n$, com $a^0 = x^0$, tal que $F(a^{k+1}) \leq F(a^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(a) \leq F(a^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

No nosso caso, desde que o uso da quase-distância como regularização não assegura que as sequências geradas pelo algoritmo VQD-I são Fejér convergentes com respeito ao conjunto E , propomos uma hipótese alternativa, i.e. (H2). Esta hipótese (H2), em conjunto com a hipótese de convexidade (H1), implica: a) Na convexidade e compacidade das restrições, Ω^k , do algoritmo VQD-I (conf. Lema 2.2.1); b) Na hipótese (A) e, c) Na limitação de qualquer sequência gerada pelo algoritmo VQD-I (conf. Proposição 3.1.3 (b) (i)).

3.1.1 Existência das iterações

Nesta seção, estabelecemos a boa definição do algoritmo VQD-I, mostrando que o problema (3.2) sempre admite solução.

Proposição 3.1.1 (Boa Definição) *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo às hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$ e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1). Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $x^k \notin \text{ARG MIN}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, existe uma solução x^{k+1} para o problema (3.2).*

Prova: $x^0 \in \mathbb{R}^n$ é escolhido na etapa de inicialização. Assumindo que o algoritmo atingiu a iteração k , vamos mostrar que um apropriado x^{k+1} existe. Pelo critério de parada, se

$$x^k \in \text{ARG MIN}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

então $x^{k+p} = x^k$, $\forall p \geq 1$. Caso contrário, tome qualquer $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ e defina $\varphi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi^k(x) = \left\langle F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k)e, \bar{z} \right\rangle = \langle F(x), \bar{z} \rangle + \frac{\alpha_k}{2} \|\bar{z}\|_1 q^2(x, x^k). \quad (3.3)$$

A convexidade da F em \mathbb{R}^n implica a convexidade de $\langle F(\cdot), \bar{z} \rangle$ em \mathbb{R}^n e então que $\langle F(\cdot), \bar{z} \rangle$ é uma aplicação contínua em \mathbb{R}^n . Pela Proposição 1.3.1, $q^2(\cdot, x^k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma aplicação contínua. Então $\varphi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua em \mathbb{R}^n . Portanto, desde que Ω^k , $\forall k$ é um conjunto compacto (conf. Lema 2.2.1), o conjunto $\arg \min \{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$ é não vazio. Seja

$$x^{k+1} \in \arg \min \{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}. \quad (3.4)$$

Como $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$, $\varphi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma representação escalar estrita de $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $\tilde{F}(x) = F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k)e$. Sabemos que toda representação escalar estrita é também uma representação escalar fraca. Portanto, de (3.4) e Proposição 1.4.2, $x^{k+1} \in \text{ARG MIN}_w \{F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k)e \mid x \in \Omega^k\}$. ■

Observação 3.1.2 *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-I. Do Lema 2.2.1, $\Omega^k, \forall k \in \mathbb{N}$ é um conjunto compacto. Portanto, como $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k, \forall k \in \mathbb{N}$, então $\Omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega^k \neq \emptyset$.*

3.1.2 Escalarização dos subproblemas

Nesta seção, apresentamos uma escalarização dos subproblemas do algoritmo VQD-I. É importante observar que esta escalarização somente é viável devido a Proposição 1.4.4. Para tanto, se faz necessário os seguintes Lemas:

Lema 3.1.1 *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo, então a imagem de toda função real contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um intervalo.*

Prova: Conferir Lima [26], Corolário 7. ■

Lema 3.1.2 *Sejam $y \in \mathbb{R}^n$ (fixo), $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma quase-distância que satisfaz à propriedade (1.1). Então o conjunto $q^2(S, y)e$ é um segmento de reta em \mathbb{R}^m . Em particular, $q^2(S, y)e$ é um conjunto convexo em \mathbb{R}^m .*

Prova: Pela Proposição 1.3.1, $q^2(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma aplicação contínua. Então, desde que S é um conjunto convexo, pelo Lema 3.1.1, $q^2(S, y)$ é um intervalo em \mathbb{R} , o qual denotamos por I . Assim,

$$\begin{aligned} q^2(S, y)e &= Ie = \{xe \mid x \in I\} \\ &= \{(x, x, \dots, x) \mid x \in I\} = \{x(1, 1, \dots, 1) \mid x \in I\}. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $q^2(S, y)e$ é um segmento de reta em \mathbb{R}^m . ■

Suponha, agora, que o critério de parada do algoritmo VQD-I nunca se aplica.

Proposição 3.1.2 *Seja $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-I. Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado,*

$$\begin{aligned} x^{k+1} &\in \text{ARG MIN}_w \{F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k)e \mid x \in \Omega^k\} \\ &= \bigcup_{z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}} \arg \min \{ \langle F(x), \bar{z} \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) \|\bar{z}\|_1 \mid x \in \Omega^k \}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Em particular existe $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ com $\|z^k\|_1 = 1$ tal que

$$x^{k+1} \in \arg \min \{ \langle F(x), z^k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) \mid x \in \Omega^k \}. \quad (3.6)$$

Prova: Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, considere um subconjunto convexo $S^k \subseteq \Omega^k$. Pelo Lema 3.1.2, $q^2(S^k, x^k)e$ é um conjunto convexo. Então $\frac{\alpha_k}{2} q^2(S^k, x^k)e$ é também um conjunto convexo. Desde que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é convexa, o conjunto $F(S^k) + \mathbb{R}_+^m$ é convexo em \mathbb{R}^m (Conf. Proposição 1.4.5). Portanto, para cada convexo $S^k \subseteq \Omega^k$, $F(S^k) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(S^k, x^k)e + \mathbb{R}_+^m$ é um conjunto convexo, e então (3.5) é uma consequência da Proposição 1.4.4. De (3.5) existe uma sequência $\{z^k\} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ tal que

$$x^{k+1} \in \arg \min \{ \langle F(x), z^k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) \|z^k\|_1 \mid x \in \Omega^k \}. \quad (3.7)$$

Além disto o conjunto $\arg \min \{ \langle F(x), z^k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) \|z^k\|_1 \mid x \in \Omega^k \}$ em (3.7) não se altera se z^k é multiplicado por um número real positivo. Portanto, sem perda de generalizadades, podemos supor que $\|z^k\|_1 = 1$. ■

3.1.3 Convergência para soluções Pareto fraco

Nesta seção enunciamos e provamos a convergência do algoritmo VQD-I para soluções Pareto fraco do problema (3.1). Inicialmente estabelecemos algumas propriedades das sequências que são geradas pelo algoritmo.

