



## GRAFOS EQUIESTÁVEIS E DE PARTIÇÃO GERAL

Taísa Lopes Martins

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro  
Junho de 2014

# GRAFOS EQUIESTÁVEIS E DE PARTIÇÃO GERAL

Taísa Lopes Martins

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof.<sup>a</sup> Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

---

Prof. Fabiano de Souza Oliveira, D.Sc.

---

Prof. Mitre Costa Dourado, D.Sc.

---

Prof. Murilo Vicente Gonçalves da Silva, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2014

Martins, Taísa Lopes

Grafos equiestáveis e de partição geral/Taísa Lopes  
Martins. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

XII, 81 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 79 – 81.

1. Teoria de grafos.
  2. Classes de grafos.
  3. Grafos equiestáveis.
- I. Cerioli, Márcia Rosana.  
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III.  
Título.

*À minha família.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Deus por guiar meu caminho, sempre me ajudando e me acalmando nas horas difíceis. Um agradecimento muito especial para a minha família, por todo o amor e suporte. Em especial, à minha mãe pelo apoio e amor incondicionais, sempre me permitindo colocar meus estudos em primeiro lugar, e à minha irmã Liana, por sempre acreditar em mim, me apoiar e me incentivar em cada passo dessa jornada (obrigada por assistir apresentações e me ajudar em alguns textos que não fazem o menor sentido para você =]).

Obrigada também a todos do laboratório de Algoritmos e Combinatória, vocês tornam meu dia muito mais feliz e estão sempre me motivando! \o/ (Super obrigada por me fazerem chorar de alegria no meu aniversário, vocês são uma fofurinha =]) Em especial gostaria de agradecer ao Bola, Carlos, Gabriel, Luís, Aline, Diana, Fernanda e Paloma.

Diana, muito obrigada por revisar parte do meu texto, pelas dancinhas e sua alegria, você é super! =P

Luís, obrigada por você estar sempre dividindo a salinha do lado comigo. Sou especialmente agradecida pelas nossas conversas, que incluem desde fofocas até conselhos, passando por várias ajudas. Também nunca vou esquecer dos vários cafês, biscoitos e nossas corridas!

Carlos, obrigada por sua alegria, me aturar quando decido que quero ficar falando, por estar sempre por perto, por estar sempre pronto a ajudar (obrigada pelas 50 milhões de vezes que você imprimiu algo para mim e pelos diversos favores) e por ser O companheiro de café. xD

Paloma, minha melhor amiga na universidade \o/, obrigada por me incentivar, pelo apoio, seminários, cafês do Burguesão, se oferecer para revisar textos e demonstrações, pelas idas ao docinho e ao cinema e recomendações literárias. Obrigada pelo privilégio de ser sua amiga. =]

Bola, obrigada pelas conversas sobre séries, fofocas, sua alegria, discussões tanto acadêmicas quanto sobre assuntos aleatórios e não podemos esquecer: sopa de legumes! xD

Outra pessoa fundamental, minha amiga Laizes, obrigada por ser uma pesquisadora exemplar, sempre me inspirando a ser melhor e dar o meu melhor.

Um muito obrigada a todos os professores da COPPE que contribuíram para a minha formação. Um agradecimento com muito carinho para as pessoas da secretaria, do suporte e da limpeza. Obrigada pela atenção e carinho de todos vocês!

Obrigada à minha orientadora Márcia, por sugerir o tema e toda a sua orientação. Obrigada ainda, por na graduação, me fazer me apaixonar pelo estudo de Teoria de Grafos, sendo uma das principais responsáveis por eu estar onde cheguei (Claudson, você também está aqui =] ).

Também preciso agradecer ao CNPq, cujo financiamento possibilitou que eu cursasse o mestrado.

Obrigada a todos os membros da banca, por aceitarem participar da avaliação desse trabalho e pela dedicação do tempo de vocês.

Finalmente, obrigada ao Bruno, por todo incentivo, amor e paciência. Obrigada pelos conselhos, puxões de orelha, dancinhas, jujus e aturar meus estresses. Amo você, xuxu!

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## GRAFOS EQUIESTÁVEIS E DE PARTIÇÃO GERAL

Taísa Lopes Martins

Junho/2014

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo é equiestável quando existe uma atribuição de números reais positivos aos seus vértices de forma que para todo conjunto independente maximal, e somente para esses conjuntos de vértices, a soma dos valores atribuídos aos vértices do conjunto somem 1. Por outro lado, um grafo é de partição geral se todas as suas arestas podem ser cobertas por cliques fortes.

Neste trabalho reunimos os principais resultados sobre grafos equiestáveis e de partição geral e desenvolvemos resultados envolvendo as classes dos grafos de partição geral, equiestáveis e triangulares. Em particular, mostramos que tanto a classe dos grafos de partição geral quanto a classe dos grafos triangulares são fechadas pelas operações de substituição e indução e contração de módulo, obtendo diversos resultados da literatura como corolários desses teoremas.

Além disso, ao caracterizar os grafos planares que são equiestáveis/de partição geral, generalizamos o resultado de Mahadev, Peled e Sun sobre os grafos outer-planares equiestáveis, respondendo também a uma questão em aberto proposta por Anbeek, DeTemple, McAvaney e Robertson em 1997.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## EQUISTABLE AND GENERAL PARTITION GRAPHS

Taísa Lopes Martins

June/2014

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

A graph is equistable when there is a real positive attribution to the vertices of the graph such that among all the subsets of vertices, for all maximal independent sets, and only for them, the sum of the values assigned to each vertex is equal to 1. On the other hand, a general partition graph is a graph whose edges are covered by strong cliques.

In this work, we did a survey on equistable and general partition graphs and developed results concerning the equistable, general partition and triangle classes. In particular, we showed that the general partition and triangle classes are both closed under the operations of substitution and inducing and contraction of modules, which turned several results into corollaries of these theorems.

Moreover, by characterizing the planar graphs that are equistable/general partition graphs, we generalized Mahadev, Peled and Sun result on equistable outerplanar graphs and solved an open question proposed by Anbeek, DeTemple, McAvaney and Robertson in 1997.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definições e notações iniciais . . . . .	3
<b>2 Grafos equiestáveis e de partição geral</b>	<b>7</b>
2.1 Grafos equiestáveis . . . . .	8
2.2 Grafos fortemente equiestáveis . . . . .	10
2.3 Grafos de partição geral . . . . .	12
2.3.1 Contraexemplo da conjectura de Orlin . . . . .	18
2.4 Grafos triangulares . . . . .	22
<b>3 Operações sobre grafos equiestáveis e de partição geral</b>	<b>29</b>
3.1 Módulo e contração de módulo . . . . .	30
3.2 União . . . . .	33
3.3 Adição/remoção de vértice universal . . . . .	34
3.4 Substituição . . . . .	35
3.5 Junção . . . . .	38
3.6 Adição/remoção de gêmeo . . . . .	39
3.7 Adição/remoção de vértice de vizinhança não minimal . . . . .	41
3.8 Decomposição Split . . . . .	43
3.9 Clique central . . . . .	45
<b>4 Produtos de grafos</b>	<b>51</b>
4.1 Produto tensorial . . . . .	51
4.2 Produto cartesiano . . . . .	54
4.3 Produto forte . . . . .	57
4.4 Produto lexicográfico . . . . .	59
<b>5 Interseção com algumas classes de grafos</b>	<b>61</b>
5.1 Grafos cordais . . . . .	61
5.2 Grafos distância-hereditários . . . . .	65

5.3	Grafos simpliciais . . . . .	66
5.4	Grafos linha . . . . .	68
5.5	Grafos muito bem cobertos . . . . .	69
5.6	Grafos planares . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Comentários finais e trabalhos futuros</b>	<b>77</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

1.1	Linha do tempo: definições e relação. . . . .	2
1.2	Grafo de Hajós. . . . .	4
1.3	Exemplos de $P_4$ 's ruins, conjuntos testemunha em cinza. . . . .	5
1.4	Grafo de interseção do modelo $\mathcal{I} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ . . . . .	6
1.5	Exemplo de grafo linha $G$ e seu grafo raiz $H$ . . . . .	6
2.1	Exemplos de grafos equiestáveis. . . . .	8
2.2	Exemplo de grafo que não é equiestável. . . . .	9
2.3	Exemplos de grafos de partição geral. . . . .	13
2.4	Exemplos de grafos que não são de partição geral. . . . .	13
2.5	Exemplo de grafo com duas coberturas minimais por clique. . . . .	15
2.6	Exemplo de corda de cruzamento ímpar em um ciclo. . . . .	20
2.7	Exemplo de corda de não cruzamento par em um ciclo. . . . .	20
2.8	Grafo circulante $C_n(\{\pm 1, \pm 4\})$ para $n = 11, 13$ e $15$ . . . . .	22
2.9	Grafo triangular que não é equiestável. . . . .	23
2.10	Hierarquia das classes partição geral, fortemente equiestável, equiestável e triangular. . . . .	27
3.1	Exemplo de módulo de um grafo. . . . .	30
3.2	Operação de contração de módulo. . . . .	30
3.3	Representação de $G$ e do módulo $M$ . . . . .	31
3.4	Representação de $G'$ . . . . .	31
3.5	Representação de $G$ . . . . .	32
3.6	Operação de substituição. . . . .	35
3.7	Representação de $G_1(u \rightarrow G_2 \cup K_1)$ . . . . .	37
3.8	Exemplo de grafo triangular em que a remoção de um vértice de vizinhança minimal pode produzir um grafo que não satisfaz a condição triangular. . . . .	43
3.9	Decomposição split de um grafo $G$ . . . . .	44
3.10	Decomposição split do $P_4$ . . . . .	46
3.11	Ilustração de uma clique central. . . . .	46

3.12	Construção apenas com $G_1$ .	47
4.1	Grafo pata.	51
4.2	Representação de $G_1 \square G_2$ .	54
4.3	Representação de $G_1 \times G_2$ .	57
4.4	Exemplo de CIM (cinza) do $C_4 \times K_2$ .	58
4.5	Representação de $Lex(G_1, G_2)$ .	59
5.1	Grafo bem coberto triangular que não é de partição geral.	71
5.2	Notação para a clique $C_i$ .	72
5.3	Notação para alguns vértices relacionados à $C_i$ .	73
5.4	$S'_i$ consiste nos vértices de $S_i$ que estão na região cinza.	74
5.5	Exemplo em que é necessário o uso de $va_3$ ou $vb_3$ . Os vértices em cinza formam um exemplo de conjunto $S_2$ .	74
5.6	Representação do caso 2a.	75
5.7	Representação do caso 2b quando $a_i$ é adjacente a $a_{i+1}$ e $b_{i+1}$ .	75

# Capítulo 1

## Introdução

Grafos são objetos matemáticos que nos permitem modelar e estudar problemas tanto de natureza teórica quanto prática. Por constituírem uma ferramenta muito abrangente, é natural o surgimento de diversas classes de grafos as quais são definidas por um determinado conjunto de propriedades. O foco desta dissertação é explorar estruturas e características de duas dessas classes de grafos: a dos grafos equiestáveis e a dos grafos de partição geral.

Os grafos equiestáveis, apresentados por Payan [24] em 1980, surgiram como uma generalização dos grafos threshold. Enquanto os grafos threshold são grafos nos quais todos os conjuntos independentes, maximais ou não, e somente estes, podem ser obtidos como a solução inteira de uma única inequação, os grafos equiestáveis são os grafos nos quais apenas os conjuntos independentes maximais podem ser obtidos como a solução inteira de uma determinada equação.

Apresentando uma aplicação em computação paralela, Korach et al. [13] mostraram uma das grandes vantagens de se trabalhar com estes grafos: seus conjuntos independentes maximais podem ser obtidos a partir de valores atribuídos aos seus vértices. Isto é, em um programa de programação linear inteira feito sobre um grafo equiestável, utilizando uma atribuição especial, que mais tarde iremos definir como atribuição equiestável, é possível através de uma única equação restringir o conjunto de soluções para apenas conjuntos independentes maximais do grafo.

Por apresentarem diversas questões em aberto, além de ainda não possuírem uma caracterização combinatória, os grafos equiestáveis apresentam-se como uma classe de grafos desafiadora e estimulante a ser estudada. Um divisor de águas nesse estudo, o artigo de Miklavič e Milanič [17] de 2011, apresenta uma abordagem mais combinatória do assunto, envolvendo os grafos de partição geral, ao invés de uma mais algébrica, até então a mais utilizada, facilitando e tornando mais simples diversas provas.

Já os grafos de partição geral foram introduzidos em 1987 por DeTemple, Harary e Robertson [6], incentivados por sua aplicação no problema de determinar todos os

modos de triangular um polígono cujos vértices são pontos em um reticulado. Sua relação com os grafos equiestáveis foi somente demonstrada, em 2009, por Orlin [17] que mostrou que a classe dos grafos de partição geral está contida na classe dos grafos equiestáveis. Recentemente, em 2014, Milanič et al. [20] exibiram um contraexemplo para a conjectura, proposta por Orlin [17], de que as duas classes de grafos seriam iguais.

Neste trabalho, procuramos entender e observar características de ambas as classes, além de verificar a conjectura de Orlin quando restrita a classes clássicas de grafos.

A estrutura desta dissertação se apresenta da seguinte maneira: na próxima seção, são apresentadas as definições e notações usadas ao longo do texto; no Capítulo 2, são encontradas as definições das classes dos grafos equiestáveis e dos de partição geral, assim como sua relação com outras classes de grafos que vêm desempenhando um papel importante na pesquisa no tema; no Capítulo 3, são apresentadas algumas operações de adição e remoção de vértices que são preservadas nas classes tanto dos grafos equiestáveis e de partição geral quanto nas suas classes relacionadas; no Capítulo 4, são apresentadas algumas operações de produto que são fechadas na classe dos grafos equiestáveis e na classe dos grafos de partição geral; no Capítulo 5 são encontradas as interseções das classes tanto dos grafos equiestáveis quanto dos grafos de partição geral com algumas classes clássicas de grafos, incluindo a dos grafos planares, nossa principal contribuição neste trabalho; finalmente, no Capítulo 6, são apresentados os comentários finais e algumas propostas de trabalhos futuros.

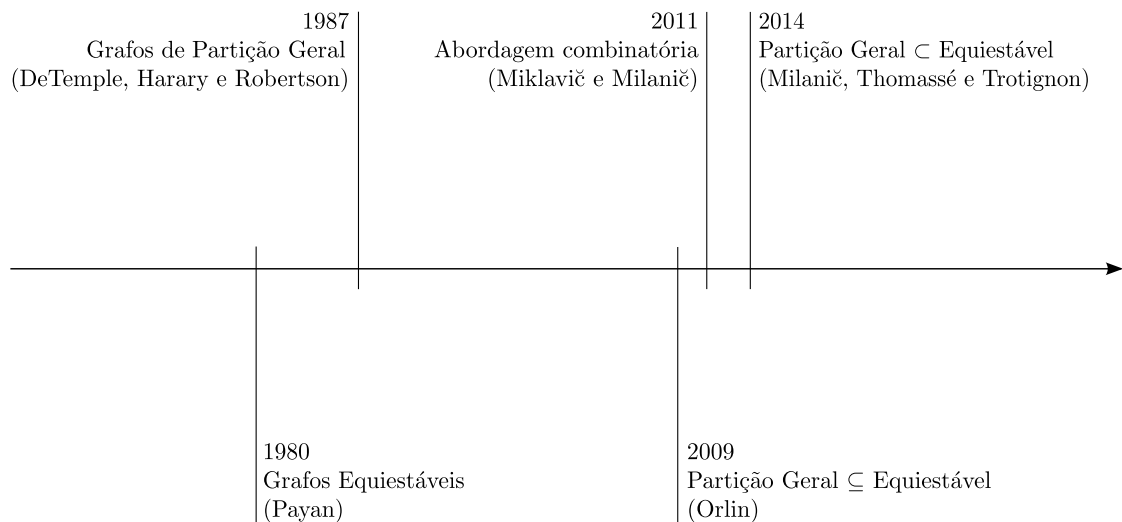


Figura 1.1: Linha do tempo: definições e relação.

## 1.1 Definições e notações iniciais

Um *grafo*  $G = (V, E)$  consiste em um par formado por um conjunto  $V$  não vazio de objetos denominados *vértices* e  $E$ , um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de  $V$ , chamados *arestas*. No restante dessa seção quando nos referirmos a um grafo ou um grafo estiver subentendido estaremos sempre falando de  $G = (V, E)$ , a não ser que outro grafo seja explicitado.

Um vértice  $u$  é *adjacente* a  $v$ , ou *vizinho* de  $v$ , se  $uv \in E$ . Nesse caso, dizemos que a aresta  $e = uv$  é *incidente* a ambos os vértices  $u$  e  $v$  e também que  $u$  e  $v$  são os *extremos* da aresta  $e$ .

Além disso, a *vizinhança de um vértice*  $u$ , ou seja, todos os vértices que são adjacentes a  $u$  em  $G$ , é denotada por  $N(u)$ . Logo,  $N(u) = \{v \mid uv \in E\}$ . Também chamamos  $N(u)$  de *vizinhança aberta* de  $u$  e  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$  de *vizinhança fechada* de  $u$ .

Já para um conjunto de vértices  $S \subseteq V$ , denotamos por  $N(S)$  a *vizinhança de*  $S$ , e a definimos como  $N(S) = (\bigcup_{v \in S} N(v)) \setminus S$ .

O *grau* de um vértice  $u$  é o tamanho de sua vizinhança. E, para um grafo  $G$ , o seu *grau mínimo* consiste no menor dos graus dos seus vértices. Um vértice de grau 1 também é chamado de vértice *folha*.

Um grafo é *completo* quando entre quaisquer dois vértices existe uma aresta. Denotamos um grafo completo de  $n$  vértices por  $K_n$ .

Seja  $G = (V, E)$ , seu *complemento* consiste no grafo  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  onde  $\overline{E}$  é formado pelo conjunto de arestas que faltam para  $G$  ser um grafo completo.

Seja  $S \subseteq V$ , o *grafo induzido por*  $S$  em  $G$ ,  $G[S]$ , possui conjunto de vértices  $S$  e conjunto de arestas  $\{uv \mid u, v \in S \text{ e } uv \in E\}$ . Nesse caso, dizemos que  $G[S]$  é um *subgrafo induzido* de  $G$ . Já para  $E' \subseteq E$ , o *grafo induzido por*  $E'$  em  $G$ ,  $G[E']$ , consiste no grafo onde o conjunto de vértices é formado pelos extremos das arestas de  $E'$  e seu conjunto de arestas é  $E'$ .

Em um grafo, um conjunto de vértices  $C$  é uma *clique* se  $G[C]$  é um grafo completo. Uma clique é dita *maximal*, se ela não está contida propriamente em nenhuma outra clique do grafo. Por outro lado, dizemos que um conjunto de vértices  $S$  é um *conjunto independente* ou *estável* se para quaisquer dois vértices de  $S$ , eles nunca são adjacentes. Um *conjunto independente maximal*, CIM, é tal que ele não está contido propriamente em nenhum outro conjunto independente do grafo.

Um vértice é *simplicial* se sua vizinhança fechada é uma clique. Além disso, chamamos tal clique de *clique simplicial*.

Um grafo é *p-partido* ou *multipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $p \geq 2$  conjuntos independentes maximais. No caso em que  $p$  é igual a 2, chamamos o grafo de *bipartido*.

Dizemos que uma aresta  $e$  é *coberta por uma clique*  $C$  ou que  $C$   *cobre a aresta*  $e$  quando os extremos de  $e$  fazem parte de  $C$ . Uma *cobertura de um grafo por cliques*, consiste em um conjunto de cliques que cobre todas as arestas do grafo. Uma cobertura por cliques  $\mathcal{C}$  é *minimal* quando nenhuma cobertura por cliques do grafo está contida propriamente em  $\mathcal{C}$ .

Dado um grafo  $G$ , denotamos por  $\mathcal{S}_G$  o conjunto dos conjuntos independentes maximais de  $G$  e por  $\mathcal{T}_G$  o conjunto de todos os subconjuntos não vazios de vértices de  $G$  que não formam um CIM.

Um conjunto de arestas  $E' \subseteq E$  é um *emparelhamento* se para qualquer par de arestas de  $E'$ , seus extremos são distintos. Para um emparelhamento  $E'$ , um vértice é *coberto* por  $E'$ , caso ele seja extremo de alguma aresta de  $E'$ , e uma aresta  $e$  está *emparelhada*, quando  $e \in E'$ . Um emparelhamento é *maximal* quando ele não está propriamente contido em nenhum outro emparelhamento do grafo e é *perfeito* quando todos os vértices do grafo são cobertos por ele.

Um grafo  $G$  é *sem*  $G'$  ou *livre* de  $G'$ , quando  $G$  não possui  $G'$  como subgrafo induzido por um conjunto de vértices qualquer.

Uma clique  $C$  é *forte* se para todo  $S \in \mathcal{S}_G$ , temos que  $S \cap C \neq \emptyset$ . Por exemplo, na Figura 1.2, temos um grafo de Hajós  $H$  onde

$$\mathcal{S}_H = \{\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_6\}\}.$$

Podemos observar que as cliques

$$\{v_1, v_2, v_6\}, \{v_2, v_3, v_4\} \text{ e } \{v_4, v_5, v_6\}$$

são fortes enquanto que a clique  $\{v_2, v_4, v_6\}$  não é uma vez que sua interseção com o CIM  $\{v_1, v_3, v_5\}$  é vazia.

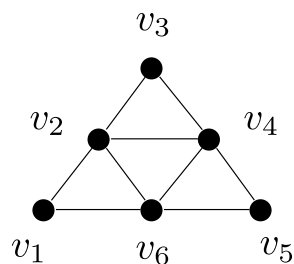


Figura 1.2: Grafo de Hajós.

É importante observar que se  $C$  é uma clique forte que não é maximal, sempre é possível estender  $C$  para uma clique forte que é maximal uma vez que ao adicionar vértices em  $C$  de forma a torná-la maximal, a interseção que  $C$  possuía com cada CIM continua existindo.

Um *caminho* em um grafo é uma sequência de vértices distintos  $v_1 \dots v_k$  de



forma que  $v_i v_{i+1} \in E$ ,  $1 \leq i < k$ . Um grafo  $P_n$  é um grafo com conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  de forma que  $v_1 v_2 \dots v_n$  é um caminho e nenhuma outra aresta além das do caminho existem.

Considere um  $P_4$   $v_1 v_2 v_3 v_4$ , subgrafo induzido de  $G$ . Dizemos que  $v_1 v_2 v_3 v_4$  é um  $P_4$  *ruim* se existe um conjunto independente maximal  $S$  em  $G$  tal que  $v_1, v_4 \in S$  e  $(N(v_2) \cap N(v_3)) \cap S = \emptyset$ . Nesse caso, dizemos que  $S$  é uma *testemunha* do  $P_4$ .



Figura 1.3: Exemplos de  $P_4$ 's ruins, conjuntos testemunha em cinza.

A *junção* de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ , também representada por  $G_1 \cdot G_2$ , é definida como o grafo  $G = (V, E)$  onde  $V = V_1 \cup V_2$  e  $E = \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\} \cup E_1 \cup E_2$ .

Um *ciclo* em um grafo é uma sequência de vértices distintos  $v_1 \dots v_k$  de forma que  $v_1 \dots v_k$  é um caminho e  $v_1 v_k \in E$ . Um grafo  $C_n$  é um grafo com conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  de forma que  $v_1 v_2 \dots v_n$  é um ciclo e nenhuma outra aresta, além das que definem o ciclo, existe. Um ciclo é *hamiltoniano* quando todos os vértices do grafo estão em sua sequência de vértices. Além disso, uma *corda* em um ciclo  $v_1 \dots v_k$ , consiste em uma aresta do grafo  $v_i v_j$  de forma que  $1 \leq i < j < k$ .

A *união* de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ , representada por  $G_1 \cup G_2$ , consiste no grafo  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é *threshold* se existem  $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $t \in \mathbb{R}^+$  tais que  $\sum_{s \in S} w(s) \leq t$  se, e somente se,  $S$  é um conjunto independente de  $G$ .

O *grafo de interseção* [16]  $G = (V, E)$  de uma coleção de conjuntos  $\mathcal{I} = \{I_{v_1}, \dots, I_{v_n}\}$  é o grafo em que cada vértice corresponde a um conjunto da coleção  $\mathcal{I}$ , ou seja,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  e o conjunto de arestas é definido da seguinte forma:  $v_i v_j \in E$  se, e somente se,  $I_{v_i} \cap I_{v_j} \neq \emptyset$ . Nesse caso, chamamos  $\mathcal{I}$  de *modelo de interseção* e  $\bigcup_{i=1}^n I_{v_i}$  de *conjunto base* de  $\mathcal{I}$ .

Considere o seguinte modelo de interseção  $\mathcal{I} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ . Temos que seu conjunto base é  $B = \{a, b, c\}$  e o grafo da Figura 1.4 corresponde ao seu grafo de interseção.

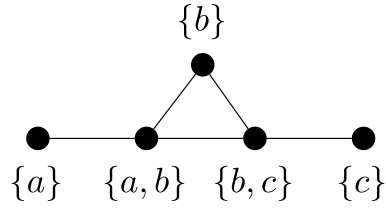


Figura 1.4: Grafo de interseção do modelo  $\mathcal{I} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ .

Um grafo  $G$  é *linha* se existe um grafo  $H$  de forma que  $G$  é o grafo de interseção das arestas de  $H$ . Nesse caso,  $H$  é dito grafo raiz de  $G$  e dizemos que  $G = L(H)$ . Na Figura 1.5 ilustramos esse conceito.

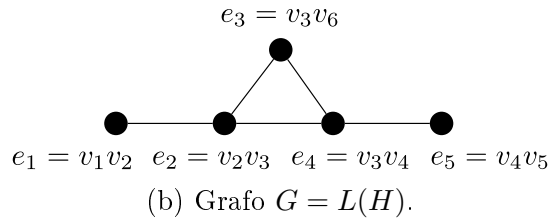
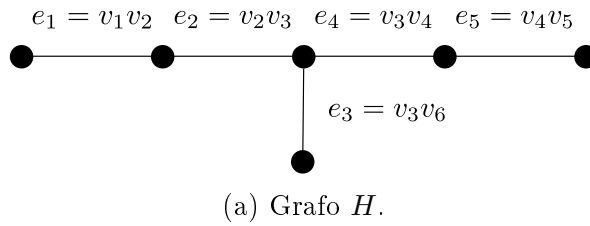


Figura 1.5: Exemplo de grafo linha  $G$  e seu grafo raiz  $H$ .

## Capítulo 2

# Grafos equiestáveis e de partição geral

Visando uma caracterização da classe dos grafos equiestáveis e durante o estudo da classe dos grafos de partição geral, a seguinte hierarquia foi estabelecida:

$$\text{PARTIÇÃO GERAL} \subseteq \text{FORTEMENTE EQUIESTÁVEIS} \subseteq \text{EQUIESTÁVEIS} \subset \text{TRIANGULARES}$$

Os grafos fortemente equiestáveis e os grafos triangulares vêm desempenhando um importante papel nos estudos tanto dos grafos equiestáveis quanto no dos grafos de partição geral. Cada uma das classes de grafos citadas, incluindo a dos grafos equiestáveis e a dos de partição geral, é descrita em mais detalhes neste capítulo.

A classe dos grafos fortemente equiestáveis, definida em 1994 por Mahadev, Peled e Sun [15], desempenhou um importante papel na caracterização de grafos equiestáveis quando restritos a outras classes de grafos tais como os grafos outerplanares, grafos bloco, grafos split, entre outros. Nessa época, a principal estratégia para determinar quais grafos de uma determinada classe eram equiestáveis consistia em encontrar uma característica necessária para que um grafo fosse equiestável de maneira que ela fosse suficiente para que o grafo também fosse fortemente equiestável.

Atualmente, uma estratégia bem semelhante se aplica, porém baseada na implicação de que os grafos triangulares de uma determinada classe também são os grafos de partição geral dessa classe. Miklavič e Milanič [17] apresentaram as relações dessas classes com os grafos equiestáveis fornecendo assim uma visão mais combinatória do problema.

Vale ressaltar que as estratégias mencionadas acima não necessariamente podem ser empregadas para resolver os problemas de caracterização dos grafos equiestáveis quando considerados os grafos de uma classe qualquer. Como pode ser visto no Capítulo 4, por exemplo, existem classes de grafos em que um grafo ser triangular não implica necessariamente em ele ser de partição geral, sendo necessária uma condição mais forte para caracterizar os grafos equiestáveis.

Este capítulo se destina a introduzir as classes mencionadas e provar a hierarquia constituída por elas.

## 2.1 Grafos equiestáveis

Os grafos equiestáveis foram definidos por Payan [24] em 1980. Nessa seção, apresentamos de maneira formal esses grafos, além de um procedimento exponencial de Zverovich para o seu reconhecimento.

**Definição 2.1.** Um grafo  $G = (V, E)$  é *equiestável* quando existem  $w : V \rightarrow \mathbb{N}$  e  $t \in \mathbb{N}$  tais que  $\sum_{s \in S} w(s) = t$  se, e somente se,  $S \in \mathcal{S}_G$ . Nesse caso, dizemos que  $(w, t)$  é uma *atribuição equiestável* de  $G$ .

Como usual,  $w(S) = \sum_{s \in S} w(s)$ . Exemplos de grafos com atribuições equiestáveis podem ser vistos na Figura 2.1.

