



## SOBRE $L(2,1)$ -COLORAÇÕES DE CLASSES DE GRAFOS

Daniel Fabio Domingues Posner

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro  
Agosto de 2014

SOBRE  $L(2,1)$ -COLORAÇÕES DE CLASSES DE GRAFOS

Daniel Fabio Domingues Posner

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Profa. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

---

Profa. Celia Picinin de Mello, D.Sc.

---

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

---

Prof. Jorge Petrúcio Viana, D.Sc.

---

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AGOSTO DE 2014

Posner, Daniel Fabio Domingues

Sobre  $L(2,1)$ -colorações de classes de grafos/Daniel Fabio Domingues Posner. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2014.

XIII, 154 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2014.

Referências Bibliográficas: p. 148 – 154.

1. Teoria dos grafos. 2. Colorações de vértices. 3. Algoritmos. 4. Complexidade. I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*À minha família, principalmente  
meus pais, Alexy e Marlene e  
meu irmão, Stephan.*

# Agradecimentos

O doutorado agregou bastante experiência tanto na minha vida profissional quanto na pessoal. Particpei de conferências com apresentação de trabalhos, onde tive oportunidade de conversar com profissionais reconhecidos e realizar pesquisas com pessoas como o Prof. Rudini Sampaio (UFC), Prof. Daniel Ratton (UFRJ) e Prof. Mario Valencia-Pabón (Université Paris XIII). Outro fato importante que me deixou muito feliz foi ter ganho o prêmio de segunda melhor dissertação de mestrado em computação no CTD 2010 - Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. E, ter tido a oportunidade de coorientar o aluno de Iniciação Científica Gabriel Barros, no mesmo tema da minha dissertação de mestrado e tese de doutorado, que acabou ganhando o prêmio de Melhor Trabalho do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza na XXXIII JIC da UFRJ em 2011. Esse tipo de experiências não tem preço! Mas agradeço a bolsa de doutorado do CNPq recebida durante esse período.

Continuando, agradeço a todos os amigos do Laboratório de Algoritmos e Combinatória do PESC. Tive a oportunidade de conviver com algumas gerações de pessoas extraordinárias que passaram por lá e que de uma forma ou de outra acabaram marcando um pouco a minha vida. Deixo um agradecimento em especial a Fabiano Oliveira, Cristiane Cruz, Rodrigo Hausen, Letícia Bueno, André Korenchandler, Danilo Artigas, Luís Cunha, André Ribeiro, Roberto Simão e Paloma Lima. Também gostaria de agradecer aos professores da linha de Algoritmos e Combinatória por todo tempo e dedicação na criação desse pólo de excelência em estudos de teoria dos grafos na nossa querida UFRJ.

Por último, mas de forma nenhuma menos importante, o doutorado foi muito importante pois consegui continuar meus estudos com a minha orientadora Profa. Márcia Cerioli. Estudamos juntos há mais de dez anos, desde a minha primeira Iniciação Científica em 2002. Depois, ainda tivemos mais duas ICs (2003 e 2005), um projeto final de curso (2006) e um mestrado (2009). É inestimável toda a atenção que ela dedicou aos meus estudos e, com certeza, não teria obtido êxito sem o seu auxílio. Fico triste que essa parte da minha vida acadêmica esteja acabando, mas tenho certeza que continuaremos trabalhando juntos por vários anos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## SOBRE $L(2,1)$ -COLORAÇÕES DE CLASSES DE GRAFOS

Daniel Fabio Domingues Posner

Agosto/2014

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma  $L(2,1)$ -coloração é uma atribuição de cores (representadas por números naturais) aos vértices de um grafo onde vértices adjacentes recebem cores que diferem de pelo menos duas unidades e vértices com um vizinho em comum recebem cores diferentes. Esta é ótima quando a maior cor utilizada na atribuição é mínima, neste caso essa cor é denotada por  $\lambda$ .

Mostramos inicialmente como obter, eficientemente, uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos *split* permutação e em grafos  $(q, q - 4)$  com  $q$  fixo, adicionando essas duas classes no seletor grupo em que uma  $L(2,1)$ -coloração ótima pode ser encontrada em tempo polinomial. Realizamos então um estudo em grafos aleatórios  $G(n, p)$ , grafos com  $b$ -núcleos limitados e em grafos que são superclasse de árvores, limitando os possíveis valores para seus  $\lambda$ .

A seguir, definimos uma  $L(2,1)$ -coloração total de um grafo, apresentando uma série de resultados, desde obtenção de soluções eficientes em classes simples até a prova de  $\mathcal{NP}$ -completude na versão decisão do problema, mesmo quando a entrada é restrita a grafos bipartidos. Surpreendentemente, verificamos a existência de classes de grafos em que as complexidades computacionais da nova versão do problema diferem da versão clássica.

Ao fim, estabelecemos relações diretas entre uma  $L(2,1)$ -coloração e outras colorações de grafos, mostrando também que  $L(2,1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA é um problema  $\Pi_2^P$ -completo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## ON $L(2, 1)$ -COLORINGS OF GRAPH CLASSES

Daniel Fabio Domingues Posner

August/2014

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

An  $L(2, 1)$ -coloring is an assignment of colors (represented by natural numbers) to the vertices of a graph such that adjacent vertices receive colors that differ by at least two and vertices with a common neighbor receive different colors. Such assignment is optimum when the largest used color is minimum, in this case this color is denoted by  $\lambda$ .

We start by establishing efficient methods to obtain an optimum  $L(2, 1)$ -coloring on split permutation graphs and  $(q, q - 4)$  graphs with fixed  $q$ , including both in the selected group of classes where one can obtain optimum  $L(2, 1)$ -coloring in polynomially time. Moreover, we provide a study on random graphs  $G(n, p)$ ,  $b$ -core limited graphs, and graphs which are super class of trees, bounding the possible values of  $\lambda$  on those classes.

Continuing, we define the total  $L(2, 1)$ -coloring of a graph and we state results such as efficiently optimum total  $L(2, 1)$ -coloring simple classes of graphs and the  $\mathcal{NP}$ -completeness proof of the decision version of the problem, even when the instance is restricted to bipartite graphs. Surprisingly, we also show that there are graph classes in which the computational complexity of this new type of assignment completely differs from the classical version, the  $L(2, 1)$ -coloring.

In the end, we show direct relations among an  $L(2, 1)$ -coloring and others graph colorings. Furthermore, we verify that a quantum  $L(2, 1)$ -coloring is a  $\Pi_2^P$ -complete problem.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivações . . . . .	2
1.2 Histórico . . . . .	6
1.3 Descrição dos capítulos . . . . .	8
<b>2 Definições</b>	<b>11</b>
2.1 Operações em grafos . . . . .	13
2.2 Classes de grafos . . . . .	15
2.3 Problemas em grafos . . . . .	22
<b>3 <math>L(2, 1)</math>-coloração</b>	<b>27</b>
3.1 Classes simples . . . . .	27
3.2 Problema . . . . .	30
3.2.1 $L(2, 1)^2$ -coloração . . . . .	31
3.2.2 $L(h, p)$ -coloração . . . . .	33
3.3 Propriedades de uma $L(2, 1)$ -coloração . . . . .	33
3.4 Algoritmos gulosos . . . . .	36
3.5 Conjectura de Griggs e Yeh ( $\lambda \leq \Delta^2$ ) . . . . .	38
3.6 Limites para $\lambda$ em classes de grafos . . . . .	44
3.7 Complexidade . . . . .	45
3.7.1 Métodos polinomiais . . . . .	46
3.7.2 $\mathcal{NP}$ -completude . . . . .	49
3.7.3 Análise das classes de grafos . . . . .	51
<b>4 Grafos split permutação</b>	<b>53</b>
4.1 Características . . . . .	53
4.2 Algoritmos para uma $L(2, 1)$ -coloração ótima . . . . .	58
4.3 Perspectivas . . . . .	70



<b>5</b>	<b>Grafos <math>(q, q - 4)</math></b>	<b>71</b>
5.1	Características . . . . .	71
5.2	$L(2, 1)$ -coloração ótima de grafos aranha . . . . .	72
5.3	Algoritmo para $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos $(q, q - 4)$ com $q$ fixo	74
5.4	Limite superior para $\lambda$ em grafos $(q, q - 4)$ . . . . .	78
5.5	Perspectivas . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Grafos aleatórios</b>	<b>81</b>
6.1	Características . . . . .	81
6.2	Grafos $b$ -núcleo limitados . . . . .	82
6.3	Determinação de $\lambda$ em amostras de $G(n, p)$ . . . . .	84
6.4	Experimentos . . . . .	85
6.5	Perspectivas . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Superclasses de árvores</b>	<b>88</b>
7.1	Características . . . . .	88
7.2	Grafos $k$ -árvores . . . . .	89
7.3	Grafos com treewidth limitado . . . . .	92
7.4	Grafos blocos . . . . .	93
7.5	Perspectivas . . . . .	96
<b>8</b>	<b><math>L(2, 1)</math>-coloração total</b>	<b>97</b>
8.1	Problema . . . . .	97
8.2	Propriedades de uma $L(2, 1)$ -coloração total . . . . .	101
8.3	Classes simples . . . . .	103
8.4	Grafos grades regulares . . . . .	109
8.5	Árvores . . . . .	109
8.6	Grafos $k$ -partidos completos . . . . .	116
8.7	Conjectura da $L(2, 1)$ -coloração total . . . . .	122
8.8	Complexidade . . . . .	125
8.9	Perspectivas . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Relação entre colorações</b>	<b>132</b>
9.1	$(2\omega - 2) - L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é $\mathcal{NP}$ -completo . . . . .	132
9.2	$L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA é $\Pi_2^P$ -completo . . . . .	138
9.3	Perspectivas . . . . .	139
<b>10</b>	<b>Conclusões</b>	<b>141</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>148</b>

# Lista de Figuras

1.1	$L(2, 1)$ -coloração e coloração em uma rede de transmissores sem fio. . .	3
1.2	Alocação proibida de alunos em bancadas (muito próximos e próximos). . .	4
1.3	Alocação dos alunos em bancadas. . . . .	4
1.4	Distribuição de presos em blocos. . . . .	5
1.5	Histórico da evolução dos estudos da $L(2, 1)$ -coloração. . . . .	7
1.6	Diagrama de dependência entre os capítulos. . . . .	10
2.1	Representação gráfica de um grafo $G$ e de um grafo direcionado $\vec{G}$ . . .	12
2.2	Um grafo $G$ ; um subgrafo induzido $G[\{c, e, f, g\}]$ ; vértices de grau máximo e mínimo; a distância entre os vértices $b$ e $e$ ; a vizinhança à distância 2 do vértice $b$ ; uma clique de tamanho 3 e um ciclo induzido de tamanho 4. . . . .	14
2.3	Operações em um grafo $G$ . . . . .	16
2.4	Árvore, 3-quase-árvore, grafo caminho e grafo ciclo. . . . .	17
2.5	Grafo estrela, grafo roda, grafo completo e grafo de Petersen. . . . .	17
2.6	Grafo 3-partido, grafo bipartido e grafo bipartido completo. . . . .	18
2.7	Grafo split; seu complemento e; grafo cordal. . . . .	18
2.8	Grafo de intervalo, grafo de comparabilidade e grafo de permutação. . .	19
2.9	Cografos e grafos <i>threshold</i> . . . . .	20
2.10	Grafos fracamente cordal, bipartido cordal, planar e periplanar. . . .	21
2.11	Diagrama de classes de grafos. . . . .	22
2.12	Grafo $G$ com vértices particionados em três caminhos disjuntos. . . .	24
2.13	Coloração de arestas do grafo de Petersen e de um grafo bipartido. . .	25
2.14	Coloração total de um grafo de Petersen com quatro cores. . . . .	26
3.1	$L(2, 1)$ -colorações ótimas. . . . .	28
3.2	$L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos completos. . . . .	28
3.3	$L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos caminhos. . . . .	28
3.4	$L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos ciclos. . . . .	29
3.5	$L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos estrelas. . . . .	30
3.6	$L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos rodas. . . . .	30

3.7	$L(2, 1)$ -coloração ótima e outra não ótima, mas que usa menos cores.	31
3.8	$L(2, 1)$ -coloração ótima e $L(2, 1)'$ -coloração ótima.	32
3.9	$L(2, 1)$ -colorações ótimas e; partição dos vértices dos grafos complementos em caminhos disjuntos.	32
3.10	$L(h, p)$ -colorações ótimas.	34
3.11	Método de McDiarmid para $L(2, 1)$ -coloração de grafos.	38
3.12	Grafos conhecidos com $\lambda = \Delta^2$ .	39
3.13	Uma $L(2, 1)$ -coloração de um grafo utilizando uma abordagem gulosa.	39
3.14	Algoritmo de Chang e Kuo para $L(2, 1)$ -coloração de grafos.	41
3.15	Algoritmo para $L(2, 1)$ -coloração ótima em árvores.	47
3.16	Algoritmo para $L(2, 1)$ -coloração ótima em $p$ -quase árvores.	47
3.17	Algoritmo para $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos $k$ -partidos completos.	48
3.18	Método para $L(2, 1)$ -coloração ótima em cografos.	49
3.19	Método para $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos grades regulares.	49
3.20	Blocos de atribuições de cores nos grafos grades regulares.	50
3.21	Uma coloração $BW(4)$ do octaedro e uma $BW(3)$ do grafo de Petersen.	51
3.22	Diagrama de classes da complexidade $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO.	52
4.1	Complexidade da $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO em grafos <i>split</i> e grafos permutação.	53
4.2	Equivalência de classes de grafos.	54
4.3	Modelo de intervalos de $G$ .	55
4.4	Orientação transitiva das arestas de $G$ .	56
4.5	Vizinhança dos vértices de $S_M$ de $G$ .	57
4.6	Orientação das arestas de $G$ com $y' \in (S_L \cup S_M)$ e $z' \in (S_L \cup S_M)$ .	58
4.7	Algoritmo para obtenção de $pv(G)$ .	59
4.8	$G_R$ e $G_L$ .	60
4.9	Modelo de intervalos de $G_L^c$ .	62
4.10	Deslocando o intervalo $I_y$ para a direita de $I_{HELLY}$ .	63
4.11	Deslocando o intervalo $I_m$ para a direita de $I_r$ .	64
4.12	Passo 15 do algoritmo de pré-processamento.	65
4.13	Atribuição de cores a vértices de $K_R$ .	66
4.14	Vértices de $K_R$ que estão no caminho disjunto $P$ .	67
4.15	Contagem de cores proibidas a vértices de $S_R$ .	68
5.1	Aranha magra e aranha gorda.	72
5.2	Grafo $(q, q - 4)$ .	72
5.3	Caminhos disjuntos em um grafo $(q, q - 4)$ .	75
5.4	Aplicação do algoritmo em grafos $(q, q - 4)$ .	77
5.5	Aplicação do algoritmo em grafos $(q, q - 4)$ .	78

5.6	Aplicação do algoritmo para grafos $(q, q - 4)$ . . . . .	78
5.7	Aplicação do algoritmo para grafos $(q, q - 4)$ . . . . .	79
6.1	Amostras de $G(6, p)$ . . . . .	81
6.2	Grafo 3-núcleo limitado. . . . .	82
6.3	Cores proibidas para vértices em grafos $b$ -núcleo limitados. . . . .	83
6.4	Experimentos em grafos $G(n, p)$ . . . . .	86
7.1	Uma 3-árvore. . . . .	89
7.2	Grafo $G$ com <i>treewidth</i> 2 (as arestas pontilhadas são da 2-árvore). . . . .	89
7.3	Um grafo bloco. . . . .	89
7.4	Redução da contagem máxima de $N_2^a(v_j)$ . . . . .	91
7.5	Algoritmo para $L(2, 1)$ -coloração em grafos $G \in \beta$ . . . . .	95
8.1	$L(2, 1)$ -colorações totais ótimas. . . . .	98
8.2	Relação direta entre $\lambda_T(G)$ e $\lambda(TR(G))$ . . . . .	99
8.3	Uma $(2, 1)$ -coloração de $G$ como uma $L(2, 1)$ -coloração do grafo $H$ , uma $L(2, 1)$ -coloração total de $G$ como uma $L(2, 1)$ -coloração do grafo $TR(G)$ e uma atribuição de $G$ como uma $L(2, 1)$ -coloração de $T(G)$ . . . . .	100
8.4	Uma $L(2, 1)$ -coloração total ótima do grafo do mapa da América do Sul. . . . .	101
8.5	Número de cores proibidas relativo a um vértice e a uma aresta em uma $L(2, 1)$ -coloração total. . . . .	102
8.6	Uma $L(2, 1)$ -coloração total obtida pela Propriedade 8.4. . . . .	103
8.7	$L(2, 1)$ -colorações totais ótimas em grafos caminhos. . . . .	104
8.8	$L(2, 1)$ -colorações totais ótimas em grafos ciclos. . . . .	105
8.9	Método para obter uma $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos estrelas. . . . .	106
8.10	$L(2, 1)$ -colorações totais ótimas de $W_5$ , $W_6$ e cores proibidas das are- stas restantes. . . . .	107
8.11	$L(2, 1)$ -colorações totais ótimas de $K_4$ e $K_5$ e método de atribuição para os grafos $K_7$ e $K_8$ . . . . .	108
8.12	$L(2, 1)$ -colorações totais ótimas em polígonos de grafos grades regulares. . . . .	109
8.13	Blocos em $L(2, 1)$ -colorações totais em grafos grades regulares trian- gulares, quadradas e hexagonais. . . . .	110
8.14	Árvores com $\lambda = \Delta + 2$ , uma com $\lambda_T = 2\Delta + 1$ e outra com $\lambda_T = 2\Delta + 2$ . . . . .	111
8.15	Atribuição do Teorema 8.14. . . . .	112
8.16	Modificação na atribuição $g$ . . . . .	113
8.17	Descrição dos casos em que $\Delta = 3$ . . . . .	114
8.18	$L(2, 1)$ -coloração total ótima de um grafo $k$ -partido completo com $n$ ímpar e sem vértice universal. . . . .	117

8.19	Caminho multicolorido. . . . .	118
8.20	Caminho multicolorido $M'$ onde $ M'  \geq  M $ . . . . .	119
8.21	Uma $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo $k$ -partido completo com número de vértices par e sem parte de tamanho 1 ou 2. . . . .	120
8.22	Uma $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo $k$ -partido completo com número par de vértices, sem vértice universal e com uma parte de tamanho 2. . . . .	121
8.23	$L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos <i>threshold</i> com $\delta \leq \frac{n-3}{2}$ . . . . .	125
8.24	Construção das árvores $T$ para os literais $u \in U$ . . . . .	126
8.25	Conexão entre o $K_{5,5}$ da cláusula $(a, \bar{b}, c)$ e as árvores dos literais. . . . .	127
8.26	Atribuição de cores aos vértices do $K_{5,5}$ . . . . .	128
8.27	Atribuição de cores ao restante dos vértices das árvores de literais. . . . .	129
8.28	Ciclos pares no grafo $G$ . . . . .	129
8.29	(a) $L(2, 1)$ -coloração total em um multigrafo; e (b) $TR(TR(G))$ . . . . .	131
9.1	Criação do grafo $H$ . . . . .	133
9.2	Coloração total de $G$ relacionada a uma $L(1, 1)$ -coloração de $I$ . . . . .	136
9.3	Criação do novo grafo $H$ . . . . .	137
9.4	Relações entre colorações. . . . .	140

# Capítulo 1

## Introdução

O conceito de  $L(2,1)$ -coloração de um grafo foi proposto por Jerrold Griggs e Roger Yeh [44] em 1992 e consiste em atribuir cores, representadas por números inteiros não negativos, aos vértices do grafo de forma que vértices adjacentes recebam cores que diferem de pelo menos duas unidades e vértices que tenham um vizinho em comum recebam cores diferentes. No problema  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO, a entrada é um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , e queremos verificar a existência de uma  $L(2,1)$ -coloração de  $G$  que tenha máximo a cor  $k$ . Quando o  $k$  é mínimo, este é denotado por  $\lambda(G)$ , ou apenas  $\lambda$  quando  $G$  é subentendido. Uma  $L(2,1)$ -coloração que tenha no máximo a cor  $\lambda$  é chamada de *ótima*.