Proposição 3.1.3 *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2) e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1). Se $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-I, então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz (3.6) com $\|z^k\|_1 = 1$ e*

(a) *Seja $k \in \mathbb{N}$ fixado e defina $\Psi_k(x) = \langle F(x), z^k \rangle; x \in \mathbb{R}^n$. Então existem $u^{k+1} \in \partial\Psi_k(x^{k+1})$, $\zeta^{k+1} \in \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tais que*

$$u^{k+1} = -\alpha_k q(x^{k+1}, x^k) \zeta^{k+1} - v^{k+1}. \quad (3.8)$$

- (b) (i) $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada;
(ii) $\forall z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$, $\{\langle F(x^k), z \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente;
(iii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\| = 0$;
(iv) $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0$;
(v) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

Prova: (a) Desde que x^{k+1} satisfaz (3.6) com $\|z^k\|_1 = 1$, pela Observação 1.2.2,

$$0 \in \partial \left(\langle F(\cdot), z^k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(\cdot, x^k) + \delta_{\Omega^k} \right) (x^{k+1}). \quad (3.9)$$

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ convexa implica $\langle F(\cdot), z^k \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, e, portanto, que $\langle F(\cdot), z^k \rangle$ é localmente lipschitziana em \mathbb{R}^n ; pela Proposição 1.3.1, $\frac{\alpha_k}{2} q^2(\cdot, x^k)$ é localmente lipschitziana em \mathbb{R}^n ; Ω^k fechado implica que δ_{Ω^k} é semicontínua inferior. Então, utilizando a Proposição 1.2.5 em (3.9), obtemos

$$0 \in \partial(\langle F(\cdot), z^k \rangle)(x^{k+1}) + \partial\left(\frac{\alpha_k}{2} q^2(\cdot, x^k)\right)(x^{k+1}) + \partial(\delta_{\Omega^k})(x^{k+1}). \quad (3.10)$$

Desde que Ω^k é convexo e $x^{k+1} \in \Omega^k$ temos $\partial(\delta_{\Omega^k})(x^{k+1}) = N_{\Omega^k}(x^{k+1})$, onde $N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ denota o cone normal no ponto x^{k+1} em relação ao conjunto Ω^k . Pela Proposição 1.3.1, $q(\cdot, x^k)$ é lipschitziana em \mathbb{R}^n . Portanto, como $q(x, y) \geq 0$, $\forall(x, y)$, tomando $h_1 = h_2 = q$ na Proposição 1.2.6, obtemos

$$\partial\left(\frac{\alpha_k}{2} q^2(\cdot, x^k)\right)(x^{k+1}) = \alpha_k q(x^{k+1}, x^k) \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1}),$$

e então de (3.10),

$$0 \in \partial(\langle F(\cdot), z^k \rangle)(x^{k+1}) + \alpha_k q(x^{k+1}, x^k) \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1}) + N_{\Omega^k}(x^{k+1}).$$

Assim, existem $u^{k+1} \in \partial\Psi_k(x^{k+1})$, $\zeta^{k+1} \in \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tais que $u^{k+1} = -\alpha_k q(x^{k+1}, x^k) \zeta^{k+1} - v^{k+1}$.

(b)(i) Desde que $\Omega^k \supseteq \Omega^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, temos $x^k \in \Omega^{k-1} \subseteq \Omega^0$, $\forall k \geq 1$. Como Ω^0 é limitado (conf. Lema 2.2.1), temos $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ limitada.

(b)(ii) Como $x^{k+1} \in \Omega^k$, então $F(x^{k+1}) \leq F(x^k)$. Logo, desde que $z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$,

$$\langle F(x^{k+1}), z \rangle \leq \langle F(x^k), z \rangle; \forall k \in \mathbb{N},$$

i.e., $\{\langle F(x^k), z \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente. Pela Observação 1.4.1, $\{\langle F(x^k), z \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e portanto convergente.

(b)(iii) Seja $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m$ fixado. Por (b) (ii), $\{\langle F(x^k), \bar{z} \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Então,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle F(x^k) - F(x^{k+1}), \bar{z} \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m (F_i(x^k) - F_i(x^{k+1})) \bar{z}_i = 0. \quad (3.11)$$

Como $x^{k+1} \in \Omega^k$, temos $F(x^{k+1}) \leq F(x^k)$, i.e., $F_i(x^{k+1}) \leq F_i(x^k)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Assim $(F_i(x^k) - F_i(x^{k+1})) \bar{z}_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$. Então, de (3.11),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (F_i(x^k) - F_i(x^{k+1})) \bar{z}_i = 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Desde que $\bar{z}_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, temos $\lim_{k \rightarrow +\infty} (F_i(x^k) - F_i(x^{k+1})) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$, e então $\lim_{k \rightarrow +\infty} (F(x^k) - F(x^{k+1})) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Portanto $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\| = 0$.