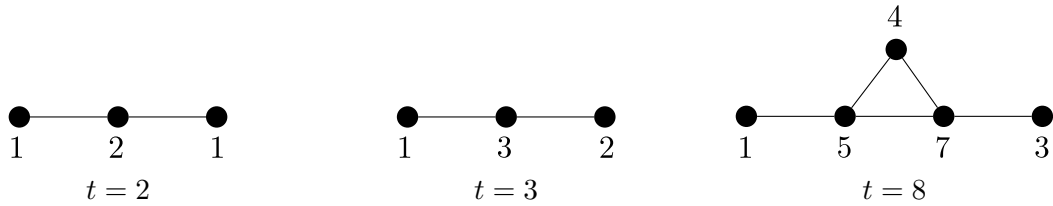


Figura 2.1: Exemplos de grafos equiestáveis.

Para concluir que o  $P_4$ , ilustrado na Figura 2.2, não é um grafo equiestável basta observar que qualquer atribuição dada aos seus vértices não será uma atribuição equiestável. Caso o  $P_4$  possuísse uma atribuição equiestável  $(w, t)$ , teríamos que:

$$w(v_1) + w(v_3) = t$$

$$w(v_2) + w(v_4) = t$$

$$w(v_1) + w(v_4) = t$$

O que implicaria em

$$w(v_2) + w(v_3) = t$$

Como o conjunto  $\{v_2, v_3\}$  não constitui um conjunto independente, concluímos que nenhuma atribuição dada aos vértices de um  $P_4$  será uma atribuição equiestável.

Uma observação interessante é que a partir das Figuras 2.1 e 2.2, podemos ver que a classe dos grafos equiestáveis não é fechada por subgrafo induzido.



Figura 2.2: Exemplo de grafo que não é equiestável.

Ao relaxar a definição dos grafos equiestáveis considerando que tanto a imagem de  $w$  quanto  $t$  pertencem aos reais positivos, poderíamos pensar que teríamos uma definição para uma superclasse dos grafos equiestáveis, porém essa mudança não altera os grafos que podem ser representados por tais atribuições, resultando novamente nos grafos equiestáveis [15]. Dessa forma, como as definições são equivalentes, sempre é possível assumir que um grafo equiestável possui tanto uma atribuição equiestável inteira quanto uma outra atribuição equiestável, real, com  $t = 1$ .

Para obter uma atribuição equiestável em que  $t = 1$ , basta, a partir de uma atribuição equiestável inteira qualquer, dividirmos o valor atribuído a cada vértice por  $t$ . Já no caso em que restringimos a imagem de  $w$  ser inteira e  $t = 1$ , obtemos que os únicos grafos equiestáveis que podem ser representados são os grafos completos uma vez que como todo vértice está em algum CIM, o valor de  $w$  em cada vértice deverá ser maior que zero e menor ou igual a  $t$ . O que no caso em que a imagem de  $w$  é inteira e  $t = 1$ , implica em  $w$  mapear todos os vértices para o valor 1. Logo todo vértice é um CIM, ou seja, o grafo é completo.

Para uma melhor compreensão da classe dos grafos equiestáveis, a seguir é descrito um procedimento exponencial, sugerido por Zverovich como mencionado no artigo de Korach et al. [13], que reconhece se um grafo  $G$  é equiestável ou não.

Dado  $G = (V, E)$ , considerar o problema linear com variáveis  $w(v) : v \in V$  e com as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} w(v) &= 1 \quad \forall S \in \mathcal{S}_G \\ \sum_{v \in T} w(v) &\neq 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_G \\ w(v) &> 0 \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Porém, como não é possível modelar uma desigualdade em programação linear, contorna-se esse problema da seguinte maneira:

Seja  $\mathcal{A}_G$ , o conjunto solução do programa linear abaixo:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} w(v) &= 1 \quad \forall S \in \mathcal{S}_G \\ w(v) &> 0 \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Ou seja,  $\mathcal{A}_G = \{w : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid w(S) = 1 \forall S \in \mathcal{S}_G\}$ . É necessário entender

que  $\mathcal{A}_G$  não representa apenas as atribuições equiestáveis onde  $t = 1$  porém, se  $G$  é equiestável, então  $G$  possui uma atribuição equiestável  $(w, 1)$  que está contida em  $\mathcal{A}_G$ .

Também é importante notar que  $\mathcal{A}_G$  é um politopo [23] possivelmente vazio. Isso decorre do fato de que  $\mathcal{A}_G$  é um conjunto definido por um número finito de equações e inequações lineares e que  $\mathcal{A}_G$  é limitado [23], uma vez que  $w(v) \geq 0$  e  $w(v) \leq 1 \forall v$ .

Como  $(w, 1) \in \mathcal{A}_G$ , se  $\mathcal{A}_G$  é vazio conclui-se que  $G$  não é equiestável. Dessa forma, uma vez obtido  $\mathcal{A}_G$ , é necessário verificar se o politopo mencionado está contido em algum hiperplano [23]  $\sum_{v \in T} w(v) = 1 \forall T \in \mathcal{T}_G$ .

Em caso afirmativo, tem-se que todas as possíveis atribuições equiestáveis são tais que sempre existe um conjunto que não é independente maximal que soma o mesmo valor de um conjunto independente maximal, implicando em nenhuma das soluções candidatas serem uma atribuição equiestável. Portanto, se o conjunto de soluções não é vazio e não está contido em nenhum dos hiperplanos mencionados, temos que o grafo é equiestável. Caso contrário, não.

A demonstração de que existe uma atribuição equiestável quando  $\mathcal{A}_G$  não está contido em nenhum dos hiperplanos se encontra no Lema 2.2 onde é demonstrado que os grafos fortemente equiestáveis são equiestáveis.

Compreendido esse procedimento, obtemos a intuição para definirmos os grafos fortemente equiestáveis apresentados na próxima seção.

Até o momento, não se conhece nenhuma outra caracterização combinatória ou algébrica dos grafos equiestáveis, estando em aberto o seu problema de reconhecimento em tempo polinomial e se este mesmo problema está em NP. No entanto, verificar se uma dada atribuição aos vértices de  $G$  também é uma atribuição equiestável é um problema co-NP-completo [19].

Um estudo das diversas propriedades dos grafos equiestáveis e sua interseção com classes de grafos clássicas são apresentados respectivamente nos Capítulos 3 e 5.

## 2.2 Grafos fortemente equiestáveis

Em busca de uma caracterização para os grafos equiestáveis, Mahadev et al. [15], introduziram, em 1994, a classe dos grafos fortemente equiestáveis. Na época, alguns resultados se mostraram mais fáceis de serem provados para essa classe do que para os grafos equiestáveis, como por exemplo a operação de junção. Enquanto que a classe dos grafos fortemente equiestáveis é fechada por essa operação, descobrir se o mesmo ocorre para a classe dos grafos equiestáveis permanece um problema em aberto.

Nesta seção encontram-se a definição dos grafos fortemente equiestáveis e a prova

de que esses grafos também são grafos equiestáveis. É importante lembrar que para um grafo  $G$ , denotamos por:  $\mathcal{S}_G$ , a família dos CIM de  $G$ ;  $\mathcal{T}_G$ , todos os subconjuntos dos vértices de  $G$  que não são CIM, exceto pelo conjunto vazio; e  $\mathcal{A}_G$ , todas as atribuições reais positivas  $w$  para as quais  $w(S) = 1$  sempre que  $S$  é CIM de  $G$ .

**Definição 2.2.** Um grafo  $G$  é *fortemente equiestável* se para cada valor real  $c \leq 1$  e cada  $T \in \mathcal{T}_G$ , existe um  $w \in \mathcal{A}_G$  tal que  $w(T) \neq c$ .

Para uma melhor compreensão dessa classe, antes de apresentar a prova de que todo grafo fortemente equiestável é equiestável, vamos mostrar que a junção de dois grafos fortemente equiestáveis gera um grafo fortemente equiestável.

**Teorema 2.1** (Mahadev, Peled e Sun [15]). *A classe dos grafos fortemente equiestáveis é fechada pela operação de junção.*

*Demonstração.* Seja  $G = G_1 \cdot G_2$  onde  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  são grafos fortemente equiestáveis. Pela construção de  $G = (V, E)$  temos que  $\mathcal{S}_G = \mathcal{S}_{G_1} \cup \mathcal{S}_{G_2}$ . Usando  $w_i \in \mathcal{A}_{G_i}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definimos  $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  da seguinte maneira:

$$w(v) = \begin{cases} w_1(v) & \text{se } v \in V_1, \\ w_2(v) & \text{se } v \in V_2. \end{cases}$$

Primeiramente temos que se  $w_1 \in \mathcal{A}_{G_1}$  e  $w_2 \in \mathcal{A}_{G_2}$ , então a definição de  $w$  garante que  $w \in \mathcal{A}_G$  uma vez que todo CIM de  $G$  será ou um CIM de  $G_1$  ou um CIM de  $G_2$ .

Considere então  $c$ , um valor real qualquer tal que  $c \leq 1$ , e  $T \in \mathcal{T}_G$ . Vamos chamar de  $T_1 = T \cap V_1$  e  $T_2 = T \cap V_2$ . Observe que dado um  $T$ ,  $T_1$  e  $T_2$  não são ambos vazios. Portanto, podemos nos restringir aos seguintes casos:

1.  $T_1 \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $T_2 \neq \emptyset$ ;
2.  $T_1 \in \mathcal{T}_{G_1}$  e  $T_2 \notin \mathcal{S}_{G_2}$ .

Em qualquer um dos casos temos que  $w(T) = w_1(T_1) + w_2(T_2)$ . No primeiro caso,  $w_1(T_1) = 1$  e  $w_2(T_2) > 0$ , o que implica em  $w(T) > 1$  e portanto  $w(T) \neq c$ . Já no segundo caso, temos que podemos escolher  $w_1(T_1) = c_1 \neq c$  uma vez que  $G_1$  é fortemente equiestável. Como  $G_2$  também é fortemente equiestável, temos que se  $T_2 \neq \emptyset$ , então existe  $w_2 \in \mathcal{A}_{G_2}$  tal que  $w_2(T_2) \neq c - c_1$ . Logo, sempre temos que para qualquer  $c \leq 1$  e  $T \in \mathcal{T}_G$ , existe  $w \in \mathcal{A}_G$  tal que  $w(T) \neq c$ .  $\square$

Como já foi dito, a classe dos grafos fortemente equiestáveis está contida na classe dos grafos equiestáveis. O lema abaixo, demonstra tal resultado provando uma afirmação mais forte como pode-se observar a seguir:

**Lema 2.2** (Mahadev, Peled e Sun [15]). *Seja  $G$  um grafo fortemente equiestável tal que para cada  $T \in \mathcal{T}_G$ , um valor proibido  $c_T \leq 1$  foi dado. Então existe  $w \in \mathcal{A}_G$  tal que  $w(T) \neq c_T, \forall T \in \mathcal{T}_G$ . Em particular,  $G$  é equiestável porque podemos escolher  $c_T = 1, \forall T \in \mathcal{T}_G$ .*

*Demonstração.* Dado um  $T \in \mathcal{T}_G$ , sabemos que existe  $w \in \mathcal{A}_G$  tal que  $w(T) \neq c_T$ . Vamos considerar  $\mathcal{A}^T = \{\mathcal{A}_G \cap (w(T) = c_T)\}$ . Como o politopo  $\mathcal{A}_G$  não está contido no hiperplano  $w(T) = c_T$ , temos que  $\mathcal{A}^T$  é um subpolitopo [23] de  $\mathcal{A}_G$  pelo menos uma dimensão [23] menor. Vamos considerar o fecho afim [10]  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{A}_G$ . Na topologia relativa [10] a  $\mathcal{H}$ , temos que  $\mathcal{A}_G$  possui um volume positivo enquanto o volume de  $\mathcal{A}^T$  é zero. Como  $\mathcal{T}_G$  é um conjunto finito temos que  $\bigcup\{\mathcal{A}^T : T \in \mathcal{T}_G\}$  possui volume zero e portanto existe um  $w \in \mathcal{A}_G$  que está fora de todos os  $\mathcal{A}^T$ 's.  $\square$

De posse desse resultado, podemos nos fazer a seguinte pergunta que consiste em uma conjectura, ainda em aberto, proposta por Mahadev et al. [15]:

**Conjectura 2.3** (Mahadev, Peled e Sun [15]). *Todo grafo equiestável é fortemente equiestável.*

Uma condição suficiente para um grafo ser fortemente equiestável foi introduzida por Mahadev et al. [15], sendo esta apresentada na próxima seção (Teorema 2.11) uma vez que sua demonstração fica muito mais simples usando o conceito de grafos de partição geral. Já uma condição necessária para o grafo ser fortemente equiestável é que o grafo satisfaça a condição triangular, que decorre do fato dessa condição também ser necessária para um grafo ser equiestável, como veremos na Seção 2.4.

## 2.3 Grafos de partição geral

Os grafos de partição geral foram inicialmente introduzidos em 1987 por DeTemple, Harary e Robertson [6], incentivados por sua aplicação em determinar todos os modos de triangular um polígono reticulado. Nesta seção, iremos apresentar sua definição, algumas de suas propriedades e sua relação com os grafos equiestáveis.

**Definição 2.3.** Um grafo  $G$  é de *partição geral* se ele possui um modelo de interseção no qual para todo CIM de  $G$ , o conjunto dos conjuntos correspondentes aos vértices desse CIM constitui uma partição do conjunto base. Tal modelo é uma *testemunha* de que  $G$  é de partição geral.

Para simplificar, a sigla gpg será usada para denotar grafo de partição geral. Na Figura 2.3 temos três grafos com seus respectivos modelos de interseção, que mostram que esses grafos são de partição geral. Observe que em cada modelo, todos os CIM constituem uma partição do conjunto base. Em particular, no  $C_4$  todo CIM



é composto por vértices alternados no ciclo e, com a atribuição dada aos vértices, todos eles formam uma partição do conjunto base  $\{a, b, c, d\}$ .

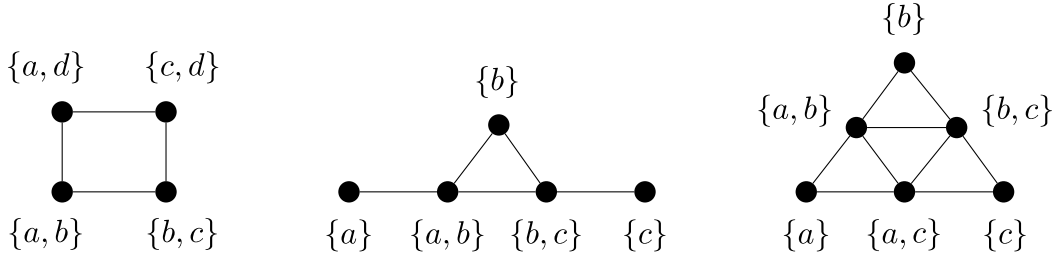


Figura 2.3: Exemplos de grafos de partição geral.

Já no caso do  $P_4$ , notamos que, para qualquer modelo de interseção, existirá pelo menos um elemento, vamos chamá-lo  $a$ , que irá garantir a existência da aresta entre os vértices do meio. Esse mesmo elemento não pode existir nos conjuntos dos vértices extremos pois caso contrário o grafo não seria um  $P_4$ . Logo, ao se considerar o CIM composto pelos vértices dos extremos, observa-se que esse conjunto não forma uma partição do conjunto base uma vez que ele não possui o elemento  $a$ .

Acabamos de ver que um  $P_4$  não é um gpg. E assim como caso dos grafos equi-estáveis, temos, ilustrado na Figura 2.3, grafos de partição geral que possuem como subgrafo induzido um  $P_4$ . Dessa forma, temos que a classe dos gpg não é fechada por subgrafo induzido. Outra característica interessante é de que ela também não é fechada para o complemento. Outro exemplo de grafo que não é de partição geral pode ser visto na Figura 2.4.

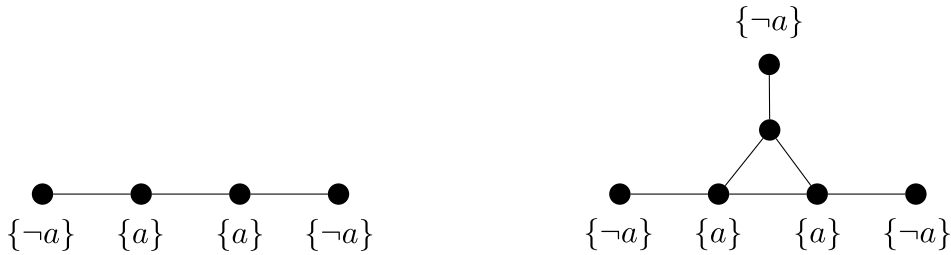


Figura 2.4: Exemplos de grafos que não são de partição geral.

Uma caracterização combinatória para os grafos de partição geral e algumas de suas propriedades são apresentadas a seguir.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $\mathcal{I} = \{I_u \mid u \in V\}$  um modelo de interseção de  $G$ . Observe que, se  $I_u = I_v$ , então  $N[u] = N[v]$ . Já quando  $\mathcal{I}$  é testemunha de que  $G$  é gpg, temos que se  $N[u] = N[v]$ , então  $I_u = I_v$ . Caso  $N[u] = N[v]$  e  $I_u \neq I_v$ , teríamos que existiria  $a \in I_u \setminus I_v$ . Dessa forma, ao considerar  $S$  um CIM de  $G$  que contém  $v$ , como os conjuntos dos vértices de  $S$  formam uma partição do conjunto base de  $\mathcal{I}$ , teríamos que existiria  $x \in S$  tal que  $a \in I_x$ . Logo,  $x \in N[u] \setminus N[v]$ , ou seja,  $N[u] \neq N[v]$ , uma contradição.

A intuição do teorema de caracterização dos grafos de partição geral segue do entendimento do conceito de grafo de interseção e da definição dos grafos de partição geral, bastando lembrar que em um grafo de interseção, o conjunto de vértices que possuem um mesmo elemento do conjunto base formam uma clique e de que no grafo de partição geral todo CIM forma uma partição do conjunto base.

**Teorema 2.4** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]).  *$G$  é gpg se, e somente se, existe uma cobertura por cliques de  $G$  com a propriedade de que todo CIM de  $G$  possui um vértice de cada clique dessa cobertura.*

*Demonstração.* Considere  $\mathcal{I}$  um modelo de interseção de  $G = (V, E)$ , testemunha de que  $G$  é gpg onde  $I_v$  corresponde ao conjunto do vértice  $v$  e  $B$  o conjunto base de  $\mathcal{I}$ . Seja  $C_a = \{v \mid a \in I_v \text{ e } v \in V\}$ . Observe que  $\mathcal{C} = \{C_a \mid a \in B\}$  é uma cobertura por cliques de  $G$  com a propriedade procurada uma vez que todo CIM de  $G$  é uma partição de  $B$ .

Agora, vamos mostrar que com tal cobertura é possível construir um modelo de interseção  $\mathcal{I}$  que prova que o grafo é gpg.

Seja  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  uma cobertura por cliques de  $G$  com a propriedade de que todo CIM possui um vértice de cada clique. Considere  $I_v = \{a_i \mid v \in C_i\}$ ,  $v \in V$ . Claramente observamos que o grafo de interseção de  $\mathcal{I}$  é o grafo  $G$ . Além disso, como o conjunto base tem um relação direta com as cliques da cobertura  $\mathcal{C}$ , temos que todo CIM de  $G$  constitui uma partição do conjunto base.  $\square$

Uma outra forma de dizer que um grafo é de partição geral é dizer que todas as suas arestas são cobertas por cliques fortes. Ao longo do texto, frequentemente iremos fazer uso desse conceito para um grafo de partição geral pois ele ajuda a mudar de um olhar mais global de uma cobertura por cliques, para um mais local, restringindo o foco apenas para as cliques que cobrem uma aresta. Vale lembrar que uma clique é forte se para todo CIM do grafo, ela possui interseção não vazia com ele e que uma clique simplicial é um exemplo de tal clique.

Acabamos de ver que um grafo  $G$  é de partição geral se  $G$  possui uma cobertura por cliques fortes. Uma pergunta natural é se toda cobertura minimal por cliques de um grafo de partição geral é tal que todas as suas cliques são fortes. Essa questão, proposta por DeTemple et al. [7], foi respondida por DeTemple, Dinnen, Robertson e McAvaney [8] ao apresentarem um grafo, ilustrado na Figura 2.5, e duas coberturas minimais  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  onde  $\mathcal{C}_1$  é composta apenas por cliques fortes mas  $\mathcal{C}_2$  não. A seguir, tal exemplo é explicado em mais detalhes.

Seja  $G$  o grafo da Figura 2.5. Temos que:

$$\mathcal{S}_G = \{\{v_1, v_6, v_8\}, \{v_2, v_5, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_7, v_8\}\}.$$

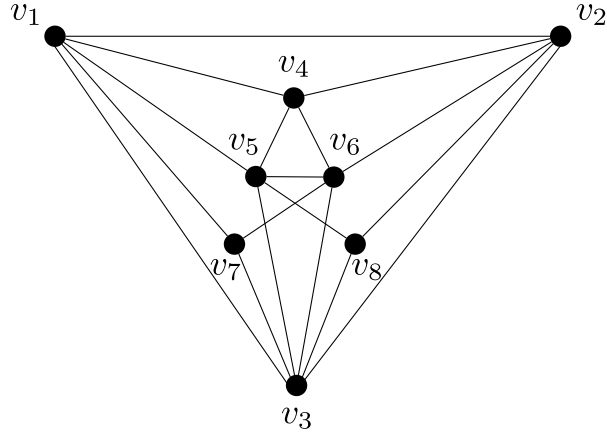


Figura 2.5: Exemplo de grafo com duas coberturas minimais por clique.

Considere as seguintes coberturas minimais por cliques:

$$\mathcal{C}_1 = \{v_1v_2v_4, v_1v_3v_7, v_1v_4v_5, v_2v_3v_8, v_2v_4v_6, v_3v_5v_8, v_3v_6v_7, v_4v_5v_6\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{v_1v_2v_3, v_1v_3v_7, v_1v_4v_5, v_2v_3v_8, v_2v_4v_6, v_3v_5v_8, v_3v_6v_7, v_4v_5v_6\}$$

Observe que tanto  $\mathcal{C}_1$  quanto  $\mathcal{C}_2$  são coberturas minimais por cliques. Além disso, ao comparar  $\mathcal{S}_G$  com  $\mathcal{C}_1$  temos que tal cobertura é composta apenas por cliques fortes, isto é, cliques que possuem interseção não vazia com cada um dos CIMs do grafo. Por outro lado,  $\mathcal{C}_2$  não é composta apenas por cliques fortes uma vez que a clique  $\{v_1, v_2, v_3\}$  possui interseção vazia com o CIM  $\{v_4, v_7, v_8\}$ . Tal resultado é interessante pois demonstra um pouco da dificuldade de se reconhecer grafos de partição geral.

Uma característica que esses grafos apresentam é que qualquer grafo que não é de partição geral pode se tornar um gpg através de algumas poucas modificações. O próximo lema mostra uma construção ingênua para transformar um grafo qualquer em um gpg.

**Lema 2.5** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Todo grafo com  $n \geq 2$  vértices e  $m$  arestas é subgrafo de um grafo de partição geral com no máximo  $n + m$  vértices e  $3m$  arestas.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Considere  $G'$  o grafo obtido de  $G$  criando, para cada aresta de  $G$ , um novo vértice adjacente a ambos os seus extremos. Observe que cada vértice criado nesse processo é simplicial e, portanto, todo vértice de  $G'$  se encontra em uma clique simplicial. Logo  $G'$  é gpg.  $\square$

Como visto no início da seção, um grafo possuir um  $P_4$  como subgrafo induzido pode implicar que ele é um gpg ou não. Uma pergunta interessante a se fazer é o que acontece se um grafo não possui  $P_4$  induzido, isto é, se for um cografo. E a resposta para essa pergunta pode ser vista a seguir.

**Lema 2.6** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Todo cografo é grafo de partição geral.*

*Demonstração.* Vamos supor que existe um cografo  $G = (V, E)$  que não é um grafo de partição geral. Logo existe uma aresta  $v_2v_3 \in E$  que não faz parte de nenhuma clique forte de  $G$ . Considere  $S \in \mathcal{S}_G$  de maneira que  $v_2, v_3 \notin S$ . Como  $S$  é maximal temos que existe  $v_1 \in S$  que é vizinho de  $v_2$ . Podemos supor que  $v_1$  não é vizinho de  $v_3$  pois existe um  $S$  que satisfaz tais condições, caso contrário  $\{v_1, v_2, v_3\}$  seria uma clique forte. De forma análoga, existe  $v_4 \in S$  que é vizinho de  $v_3$  mas não de  $v_2$ . Como  $S$  é um conjunto independente temos que  $v_1v_4 \notin E$  e, portanto,  $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4\}] \simeq P_4$ , uma contradição pois os cografos são grafos sem  $P_4$ .  $\square$

Finalmente, vamos terminar esta seção vendo que todo grafo de partição geral é equiestável e, em seguida, que eles também são fortemente equiestáveis.

**Lema 2.7** (Orlin cf. [17]). *Todo grafo de partição geral é equiestável.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo de  $n$  vértices e  $\mathcal{I} = \{I_v \mid v \in V\}$  uma testemunha de que  $G$  é gpg com conjunto base  $B = \{0, 1, \dots, k\}$ . Para mostrar que  $G$  é equiestável, construa a seguinte atribuição para os vértices de  $G$ :

$$w(v) = \sum_{i \in I_v} n^i \quad \forall v \in V$$

Considerando  $t = (n^{k+1} - 1)/(n - 1)$ , vamos mostrar que  $(w, t)$  é uma atribuição equiestável de  $G$ . Seja  $S \in \mathcal{S}_G$ , como os conjuntos dos vértices de  $S$  particionam  $B$  temos que  $w(S) = n^0 + n^1 + \dots + n^k = (n^{k+1} - 1)/(n - 1) = t$ . Portanto, vamos considerar  $T \in \mathcal{T}_G$ . Como os conjuntos correspondentes aos vértices de  $T$  não formam uma partição de  $B$  e a cardinalidade de  $T$  é no máximo  $n$  temos que, pela construção de  $w$ ,  $w(T) \neq (n^{k+1} - 1)/(n - 1)$ , ou seja,  $w(S) = t$  se, e somente se,  $S \in \mathcal{S}_G$ .  $\square$

**Corolário 2.8.** *Todo cografo é um grafo equiestável.*

**Teorema 2.9** (Mahadev, Peled e Sun [15]). *Todo grafo equiestável que possui uma clique forte é fortemente equiestável.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo equiestável com uma clique forte  $C$ . Considere  $(w, 1)$  uma atribuição equiestável de  $G$ . Vamos construir então a seguinte função  $w' : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ :

$$w'(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in C, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Como  $w$  é uma atribuição equiestável temos que  $w \in \mathcal{A}_G$ . Além disso, como  $C$  é uma clique que possui interseção não vazia com todo CIM de  $G$ , temos que  $w' \in \mathcal{A}_G$ . Para mostrar que  $G$  é fortemente equiestável, basta mostrar que para um valor real  $c \leq 1$ , temos que  $w'(T)$  ou  $w(T)$  são diferentes de  $c$  para todo  $T \in \mathcal{T}_G$ .

Usando  $w'$  iremos obter que  $w'(T)$  é igual a 0, 1 ou um valor maior que 1. Portanto, precisamos apenas nos preocupar quando desejamos que  $w'(T)$  seja diferente de 0 ou 1, o que é resolvido utilizando-se  $w$  uma vez que  $w(T)$  só pode ser zero se  $T$  for vazio, o que nunca é o caso, e  $w(T)$  só pode ser 1 quando  $T$  é um CIM, o que também não ocorre pela definição do conjunto  $\mathcal{T}_G$ .  $\square$

**Corolário 2.10.** *Todo grafo de partição geral é fortemente equiestável.*

Como dito na seção anterior, a partir do Corolário 2.10, podemos demonstrar de forma simples a condição suficiente para um grafo ser fortemente equiestável introduzida por Mahadev et al. [15]:

**Teorema 2.11** (Mahadev, Peled e Sun [15]). *Em um grafo  $G = (V, E)$ , se existe  $S \in \mathcal{S}_G$  tal que para todos os pares de vértices  $u, v$  que não estão em  $S$  temos que*

$$uv \in E \Leftrightarrow N_S(u) \cap N_S(v) \neq \emptyset,$$

*então  $G$  é fortemente equiestável.*

*Demonstração.* Diferentemente da prova original, vamos mostrar que se existe tal  $S$ , então  $G$  é de partição geral, o que implica em  $G$  ser fortemente equiestável. Para concluirmos isso basta observarmos que todos os vértices de  $S$  são simpliciais. Portanto,  $G$  possui uma cobertura por cliques simpliciais, ou seja,  $G$  é gpg e por consequência, fortemente equiestável.  $\square$

Acreditando ser verdadeira a Conjectura 2.3, Miklavič e Milanič propuseram a conjectura abaixo, que, se verdadeira, implicaria, pelo Teorema 2.9, em todo grafo equiestável ser fortemente equiestável.

**Conjectura 2.12** (Miklavič e Milanič [17]). *Todo grafo equiestável possui uma clique forte.*

Até recentemente não se conhecia nenhum exemplo de grafo equiestável que não fosse de partição geral. O que deu origem à seguinte conjectura:

**Conjectura 2.13** (Orlin cf. [17]). *Todo grafo equiestável é grafo de partição geral.*

Em 2014, uma família infinita de contraexemplos para ambas as Conjecturas 2.12 e 2.13 foi apresentada por Milanič, Thomassé e Trotignon [20]. A Conjectura 2.13, uma das principais dessa área de estudo, motivou diversos estudos no tema e devido à sua importância, a construção de seu contraexemplo é apresentado em mais detalhes na subseção a seguir.