Os nossos estudos no assunto dessa tese se iniciaram há uma década, em 2004, durante o meu curso de graduação na UFRJ, quando a professora Márcia Cerioli indicou esse tema como possível pesquisa para a Iniciação Científica de 2005.

Acho que um resumo que descreve a sequência de eventos dos nossos estudos sobre  $L(2,1)$ -coloração é que, na graduação, foi feito um estudo inicial, no mestrado, esse estudo foi aprofundado, obtendo novos resultados em limites superiores para  $\lambda$  em classes de grafos e iniciando a busca por soluções eficientes para obter uma  $L(2,1)$ -coloração ótima e, no doutorado, esse estudo foi feito de forma mais ampla. Obtemos eficientemente uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em classes de grafos como grafos *split* permutação e grafos  $(q, q - 4)$  com  $q$  fixo, além de um estudo do problema para grafos aleatórios e grafos que são superclasse de árvores. Outra importante contribuição é a definição de um novo tipo de coloração de grafos, a  $L(2,1)$ -coloração total, onde estabelecemos resultados para várias classes de grafos, verificando também a sua dificuldade computacional para a versão decisão do problema mesmo quando a entrada é restrita aos grafos bipartidos. Estabelecemos então uma nova versão da conjectura de Griggs e Yeh, provando-a para algumas classes de grafos e verificamos limites em relação a  $\lambda_T$  para outras. Ao fim, realizamos um estudo mais geral, relacionando  $L(2,1)$ -coloração com outros tipos de colorações.

Devido a natureza específica do tema que tratamos nessa tese, esse texto é de interesse para profissionais da área de teoria dos grafos, em especial pesquisadores da área de coloração de grafos. É indicado para o leitor que pretende ter um entendimento mais avançado de colorações de grafos, particularmente sobre  $L(2, 1)$ -coloração. Vale ressaltar que a dissertação de mestrado [81] é recomendada para quem quiser ter um primeiro contato com esse problema.

## 1.1 Motivações

A seguir apresentamos motivações para o estudo da  $L(2, 1)$ -coloração. Essas têm como objetivo ressaltar a importância dos resultados obtidos nessa tese.

### Atribuição de frequências

Na literatura, a motivação recorrente para o estudo da  $L(2, 1)$ -coloração é a do problema de atribuição de frequências em redes de transmissores sem fio, como descrito em [44]. Estamos interessados em fornecer cenários mais realistas do que os retratados quando o problema é modelado utilizando apenas uma coloração clássica de vértices do grafo. A entrada deste problema é uma rede composta por transmissores, distribuídos por uma certa região plana, que são representados por vértices de um grafo. No grafo modelado para estas redes, a noção de transmissores *muito próximos* nessa região, que trocam informações entre si, é representada no grafo por uma aresta entre os vértices desses transmissores. Já a de transmissores apenas *próximos* é dada por vértices que estão à distância 2 no grafo. O objetivo do problema é atribuir frequências à todas as torres de transmissão, respeitando as restrições de que torres muito próximas tenham frequências que diferem de pelo menos uma quantidade muito grande fixa e torres próximas tenham frequências que diferem de pelo menos uma quantidade pequena fixa, utilizando o menor espectro de frequências possíveis.

Ao obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima do grafo do modelo dessa rede de transmissores, essa nos fornece uma atribuição que respeita todas as restrições acima, no caso em que a quantidade fixa muito grande é 2 e a fixa pequena é 1. Para outros valores, é possível utilizar uma  $L(h, p)$ -coloração, que é definida no próximo capítulo. O que é crucial entendermos aqui é que, ao modelarmos utilizando uma  $L(2, 1)$ -coloração foi possível estabelecer novas propriedades interessantes para as frequências atribuídas às torres de transmissão. Por exemplo, imagine uma torre de transmissão que troca informações com suas torres vizinhas, como ilustrado na Figura 1.1. É conveniente que todas essas torres troquem informações com a torre central utilizando frequências diferentes. Essa conveniência acontece por diversos

motivos, desde evitar interferência no recebimento/envio de informações (já que se várias torres enviassem para uma mesma torre na mesma frequência isso misturaria as informações recebidas), até na identificação de onde essa transmissão foi realizada. Por outro lado, se tivéssemos modelado utilizando uma coloração, haveria a possibilidade de várias torres transmitirem em uma mesma frequência para uma mesma torre em suas vizinhanças, caso também ilustrado na Figura 1.1. Outra característica interessante da  $L(2, 1)$ -coloração é que se duas torres estão muito próximas, então elas trocam informações com frequências que diferem de uma grande quantidade, reduzindo assim a possibilidade de interferência na transmissão dos dados, o que também não se garante ao utilizarmos apenas uma coloração neste grafo.

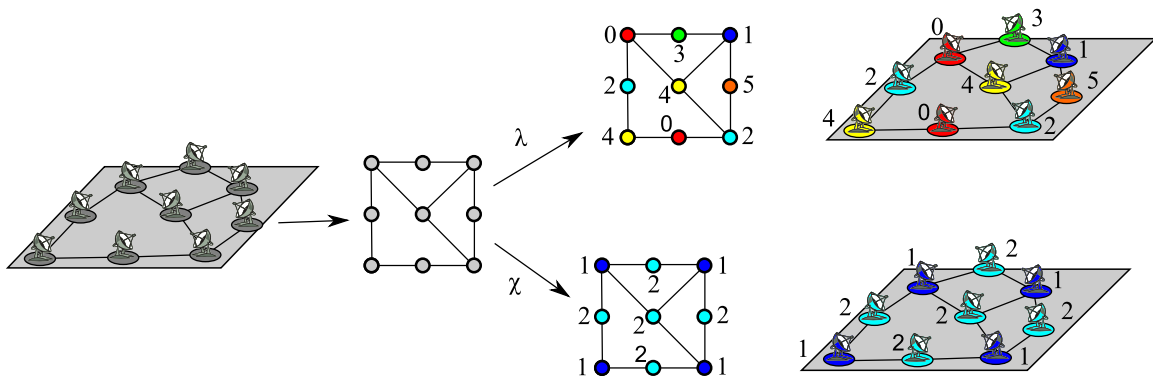


Figura 1.1:  $L(2, 1)$ -coloração e coloração em uma rede de transmissores sem fio.

Não satisfeitos apenas com essa motivação, desenvolvemos duas novas aplicações para a  $L(2, 1)$ -coloração. A natureza do raciocínio por trás dessas é relativamente simples e segue a mesma linha da anterior: é dada uma sequência de elementos e tentamos definir alguma necessidade de uma dispersão grande entre alguns e uma menor entre outros.

## Alocação de alunos em uma prova

Podemos utilizar uma  $L(2, 1)$ -coloração para ajudar na alocação de alunos durante uma prova. As entradas do problema são uma quantidade  $k$  de bancadas e um grafo de relacionamento dos alunos. Primeiramente, determinamos o grafo de relacionamento de amizade entre os alunos, onde cada aluno é um vértice e existe aresta entre vértices se os respectivos alunos são amigos. Queremos saber se é possível distribuir os alunos nas  $k$  bancadas de forma que amigos não sentem em bancadas muito próximas e alunos que tenham um amigo em comum, e por isso possam ser conhecidos, não sentem em uma mesma bancada, como ilustrado na Figura 1.2

Claramente tal alocação de alunos é possível de acordo com a existência de uma  $L(2, 1)$ -coloração que utilize no máximo a cor  $k$  neste grafo de relacionamento.



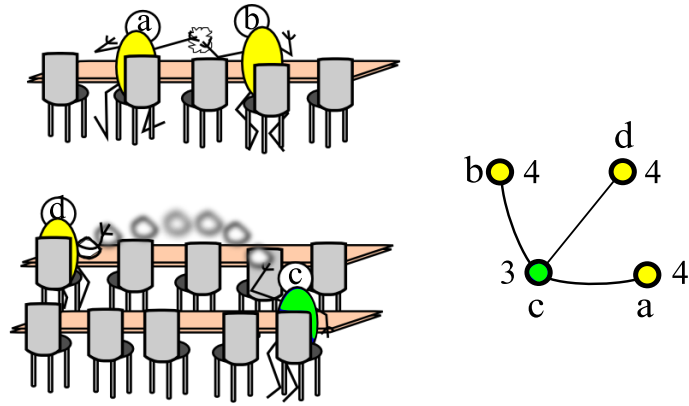


Figura 1.2: Alocação proibida de alunos em bancadas (muito próximos e próximos).

Se o resultado for positivo, a alocação dos alunos é feita trivialmente da seguinte forma: um aluno que recebe a cor  $i$  deve sentar na bancada  $i$ . Como ilustrado na Figura 1.3 (a), se dois alunos são amigos, os seus respectivos vértices são adjacentes no grafo de relacionamento (e.g.  $u$  e  $v$ ) e recebem cores que diferem de pelo menos duas unidades, ou seja, eles não vão se sentar nem na mesma bancada, nem em bancadas consecutivas. E, se dois alunos têm um amigo em comum, como no grafo de relacionamento os seus respectivos vértices estão à distância 2 (e.g.  $x$  e  $w$ ), esses recebem cores diferentes, e os respectivos alunos não são alocados em uma mesma bancada. Já a Figura 1.3 (b) contém um exemplo de alocação de alunos em nove bancadas utilizando uma  $8-L(2, 1)$ -coloração no grafo de relacionamento de alunos.

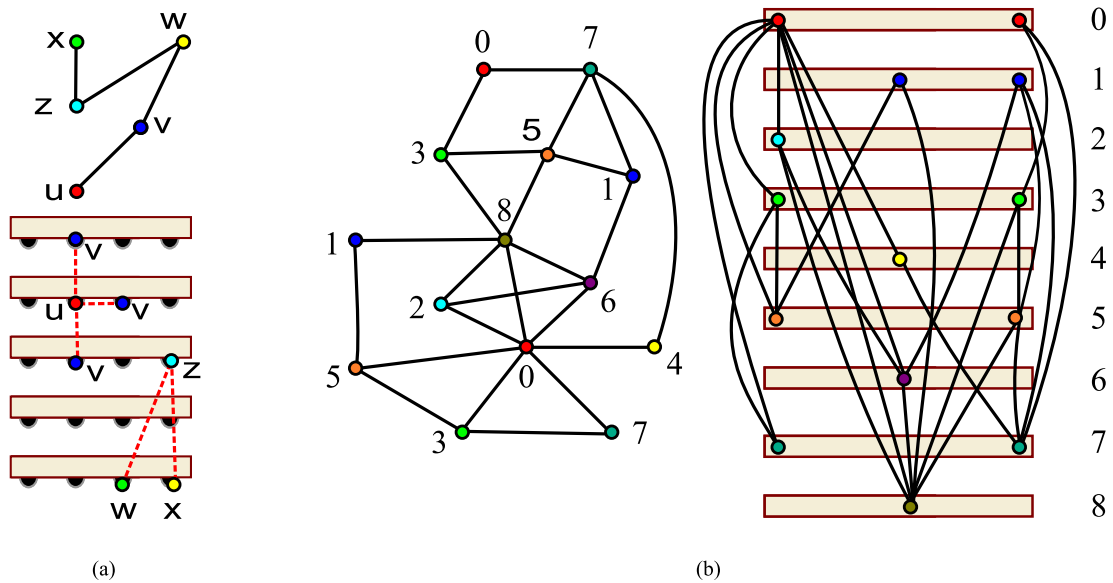


Figura 1.3: Alocação dos alunos em bancadas.

## Distribuição de presos

Uma outra aplicação é verificada na distribuição de presos entre blocos de um presídio. Nesta, a eficiência é obtida ao evitar que presos inimigos fiquem em um mesmo bloco e em blocos vizinhos, reduzindo assim tumultos e revoltas. Adicionalmente, desejamos que presos com um mesmo inimigo não fiquem em um mesmo bloco, evitando assim a formação de grupos por causa dessa relação de inimizade em comum.

As entradas desse problema são um número fixo de blocos disponíveis e o grafo de inimizade entre esses presidiários. Este grafo tem como vértices os presos e, existe uma aresta entre dois presos se esses são considerados inimigos. Uma possibilidade para a geração desse grafo de inimizade é utilizar as informações sobre as facções das quais os bandidos pertençam e os seus principais cúmplices.

Tal distribuição dos presos é feita em  $k$  blocos respeitando as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração que utilize no máximo a cor  $k$  neste grafo de inimizade entre presidiários, distribuindo os presos para os blocos com as suas respectivas cores. A Figura 1.4 (a) ilustra distribuições proibidas de presos, evitando que presos inimigos estejam em blocos próximos e também que presos com um inimigo em comum estejam em um mesmo bloco. Já a Figura 1.4 (b) ilustra uma possível distribuição aceitável para esses presos.

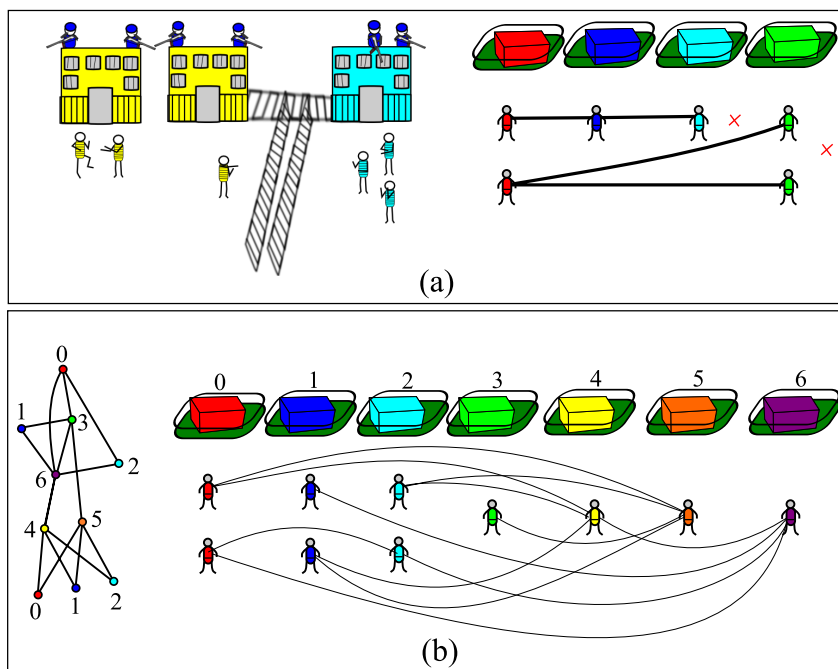


Figura 1.4: Distribuição de presos em blocos.

## Outras

É possível obter diversas outras aplicações para  $L(2, 1)$ -coloração observando a estreita relação que esta tem com outros problemas. Por exemplo, John Georges, David Mauro e Marshall Whittlesey provaram em 1994 que quando  $\lambda \geq n - 1$ , então  $\lambda = n + pv(G^c) - 2$ . Em outras palavras, para os casos em que  $\lambda \geq n - 1$ ,  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO de um grafo  $G$  e  $k$ -CAMINHOS DISJUNTOS do seu grafo complemento  $G^c$  são diretamente relacionados. Particularmente, obtemos  $\lambda \geq n - 1$  adicionando um vértice universal ao grafo  $G$  e, verificar a existência de uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $G \wedge K_1$  que utiliza no máximo a cor  $|V(G)| + 1$  é equivalente a decidir se  $G^c$  tem um caminho hamiltoniano. Com isso, podemos agregar todas as aplicações dos problemas CAMINHO HAMILTONIANO e  $k$ -CAMINHOS DISJUNTOS as da  $L(2, 1)$ -coloração.

Além disso, apresentamos no Capítulo 9 relações diretas de  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO com outros problemas de colorações de grafos como:  $k$ -COLORAÇÃO, COLORAÇÃO DE ARESTAS,  $k$ -COLORAÇÃO TOTAL,  $L(1, 1)$ -COLORAÇÃO e  $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL. Dessa forma, também acrescentamos todas as aplicações destinadas a esses problemas as da  $L(2, 1)$ -coloração.

## 1.2 Histórico

William Hale [46], em 1980, introduziu a  $T$ -coloração de um grafo, onde um conjunto fixo  $T$  de restrições é dado e as frequências devem ser designadas às estações transmissoras de forma que a diferença entre as frequências de estações muito próximas não esteja neste conjunto  $T$ . Esta atribuição serviu de base para o estudo da  $L(2, 1)$ -coloração.

Mais de uma década depois, Fred Roberts [82] introduziu uma variação desse problema, aonde transmissores muito próximos devem receber frequências que diferem ao menos de um intervalo fixo, de tamanho grande, e transmissores apenas próximos só precisam ter frequências que diferem ao menos de um intervalo fixo, de tamanho pequeno.

Em 1992, Griggs e Yeh [44], que trabalhavam com Roberts, publicaram o trabalho pioneiro sobre a  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo. Nesse artigo, a modelagem descrita por Roberts foi feita voltada para a teoria dos grafos, com um estudo desse problema aplicado a classes simples de grafos. Também foi apresentada a prova que o problema de decisão  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo para  $k \leq n$ . Ao fim, foi feita a conjectura de Griggs e Yeh, de que  $\lambda \leq \Delta^2$ , sendo esse o assunto mais estudado sobre  $L(2, 1)$ -coloração.

Rapidamente começaram os estudos em classes específicas de grafos, Denise Sa-

kai [84] foi a primeira, provando a conjectura de Griggs e Yeh na classe dos grafos cordais. Em seguida, Gerard Chang e David Kuo [31] apresentam em 1996 algoritmos polinomiais para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em árvores e cografos, além de estabelecer um novo limite superior para  $\lambda$  em qualquer grafo.

Desde então diversos limites superiores para  $\lambda$  e métodos para obtenção de uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em classes de grafos foram desenvolvidos por vários pesquisadores. Ressaltamos aqui apenas um grupo seletivo desses.