(b)(iv) De (3.6), $\varphi^k(x^{k+1}) \leq \varphi^k(x)$; $\forall x \in \Omega^k$, onde

$$\varphi^k(x) = \langle F(x), z^k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) \quad (\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\} \text{ com } \|z^k\|_1 = 1; \forall k).$$

Como $x^k \in \Omega^k$, $\forall k$, então $\varphi^k(x^{k+1}) \leq \varphi^k(x^k)$, $\forall k$. Portanto, desde que $q(x^k, x^k) = 0$, temos

$$\langle F(x^{k+1}), z^k \rangle + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x^{k+1}, x^k) \leq \langle F(x^k), z^k \rangle.$$

Assim, como $0 < l < \alpha_k$, $\|z^k\| \leq \|z^k\|_1$ e $\|z^k\|_1 = 1$, temos

$$0 \leq q^2(x^{k+1}, x^k) \leq \frac{2}{l} \langle F(x^k) - F(x^{k+1}), z^k \rangle \leq \frac{2}{l} \|F(x^k) - F(x^{k+1})\|.$$

Então, de (b) (iii), $\lim_{k \rightarrow +\infty} q^2(x^{k+1}, x^k) = 0$. Como $q(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y)$ temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0.$$

(b)(v) De (1.1), $0 \leq \alpha \|x^{k+1} - x^k\| \leq q(x^{k+1}, x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (b)(iv),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \quad \blacksquare$$

Agora, estamos aptos para provar a convergência do algoritmo VQD-I para soluções Pareto fraco se o critério de parada do algoritmo nunca se aplica. Segue o resultado:

Teorema 3.1.1 *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo às hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$ e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1). Se $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-I, então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada e todo ponto de acumulação desta sequência é uma solução Pareto fraco para o POM irrestrito (3.1).*

Prova: Desde que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-I, existe $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ tal que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz a equação (3.6) com $\|z^k\|_1 = 1$. Assim existem $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ e $\{z^{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim_{l \rightarrow +\infty} z^{k_l} = \bar{z}$. Pela Proposição 3.1.3(b)(i), $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Então existem $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = x^*$. Fixe $z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$. A convexidade da aplicação $\Psi = \langle F(\cdot), z \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^n implica em sua continuidade. Pela Proposição 3.1.3(b)(ii), $\forall z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$, $\{\langle F(x^k), z \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente. Portanto, $\forall z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle F(x^k), z \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle F(x^{k_j}), z \rangle = \langle F(x^*), z \rangle = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{\langle F(x^k), z \rangle\}.$$

Logo

$$\langle F(x^*), z \rangle \leq \langle F(x^k), z \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\} \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Pela Proposição 3.1.3(a) existem $\zeta^{k+1} \in \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tais que

$$-\alpha_k q(x^{k+1}, x^k) \zeta^{k+1} - v^{k+1} \in \partial \Psi_k(x^{k+1}),$$

onde $\Psi_k(x) = \langle F(x), z^k \rangle$; $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, pela desigualdade do subgradiente para função convexa Ψ_k , temos: $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Psi_{k_l}(x) \geq \Psi_{k_l}(x^{k_l+1}) - \alpha_{k_l} q(x^{k_l+1}, x^{k_l}) \langle \zeta^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle - \langle v^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle.$$

Como $v^{k_l+1} \in N_{\Omega^{k_l}}(x^{k_l+1})$, temos $-\langle v^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle \geq 0$, $\forall x \in \Omega^{k_l}$. Pela Observação 3.1.2 $\Omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega^k \neq \emptyset$. Então, em particular,

$$\langle F(x), z^{k_l} \rangle \geq \langle F(x^{k_l+1}), z^{k_l} \rangle - \alpha_{k_l} q(x^{k_l+1}, x^{k_l}) \langle \zeta^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.13)$$

De (3.12) $\langle F(x^{k_l+1}), z^{k_l} \rangle \geq \langle F(x^*), z^{k_l} \rangle$. Assim, de (3.13),

$$\langle F(x), z^{k_l} \rangle \geq \langle F(x^*), z^{k_l} \rangle - \alpha_{k_l} q(x^{k_l+1}, x^{k_l}) \langle \zeta^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.14)$$

Pela Proposição 1.3.2 $\|\zeta^{k_l+1}\| \leq M$. Portanto, como as sequências $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\alpha_k\}$ são limitadas, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que $|\alpha_{k_j} \langle \zeta^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle| \leq M_1$. Então, desde que, pela Proposição 3.1.3 (b)(iv), $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0$, concluímos que

$$|\alpha_{k_l} q(x^{k_l+1}, x^{k_l}) \langle \zeta^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle| \rightarrow 0 \text{ quando } l \rightarrow +\infty.$$

Portanto, recordando que $\lim_{l \rightarrow \infty} z^{k_l} = \bar{z}$, de (3.14)

$$\langle F(x), \bar{z} \rangle \geq \langle F(x^*), \bar{z} \rangle, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.15)$$

Para finalizar, demonstraremos que x^* é uma solução Pareto fraco do POM irrestrito (3.1). Suponha, por contradição, que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(\bar{x}) \ll F(x^*). \quad (3.16)$$

Como $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ temos:

$$\langle F(\bar{x}), \bar{z} \rangle < \langle F(x^*), \bar{z} \rangle. \quad (3.17)$$

Desde que, $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k$, $\forall k \geq 0$ e $x^{k_j} \in \Omega^{k_j-1}$, $\forall j$ com $x^{k_j} \rightarrow x^*$, $j \rightarrow +\infty$, temos $x^* \in \Omega$, i.e., $F(x^*) \leq F(x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (3.16), $F(\bar{x}) \ll F(x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $\bar{x} \in \Omega$, o que contradiz (3.15) e (3.17). ■

Observação 3.1.3 *Se na demonstração do Teorema anterior fosse garantido que $\bar{z} \in \mathbb{R}_{++}^m$, então o limite de $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ (i.e. x^*), seria uma solução Pareto do POM irrestrito (3.1) (ao invés de solução Pareto fraco). De fato, suponha por contradição que x^* não seja uma solução Pareto do POM (3.1). Então, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$F(\bar{x}) \leq F(x^*) \text{ e } F_r(\bar{x}) < F_r(x^*) \text{ para algum } r \in \{1, \dots, m\}. \quad (3.18)$$

Como $x^* \in \Omega$ e vale (3.18) temos $\bar{x} \in \Omega$. (3.18) e $\bar{z} \in \mathbb{R}_{++}^m$ implicam $\langle F(\bar{x}), \bar{z} \rangle < \langle F(x^*), \bar{z} \rangle$, a qual é uma contradição, pois vale (3.15).