### 2.3.1 Contraexemplo da conjectura de Orlin

O contraexemplo exibido por Milanič et al. [20] consiste em um grafo que é o complemento do grafo linha de um grafo especial que veremos mais adiante. Para entender sua construção, alguns passos são necessários, sendo cada um desses apresentados nesse texto. Primeiramente, vamos concluir quando que o complemento de um grafo linha não é um grafo de partição geral. Para tal vamos introduzir algumas definições e observações.

**Definição 2.4.** Um conjunto independente de um grafo  $G$  é dito *forte* quando ele intersecta todas as cliques maximais de  $G$ .

Dado um grafo  $G$ , observe que  $C$  é uma clique forte em  $G$  se, e somente se,  $C$  é um conjunto independente forte em  $\overline{G}$ . Agora considere  $G = L(H)$ . Como  $G$  é o grafo linha de  $H$  temos que conjuntos independentes maximais em  $G$  correspondem a emparelhamentos maximais em  $H$  e vice-versa. Além disso, se considerarmos que  $H$  é livre de triângulos e possui grau mínimo pelo menos 2, temos que todas as cliques maximais de  $G$  são estrelas em  $H$  e, podemos concluir que  $E'$  é um conjunto independente forte em  $G$  se, e somente se,  $E'$  é um emparelhamento em  $H$  que possui interseção não vazia com cada um das estrelas de  $H$ , ou seja,  $E'$  é um emparelhamento perfeito.

Para a próxima observação é necessário definir o que é um grafo  $k$ -estensível:

**Definição 2.5.** Um grafo é  $k$ -estensível se ele contém um emparelhamento de tamanho  $k$  e todo emparelhamento de tamanho  $k$  está contido em um emparelhamento perfeito.

**Observação 2.14.** Para  $H$  um grafo livre de triângulos de grau mínimo pelo menos 2, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Toda aresta de  $\overline{L(H)}$  está contida em uma clique forte;
2. Toda não aresta de  $L(H)$  está contida em um conjunto independente forte;
3. Todo par de arestas disjuntas em  $H$  está contida em um emparelhamento perfeito;
4.  $H$  é 2-estensível.

Da observação anterior, concluímos que para tal grafo  $H$ , temos que  $\overline{L(H)}$  não é um grafo de partição geral se, e somente se,  $H$  não é 2-estensível. Dessa forma, em sua abordagem, Milanič et al. construíram exemplos de grafos  $H$  sem triângulos e de grau mínimo pelo menos 2 que não possuem um emparelhamento perfeito e portanto, não são 2-estensíveis, implicando em  $\overline{L(H)}$  não ser um grafo de partição

geral. Faltando apenas descobrir como  $H$  deve ser para que  $\overline{L(H)}$  seja um grafo equiestável. Para tal, observe que:

**Observação 2.15.** *Para  $H$  um grafo livre de triângulos de grau mínimo pelo menos 2, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $F$  é um CIM de  $\overline{L(H)}$ ;
2.  $F$  é uma clique maximal em  $L(H)$ ;
3.  $F$  é uma estrela maximal em  $H$ ;
4.  $F$  é uma estrela em  $H$  onde  $F$  equivale à estrela formada pelos vértices da vizinhança fechada de um vértice de  $H$ .

Face ao exposto, temos que os CIM's de  $\overline{L(H)}$  se traduzem em estrelas maximais em  $H$  e vice-versa. Dessa forma, podemos concluir que  $\overline{L(H)}$  é equiestável se, e somente se, existir uma atribuição real positiva para as arestas de  $H$  de forma que  $F$  é uma estrela maximal de  $H$  se, e somente se, o valor da atribuição dada às arestas de  $F$  somam 1. Para simplificar, Milanič et al. [20] introduziram a seguinte definição:

**Definição 2.6.** Um grafo  $G = (V, E)$  com pelo menos uma aresta é *equiestrelável* se existe um mapeamento  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que para todo  $F \subseteq E$  temos que:

$$F \text{ é uma estrela maximal em } G \Leftrightarrow \varphi(F) = 1.$$

Dessa forma, temos a seguinte proposição para  $H$ , um grafo livre de triângulos de grau mínimo pelo menos 2:

**Proposição 2.16** (Milanič, Thomassé e Trotignon [20]). *O grafo  $\overline{L(H)}$  é equiestável se, e somente se,  $H$  é equiestrelável.*

Até o momento temos que um contraexemplo para a conjectura de Orlin consiste no complemento do grafo linha de um grafo  $H$  com as seguintes características:

- $H$  é livre de triângulos;
- $H$  possui grau mínimo pelo menos 2;
- $H$  não é 2-estensível;
- $H$  é equiestrelável.

Como a definição dos grafos equiestreláveis não sugere nenhuma forma de construção de grafos não triviais, é necessário introduzir mais algumas definições antes de construirmos um grafo  $H$  que satisfaça todas as condições que desejamos.

**Definição 2.7.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $C$  um ciclo ímpar em  $G$  e  $e, e' \in E$ , arestas disjuntas de  $C$ . Dizemos que uma corda de  $C$  é uma  $(e, e')$ -corda de *cruzamento ímpar* se nos caminhos de  $e$  a  $e'$  passando apenas por arestas de  $C$ , um extremo da corda está no caminho de tamanho par e outro no caminho de tamanho ímpar e, além disso, a corda também particiona o caminho de tamanho par, em dois caminhos de tamanho ímpar.

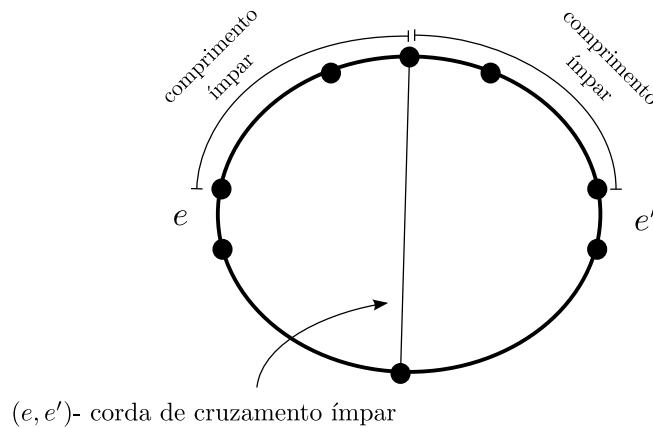


Figura 2.6: Exemplo de corda de cruzamento ímpar em um ciclo.

**Definição 2.8.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $C$  um ciclo ímpar em  $G$  e  $e, e' \in E$ , arestas disjuntas de  $C$ . Dizemos que uma corda de  $C$  é uma  $(e, e')$ -corda de *não cruzamento par* se ambos os extremos da corda se encontram no caminho de  $e$  a  $e'$  passando apenas por arestas de  $C$  de comprimento par, e, além disso, a distância entre os extremos, novamente passando apenas pela arestas do caminho de tamanho par, também é par.

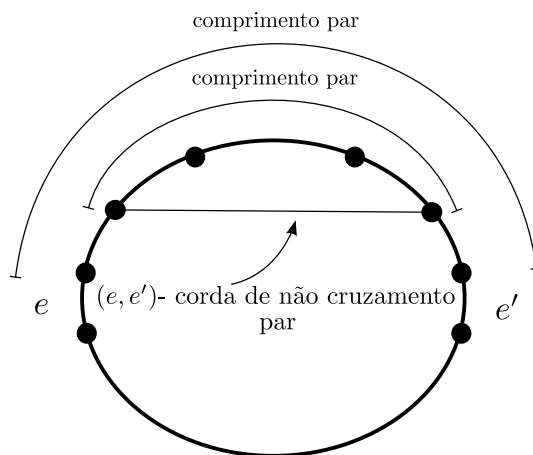


Figura 2.7: Exemplo de corda de não cruzamento par em um ciclo.

**Definição 2.9.** Um grafo livre de triângulos  $G$  com número de vértices ímpar é *ruim* se  $G$  possui um ciclo Hamiltoniano  $C$  de forma que para qualquer par  $(e, e')$



de arestas disjuntas do ciclo,  $C$  possui ou uma  $(e, e')$ -corda de cruzamento ímpar, ou uma  $(e, e')$ -corda de não cruzamento par.

De posse dessas definições, podemos enunciar o principal resultado que levou à construção do contraexemplo para a conjectura de Orlin:

**Teorema 2.17** (Milanič, Thomassé e Trotignon [20]). *Todo grafo ruim é equiestrelável.*

*Ideia da demonstração.* Como esse resultado ainda não foi publicado e não conhecemos completamente sua demonstração, vamos apresentar apenas a ideia da prova do teorema.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo ruim e  $C$  seu ciclo Hamiltoniano tal que para qualquer par  $(e, e')$  de arestas disjuntas do ciclo,  $C$  possui ou uma  $(e, e')$ -corda de cruzamento ímpar, ou uma  $(e, e')$ -corda de não cruzamento par. Seja  $E^* = \{e_1, \dots, e_r\}$  as arestas de  $G$  que não fazem parte de  $C$ . Para  $\epsilon \in (0, 1/(3r))$ , considere  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in (0, \epsilon)$ , números positivos algebricamente independentes sobre os racionais. Considere a seguinte atribuição  $\varphi$ :

$$\varphi(e_i) = \alpha_i, i \in \{1, \dots, r\}$$

Como desejamos que  $\varphi$  seja uma atribuição equiestrelável, precisamos que ela satisfaça a seguinte restrição:

$$\sum_{e \in E_v} \varphi(e) = 1, \text{ para todo } v \in V. \quad (2.1)$$

Substituindo  $\varphi(e_i) = \alpha_i$  para as arestas de  $E^*$  no sistema de equações determinado pelas equações de 2.1, obtemos um sistema linear de  $n$  equações e  $n$  variáveis. Além disso, como  $C$  é um ciclo ímpar, temos que a matriz de coeficientes do sistema linear possui determinante igual a 2 e, portanto, o sistema possui solução única  $\beta$ .

Fazendo  $\varphi(e) = \beta_e$  para toda aresta  $e$  de  $C$  e usando a atribuição previamente definida para as arestas de  $E^*$ , obtemos então uma atribuição  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  que desejamos mostrar ser uma atribuição equiestrelável. Para tal, precisamos mostrar três itens:

1.  $\varphi(e) \geq 0 \forall e \in E$ ;
2.  $G[E']$  estrela maximal  $\rightarrow \varphi(E') = 1$ ;
3.  $\varphi(E') = 1, E' \subseteq E \rightarrow G[E']$  estrela maximal.

Para o primeiro item temos que, por construção,  $\varphi(e) > 0$  para toda aresta de  $E^*$ . Além disso, Milanič et al. [20] argumentam que como os valores  $\beta_e$ 's são

funções contínuas dos  $\alpha_i$ 's, escolhendo  $\epsilon$  pequeno o suficiente, podemos garantir que  $1/3 < \beta_e < 2/3$  para toda aresta  $e$  do ciclo  $C$ .

Com relação ao segundo item temos que este é satisfeito pela construção de  $\varphi$ . Finalmente, vamos mostrar que 3 também é satisfeito. Vamos assumir que para  $E' \subseteq E$  temos que  $\varphi(E') = 1$ . Observe que  $E'$  possui exatamente duas arestas de  $C$  pois como  $\sum_{i=1}^r \alpha_i < 1/3$  e  $1/3 < \beta_e < 2/3$  para toda aresta  $e$  de  $C$ , pelo menos 2 arestas do ciclo são necessárias para que  $\varphi(E')$  seja 1 e, mais do que 2 arestas implicaria em um valor maior do que 1 para  $\varphi(E')$ .

Caso as duas arestas do ciclo que estão em  $E'$  possuam um extremo  $v$  em comum, então, pela independência algébrica dos  $\alpha_i$ 's,  $E'$  é uma estrela maximal de centro  $v$ . Caso contrário, temos que  $E'$  possui exatamente duas arestas disjuntas do ciclo  $C$  e, Milanič et al. [20] argumentam que usando o fato de que  $G$  é um grafo ruim, chegamos a uma contradição.  $\square$

**Corolário 2.18.** *Se  $H$  é um grafo ruim, então  $\overline{L(H)}$  é um grafo equiestável sem nenhuma clique forte.*

Assim, temos que se  $H$  é um grafo ruim, então  $\overline{L(H)}$  é um contraexemplo tanto para a Conjectura 2.12 quanto para a Conjectura 2.13. Agora falta mostrar, que de fato existe um grafo ruim. Antes de vermos um exemplo vamos precisar de mais uma definição.

**Definição 2.10.** Um grafo *circulante*  $C_n(d_1, \dots, d_k)$  é um grafo de conjunto de vértices  $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  onde a vizinhança de cada vértice  $v_i$  é composta pelo seguinte conjunto de vértices  $\cup_{j=1}^k \{v_{i \pm d_j \pmod n}\}$ .

Como para todo  $n \geq 11$  ímpar, o grafo circulante  $C_n(\{\pm 1, \pm 4\})$  é um grafo ruim, podemos construir então uma família infinita de contraexemplos para essas conjecturas.

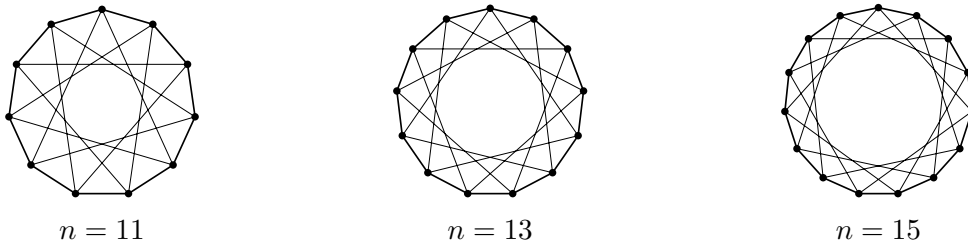


Figura 2.8: Grafo circulante  $C_n(\{\pm 1, \pm 4\})$  para  $n = 11, 13$  e  $15$ .

## 2.4 Grafos triangulares

Em 1993, a classe dos grafos triangulares foi introduzida por DeTemple, McAvaney e Robertson [7], diretamente apresentada como uma superclasse dos grafos

de partição geral. Inicialmente, não se sabia se todos os grafos triangulares eram de partição geral e, através de uma busca computacional, DeTemple et al. [8] foram capazes de fornecer uma resposta negativa para essa questão exibindo uma família de grafos triangulares que não são de partição geral.

Resultados de complexidade para essa classe também foram estudados e discutidos em dois artigos de Orlovich et al. [21, 22]. Apesar de a relação entre grafos triangulares e grafos de partição geral ser conhecida desde o início dos grafos de partição geral, a relação de ambas as classes com os grafos equiestáveis apenas foi introduzida em 2011 por Miklavič e Milanič [17]. Nesta seção, apresentamos a definição dessa classe e sua relação com as classes apresentadas neste capítulo.

**Definição 2.11.** Um grafo  $G$  *satisfaz a condição triangular* se para todo CIM  $S$  e qualquer aresta  $uv$  onde  $\{u, v\} \cap S = \emptyset$  temos que existe  $s \in S$  tal que  $G[\{u, v, s\}] \simeq K_3$ .

**Definição 2.12.** Um grafo é *triangular* se ele satisfaz a condição triangular.

Uma primeira observação sobre os grafos triangulares é que devido à condição triangular, se um grafo não for triangular, então ele necessariamente possui um  $P_4$  induzido. Dessa forma, temos que todos os cografos são exemplos de grafos triangulares.

Também podemos ver que todo grafo de partição geral satisfaz a condição triangular. De fato, como todo CIM constitui uma partição do conjunto base de uma testemunha  $\mathcal{I}$ , temos que em qualquer CIM  $S$  e aresta  $uv$  onde  $\{u, v\} \cap S = \emptyset$ , existe um vértice  $s \in S$  que possui pelo menos um dos elementos de  $I_u \cap I_v$ . E, portanto,  $G[\{u, v, s\}] \simeq K_3$ .

Porém, como demonstrado por DeTemple et al. [8], nem todo grafo que satisfaz a condição triangular é um grafo de partição geral, como podemos ver no exemplo a seguir.

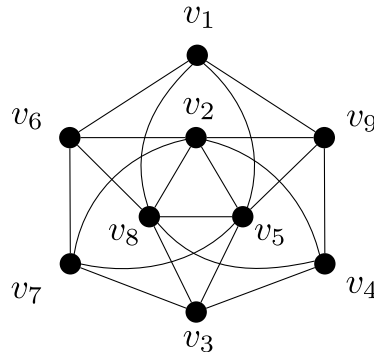


Figura 2.9: Grafo triangular que não é equiestável.

O grafo ilustrado na Figura 2.9 apresenta como CIM os seguintes conjuntos:  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $\{v_4, v_5, v_6\}$ ,  $\{v_7, v_8, v_9\}$ ,  $\{v_1, v_4, v_7\}$  e  $\{v_3, v_6, v_9\}$ . Para concluir que ele é

triangular, basta analisar cada um desses conjuntos e concluir que o grafo satisfaz a condição triangular. E, para observar que ele não é gpg, pegue a aresta  $v_2v_8$ . As únicas cliques maximais que contêm  $\{v_2, v_8\}$  são  $\{v_2, v_4, v_8\}$ ,  $\{v_2, v_5, v_8\}$  e  $\{v_2, v_6, v_8\}$ , nenhuma das quais é uma clique forte.

Este mesmo grafo é um exemplo de grafo triangular que não é equiestável. Para concluir isso vamos supor que o grafo é equiestável e, por consequência, possui uma atribuição equiestável  $(w, t)$ . Temos então que  $w(\{v_2, v_5, v_8\})$  pode ser calculado a partir dos CIM de  $G$  da seguinte maneira:

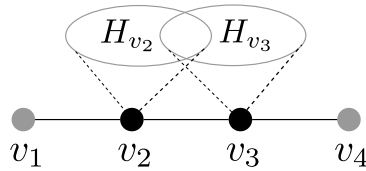
$$\begin{aligned} w(\{v_2, v_5, v_8\}) &= w(\{v_1, v_2, v_3\}) + w(\{v_4, v_5, v_6\}) + w(\{v_7, v_8, v_9\}) \\ &\quad - w(\{v_1, v_4, v_7\}) - w(\{v_3, v_6, v_9\}) \\ &= t \end{aligned}$$

Dessa forma temos que o grafo apresentado não é equiestável uma vez que o conjunto  $\{v_2, v_5, v_8\}$  não é um CIM.

Para mostrarmos que todos os grafos equiestáveis satisfazem a condição triangular, primeiro é importante entender uma condição necessária apresentada por Mahadev, Peled e Sun [15] para que um grafo seja equiestável.

**Teorema 2.19** (Mahadev, Peled e Sun [15]). *Se  $G$  é um grafo equiestável, então  $G$  não possui  $P_4$  ruim.*

*Demonstração.* Vamos supor que  $G$  é um grafo equiestável que possui um  $P_4$   $v_1v_2v_3v_4$  e  $S \cup \{v_1, v_4\}$  é uma testemunha de que esse  $P_4$  é ruim. Considere  $H_{v_2} = \{v \mid v \in S, vv_2 \notin E\}$  e  $H_{v_3} = \{v \mid v \in S, vv_3 \notin E\}$ . Temos que  $H_{v_2} \cup H_{v_3} = S$  pois caso contrário teríamos  $v \in S$  tal que  $v_2v$  e  $v_3v$  são arestas do grafo, o que implicaria em  $S \cup \{v_1, v_4\}$  não ser uma testemunha de que o  $P_4$  é ruim.



Seja  $S_1 = \{v_1, v_3\} \cup H_{v_3}$  e  $S_2 = \{v_2, v_4\} \cup H_{v_2}$ . Temos que tanto  $S_1$  quanto  $S_2$  são conjuntos independentes do grafo, porém não necessariamente maximais. Consideremos então  $S'_1 = S_1 \cup S_{v_3}$  e  $S'_2 = S_2 \cup S_{v_2}$  conjuntos independentes maximais do grafo. Sabemos que  $S_{v_2} \cap S_{v_3} = \emptyset$  uma vez que se existisse  $v \in S_{v_2} \cap S_{v_3}$  então  $S \cup \{v_1, v_4, v\}$  seria um conjunto independente de  $G$ , o que contradiz a hipótese de que  $S \cup \{v_1, v_4\}$  é maximal.

Portanto temos:

$$w(v_1) + w(v_4) + w(H_{v_2}) + w(H_{v_3}) - w(H_{v_2} \cap H_{v_3}) = t \quad (2.2)$$

$$w(v_1) + w(v_3) + w(H_{v_3}) + w(S_{v_3}) = t \quad (2.3)$$

$$w(v_4) + w(v_2) + w(H_{v_2}) + w(S_{v_2}) = t \quad (2.4)$$

Somando as equações (2.3) e (2.4) e subtraindo (2.2) obtemos que

$$w(v_2) + w(v_3) + w(H_{v_2} \cap H_{v_3}) + w(S_{v_2}) + w(S_{v_3}) = t \quad (2.5)$$

Logo  $\{v_2, v_3\}$  fazem parte de um mesmo conjunto independente de  $G$ , uma contradição uma vez que  $v_2v_3 \in E$ .  $\square$

De posse do resultado anterior, podemos finalmente concluir que todo grafo equiestável é triangular:

**Lema 2.20** (Miklavič e Milanič [17]). *Um grafo  $G$  satisfaz a condição triangular se, e somente se, não possui  $P_4$  ruim.*

*Demonstração.* Considere  $S$  uma testemunha de que um  $P_4$   $abcd$  é ruim. É fácil observar que toda testemunha de um  $P_4$  ruim é uma testemunha de que a condição triangular não é satisfeita, basta considerarmos  $S$  como o conjunto independente maximal e  $bc$  como a aresta onde ambos os extremos não estão em  $S$ .

Portanto, vamos supor que  $G$  não satisfaz a condição triangular. Considere  $S \in \mathcal{S}_G$  e  $bc \in E$ , testemunhas de que  $G$  não satisfaz a condição triangular. Como  $S$  é maximal temos que  $b$  é vizinho de um vértice  $a \in S$ . Pelo mesmo argumento temos que existe  $d \in S \cap N(c)$ .

Como, por hipótese,  $b$  e  $c$  não possuem um vizinho em comum em  $S$ , temos que  $a$  e  $d$  são vértices diferentes. Logo,  $G[\{a, b, c, d\}] \simeq P_4$  e  $S$  é testemunha de que esse  $P_4$  é ruim.  $\square$

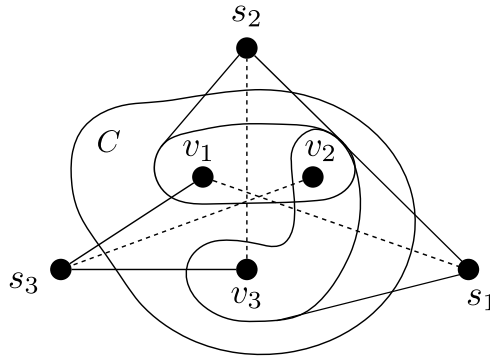
Terminando a seção, vamos apresentar um resultado bastante interessante que relaciona os grafos triangulares com os grafos de partição geral, caracterizando assim uma parte dos grafos equiestáveis.

**Teorema 2.21** (Anbeek, DeTemple, McAvaney e Robertson [2]). *Se  $G$  é um grafo triangular mas não de partição geral, então  $G$  possui um grafo de Hajós como subgrafo induzido.*

*Demonstração.* Como  $G$  não é um grafo de partição geral, temos que para qualquer cobertura por cliques maximais  $\mathcal{C}$  do grafo, existe um CIM  $S$  e uma clique  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $S \cap C = \emptyset$ . Além disso, como  $G$  é triangular, temos que  $C$  possui tamanho pelo menos 3. Vamos considerar então  $C$  e  $S$  como descritos acima.

Seja  $s_1 \in S$  tal que  $|N(s_1) \cap C|$  seja máximo. Como  $G$  é triangular, temos que  $s_1$  possui pelo menos dois vizinhos em  $C$ . Além disso, como  $C$  é maximal, temos que existe pelo menos um vértice em  $C$  que não é adjacente a  $s_1$ , ou seja,  $|C \setminus N(s_1)| > 0$ .

Considere então, todas as arestas que possuem um extremo em  $N(s_1) \cap C$  e outro em  $C \setminus N(s_1)$ . Sabemos que para cada uma dessas arestas, existe pelo menos um vértice em  $S$  adjacente a ambos os seus extremos. Seja  $s_2$  um desses vértices tal que  $|N(s_1) \cap N(s_2) \cap C|$  é máximo. Como  $s_2$  é adjacente a um dos vértices em  $C \setminus N(s_1)$  temos que existe pelo menos um vértice em  $C \cap N(s_1)$  o qual não é adjacente à  $s_2$ , pois caso contrário teríamos que  $|N(s_2) \cap C| > |N(s_1) \cap C|$ , uma contradição. Portanto,  $(N(s_1) \setminus N(s_2)) \cap C \neq \emptyset$ .



Seja  $v_1 \in N(s_2) \setminus N(s_1) \cap C$  e  $v_2 \in N(s_1) \setminus N(s_2) \cap C$ . Considerando a aresta  $v_1v_2$ , sabemos que existe pelo menos um vértice em  $S$ , digamos  $s_3$ , adjacente a ambos os seus extremos. Além disso, como  $|N(s_1) \cap N(s_2) \cap C|$  é máximo, temos que existe  $v_3 \in N(s_1) \cap N(s_2) \cap C$  que não é adjacente a  $s_3$ , pois caso contrário teríamos que  $N(s_1) \cap N(s_3) \cap C$  conteria  $N(s_1) \cap N(s_2) \cap C \cup \{v_2\}$  implicando em  $|N(s_1) \cap N(s_3) \cap C| > |N(s_1) \cap N(s_2) \cap C|$ , uma contradição. Dessa forma, temos que os vértices  $s_1, s_2, s_3, v_1, v_2$  e  $v_3$  induzem um grafo de Hajós em  $G$ .  $\square$

**Corolário 2.22.** *Se  $G$  é sem grafo de Hajós, então  $G$  é triangular se, e somente se,  $G$  é um grafo de partição geral.*

**Corolário 2.23.** *Todo grafo triangular sem grafo de Hajós é equiestável.*

Em resumo, foram introduzidas as classes dos grafos triangulares, dos grafos equiestáveis, dos grafos fortemente equiestáveis e dos grafos de partição geral, sendo também apresentada a hierarquia constituída por essas classes, ilustrada na Figura 2.10. Em relação aos grafos fortemente equiestáveis, sabe-se que a classe desses grafos está contida na classe dos grafos equiestáveis mas continua uma pergunta em aberto se ela está propriamente contida ou não. Além disso, nesse capítulo, foi exibido um exemplo de grafo triangular que não é equiestável/ de partição geral, Figura 2.9, e foi demonstrado que é possível, usando grafos circulantes, contruir uma família infinita de grafos equiestáveis que não são de partição geral.

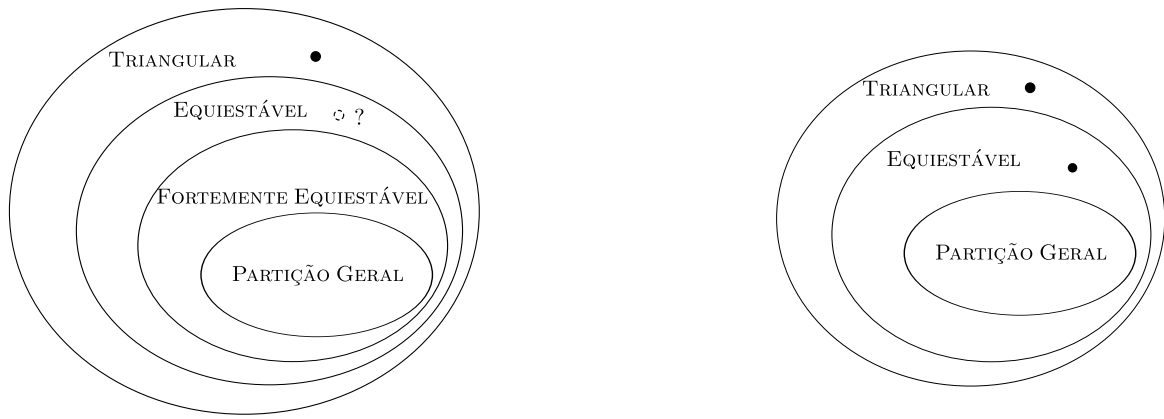


Figura 2.10: Hierarquia das classes partição geral, fortemente equiestável, equiestável e triangular.





## Capítulo 3

# Operações sobre grafos equiestáveis e de partição geral

O processo de procurar e compreender propriedades e operações que são fechadas na classe dos grafos equiestáveis e/ou na classe dos grafos de partição geral foi adotado por diversos pesquisadores na busca tanto por uma resposta à Conjectura 2.13, quanto por uma caracterização combinatória dos grafos equiestáveis. Em particular, entender essas classes e suas propriedades é de suma importância para um estudo aprofundado dos grafos equiestáveis, uma vez que esta classe se encontra em um “sanduíche” formado pelas classes dos grafos de partição geral, fortemente equiestáveis e triangulares.