Em 2003, Daniel Král e Ritse Skrekovski [63] reduziram o limite superior de  $\lambda$  em grafos de uma unidade e, posteriormente, em 2006, Daniel Gonçalves [42] melhorou a análise de Kral e Skrekovski obtendo o limite superior para  $\lambda$  mais próximo da conjectura de Griggs e Yeh conhecido até hoje, onde  $\lambda \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ . Essas foram duas grandes contribuições de Daniéis para o estudo da  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo.

Em 2005, Král [61] obteve um algoritmo exponencial para  $L(2, 1)$ -coloração ótima de grafos e, em 2007, Jan Kratochvíl, Dieter Kratsch e Mathieu Liedloff [64] apresentaram algoritmo exponencial alternativo.

Voltando as classes de grafos, Toru Araki [2] desenvolveu em 2009 um algoritmo linear que determina  $\lambda$  na classe dos grafos bipartidos *chain* e, em 2010, Toru Hasunuma, Toshimasa Ishiib, Hirotaka Onoc e Yushi Unod [48] alteraram o algoritmo de Chang e Kuo [31] para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em árvores, transformando sua complexidade para tempo linear.

Finalmente, em 2013, Konstanty Junosza-Szaniawski, Kratochvíl, Liedloff e Powel Rzazewski [56] desenvolveram o melhor algoritmo exponencial conhecido até hoje, que determina  $\lambda$  em  $O^*(2.6488^n)$ . A Figura 1.5 reúne essa pequena sequência de eventos que marcaram a evolução dos estudos da  $L(2, 1)$ -coloração de grafos.

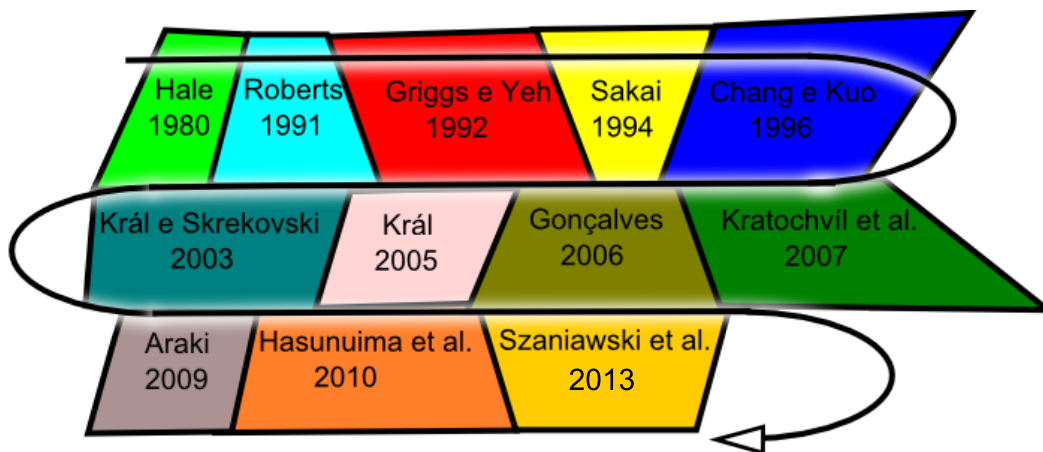


Figura 1.5: Histórico da evolução dos estudos da  $L(2, 1)$ -coloração.

## 1.3 Descrição dos capítulos

É fornecido a seguir um resumo dos tópicos presentes em cada capítulo. Pretendemos assim esclarecer ao leitor a distribuição das informações contidas no texto e facilitar a sua procura.

Este capítulo constitui a introdução. Inicialmente é feita uma explicação sobre a escolha do tema. A seguir, são fornecidas motivações para a elaboração desse trabalho e um histórico dos pesquisadores que já contribuíram para o estado da arte do problema. Ao fim, é dada essa descrição de capítulos.

O Capítulo 2 contém a maior parte das notações de teoria dos grafos necessárias para o bom entendimento dessa tese. Outras, que são usadas apenas em pontos específicos do texto, são feitas nos locais necessários. Em seguida, é disposta uma coletânea de informações sobre classes de grafos que aparecem no decorrer do texto. No final, são enunciados problemas conhecidos da teoria dos grafos e uma breve descrição de suas complexidades computacionais. Se o leitor escolher começar a leitura a partir do Capítulo 2, deixamos como referência o excelente livro de Szwarzfiter [86] para notações e definições em grafos que possam eventualmente não estar presentes no texto. E, para mais informações sobre classes de complexidade de problemas, fica como referência o conhecido livro de Garey e Johnson [37].

O Capítulo 3 define formalmente o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO de grafos. Esse contém também métodos para obtenção de uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em classes simples de grafos, limites de  $\lambda$  e informações sobre a famosa Conjectura de Griggs e Yeh, de que  $\lambda \leq \Delta^2$ . Finalmente, apresentamos um resumo do estado atual dos resultados para classes específicas de grafos, tanto em relação a complexidade, quanto a limites no valor de  $\lambda$ , obtendo assim um entendimento maior das classes de grafos em que o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é de difícil solução computacional e aqueles em que já se conhece algoritmos eficientes.

Já no Capítulo 4, estabelecemos o valor de  $\lambda$  em um grafo *split* permutação como sendo o máximo entre o seu valor em dois de seus subgrafos. Desenvolvemos assim um algoritmo polinomial que não só determina  $\lambda$ , como também apresenta uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima nesses grafos, incluindo essa classe no grupo seletivo em que obtemos uma solução ótima em tempo polinomial.

O Capítulo 5 apresentamos um algoritmo *FPT* para obtenção de  $pv(G)$  em grafos  $(q, q - 4)$  quando  $q$  é fixo. Fornecemos, então, uma modificação desse algoritmo para não só determinar o valor exato de  $\lambda$ , como também encontrar uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos nessa classe. Além disso, apresentamos uma forma alternativa a dada em [81] para determinar o valor de  $\lambda$  em grafos aranha, subclasse dos grafos  $(q, q - 4)$ . Ao fim, verificamos um limite superior para  $\lambda$  em grafos  $(q, q - 4)$ .

E, o Capítulo 6 contém um estudo sobre  $L(2, 1)$ -coloração na classe dos grafos

aleatórios  $G(n, p)$ . Primeiro, estabelecemos um limite superior para  $\lambda$  na classe dos grafos  $b$ -núcleo limitados, conseguindo como efeito colateral, provas da conjectura de Griggs e Yeh para grafos com  $b$  restrito. A partir daí, utilizamos esse limite para grafos  $b$ -núcleo limitados na obtenção de novos resultados para a  $L(2, 1)$ -coloração em amostras de grafos  $G(n, p)$ . Indo além, estabelecemos ligação entre os resultados obtidos e experimentos realizados em amostras de grafos nessa classe.

A seguir, no Capítulo 7, determinamos limites superiores para  $\lambda$  em grafos  $k$ -árvores e grafos com treewidth limitado. Além disso, realizamos um estudo sobre a  $L(2, 1)$ -coloração em uma subclasse dos grafos dos blocos. No estudo desta subclasse, surgiu a ideia para um novo tipo de coloração, que vemos no Capítulo 8.

Continuando, no Capítulo 8 introduzimos a  $L(2, 1)$ -coloração total de grafos. Apresentamos algoritmos lineares para obter  $\lambda_T$  e uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em várias classes simples de grafos, como grafos caminhos, grafos ciclos, grafos rodas, grafos completos, entre outros. Estudamos essa atribuição na classe dos grafos grades regulares, incluindo essa classe nas quais é possível obter solução eficiente em tempo linear. Elaboramos resultados para os grafos  $k$ -partidos completos e árvores, determinando limites superiores justos para  $\lambda$  nessas classes. A seguir, estendemos a Conjectura de Griggs e Yeh para esse novo tipo de coloração e mostramos a sua equivalência com a da versão clássica do problema em diversos casos; provamos essa nova versão da conjectura para grafos diâmetro 2; e fornecemos limites justos para  $\lambda$  em duas de suas subclasses: cografos e grafos de *threshold*. No final, verificamos que o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a grafos bipartidos e apresentamos também classes de grafos em que as complexidades computacionais dos problemas  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO e  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL diferem.

Finalmente, no Capítulo 9 estabelecemos relações entre os problemas  $k$ -COLORAÇÃO, COLORAÇÃO DE ARESTAS,  $k$ -COLORAÇÃO TOTAL,  $k$ - $L(1, 1)$ -COLORAÇÃO,  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO e  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL. Mostramos que o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo para  $\lambda = 2\omega - 2$ . Adicionalmente, introduzimos uma variação do problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO que é  $\Pi_2^p$ -completo.

No Capítulo 10 fornecemos as conclusões que obtivemos com os resultados elaborados durante o doutorado. Apresentamos de forma clara as contribuições que fizemos no estudo da arte da  $L(2, 1)$ -coloração de grafos. Descrevemos os nossos trabalhos atuais e deixamos alguns problemas em aberto, que nos motivam a continuar a estudar mais sobre esse assunto, e que podem também ser de interesse para outros pesquisadores. Por exemplo, a caracterização completa de uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos  $k$ -partidos completos e um estudo mais elaborado na verificação da igualdade da conjectura de Griggs e Yeh com a nova versão do problema.

Mesmo não existindo uma dependência entre a maioria dos capítulos, sugerimos ao leitor que sigam a ordem apresentada no texto. Mas para o leitor que queira ler apenas uma parte do texto, ou este fora de ordem, deixamos na Figura 1.6 um diagrama de dependência entre os capítulos.

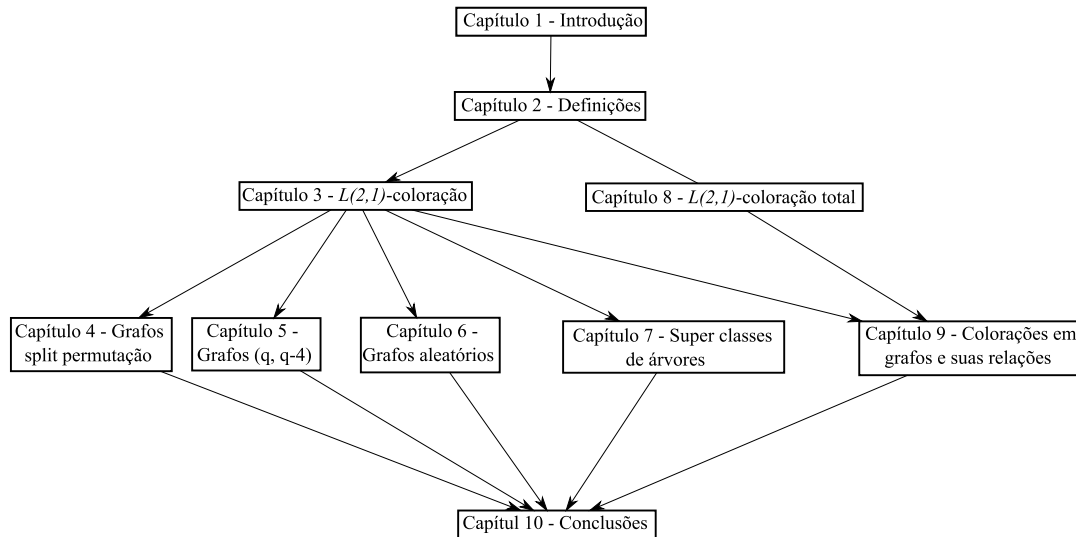


Figura 1.6: Diagrama de dependência entre os capítulos.

# Capítulo 2

## Definições

Formalmente, um *grafo* é um par ordenado de conjuntos onde o primeiro é um conjunto não vazio e o segundo é um conjunto de pares de elementos do primeiro. Seja  $G = (V, E)$  um grafo, o conjunto  $V$  é chamado de *conjunto dos vértices* enquanto o conjunto  $E$  de *conjunto de arestas*, que relaciona dois vértices de  $V$ . Utilizamos  $V(G)$  e  $E(G)$  para denotar, respectivamente, o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de  $G$ . Grafos são usualmente dados por *representações gráficas*, onde os vértices são representados por pontos e as arestas por curvas conectando esses pontos.

A não ser que digamos o contrário, considere os grafos nesse texto como sendo simples (sem arestas múltiplas entre vértices e relacionando apenas elementos distintos), não direcionados (a ordem dos elementos relacionados não importa) e finitos (a cardinalidade de  $V$  é limitada). A Figura 2.1 (a) ilustra o grafo  $G = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{ab, ae, af, bc, be, cd, ce, de, ef\})$ . Ao tratarmos de *grafos direcionados*  $\vec{G} = (V, \vec{E})$ , a ordem dos elementos relacionados por  $\vec{E}$  faz diferença, portanto,  $\vec{uv} \in \vec{E}$  aparece na representação gráfica como uma curva apontando do vértice  $u$  para o vértice  $v$ , destacando a diferença na ordem em que os elementos foram apresentados em  $\vec{E}$ . Assim, as arestas orientadas são divididas em dois tipos: *arestas de saída* e *arestas de entrada*. A Figura 2.1 (b) ilustra o grafo direcionado  $\vec{G} = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{\vec{ae}, \vec{af}, \vec{ba}, \vec{be}, \vec{cb}, \vec{cd}, \vec{de}, \vec{ec}, \vec{ef}\})$ , onde a aresta  $\vec{ae}$  é uma aresta de saída de  $a$  e de entrada de  $e$ .

Para o resto do texto, a cardinalidade do conjunto de vértices de um grafo é denotada por  $n$ , enquanto a cardinalidade do seu conjunto de arestas por  $m$ . Já o *tamanho* de um grafo é dado por  $n + m$ . Por exemplo, o grafo da Figura 2.1 tem  $n = 6$ ,  $m = 9$  e tamanho 15.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. As relações de  $E$  sobre elementos de  $V$  recebem alguns nomes específicos. Dois vértices  $u$  e  $v$  de  $V$  são *adjacentes* se  $uv \in E$ . Além disso, dizemos que a aresta  $uv$  é *incidente* a  $u$  e a  $v$ . Por outro lado,  $u$  e  $v$  são *extremos* da aresta  $uv$ . O conjunto de vértices adjacentes ao vértice  $v$  é sua *vizinhança*, denotada



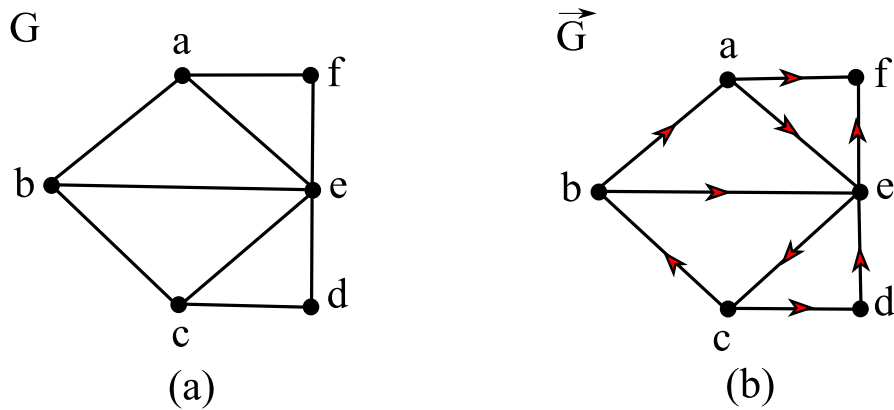


Figura 2.1: Representação gráfica de um grafo  $G$  e de um grafo direcionado  $\vec{G}$ .

por  $N(v)$ . E, o conjunto de arestas incidente ao vértice  $v$  é denotado por  $N_E(v)$ . O grau de  $v$ , ou  $g(v)$ , é dado por  $|N(v)|$ . Um vértice de grau  $n - 1$  é chamado de *universal*, já um de grau 0 de *isolado*. O maior grau entre todos os vértices do grafo de  $G$  é denotado por  $\Delta(G)$ , enquanto o menor por  $\delta(G)$ . Por conveniência, quando  $G$  for subentendido, estas notações aparecem como  $\Delta$  e  $\delta$ .

Os grafos têm certas estruturas que nos fornecem propriedades interessantes. A verificação de tais estruturas é feita utilizando-se das notações a seguir. Um grafo  $H$  é *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ ; além disso, quando  $V(H) = V(G)$ , este recebe o nome de *subgrafo gerador*. Um grafo  $H$  é *subgrafo induzido* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) = \{uv \mid uv \in E(G), u \in V(H) \text{ e } v \in V(H)\}$ . Usualmente notaremos o subgrafo induzido  $H$  de um grafo  $G$  por  $G[V(H)]$ .

Um *caminho* entre dois vértices  $u$  e  $v$  de  $V(G)$  é uma sequência  $(v_1, \dots, v_{t-1}, v_t)$ , com  $t \geq 2$ , de vértices distintos de  $G$ , que começa em  $v_1 = u$  e termina em  $v_t = v$ , tal que  $v_i v_{i+1} \in E(G[\{v_1, \dots, v_t\}])$  para  $1 \leq i \leq t - 1$ . Quando  $E(G[\{v_1, \dots, v_t\}]) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq t - 1\}$ , dizemos que este é um *caminho induzido*. Os vértices  $u$  e  $v$  são notados por *extremos do caminho*. O *tamanho* de um caminho  $(v_1, \dots, v_{t-1}, v_t)$  é dado por  $t - 1$ .

Um *ciclo* em um grafo  $G$  é uma sequência  $(v_1, \dots, v_{t-1}, v_t, v_1)$ , com  $t \geq 3$ , de vértices distintos de  $G$  a não ser por  $v_1$ , onde  $\{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq t - 1\} \in E(G[\{v_1, \dots, v_t\}])$  e  $v_1 v_t \in E(G[\{v_1, \dots, v_t\}])$ . Quando  $E(G[\{v_1, \dots, v_t\}]) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq t - 1\} \cup \{v_1 v_t\}$ , dizemos que este é um *ciclo induzido*. O *tamanho* de um ciclo  $(v_1, \dots, v_t)$  é dado por  $t$ .

Uma *clique* em um grafo  $G$  é um subgrafo induzido maximal onde todos os pares distintos de seus vértices são adjacentes. A clique máxima de  $G$  é usualmente denotada por  $\omega(G)$ .

Um dos mais importantes parâmetros de grafos, e que será amplamente utilizado em praticamente todos os resultados e provas apresentados nessa tese, é a

distância entre vértices de um grafo. A *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  de um grafo  $G$ , denotada por  $dist_G(u, v)$  (ou  $dist(u, v)$  quando  $G$  for subentendido) é o número de arestas de um menor caminho entre  $u$  e  $v$  em  $G$ . O *diâmetro* de um grafo é a maior distância entre todos os pares de seus vértices. Já denotamos o conceito de vizinhança de um vértice  $v$ , agora estendemos a noção para o conjunto de vértices que estão à distância exatamente  $i$  de um vértice  $v$ , denotando-a por  $N_i(v)$ . Particularmente,  $N_2(v) = \{u \mid dist(u, v) = 2\}$ .

Dado um grafo  $G$  e uma ordenação  $O = (v_1, \dots, v_n)$  dos seus vértices, usualmente denotamos  $N_i^a(v_j)$  o conjunto de vértices de  $N_i(v_j)$  que precedem  $v_j$  em  $O$  e  $N_i^d(v_j)$  o conjunto de vértices de  $N_i(v_j)$  que o sucedem.