3.1.4 Convergência para soluções Pareto (Ao invés de Pareto fraco)

Em aplicações da vida real é frequente o caso em que apenas soluções Pareto (em vez de Pareto fraco) são de interesse (ver, por exemplo, seção 2.3 em [22]). Como, para o nosso algoritmo é garantido somente convergência para soluções Pareto fraco, isso pode ser interpretado como uma fraqueza do método. No entanto, podemos contornar isto, mostrando que existem determinadas sequências que são geradas pelo nosso algoritmo e que convergem para soluções Pareto. Mais especificamente, mostraremos que uma escolha criteriosa de $x^{k+1} \in \text{ARG MIN}_w \{F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) \mid x \in \Omega^k\}$ garante que a sequência $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge, na verdade, para uma solução Pareto do POM (3.1). As ideias abaixo foram utilizadas em [4] (seção 4) para um caso mais geral.

Defina, para qualquer número real $\delta \geq 0$, o conjunto

$$K_\delta = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \langle x, z \rangle \geq \delta \|x\| \|z\|, \forall x \in \mathbb{R}_+^m\}. \quad (3.19)$$

Observe que $0 \leq \delta_1 < \delta_2 \Rightarrow K_{\delta_2} \subset K_{\delta_1} \subseteq K_0 = \mathbb{R}_+^m$. Além disto, segue da Observação 4 em [4] que, para cada $\delta > 0$,

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \mid d\left(\frac{z}{\|z\|}, \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}_+^m\right) \geq \delta \right\} \subset K_\delta.$$

Então é fácil ver que $K_{\delta_0} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ para algum $\delta_0 > 0$, e portanto $K_\delta \setminus \{0\} \neq \emptyset$ para todo $\delta \in [0, \delta_0]$.

Consideramos agora uma instância específica do VQD-I, projetada para garantir a convergência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a uma solução Pareto do POM (3.1). Inicialmente modificamos a regra de parada de forma óbvia, ou seja, x^k é a solução desejada se $x^k \in \operatorname{argmin} \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Para a etapa iterativa, restringiremos, até certo ponto, a escolha de x^{k+1} : Fixe um valor de $\delta > 0$ tal que $K_\delta \setminus \{0\} \neq \emptyset$, selecione algum $z^k \in K_\delta \setminus \{0\}$ e, finalmente, tome x^{k+1} como

$$x^{k+1} \in \operatorname{arg min} \left\{ \langle F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) e, z^k \rangle \mid x \in \Omega^k \right\}. \quad (3.20)$$

É óbvio que sem perda de generalidade podemos supor $\|z^k\|_1 = 1$. Observamos ainda que (3.20) é uma opção legítima no âmbito do Algoritmo VQD-I. De fato, desde que $z^k \in K_\delta \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$, de forma análoga à prova da Proposição 3.1.1, conclui-se que $x^{k+1} \in \operatorname{ARG MIN}_w \{F(x) + \frac{\alpha_k}{2} q^2(x, x^k) e \mid x \in \Omega^k\}$, como requisitado por (3.2).

Em seguida, estabelecemos as propriedades de convergência do algoritmo VQD-I, sob a forma específica do passo iterativo dado por (3.20).

Teorema 3.1.2 *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$ e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1). Se $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-I com x^{k+1} selecionada de acordo com (3.20), então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada e todo ponto de acumulação desta sequência é uma solução Pareto para o POM irrestrito (3.1).*

Prova: De forma análoga à prova das Proposições 3.1.1 e 3.1.3 garantimos a boa definição da sequência gerada e que as propriedades contidas na Proposição 3.1.3 continuam válidas. Sejam $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $\lim_{j \rightarrow +\infty} x^{k_j} = x^*$. Como $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ e $\|z^k\|_1 = 1; \forall k$, existe $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m$ e $\{z^{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $\lim_{l \rightarrow +\infty} z^{k_l} = \bar{z}$. Além disto, desde que $\{z^k\} \subset K_\delta \setminus \{0\}, \delta > 0, \bar{z} \in \mathbb{R}_+^m$. De fato, tome $c \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$. Então, como

$\gamma \|z^{k_l}\|_1 \leq \|z^{k_l}\|$ ($\gamma > 0$) e $\|z^{k_l}\|_1 = 1$, por (3.19), $\langle c, z^{k_l} \rangle \geq \delta \|c\| \gamma > 0$, e então $\langle c, \bar{z} \rangle > 0$. Portanto $\bar{z} \in \mathbb{R}_{++}^m$. Por outro lado, de forma análoga à demonstração do Teorema 3.1.1, concluímos que: $\langle F(x), \bar{z} \rangle \geq \langle F(x^*), \bar{z} \rangle$, $\forall x \in \Omega$. Portanto, como $\bar{z} \in \mathbb{R}_{++}^m$, pela Observação 3.1.3, concluímos que x^* é uma solução Pareto do POM (3.1). \blacksquare

3.2 Um algoritmo proximal inexato

Aqui consideramos uma sequência de parâmetros $\{\beta_k\}$ com as mesmas características da sequência de parâmetros $\{\alpha_k\}$ do algoritmo VQD-I, i.e., satisfazendo $0 < l < \beta_k < L$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disto, admitimos a existência de sequências $\{z^k\} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ tal que $\|z^k\|_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ satisfazendo $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

Algoritmo VQD-II

1. Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
2. Dado x^k , se $x^k \in \text{ARG MIN}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, então $x^{k+p} = x^k, \forall p \geq 1$.
3. Dado x^k , se $x^k \notin \text{ARG MIN}_w \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, então defina $\Psi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Psi_k(x) = \langle F(x), z^k \rangle$. Tome como x^{k+1} qualquer vetor $x \in \Omega^k$ tal que existe $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

$$0 \in \partial_{\varepsilon_k} \Psi_k(x) + \beta_k q(x, x^k) \partial(q(\cdot, x^k))(x) + N_{\Omega^k}(x), \quad (3.21)$$

$$q^2(x, x^k) \leq \bar{c} \|F(x) - F(x^k)\| \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0. \quad (3.22)$$

onde $0 < l < \beta_k < L$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\{z^k\} \subset \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$, $\|z^k\|_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, $\bar{c} \in \mathbb{R}_+^*$ e $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$.