Para encontrar uma caracterização dos grafos equiestáveis pode-se buscar por padrões nas interseções com classes de grafos clássicas, porém uma outra maneira é procurar por operações que preservam equiestabilidade, ou seja, operações que realizadas em um grafo equiestável produzem outro grafo também equiestável. O estudo de tais operações, além de fornecer indícios para uma caracterização, também pode simplificar provas em que se estabelece a interseção da classe dos grafos equiestáveis com outras classes de grafos, como é o caso da interseção com os grafos threshold apresentados adiante.

Além disso, uma estratégia adotada para descobrir se a classe dos grafos equiestáveis era equivalente à classe dos grafos de partição geral foi buscar propriedades e operações dos grafos de partição geral e ver se o mesmo acontecia com os grafos equiestáveis e vice-versa. Através dessa abordagem, pretendíamos adquirir mais conhecimento sobre cada uma das classes e possivelmente chegar em algum caso em que descobríssemos que as classes não eram iguais ou obter mais evidências de que a conjectura poderia ser verdadeira obtendo alguma intuição no processo.

Neste capítulo são demonstrados resultados relacionados à operações de adição/remoção de vértices na classe dos grafos de partição geral e na classe dos grafos equiestáveis. O estudo de tais operações é interessante pois a adição fornece uma

maneira de construirmos grafos maiores, enquanto que a remoção permite simplificar grafos mais complexos a fim de se obter uma estrutura mais simples para se trabalhar. Exemplos da utilização dessas operações na caracterização de grafos equiestáveis quando restritos à classes de grafos clássicas através da implicação de que os grafos triangulares da classe são de partição geral podem ser vistos no Capítulo 5, como, por exemplo, no caso dos grafos distância-hereditário.

### 3.1 Módulo e contração de módulo

Nesta seção vemos que se  $G$  é um grafo de partição geral/equiestável/triangular e  $M$  um de seus módulos, então  $G[M]$  é um grafo de partição geral/equiestável/triangular e o grafo obtido pela contração de  $M$  em um único vértice  $v$  também o é. Os teoremas aqui apresentados são amplamente utilizados nos lemas e teoremas desse capítulo e desempenham um papel importantíssimo na simplificação de diversas provas dos resultados presentes nessa dissertação.

**Definição 3.1.** Em um grafo  $G = (V, E)$ , um *módulo*  $M \subseteq V$  consiste em um conjunto de vértices de forma que para todo vértice  $v \in V \setminus M$  temos que se  $v$  é adjacente a algum vértice de  $M$  então  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $M$ .



Figura 3.1: Exemplo de módulo de um grafo.

**Definição 3.2.** Em um grafo  $G = (V, E)$ , ao aplicar a operação de *contração* de um módulo  $M$  em um vértice  $v$  obtém-se o grafo  $G[V \setminus (M \setminus \{v\})]$  onde  $v \in M$ .



Figura 3.2: Operação de contração de módulo.

**Teorema 3.1.** Se  $G$  é um grafo de partição geral e  $M$  um de seus módulos, então  $G[M]$  é um grafo de partição geral e o grafo obtido pela contração de  $M$  em um único vértice  $v$  também o é.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo de partição geral, ilustrado na Figura 3.3, e  $\mathcal{C}$  uma cobertura por cliques fortes de  $G$ . Observe que nenhuma clique forte de  $G$  pode estar inteiramente contida em  $M$  pois se esse fosse o caso, tal clique teria interseção vazia com um CIM de  $G$  que possuísse um vértice na vizinhança de  $M$ . Dessa forma, seja  $\mathcal{C}' = \{C \cap M \mid C \in \mathcal{C}\}$  uma cobertura por cliques de  $G[M]$ . Vamos supor que existe  $C' \in \mathcal{C}'$ , uma clique que não é forte em  $G[M]$ . Ou seja, existe  $S'$  um CIM em  $G[M]$  cuja interseção com  $C'$  é vazia.

$G$

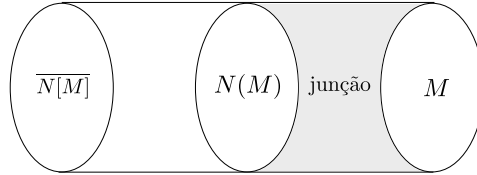


Figura 3.3: Representação de  $G$  e do módulo  $M$ .

Considere então  $C \in \mathcal{C}$  de forma que  $C' \subset C$  e estenda  $S'$  para  $S$ , um CIM em  $G$ . Como  $S'$  contém vértices de  $M$ , temos que nenhum vértice da vizinhança de  $M$  está em  $S$ , ou seja,  $N(M) \cap S = \emptyset$ . Portanto,  $C$  possui interseção vazia com  $S$  uma vez que  $C$  é composta por vértices da vizinhança de  $M$  e por vértices de  $M$  que possuem interseção vazia com  $S'$ . Logo,  $C$  não é uma clique forte em  $G$ , uma contradição.

Seja  $G'$  o grafo obtido pela contração de  $M$  em um único vértice  $v$ , como ilustrado na Figura 3.4, e  $\mathcal{C}$  uma cobertura por cliques fortes de  $G$ . Considere  $\mathcal{C}' = \{C \mid C \cap M = \emptyset \text{ e } C \in \mathcal{C}\} \cup \{C \setminus M \cup \{v\} \mid C \cap M \neq \emptyset \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$  uma cobertura por cliques de  $G'$ . Devido à construção de  $G'$  temos que todas as cliques de  $\mathcal{C}'$  são cliques fortes de  $G'$  e portanto,  $G'$  é gpg.  $\square$

$G'$

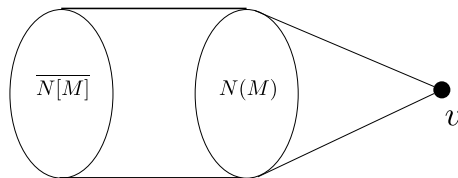


Figura 3.4: Representação de  $G'$ .

**Teorema 3.2.** *Se  $G$  é um grafo que satisfaz a condição triangular e  $M$  um de seus módulos, então  $G[M]$  é um grafo triangular e o grafo obtido pela contração de  $M$  em um único vértice  $v$  também o é.*

*Demonstração.* Seja  $P$  um  $P_4$  ruim em  $G[M]$  e  $S_M$  seu conjunto testemunha. Estendendo  $S_M$  para  $S$ , um CIM de  $G$ , obtemos um conjunto testemunha de que  $P$  é um

$P_4$  ruim em  $G$ , uma vez que nenhum vértice de  $G$  que seja adjacente a algum vértice de  $M$  poderá ser adicionado a  $S_M$  afim de formar  $S$ .

De forma similar, é fácil observar que a existência de um  $P_4$  ruim no grafo obtido pela contração de  $M$  em um único vértice  $v$ , implica na existência de um  $P_4$  ruim em  $G$ , uma vez que  $v$  pode ser substituído por qualquer vértice de  $M$ , se  $v$  fizer parte de um  $P_4$  ruim, ou por qualquer CIM de  $G[M]$ , caso  $v$  esteja em um conjunto testemunha.  $\square$

**Teorema 3.3** (Milanič e Rudolf [18]). *Se  $G$  é equiestável e  $M$  um de seus módulos, então  $G[M]$  é equiestável e o grafo obtido pela contração de  $M$  em um único vértice também o é.*

*Demonstração.* Como  $M$  é um módulo de  $G$ , temos que a interseção de qualquer conjunto independente maximal de  $G$  com  $M$  é vazia ou um conjunto independente maximal de  $G[M]$ .

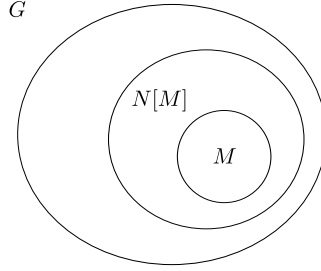


Figura 3.5: Representação de  $G$ .

Seja  $(w, t)$  uma atribuição equiestável de  $G$ , vamos mostrar que  $(w_M, t_M)$  é uma atribuição equiestável de  $G[M]$  onde  $w_M$  corresponde a função  $w$  restrita à  $M$ .

Primeiramente, precisamos concluir que para todo  $S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$  temos que  $w_M(S_M) = t_M$ . Para tal, considere  $S$  um conjunto independente maximal de  $G \setminus N[M]$  e  $S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$ . Observe que para qualquer par  $S, S_M$ , temos que  $S \cup S_M \in \mathcal{S}_G$  e que  $w(S) + w(S_M) = t$ . O que implica em  $w(S_M)$  ser igual a um valor fixo  $t_M$  para todo  $S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$ . Logo  $w_M(S_M) = t_M \forall S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$ .

Falta mostrar que para  $S_M \subseteq M$ , se  $w(S_M) = t_M$ , então  $S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$ . Para tal, considere  $S \in \mathcal{S}_{G[V \setminus N[M]]}$ . Como  $w(S_M) = t_M$  sabemos que  $w(S \cup S_M) = t$  e portanto  $S \cup S_M \in \mathcal{S}_G$ . Logo  $S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$ .

Dessa forma, concluímos que  $G[M]$  é equiestável. A seguir, vamos ver que o grafo obtido pela contração de  $M$  também é equiestável.

Considere  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  pela contração de  $M$  em um único vértice  $v$  e  $w'$  igual a  $w$  restrita a  $V \setminus M$  onde  $w'(v) = t_M$ . Pela construção de  $G'$ , sabemos que  $\mathcal{S}_{G'} = \{S \setminus M \cup \{v\} : S \cap M \neq \emptyset \text{ e } S \in \mathcal{S}_G\} \cup \{S : S \cap M = \emptyset \text{ e } S \in \mathcal{S}_G\}$ .

Além disso, se  $S \cap M \neq \emptyset$  e  $S \in \mathcal{S}_G$  então  $S \cap M = S_M$  onde  $S_M \in \mathcal{S}_{G[M]}$ . Como  $w(S_M) = t_M$  para qualquer  $S_M$ , temos como consequência direta que se  $G$  é

equiestável então  $G'$  também o é.  $\square$

Repare que se  $G$  é equiestável e  $M$  um de seus módulos, também podemos dizer que  $G[\overline{N[M]}]$  é equiestável uma vez que todo CIM de  $G[\overline{N[M]}]$  junto com um CIM qualquer de  $G[M]$  sempre forma um CIM de  $G$  e, como visto no teorema anterior, uma atribuição equiestável para os vértices de  $M$  pode ser obtida diretamente de uma atribuição equiestável de  $G$ .

## 3.2 União

Ao estudar classes de grafos, em geral busca-se trabalhar apenas com grafos conexos. A seguir, vemos que no estudo dos grafos equiestáveis podemos nos restringir aos grafos conexos sem perder generalidade.

**Teorema 3.4** (Korach, Peled e Rotics [13]).  *$G_1$  e  $G_2$  são grafos equiestáveis se, e somente se,  $G_1 \cup G_2$  é um grafo equiestável.*

*Demonstração.* Seja  $G = G_1 \cup G_2$  um grafo equiestável onde  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Como  $V_1$  e  $V_2$  são módulos de  $G$  temos, pelo teorema anterior, que  $G_1$  e  $G_2$  são grafos equiestáveis. Portanto, a seguir, vamos demonstrar que a união de dois grafos equiestáveis gera um grafo equiestável.

Seja  $G = G_1 \cup G_2$ , onde  $G$  representa a união de  $G_1$  e  $G_2$ . Vamos construir a partir de  $(w_1, 1)$  e  $(w_2, 1)$ , atribuições equiestáveis de  $G_1$  e  $G_2$  respectivamente, uma atribuição equiestável  $(w, 1)$  para  $G$ .

Considere então,

$$w(v) = \begin{cases} \alpha w_1(v) & \text{se } v \in V_1, \\ (1 - \alpha)w_2(v) & \text{se } v \in V_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$ .

Devido à sua construção, sabemos que cada conjunto independente maximal de  $G$  é formado pela união de um conjunto independente maximal de  $G_1$  e outro de  $G_2$ . Logo, se  $S$  é um conjunto independente maximal de  $G$  então  $w(S) = 1$ , independentemente do valor de  $\alpha$ .

Vamos supor que existe  $T \subseteq V$ , um conjunto que não é CIM e tal que  $w(T) = 1$ . Considere  $T_i = T \cap V_i$  para  $i = 1, 2$ . Reescrevendo  $w(T) = 1$  obtemos

$$w_2(T_2) + \alpha(w_1(T_1) - w_2(T_2)) = 1. \quad (3.2)$$

Dados  $T_1$  e  $T_2$  fixos, temos que a equação acima só vale para um  $\alpha$  específico. Como o número de subconjuntos de  $V$  que não são conjuntos independentes maximais de  $G$  é finito, sempre podemos encontrar um valor  $\alpha \in (0, 1)$  de maneira que

a equação 3.2 não é satisfeita para nenhum conjunto  $T$ . Portanto  $G = G_1 \cup G_2$  é equiestável.  $\square$

Como as cliques fortes de um grafo continuam fortes após a união de tal grafo com um outro qualquer e nenhuma aresta é criada na união de dois grafos, o mesmo vale para os grafos de partição geral. Dessa forma, no restante do texto, quando nos referirmos a grafos equiestáveis ou de partição geral iremos considerar que tais grafos são conexos.

### 3.3 Adição/remoção de vértice universal

Um dos primeiros resultados sobre grafos equiestáveis, apresentado por Payan [24], caracterizando a interseção da classe dos grafos equiestáveis com a classe dos grafos threshold foi resultado direto de uma versão mais fraca tanto do Teorema 3.4, visto na seção anterior, quanto do próximo lema.

**Lema 3.5** (Payan [24]). *As operações de adição e remoção de vértice universal preservam equiestabilidade.*

*Demonstração.* Considere  $G'$  o grafo formado adicionando um vértice universal a  $G$ . Sabemos que o conjunto de vértices de  $G$  é um módulo de  $G'$  e portanto, se  $G$  é equiestável, pelo Teorema 3.3,  $G'$  é equiestável.

Seja  $G$  um grafo equiestável e  $(w, t)$  uma de suas atribuições equiestáveis. Considere então  $G'$ , o grafo obtido a partir de  $G$  pela adição de um vértice universal  $u$ , e  $(w', t)$  onde  $w'$  é tal que:

$$w'(v) = \begin{cases} w(v) & \text{se } v \in V, \\ t & \text{se } v = u. \end{cases} \quad (3.3)$$

Como  $\mathcal{S}_{G'} = \mathcal{S}_G \cup \{u\}$  e  $w'(u) = t$  vemos que  $(w', t)$  é uma atribuição equiestável de  $G'$ .  $\square$

**Corolário 3.6.** *Os grafos threshold são equiestáveis.*

*Demonstração.* Considere  $G$  um grafo threshold de  $n$  vértices. Se  $n = 1$  então  $G \simeq K_1$  e  $G$  é equiestável. Caso contrário,  $G$  possui um vértice  $v$  que corresponde a um vértice universal ou isolado em  $G$ . Seja  $G'$  o grafo obtido de  $G$  a partir da remoção de  $v$ . Vamos supor que todo grafo threshold com menos de  $n > 1$  vértices é equiestável. Portanto,  $G'$  é equiestável. Tanto a operação de união de grafos equiestáveis quanto a operação de adição de vértices universais a um grafo equiestável produzem grafos equiestáveis, assim concluímos que  $G$  é equiestável.  $\square$

Repare que as operações de adição e remoção de vértice universal são fechadas na classe dos grafos de partição geral uma vez que no modelo de interseção, testemunha de que o grafo é gpg, o conjunto correspondente ao vértice universal deve ser igual ao conjunto base do modelo de interseção.

### 3.4 Substituição

Nesta seção veremos que a operação de substituição, ilustrada na Figura 3.6, é fechada tanto na classe dos grafos de partição geral quanto na classe dos grafos triangulares. Já para a classe dos grafos equiestáveis, esse problema está em aberto tendo apenas alguns resultados parciais.

**Definição 3.3.** Considere os grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  onde  $v \in V_1$ . O grafo obtido a partir de  $G_1$  pela *substituição* de  $v$  por  $G_2$ , ou seja,  $G_1(v \rightarrow G_2)$ , consiste no grafo obtido removendo  $v$  de  $G_1$ , e adicionando uma aresta de cada vértice que estava na vizinhança de  $v$  para cada vértice de  $G_2$ .

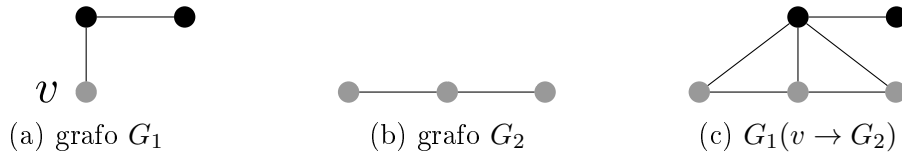


Figura 3.6: Operação de substituição.

**Teorema 3.7.**  $G_1(u \rightarrow G_2)$  é um grafo de partição geral se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral.

*Demonstração.* Seja  $G = G_1(u \rightarrow G_2)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Observe que  $V_2$  é um módulo de  $G$  e que podemos obter  $G_1$  através da contração do módulo  $V_2$  em  $G$ . Dessa forma, temos que, pelo Teorema 3.1, se  $G$  é um gpg, então  $G_1$  e  $G_2$  também o são.

Observe que devido à construção de  $G$  temos que os conjuntos independentes maximais de  $G$  são obtidos a partir de  $G_1$  e  $G_2$  da seguinte forma:  $\mathcal{S}_G = \{S_1 \mid u \notin S_1 \text{ e } S_1 \in \mathcal{S}_{G_1}\} \cup \{S_1 \setminus \{u\} \cup S_2 \mid u \in S_1, S_1 \in \mathcal{S}_{G_1} \text{ e } S_2 \in \mathcal{S}_{G_2}\}$ . Além disso, as cliques maximais de  $G$  são obtidas a partir de  $G_1$  e  $G_2$  da seguinte maneira:  $\mathcal{C} = \{C_1 \mid u \notin C_1 \text{ e } C_1 \text{ é clique maximal em } G_1\} \cup \{C_1 \setminus \{u\} \cup C_2 \mid u \in C_1 \text{ e } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são cliques maximais em } G_1 \text{ e } G_2, \text{ respectivamente}\}$ .

Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grafos de partição geral, e  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , suas respectivas coberturas por cliques fortes. Considere  $\mathcal{C} = \{C_1 \mid u \notin C_1, C_1 \in \mathcal{C}_1\} \cup \{C_1 \setminus \{u\} \cup C_2 \mid u \in C_1, C_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ e } C_2 \in \mathcal{C}_2\}$  uma cobertura por cliques em  $G$ . Vamos supor que  $C \in \mathcal{C}$  não é uma clique forte em  $G$ . Logo, existe  $S$  um CIM que possui interseção vazia com  $C$ .

No caso em que  $C = C_1$  onde  $C_1 \in \mathcal{C}_1$ , sabemos que  $u \notin C_1$ . Considere então  $S_1 = S \cap V_1$ . Temos então que  $S_1$  ou  $S_1 \cup \{u\}$  é um CIM de  $G_1$ . Em qualquer um dos casos, como  $u$  não está em  $C$ , temos que  $C_1$  não é uma clique forte em  $G_1$ , uma contradição.

Vamos então supor que  $C = C_1 \setminus \{u\} \cup C_2$  onde  $u \in C_1, C_1 \in \mathcal{C}_1$  e  $C_2 \in \mathcal{C}_2$ . Se  $S$  só possuir vértices de  $V_1$ , temos que  $S$  também é testemunha de que  $C_1$  não é uma clique forte em  $G_1$  pois como os vértices de  $C_2$  compartilham com  $u$  os mesmos vizinhos em  $V_1$ , temos que  $S$  é um CIM em  $G_1$  que possui interseção vazia com  $C_1$ . Portanto, vamos assumir que  $S$  contém vértices de  $V_2$ .

Seja  $C_2 = C \cap V_2$ . Considere  $S_2 = S \cap V_2$ . Sabemos que, por construção,  $S_2$  é um CIM em  $G_2$ . Além disso, também temos que  $C_2$  possui interseção vazia com  $S_2$ , implicando em  $C_2$  não ser uma clique forte em  $G_2$ , uma contradição. Logo,  $\mathcal{C}$  é uma cobertura por cliques fortes em  $G$  e portanto,  $G$  é um grafo de partição geral.  $\square$

**Teorema 3.8.**  $G_1(u \rightarrow G_2)$  é um grafo triangular se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos triangulares.

*Demonstração.* Como a classe dos grafos triangulares é fechada tanto pela indução quanto pela contração de módulo (Teorema 3.2), temos que se  $G$  é um grafo triangular, então  $G_1$  e  $G_2$  também o são.

Vamos supor então que  $G_1$  e  $G_2$  satisfazem a condição triangular. Repare que como  $V_2$  é um módulo em  $G$ , se os vértices de um  $P_4$  induzido em  $G$  possuem interseção não vazia com  $V_2$ , então todos os vértices do  $P_4$  estão em  $V_2$  ou apenas um dos seus extremos está em  $V_2$ . No último caso, tal  $P_4$  pode ser transformado em um  $P_4$  em  $G_1$  substituindo o extremo em  $V_2$  por  $u$ . Assim, temos que um  $P_4$  induzido em  $G$ , pode ser visto como um  $P_4$  em  $G_1$  ou em  $G_2$ .

Seja  $P$  um  $P_4$  ruim em  $G$  e  $S$  seu conjunto testemunha. Caso os vértices de  $P$  estejam contidos em  $V_2$ , temos que  $P$  também é um  $P_4$  ruim em  $G_2$ , e seu conjunto testemunha é  $S_2 = S \cap V_2$ . No caso em que  $P$  possui um extremo  $v$  em  $V_2$ ,  $S \setminus V_2 \cup \{u\}$  é um conjunto testemunha de que o  $P_4$  obtido a partir de  $P$ , substituindo  $v$  por  $u$ , é ruim em  $G_1$ . Por último, se os vértices de  $P$  estão contidos em  $V_1$ , então  $S$  ou  $S \setminus V_2 \cup \{u\}$  é um conjunto testemunha de que  $P$  é um  $P_4$  ruim em  $G_1$ .  $\square$

Tentando responder se os grafos equiestáveis são fechados pela operação de substituição, uma questão ainda em aberto e proposta por Mahadev et al. [15], o teorema abaixo foi um dos primeiros a usar fortemente o fato de um grafo equiestável possuir atribuições inteiras.

**Teorema 3.9** (Milanič e Rudolf [18]).  $G_1(u \rightarrow G_2 \cup K_1)$  é um grafo equiestável se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos equiestáveis.



*Demonstração.* Seja  $G = G_1(u \rightarrow G_2 \cup K_1)$  onde  $G = (V, E)$ ,  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  e  $K_1 = (\{z\}, \emptyset)$ . Como  $V_2$  é um módulo de  $G_1(u \rightarrow G_2 \cup K_1)$  temos que  $G_2$  é equiestável. Além disso, como  $V_2 \cup \{z\}$  também é um módulo do grafo, temos que ao contrair  $V_2 \cup \{z\}$  em um vértice  $u$  obtemos  $G_1$  e portanto,  $G_1$  também é equiestável.

Vamos denotar por  $G$  o grafo  $G_1(u \rightarrow G_2 \cup K_1)$ , ilustrado na Figura 3.7. Dessa forma, considere  $(w_1, t_1)$  e  $(w_2, t_2)$  atribuições equiestáveis inteiras de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Vamos construir  $(w, t_1)$  de maneira que

$$w(v) = \begin{cases} w_1(v) & \text{se } v \in V_1 \setminus \{u\}, \\ (1 - \alpha)w_1(u) & \text{se } v = z, \\ \alpha w_1(u)w_2(v)/t_2 & \text{se } v \in V_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $\alpha$  é um número irracional no intervalo  $(0, 1)$ .

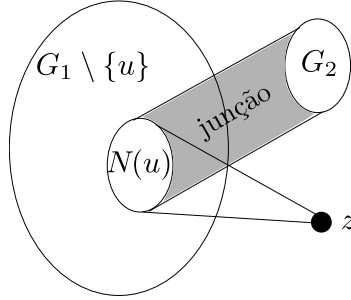


Figura 3.7: Representação de  $G_1(u \rightarrow G_2 \cup K_1)$ .

Primeiramente, é necessário mostrar que  $w(S) = t_1 \forall S \in \mathcal{S}_G$ . Para tal, dividiremos em dois casos:  $z \notin S$  e  $z \in S$ . Devido à construção de  $G$ , sabemos que no primeiro caso  $S \in \mathcal{S}_{G_1}$  e portanto,  $w(S) = w_1(S) = t_1$ . Já quando  $z \in S$  temos que  $S = S_1 \cup \{z\} \cup S_2$  onde  $\{u\} \cup S_1 \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $S_2 \in \mathcal{S}_{G_2}$ . O que implica em

$$\begin{aligned} w(S) &= w_1(S_1) + w(z) + w(S_2) \\ &= w_1(S_1) + (1 - \alpha)w_1(u) + \alpha w_1(u)w_2(S_2)/t_2 \\ &= w_1(S_1) + (1 - \alpha)w_1(u) + \alpha w_1(u) \\ &= t_1 \end{aligned}$$

Dessa forma, para  $(w, t_1)$  ser uma atribuição equiestável de  $G$  falta demonstrar que se para todo  $S \subseteq V$  vale que se  $w(S) = t_1$ , então  $S \in \mathcal{S}_G$ . De maneira similar à anterior, vamos considerar dois casos:  $z \notin S$  e  $z \in S$ .

No primeiro caso temos que

$$w(S) = w(S \cap V_1) + w(S \cap V_2) \quad (3.5)$$

$$= w_1(S \cap V_1) + \alpha w_1(u)w_2(S \cap V_2)/t_2 \quad (3.6)$$

Como  $w(S) = t_1$  e  $t_1$  é um valor inteiro, temos que a parte irracional da equação 3.6 é igual a zero, ou seja,  $w_1(u)w_2(S \cap V_2)/t_2$  é igual a zero. O que só é possível se  $w_2(S \cap V_2)$  for igual a zero. E, isso ocorre somente quando  $S \cap V_2 = \emptyset$ . Portanto, temos que  $w(S) = w_1(S \cap V_1) = t_1$  e podemos concluir que  $S \in \mathcal{S}_{G_1}$ . Logo, quando  $z \notin S$ , temos que  $S \in \mathcal{S}_G$ .

Vamos assumir então que  $z \in S$ . Assim, outra forma de escrever  $w(S)$  é

$$\begin{aligned} w(S) &= w(S \cap V_1) + w(z) + w(S \cap V_2) \\ &= w_1(S \cap V_1) + (1 - \alpha)w_1(u) + \alpha w_1(u)w_2(S \cap V_2)/t_2 \\ &= w_1(S \cap V_1) + w_1(u) - \alpha w_1(u)(1 - w_2(S \cap V_2)/t_2) \end{aligned}$$

Novamente, como  $t_1$  é um valor inteiro sabemos que

$$1 - w_2(S \cap V_2)/t_2 = 0$$

Ou seja,  $w_2(S \cap V_2) = t_2$ . Portanto,  $S \cap V_2 \in \mathcal{S}_{G_2}$ .

Além disso, como a parte racional é igual a  $t_1$ , obtemos que  $w_1(S \cap V_1) + w_1(u) = t_1$ . Logo,  $S \cap V_1 \cup \{u\} \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $S = S_1 \cup \{z\} \cup S_2$  onde  $S_1 \cup \{u\} \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $S_2 \in \mathcal{S}_{G_2}$ . Concluindo,  $S \in \mathcal{S}_G$ .  $\square$

## 3.5 Junção

Relembrando, a junção de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ , consiste em um grafo  $G = (V, E)$  onde  $V = V_1 \cup V_2$  e  $E = E_1 \cup E_2 \cup \{uv | u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}$ .

No Capítulo 2, vimos que a classes dos grafos fortemente equiestáveis é fechada pela operação de junção. A seguir, veremos que podemos obter o mesmo resultado com relação à classe dos grafos de partição geral e à classe dos grafos triangulares como corolário dos Teoremas 3.1 e 3.7 e Teoremas 3.2 e 3.8, respectivamente.

**Corolário 3.10** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Seja  $G$  um grafo formado pela junção de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ . Temos que  $G$  é gpg se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são ambos grafos de partição geral.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$ ,  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Como  $V_1$  e  $V_2$  são módulos de  $G$  temos que, pelo Teorema 3.1, se  $G$  é gpg, então  $G_1$  e  $G_2$  também o são.

Considere um  $K_2$  de vértices  $v_1$  e  $v_2$ . Observe que ao substituir  $v_1$  por  $G_1$ , obtemos um grafo de partição geral  $G'_1$  e que  $G'_1(v_2 \rightarrow G_2)$  resulta em  $G$ . Dessa forma, como a operação de substituição é fechada na classe dos grafos de partição geral, Teorema 3.7, temos que se  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral, então  $G$  é gpg.

□

**Corolário 3.11.** *Seja  $G$  um grafo formado pelo junção de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ . Temos que  $G$  é triangular se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são ambos grafos triangulares.*

*Demonstração.* Aplicação dos Teoremas 3.2 e 3.8.

□

Apesar de muito simples para grafos de partição geral e grafos triangulares, o problema de descobrir se a classe dos grafos equiestáveis é fechada pela operação de junção está em aberto pois esse problema está fortemente relacionado com o problema de descobrir se a classe dos grafos equiestáveis é fechada pela operação de substituição, também em aberto.