Dizemos que um subconjunto de vértices de um grafo  $G$  é *k-estável* se a distância entre todo par de seus vértices é maior do que  $k$ . Um subconjunto de vértices 1-estável também é conhecido como *independente*. Um subconjunto de arestas é um *emparelhamento* quando as arestas deste subconjunto não têm, duas a duas, extremos em comum. Um conjunto independente de três vértices de um grafo é uma *tripla asteroidal* se existe um caminho entre cada par de vértices deste conjunto que não passe pela vizinhança do terceiro vértice. Por conveniência, denotamos um conjunto de três vértices com grau  $\Delta$ , onde cada par desses estão a distância no máximo 2, por *D2T*.

A Figura 2.2 apresenta um grafo  $G$  onde  $\Delta = 4$  e  $\delta = 2$ . Além disso, temos que  $dist(b, e) = 3$ . É interessante notar que se a distância entre dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  tem um determinado tamanho, então existe um caminho induzido com esse mesmo tamanho tendo  $u$  e  $v$  como seus extremos. Como exemplo, temos o caminho induzido pelos vértices  $(b, c, d, e)$ . O subgrafo induzido  $G[\{c, e, f, g\}]$  também está nessa figura. Outras informações que destacamos são que  $N(b) = \{a, c\}$ ,  $N_2(b) = \{d, g\}$  e  $N_3(b) = \{e, f\}$ . Se utilizarmos a ordem alfabética como uma ordenação dos vértices desse grafo, temos que  $N(c) = \{a, b, d, g\}$ ,  $N^a(c) = \{a, b\}$  e  $N^d(c) = \{d, g\}$ . Uma clique máxima  $G[\{a, b, c\}]$  desse grafo tem  $\omega(G) = 3$  e existe um ciclo induzido  $(d, e, f, g, d)$ . Finalmente, o subconjunto de vértices  $\{b, d, f\}$  é um conjunto independente.

## 2.1 Operações em grafos

Descrevemos a seguir conhecidas operações de grafos que aparecem nesse texto.

O *complemento*  $G^c$  de um grafo  $G$  é dado por  $V(G^c) = V(G)$  e  $E(G^c) = \{uv \mid u \neq v, u \in V(G^c) \text{ e } v \in V(G^c)\} \setminus E(G)$ .

A *união* entre dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , disjuntos em vértices e arestas, tem como resultado o grafo  $G = G_1 \cup G_2$ , onde  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  e  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ . O *join* entre dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , disjuntos em vértices e arestas, tem como resultado o grafo  $G = G_1 \wedge G_2$ , onde  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  e  $E(G) =$

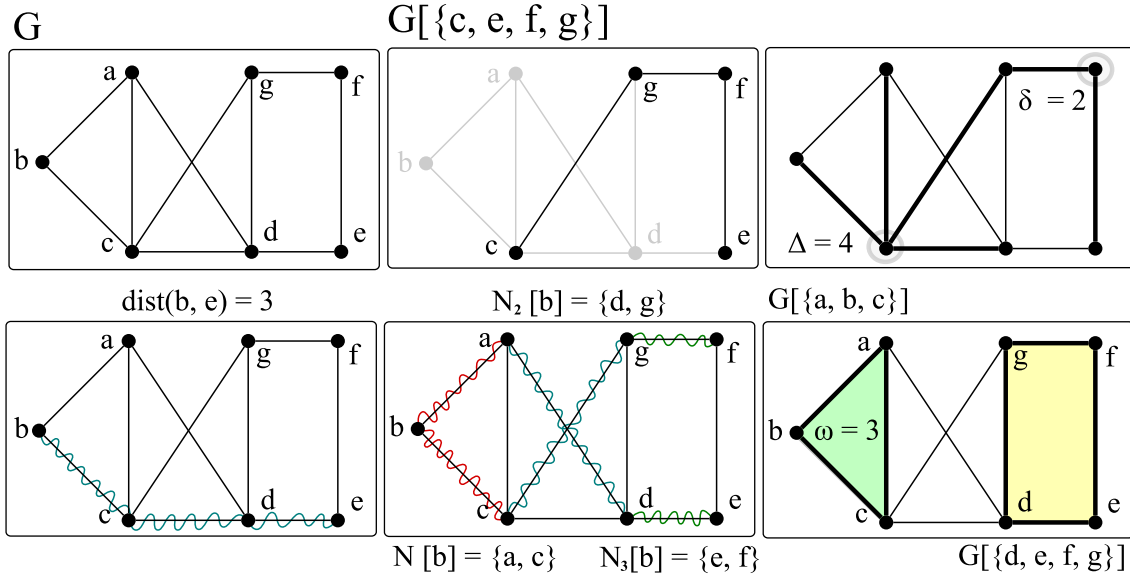


Figura 2.2: Um grafo  $G$ ; um subgrafo induzido  $G[\{c, e, f, g\}]$ ; vértices de grau máximo e mínimo; a distância entre os vértices  $b$  e  $e$ ; a vizinhança à distância 2 do vértice  $b$ ; uma clique de tamanho 3 e um ciclo induzido de tamanho 4.

$E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1) \text{ e } v \in V(G_2)\}$ . Na verdade, o grafo obtido pela operação de *join* tem os mesmos vértices e arestas dos dois grafos operandos mais todas as arestas entre vértices de grafos diferentes.

Nesse texto consideramos as operações de união e de *join* como operadores binários. Na ocorrência de mais do que dois operandos, estabelecemos uma sequência de operações binárias que obtém o mesmo resultado. Nesse sentido,  $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 = (G_1 \cup G_2) \cup G_3$  ou  $G = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 = (G_1 \wedge G_2) \wedge G_3$ . Outro fato interessante é que essas operações são inversas em relação ao grafo complemento, i.e., se  $G = G_1 \cup G_2$ , então  $G^c = G_1^c \wedge G_2^c$ .

O grafo obtido pelo *operador linha*  $L(G)$  de um grafo  $G$  é dado por  $V(L(G)) = E(G)$  e  $uv \in E(L(G))$  se  $u \in E(G)$ ,  $v \in E(G)$  e as arestas  $u$  e  $v$  de  $G$  incidem em um mesmo vértice de  $G$ .

O grafo obtido pelo *operador total*  $T(G)$  de um grafo  $G$  é dado por  $V(T(G)) = V(G) \cup E(G)$  e  $uv \in E(T(G))$  se: **(i)**  $u \in V(G)$ ,  $v \in V(G)$  e  $uv \in E(G)$ ; **(ii)**  $u \in V(G)$ ,  $v \in E(G)$  e  $u$  é extremo de  $v$  em  $G$  ou; **(iii)**  $u \in E(G)$ ,  $v \in E(G)$  e as arestas  $u$  e  $v$  de  $G$  incidem em um mesmo vértice de  $G$ .

As operações de *remoção* ou *adição de uma aresta*  $uv$  em um grafo  $G$  são simples. No primeiro caso, obtemos o grafo  $H = (V(G), E(G) \setminus \{uv\})$  e, no segundo,  $H = (V(G), E(G) \cup \{uv\})$ . Já as operações de *remoção* ou *adição de um vértice*  $v$  em  $G$  têm como resultado os grafos  $H = (V(G) \setminus \{v\}, E(G[V(G) \setminus \{v\}]))$  e  $H = (V(G) \cup \{v\}, E(G))$ , respectivamente.

Uma *subdivisão* de uma aresta  $uv \in E(G)$  de um grafo  $G$  tem como resultado o

grafo  $H = (V(G) \cup \{uv\}, (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{u \ uv, uv \ v\})$ .

O grafo obtido pelo *operador potência*  $G^i$  de um grafo  $G$  tem  $V(G^i) = V(G)$  e  $E(G^i) = E(G) \cup \{uv \mid u \in V(G), v \in V(G) \text{ e } dist_G(u, v) \leq i\}$ . Então, o grafo resultante tem os mesmos vértices e arestas de  $G$  e adicionamos uma aresta entre qualquer par de vértices em  $G$  com distância menor ou igual a  $i$ .

A Figura 2.3 ilustra essas operações sendo aplicadas a um grafo  $G$ .

## 2.2 Classes de grafos

Descrevemos a seguir classes de grafos bem conhecidas, que aparecem em mais de um momento nas provas em nosso texto. Outras, mais específicas, são detalhadas apenas onde são utilizadas.

Um grafo é *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de seus vértices. Caso contrário, este é *desconexo*. Um grafo é *k-conexo* se não existe  $S \subseteq V(G)$  com  $|S| = k$  tal que  $G[V \setminus S]$  é desconexo. Uma *componente conexa* de um grafo é um subgrafo induzido conexo maximal em vértices. Um vértice de um grafo  $G$  é uma *articulação* se  $G[V \setminus v]$  tem mais componentes conexas que  $G$ . Particularmente, todo grafo que não tem articulação é 2-conexo. Uma aresta  $e$  de um grafo  $G$  é uma *ponte* se  $G \setminus \{e\}$  tem mais componentes conexas que  $G$ .

Um grafo é uma *árvore* se é conexo e não contém nenhum ciclo induzido. Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é sua *subárvore geradora* se  $V(H) = V(G)$  e  $H$  é uma árvore. Uma árvore é *enraizada* se, junto com a árvore, for fornecida uma ordenação  $(v_1, \dots, v_n)$  dos seus vértices tal que todo  $v_j$ , com  $j \geq 2$ , tem  $|N^a(v_j)| = 1$ . Esta também pode ser uma representação gráfica, onde se  $N^a(v_j) = v_i$ , então  $v_i$  aparece acima de  $v_j$  na representação, neste caso,  $v_i$  é chamado *pai* de  $v_j$  e, da mesma forma,  $v_j$  é filho de  $v_i$ . Se dois vértices dessa árvore compartilham o mesmo pai, esses são chamados de *irmãos*. No caso que  $v_i$  é pai de  $v_j$ , os irmãos de  $v_i$  são denotados por *tios* de  $v_j$  e o pai de  $v_i$  por *avô* de  $v_j$ . O vértice  $v_1$  é a *raiz* da árvore. Em uma árvore enraizada, o *nível* de um vértice  $v$  é igual a  $dist(v_1, v)$ .

Um grafo é uma *p-quase árvore* se é obtido de uma árvore adicionando  $p$  arestas.

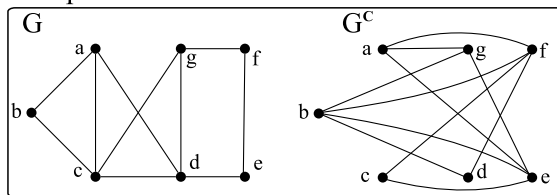
Um grafo é *caminho*, denotado por  $P_n$ , se  $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ . É interessante notar que os grafos caminhos são uma subclasse das árvores.

Um grafo é *ciclo*, denotado por  $C_n$  (com  $n \geq 3$ ), se  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup v_1 v_n$ .

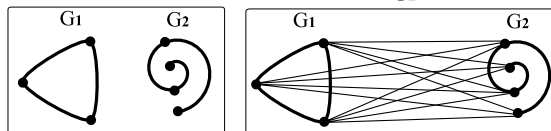
A Figura 2.4 (a), (b), (c) e (d) ilustra uma árvore, uma 3-quase árvore, um grafo caminho  $P_6$  e um grafo ciclo  $C_5$ , respectivamente.

Um grafo de  $n$  vértices é *hamiltoniano* se possui um ciclo de tamanho  $n$ . Dizemos também que um grafo tem um *caminho hamiltoniano* se possui um caminho de

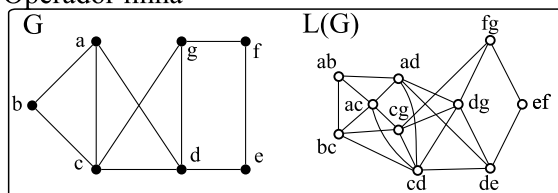
### Complemento



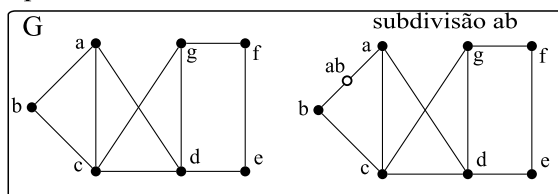
União:  $G = G_1 \cup G_2$       Join:  $G = G_1 \wedge G_2$



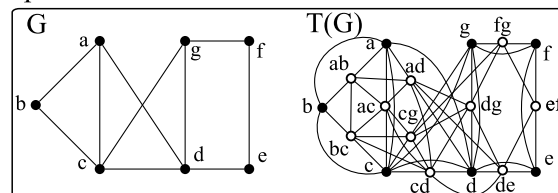
### Operador linha



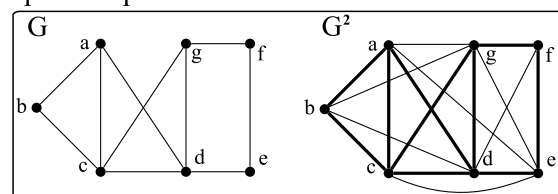
### Operador subdivisão



### Operador total



### Operador potência



### Retirada de vértices e arestas

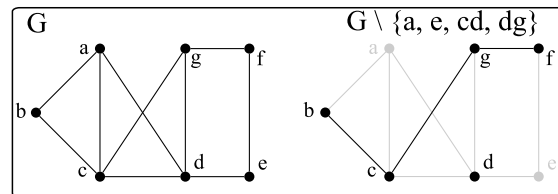


Figura 2.3: Operações em um grafo  $G$ .

tamanho  $n - 1$ .

Um grafo é *estrela*, denotado por  $S_n$  (com  $n \geq 2$ ), se tem um vértice universal e

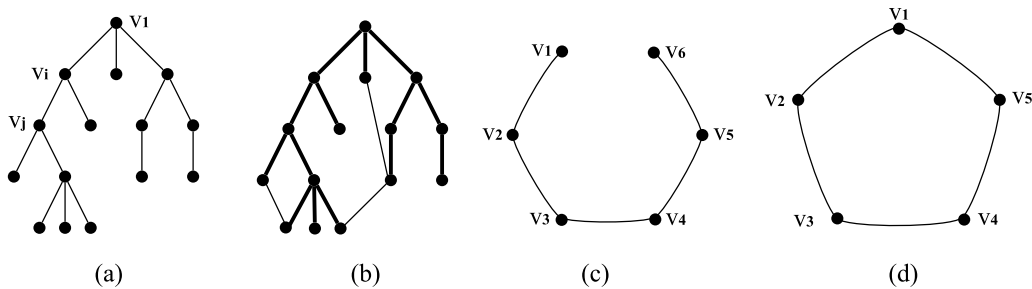


Figura 2.4: Árvore, 3-quase-árvore, grafo caminho e grafo ciclo.

todos os outros de grau 1.

Um grafo é *roda*, denotado por  $W_n$  (com  $n \geq 4$ ), se  $W_n = C_{n-1} \wedge K_1$ . Ou seja, se é o grafo obtido pela operação de *join* entre um grafo ciclo de tamanho  $n - 1$  e um vértice isolado.

Um grafo é *completo*, denotado por  $K_n$ , se existe aresta entre qualquer par de seus vértices. Mesmo o estudo de grafos tendo começado com Euler em 1857 cf. [47], os grafos completos já haviam aparecido em desenhos há vários séculos, como na rosa mística de Ramon Llull cf. [59].

Um grafo é *regular* se o grau de todos os seus vértices é igual. Neste caso, temos  $\Delta = \delta$ . Um grafo é *k-regular* se é regular e tem grau  $k$ . Os grafos ciclos são grafos 2- regulares e os grafos completos são grafos  $(n - 1)$ -regulares. Os grafos 3- regulares também são chamados de *cúbicos*.

A Figura 2.5 (a), (b), (c) e (d) ilustra um grafo estrela  $S_6$ , um grafo roda  $W_7$ , um grafo completo  $K_4$  e o grafo de Petersen, que é 3-regular.

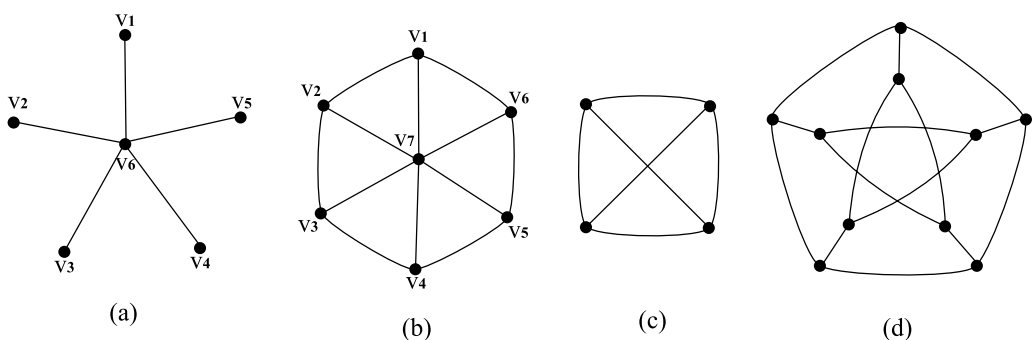


Figura 2.5: Grafo estrela, grafo roda, grafo completo e grafo de Petersen.

Um grafo é *k-partido* se os seus vértices são particionados em  $k$  conjuntos independentes. O estudo dessa classe é relevante devido a sua relação direta com o problema *k-COLORAÇÃO* de um grafo. Particularmente, quando  $k = 2$ , esses grafos são chamados de bipartidos. Se existem todas as arestas possíveis entre vértices desses  $k$  conjuntos independentes, esses grafos são chamados de *k-partidos completos*. De acordo com essas notações, os grafos bipartidos completos, onde uma parte contém  $x$  vértices e a outra  $y$ , são denotados por  $K_{x,y}$ .

A Figura 2.6 (a), (b) e (c) ilustra um grafo 3-partido, um grafo bipartido e um grafo bipartido completo  $K_{4,3}$ .

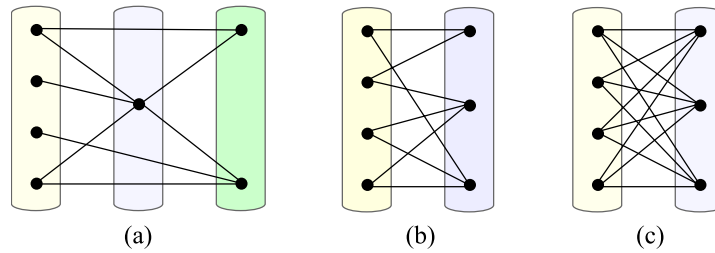


Figura 2.6: Grafo 3-partido, grafo bipartido e grafo bipartido completo.

Um grafo é *split* se seus vértices são particionados em dois conjuntos: um conjunto independente e o outro que induz um grafo completo.

Um grafo é *complemento* de um grafo se este foi obtido pela operação de complemento. Se  $G^c$  é complemento de  $G$ , então  $(G^c)^c = G$ , portanto, existe uma relação de unicidade entre o grafo  $G$  e seu complemento.