Teorema 3.2.1 *Sejam $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2) e $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (1.1). Se $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-II, então $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada e todo ponto de acumulação desta sequência é uma solução Pareto fraco do POM irrestrito (3.1).*

Prova: [Existência das iterações]: $x^0 \in \mathbb{R}^n$ é escolhido na etapa de inicialização. Assumindo que o algoritmo atingiu a iteração k , mostramos que existe um x^{k+1} apropriado. Pelo critério de parada, se $x^k \in \text{ARG MIN}_w \{F(x), x \in \mathbb{R}^n\}$, então $x^{k+p} = x^k, \forall p \geq 1$. Caso contrário defina $\varphi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi^k(x) = \Psi_k(x) + \frac{\beta_k}{2} q^2(x, x^k).$$

Analogamente à prova da Proposição 3.1.1, concluímos que o conjunto $\arg \min\{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$ é não vazio. Seja $x^{k+1} \in \arg \min\{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$. Então, pela Observação 1.2.2, $0 \in \partial(\Psi_k + \frac{\beta_k}{2} q^2(\cdot, x^k) + \delta_{\Omega^k})(x^{k+1})$. Assim, analogamente à prova da Proposição 3.1.3 (a), concluímos que

$$0 \in \partial(\Psi_k)(x^{k+1}) + \beta_k q(x^{k+1}, x^k) \partial(q(\cdot, x^k))(x^{k+1}) + N_{\Omega^k}(x^{k+1}).$$

Logo, como $\partial f(x) = \partial_0 f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$ para toda função convexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, x^{k+1} satisfaz (3.21) para $\varepsilon_k \equiv 0$. Desde que $x^{k+1} \in \arg \min\{\varphi^k(x) \mid x \in \Omega^k\}$ e $x^k \in \Omega^k; \forall k$, analogamente à prova da Proposição 3.1.3(b)(iv), prova-se que $q^2(x^{k+1}, x^k) \leq \bar{c} \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\|$ com $\bar{c} = 2/l$. Portanto x^{k+1} satisfaz (3.21) e (3.22).

[Propriedades]: Seja $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-II. Temos: **(a)** $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada; **(b)** $\forall z \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}, \{\langle F(x^k), z \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não crescente e convergente; **(c)** $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\| = 0$; **(d)** $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0$ e **(e)** $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$. As provas dos itens (a), (b) e (c) são análogas às provas dos itens (b)(i), (b)(ii) e (b)(iii) da Proposição 3.1.3. Por (3.22), $q^2(x^{k+1}, x^k) \leq \bar{c} \|F(x^{k+1}) - F(x^k)\|$. Portanto a prova do item (d) é análoga à prova da Proposição 3.1.3 item (b)(iv). A prova do item (e) é análoga à prova da Proposição 3.1.3, item (b)(v).

[Convergência]: Seja $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo algoritmo VQD-II. Então existem $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $\lim_{j \rightarrow \infty} x^{k_j} = x^*$. Como $\|z^k\|_1 = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, existem $\bar{z} \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ e $\{z^{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tais que $\lim_{l \rightarrow +\infty} z^{k_l} = \bar{z}$. Por (3.21), existem $\zeta^{k_l+1} \in \partial(q(\cdot, x^{k_l}))(x^{k_l+1})$ e $v^{k_l+1} \in N_{\Omega^{k_l}}(x^{k_l+1})$ tal que $-\beta_{k_l} q(x^{k_l+1}, x^{k_l}) \zeta^{k_l+1} - v^{k_l+1} \in \partial_{\varepsilon_{k_l}} \Psi_{k_l}(x^{k_l+1})$. Então, pela desigualdade do ε_{k_l} -subgradiente para função convexa Ψ_{k_l} , temos: $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Psi_{k_l}(x) \geq \Psi_{k_l}(x^{k_l+1}) - \beta_{k_l} q(x^{k_l+1}, x^{k_l}) \langle \zeta^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle - \langle v^{k_l+1}, x - x^{k_l+1} \rangle - \varepsilon_{k_l}.$$

Portanto, como $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$, analogamente à prova do Teorema 3.1.1, concluímos que x^* é uma solução Pareto fraco do POM irrestrito (3.1). \blacksquare

Observação 3.2.1 *Se no algoritmo VQD-II considerarmos $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K_\delta$ para algum $\delta > 0$ (conf. seção 3.1.4) então, de forma análoga à prova do Teorema 3.1.2, garantimos a convergência do Teorema anterior para soluções Pareto do POM (3.1).*

3.3 Exemplos numéricos

Para avaliar nosso algoritmo VQD-I, experimentos numéricos foram realizados, utilizando a classe de instâncias de testes contínuos multiobjetivo proposta por Li e

Zhang [25]. Nesta classe de problemas, o número de variáveis e funções objetivo podem ser definidas arbitrariamente. Outra boa característica desta classe é que os conjuntos Pareto podem ser prescritos. Realizamos nossas experiências com um Intel Core 2 Quad CPU Q9550 2.83 GHz, 4GB de RAM e SO Linux 32 bits. O algoritmo VQD-I foi codificado em Matlab.