## 3.6 Adição/remoção de gêmeo

Nesta seção veremos que as operações de adição e remoção de um vértice gêmeo são fechadas tanto na classe dos grafos de partição geral, quanto na classe dos grafos triangulares. Com relação aos grafos equiestáveis, vemos que as operações de adição de gêmeo falso e remoção de um vértice gêmeo qualquer também são fechadas na classe, porém, é um problema em aberto descobrir se o mesmo ocorre para a adição de um vértice gêmeo verdadeiro.

Novamente, os próximos resultados seguem direto como corolários dos Teoremas 3.1 e 3.7 e Teoremas 3.2 e 3.8, respectivamente.

**Corolário 3.12** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Sejam  $u, v$  vértices gêmeos em um grafo  $G$ . Então  $G$  é gpg se, e somente se,  $G - u$  é gpg.*

*Demonstração.* Como  $M = \{u, v\}$  é um módulo de  $G$ , temos que ao contrair  $M$  em um único vértice obtemos um grafo isomorfo a  $G - u$ . Como a operação de contração de módulo em um grafo de partição geral produz um gpg, temos que se  $G$  é gpg, então  $G - u$  é gpg.

Seja  $G'$  um grafo de partição geral, vamos mostrar que adicionar um vértice gêmeo a qualquer vértice  $v$  sempre resulta em um grafo  $G$  que também é gpg. Para tal, observe que para adicionarmos um gêmeo verdadeiro, basta realizarmos  $G'(v \rightarrow K_2)$ , e para criarmos um gêmeo falso basta fazermos  $G'(v \rightarrow 2K_1)$ . Como

a classe dos grafos de partição geral é fechada pela operação de substituição, temos que  $G$  é gpg se, e somente se,  $G - u$  é gpg. □

**Corolário 3.13** (Korach, Peled e Rotics [13]). *Sejam  $u, v$  vértices gêmeos em um grafo  $G$ . Então  $G$  é triangular se, e somente se,  $G - u$  é triangular.*

*Demonstração.* Consequência dos Teoremas 3.2 e 3.8. □

Dada uma atribuição equiestável  $(w, t)$  de um grafo  $G$ , são poucas as informações de  $G$  que podemos extrair desta atribuição. Vimos na Seção 3.3 que podemos sempre localizar os vértices universais pois estes são os que possuem valor igual a  $t$ . Outra informação, com respeito aos vértices gêmeos, algumas vezes pode ser obtida como veremos a seguir.

**Proposição 3.14** (Milanič e Rudolf [18]). *Sejam  $u, v$  vértices de um grafo equiestável  $G$  e  $(w, t)$  uma atribuição equiestável do mesmo. Se  $w(u) = w(v)$ , então  $u$  e  $v$  são gêmeos.*

*Demonstração.* Vamos supor que  $w(u) = w(v)$  e que  $u$  e  $v$  não são gêmeos. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe  $x \in N(v) \setminus N[u]$ . Considere  $\{u, x\} \cup S'$  um CIM do grafo. Como  $G$  é equiestável, temos que  $w(u) + w(x) + w(S') = t$ . O que implica em  $w(v) + w(x) + w(S') = t$ , uma contradição pois  $\{v, x\} \cup S'$  não constitui um conjunto independente. □

Vale observar que se  $u, v$  são gêmeos verdadeiros, então  $w(u) = w(v)$  para qualquer atribuição equiestável  $(w, t)$  de  $G$ . Porém não podemos afirmar o mesmo quando  $u$  e  $v$  são gêmeos falsos. No caso do  $C_4$ , por exemplo, toda atribuição equiestável irá possuir pelo menos um par de gêmeos falsos com pesos diferentes. De maneira mais genérica, para a classe dos grafos estrela, ou seja,  $K_{1,n}$ , temos que os gêmeos falsos podem assumir valores iguais ou diferentes, bastando apenas que a soma de todos os seus valores resulte em  $t$ .

Como adicionar e remover um vértice gêmeo preserva tanto a condição triangular quanto um grafo ser de partição geral, podemos nos perguntar se ocorre o mesmo com os grafos equiestáveis. Como corolário dos Teoremas 3.3 e 3.9, obtemos uma resposta parcial para essa questão:

**Corolário 3.15.** *Sejam  $u, v$  vértices gêmeos falsos em um grafo  $G$ . Então  $G$  é equiestável se, e somente se,  $G - u$  é equiestável.*

*Demonstração.* Aplicação dos Teoremas 3.3 e 3.9. □

Usando o mesmo argumento, podemos mostrar que se  $u$  e  $v$  são gêmeos verdadeiros de um grafo equiestável  $G$ ,  $G - u$  também é equiestável. Porém, provar que a adição de gêmeo verdadeiro preserva equiestabilidade é algo que ainda não se sabe. É importante reparar que essa não é uma questão trivial pois uma prova de que essa operação é fechada na classe dos grafos equiestáveis poderia fornecer uma possível maneira para responder se os grafos equiestáveis são fechados por substituição.

### 3.7 Adição/remoção de vértice de vizinhança não minimal

Nos próximos teoremas veremos que ao retirar um vértice de vizinhança não minimal tanto em um grafo de partição geral quanto em um grafo triangular, o grafo resultante dessa operação sempre permanece na mesma classe. Porém, antes de apresentarmos tais resultados, é necessário introduzir o conceito de vizinhança minimal.

**Definição 3.4.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um vértice  $v \in V$  possui vizinhança minimal se  $N[u] \not\subset N[v]$ , para todo  $u \in V$  tal que  $u \neq v$ .

Para o próximo resultado, considere que para  $\mathcal{I}$ , um modelo de interseção de um grafo  $G$ ,  $\mathcal{I}^*$  é a subfamília de  $\mathcal{I}$  composta por todos os conjuntos minimais de  $\mathcal{I}$  e  $G^*$  é o grafo de interseção de  $\mathcal{I}^*$ .

**Teorema 3.16** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Seja  $G$  o grafo de interseção de uma família  $\mathcal{I}$  de conjuntos distintos. Então,  $\mathcal{I}$  é testemunha de que  $G$  é gpg se, e somente se,  $\mathcal{I}^*$  é testemunha de que o subgrafo correspondente a  $G^*$  é gpg e cada conjunto em  $\mathcal{I}$  consiste na união de membros de  $\mathcal{I}^*$ .*

*Demonstração.* Vamos primeiramente mostrar, por contradição, que  $\mathcal{I}^*$  é testemunha de que  $G^* = (V^*, E^*)$  é gpg.

Suponha que  $S$  é um CIM de  $G^*$  tal que  $S$  não forma uma partição do conjunto base de  $\mathcal{I}^*$ . Logo, existe em  $G - G^*$  um vértice  $v$  que não é adjacente a nenhum vértice de  $S$  uma vez que  $G$  é gpg. Porém, como  $I_v$  não é minimal, temos que existe um vértice  $u$  em  $G^*$  tal que  $I_u \subset I_v$ . O que implica que  $S \cup \{u\}$  é um conjunto independente em  $G^*$ , uma contradição pois  $S$  é um CIM de  $G^*$ . Logo,  $\mathcal{I}^*$  é testemunha de que  $G^*$  é gpg.

Considere, agora,  $I_v$  o menor conjunto de  $\mathcal{I}$  que não é composto pela união de membros de  $\mathcal{I}^*$ . Seja  $S$  um CIM de  $G$  tal que  $v \in S$ . Como a vizinhança de  $v$  não é minimal, existe  $u \in V^*$  tal que  $I_u \subset I_v$ . Dessa forma,  $S' = (S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$  é um conjunto independente de  $G$ , porém não é maximal uma vez que  $S'$  não particiona o

conjunto base de  $\mathcal{I}$ , faltando os elementos de  $I_v \setminus I_u$ . Logo, existe em  $G$  um vértice  $x$  tal que  $I_x \subseteq I_v \setminus I_u$ .

Seja  $x$  um vértice de  $G$  tal que  $I_x$  não é um conjunto minimal em  $\mathcal{I}$ , além de não ser composto pela união de membros de  $\mathcal{I}^*$ . Tal  $x$  existe pois caso contrário  $I_v$  seria composto pela união de conjuntos de  $\mathcal{I}^*$ . Dessa forma,  $I_x$  é um conjunto menor do que  $I_v$  que não é composto pela união de membros de  $\mathcal{I}^*$ , uma contradição.

Seja  $\mathcal{I}^*$  testemunha de que  $G^*$  é gpg. Vamos supor que  $\mathcal{I}$  não é testemunha de que  $G$  é um gpg. Logo, existe  $S$  um CIM em  $G$  de forma que os conjuntos em  $\mathcal{I}$  correspondentes aos vértices de  $S$  não formam uma partição do conjunto base de  $\mathcal{I}$ . Considere  $S$  tal conjunto de forma que  $S$  possui o menor número de vértices de vizinhança não minimal. Como  $\mathcal{I}^*$  é testemunha de que o subgrafo correspondente a  $G^*$  é gpg, temos que  $S$  possui pelo menos um vértice  $v$  de vizinhança não minimal de forma que  $I_v$ , por construção, é composto pela união de membros de  $\mathcal{I}^*$ . Assim, considere  $\mathcal{I}_v^*$  os membros de  $\mathcal{I}^*$  que compõe  $I_v$  e  $S' = \{u \mid I_u \in \mathcal{I}_v^*\}$ . Como  $S$  é um CIM que não forma uma partição do conjunto base de  $\mathcal{I}$  e  $I_v$  é formado pela união dos conjuntos de  $\mathcal{I}_v^*$ , temos que  $S \setminus \{v\} \cup S'$  é um CIM em  $G$  de forma que os conjuntos em  $\mathcal{I}$  correspondentes aos seus vértices não formam uma partição do conjunto base de  $\mathcal{I}$  e, além disso, com um número de vértices de vizinhança não-minimal menor do que  $S$ , uma contradição.  $\square$

**Corolário 3.17.** *Se  $G$  é gpg e  $v$  é um vértice de  $G$  tal que sua vizinhança não é minimal, então  $G - v$  é um grafo de partição geral.*

**Proposição 3.18.** *Se  $G$  é triangular e  $v$  é um vértice de  $G$  tal que sua vizinhança não é minimal, então  $G - v$  é um grafo triangular.*

*Demonstração.* Como ao retirar gêmeos de um grafo triangular, o grafo resultante continua triangular, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $G = (V, E)$  é um grafo triangular sem gêmeos. Também vamos supor que  $G - v$  possui um  $P_4$  ruim  $v_1v_2v_3v_4$  e  $S$  é uma testemunha desse  $P_4$ . Como  $G$  é triangular,  $S \cup \{v\}$  é um CIM de  $G$  e  $v$  é adjacente tanto a  $v_2$  quanto a  $v_3$ . Além disso, como  $v$  não possui vizinhança minimal, existe  $u \in V$  tal que  $N[u] \subset N[v]$ . Portanto,  $u \notin S$  uma vez que  $S \cup \{v\}$  é um conjunto independente. Logo,  $S \cup \{u\}$  é um conjunto independente em  $G - v$ , uma contradição.  $\square$

Em relação aos grafos equiestáveis, não sabemos dizer se a remoção de um vértice de vizinhança não minimal gera um grafo equiestável ou não.

Vale observar que se  $v$  é um vértice de vizinhança minimal em um grafo de partição geral  $G$ , então não necessariamente  $G - v$  é um grafo de partição geral, valendo a mesma afirmação quando trocamos grafo de partição geral por grafo triangular ou grafo equiestável. Um exemplo de grafo triangular/equiestável/de partição geral em

que a remoção de um determinado vértice de vizinhança minimal gera um grafo que não é triangular/equiestável/de partição geral pode ser visto na Figura 3.8. Observe que tanto  $v_1$  quanto  $v_5$  são vértices cujas vizinhanças são minimais, porém a remoção de  $v_5$  implica na formação de um  $P_4$  ruim enquanto a remoção de  $v_1$  transforma o grafo em um cografo, um grafo sem  $P_4$  que é um grafo triangular, equiestável e de partição geral.

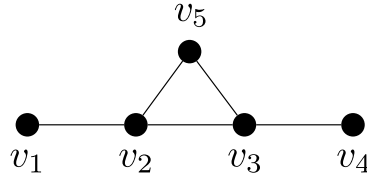


Figura 3.8: Exemplo de grafo triangular em que a remoção de um vértice de vizinhança minimal pode produzir um grafo que não satisfaz a condição triangular.

### 3.8 Decomposição Split

Nos Teoremas 3.3 e 3.4 vimos que se um grafo é de partição geral/equiestável, os fatores tanto de uma decomposição modular quanto de uma decomposição de componentes conexos, quando existirem, são grafos de partição geral/equiestáveis. Nesta seção vemos que o mesmo ocorre quando lidamos com a decomposição split.

**Definição 3.5.** Um grafo conexo  $G$  possui uma *decomposição split* quando ele satisfaz as seguintes condições:

- $V(G) = (V_1, V_2)$  é uma bipartição tal que  $|V_1|, |V_2| \geq 2$ ;
- Para  $u, v \in V_1$ :

$$N(u) \cap V_2 \neq \emptyset \text{ e } N(v) \cap V_2 \neq \emptyset \Rightarrow N(u) \cap V_2 = N(v) \cap V_2 = W_2;$$

- Para  $u, v \in V_2$ :

$$N(u) \cap V_1 \neq \emptyset \text{ e } N(v) \cap V_1 \neq \emptyset \Rightarrow N(u) \cap V_1 = N(v) \cap V_1 = W_1.$$

**Definição 3.6.** Seja  $G$  um grafo que possui uma decomposição split. Ao realizar uma decomposição split em  $G$ , obtemos dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , *fatores da decomposição split*, onde  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  consiste no grafo induzido por  $V_i$  em  $G$ , adicionado de um vértice  $p \notin V_1$  adjacente a todos os vértices de  $W_i$ .

Na Figura 3.9 é ilustrada a decomposição split de um grafo  $G$ , gerando  $G_1$  e  $G_2$ , fatores da decomposição.

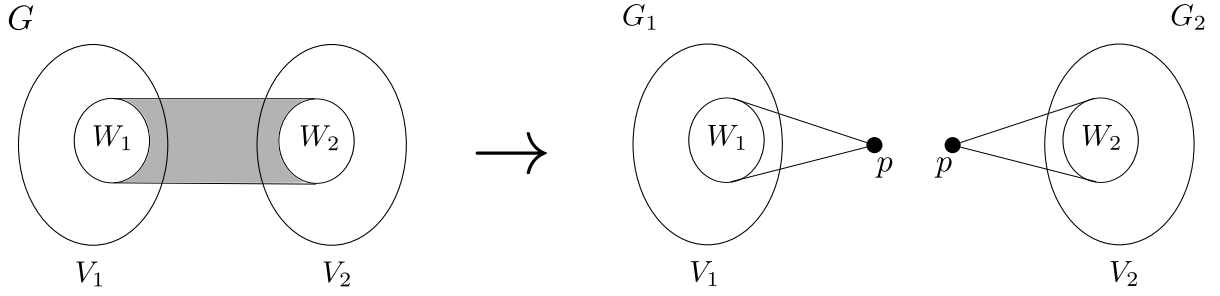


Figura 3.9: Decomposição split de um grafo  $G$ .

**Teorema 3.19.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  fatores de uma decomposição split de um grafo  $G$ . Se  $G$  é um grafo de partição geral, então  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral.*

*Demonstração.* Seja  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Considere  $\mathcal{C}$  uma cobertura por cliques maximais fortes de  $G$  e  $\mathcal{C}_1 = \{C \mid C \cap V_2 = \emptyset \text{ e } C \in \mathcal{C}\} \cup \{C \setminus V_2 \cup \{p\} \mid C \cap V_2 \neq \emptyset \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$  uma cobertura por cliques de  $G$ . Vamos mostrar que  $\mathcal{C}_1$  é composta apenas por cliques fortes.

Suponha que  $C_1 \in \mathcal{C}_1$  não é uma clique forte. Logo, existe  $S_1$  tal que  $S_1 \cap C_1 = \emptyset$ . Se  $p \notin C_1$ , por construção, temos que existe  $C = C_1$ , uma clique forte em  $G$ . Considere  $S$  um CIM de  $G$  que contenha  $S_1 \setminus \{p\}$ . Como  $S_1$  é um CIM em  $G_1$  temos que  $S$  é tal que  $S \cap V_1 = S_1 \setminus \{p\}$ . Logo, a interseção de  $S$  com  $C$  é vazia, uma contradição pois  $C$  é clique forte em  $G$ . Portanto, vamos assumir que  $p \in C_1$ .

Seja  $C$  uma clique forte em  $G$  de forma que  $C_1 \setminus \{p\} \subset C$  e  $C \cap W_2 \neq \emptyset$ . Considere  $S$ , um CIM em  $G$ , de forma que  $S_1 \subseteq S$ . Como  $p \in C_1$  e  $S_1 \cap C_1 = \emptyset$ , temos que  $S_1 \cap W_1 \neq \emptyset$ . Logo,  $S \cap W_1 \neq \emptyset$  e portanto,  $S \cap W_2 = \emptyset$ . Dessa forma, temos que  $C \cap S = \emptyset$ , uma contradição.

De forma similar, podemos fazer os mesmos argumentos para  $G_2$ . O que implica em tanto  $G_1$  quanto  $G_2$  serem grafos de partição geral.  $\square$

**Teorema 3.20.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  fatores de uma decomposição split de um grafo  $G$ . Se  $G$  é um grafo equiestável, então  $G_1$  e  $G_2$  são grafos equiestáveis.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$ ,  $G_1 = (\{p\} \cup V_1, E_1)$  e  $G_2 = (\{p\} \cup V_2, E_2)$ . Considerando a decomposição split, observe que todo CIM  $S$  em  $G$  é tal que  $S = L^1 \cup L^2$  onde  $L^1$  é um CIM de  $G[V_1]$  e  $L^2$  é um CIM de  $G[V_2]$ . Além disso, repare que para quaisquer dois conjuntos independentes maximais  $L^1$  e  $L^2$  de  $G[V_1]$  e de  $G[V_2]$ , respectivamente,  $L^1 \cup L^2$  é um CIM em  $G$  se  $L^1 \cap W_1 = \emptyset$  ou  $L^2 \cap W_2 = \emptyset$ . Considere  $S_i$  um CIM em  $G$ . Sabemos então que  $S_i$  pode ser particionado em vértices de  $V_1$  e vértices de  $V_2$ , ou seja,  $S_i = L_i^1 \cup L_i^2$ . Para simplificar a prova, vamos usar a seguinte notação:

- Para  $L_i^1$ :

$$S_i^1 = S_i \cap V_1, \text{ se } S_i \cap W_1 \neq \emptyset$$



$$S_i^1 = S_i \cap V_1, \text{ se } S_i \cap W_1 = \emptyset$$

- Para  $L_i^2$ :

$$S_i^2 = S_i \cap V_2, \text{ se } S_i \cap W_2 \neq \emptyset$$

$$S_i'^2 = S_i \cap V_2, \text{ se } S_i \cap W_2 = \emptyset$$

Considere  $S_i \in \mathcal{S}_G$ . Note que, como  $G$  é equiestável, temos que  $S_i = S_i^1 \cup S_i'^2$ , ou  $S_i = S_i'^1 \cup S_i^2$  pois caso  $S_i$  fosse igual a  $S_i'^1 \cup S_i'^2$  teríamos que  $S_i$  seria uma testemunha de que  $G$  não é triangular.

Além disso, como  $G$  é equiestável e devido à sua estrutura, temos que  $w(S_i^1) + w(S_j'^2) = w(S_k^1) + w(S_l^2) = t$  para quaisquer  $S_i, S_j, S_k, S_l \in \mathcal{S}_G$  tais que os conjuntos  $S_i^1, S_j'^2, S_k^1, S_l^2$  estejam definidos. Logo, temos que para todos os conjuntos  $S_i^1$ ,  $w(S_i^1)$  é igual a um valor fixo  $t_1$ . E, o mesmo pode ser dito sobre as famílias formadas pelos conjuntos do tipo  $S_i'^1, S_i^2$  e  $S_i'^2$ , cada uma dessas famílias é tal que todos os seus conjuntos produzem um mesmo valor quando avaliados sob  $w$ .

Seja  $w(S_i^1) = t_1'$ . Considere  $(w_1, t_1)$ , uma atribuição para  $G_1$ , onde

$$w_1(v) = \begin{cases} w(v) & \text{se } v \in V_1, \\ t_1 - t_1' & \text{se } v = p \end{cases}$$

Como todo CIM de  $G_1$  corresponde ou a um  $S_i^1$  ou a um  $S_i'^1 \cup \{p\}$ , temos que  $S$  é um CIM de  $G_1$  se, e somente se,  $w_1(S) = t_1$ ; ou seja,  $(w_1, t_1)$  é uma atribuição equiestável. Logo,  $G_1$  é equiestável e, de forma análoga, o mesmo pode ser dito de  $G_2$ .  $\square$

Uma observação interessante é que se  $G_1$  e  $G_2$ , fatores de uma decomposição split de  $G$ , forem grafos de partição geral/equiestáveis, então  $G$  pode ser ou não um grafo de partição geral/equiestável. Na Figura 3.10, podemos ver um exemplo de grafo que não é de partição geral e nem é equiestável mas que possui uma decomposição split, no caso do  $P_4$  sua única decomposição split, cujos fatores são dois grafos de partição geral/equiestáveis.

Uma condição necessária para concluirmos que  $G$  é de partição geral/equiestável, se  $G_1$  e  $G_2$  forem de partição geral/equiestáveis, é que em pelo menos um dos grafos, digamos  $G_1$ , todo CIM  $S = S' \cup \{p\}$  de  $G_1$  seja tal que  $S'$  não é um CIM de  $G_1 \setminus \{p\}$ , pois caso contrário  $G$  não seria triangular.

### 3.9 Clique central

**Definição 3.7.** Uma *clique central* em um grafo  $G$  consiste em uma clique  $C = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ ,  $k \geq 1$ , onde  $N(v_0) = \{v_1, \dots, v_k\}$  e o grafo  $G \setminus C$  é formado por  $k$  com-

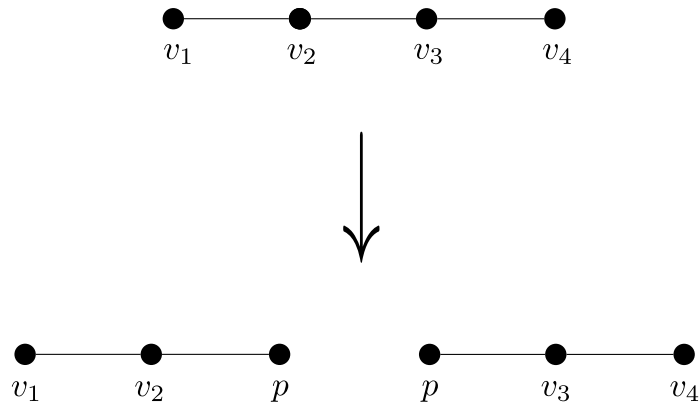


Figura 3.10: Decomposição split do  $P_4$ .

ponentes conexos  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  de forma que

$$N(v_i) = (C \setminus \{v_i\}) \cup V_i$$

para  $1 \leq i \leq k$ . Os componentes conexos  $G_1, \dots, G_k$  são chamados *folhas da clique*  $C$ .

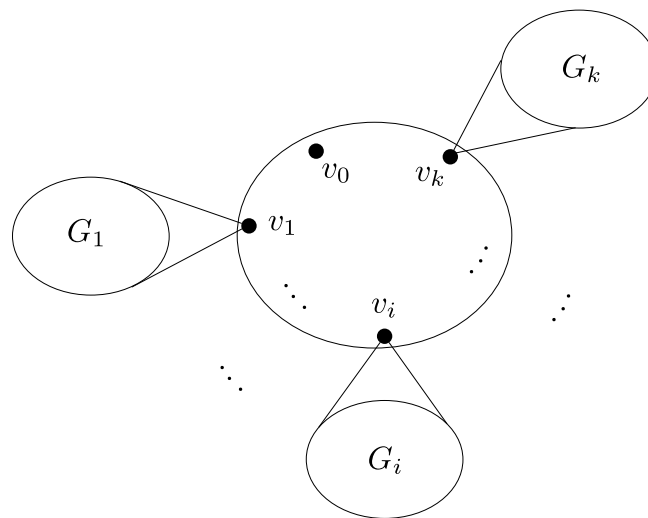


Figura 3.11: Ilustração de uma clique central.

**Teorema 3.21.** *Seja  $C = \{v_0, \dots, v_k\}$  uma clique central em um grafo  $G$ , com folhas  $G_1, \dots, G_k$ . Então  $G$  é de partição geral se, e somente se, cada  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  é um grafo de partição geral.*

*Demonstração.* Como cada  $V_i, 1 \leq i \leq k$ , é um módulo de  $G$ , pelo Teorema 3.1, se  $G$  é de partição geral, então cada  $G_i$  também o é. Portanto, falta apenas mostrar que tal construção, utilizando grafos de partição geral menores, produz um grafo de partição geral.

Quando  $k = 1$ , temos o grafo da Figura 3.12. Como ambos  $G_1$  e o grafo trivial são grafos de partição geral, temos que  $G_1 \cup K_1$  é gpg. Além disso, ao adicionar um vértice universal  $v_1$  à  $G_1 \cup K_1$ , obtemos um grafo de partição geral, isomorfo ao grafo da construção.

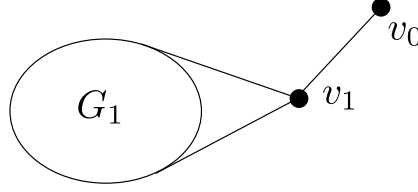


Figura 3.12: Construção apenas com  $G_1$ .

Vamos supor que todo grafo com uma clique central com menos de  $k > 1$  folhas que são grafos de partição geral, é um grafo de partição geral. Seja  $G$  um grafo com clique central  $C = \{v_0, \dots, v_k\}$  e folhas  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  de partição geral. Considere  $G'$ , o grafo induzido de  $G$  pelo vértices de  $C \setminus \{v_k\} \cup V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ . Como  $G'$  satisfaz a hipótese de indução, temos que  $G'$  é um grafo de partição geral. Além disso, temos que  $G$  pode ser obtido a partir de  $G'$  através de 3 operações sucessivas:

1. adição de um vértice  $v_k$ , gêmeo verdadeiro de  $v_0$ ;
2. adição de um vértice folha  $v_f$  a  $v_k$ ;
3. substituição de  $v_f$  por  $G_k$ .

A seguir, vamos ver que aplicando cada uma dessas operações o grafo resultante é de partição geral e, portanto  $G$  é gpg. No primeiro passo, adicionamos um gêmeo verdadeiro a  $G'$  resultando em um grafo  $G'_1$  que é de partição geral pelo Corolário 3.12. Em seguida, adicionamos um vértice folha  $v_f$  a  $v_k$  produzindo  $G'_2$ . Como a vizinhança de todos os vértices se manteve a mesma de  $G'_1$  para  $G'_2$  exceto por  $v_f$  e  $v_k$ , temos que todas as cliques fortes de  $G'_1$  que não possuíam  $v_k$  continuam fortes em  $G'_2$ . Portanto, para concluir que  $G'_2$  é um grafo de partição geral, basta garantir que as arestas com um extremo em  $v_k$  estão todas cobertas por cliques fortes em  $G'_2$ . Como todas as arestas com um extremo em  $v_k$  são cobertas pelas cliques simpliciais de  $v_0$  e  $v_f$ , temos que  $G'_2$  é gpg. Por fim,  $G = G'_2(v_f \rightarrow G_k)$  e, pelo Teorema 3.7, temos que  $G$  é gpg.  $\square$

**Lema 3.22.** *Seja  $C$  uma clique central em um grafo equiestável  $G = (V, E)$  e  $(w, t)$  uma atribuição equiestável inteira de  $G$ . Para um número irracional  $\alpha > 0$ , o par*

$(w', t - w(v_0) + \alpha)$  onde

$$w'(v) = \begin{cases} \alpha & \text{se } v = v_0, \\ w(v) - w(v_0) + \alpha & \text{se } v \in C \setminus \{v_0\}, \\ w(v) & \text{se } v \notin C \end{cases}$$

também é uma atribuição equiestável de  $G$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observe que se  $G$  é equiestável, então  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , é equiestável uma vez que ele é módulo de  $G$ , Teorema 3.3. Seja  $(w, t)$  uma atribuição equiestável qualquer de  $G$ . Considere  $(w_i, t_i)$  a atribuição equiestável de  $G_i$  obtida a partir de  $(w, t)$ . Pela estrutura de  $G$ , temos que para qualquer atribuição  $(w, t)$ ,  $w(v_i) = w(v_0) + t_i$ , onde  $v_i \in K$  e  $1 \leq i \leq k$ . Com isso em mente, vamos mostrar que  $(w', t - w(v_0) + \alpha)$  é uma atribuição equiestável de  $G$ .

Pela construção de  $G$ , sabemos que seus conjuntos independentes  $S \in \mathcal{S}_G$  são da forma:

- $\{v_0\} \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$
- $\{v_1\} \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$
- $\{v_i\} \cup S_1 \cup \dots \cup S_{i-1} \cup S_{i+1} \cup \dots \cup S_k, 1 < i < k$
- $\{v_k\} \cup S_1 \cup \dots \cup S_{k-1}$

onde  $S_i \in \mathcal{S}_{G_i}$ .

Seja  $S$  um CIM da forma  $\{v_i\} \cup S_1 \cup \dots \cup S_{i-1} \cup S_{i+1} \cup \dots \cup S_k, 1 < i < k$ . Sabemos que  $w'(S) = t - w(v_i) + w'(v_i) = t - w(v_i) + w(v_i) - w(v_0) + \alpha$ . Portanto  $w'(S) = t - w(v_0) + \alpha$ . De forma análoga, o mesmo pode ser verificado para todo  $S \in \mathcal{S}_G$ .