Um grafo é *cordal* se não existe ciclo induzido de tamanho maior ou igual a 4. Naturalmente, um grafo é *cocordal* se o seu grafo complemento é cordal. Existe uma ordenação  $(v_1, \dots, v_n)$  dos vértices de um grafo cordal tal que  $G[N^a(v_i)]$  é sempre um grafo completo, para todo  $2 \leq i \leq n$  cf. [14]. Esta ordenação recebe o nome de *esquema de eliminação perfeita*. Note que os grafos *split* são exatamente os grafos que são grafos cordais e grafos cocordais cf. [14].

A Figura 2.7 ilustra um grafo *split*, o seu grafo complemento (que também é *split*) e um grafo cordal com a ordenação de seus vértices seguindo um esquema de eliminação perfeita.

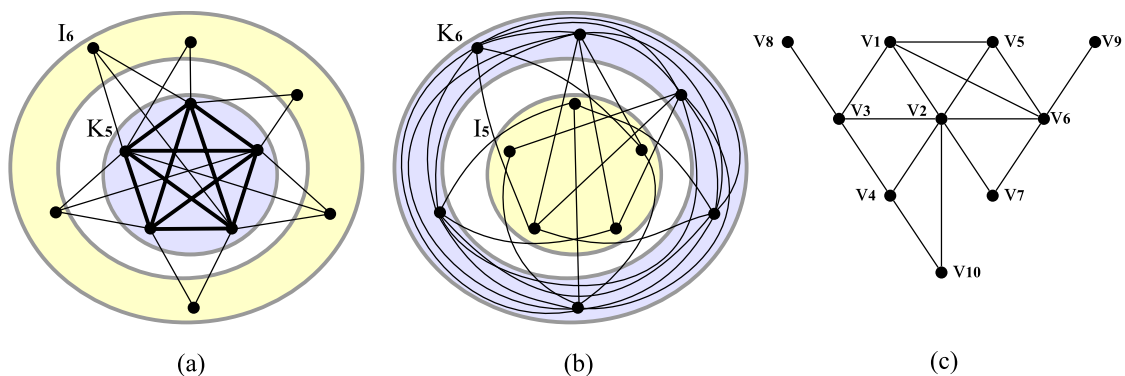


Figura 2.7: Grafo split; seu complemento e; grafo cordal.

Um grafo  $G$  de *interseção* de um modelo  $\mathcal{F}$  é tal que cada elemento de  $\mathcal{F}$  representa um vértice de  $G$  e existem arestas entre vértices de  $G$  se os seus elementos em  $\mathcal{F}$  têm alguma interseção.

Um grafo é de *comparabilidade* se existe uma ordenação transitiva de suas arestas, i.e., se existe aresta  $\vec{uv}$  e  $\vec{vw}$ , então também existe a  $\vec{uw}$ . Da mesma forma, um grafo

é de *cocomparabilidade* se o seu grafo complemento é um grafo de comparabilidade. Os grafos de cocomparabilidade são os grafos de interseção de linhas entre duas retas paralelas cf. [76].

Um grafo é de *intervalo* se é obtido a partir do grafo de interseção de um modelo de intervalos da reta real. Ou seja, são estabelecidos intervalos, com início e fim na reta real, cada intervalo corresponde a um vértice do grafo e existe aresta entre dois vértices se esses intervalos compartilham alguma interseção. Da mesma forma, um grafo é de *cointervalo* se o seu grafo complemento é um grafo de intervalo. Uma característica interessante dessa classe é que são exatamente os grafos que são grafos cordais e grafos de cocomparabilidade cf. [14].

Um grafo é de *permutação* se é obtido a partir do grafo de interseção de segmento de retas entre duas retas paralelas. Ou seja, cada segmento de reta corresponde a um vértice, e existe aresta entre dois vértices se os seus segmentos de retas se cruzam no modelo. Uma característica interessante dessa classe é que são exatamente os grafos que são grafos de comparabilidade e grafos de cocomparabilidade cf. [14].

A Figura 2.8 (a), (b) e (c) ilustra um grafo de intervalo com seu modelo de intervalos, um grafo de comparabilidade com a orientação transitiva de suas arestas e um grafo de permutação com seu modelo de permutação.

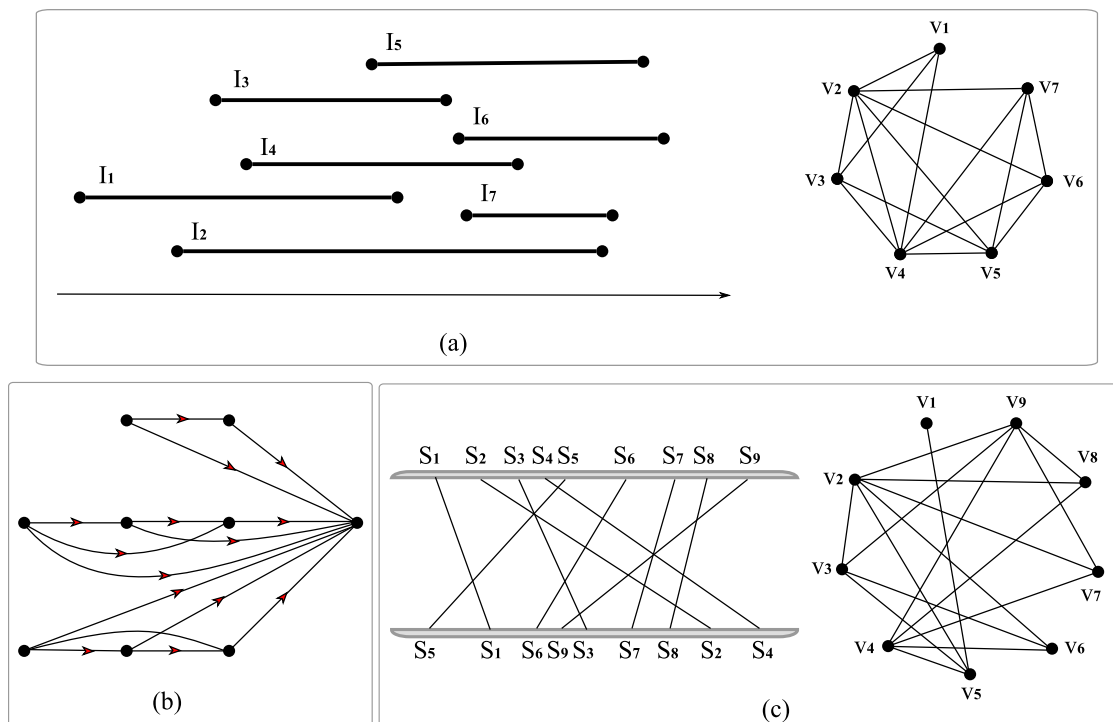


Figura 2.8: Grafo de intervalo, grafo de comparabilidade e grafo de permutação.

Um grafo é *cografo* se não existe caminho induzido de tamanho maior ou igual a 4. Um vértice isolado é um cografo, além disso, todo cografo é obtido por sucessivas operações de: **(i)** *união* de dois cografos; **(ii)** *join* de dois cografos cf. [14]. Fica como



observação que todo cografo é um grafo de permutação cf. [14], já que obtemos um modelo de permutação utilizando as operações realizadas para a construção deste grafo. I.e., cada vértice do cografo será um segmento de reta no modelo de permutação, uma operação de união entre dois cografos é representada por segmentos de retas referentes a cada cografo sendo colocados em regiões separadas do modelo e, uma operação de *join*, é representada por cruzar todos os segmentos de retas de um dos cografos com o do outro neste modelo.

Os grafos *threshold* são os grafos que são cografo e *split* ao mesmo tempo cf. [14]. Além disso, os grafos nessa classe são obtidos por sucessivas operações de: (i) adição de um vértice isolado; (ii) adição de um vértice universal cf. [14].

A Figura 2.9 (a) e (b) ilustra cografos obtidos pela operação de união ou *join* e grafos *threshold* obtidos adicionando um vértice isolado ou um vértice universal.

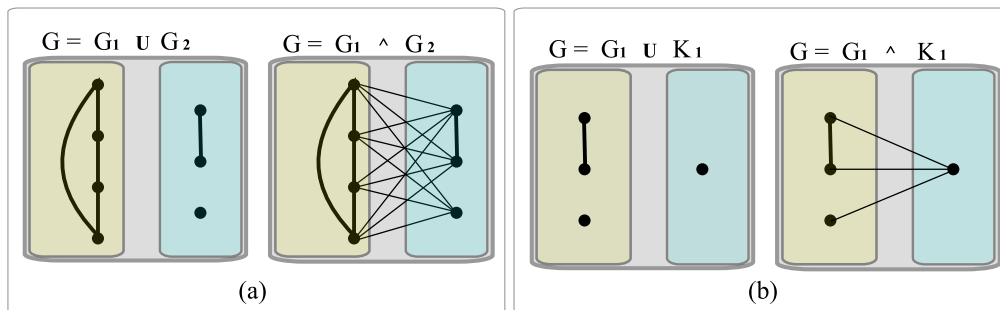


Figura 2.9: Cografos e grafos *threshold*.

Um grafo é diâmetro 2 se a distância entre todos seus pares de vértices é no máximo 2. Não é difícil ver a seguinte hierarquia de classes: grafos *threshold*  $\subseteq$  cografos  $\subseteq$  grafos diâmetro 2.

Um grafo é *fracamente cordal* se nem ele, nem o seu grafo complemento, possuem ciclos induzidos de tamanho maior ou igual a 5.

Os grafos *bipartido cordais* são os que são grafos bipartidos e grafos fracamente cordais ao mesmo tempo. Um outro modo de ver essa classe é que são os grafos bipartidos que não têm ciclo induzido de tamanho maior ou igual a 6.

Um grafo é *linha* se for obtido pelo operador linha de um grafo.

Um grafo é *total* se for obtido pelo operador total de um grafo.

Um grafo é *subdivisão* se for obtido por sucessivas operações de subdivisão de arestas de um grafo.

Um grafo é *incidente* se for obtido pela operação de subdivisão aplicada uma vez a cada aresta do grafo.

Um grafo é *planar* se existe uma representação gráfica do mesmo onde nenhuma das suas arestas se cruzam.

Um grafo é *periplanar* se é planar e existe representação gráfica dele onde todo vértice é adjacente a face externa da representação.

A Figura 2.10 (a), (b), (c) e (d) ilustra um grafo fracamente cordal, um grafo bipartido cordal, um grafo planar e um grafo periplanar, respectivamente.

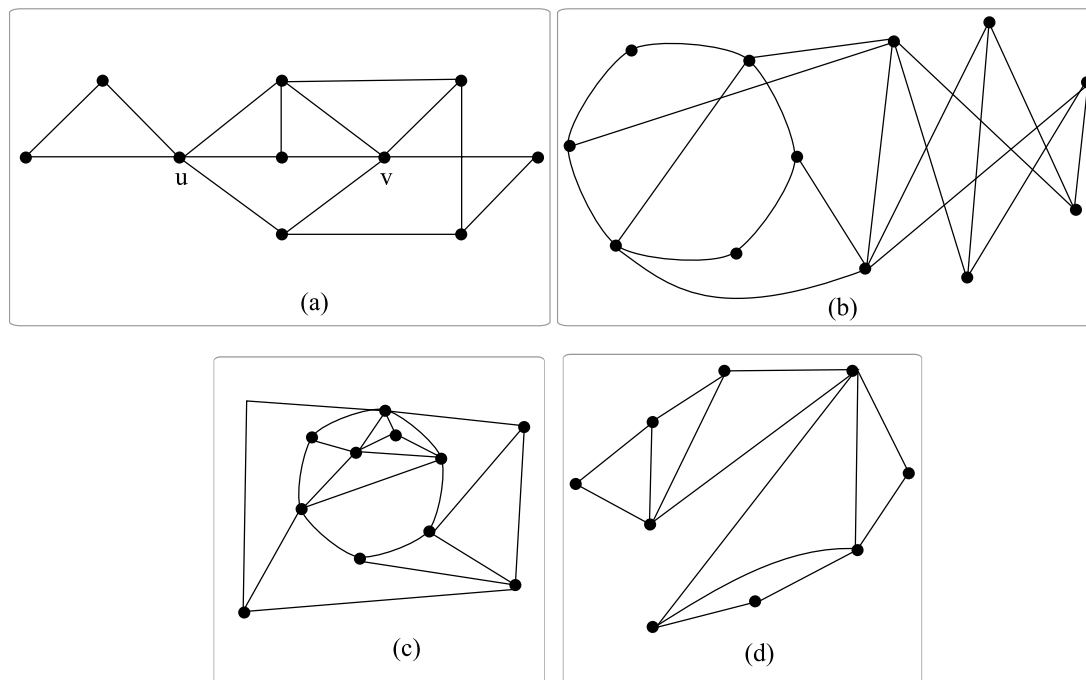


Figura 2.10: Grafos fracamente cordal, bipartido cordal, planar e periplanar.

A saber, uma propriedade muito conhecida para as classes de grafos é a de hereditariedade. Se uma classe é *hereditária*, então a remoção de vértices mantém o grafo resultante nessa classe. E.g., os grafos bipartidos, que ao remover qualquer conjunto de vértices continua sendo bipartido. Caso contrário, a classe é *não hereditária*. E.g., os grafos sem vértices universais, que ao remover um conjunto de todos os vértices menos a um, o grafo passa a ter um vértice universal. Dessas classes descritas acima, as seguintes classes são hereditárias: grafos completos, grafos  $k$ -partidos, grafos *split*, grafos complemento, grafos cordais, grafos cocordais, grafos comparabilidade, grafos cocomparabilidade, grafos de intervalo, grafos de cointervalo, grafos de permutação, cografos, grafos *threshold*, grafos fracamente cordais, grafos bipartido cordais, grafos linha, grafos planares, grafos periplanares. E, não são hereditárias: grafos conexos, árvores,  $p$ -quase árvores, grafos caminhos, grafos ciclos, grafos hamiltonianos, grafos estrelas, grafos rodas, grafos regulares, grafos diâmetro 2, grafos totais, grafos subdivisões, grafos incidentes.

No diagrama da Figura 2.11, se uma classe está acima da outra e existe uma aresta entre elas, então a de cima contém a classe de baixo.

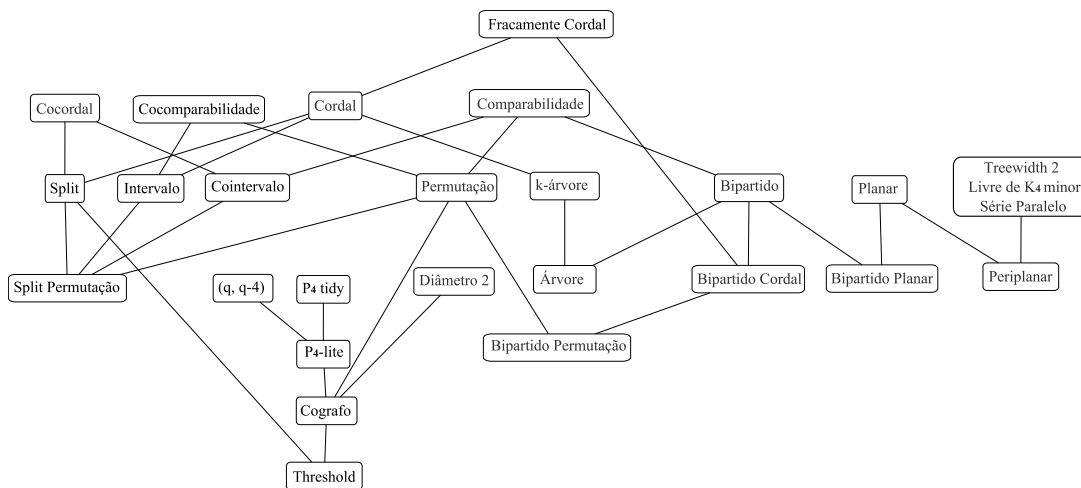


Figura 2.11: Diagrama de classes de grafos.

## 2.3 Problemas em grafos

Nessa seção vemos a definição de conhecidos problemas da teoria dos grafos. Discutimos brevemente também suas características, suas relações com outros problemas, soluções eficientes para classes específicas de grafos e dificuldades na obtenção de soluções para outras. A seguir, fornecemos definições para o tempo necessário na execução desses problemas.

A notação  $O$  é utilizada como um limite superior assintótico de uma função. Portanto, se  $f(x) = O(g(x))$ , então existem uma constante positiva  $c$  e um valor  $x_0$  tal que  $0 \leq f(x) \leq c g(x)$  para todo  $x \geq x_0$ . A *complexidade* de um algoritmo é o número máximo de operações básicas necessárias para a sua execução. Dizemos que um algoritmo é *linear*, *polinomial* ou *exponencial* se este tem como complexidade  $O$  o tamanho de sua entrada, um polinômio em relação a esse valor ou um expoente, respectivamente. I.e., se a entrada do problema for um grafo, a complexidade do algoritmo é linear se  $O(n + m)$ , polinomial se  $O((n + m)^c)$  para uma constante  $c$  ou exponencial se  $2^{O(n+m)}$ . A notação  $O^*$  é feita de forma semelhante, tal que se  $f(x) = O^*(g(x))$  então existem um polinômio positivo  $p(x)$  e um valor  $x_0$  tal que  $0 \leq f(x) \leq p(x) g(x)$  para todo  $x \geq x_0$ .

Um problema  $\pi$  está em  $\mathcal{NP}$  se, dado um candidato para sua solução, é possível verificar se este é verdadeiro em tempo polinomial.

Um problema  $\pi$  é de *decisão* se a sua resposta é do tipo **SIM** ou **NÃO**. Um problema de decisão  $\pi$  é  $\mathcal{NP}$ -completo se: **(i)**  $\pi \in \mathcal{NP}$  e; **(ii)** existe  $\pi_2 \in \mathcal{NP}$ -completo tal que  $\pi_2 \leq_P \pi$ . Isto é, existe uma transformação, denotada por  $\leq_P$ , do problema  $\pi_2$  no problema  $\pi$ , mantendo a complexidade polinomial, de forma que uma instância de  $\pi_2$  é **SIM** se, e somente se, a instância obtida pela transformação polinomial também é **SIM** em  $\pi$ . Se apenas a condição **(ii)** for verificada,  $\pi$  é  $\mathcal{NP}$ -difícil.

Os problemas  $\mathcal{NP}$ -completos são os mais difíceis da classe  $\mathcal{NP}$ . E, por isso, provar que os problemas  $\mathcal{NP}$ -completos são resolvidos com complexidade polinomial também provaria que  $P = \mathcal{NP}$ . O livro de Michael Garey e David Johnson [37] é deixado como referência para mais informações sobre classes de complexidade.

Enunciamos agora problemas relacionados a grafos que aparecem em vários momentos nessa tese.