Consideramos três grupos de instâncias: LZ2, LZ3 e LZM. A Tabela 3.1 apresenta a definição dos objetivos e dos respectivos conjuntos Pareto de cada grupo. O espaço de busca de LZ2 foi $\Omega_2 = [0, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$; para LZ3, $\Omega_3 = [0, 1]^2 \times [-2, 2]^{n-2}$; e, para LZM, $\Omega_M = [0, 1]^n$. Em cada instância, o número n de variáveis (a dimensão do respectivo espaço de busca) pode ser escolhido aqui. As instâncias do grupo LZ2 possuem duas funções objetivo, as de LZ3 possuem três funções objetivo, e no grupo LZM, o número m de objetivos podem ser definidos de forma arbitrária.

| Grupo | Objetivos e conjuntos Pareto |
|-------|--|
| LZ2 | $f_1 = x_1 + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(x_j - \text{sen} \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ $f_2 = 1 - x_1^2 + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(x_j - \text{sen} \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ <p>onde $J_i = \{j 2 \leq j \leq n \text{ e } j - 1 \text{ é par}\}$. Seu conjunto Pareto é $x_j = \text{sen} \left(6\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right), j = 2, \dots, n$.</p> |
| LZ3 | $f_1 = \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) + \frac{2}{ J_1 } \sum_{j \in J_1} \left(x_j - 2x_2 \text{sen} \left(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ $f_2 = \cos(x_1\pi/2) \text{sen}(x_2\pi/2) + \frac{2}{ J_2 } \sum_{j \in J_2} \left(x_j - 2x_2 \text{sen} \left(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ $f_3 = \sin(x_1\pi/2) + \frac{2}{ J_3 } \sum_{j \in J_3} \left(x_j - 2x_2 \text{sen} \left(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right) \right)^2,$ <p>onde $J_i = \{j 3 \leq j \leq n, \text{ e } j - 1 \text{ é um múltiplo de } 3\}, i = 1, 2$. Seu conjunto Pareto é $x_j = 2x_2 \text{sen} \left(2\pi x_1 + \frac{j\pi}{n} \right), j = 3, \dots, n$</p> |
| LZM | $f_i = x_i + \frac{2}{ J_i } \sum_{j \in J_i} \left(x_j + \frac{(S+j)}{m+n} \right)^2, i = 1, \dots, m - 1,$ $f_m = 1 - S + \frac{2}{ J_m } \sum_{j \in J_m} \left(x_j + \frac{(S+j)}{m+n} \right)^2,$ <p>onde $S = \sum_{i=1}^{m-1} x_i$ e $J_i = \{j m + i \leq j \leq n \text{ e } j - i \text{ é um múltiplo de } m\}$. Seu conjunto Pareto é $x_j = \frac{(S+j)}{m+n}, j = m, \dots, n$.</p> |

Tabela 3.1: Objetivos e conjuntos Pareto das instâncias de teste.

No experimento analisamos a convergência do algoritmo VQD-I em diferentes instâncias de cada grupo. Para cada instância, testamos o algoritmo VQD-I com 100 pontos de partida, selecionados aleatoriamente no espaço de busca. Os resultados são apresentados na tabela 3.2, em que a coluna ITER fornece a média do número de iterações, TIME é o tempo médio da CPU em segundos e dPS é a distância Euclidiana média entre as 100 soluções obtidas pelo algoritmo VQD-I e o respectivo ponto no conjunto de Pareto. Os resultados mostram que, em média, o algoritmo VQD-I convergiu para o conjunto Pareto. Também podemos ver que, para estes

grupos de instâncias, a média do número de iterações e o tempo médio cresce quase linearmente com o número de variáveis (ver figura 3.1).

| Grupo | n | m | ITER | TM | MDE |
|-------|-----|-----|--------|--------|----------|
| LZ2 | 05 | 02 | 17.36 | 1.38 | 3.56E-06 |
| LZ2 | 10 | 02 | 33.74 | 5.64 | 7.07E-06 |
| LZ2 | 15 | 02 | 52.77 | 14.99 | 1.08E-05 |
| LZ3 | 05 | 03 | 13.63 | 1.17 | 2.84E-06 |
| LZ3 | 10 | 03 | 33.45 | 6.68 | 4.51E-05 |
| LZ3 | 15 | 03 | 51.12 | 15.92 | 5.82E-05 |
| LZM | 05 | 02 | 18.28 | 1.54 | 1.16E-06 |
| LZM | 07 | 02 | 25.58 | 2.93 | 1.83E-06 |
| LZM | 09 | 02 | 33.44 | 4.89 | 2.22E-06 |
| LZM | 11 | 04 | 31.93 | 8.77 | 6.70E-06 |
| LZM | 15 | 04 | 46.27 | 18.05 | 8.97E-06 |
| LZM | 19 | 04 | 60.65 | 31.49 | 8.05E-06 |
| LZM | 23 | 08 | 59.86 | 53.16 | 8.42E-06 |
| LZM | 31 | 08 | 86.71 | 112.97 | 9.69E-06 |
| LZM | 39 | 08 | 116.00 | 200.43 | 1.55E-05 |

Tabela 3.2: Média do número de iterações (ITER), Tempo médio de CPU em segundos (TM) e Média da distância euclidiana (MDE) entre as soluções obtidas pelo algoritmo VQD-I e o conjunto Pareto.

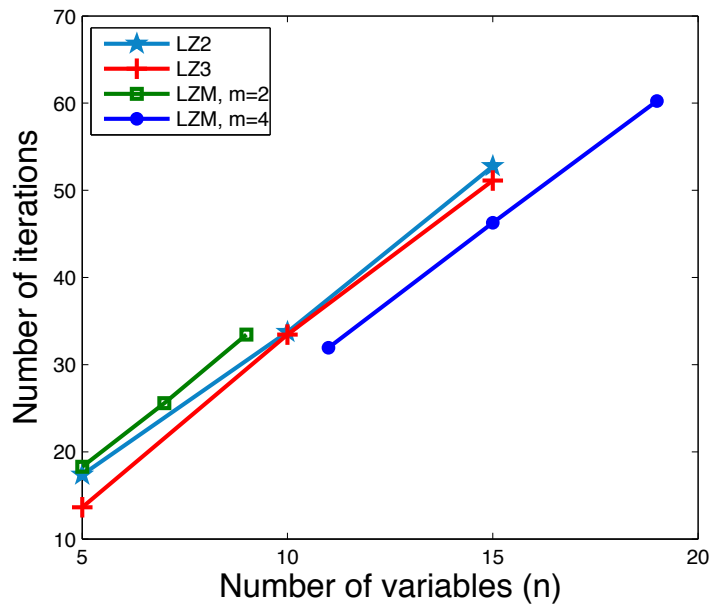


Figura 3.1: Número de iterações para cada instância.