Assim, considere  $S \subseteq V$  tal que  $w'(S) = t - w(v_0) + \alpha$ . Como  $w'(S)$  possui uma parte irracional, temos que algum vértice de  $C$  está em  $S$ . De maneira mais forte, sabemos que exatamente um vértice de  $C$  está em  $S$  pois caso contrário teríamos que  $w'(S) = c_1 + c_2\alpha$  onde  $c_1$  e  $c_2$  seriam números inteiros positivos e  $c_2 \geq 2$ .

Dessa forma, temos que se  $v_0 \in S$  e  $w'(S) = t - w(v_0) + \alpha$ , então

$$\begin{aligned} w'(S) &= t - w(v_0) + \alpha \\ &= w(S \setminus \{v_0\}) + w'(v_0) \\ &= w(S \setminus \{v_0\}) + \alpha \end{aligned}$$

O que implica em  $w(S \setminus \{v_0\}) = t - w(v_0)$ . Logo,  $w(S) = t$  e portanto,  $S \in \mathcal{S}_G$ . De forma similar, podemos concluir que se  $w'(S) = t - w(v_0) + \alpha$ , então  $S \in \mathcal{S}_G$ .  $\square$

**Teorema 3.23** (Milanič e Rudolf [18]). *Seja  $C = \{v_0, \dots, v_k\}$  uma clique central em um grafo  $G$ , com folhas  $G_1, \dots, G_k$ . Então  $G$  é equiestável se, e somente se, cada  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  é equiestável.*

*Demonstração.* Como cada  $V_i, 1 \leq i \leq k$ , é um módulo do grafo, pelo Teorema 3.3, se  $G$  é equiestável, então cada  $G_i$  também o é. Portanto, falta apenas mostrar que tal construção, utilizando grafos equiestáveis menores, produz um grafo equiestável.

Vamos mostrar, por indução em  $k$ , que  $G$  é equiestável. Para a base da indução, vamos usar argumentos equivalentes aos usados na base do Teorema 3.21: Para  $k = 1$ , obtemos o grafo da Figura 3.12. Considere um  $K_1$  formado pelo vértice  $\{v_0\}$ . Como ambos  $G_1$  e  $K_1$  são grafos equiestáveis, temos, pelo Teorema 3.4, que  $G_1 \cup K_1$  é um grafo equiestável. Além disso, ao adicionar um vértice universal  $v_1$  à  $G_1 \cup K_1$ , o grafo resultante é isomorfo ao grafo da construção e é equiestável, pelo Lema 3.5.

Vamos supor que todo grafo com uma clique central com menos de  $k > 1$  folhas que são grafos equiestáveis, é um grafo equiestável. Seja  $G$  um grafo com clique central  $C = \{v_0, \dots, v_k\}$  e folhas  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  equiestáveis. Desejamos construir uma atribuição equiestável  $(w, t)$  para  $G$ . Para tal, considere  $G' = G \setminus (G_k \cup \{\{v_k\}, \emptyset\})$  com  $G' = (V', E')$ . Pela hipótese de indução,  $G'$  é equiestável. Considere então, uma atribuição  $(w', t' + \alpha)$  de  $G'$ , como exibida no Lema 3.22 para um número irracional positivo  $\alpha$  qualquer, e  $(w_k, t_k)$  uma atribuição equiestável inteira de  $G_k$ .

Seja  $\beta$  um número irracional positivo tal que  $\beta \neq k\alpha \forall k \in \mathbb{Z}^+$ . Definimos  $w$  como

$$w(v) = \begin{cases} w'(v) & \text{se } v \in G' \\ \beta w_k(v) & \text{se } v \in G_k \\ \alpha + \beta t_k & \text{se } v = v_k \end{cases}$$

$$\text{e } t = t' + \alpha + \beta t_k.$$

Pela construção de  $G$ , temos que para todos os seus CIM  $S \in \mathcal{S}_G$ ,  $w(S) = t$ . Falta então, mostrar que se  $w(S) = t$ , temos que  $S \in \mathcal{S}_G$ . Pela atribuição particular de  $w'$ , temos se  $w(S) = t' + \alpha + \beta t_k$ , então  $S$  não pode ser composto apenas por vértices de  $G'$ . Portanto, vamos supor que  $v_k \in S$ . Nesse caso, temos que  $w(S \setminus \{v_k\}) = t'$  o que implica em  $S$  não ter nenhum vértice de  $G_k$  e nem da clique forte de  $G'$ . Logo,  $S \setminus \{v_k\} \cup \{v_0\}$  é um CIM de  $G'$  e, portanto,  $S$  é um CIM em  $G$ .

No caso em que  $v_k \notin S$ , temos que  $S \cap V_k$  é um conjunto independente maximal de  $G_k$ . Dessa forma temos que  $S \cap V'$  também é um conjunto independente maximal uma vez que  $w(S \cap V') = t' + \alpha$ . Logo,  $S$  é um CIM em  $G$ .  $\square$

Em resumo, vimos que diversas operações são fechadas na classe dos grafos de partição geral, sendo vários desses resultados facilmente expressados na linguagem

dos grafos equiestáveis como pode ser visto na Tabela 3.1. Porém, nem todos os resultados são facilmente traduzíveis, existindo resultados que se aplicam tanto a grafos de partição geral quanto a grafos triangulares e que ainda não se sabe determinar para os grafos equiestáveis, como é o caso das operações de junção, adição de gêmeo verdadeiro, remoção de um vértice de vizinhança não minimal e de substituição. Vale ressaltar que se existir um grafo que mostre que alguma dessas operações não é fechada na classe dos grafos equiestáveis, este grafo precisa ser um contraexemplo para a Conjectura 2.13 uma vez que qualquer uma dessas operações é fechada tanto na classe dos grafos triangulares quanto na classe dos grafos de partição geral.

Operações	PARTIÇÃO GERAL	EQUIESTÁVEIS
grafo induzido por módulo	Teorema 3.1	Teorema 3.3
contração de módulo em um vértice	Teorema 3.1	Teorema 3.3
união	facilmente observável	Teorema 3.4
adição e remoção de vértice universal	facilmente observável	Lema 3.5
substituição	Teorema 3.7	$G_1(u \rightarrow G_2)$ : em aberto $G_1(u \rightarrow K_1 \cup G_2)$ : Teorema 3.9
junção	Corolário 3.10	em aberto
adição de gêmeo	Corolário 3.12	gêmeo verdadeiro: em aberto gêmeo falso: Corolário 3.15
remoção de gêmeo	Corolário 3.12	Corolário 3.15
remoção de vértice de vizinhança não minimal	Corolário 3.17	em aberto
fatores de uma decomposição split	Teorema 3.19	Teorema 3.20
construção a partir de clique central	Teorema 3.21	Teorema 3.23

Tabela 3.1: Comparação entre a classe dos grafos de partição geral e a classe dos grafos equiestáveis através de operações de adição e remoção de vértices.

# Capítulo 4

## Produtos de grafos

Com a motivação de descobrir uma caracterização para os grafos equiestáveis assim como responder se a Conjectura 2.13 era verdadeira ou não, vimos, no capítulo anterior, diversas operações que são fechadas nas classes dos grafos equiestáveis e dos grafos de partição geral. Neste capítulo, continuamos a explorar esse assunto, nos restringindo a operações de produtos em grafos.

São apresentados aqui os produtos: tensorial, cartesiano, forte e lexicográfico. Com relação a outros produtos, também é apresentado no artigo de Miklavič et al. [17] o produto lexicográfico deletado.

### 4.1 Produto tensorial

Nesta seção apresentamos uma caracterização dos grafos equiestáveis e de partição geral que possuem uma decomposição por produto tensorial. Antes disso, são introduzidos dois lemas: o primeiro caracterizando os grafos sem  $P_4$  e grafo pata ( Figura 4.1), e o segundo mostrando que o produto tensorial de dois grafos  $p$ -partidos completos é um grafo de partição geral.

**Definição 4.1.** O *produto tensorial* de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  consiste no grafo  $G = G_1 \times G_2$  com conjunto de vértices  $V = V_1 \times V_2$  e conjunto de arestas  $E = \{(u, x)(v, y) \mid (u, x), (v, y) \in V, uv \in E_1 \text{ e } xy \in E_2\}$ .

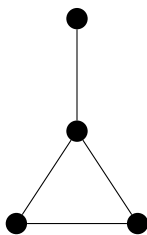


Figura 4.1: Grafo pata.

**Lema 4.1** (Miklavič e Milanič [17]). *Seja  $G$  um grafo conexo sem  $P_4$  e grafo pata. Então,  $G$  ou é o grafo trivial ou é um grafo multipartido completo com pelo menos duas partes.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$ . Vamos supor que  $|V| \geq 2$ . Como  $G$  é um cografo conexo, o complemento de  $G$  é desconexo [26]. Além disso, como o complemento do grafo pata é o  $P_3 \cup K_1$ , temos que o complemento de  $G$  é sem  $P_3$  e portanto todos os seus componentes conexos são grafos completos. Dessa forma, temos que  $\overline{G}$  é composto pela união de pelo menos dois grafos completos, o que implica em  $G$  ser um grafo multipartido completo com pelo menos duas partes.  $\square$

**Lema 4.2.** *Seja  $G = G_1 \times G_2$  um grafo conexo não trivial. Temos que se  $G_1$  e  $G_2$  são grafos  $p$ -partidos completos, então  $G$  é gpg.*

*Demonstração.* Primeiramente, observe que toda clique maximal de um grafo  $p$ -partido completo é uma clique forte. Além disso, também observe que os CIM's de  $G$  são da forma  $S_1 \times V_2$  ou  $V_1 \times S_2$ , onde  $S_1 \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $S_2 \in \mathcal{S}_{G_2}$ , enquanto que as cliques maximais de  $G$  são da forma  $\{u_1x_1, \dots, u_px_p\}$  onde  $C_1 = \bigcup_{i=1}^p \{u_i\}$  e  $C_2 = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$  são cliques maximais de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente.

Vamos mostrar que toda clique maximal de  $G$  é uma clique forte. Sejam  $C$  uma clique maximal de  $G$  e  $S \in \mathcal{S}_G$ , de forma que  $C \cap S = \emptyset$ . Pela construção de  $G$ , temos que, a partir das primeiras coordenadas dos vértices de  $C$ , podemos obter  $C_1$ , uma clique maximal de  $G_1$ . Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $S$  é da forma  $S_1 \times V_2$ . Assim, temos que  $S_1 \cap C_1 = \emptyset$ , uma contradição pois todas as cliques maximais de  $G_1$  são fortes. Logo, todas as cliques maximais de  $G$  são fortes, implicando em  $G$  ser gpg.  $\square$

**Teorema 4.3** (Miklavič e Milanič [17]). *Seja  $G$  um grafo que admite uma decomposição por produto tensorial em  $k \geq 2$  fatores conexos,  $G = G_1 \times \dots \times G_k$ , de modo que cada  $G_i$  possui mais de um vértice. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é um grafo de partição geral;
2.  $G$  é fortemente equiestável;
3.  $G$  é equiestável;
4.  $k = 2$ , e existe um inteiro  $p \geq 2$  tal que  $G_1$  e  $G_2$  são grafos  $p$ -partidos completos.

*Demonstração.* Já vimos, no Capítulo 2, que (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3). Além disso, uma demonstração de que (4)  $\Rightarrow$  (1) está feita no Lema 4.2. Vamos a seguir ver que (3)  $\Rightarrow$  (4).



Primeiramente, vamos considerar o caso em que  $k = 2$ , ou seja,  $G = G_1 \times G_2$ . Vamos supor, por contradição, que  $G_1$  possui um  $P_4$  ou um grafo pata como subgrafo induzido. Ou seja, existe em  $G_1$  um caminho  $abcd$  onde  $ad, bd \notin E_1$ . Seja  $uv \in E_2$ . Temos que os vértices  $\{(a, u), (b, v), (c, u), (d, v)\}$  formam um  $P_4$  induzido em  $G$ .

Considere agora  $S' = \{(a, u), (b, u), (d, v)\}$ , um conjunto independente de  $G$  e estenda-o para um CIM  $S$  de  $G$ . É importante observar que como  $G$  satisfaz a condição triangular, existe em  $S$  um vértice  $(x, y)$  de forma que ele é adjacente a  $(b, v)$  e  $(c, u)$ . Logo, pela definição de produto tensorial,  $bx \in E_1$  e  $uy \in E_2$ , o que implica em  $(b, u)$  e  $(x, y)$  serem adjacentes, contradizendo o fato de que  $S$  é um conjunto independente. Como os mesmos argumentos podem ser aplicados a  $G_2$ , temos que  $G_1$  e  $G_2$  são livres de  $P_4$  e do grafo pata.

Dessa forma, como visto no Lema 4.1, podemos concluir que  $G_1$  e  $G_2$  são grafos multipartidos completo. Faltando apenas, nesse caso, mostrarmos que o número de partes em ambos os grafos é a mesma.

Para isso, considere  $G_1$  com partes  $U_1, \dots, U_p$  onde  $p \geq 2$  e  $G_2$  com partes  $P_1, \dots, P_{p'}$ , onde  $p' \geq 2$ .

Considere os seguintes CIM de  $G$ :

- $S_i = U_i \times V_2$ , para  $1 \leq i \leq p$
- $S'_i = V_1 \times P_i$ , para  $1 \leq i \leq p'$

Logo para  $(w, t)$  uma atribuição equiestável de  $G$  temos que  $w(S_i) = t, 1 \leq i \leq p$ , e  $w(S'_i) = t, 1 \leq i \leq p'$ . Como cada um dos conjuntos  $\{S_i : 1 \leq i \leq p\}$  e  $\{S'_i : 1 \leq i \leq p'\}$  formam uma partição do conjunto dos vértices de  $G$ , temos que

$$w(V) = w\left(\bigcup_{i=1}^p S_i\right) = \sum_{i=1}^p w(S_i) = pt$$

$$w(V) = w\left(\bigcup_{i=1}^{p'} V_i\right) = \sum_{i=1}^{p'} w(V_i) = p't$$

Logo  $p = p'$ .

Vamos supor agora que  $G = G_1 \times \dots \times G_k$  onde  $k > 2$ . Podemos reescrever  $G$  como  $G = G_1 \times G'_2$  onde  $G'_2 = G_2 \times G'_3$  e assim sucessivamente onde  $G'_3 = G_3 \times \dots \times G_k$ . Pelo caso em que  $G = G_1 \times G_2$ , temos que  $G_1$  e  $G'_2$  são grafos  $p$ -partidos completos. Além disso, como  $G'_2 = G_2 \times G'_3$ , temos que ambos  $G_2$  e  $G'_3$  possuem pelo menos uma aresta. Vamos considerar então  $uv \in E_2$  e  $xy \in E(G'_3)$ . Como os vértices  $(u, y)$  e  $(u, x)$  não podem ser adjacentes em  $G'_2$ , concluímos que eles devem pertencer a mesma parte da  $p$ -partição de  $G'_2$ . De forma similar, o mesmo

argumento se aplica a  $(u, y)$  e  $(v, y)$ , o que implica em  $(u, x)$  e  $(v, y)$  estarem na mesma parte da  $p$ -partição de  $G'_2$ , uma contradição. Logo,  $k = 2$ . □

Usando o resultado do teorema anterior, temos que os grafos  $K_p \times K_q$ , onde  $3 \leq p < q$ , são outro exemplo, nesse caso uma família de exemplos, de grafos que não são equiestáveis mas satisfazem a condição triangular, fato esse que pode ser facilmente verificado uma vez que  $K_p$  e  $K_q$  são grafos completos.

## 4.2 Produto cartesiano

Nessa seção apresentamos uma caracterização dos grafos equiestáveis e de partição geral que possuem uma decomposição por produto cartesiano. Começamos mostrando que McAvaney et. al. [7] resolveram o problema para os grafos de partição geral, e em seguida, vemos que Miklavič e Milanič [17] generalizaram o resultado, resolvendo essa questão tanto para os grafos equiestáveis quanto para os grafos triangulares.

**Definição 4.2.** O *produto cartesiano* de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  consiste no grafo  $G = G_1 \square G_2$  com conjunto de vértices  $V = V_1 \times V_2$  e conjunto de arestas  $E = \{(u, x)(v, y) \mid (u, x), (v, y) \in V, u = v \text{ e } xy \in E_2, \text{ ou } x = y \text{ e } uv \in E_1\}$ .

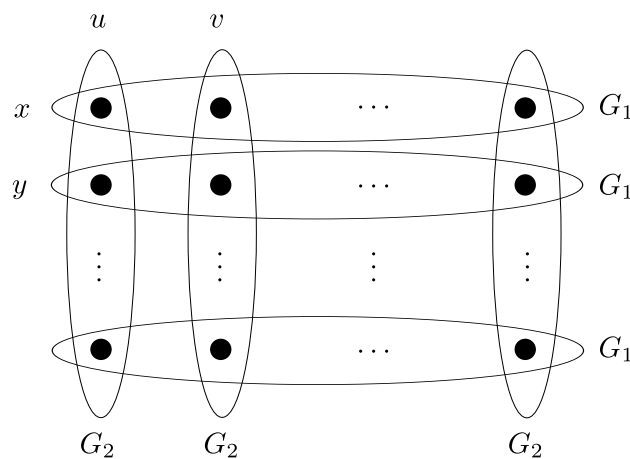


Figura 4.2: Representação de  $G_1 \square G_2$ .

Em 1993, McAvaney et. al. [7] caracterizaram os grafos de partição geral que podem ser obtidos tanto através da decomposição quanto pela construção do produto cartesiano de grafos de partição geral através do próximo teorema.

**Teorema 4.4** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grafos conexos. Temos que  $G_1 \square G_2$  é gpg se, e somente se,  $G_1 = G_2 = K_n$  para  $n \geq 1$ .*

E em 2011, Miklavič e Milanič [17] mostraram que esses grafos são exatamente os grafos equiestáveis e triangulares que admitem uma decomposição por produto cartesiano em dois ou mais fatores conexos.

**Teorema 4.5** (Miklavič e Milanič [17]). *Seja  $G$  um grafo que possui uma decomposição por produto cartesiano em  $k \geq 2$  fatores conexos não-triviais,  $G = G_1 \square \cdots \square G_k$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é um grafo de partição geral;
2.  $G$  é um grafo fortemente equiestável;
3.  $G$  é equiestável;
4.  $G$  é um grafo triangular;
5.  $k = 2$ , e existe um inteiro  $p \geq 2$  tal que  $G_1 = G_2 = K_p$ .

*Demonstração.* Já vimos, no Capítulo 2, que  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ .

$(4) \Rightarrow (5)$

Para mostrar que se  $G$  satisfaz a condição triangular, então  $k = 2$  e existe um inteiro  $p \geq 2$  tal que  $G_1 = G_2 = K_p$ , considere os seguintes parâmetros para um grafo  $G = (V, E)$ :

- $\lambda(ab) = |N(a) \cap N(b)|$ , o tamanho da vizinhança aberta comum a ambos os extremos de uma aresta  $ab \in E$ ;
- $\lambda(G) = \min\{\lambda(ab) \mid ab \in E\}$ , o tamanho da menor vizinhança comum de uma aresta em  $G$ ;
- $\delta(G)$ , o grau mínimo de  $G$ ;
- $\Delta(G)$ , o grau máximo de  $G$ .

Repare que:

$$\lambda(G) \leq \delta(G) - 1 \leq \Delta(G) - 1. \quad (4.1)$$

Vamos supor que  $k = 2$ , ou seja,  $G = G_1 \square G_2$  é um grafo triangular e  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  são grafos conexos. Primeiramente vamos mostrar que  $\Delta(G_1) - 1 \leq \lambda(G_2)$ . Para tal, vamos supor que  $\Delta(G_1) - 2 \geq \lambda(G_2)$ .

Seja  $x \in V_1$  um vértice de grau máximo, ou seja,  $g(x) = \Delta(G_1)$ . Como  $\lambda(G_2) \geq 0$ , temos que o vértice  $x$  tem pelo menos dois vizinhos distintos  $y$  e  $z$ . Além disso, considere  $uv \in E_2$  de forma que  $\lambda(uv) = \lambda(G_2)$ . Temos então, que os vértices  $\{(y, u)(x, u)(x, v)(z, v)\}$  induzem um  $P_4$  em  $G$  e, os vértices adjacentes a ambos  $(x, u)$  e  $(x, v)$  são exatamente os vértices  $\{(x, l) : l \in N_{G_2}(u) \cap N_{G_2}(v)\}$ . Note que

como  $\lambda(uv) = \lambda(G_2)$ , sabemos que  $|N_{G_2}(u) \cap N_{G_2}(v)| = \lambda(G_2)$  e, por consequência,  $|\{(x, l) : l \in N_{G_2}(u) \cap N_{G_2}(v)\}| = \lambda(G_2)$ .

Como  $\Delta(G_1) - 2 \geq \lambda(G_2)$ , existe uma função injetiva  $f : N_{G_2}(u) \cap N_{G_2}(v) \rightarrow N_{G_1}(x) \setminus \{y, z\}$ . Usando tal função, temos que

$$S' = \{(y, u), (z, v)\} \cup \{(f(l), l) \mid l \in N_{G_2}(u) \cap N_{G_2}(v)\}$$

é um conjunto estável em  $G$ . Estendendo  $S'$  para um CIM  $S$ , podemos observar que todo vértice  $(x, l) \in N((x, u)) \cap N((x, v))$  não está  $S$  uma vez que ele é adjacente a  $(f(l), l)$ . O que implica em  $G$  não satisfazer a condição triangular, uma contradição. Logo,

$$\Delta(G_1) - 1 \leq \lambda(G_2) \tag{4.2}$$

e, de forma análoga,

$$\Delta(G_2) - 1 \leq \lambda(G_1). \tag{4.3}$$

Aplicando a Equação 4.1 a  $G_2$  e usando a Equação 4.2, obtemos:

$$\Delta(G_1) - 1 \leq \lambda(G_2) \leq \delta(G_2) - 1 \leq \Delta(G_2) - 1.$$

Considerando também a Equação 4.3, temos

$$\Delta(G_1) - 1 \leq \lambda(G_2) \leq \delta(G_2) - 1 \leq \Delta(G_2) - 1 \leq \lambda(G_1)\delta(G_1) - 1 \leq \Delta(G_1) - 1. \tag{4.4}$$

Portanto,  $\delta(G_1) = \Delta(G_1) = \delta(G_2) = \Delta(G_2)$ , ou seja,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos regulares de mesmo grau, digamos  $d$ . Como pela Equação 4.4 temos que  $\lambda(G_1) = \lambda(G_2) = d - 2$ , podemos concluir que não existe nenhum  $P_3$  induzido em  $G_1$  e nem em  $G_2$ . Logo,  $G_1$  e  $G_2$  são ambos grafos completos  $K_{d+1}$ .

Vamos agora, analisar o caso em que  $G = G_1 \square \dots \square G_k$  e  $k \geq 3$ . Reescrevendo  $G$  temos que  $G = G_1 \square G'_2$  onde  $G'_2 = G_2 \square \dots \square G_k$ . Pelos argumentos anteriores, sabemos que  $G'_2$  é um grafo completo. Porém, pela definição de produto cartesiano, temos que  $G'_2$  é um grafo completo se, e somente se,  $k = 2$  e  $G_2$  é um grafo completo.

$$(5) \Rightarrow (1)$$

Seja  $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  e  $V_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ . Pela construção de  $G_1 \square G_2$ , temos que dois vértices distintos  $(u_i, x_j)$  e  $(u_k, x_l)$  são adjacentes em  $G$  se, e somente se,  $i = k$  ou  $j = l$ . Logo, as cliques maximais de  $G$  são da seguinte forma:

$$\{(u_i, x_j) \mid 1 \leq j \leq p\} \text{ ou } \{(u_j, x_i) \mid 1 \leq j \leq p\},$$

onde  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Além disso, como  $G_1$  e  $G_2$  são grafos completos de mesmo

grau,  $S \subseteq V$  é um CIM de  $G$  se, e somente se, para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $S$  contém exatamente um vértice com a primeira coordenada  $u_i$  e exatamente um vértice com a segunda coordenada igual a  $x_i$ . Dessa forma, podemos concluir que as cliques maximais são todas fortes e portanto,  $G$  é um grafo de partição geral.  $\square$

### 4.3 Produto forte

Caracterizar completamente os grafos obtidos a partir de produtos fortes que são de partição geral, equiestáveis ou triangulares é um problema em aberto. Até o momento, resultados parciais, foram apresentados por DeTemple et al. [7] e Miklavič et al. [17], alguns dos quais são apresentados nesta seção.

**Definição 4.3.** O *produto forte* de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  consiste no grafo  $G = G_1 \times G_2$  com conjunto de vértices  $V = V_1 \times V_2$  e conjunto de arestas  $E = \{(u, x)(v, y) : (u, x), (v, y) \in V, u = v \text{ e } xy \in E_2, x = y \text{ e } uv \in E_1, \text{ ou } uv \in E_1 \text{ e } xy \in E_2\}$ .

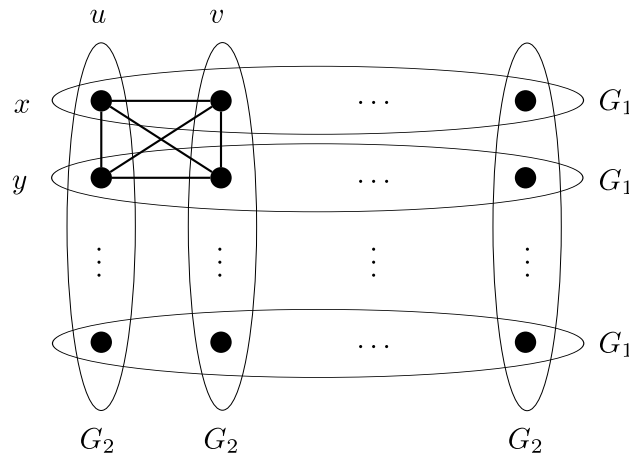


Figura 4.3: Representação de  $G_1 \times G_2$ .

É interessante observar que se  $C$  é uma clique maximal em  $G = G_1 \times G_2$ , então  $C = C_1 \times C_2$  onde  $C_1$  e  $C_2$  são cliques maximais em  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Porém, não temos uma representação similar dos CIM de  $G$  a partir dos vértices de  $G_1$  e  $G_2$ . Sabemos que se  $S_1 \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $S_2 \in \mathcal{S}_{G_2}$  então  $S_1 \times S_2 \in \mathcal{S}_G$ . Porém, como ilustrado na Figura 4.4, também existem conjuntos independentes maximais de  $G$  que podem não ser formados a partir de CIMs de  $G_1$  e  $G_2$ .

**Teorema 4.6** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]). *Se  $G = G_1 \times G_2$  é gpg, então  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral.*

*Demonstração.* Como toda clique maximal  $C$  em  $G$  pode ser escrita como  $C = C_1 \times C_2$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são cliques maximais em  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, e se

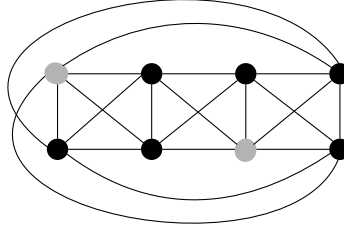


Figura 4.4: Exemplo de CIM (cinza) do  $C_4 \times K_2$ .

$S_1 \in \mathcal{S}_{G_1}$  e  $S_2 \in \mathcal{S}_{G_2}$  então  $S_1 \times S_2 \in \mathcal{S}_G$ , temos que se  $C = C_1 \times C_2$  é uma clique forte em  $G$ , então  $C_1$  e  $C_2$  são cliques fortes em  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Logo,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral.  $\square$

Porém, como apontado por Miklavič e Milanič [17], o produto forte de dois grafos de partição geral pode não ser um grafo de partição geral. Para tal exemplo, considere  $H = K_3 \square K_3$ , o produto cartesiano de um  $K_3$  com ele mesmo, e  $G = H \times H$ , o produto forte de  $H$  com ele mesmo. Como o  $K_3$  é um grafo de partição geral, pelo Teorema 4.4, temos que  $H$  é gpg. Vamos então mostrar que  $G$  não é triangular.

Seja  $V_H = \{a, b, c\} \times \{1, 2, 3\}$ , o conjunto de vértices do grafo  $H$ . Pela definição de produto cartesiano e por  $H = K_3 \square K_3$ , temos que dois vértices em  $H$  são adjacentes se, e somente se, eles possuem a primeira ou segunda coordenadas iguais. Com isso em mente, considere o conjunto

$$S = \{((a, 1), (c, 3)), ((a, 3), (b, 2)), ((b, 1), (b, 1)), \\ ((b, 2), (a, 3)), ((c, 3), (a, 1)), ((c, 2), (c, 2))\}.$$

Temos que  $S$  é um conjunto independente em  $G$  uma vez que como nenhuma das primeiras e nem das segundas coordenadas são iguais para quaisquer dois vértices, a única forma de dois vértices serem adjacentes é se os vértices de  $G_1$  correspondentes à primeira coordenada fossem adjacentes em  $G_1$  e os vértices de  $G_2$  correspondentes à segunda coordenada também fossem adjacentes em  $G_2$ , o que não ocorre. Além disso, também é possível verificar que  $S$  é um CIM em  $G$ .