## Caminho hamiltoniano [Ciclo hamiltoniano]

Considere um *caminho hamiltoniano* em um grafo  $G$  como um caminho de tamanho  $|V(G)| - 1$ . E, um *ciclo hamiltoniano* como sendo um ciclo de tamanho  $|V(G)|$  em  $G$ . Karp [58] provou que decidir se um grafo tem um caminho [ciclo] hamiltoniano é  $\mathcal{NP}$ -completo. Na verdade, o problema continua  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando restrito a classe dos grafos *split* cf. [41].

### CAMINHO HAMILTONIANO [CICLO HAMILTONIANO]

**Instância:** Um grafo  $G$ .

**Pergunta:** Existe um caminho [ciclo] hamiltoniano em  $G$ ?

## $k$ -Caminhos disjuntos

O problema de decidir se os vértices de um grafo são particionados em  $k$  subgrafos caminhos, disjuntos em vértices, é  $\mathcal{NP}$ -completo. Este é uma generalização do CAMINHO HAMILTONIANO, já que ficam equivalentes quando  $k = 1$ . O valor mínimo de  $k$  para o qual o problema  $k$ -CAMINHOS DISJUNTOS tem solução em um grafo  $G$  é denotado por  $pv(G)$ . O entendimento desse problema é importante pois, em diversas situações, existe uma relação muito próxima com o assunto dessa tese. A Figura 2.12 ilustra um grafo  $G$  e uma partição de seus vértices em três caminhos disjuntos.

### $k$ -CAMINHOS DISJUNTOS

**Instância:** Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

**Pergunta:** Os vértices de  $G$  são particionados em  $k$  caminhos disjuntos em vértices?

## $k$ -coloração

Uma *coloração de vértices*, ou simplesmente *coloração*, de um grafo  $G$  é uma função  $f$  que atribui números inteiros positivos aos vértices do grafo de tal forma

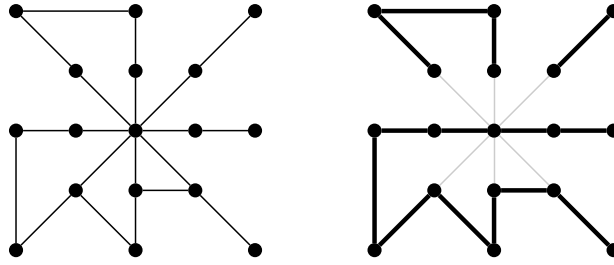


Figura 2.12: Grafo  $G$  com vértices particionados em três caminhos disjuntos.

que se  $uv \in E(G)$ , então  $f(u) \neq f(v)$ . O problema  $k$ -COLORAÇÃO recebe um grafo  $G$  e um inteiro  $k$  e decide se existe uma coloração de  $G$  utilizando  $k$  cores. O *número cromático* de um grafo  $G$ , menor  $k$  para o qual  $G$  tem uma coloração, é denotado por  $\chi(G)$ .

### $k$ -COLORAÇÃO

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ .

**Pergunta:** Existe uma atribuição  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que seja uma coloração de  $G$ ?

Rowland Brooks cf. [47] provou em 1941 o limite superior  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  para qualquer grafo  $G$  diferente de um grafo completo ou de um grafo ciclo ímpar, e que  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  nos casos contrários.

Além disso, 3-COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo cf. [37]. Na verdade, mesmo quando o grafo de entrada é restrito a grafos planares o problema permanece  $\mathcal{NP}$ -completo cf. [37]. Entre várias outras classes de grafos em que  $k$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo está a dos grafos linha. Este resultado segue diretamente da prova de  $\mathcal{NP}$ -completude da COLORAÇÃO DE ARESTAS de um grafo qualquer, que é enunciada em breve.

## Coloração de arestas

A coloração de arestas de um grafo surgiu em uma tentativa de prova para o problema 4-COLORAÇÃO dos vértices de um grafo planar, feita por Tait cf. [59]. Formalmente, uma *coloração de arestas* de um grafo  $G$  é uma função que atribui números inteiros positivos as arestas do grafo de tal forma que se duas arestas incidem em um mesmo vértice, então suas cores são diferentes. O *índice cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é dado pelo menor número de cores para o qual  $G$  tem uma coloração de aresta. Claramente, a coloração de arestas de um grafo  $G$  é relacionada diretamente a uma coloração de vértices de  $L(G)$ , grafo linha de  $G$ .

Como todo grafo tem pelo menos um vértice  $v$  com grau  $\Delta$  e, as  $|N_E(v)| = \Delta$  arestas incidentes a esse vértice têm cores diferentes, temos  $\chi' \geq \Delta$ . Vadim Vizing

cf. [47] provou em 1964 que  $\chi' \leq \Delta + 1$ . Consequentemente, só existem dois possíveis valores consecutivos para  $\chi'$  de um grafo:  $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$ . O problema COLORAÇÃO DE ARESTAS recebe um grafo  $G$  e decide se existe uma coloração de arestas  $G$  utilizando  $\Delta(G)$  cores. A Figura 2.13 (a) e (b) ilustra uma coloração de arestas do grafo de Petersen com  $\chi' = \Delta + 1 = 4$  e uma coloração de arestas de um grafo bipartido com  $\chi' = \Delta = 4$ .

### COLORAÇÃO DE ARESTAS

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$ .

**Pergunta:** Existe uma atribuição  $f : E \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G)\}$  que seja uma coloração de arestas de  $G$ ?

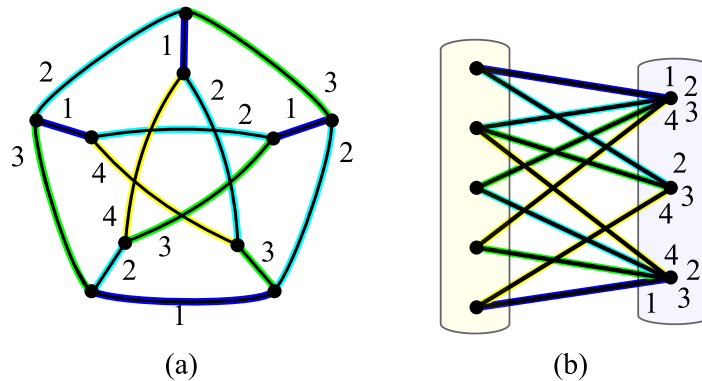


Figura 2.13: Coloração de arestas do grafo de Petersen e de um grafo bipartido.

Esse problema foi provador ser  $\mathcal{NP}$ -completo por Ian Holyer [54]. Posteriormente, Leizhen Cai e John Ellis [15] provaram que continuava  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a uma série de classes de grafos como grafos perfeitos, grafos de comparabilidade regulares, grafos linha, e grafos livres de  $K_{1,3}$  como subgrafo induzido.

Carmen Ortiz, Nelson Maculan e Jayme Szwarcfiter encontraram algoritmo polinomial para obter uma coloração de arestas ótima em grafos *split* indiferença [79] (um grafo é *de indiferença* se é o grafo de interseção de um modelo de intervalos onde nenhum intervalo contém outro). Outras classes de grafos também têm solução eficientemente, entre elas grafos bipartidos cf.[47], grafos série-paralelo [22], grafos  $k$ -partidos completos [53] e grafos com treewidth limitado [91] (grafos série-paralelo são os grafos com treewidth 2, sendo definidos no Capítulo 7). Mas note que ainda não se conhece algoritmo eficiente nem prova de  $\mathcal{NP}$ -completude para conhecidas classes de grafos como cografos, grafos *split* e grafos de intervalo próprio.

## $k$ -coloração total

Uma *coloração total* de um grafo  $G$  é uma função  $f$  que atribui números inteiros positivos aos vértices e arestas do grafo de tal forma que: **(i)** se  $uv \in E(G)$ , então  $f(u) \neq f(v)$ ,  $f(u) \neq f(uv)$  e  $f(v) \neq f(uv)$ ; e **(ii)** arestas que incidem em um mesmo vértice recebem cores diferentes. O *número total cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi_T(G)$ , é o menor número de cores para o qual existe uma coloração total de  $G$ . Claramente, a coloração total de um grafo  $G$  é relacionado diretamente a coloração de vértices de  $T(G)$ , grafo total de  $G$ . Mehdi Behzad cf. [90] conjecturou, em 1964, que  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ , e esta conjectura continua até hoje. Um limite inferior trivial é dado por  $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$ , já que esse número de cores é necessária na atribuição de cores de  $v$  e  $N_E(v)$ .

### $k$ -COLORAÇÃO TOTAL

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ .

**Pergunta:** Existe uma atribuição  $f : (V \cup E) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que seja uma coloração total de  $G$ ?

O problema  $k$ -COLORAÇÃO TOTAL é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a grafos bipartidos  $r$ -regulares com  $r \geq 3$  [74] e grafos livres de corda única [70].

Por outro lado, existem soluções polinomiais em outras classes como os grafos completos [90], grafos  $k$ -partidos completos [90], grafos grades [21], grafos série-paralelos [88] e grafos *split* indiferença [20]. A Figura 2.14 ilustra uma coloração total de um grafo de Petersen com quatro cores.

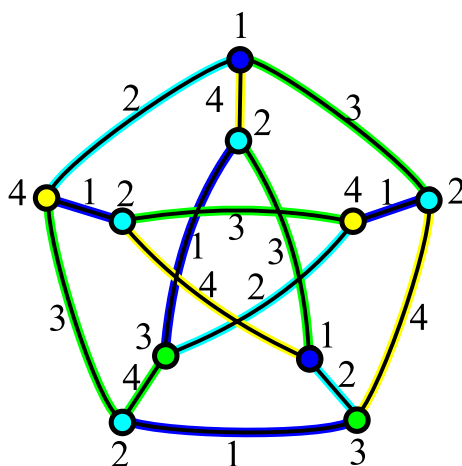


Figura 2.14: Coloração total de um grafo de Petersen com quatro cores.

# Capítulo 3

## $L(2, 1)$ -coloração

Este capítulo é dedicado a apresentar formalmente a  $L(2, 1)$ -coloração de grafos e suas variantes. Estão presentes certas propriedades de  $\lambda$  que são úteis no decorrer do texto, incluindo limites inferiores, superiores e uma evolução cronológica de tentativas de provas para a conjectura de Griggs e Yeh. Também estão descritos brevemente métodos para obtenção de uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em classes simples de grafos e outros, dados com um pouco mais de detalhes, para as classes dos cografos, árvores e grafos grades regulares. Ao fim, temos uma visão geral do estado da arte do problema, não só em relação a limites para  $\lambda$ , como também a sua dificuldade computacional, enunciando provas de  $\mathcal{NP}$ -completude e listando classes de grafos em que obtemos uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima eficientemente. Se o leitor desejar mais informações sobre o assunto, deixamos como referência o *survey* de  $L(h, p)$ -coloração de grafos escrito por Calamoneri [17], com versão atualizada em sua *homepage* [16].

Uma  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo  $G$  é uma função  $f$  que atribui a cada vértice de  $G$  um inteiro não negativo de forma que se dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são adjacentes, então  $|f(u) - f(v)| \geq 2$  e se dois vértices estão à distância 2, então  $f(u) \neq f(v)$ . Em geral, uma  $k$ - $L(2, 1)$ -coloração de um grafo  $G$  é uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$  com inteiros em  $\{0, \dots, k\}$ . O *span* de uma  $L(2, 1)$ -coloração é a maior cor utilizada. Uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$  é *ótima* quando possui o menor *span* possível e o *span* de tal atribuição é denotado por  $\lambda(G)$ , ou simplesmente  $\lambda$  quando  $G$  for subentendido. Na Figura 3.1 são ilustrados exemplos de  $L(2, 1)$ -colorações ótimas. Observe que, diferente de uma coloração, em uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima a menor cor utilizada é sempre 0.

### 3.1 Classes simples

Os resultados a seguir constam no artigo de Griggs e Yeh [44].



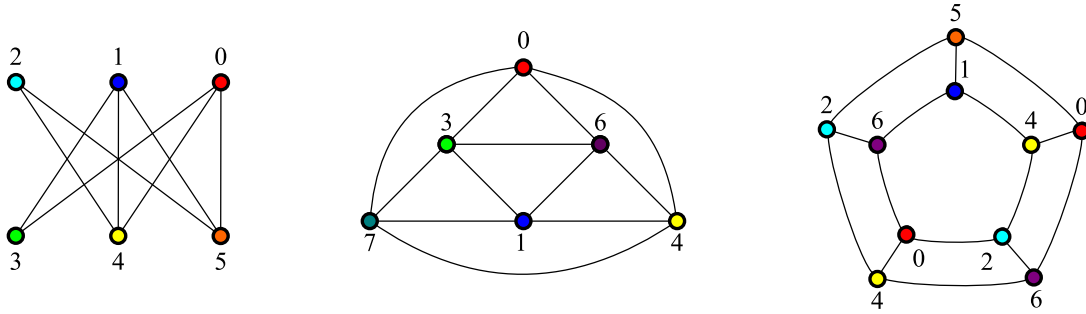


Figura 3.1:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas.

## Grafo completo

Como os pares de vértices são adjacentes dois a dois, todas as cores dos vértices precisam ter diferença de dois entre si, sendo  $\lambda = 2n - 2$ . A Figura 3.2 contém grafos completos com suas respectivas  $L(2, 1)$ -colorações ótimas.

**Teorema 3.1** (Griggs e Yeh [44]) *Para grafos completos,  $\lambda(K_n) = 2n - 2 = 2\Delta$ .*

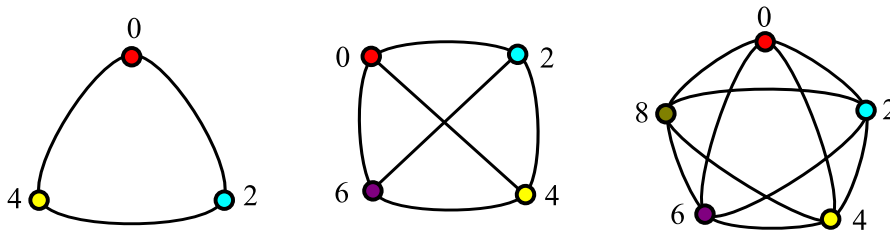


Figura 3.2:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos completos.

## Grafo caminho

Na Figura 3.3 (a) estão dispostas  $L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos caminhos com  $n \leq 4$ . Esses são os únicos grafos em que  $\lambda \leq 3$ , como descrito pela Propriedade 3.4. Por outro lado, pelo Teorema 3.23, decidir se um grafo tem ou não  $\lambda \leq k$ , para  $k \geq 4$  fixo, é um problema  $\mathcal{NP}$ -completo.

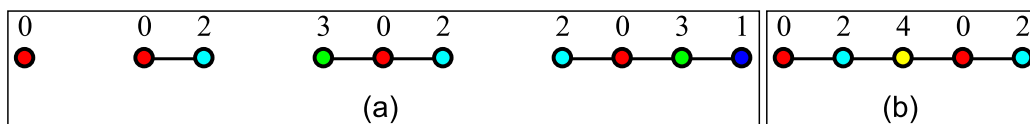


Figura 3.3:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos caminhos.

Na Figura 3.3 (b) é fornecida uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo caminho  $P_5$ , cujo  $span$  é 4. Esta é ótima, porque este grafo contém um  $D2T$  e, pela Propriedade 3.7,  $\lambda \geq \Delta + 2 = 4$ . O mesmo vale para qualquer  $P_n$  com  $n \geq 5$ , atribuindo sequencialmente as cores 0, 2 e 4 aos vértices do caminho.

**Teorema 3.2 (Griggs e Yeh [44])** Para grafos caminhos  $P_n$  com  $n \geq 5$ ,  $\lambda(P_n) = 4$ .

## Grafo ciclo

A Figura 3.4 apresenta  $L(2, 1)$ -colorações com  $span$  4 nos grafos ciclos com: **(a)**  $n \equiv 0 \pmod 3$ ; **(b)**  $n \equiv 1 \pmod 3$  e; **(c)**  $n \equiv 2 \pmod 3$ . Em **(a)** atribua sequencialmente as cores 0, 2 e 4 aos vértices do grafo ciclo no sentido horário. No caso **(b)** faça o mesmo que em **(a)**, a menos dos últimos quatro vértices, que recebem as cores 0, 3, 1 e 4. Para **(c)**, faça o mesmo que em **(a)**, a menos dos últimos dois vértices, que recebem as cores 1 e 3. Pela Propriedade 3.7,  $\lambda \geq \Delta + 2 = 4$  e essas  $L(2, 1)$ -colorações são ótimas.

**Teorema 3.3 (Griggs e Yeh [44])** Para grafos ciclos,  $\lambda(C_n) = 4$ .

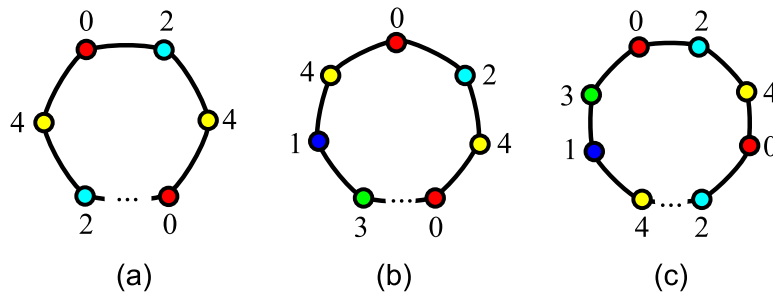


Figura 3.4:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos ciclos.

## Grafo estrela

A Figura 3.5 contém  $L(2, 1)$ -colorações com  $span$   $\Delta + 1$  nos grafos estrelas. Estas são obtidas da seguinte forma: atribua a cor 0 para o vértice universal e, injetivamente, as cores de 2 até  $n - 1$  para os outros vértices do grafo. Pela Propriedade 3.5,  $\lambda \geq \Delta + 1$  e essas  $L(2, 1)$ -colorações são ótimas.

**Teorema 3.4 (Griggs e Yeh [44])** Para grafos estrelas,  $\lambda(S_n) = \Delta + 1 = n$ .

## Grafo roda

O grafo  $W_4$  é um  $K_4$  e, pelo Teorema 3.1,  $\lambda(K_4) = 6$ . O grafo  $W_5$  é obtido por um *join* de  $K_1$  com  $C_4$ , que é um cografo e, como é visto na Seção 3.7.1,  $\lambda(W_5) = \lambda'(W_5) = \lambda'(K_1) + \lambda'(C_4) + 2 = 6$ .

Para  $W_n$  com  $n \geq 6$  obtemos uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span$   $n$  da seguinte forma: atribua a cor 0 para o vértice universal, as cores pares de 2 até  $n$  (ou  $n - 1$  se

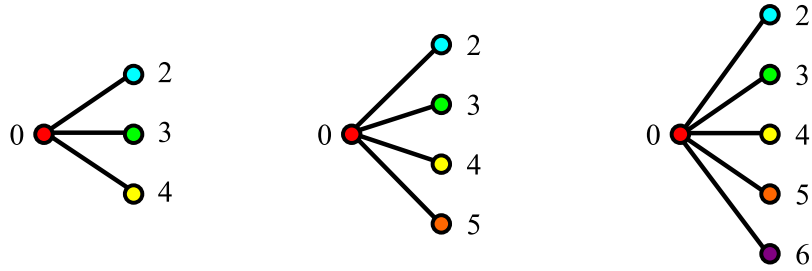


Figura 3.5:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos estrelas.