Capítulo 4

Considerações finais

Neste trabalho consideramos o problema de encontrar soluções Pareto fraco e/ou Pareto para POM irrestrito

$$\text{MINIMIZE } \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

onde $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(H1) F é convexa, i.e., $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa para todo $i \in \{1, \dots, m\}$;

(H2) F possui pelo menos uma de suas funções objetivo coerciva, i.e.,

$$\text{existe } r \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F_r(x) = +\infty.$$

Resolvemos este problema de duas formas: 1º) Propomos no capítulo 2, um método de escalarização proximal log-QD (Método EPLQD) que generaliza o método de escalarização proximal log-quadrático de Gregório e Oliveira [20] e, 2º) Propomos no capítulo 3, um APP de valor vetorial [em versões exata (Algoritmo VQD-I) e inexata (Algoritmo VQD-II)] que generaliza o APP de valor vetorial de Bonnel et al. [4] (quando este estiver restrito à otimização multiobjetivo). Em ambos os casos o termo quadrático dos subproblemas dos métodos que foram generalizados é substituído pela quase-distância, que possui importantes aplicações em teoria da computação e economia, entre outras. O uso da quase-distância gerou a perda de importantes propriedades como a convexidade e a diferenciabilidade. No entanto, para o método EPLQD, garantimos convergência para soluções Pareto e para os algoritmos VQD-I e VQD-II garantimos convergência para soluções Pareto fraco.

Encontramos um novo exemplo de aplicação satisfazendo as propriedades (P1) a (P4) que foram fundamentais para a convergência do método EPLQD. E devido à imposição da propriedade (P3), que é uma propriedade “mais restritiva” em relação

à correspondente propriedade do método de Gregório e Oliveira, garantimos a convergência para uma solução “mais apurada”, i.e, para soluções Pareto (em vez de Pareto fraco).

Até onde sabemos os subproblemas dos APP de valor vetorial existentes na literatura são todos convexos e então, para escalarizar os subproblemas dos métodos os autores fazem uso do Teorema 2.10 de Luc [27] que exige como hipótese a convexidade da aplicação. Desde que os subproblemas do APP de valor vetorial que propomos aqui não necessariamente são convexos, o Teorema 2.10 de Luc não se aplica para a escalarização dos mesmos. Contornamos esta situação verificando que o Teorema 2.10 de Luc continua válido se considerarmos como hipótese apenas uma condição necessária da convexidade (conf. Proposição 1.4.4).

A seguir destacamos algumas possibilidades para continuidade deste trabalho:

- Estender a abrangência dos algoritmos propostos para aplicações $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ quase-convexa;
- Estender a abrangência dos algoritmos propostos para aplicações $F : X \rightarrow Y$ onde X e Y são espaços de Hilbert real e Y contendo um cone convexo, fechado e pontudo com interior não vazio.
- Estender a abrangência dos algoritmos propostos para aplicações $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde M é uma variedade Riemanniana conexa n -dimensional;
- Propor uma versão inexata para o método EPLQD;
- Ampliar os testes numéricos, considerando um maior e mais diversificado número de funções testes.
- Comparar o desempenho dos algoritmos implementados com outros algoritmos existentes na literatura.

Referências Bibliográficas

- [1] ALBERT, G.E, *A note on quasi-metric spaces*, Bull, Amer. Math. Soc. 47 (1941), 479-482.
- [2] ALBER, Y.I., BURACHIK, R.S., IUSEM, A.N., *A proximal point method for nonsmooth convex optimization problems in Banach spaces*, Abstract and Applied Analysis 2 (1997), no. 1-2, 97-120.
- [3] AUSLENDER, A., TEBOULLE, M., BEN-TIBA,S., *A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities*, Computational Optimization Applications 12 (1999), no. 1-3, 31-40.
- [4] BONNEL, H., IUSEM, A.N., SVAITER, B.F., *Proximal methods in vector optimization*, SIAM Journal on Optimization 15 (2005), no. 4, 953-970.
- [5] BRATTKA, V., *Recursive quasi-metric spaces*, Theoretical Computer Science 305 (2003), no. 1-3, 17-42.
- [6] CENG, L., YAO, J., *Approximate proximal methods in vector optimization*, European Journal of Operational Research 183 (2007), 1-19.
- [7] CHEN, G., TEBOULLE, M, *Convergence analysis of a proximal-like minimization algorithm using Bregman functions*, SIAM Journal of Optimization 3 (1993), no. 3, 538-543.
- [8] CHEN, J.S., PAN, S, *A proximal-like algorithm for a class of nonconvex programming*, Pacific Journal of Optimization 4 (2008), no. 2, 319-333.
- [9] CHEN, Z., ZHAO, K, *A proximal-type method for convex vector optimization problem in Banach spaces*, Numerical Functional Analysis and Optimization 30 (2009), no. 1-2, 70-81.
- [10] CHEN, Z., XIANG, C., ZHAO, K., LIU, X., *Convergence analysis of Tikhonov-type regularization algorithms for multiobjective optimization problems*, Applied Mathematics and Computation 211 (2009), 167-172.