Considere agora, a aresta  $e = (((a, 1), (a, 3)), ((a, 3), (a, 1)))$ . Observe que  $e$  é uma aresta de  $G \setminus S$ . Além disso, o vértice  $((a, 1), (a, 3))$  só possui um vizinho em  $S$ , a saber o vértice  $((a, 1), (c, 3))$  que não é adjacente a  $((a, 3), (a, 1))$ , o que implica em  $G$  não satisfazer a condição triangular. Logo,  $G$  não é equiestável e nem de partição geral.

## 4.4 Produto lexicográfico

O produto lexicográfico é uma construção em que temos uma caracterização dos grafos de partição geral porém não uma completa dos grafos equiestáveis. Nessa seção são apresentados resultados relacionados à construção e decomposição gerada pelo produto lexicográfico com respeito a grafos de partição geral, grafos equiestáveis e grafos triangulares.

**Definição 4.4.** O *produto lexicográfico* de dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  consiste no grafo  $G = Lex(G_1, G_2)$  com conjunto de vértices  $V = V_1 \times V_2$  e conjunto de arestas  $E = \{(u, x)(v, y) : (u, x), (v, y) \in V, u = v \text{ e } xy \in E_2, \text{ ou } uv \in E_1\}$ .

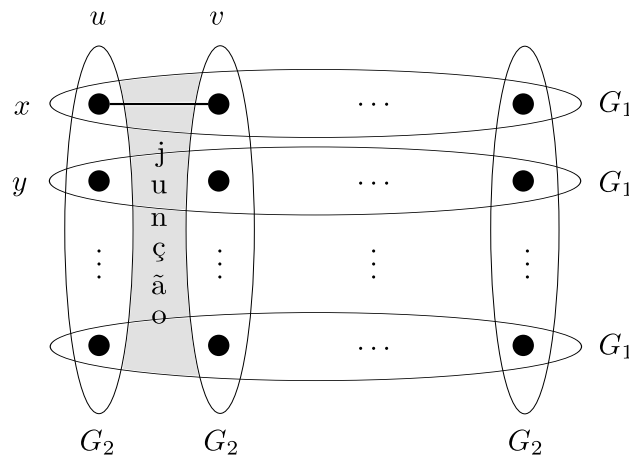


Figura 4.5: Representação de  $Lex(G_1, G_2)$ .

Uma característica do produto lexicográfico é que cada subconjunto de vértices  $M_u = \{(u, x) \mid x \in V_2\}$  onde  $u \in V_1$  forma um módulo em  $G$ , em particular, todo  $M_u$  induz um grafo isomorfo ao grafo  $G_2$  em  $G$ . Além disso,  $G_1$  também pode ser obtido de  $G$  através da contração de cada um desses módulos. Uma outra observação importante é que  $G$  pode ser obtido substituindo cada vértice de  $G_1$  por uma cópia de  $G_2$ , ou seja, podemos obter  $G$  fazendo  $G(u \rightarrow G_2)$  para cada  $u \in V_1$ . Os resultados dessa seção se apresentam como uma consequência direta dessas observações.

**Corolário 4.7** (DeTemple, McAvaney e Robertson [7]).  $G = Lex(G_1, G_2)$  é gpg se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral.

*Demonstração.* Como os grafos de partição geral são fechados pela operação de contração e indução de módulos, temos, pelo Teorema 3.1, que se  $G$  é gpg, então  $G_1$  e  $G_2$  também o são.

Além disso, como os grafos de partição geral são fechados pela operação de substituição, Teorema 3.7, e podemos obter  $G$  fazendo  $G(u \rightarrow G_2)$  para cada  $u \in V_1$ , concluímos que se  $G_1$  e  $G_2$  são grafos de partição geral, então  $G$  é gpg.  $\square$

**Corolário 4.8** (Miklavič e Milanič [17]). *Sejam  $G, G_1$  e  $G_2$  grafos tais que  $G = Lex(G_1, G_2)$ . Então:*

1. *Se  $G$  é equiestável, então  $G_1$  e  $G_2$  são equiestáveis.*
2. *Se  $G_1$  e  $G_2$  são equiestáveis e  $G_2$  possui um vértice isolado, então  $G$  é equiestável.*

*Demonstração.* Aplicação direta dos Teoremas 3.3 e 3.9. □

**Corolário 4.9** (Miklavič e Milanič [17]).  *$G = Lex(G_1, G_2)$  satisfaz a condição triangular se, e somente se,  $G_1$  e  $G_2$  também satisfazem a condição triangular.*

*Demonstração.* Aplicação direta dos Teoremas 3.2 e 3.8. □

Vimos neste capítulo, algumas caracterizações de grafos equiestáveis e de partição geral que possuem decomposição por produto tensorial, cartesiano, forte e/ou lexicográfico. A Tabela 4.1 apresenta de forma resumida tais resultados. Podemos observar que tanto os grafos equiestáveis quanto os de partição geral estão caracterizados com relação aos produtos tensorial e cartesiano. Já no caso do produto lexicográfico, vimos que tanto os grafos de partição geral quanto os grafos triangulares possuem uma caracterização, estando em aberto uma caracterização para os grafos equiestáveis. Essa última, intimamente relacionada com o problema de substituição em grafos equiestáveis, uma questão também em aberto. Por último, o produto que nenhuma das classes estudadas possuem uma caracterização, o produto forte, se apresenta como um desafio interessante pela dificuldade de se descrever os CIM's do produto forte de dois grafos.

Produto	PARTIÇÃO GERAL	EQUIESTÁVEIS
tensorial	Teorema 4.3	Teorema 4.3
cartesiano	Teorema 4.5	Teorema 4.5
forte	$G_1 \times G_2$ gpg $\Rightarrow$ $G_1, G_2$ gpg: Teorema 4.6	em aberto
lexicográfico	Corolário 4.7	$G_1 \times G_2$ eq. $\Rightarrow G_1, G_2$ eq.: Corolário 4.8 $G_1 \cup K_1, G_2$ eq. $\Rightarrow$ $(G_1 \cup K_1) \times G_2$ eq.: Corolário 4.8

Tabela 4.1: Caracterização dos grafos de partição geral e equiestáveis com relação à algumas operações de produtos.



# Capítulo 5

## Interseção com algumas classes de grafos

Tentando entender melhor os grafos equiestáveis e sua relação com os grafos de partição geral, a interseção tanto da classe dos grafos de partição geral quanto da classe dos grafos equiestáveis com outras classes foram sendo exploradas ao longo dos anos. Neste capítulo são cobertas as interseções dessas classes com as classes dos grafos cordais, dos grafos distância-hereditários, dos grafos simpliciais, dos grafos linha, dos grafos muito bem cobertos e dos grafos planares. Veremos que para todas essas classes, a condição triangular é suficiente para o grafo ser de partição geral. Também cobertas na literatura, temos que a condição triangular é suficiente para um grafo ser de partição geral nas classes dos grafos série paralelos [12] e grafos EPT [1].

### 5.1 Grafos cordais

Descobrir a interseção da classe dos grafos equiestáveis com os grafos cordais era algo que se buscava desde 1994 quando Mahadev, Peled e Sun [15] apresentaram uma caracterização da interseção da classe dos grafos equiestáveis tanto com a classe dos grafos split quanto com a classe dos grafos bloco, ambas subclasses dos grafos cordais.

Em 1997, uma resposta para tal questão foi publicada por Anbeek, DeTemple, McAvaney e Robertson [2]. Porém, como na época não se conhecia o relacionamento entre a classe dos grafos equiestáveis e as classes de grafos triangulares e de partição geral, apresentadas no Capítulo 2, não se sabia que o resultado apresentado por Anbeek et al. era uma resposta para tal questão. Em 2004, usando apenas o que se conhecia sobre os grafos equiestáveis e os grafos cordais, Peled e Rotics [25] forneceram uma segunda prova caracterizando os grafos cordais equiestáveis. A

seguir, apresentamos tanto a definição de um grafo cordal quanto o teorema de Anbeek et al..

**Definição 5.1.** Um grafo é *cordal* se todos os seus ciclos de 4 ou mais vértices possuem uma corda.

**Teorema 5.1** (Anbeek, DeTemple, McAvaney e Robertson [2]). *Para um grafo cordal  $G$ , as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $G$  é triangular;
2.  $G$  é de partição geral;
3. Toda aresta de  $G$  está numa clique simplicial.

*Demonstração.* (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1)

Como toda clique simplicial é uma clique forte, temos que se a condição (3) é satisfeita então toda aresta de  $G$  está numa clique forte e portanto  $G$  é de partição geral. Além disso, vimos no Capítulo 2 que a classe dos grafos de partição geral são uma subclasse dos grafos triangulares, ou seja, (2) implica em (1).

(1)  $\Rightarrow$  (3)

Vamos supor que existe um grafo triangular e cordal  $G = (V, E)$  que possui pelo menos uma aresta que não está em nenhuma clique simplicial.

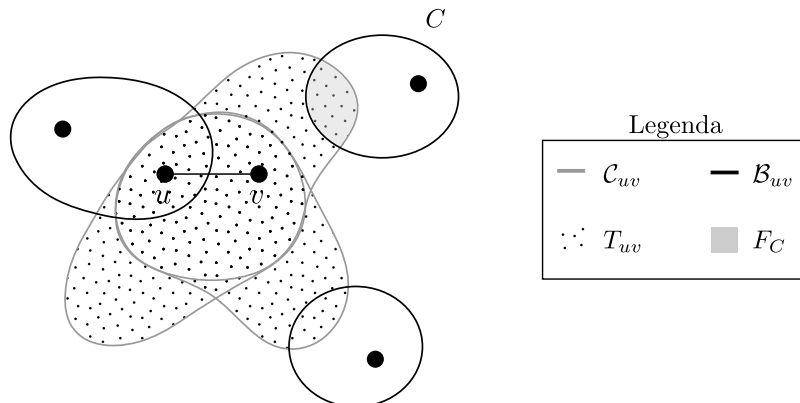
Para uma aresta  $uv$  qualquer de  $G$ , considere os seguintes conjuntos:

$\mathcal{C}_{uv}$  = o conjunto de cliques maximais de  $G$  que contém os vértices  $u$  e  $v$ .

$T_{uv}$  = a união dos vértices presentes nas cliques de  $\mathcal{C}_{uv}$ .

$\mathcal{B}_{uv}$  = o conjunto das cliques maximais de  $G$  que contém vértices tanto em  $T_{uv}$  quanto no seu complemento.

$F_C$  = o conjunto dos vértices de  $T_{uv}$  que estão na clique  $C$ , para  $C \in \mathcal{B}_{uv}$ .

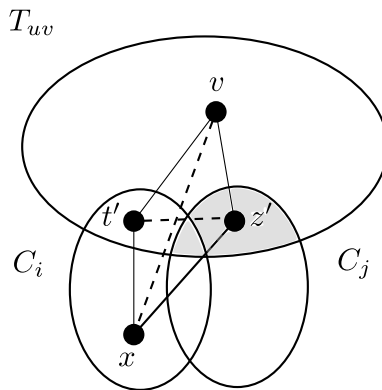


Considere  $uv$  uma aresta de  $G$  que não está em nenhuma clique simplicial tal que  $\mathcal{C}_{uv}$  é minimal. Primeiramente vamos mostrar que para todo  $x \in T_{uv}$  temos que  $x$  está em uma clique de  $\mathcal{B}_{uv}$ .

Vamos supor que existe  $x \in T_{uv}$  tal que  $x$  não está em nenhuma clique de  $\mathcal{B}_{uv}$ . Se  $x$  fosse um vértice simplicial, então a aresta  $uv$  estaria em um clique forte. Logo,  $x$  não é simplicial e portanto temos que  $x$  está em pelo menos duas cliques distintas  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_{uv}$ . Vamos considerar  $y \in C_1 \setminus C_2$ . Como  $x$  não está em nenhuma clique de  $\mathcal{B}_{uv}$  temos também que  $x$  não possui nenhum vizinho fora de  $T_{uv}$  e assim, podemos concluir que todos os vértices de qualquer clique  $C$  que contém a aresta  $xy$  estão em  $T_{uv}$  e que  $C$  contém  $\{u, v\}$ . O que implica em  $\mathcal{C}_{xy} \subseteq \mathcal{C}_{uv}$ . Além disso, como  $xy$  não está em  $G[C_2]$  temos que  $\mathcal{C}_{xy} \subset \mathcal{C}_{uv}$ . Dessa forma temos que  $xy$  é uma aresta que não está em nenhuma clique simplicial e que  $\mathcal{C}_{xy}$  está propriamente contido em  $\mathcal{C}_{uv}$ , o que contradiz o fato de  $\mathcal{C}_{uv}$  ser minimal. Portanto, temos que para todo  $x \in T_{uv}$ ,  $x$  está em uma clique de  $\mathcal{B}_{uv}$ .

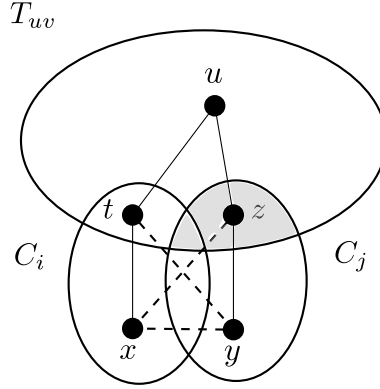
Considere então,  $C_1, \dots, C_k$ , cliques de  $\mathcal{B}_{uv}$  de forma que  $F_{C_1} \cup \dots \cup F_{C_k} = T_{uv}$  e cada  $F_{C_i}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , é maximal com respeito a todos os  $F_C$ ,  $C \in \mathcal{B}_{uv}$ . Vamos mostrar que existe  $x_i \in C_i \setminus T_{uv}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , de maneira que  $\{x_1, \dots, x_k\}$  é um conjunto independente. Para isso, considere  $C_i, C_j$ ,  $i \neq j$ .

Seja  $x \in C_i \setminus T_{uv}$  e  $y \in C_j \setminus T_{uv}$ . Vamos mostrar que existe  $z \in F_{C_j} \setminus F_{C_i}$  de forma que  $x$  não é adjacente a  $z$ . Vamos supor que  $z$  não existe. Então todos os vértices de  $F_{C_j}$  são adjacentes a  $x$  e existe em  $F_{C_j}$  um vértice  $z'$  que não é adjacente a um vértice  $t'$  de  $F_{C_i}$ , pois caso contrário teríamos que  $x, t'$  e  $F_{C_j}$  estariam em uma clique de  $\mathcal{B}_{uv}$  que contém propriamente  $F_{C_j}$ . Como  $x \in T_{uv}$ , temos que  $x$  não é adjacente a pelo menos um dentre  $u$  e  $v$ , digamos  $v$ . Dessa forma, temos que  $vt'xz'$  forma um  $C_4$  sem cordas em  $G$ , uma contradição. Logo, existe  $z \in F_{C_j} \setminus F_{C_i}$  de forma que  $x$  não é adjacente a  $z$ .



De maneira análoga, temos que existe  $t \in F_{C_i} \setminus F_{C_j}$  que não é adjacente a  $y$ . Se  $x$  é adjacente a  $y$  temos que  $tz \notin E$  pois caso contrário  $xtzy$  seria um  $C_4$  sem cordas. Do  $C_5$   $xtvzy$  concluímos que  $u$  é adjacente tanto a  $x$  quanto a  $y$  enquanto  $v$  não é adjacente a nenhum dos dois. Porém, isso implica que  $xtvzy$  é um  $C_5$  sem cordas

em  $G$ , uma contradição. Logo,  $x$  não é adjacente a  $y$ .



Portanto, o conjunto  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , onde  $x_i \in C_i \setminus T_{uv}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , é um conjunto independente em  $G$ . E ao estender tal conjunto para um CIM  $S$  temos que  $S$  não possui os extremos da aresta  $uv$  e nenhum vértice de  $N(u) \cap N(v)$ , o que implica em  $G$  não ser triangular, uma contradição.  $\square$

Em relação a caracterização dos grafos cordais equiestáveis apresentada por Peled e Rotics [25], eles a fizeram mostrando que as seguintes afirmações são equivalentes para um grafo cordal  $G$ :

1.  $G$  satisfaz a condição triangular;
2.  $\forall P_4$  induzido pelos vértices  $a, b, c, d$

$$\exists t \text{ tal que } N[t] \subseteq N[b] \cap N[c] \text{ (} t \neq a, b, c, d\text{);}$$

3.  $\forall P_4$  induzido pelos vértices  $a, b, c, d$

$$\exists t \in N(b) \cap N(c) \text{ tal que } t \text{ é simplicial;}$$

4. Dois vértices não simpliciais adjacentes possuem um vizinho simplicial em comum.

Como determinar todos os vértices simpliciais de um grafo cordal pode ser feito em tempo linear, temos que determinar se dois vértices não simpliciais adjacentes possuem um vizinho simplicial em comum pode ser feito em tempo polinomial. Em particular, guardar os vértices simpliciais adjacentes a cada vértice e procurar nas arestas com ambos os extremos não-simpliciais se seus extremos possuem algum vértice simplicial em comum, pode ser feito em tempo  $O(mn)$ . Dessa forma, o reconhecimento tanto dos grafos equiestáveis quanto de partição geral que são cordais pode ser feito em tempo  $O(mn)$ .

## 5.2 Grafos distância-hereditários

Com um artigo inteiramente dedicado a esse assunto, a interseção da classe dos grafos equiestáveis com a classe dos grafos distância-hereditários, foi determinada por Korach, Peled e Rotics [13] que mostraram que a condição triangular além de ser necessária também era suficiente para um grafo distância-hereditário ser equiestável. Outros resultados sobre esse tema também incluem o reconhecimento em tempo polinomial dos grafos equiestáveis restritos à classe dos grafos distância-hereditários.

**Definição 5.2.** Um grafo é *distância-hereditário* se, para qualquer subgrafo conexo de  $G$ , as distâncias entre os vértices são preservadas.

A seguir, citamos uma caracterização dos grafos distância-hereditários, dada por Bandelt e Mulder [3], que será utilizada na prova da suficiência da condição triangular para a caracterização de um grafo que é tanto distância-hereditário quanto equiestável.

**Teorema 5.2** (Bandelt e Mulder [3]). *Um grafo  $G$  é distância-hereditário se, e somente se,  $G$  pode ser construído a partir do  $K_1$  por uma sucessão de operações de adição de vértice folha ou vértice gêmeo.*

**Teorema 5.3** (Korach, Peled e Rotics [13]). *Se  $G$  é distância-hereditário e triangular, então  $G$  é gpg.*

*Demonstração.* Por indução em  $n$ . O grafo trivial é distância-hereditário, triangular e gpg. Seja  $G$  um grafo distância-hereditário e triangular com  $n > 1$  vértices. Pela hipótese de indução, todo grafo distância-hereditário e triangular com menos de  $n$  vértices é grafo de partição geral.

Como  $G$  é distância-hereditário, temos que  $G$  possui um vértice  $v$  que possui um vértice gêmeo ou folha. No caso em que  $v$  possui um vértice gêmeo  $u$ , considere  $G - u$ . Sabemos que  $G - u$  é distância-hereditário (Teorema 5.3), triangular (Corolário 3.13) e, pela hipótese de indução, gpg. Como adicionar um vértice gêmeo a um gpg produz um novo gpg (Corolário 3.12), temos que  $G$  é gpg.

Vamos supor então que  $v$  possui um vértice folha  $f$ . Novamente, temos que  $G - f$  é distância-hereditário, triangular e, pela hipótese de indução, gpg. Queremos mostrar então que  $G$  é gpg. Para tal, observe que  $\{v, f\}$  é uma clique forte e, considere  $\mathcal{C}$  uma cobertura por cliques fortes de  $G - f$ . Vamos mostrar que  $\forall C \in \mathcal{C}$ ,  $C$  continua sendo clique forte em  $G$ .

Seja  $C \in \mathcal{C}$  e  $S$  um CIM em  $G$ . Vamos supor que  $v \notin C$ . Se  $f \notin S$ , então  $S$  é um CIM de  $G - f$  e portanto,  $S$  possui interseção não vazia com  $C$ . Já no caso em que  $f \in S$ , considere  $S' = S \setminus \{f\}$ . Sabemos que ou  $S'$  ou  $S' \cup \{v\}$  é um CIM de

$G - f$  e como  $v \notin C$ , temos que em ambos os casos  $S'$  possui interseção não vazia com  $C$ , implicando que o mesmo ocorre com  $S$ .

Portanto, vamos considerar agora o caso em que  $v \in C$  e mostrar, por contradição, que  $C$  é uma clique forte em  $G$ . Supondo que  $C$  não é uma clique forte em  $G$ , temos que existe  $S$  um CIM em  $G$  que possui interseção vazia com  $C$ . Como  $v \in C$  e  $C \cap S = \emptyset$ , concluímos que  $f \in S$ . Vamos olhar então para  $S' = S \setminus \{f\}$ . Sabemos que  $S'$  é um conjunto independente em  $G - f$  que possui interseção vazia com  $C$ , o que implica em  $S'$  não ser um CIM em  $G - f$ . A única maneira de estender  $S'$  para um CIM em  $G - f$  é adicionando  $v$  a  $S'$ , portanto  $S' \cup \{v\}$  é um CIM em  $G - f$ .

Pelo fato de  $G$  ser conexo, possuir mais de um vértice e  $f$  não ser gêmeo de  $v$ , temos que existe  $u \in C, u \neq v$ . Além disso, como  $S$  é um CIM em  $G$  e possui interseção vazia com  $C$ , temos que todos os vértices de  $C \setminus \{v\}$  possuem um vizinho em  $S$ . Dessa forma, considere  $s$  um vértice de  $S$  adjacente a  $u$ . Observe que  $G[\{s, u, v, f\}] \simeq P_4$ . Além disso,  $S$  é uma testemunha de que o  $P_4$   $suvf$  é ruim pois nenhum outro vértice de  $S$ , exceto por  $f$ , é adjacente a  $v$ , o que implica em  $S \cap (N(u) \cap N(v)) = \emptyset$ .  $\square$

**Corolário 5.4.** *Para um grafo distância-hereditário  $G$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é triangular;
2.  $G$  é equiestável;
3.  $G$  é fortemente equiestável;
4.  $G$  é de partição geral.

Em relação ao seu reconhecimento, Korach et al. [13] exibem um algoritmo que reconhece um grafo distância-hereditário equiestável em tempo  $O(n^3m)$ , basicamente o algoritmo funciona da seguinte maneira: em cada operação de adição de vértice folha  $f$  feita durante a criação de um grafo distância-hereditário  $G$ , o algoritmo testa todos os  $P_4$ 's possuindo um extremo em  $f$  no grafo formado até o momento e verifica se houve a formação de um  $P_4$  ruim ou não. Havendo a formação de um  $P_4$  ruim, esse  $P_4$  é marcado como ruim no grafo  $G$  e podemos concluir que o grafo não é triangular e portanto, não é equiestável e nem de partição geral.

### 5.3 Grafos simpliciais

Nesta seção apresentamos uma caracterização dos grafos simpliciais equiestáveis/de partição geral feita por Levit e Milanič [14]. No mesmo artigo, além da caracterização dessa classe de grafos, Levit e Milanič também exibem três famílias infinitas de grafos que pertencem à classe dos grafos aresta simpliciais.

**Definição 5.3.** Um grafo é *simplicial* se todo vértice está contido em uma clique simplicial, e *aresta simplicial* se toda aresta está em uma clique simplicial.

Como consequência da definição temos que todo grafo aresta simplicial é gpg.

**Teorema 5.5** (Levit e Milanič [14]). *Todo grafo simplicial triangular é aresta simplicial.*

*Demonstração.* Vamos supor que  $G$  é um grafo simplicial triangular que não é aresta simplicial, ou seja,  $G$  possui uma aresta  $uv$  onde nenhum vértice de  $N(u) \cap N(v)$  é simplicial. Por  $G$  ser simplicial, temos que  $u$  é vizinho de um vértice simplicial  $u'$  e  $v$  é adjacente a um vértice simplicial  $v'$ . Como nenhum vértice de  $N(u) \cap N(v)$  é simplicial, temos que  $u' \neq v'$  e além disso, os vértices  $\{u', u, v, v'\}$  induzem um  $P_4$  em  $G$ .

Considere então  $S$  um CIM de  $G$  contendo  $u'$  e  $v'$ . Como  $G$  é triangular, temos que existe um vértice  $s_1 \in N(u) \cap N(v)$  em  $S$ . Como  $s_1$  não é simplicial, temos que  $s_1$  é adjacente a um vértice simplicial  $t'_1$ . Além disso, como  $t'_1$  é simplicial, temos que o único vértice de  $S$  adjacente a  $t'_1$  é  $s_1$  e portanto,  $S \setminus \{s_1\} \cup \{t'_1\}$  é um conjunto independente em  $G$ . Considere então,  $S'$  um CIM de  $G$  contendo  $\{u', v', t'_1\}$ . Aplicando o mesmo argumento repetidas vezes, é possível criar uma sequência infinita de vértices  $s_i$ 's distintos, uma contradição.  $\square$

**Corolário 5.6.** *Para um grafo simplicial  $G$ , as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $G$  é equiestável;
2.  $G$  é triangular;
3.  $G$  é aresta simplicial;
4.  $G$  é de partição geral;
5.  $G$  é fortemente equiestável.

O reconhecimento de um grafo simplicial pode ser feito em tempo  $O(mn)$  [5] através de um algoritmo que produz uma lista dos vértices simpliciais e suas cliques maximais correspondentes. Como, a partir dos vértices simpliciais, verificar se cada aresta está em uma clique simplicial pode ser feito em tempo  $O(mn)$ , temos que o reconhecimento de um grafo equiestável/de partição geral simplicial pode ser feito em tempo  $O(mn)$ .

## 5.4 Grafos linha

Uma caracterização bastante recente, Levit e Milanič [14] mostraram que todo grafo linha triangular é um grafo de partição geral. No mesmo trabalho, eles também forneceram um algoritmo polinomial para o reconhecimento dos grafos linha equiestáveis/de partição geral e exibiram três famílias infinitas de grafos linhas equiestáveis/de partição geral duas das quais são:  $\{L(K_{2n}) : n \geq 1\}$  e  $\{L(K_{n,n}) : n \geq 1\}$ .

Relembrando, um grafo  $G$  é linha se existe um grafo  $H$  de forma que  $G$  é o grafo de interseção das arestas de  $H$ . Nesse caso,  $H$  é dito grafo raiz de  $G$  e dizemos que  $G = L(H)$ .

**Teorema 5.7** (Levit e Milanič [14]). *Toda aresta de um grafo linha triangular está contida em uma clique forte.*

*Demonstração.* Seja  $G = L(H)$  um grafo linha triangular onde  $G = (V_G, E_G)$  e  $H = (V_H, E_H)$ . Vamos supor que existe  $e_1e_2 \in E_G$  tal que  $\{e_1, e_2\}$  não está contido em nenhuma clique forte. Pela construção de  $G$  temos que existem os vértices  $x, y, z$  em  $V_H$  de forma que  $e_1 = xy$  e  $e_2 = yz$ .

Considere agora  $C$  uma clique maximal de  $G$  contendo todos os vértices de  $G$  que correspondem a uma aresta em  $H$  com um dos extremos em  $y$ . Como a aresta  $e_1e_2$  está nessa clique, temos que  $C$  não é uma clique forte. Logo, existe  $e_3 \in V_G$  de forma que  $e_3$  corresponde à aresta  $xz$  em  $G$ . Como  $C$  é maximal, temos que existe  $e_4 \in C$  de forma que  $e_4$  não é adjacente a  $e_3$ . O que, traduzindo para  $H$ , implica em existir um vértice  $u$  de forma que  $u$  é adjacente a  $y$ ,  $e_4 = uy$ , mas não a  $x$  e nem  $z$ .

Seja  $S$  um CIM em  $G$  tal que a interseção com  $C$  seja vazia. Como  $G$  é triangular e  $e_2 = yz$  e  $e_4 = uy$  estão em  $C$ , temos que existe um vértice  $e_s$  em  $S$  que é vizinho tanto de  $e_2 = yz$  quanto de  $e_4 = uy$ . Logo  $e_s$  corresponde em  $H$  a uma aresta com um dos extremos em  $y$  o que implica em  $e_s \in C$ , uma contradição.  $\square$

**Corolário 5.8.** *Para um grafo linha  $G$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é triangular;
2. Toda aresta de  $G$  está contida em uma clique forte;
3.  $G$  é de partição geral;
4.  $G$  é equiestável;
5.  $G$  é fortemente equiestável.

Buscando um algoritmo de reconhecimento para a classe dos grafos linha equiestáveis, Levit e Milanič [14] derivaram outras condições equivalentes às apresentadas no Corolário 5.8, obtendo o seguinte: Toda aresta de  $G = L(H)$  está contida em



uma clique forte se, e somente se, para todo vértice  $v$  de  $H$  que não possui em sua vizinhança fechada uma folha, o grafo induzido pelas arestas que não possuem  $v$  como um extremo porém tendo como extremo algum vizinho de  $v$ , não possui nenhum emparelhamento  $M$  de forma que a vizinhança de  $v$  esteja coberta pelo emparelhamento e tamanho de  $M$  seja maior que 1.

O algoritmo proposto para o reconhecimento dos grafos linha triangulares testa essa condição para todos os vértices que não possuem em sua vizinhança fechada uma folha. Por fim, Levit e Milanič [14] mostraram que tal procedimento pode ser feito em tempo  $O(n^2 \log n \sqrt{n\alpha(n, 2n) \log n})$  onde  $\alpha(., .)$  é a função inversa de Ackermann.