$n$  for ímpar) sequencialmente no sentido horário para os vértices do  $C_{n-1}$  induzido e, a seguir, as cores ímpares de 3 até  $n - 1$  (ou  $n$  se  $n$  for ímpar) sequencialmente para os vértices restantes. Pela construção, os únicos vértices que podem não respeitar as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração no caso  $n$  par são os com as cores  $n$  e 3 e, no caso ímpar, os com as cores  $n$  e 2. Mas, como  $n \geq 6$ , essas cores sempre têm diferenças no mínimo dois. Pela Propriedade 3.5,  $\lambda \geq \Delta + 1 = n$ , e essas  $L(2, 1)$ -colorações são ótimas.

**Teorema 3.5 (Griggs e Yeh [44])** *Para grafos rodas, com  $n \geq 5$ ,  $\lambda(W_n) = \Delta + 1 = n$ .*

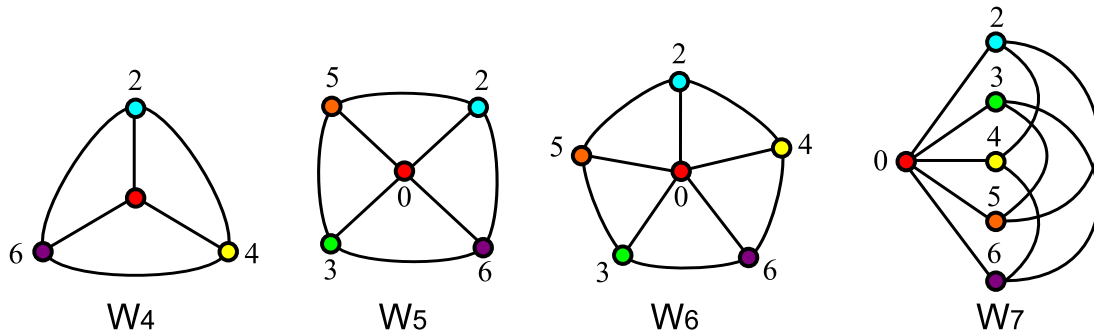


Figura 3.6:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas em grafos rodas.

## 3.2 Problema

O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO, proposto por Griggs e Yeh [44] em 1992, recebe como instância um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , e como pergunta a existência de uma  $k$ - $L(2, 1)$ -coloração de  $G$ . Tanto este problema, quanto suas variantes, são objetos de estudo de diversos pesquisadores, como é detalhado no restante do texto. De fato, diferente do problema da coloração de vértices de um grafo, o objetivo da versão de otimização deste problema não é minimizar o número de cores utilizadas e, sim, encontrar o menor valor do *span* para qual existe uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo. Na Figura 3.7 é ilustrada uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de um grafo com *span*

4, que utiliza cinco cores (0, 1, 2, 3, 4) e, ao lado, é dada outra com *span* 6, mas que só utiliza quatro cores (0, 2, 4 e 6). Mesmo não sendo o foco dessa tese, vale ressaltar que existem outros critérios de otimalidade diferentes da minimização do *span*, como decidir se um grafo tem uma  $L(2, 1)$ -coloração com *span*  $k$  utilizando todas as cores, tratado por Peter Fishburn e Roberts [36] ou verificar se tem uma  $L(2, 1)$ -coloração balanceada, onde o objetivo é que as cores sejam utilizadas o mesmo número de vezes, problema estudado por Ko-Wei Lih [66].

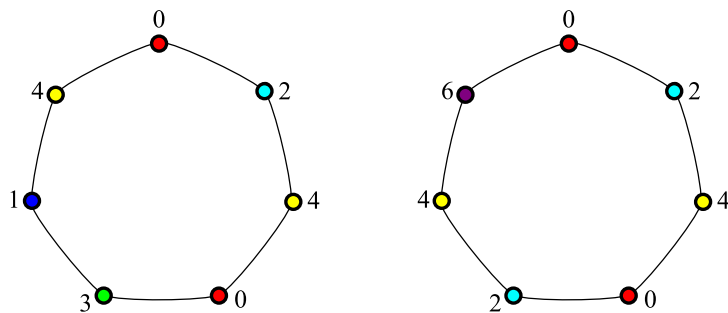


Figura 3.7:  $L(2, 1)$ -coloração ótima e outra não ótima, mas que usa menos cores.

### $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k$ .

**Pergunta:** Existe uma função  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  que seja uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$ ?

#### 3.2.1 $L(2, 1)$ '-coloração

Em seus estudos, Chang e Kuo [31] introduziram o conceito da  $L(2, 1)$ '-coloração, que é uma  $L(2, 1)$ -coloração com a restrição adicional de que cada cor só é utilizada no máximo uma vez. Esse conceito nos é útil em diversos momentos. Quando a  $L(2, 1)$ '-coloração é ótima, o seu *span* é denotado por  $\lambda'$ . Na Figura 3.8 (a) e (b) é ilustrado um exemplo de um grafo onde  $\lambda = 4$  e  $\lambda' = 5$ , respectivamente.

Os primeiros pesquisadores que notaram a estreita relação entre uma  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo  $G$  e o número de caminhos disjuntos de seu grafo complemento,  $pv(G^c)$ , foram Griggs and Yeh [44], que verificaram que  $pv(G^c) = 1$  (i.e.,  $G^c$  tem um caminho hamiltoniano) se, e somente se, existe uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G \wedge K_1$  com *span*  $|V(G)| + 1$ . Em seguida, Chang e Kuo [31] verificaram que  $\lambda' = n + pv(G^c) - 2$ . Indo além, Georges et al. [38] verificaram que, se  $\lambda \geq n - 1$ , então  $\lambda = n + pv(G^c) - 2$ . Enunciamos agora os seguintes teoremas utilizados em diversas provas desse trabalho.

**Teorema 3.6** (Chang e Kuo [31]) *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \lambda'(G) = n + pv(G^c) - 2$ .*

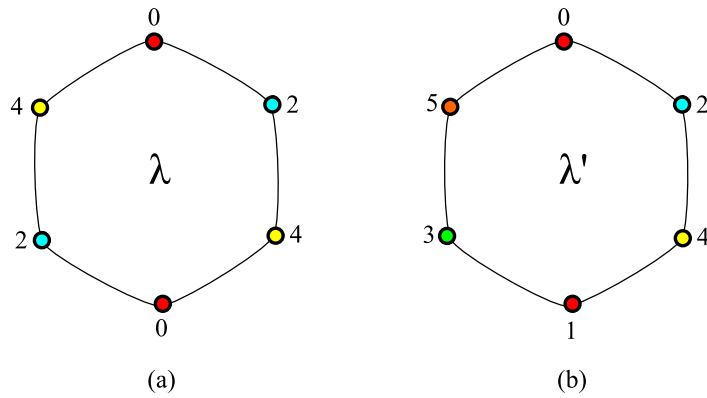


Figura 3.8:  $L(2, 1)$ -coloração ótima e  $L(2, 1)'$ -coloração ótima.

**Teorema 3.7** (Georges et al. [38]) *Para um grafo  $G$ ,  $pv(G^c) = 1$  se, e somente se,  $\lambda(G) \leq n - 1$  e,  $pv(G^c) \geq 2$  se, e somente se,  $\lambda(G) = n + pv(G^c) - 2$ .*

A Figura 3.9 (a) ilustra  $L(2, 1)$ -colorações ótimas de grafos utilizando (b) a partição dos vértices em caminhos disjuntos dos seus grafos complementos. Desta forma, atribuímos cores consecutivas aos vértices de  $G$  na ordem dos vértices nesses caminhos disjuntos de  $G^c$ , pulando uma cor entre o último vértice de um caminho e o primeiro do próximo.

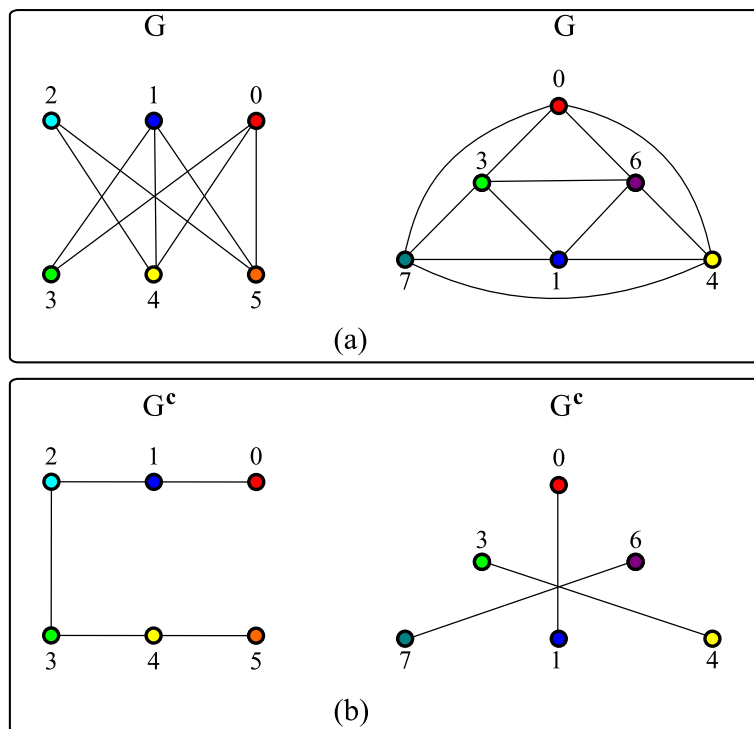


Figura 3.9:  $L(2, 1)$ -colorações ótimas e; partição dos vértices dos grafos complementos em caminhos disjuntos.

### 3.2.2 $L(h, p)$ -coloração

Uma  $L(h, p)$ -coloração é uma generalização de uma  $L(2, 1)$ -coloração, onde a função  $f$  associa a cada vértice do grafo  $G$  um inteiro não negativo de forma que se dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são adjacentes, então  $|f(u) - f(v)| \geq h$  e se dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  estão à distância 2, então  $|f(u) - f(v)| \geq p$ . Da mesma forma, uma  $k$ - $L(h, p)$ -coloração de um grafo  $G$  é uma  $L(h, p)$ -coloração de  $G$  que utiliza inteiros em  $\{0, \dots, k\}$ . Uma  $L(h, p)$ -coloração é *ótima* quando possui o menor *span* possível e o *span* de tal atribuição é denotado por  $\lambda_{h,p}(G)$ , ou simplesmente  $\lambda_{h,p}$  quando  $G$  for subentendido.

O conceito de  $L(h, p)$ -coloração, também foi descrito por Griggs e Yeh [44]. Em diversos momentos, ao tratar da  $L(2, 1)$ -coloração, pesquisadores estendem seus resultados para essa versão mais geral. Observe que uma  $L(2, 1)$ -coloração é uma particularização de uma  $L(h, p)$ -coloração onde  $h = 2$  e  $p = 1$ . Griggs e Yeh [44] também classificaram as  $L_c(h, p)$ -colorações, que são as  $L(ch, cp)$ -colorações. Claramente, temos  $\lambda_{ch,cp} = c\lambda(h, p)$ . Note que, no grafo da Figura 3.10, uma  $L(4, 2)$ -coloração ótima é obtida multiplicando por dois os valores das cores dos vértices de uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima, o mesmo vale para uma  $L(2, 4)$ -coloração ótima e uma  $L(1, 2)$ -coloração ótima.

Existem diversos casos particulares interessantes de  $L(h, p)$ -coloração. Por exemplo, se  $p = 0$ , uma  $L(h, 0)$ -coloração ótima é equivalente a uma coloração ótima de  $G$ , reduzindo as cores dos vértices em uma unidade e multiplicando esses valores por  $h$ . Quando  $h = 0$ , encontrar uma  $L(0, p)$ -coloração ótima se reduz a encontrar uma coloração ótima do grafo  $G^2 \setminus E(G)$  (i.e., só existem arestas entre vértices à distância 2 em  $G$ ), basta multiplicar por  $p$  as cores (menos uma unidade) dos vértices obtidas em uma coloração ótima de  $G^2 \setminus E(G)$ . Esta versão foi estudada por Tarek Makansi [71], Alan Bertossi e Maurizio Bonuccelli [9] e Roberto Battiti, Bertossi e Bonuccelli [6]. Quando  $h = p$ , encontrar uma  $L(h, h)$ -coloração ótima é equivalente a encontrar uma coloração ótima de  $G^2$ , de maneira análoga, basta multiplicar por  $h$  as cores (menos uma unidade) usadas na coloração ótima de  $G^2$ . Alguns trabalhos para esse caso são dados por Thomas McCormick [72], Yaw Lin e Steven Skiena [67] e Pinar Heggernes e Jan Telle [51].

## 3.3 Propriedades de uma $L(2, 1)$ -coloração

A seguir são descritas propriedades para uma  $L(2, 1)$ -coloração, feitas por Griggs e Yeh [44], que nos ajudam a simplificar provas durante o resto deste texto.

**Propriedade 3.1** *Se um grafo  $G$  tem várias componentes conexas  $G_1, \dots, G_p$ ,  $\lambda(G) = \max\{\lambda(G_1), \dots, \lambda(G_p)\}$ .*

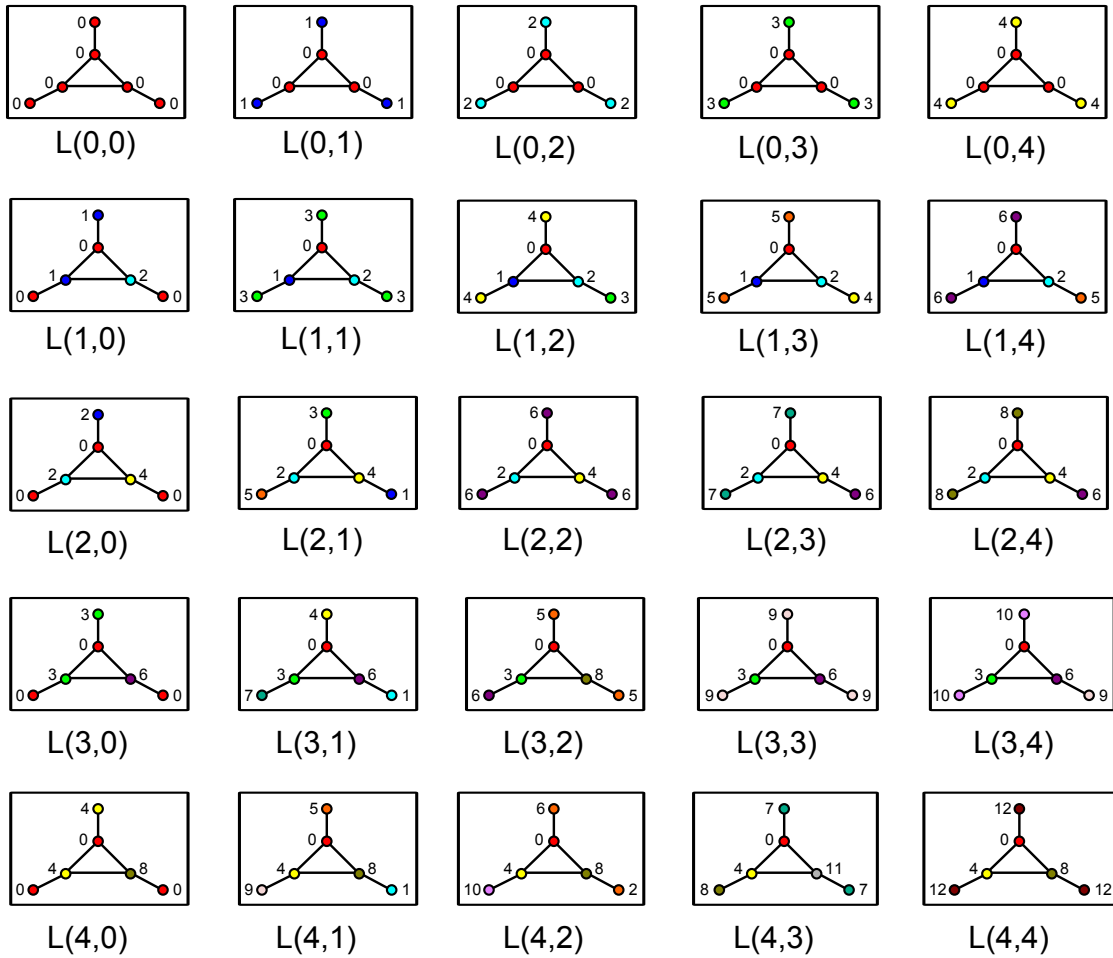


Figura 3.10:  $L(h,p)$ -colorações ótimas.

**Prova.** Em uma  $L(2,1)$ -coloração, os vértices de uma componente conexa não influem na atribuição de cores de vértices em outras componentes conexas, portanto, tomamos  $\lambda$  como o máximo entre os das componentes conexas do grafo.  $\square$

**Propriedade 3.2** Se  $H$  é um subgrafo de um grafo  $G$ , então  $\lambda(H) \leq \lambda(G)$ .

**Prova.** Como  $H$  é subgrafo de  $G$ , no pior caso, mantemos a mesma atribuição da  $L(2,1)$ -coloração de  $G$  nos vértices de  $H$ .  $\square$

**Propriedade 3.3** Para um grafo  $G$ , com  $\Delta = 2$ ,  $\lambda(G) \leq 4$ .

**Prova.** Cada componente conexa em um grafo com  $\Delta = 2$  induz um grafo ciclo ou um grafo caminho. Pelos Teoremas 3.2 e 3.3,  $\lambda(P_n) \leq 4$  e  $\lambda(C_n) = 4$ . E, pela Propriedade 3.1,  $\lambda(G) \leq 4$ .  $\square$

**Propriedade 3.4** Se  $G$  é um grafo com  $\lambda \leq 3$ , então  $G$  é uma floresta de caminhos de tamanho no máximo três.