- [11] CHEN, Z., HUANG, X.X., YANG, X.Q., *Generalized proximal point algorithms for multiobjective optimization*, *Applicable Analysis* 90 (2011), no. 6, 935-949.
- [12] CHINCHULUUN, A., PARDALOS, P.M., *A survey of recent developments in multiobjective optimization*, *Annals of Operations Research* 154 (2007), no. 1, 29-50.
- [13] CHUONG, T.D., *Generalized proximal method for efficient solutions in vector optimization*, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 32 (2011), no.8, 843-857.
- [14] CRUZ NETO, J.X. da, FERREIRA, O.P., IUSEM, A.N., MONTEIRO, R.D.C., *Dual convergence of the proximal point method with Bregman distances for linear programming*, *Optimization Methods and Software* 22 (2007), 339-360.
- [15] CUNHA, F.G.M., CRUZ NETO, J.X. da, OLIVEIRA, P.R., *A proximal point algorithm with a φ -divergence for quasiconvex programming*, *Optimization (Print)* 59 (2010), 777-792.
- [16] DI CONCILIO, A., GERLA, G. *Quasi-metric spaces and point-free geometry*, *Math. Structures comput.* 16 (2006), no.1, 115-137.
- [17] FERREIRA, O. P., OLIVEIRA, P. R., *Proximal Point Algorithm on Riemannian Manifolds*, *Optimization (Print)*, *Alemanha* 51 (2002), no.2, 257-270.
- [18] FLIEGE, J., SVAITER, B.F., *Steepest descent methods for multicriteria optimization*, *Mathematical Methods of Operations Research* 51 (2000), no. 3, 479-494.
- [19] GÖPFERT, A., RIAHI, H., TAMMER, C., ZALINESCU, C., *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer, New York, 2003.
- [20] GREGÓRIO, R., OLIVEIRA, P.R., *A Logarithmic-quadratic proximal point scalarization method for multiobjective programming*, *J. Global Optim.* (Dordrecht. Online) 1 (2010), 1-11.
- [21] HUANG, X.X., YANG, X.Q., *Duality for multiobjective optimization via non-linear Lagrangian functions*, *J. of Optim. Theory and Applications* 120 (2004), no.1, 111-127.

- [22] JAHN, J., *Theory of vector maximization: Various concepts of efficient solutions, in Multicriteria Decision Making, Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory, and Applications*, T. Gal, T. J. Stewart, and T. Hanne, eds., vol 21, Kluwer, Boston, 1999, pp. 37-68.
- [23] KAPLAN, A. TICHATSCHKE, R. *Proximal point methods and nonconvex optimization*, J. Global Optim. 13 (1998), 389-406.
- [24] KUNZI, H.P.A, PAJOOHESH, H., SCHELLEKENS, M.P., *Partial quasi-metrics*, Theoretical Computer Science 365 (2006), no.3, 237-246.
- [25] LI, H., ZHANG, Q., *Multiobjective Optimization Problems With Complicated Pareto Sets, MOEA/D and NSGA-II*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 13 (2009), no.2, 284-302.
- [26] LIMA, E.L., *Curso de Análise*, Coleção projeto Euclides, vol. 2, Rio de Janeiro, 2004.
- [27] LUC, T.D., *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 319, Springer, Berlin, 1989.
- [28] MARTINET, B., *Regularization d'inequations variationelles par approximations sucessives*, Révue Française d'informatique et Recherche Opérationnelle 4 (1970), 154-159.
- [29] MIETTINEN, K.M., *Nonlinear multiobjective optimization*, Kluwer, Boston, 1999.
- [30] MORENO, F.G., *Análise de métodos do tipo proximal com regularização quase-distância*, Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2011.
- [31] MORENO, F.G., OLIVEIRA, P.R., SOUBEYRAN, A., *A Proximal Algorithm with Quasi Distance. Application to Habit's Formation*, Optimization (Online) 1 (2011), 1-21.
- [32] MORDUKHOVICH, B.S., *Variational analysis and generalized differentiation I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 330, Springer-Verlag, Berlin, Basic theory, 2006.
- [33] MORDUKHOVICH, B.S., SHAO, Y., *Nonsmooth Sequential Analysis in Asplund Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society 348 (1996), no.4, 1235-1280.

- [34] PAPA QUIROZ, E.A., OLIVEIRA, P.R., *An extension of proximal methods for quasiconvex minimization on the nonnegative orthant*, European Journal of Operational Research 216 (2012), no.1, 26-32.
- [35] PENNANEN, T., *Local convergence of the proximal point algorithm and multiplier methods without monotonicity*, Mathematics of Operations Research 27 (2002), no.1, 170-191.
- [36] ROCKAFELLAR, R.T., *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM Journal of Control and Optimization 14 (1976), 877-898.
- [37] ROCKAFELLAR, R.T., WETS, R.J-B, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.
- [38] ROMAGUERA, S., SANCHIS, M., *Applications of utility functions defined on quasi-metric spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 283 (2003), no. 1, 219-235.
- [39] SAWARAGI, Y., NAKAYAMA, H., TANINO, T., *Theory of multiobjective optimization*, Academic Press, Inc., Orlando, 1985.
- [40] SOUZA, S.S., OLIVEIRA, P.R., CRUZ NETO, J.X. da, SOUBEYRAN, A., *A proximal method with separable Bregman distance for quasiconvex minimization on the nonnegative orthant*, European Journal of Operational Research 201 (2010), 365-373.
- [41] STEWART, T.J., BANDTE, O., BRAUN, H., CHAKRABORTI, N., EHRGOTT, M., GOBELT, M., JIN, Y., NAKAYAMA, H., POLES, S., DI STEFANO, D., *Real-World Applications of Multiobjective Optimization*, In: J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowinski (Eds.), Multiobjective Optimization, Lecture Notes in Computer Science, vol. 5252, pp.285-327 (chapter 11), Springer, Berlin, 2008.
- [42] STOJMIROVIC, A., *Quasi-metric Spaces with Measure*, Topology Proc. 28 (2004), 655-671.
- [43] WHITE, D.J., *A bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods*, Journal of the Operational Research Society 41 (1990), no.8, 669-691.
- [44] VILLACORTA, K.D.V, OLIVEIRA, P.R., *An Interior Proximal Method in Vector Optimization*, European Journal of Operational Research 214 (2011), no.3, 485-492.