## 5.5 Grafos muito bem cobertos

Nesta seção, vemos uma caracterização dos grafos equiestáveis/de partição geral apresentada por Levit e Milanič [14] na qual mostraram que para um grafo muito bem coberto, a condição triangular é suficiente para o grafo ser de partição geral.

**Definição 5.4.** Um grafo é *bem coberto* se todos os seus CIMs possuem mesma cardinalidade.

**Definição 5.5.** Um grafo é *muito bem coberto* se todos os seus CIMs possuem exatamente metade dos vértices do grafo.

Como todo grafo bem coberto, uma superclasse de muito bem coberto, pode ser transformado em um grafo muito bem coberto, através da adição de vértices isolados, quando nos referirmos à grafos muito bem cobertos, estamos nos referindo à grafos sem vértices isolados.

**Definição 5.6.** Um emparelhamento  $M$  satisfaz a *propriedade P* se para toda aresta  $uv \in M$ ,  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ , e  $N(u) \setminus \{v\}$  é adjacente a todos os vértices de  $N(v) \setminus \{u\}$ .

**Teorema 5.9** (Favaron [9]). *Para todo grafo  $G$ , as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $G$  é muito bem coberto;
2. Existe um emparelhamento perfeito em  $G$  que satisfaz a propriedade  $P$ ;
3. Existe pelo menos um emparelhamento perfeito em  $G$ , e todo emparelhamento perfeito em  $G$  satisfaz a propriedade  $P$ .

Observe que todo vértice de um grafo muito bem coberto está em uma clique forte uma vez que, pelo teorema anterior, todo grafo muito bem coberto possui um emparelhamento perfeito que satisfaz a a propriedade  $P$  e, devido à essa propriedade, os extremos de cada aresta do emparelhamento perfeito formam uma clique forte.

**Teorema 5.10** (Levit e Milanič [14]). *Todo grafo conexo triangular muito bem coberto é tal que todas as suas arestas estão em um emparelhamento perfeito.*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo triangular muito bem coberto. Vamos supor que existe uma aresta  $uv$  que não está em nenhum emparelhamento perfeito do grafo. Considere  $M$  um emparelhamento perfeito do grafo,  $u'$  o vértice emparelhado com  $u$  em  $M$  e  $v'$  o vértice emparelhado com  $v$  em  $M$ . Sabemos que os vértices  $\{u', u, v, v'\}$  induzem um  $P_4$  em  $G$  pois  $u'v' \notin E$ , uma vez que caso contrário  $uv$  estaria em um emparelhamento perfeito em  $G$ , e, pelo Teorema 5.9,  $M$  satisfaz a propriedade  $P$ , o que implica nos dois extremos de uma aresta emparelhada não possuírem um vizinho em comum.

Considere então  $S$  um CIM em  $G$  contendo  $u'$  e  $v'$ . Como  $G$  é triangular existe  $s \in S$  de forma que  $s$  é adjacente a ambos  $u$  e  $v$ . Seja  $t'$  o vértice emparelhado com  $s$  em  $M$ . Novamente, pela propriedade  $P$ , temos que  $t'$  não é adjacente nem a  $u$  e nem a  $v$ . Além disso, se  $u't' \in E$  então, também por  $P$ , teríamos que  $uv \in E$ , uma contradição. De forma análoga, temos que  $v't' \notin E$ . Logo,  $\{u', v', t'\}$  é um conjunto independente.

Seja  $S'$  um CIM em  $G$  contendo  $\{u', v', t'\}$ , utilizando o argumento anterior sempre é possível concluir a existência de um novo vértice na vizinhança em comum de  $u$  e  $v$  implicando que  $N(u) \cap N(v)$  possui tamanho infinito, uma contradição.  $\square$

**Corolário 5.11.** *Para um grafo muito bem coberto  $G$ , as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $G$  é equiestável;
2.  $G$  é triangular;
3. Toda aresta de  $G$  está contida em um emparelhamento perfeito;
4.  $G$  é sem  $K_3$  e sem  $P_4$ ;
5. Todo componente conexo de  $G$  é um grafo bipartido completo;
6. Toda aresta de  $G$  forma uma clique forte;
7.  $G$  é de partição geral;
8.  $G$  é fortemente equiestável.

Como verificar se todo componente conexo de  $G$  é um grafo bipartido completo pode ser feito em tempo  $O(m+n)$  usando uma busca em largura, temos que o reconhecimento dos grafos muito bem cobertos equiestáveis pode ser feito em tempo  $O(m+n)$ .

Com relação aos grafos bem cobertos, caracterizar os grafos que também são equiestáveis/de partição geral continua um problema em aberto, porém para responder tal questão uma abordagem diferente é necessária uma vez que temos que nesse caso, a condição triangular não é suficiente para garantir que o grafo é de partição geral. Repare que o grafo ilustrado na Figura 5.1, apresentado no Capítulo 2, satisfaz a condição triangular e é bem coberto porém não é um grafo de partição geral.

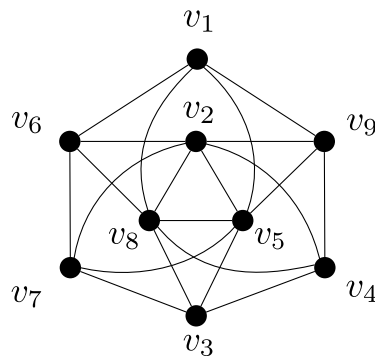


Figura 5.1: Grafo bem coberto triangular que não é de partição geral.

## 5.6 Grafos planares

Nesta seção, caracterizamos os grafos planares que são equiestáveis/de partição geral, generalizando o resultado de Mahadev et al. [15] sobre os grafos outerplanares. Para tal, mostramos que a condição triangular é suficiente para que um grafo planar seja de partição geral, uma questão até então em aberto proposta por Anbeek et al. [2].

**Definição 5.7.** Um grafo é *planar* se ele possui uma representação no plano em que não há cruzamento de arestas.

**Teorema 5.12** (Kuratowski [4]). *Um grafo  $G$  é planar se, e somente se,  $G$  não possui subdivisão do  $K_5$  ou do  $K_{3,3}$ .*

**Teorema 5.13.** *Se  $G$  é planar e triangular, então  $G$  é gpg.*

*Demonstração.* Vamos supor, por contradição, que existe em  $G$  uma aresta  $xy$  que não está em nenhuma clique forte, ou seja, toda clique maximal que contém  $x, y$  não é forte.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $xy$  é um aresta que está na face externa. Seja  $N(x) \cap N(y) = \{v_1, \dots, v_t\}$ , onde  $t = |N(x) \cap N(y)|$ . Considere uma representação planar de  $G$  de maneira que para cada  $j$ , os vértices  $\{v_1, \dots, v_{j-1}\}$  estão contidos no interior da região do plano definida pelo ciclo  $xyv_j$ .

Uma observação muito importante é que devido à representação planar que estamos considerando, a vizinhança de  $v_j$  se encontra distribuída no interior da região fechada compreendida pelo ciclo  $xv_{j-1}yv_j$  e no interior da região fechada compreendida pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$ , para  $1 < j < |N(x) \cap N(y)|$ . Isso ocorre uma vez que  $v_j$  está no interior da região delimitada pelo ciclo  $xv_{j-1}yv_{j+1}$ . No caso  $j = |N(x) \cap N(y)|$ , a vizinhança de  $v_j$  está distribuída no interior da região fechada compreendida pelo ciclo  $xv_{j-1}yv_j$  e no exterior da região fechada compreendida pelo ciclo  $xv_1yv_j$ . Já no caso  $j = 1$ , a vizinhança de  $v_j$  se encontra distribuída no interior da região fechada compreendida pelo ciclo  $xv_1y$  e no interior da região fechada compreendida pelo ciclo  $xv_1yv_2$ .

Vamos denotar por  $C_1, C_2, \dots, C_k$  as cliques maximais que contém  $x$  e  $y$ . No caso em que  $C_i$  possui tamanho 3, temos que  $C_i = \{x, y, v_j\}$ . Já quando  $C_i$  possui tamanho 4, sabemos que  $C_i = \{x, y, v_j, v_{j+1}\}$ .



Figura 5.2: Notação para a clique  $C_i$ .

Como  $C_i$  não é clique forte temos que existe  $S \in \mathcal{S}_G$  tal que  $C_i \cap S = \emptyset$ . Além disso, como  $G$  é triangular, temos que existe em  $S$  um vértice adjacente a ambos os extremos da aresta  $xv_j$  e  $yv_j$ . Vamos chamá-los de  $a_i$  e  $b_i$ , respectivamente. Repare que no caso em que  $C_i = \{x, y, v_j\}$ ,  $a_i \neq b_i$  uma vez que  $C_i$  é maximal. Já quando  $C_i = \{x, y, v_j, v_{j+1}\}$ ,  $a_i$  e  $b_i$  podem ser iguais. No caso em que  $C_i$  tem tamanho 4, também temos que existe em  $S$  um vértice  $m_i$  adjacente a ambos os extremos da aresta  $v_jv_{j+1}$ . Por último, vamos chamar  $v_{a_i}$ , um vértice que é vizinho de  $v_j$  e  $a_i$  e, é diferente de  $x$  ou qualquer  $v_l$ ,  $1 \leq l \leq |N(x) \cap N(y)|$ . Analogamente  $v_{b_i}$  será um vértice que é adjacente a  $v_j$  e  $b_i$  e é diferente de  $y$  ou qualquer  $v_l$ ,  $1 \leq l \leq |N(x) \cap N(y)|$ .

Desejamos mostrar que existe um conjunto independente  $S$  formado apenas por elementos  $a$ 's,  $b$ 's,  $v_a$ 's,  $v_b$ 's e  $m$ 's onde para cada  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq |N(x) \cap N(y)|$ , temos que existe algum  $a_i, b_i, v_{a_i}, v_{b_i}$  ou  $m_i \in S$  que é adjacente a  $v_j$  e além disso, para algum par  $r, s$ ,  $1 \leq r, s \leq k$ ,  $a_r, b_s \in S$ .

Se tal conjunto existir, podemos estendê-lo para um CIM  $S'$  em  $G$  e obter um conjunto independente maximal que possui interseção vazia com todas as cliques maximais que contém  $x$  e  $y$ . Logo, nenhum vértice de  $S'$  é adjacente a ambos os extremos da aresta  $xy$  e portanto  $G$  não é triangular, uma contradição.

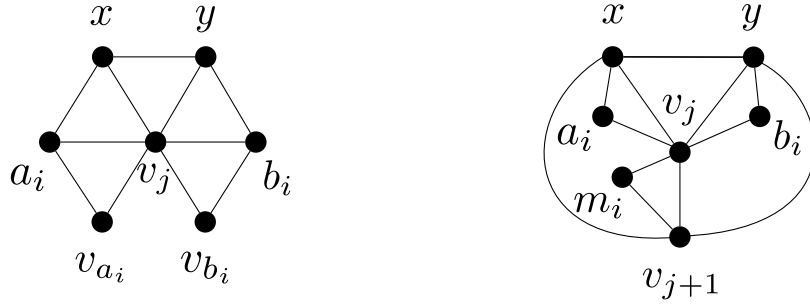


Figura 5.3: Notação para alguns vértices relacionados à  $C_i$ .

Vamos demonstrar que  $S$  existe por indução em  $k$ , o número de cliques maximais que possuem ao mesmo tempo  $x$  e  $y$ . Para tal, vamos mostrar que para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , existe  $S_i$  formado apenas por elementos  $a$ 's,  $b$ 's,  $v_a$ 's,  $v_b$ 's e  $m$ 's onde para cada  $v_j \in \cup_{l=1}^i \{v | v \in \{v_1, \dots, v_{|N(x) \cap N(y)|}\} \cap C_l\}$ , temos que existe algum  $a_i, b_i, v_{a_i}, v_{b_i}$  ou  $m_i \in S$  que é adjacente a  $v_j$  e além disso, para algum par  $r, s$ ,  $1 \leq r, s \leq i$ ,  $a_r, b_s \in S$ .

Sabemos que  $C_1$  possui tamanho 3 ou 4. No primeiro caso, construímos  $S_1$  como  $\{a_1, b_1\}$  e no segundo como  $\{a_1\} \cup \{b_1\} \cup \{m_1\}$ . Lembrando que quando  $C_1 = \{x, y, v_1, v_2\}$ ,  $a_1$  ou  $b_1$  podem ser iguais a  $m_1$  porém,  $a_1$  não pode ser igual a  $b_1$  uma vez que, por construção, não existe nenhuma outra clique maximal contendo  $x, y$  no interior do ciclo  $x, y, v_2$ .

Vamos supor que existe  $S_i$  para  $1 \leq i < k$ . Queremos mostrar que a partir de  $S_i$  conseguimos obter  $S_{i+1}$ . Para isso, vamos dividir em dois casos:  $C_{i+1} \setminus \{x, y\} \cap C_i \neq \emptyset$  e  $C_{i+1} \setminus \{x, y\} \cap C_i = \emptyset$ .

*Caso 1:*  $C_{i+1} \setminus \{x, y\} \cap C_i = \emptyset$

Se  $C_{i+1} = \{x, y, v_j, v_{j+1}\}$ , construímos  $S_{i+1}$  adicionando  $m_{i+1}$  à  $S_i$ . Como todos os vértices de  $S$  estão no interior do ciclo  $x, y, v_j$ , temos que nenhum vértice de  $S_i$  é adjacente a  $m_{i+1}$  e, portanto,  $S_{i+1}$  é um conjunto independente.

Já quando  $|C_{i+1}| = 3$  e  $|C_i| = 4$ , basta adicionar  $a_{i+1}$  e  $b_{i+1}$  à  $S_i$  para formarmos  $S_{i+1}$ .

Portanto, vamos assumir que  $|C_{i+1}| = 3$  e  $|C_i| = 3$ , ou seja,  $C_i = \{x, y, v_j\}$  e  $C_{i+1} = \{x, y, v_{j+1}\}$ .

Vamos denotar por  $S'_i$  o conjunto dos vértice de  $S_i$  que estão no interior da região compreendida pelo ciclo  $xyv_jv_{j+1}$ .

Se existir algum vértice em  $S_i$  adjacente a  $v_j$  no interior da região compreendida pelo ciclo  $xyv_j$ , sabemos que  $S_i \setminus S'_i \cup \{a_{i+1}, b_{i+1}\}$  é um conjunto independente com as propriedades que queríamos para  $S_{i+1}$ . Portanto, vamos assumir que todo vértice de  $S_i$  que é vizinho de  $v_j$  está no interior da região formada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$ .

Além disso, se pelo menos um dentre  $a_{i+1}, b_{i+1}$ , digamos  $a_{i+1}$ , se encontrar no

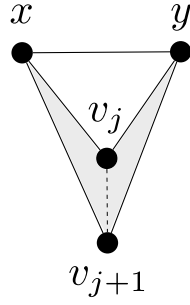


Figura 5.4:  $S'_i$  consiste nos vértices de  $S_i$  que estão na região cinza.

exterior da região determinada pelo ciclo  $xyv_{j+1}$  então sabemos que  $S_i \cup \{a_{i+1}\}$  é um conjunto independente uma vez que, pela nossa representação planar, todos os vértices de  $S_i$  se encontram no interior da região compreendida pelo ciclo  $xv_1yv_{j+1}$ . Logo, também podemos assumir que  $a_{i+1}$  e  $b_{i+1}$  estão no interior da região formada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$ .

Se  $a_i, b_i \notin S_i$  temos, pela hipótese de indução, que  $v_{a_i}$  ou  $v_{b_i}$  estão em  $S_i$ . Porém, devido à construção de  $S_i$ , temos que nunca ocorre o caso em que  $v_{a_i}$  e/ou  $v_{b_i}$  está em  $S_i$  e no interior da região formada pelo ciclo  $xyv_{j+1}$ . É importante observar que isso não significa que podemos retirar todos os  $va$ 's e  $vb$ 's de  $S_i$ . Como podemos ver no exemplo abaixo, é necessário o uso de  $va_3$  ou  $vb_3$  para construir  $S_3$ .

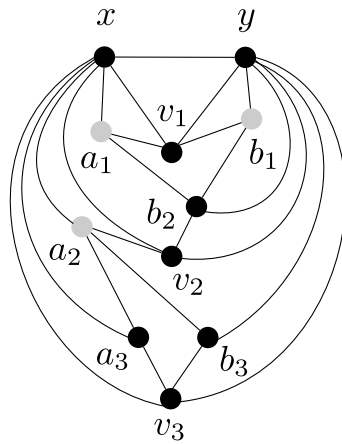


Figura 5.5: Exemplo em que é necessário o uso de  $va_3$  ou  $vb_3$ . Os vértices em cinza formam um exemplo de conjunto  $S_2$ .

Portanto, vamos assumir spg que  $a_i \in S_i$ . Caso  $a_{i+1} = a_i$ , temos que  $S_{i+1} = S_i$  uma vez que  $S_i$  já cobre  $v_{j+1}$ . Logo, podemos assumir também que  $a_i \neq a_{i+1}$ . Já quando  $b_{i+1} = b_i$ , sabemos que  $b_i$  está no interior da região formada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$  e construímos  $S_{i+1}$  como  $S_i \setminus S'_i \cup \{a_i, b_i\}$ .

Então, até o momento, temos que  $a_i \neq a_{i+1}$  e  $b_i \neq b_{i+1}$ . Para prosseguirmos vamos dividir em dois subcasos:

- a.  $b_i$  está no interior da região determinada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$ ;

b.  $b_i$  está no exterior da região formada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$ .

*Caso 1.a:  $b_i$  está no interior da região fechada determinada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$*

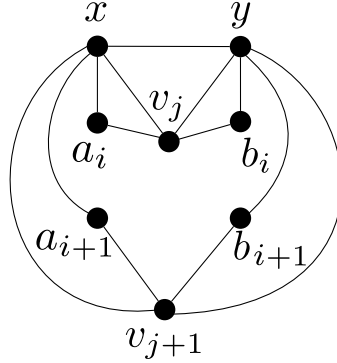


Figura 5.6: Representação do caso 2a.

Podemos supor spg que  $a_i, b_i \in S_i$ . Nesse caso sabemos que não podem existir as arestas  $a_i b_{i+1}$  e  $a_{i+1} b_i$  simultaneamente uma vez que teríamos uma subdivisão do  $K_{3,3}$  formada pelos vértices  $\{a_i, b_i, v_{j+1}, a_{i+1}, b_{i+1}, v_j, x, y\}$ . Dessa forma, temos que pelo menos um dentre  $S_i \setminus \{b_i\} \cup \{b_{i+1}\}$  e  $S_i \setminus \{a_i\} \cup \{a_{i+1}\}$  é um conjunto com as propriedades que desejamos para  $S_{i+1}$ .

*Caso 1.b:  $b_i$  está no exterior da região fechada formada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$*

Se pelo menos um dentre  $a_{i+1}$  e  $b_{i+1}$  não for vizinho de  $a_i$ , obtemos  $S_{i+1}$  adicionando a  $S_i$  o vértice que não é adjacente a  $a_i$ . Portanto vamos supor que ambos são adjacentes a  $a_i$ .

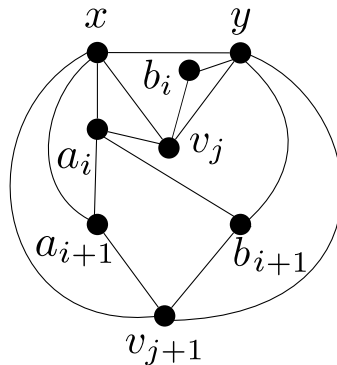


Figura 5.7: Representação do caso 2b quando  $a_i$  é adjacente a  $a_{i+1}$  e  $b_{i+1}$ .

Considere então o conjunto  $\{y, a_i\}$  e estenda-o para um CIM  $S$ . Sabemos que  $a_{i+1}$  e  $v_{j+1}$  não estão em  $S$  uma vez que  $a_{i+1}$  é adjacente a  $a_i$  e  $v_{j+1}$  é adjacente a  $y$ . Como o grafo é triangular existe algum vértice  $v_{a_{i+1}}$  em  $S$  que é adjacente a ambos os extremos da aresta  $a_{i+1}v_{j+1}$  e que não é adjacente a  $a_i$  e nem a  $y$ . Além disso,

como  $v_{a_{i+1}}$  é vizinho de  $a_{i+1}$  que está no interior da região determinada pelo ciclo  $xv_jyv_{j+1}$ , temos que  $v_{a_{i+1}}$  está no interior da mesma região. Portanto, nesse caso, construímos  $S_{i+1}$  como  $S_i \cup \{v_{a_{i+1}}\}$ .

*Caso 2:*  $C_{i+1} \setminus \{x, y\} \cap C_i \neq \emptyset$

Se  $C_{i+1} \setminus \{x, y\} \cap C_i = \{v_j\}$  então  $C_i$  e  $C_{i+1}$  são cliques de tamanho 4 uma vez que elas são maximais. Dessa forma, podemos concluir que todos os vértices de  $S_i$  estão na região interior ao ciclo  $x, y, v_j$ . O que implica em nenhum vértice de  $S_i$  ser adjacente a  $m_{i+1}$ . Portanto, basta adicionar  $m_{i+1}$  à  $S_i$  para obtermos  $S_{i+1}$ .  $\square$

**Corolário 5.14.** *Para um grafo planar  $G$ , temos que as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $G$  é triangular;
2.  $G$  é equiestável;
3.  $G$  é fortemente equiestável;
4.  $G$  é de partição geral.

Com relação ao reconhecimento dos grafos planares, Kloks et al. [11] apresentam um algoritmo que verifica, em tempo polinomial, se um grafo planar satisfaz a condição triangular. Dessa forma, temos que o reconhecimento dos grafos planares equiestáveis/de partição geral pode ser feito em tempo polinomial.

Em resumo, todas as classes de grafos apresentadas nesse capítulo são tais que a condição triangular é suficiente para que cada uma dessas classes esteja contida na classe dos grafos de partição geral, implicando na conjectura de Orlin ser válida quando restrita a essas classes. Além disso, para as classes cobertas - cordais, simpliciais, linha, muito bem cobertos e planares - temos que existem algoritmos polinomiais para o reconhecimento da interseção dessas classes com a classe dos grafos equiestáveis/de partição geral.



# Capítulo 6

## Comentários finais e trabalhos futuros

Neste trabalho reunimos os principais resultados estruturais sobre grafos equiestáveis e de partição geral, fornecemos provas alternativas para resultados conhecidos e apresentamos resultados novos.

Com relação às provas alternativas, em alguns casos, lemas foram desenvolvidos visando uma prova mais simples do que a original (Lemas 3.22 e 4.2), em outros casos foi possível simplificar a prova inteira ou apenas parte dela devido a um ou mais resultados da literatura posterior, como por exemplo nos Teoremas 2.11 e 5.3, respectivamente. Além disso, também foi possível simplificar outras demonstrações através dos resultados desenvolvidos neste trabalho, como explicaremos mais a frente.

Como resultados novos, mostramos que tanto a classe dos grafos de partição geral quanto a classe dos grafos triangulares são fechadas para as operações de indução e contração de módulo (Teoremas 3.1 e 3.2) e de substituição (Teoremas 3.7 e 3.8). Em particular, diversos resultados da literatura se tornaram corolários desses teoremas (Corolários 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 4.7 e 4.9).

Também provamos que ao remover um vértice de vizinhança não minimal de um grafo triangular, o grafo continua satisfazendo a condição triangular (Proposição 3.18).

Com relação à decomposição split, demonstramos que os fatores de uma decomposição split tanto de um grafo de partição geral quanto de um grafo equiestável permanecem na mesma classe do grafo ao qual foi aplicada a decomposição (Teoremas 3.19 e 3.20, respectivamente) e que a recíproca não é verdadeira.

Mostramos que a construção por clique forte sugerida para grafos equiestáveis, também pode ser usada para grafos de partição geral (Teorema 3.21).

Por fim, generalizamos o resultado de Mahadev et al. [15] além de responder a uma questão em aberto proposta por Anbeek et al. [2], ao mostrar que a condição

triangular é suficiente para um grafo planar ser um grafo de partição geral, implicando assim que ela é tanto necessária quanto suficiente para um grafo planar ser equiestável/fortemente equiestável e de partição geral (Teorema 5.13).

Por ser um tema de estudo que ganhou um maior impulso nos últimos anos, diversas questões vêm sendo propostas com relação às classes dos grafos equiestáveis e de partição geral. Além disso, algumas das questões propostas nos artigos iniciais permaneceram em aberto. Dentre os problemas encontrados na literatura, ressaltamos o de descobrir se a classe dos grafos equiestáveis é fechada ou não pela operação de substituição e o de verificar a Conjectura 2.3, que diz que todos os grafos equiestáveis são grafos fortemente equiestáveis.

Continuando o estudo no tema dessa dissertação, sugerimos como trabalhos futuros:

- Verificar se algum contraexemplo da Conjectura 2.13 pode ser usado para mostrar que os grafos equiestáveis não são fechados pela operação de substituição ou adição de gêmeo verdadeiro (Talvez uma resposta negativa possa ser encontrada apesar disto não ser intuitivo.);
- Elaborar algoritmos de reconhecimento para as classes dos grafos de partição geral e equiestáveis;
- Estudar a interseção da classe dos grafos equiestáveis/de partição geral com a dos grafos sem  $K_{1,3}$ , uma superclasse dos grafos linha (Esse problema foi sugerido por Levit e Milanič [14] e suspeitamos ser uma direção promissora.);
- Investigar as questões propostas no recente trabalho de Milanič et al. [20].

# Referências Bibliográficas

- [1] L. ALCÓN, M. GUTIERREZ, I. KOVÁCS e M. MILANIČ. EPT equistable graphs. A ser publicado em 2014+.
- [2] C. ANBEEK, D. DETEMPLE, K. MCAVANEY e J. ROBERTSON. When are chordal graphs also partition graphs? *Australasian Journal of Combinatorics*, v. 16, pp. 285–294, 1997.
- [3] H.-J. BANDELT e H. M. MULDER. Distance-hereditary graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 41, pp. 182–208, 1986.
- [4] J. A. BONDY e U. MURTY. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [5] G. A. CHESTON e T. S. JAP. A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and middle graphs. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, v. 10, pp. 159–190, 2006.
- [6] D. DETEMPLE, F. HARARY e J. ROBERTSON. Partition graphs. *Soochow Journal of Mathematics*, v. 13, pp. 121–129, 1987.
- [7] D. DETEMPLE, K. MCAVANEY e J. ROBERTSON. A characterization and hereditary properties for partition graphs. *Discrete Mathematics*, v. 113, pp. 131–142, 1993.
- [8] D. DETEMPLE, M. DINEEN, J. ROBERTSON e K. MCAVANEY. Recent examples in the theory of partition graphs. *Discrete Mathematics*, v. 113, n. 1–3, pp. 255 – 258, 1993.
- [9] O. FAVARON. Very well covered graphs. *Discrete Mathematics*, v. 42, n. 2–3, pp. 177 – 187, 1982.
- [10] J. KELLEY. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975.
- [11] T. KLOKS, C.-M. LEE, J. LIU e H. MÜLLER. On the recognition of general partition graphs In: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, v. 2880, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 273–283, 2003.

- [12] E. KORACH e U. N. PELED. Equistable series-parallel graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 132, pp. 149–162, 2003.
- [13] E. KORACH, U. N. PELED e U. ROTICS. Equistable distance-hereditary graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 156, pp. 462–477, 2008.
- [14] V. E. LEVIT e M. MILANIČ. Equistable simplicial, very well-covered, and line graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 165, pp. 205 – 212, 2014.
- [15] N. V. R. MAHADEV, U. N. PELED e F. SUN. Equistable graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 18, pp. 281–299, 1994.
- [16] T. A. MCKEE e F. R. MCMORRIS. *Topics in Intersection Graph Theory*. Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [17] S. MIKLAVIČ e M. MILANIČ. Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products. *Discrete Applied Mathematics*, v. 159, pp. 1148–1159, 2011.
- [18] M. MILANIČ e G. RUDOLF. *Structural Results for Equistable Graphs and Related Graph Classes*. Relatório técnico, Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University, 2009.
- [19] M. MILANIČ, J. ORLIN e G. RUDOLF. Complexity results for equistable graphs and related classes. *Annals of Operations Research*, v. 188, pp. 359–370, 2011.
- [20] M. MILANIČ, S. THOMASSÉ e N. TROTIGNON. Counterexamples to Orlin’s conjecture on equistable graphs. Disponível em <http://www.famnit.upr.si/sl/resources/files/seminars/slides-handouts.pdf>, consultado em março de 2014.
- [21] Y. L. ORLOVICH e I. E. ZVEROVICH. Independent domination in triangle graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 28, pp. 341–348, 2007.
- [22] Y. L. ORLOVICH, J. BLAZEWICZ, A. DOLGUI, G. FINKE e V. S. GORDON. On the complexity of the independent set problem in triangle graphs. *Discrete Mathematics*, v. 311, n. 16, pp. 1670–1680, 2011.
- [23] C. PAPADIMITRIOU e K. STEIGLITZ. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Books on Computer Science Series. Dover Publications, 1998.

- [24] C. PAYAN. A class of threshold and domishold graphs: equistable and equidominating graphs. *Discrete Mathematics*, v. 29, pp. 47–52, 1980.
- [25] U. N. PELED e U. ROTICS. Equistable chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 132, pp. 203–210, 2004.
- [26] D. SEINSCHKE. On a property of the class of  $n$ -colorable graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 16, n. 2, pp. 191 – 193, 1974.