**Prova.** Pela Propriedade 3.2 e pelo Teorema 3.4, se  $\lambda(G) \leq 3$ , então todo vértice tem no máximo grau 2. Como descrito no Teorema 3.3, todo ciclo tem *span* 4. Portanto, as componentes conexas desse grafo são caminhos que, pelo Teorema 3.2, têm no máximo quatro vértices.  $\square$

**Propriedade 3.5** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 1$ ,  $\lambda(G) \geq \Delta + 1$ .*

**Prova.** Seja  $v$  um vértice de grau  $\Delta$  de  $G$  e  $f$  uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$ . Os vértices em  $N(v)$  precisam de  $|N(v)| = \Delta$  cores diferentes, pois estão à distância 2 entre si. Além disso, as cores  $f(v) - 1$ ,  $f(v)$  e  $f(v) + 1$  não fazem parte dessas  $\Delta$  cores utilizadas por vértices em  $N(v)$ . No melhor caso, sem perda de generalidade,  $f(v) = 0$  e são necessárias  $\Delta + 2$  cores, disponíveis somente em  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$ .  $\square$

**Propriedade 3.6** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 1$  e uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$ , se existe um vértice  $v$  de grau  $\Delta$  com  $f(v) \neq \{0, \Delta + 1\}$ , então  $\lambda(G) \geq \Delta + 2$ .*

**Prova.** Os vértices em  $N(v)$  precisam de  $|N(v)| = \Delta$  cores diferentes, pois estão à distância 2 entre si. Além disso, as cores  $f(v) - 1$ ,  $f(v)$  e  $f(v) + 1$  não fazem parte dessas  $\Delta$  cores utilizadas por vértices em  $N(v)$ . Portanto, são necessárias  $\Delta + 3$  cores, só disponíveis quando  $\lambda(G) \geq \Delta + 2$ .  $\square$

**Propriedade 3.7** *Para um grafo  $G$  com uma  $D2T$  (três vértices de grau  $\Delta$  com distância no máximo 2 entre qualquer par deles),  $\lambda(G) \geq \Delta + 2$*

**Prova.** Todos os três vértices recebem cores diferentes entre si. Como pelo menos um deles não recebe cor em  $\{0, \Delta + 1\}$ , pela Propriedade 3.6,  $\lambda(G) \geq \Delta + 2$ .  $\square$

**Propriedade 3.8** *Para um grafo  $G$ , com  $\Delta \geq 1$ , existem ao menos duas  $L(2, 1)$ -colorações ótimas.*

**Prova.** Seja  $f$  uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$ . Defina  $f'(v) = \lambda(G) - f(v)$ ,  $\forall v \in V(G)$ . Temos  $|f'(u) - f'(v)| = |(\lambda - f(u)) - (\lambda - f(v))| = |f(u) - f(v)|$ . Ou seja, a diferença das cores entre qualquer par de vértices de  $G$  em  $f$  se mantém em  $f'$ , respeitando as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$ . Além disso, para qualquer cor  $c$  utilizada por  $f$ , temos  $(\lambda - c) \in \{0, \dots, \lambda\}$  em  $f'$ . Portanto, se  $f$  é uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima, o mesmo vale para  $f'$ .  $\square$

**Propriedade 3.9** *Em uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de um grafo  $G$  a cor 0 é sempre utilizada.*



**Prova.** Suponha por contradição uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de  $G$  com  $span \lambda$  onde a primeira cor utilizada é  $c \neq 0$ . Defina  $f'$  tal que  $f'(v) = f(v) - c, \forall v \in V(G)$ . A diferença entre as cores de qualquer par de vértices de  $G$  em  $f$  se mantém em  $f'$ . Entretanto, o  $span$  de  $f'$  é  $\lambda - c$ , um absurdo com o fato de  $f$  ser uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima com  $span \lambda$ .  $\square$

**Propriedade 3.10** *Em uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de um grafo  $G$  não existem duas cores consecutivas não utilizadas.*

**Prova.** Suponha por contradição duas cores  $a$  e  $a + 1$  em  $\{0, \dots, \lambda\}$  não utilizadas em uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de  $G$ . Defina  $f'$ :

$$\forall v \in V(G), f'(v) = \begin{cases} f(v), & \text{se } f(v) \leq a - 1 \\ f(v) - 1, & \text{se } f(v) \geq a + 2, \end{cases}$$

Tal atribuição  $f'$  não desrespeita nenhuma restrição de uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$  e tem  $span$  menor que  $f$ , um absurdo.  $\square$

**Propriedade 3.11** *Para um grafo  $G$ ,  $\chi(G^2) - 1 \leq \lambda(G) \leq 2\chi(G^2) - 2$ .*

**Prova.** Uma  $L(1, 1)$ -coloração de um grafo  $G$  é relacionada diretamente a uma coloração do grafo  $G^2$ . Assim,  $\chi(G^2) \leq \lambda_{1,1}(G) + 1$ . Em particular, toda  $L(2, 1)$ -coloração é uma  $L(1, 1)$ -coloração. Portanto,  $\chi(G^2) - 1 \leq \lambda_{1,1}(G) \leq \lambda(G)$ .

Seja  $f$  uma coloração ótima de  $G^2$ . Em  $G$ , a função  $f$  não atribui cores iguais a vértices que estejam adjacentes ou à distância 2. Seja  $f'(v) = 2(f(v) - 1), \forall v \in V(G)$ . Todo par de vértices adjacentes ou à distância 2 em  $G$  têm cores com diferença pelo menos dois em  $f'$ , que é uma  $L(2, 2)$ -coloração de  $G$  com  $span 2\chi(G^2) - 2$ . Como toda  $L(2, 2)$ -coloração é uma  $L(2, 1)$ -coloração, então  $\lambda(G) \leq \lambda_{2,2}(G) \leq 2\chi(G^2) - 2$ .  $\square$

### 3.4 Algoritmos gulosos

Um *método guloso* de  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo  $G$  e de uma ordenação  $O$  dos seus vértices escolhe a menor cor disponível aos vértices, seguindo a ordem dada por  $O$ , e considerando a atribuição de cores parcial dos vértices que o precedem na ordenação. Seja  $G$  um grafo,  $X \subseteq V(G)$  e  $f$  uma  $k$ - $L(2, 1)$ -coloração de  $G[X]$  (portanto, uma  $L(2, 1)$ -coloração parcial de  $G$ ). O *conjunto de cores proibidas* para um vértice  $v$  ainda não colorido, denotado por  $Pro(v)$ , é o conjunto de todas as cores  $c - 1, c, c + 1$  e  $d$  em  $\{0, \dots, k\}$  tais que existe  $u \in N(v)$  cujo  $f(u) = c$  e  $w \in N_2(v)$  cujo  $f(w) = d$ .

**Propriedade 3.12** *Em uma  $L(2,1)$ -coloração de um grafo, obtida por uma abordagem gulosa, ao atribuir a cor  $c$  a um vértice  $v$ , temos  $c \leq |Pro(v)|$ .*

**Prova.** Segue trivialmente do fato de que existem  $|Pro(v)| + 1$  cores em  $\{0, \dots, |Pro(V)|\}$  disponíveis para serem atribuídas a  $v$  e o número máximo de cores proibidas de  $v$  é  $|Pro(v)|$ .  $\square$

**Propriedade 3.13** *Em uma  $k$ - $L(2,1)$ -coloração de um grafo  $G$ , obtida por uma abordagem gulosa, temos  $k \leq \max_{v \in V(G)} \{|Pro(v)|\}$ .*

**Prova.** Pela Propriedade 3.12,  $f(v) \leq |Pro(v)|$ , para  $v \in V(G)$ . Como  $k = \max_{v \in V(G)} \{f(v)\}$ , tal  $L(2,1)$ -coloração tem  $span$   $k \leq \max_{v \in V(G)} \{|Pro(v)|\}$ .  $\square$

Uma variação do método guloso para atribuição de cores é dada por Colin McDiarmid [73]. Nesta, em vez de atribuirmos a menor cor disponível aos vértices, seguindo a ordenação recebida, repetimos o processo de atribuir as cores, de forma crescente, a todos os vértices na ordenação dada, até todos receberem cores. A Figura 3.11 descreve a aplicação do método de McDiarmid em uma  $L(2,1)$ -coloração de um grafo  $G$ .

**Teorema 3.8 (McDiarmid [73])** *O  $span$  de uma  $L(2,1)$ -coloração de um grafo  $G$  e uma ordenação  $O$  qualquer de  $V(G)$ , obtida pelo método de McDiarmid, é  $\max_{v \in V(G)} 2|N^a(v)| + |N^d(v)| + |N_2^a(v)|$ .*

**Prova.** Sejam  $k$  a maior cor dada a um vértice  $v_j$  nesse método e  $v_i \in N^a(v_j)$ . Se  $v_i$  já recebeu uma cor menor que  $k$ , então  $f(v_i)$  e  $f(v_i) + 1$  ficam proibidas a  $v_j$  por causa de  $v_i$ . Note que a cor  $f(v_i) - 1$  não foi atribuída a  $v_j$  por outro motivo, já que essa foi oferecida primeiro a  $v_i$  e depois a  $v_j$ , não sendo utilizadas por ambos. Portanto, cada  $v_i \in N^a(v_j)$  proíbe no máximo duas cores a  $v_j$ . De maneira análoga, todo vértice  $v_i \in N_2^a(v_j)$  proíbe no máximo uma cor a  $v_j$ .

Por outro lado, seja  $v_k \in N^d(v_j)$ . Se  $v_k$  recebeu cor menor que  $k$ , então somente  $f(v_k) + 1$  fica proibida a  $v_j$  por causa de  $v_k$ . Isso porque as cores  $f(v_k) - 1$  e  $f(v_k)$  foram oferecidas e recusadas por  $v_i$ , mesmo antes de serem recusada e atribuída a  $v_k$ , respectivamente. De maneira análoga todo vértice  $v_k \in N_2^d(v_j)$  não proíbe cores a  $v_j$ , já que a sua cor é oferecida e recusada por  $v_i$ , mesmo antes de ser atribuída a  $v_k$ .

Assim, um vértice  $v_i$  nesta atribuição recebe uma cor  $f(v_i) \leq 2|N^a(v_i)| + |N_2^a(v_i)| + |N^d(v_i)|$ , sendo  $\lambda(G) \leq \max_{v \in V} \{2|N^a(v)| + |N_2^a(v)| + |N^d(v)|\}$ .  $\square$

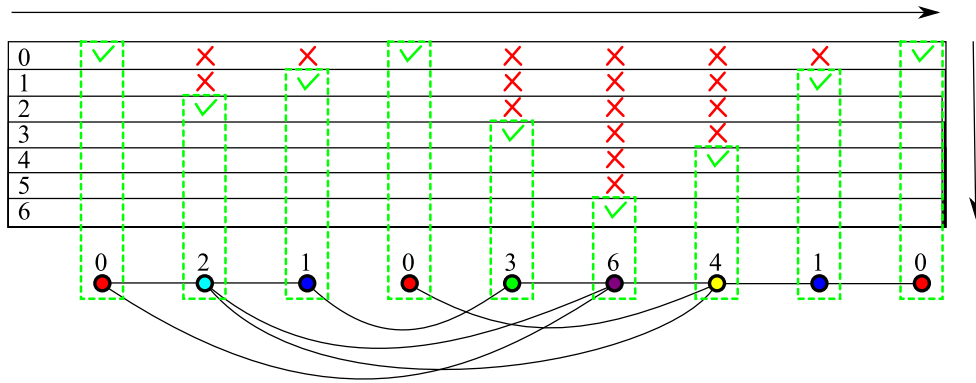


Figura 3.11: Método de McDiarmid para  $L(2,1)$ -coloração de grafos.

### 3.5 Conjectura de Griggs e Yeh ( $\lambda \leq \Delta^2$ )

Griggs e Yeh [44] estabeleceram a conjectura mais conhecida sobre  $L(2,1)$ -colorações, de que  $\lambda \leq \Delta^2$ . Nesse mesmo artigo verificaram que essa conjectura é verdadeira para grafos com  $\Delta = 2$  (vide Propriedade 3.3). É importante e necessário estabelecer um limite superior justo para a  $L(2,1)$ -coloração, como já existem para coloração ( $\chi \leq \Delta$ ), encontrado por Brooks cf. [47], coloração de aresta ( $\chi' \leq \Delta + 1$ ), encontrado por Vizing cf. [47] e é conjecturado por Behzad cf. [90] para coloração total ( $\chi_T \leq \Delta + 2$ ). A prova da conjectura de Griggs e Yeh será, com certeza, um marco importante nos trabalhos sobre  $L(2,1)$ -coloração de um grafo.

**Conjectura 3.9 (Griggs e Yeh [44])** *Para um grafo com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda \leq \Delta^2$ .*

Até hoje, o único caso conhecido que  $\lambda \geq \Delta^2$  é o grafo  $K_2$  (e os grafos que têm vários  $K_2$ 's e  $K_1$ 's como componentes conexas), que tem  $\Delta = 1$  e  $\lambda = 2$ . E, os únicos grafos (conexos) conhecidos que atingem a cota do limite superior são os grafos caminhos, grafos ciclos, o grafo de Petersen e o grafo de Hoffman-Singleton, que são vistos na Figura 3.12. Os grafos de Petersen e de Hoffman-Singleton são listados como grafos de Moore com diâmetro 2, que são os grafos diâmetro 2 com  $n = \Delta^2 + 1$ . Allan Hoffman e Robert Singleton [52] conjecturaram a existência de outro com  $\Delta = 57$  e  $n = 3250$  (este também seria um exemplo de grafo com  $\lambda = \Delta^2$ ). Surpreendentemente, ainda está em aberto encontrar uma classe de grafos infinita com  $\Delta \geq 3$  em que  $\lambda = \Delta^2 - O(1)$  [17].

#### Griggs e Yeh

Em 1992, Griggs e Yeh [44] deram os primeiros passos na busca de uma prova para a sua conjectura, estabelecendo um limite superior para  $\lambda$  em grafos. Para tal, fizeram uma análise na abordagem gulosa de atribuição de cores. A Figura 3.13 detalha uma  $L(2,1)$ -coloração de um grafo obtida dessa forma, contendo as sete atribuições de cores aos vértices, seguindo a ordenação dada.

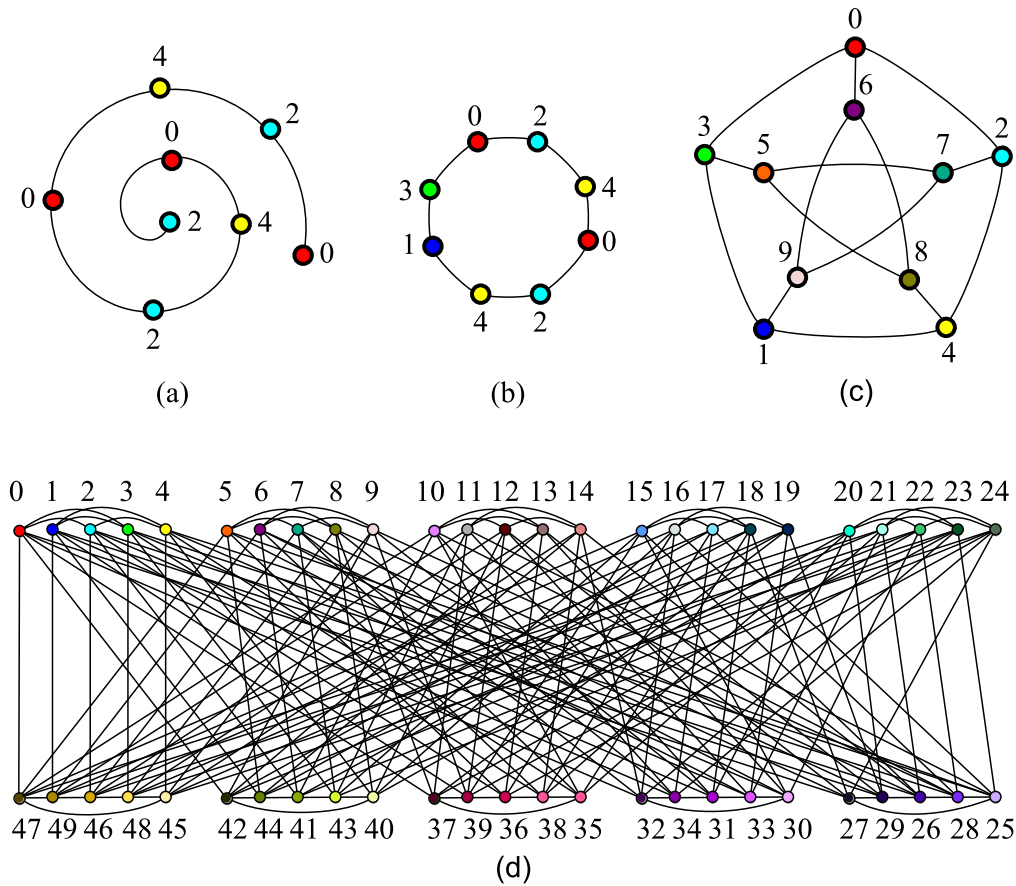


Figura 3.12: Grafos conhecidos com  $\lambda = \Delta^2$ .

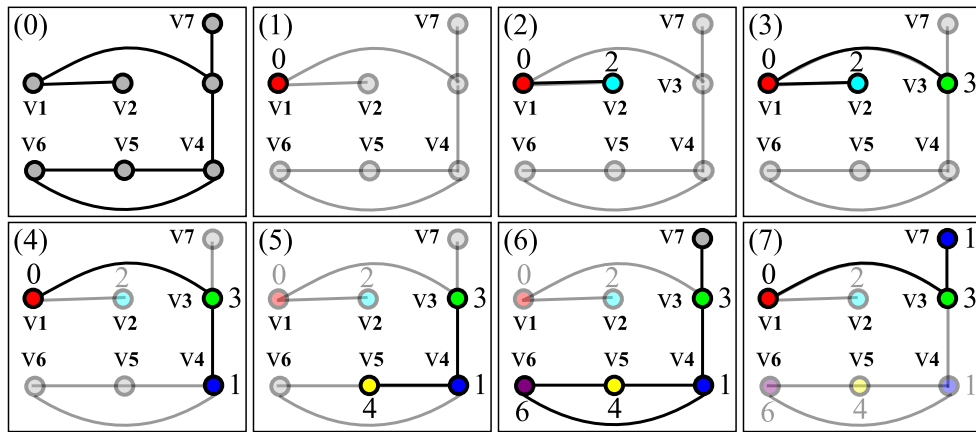


Figura 3.13: Uma  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo utilizando uma abordagem gulosa.

**Teorema 3.10 (Griggs e Yeh [44])** Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ .

**Prova.** Utilize uma abordagem gulosa de  $L(2, 1)$ -coloração em qualquer ordenação dos vértices de  $G$ . Como  $|Pro(v)| \leq 3|N(v)| + |N_2(v)|$ ,  $|N(v)| \leq \Delta$  e  $|N_2(v)| \leq \Delta(\Delta - 1)$  para todo  $v \in V(G)$ , pela Propriedade 3.13,  $\lambda(G) \leq \max_{v_i \in V(G)} \{3|N(v_i)| + |N_2(v_i)|\} \leq \Delta^2 + 2\Delta$ .  $\square$

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo de Griggs e Yeh

---

**Entrada:** Um grafo  $G$  e uma ordenação  $O = (v_1, \dots, v_n)$  de  $V(G)$

**Saída:** Uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$

**Para**  $1 \leq i \leq n$ , **faça**

$cores(v_i) \leftarrow \{0, \dots, \Delta^2 + 2\Delta\}$ ;

$f(v_i) \leftarrow -1$ ;

**Para**  $1 \leq i \leq n$ , **faça**

$f(v_i) \leftarrow \min\{cores(v_i)\}$ ;

**Para** todo  $v_j \in N(v_i)$  **faça**

$cores(v_j) = cores(v_j) \setminus \{f(v_i) - 1, f(v_i), f(v_i) + 1\}$ ;

**Para** todo  $v_j \in N_2(v_i)$  **faça**

$cores(v_j) = cores(v_j) \setminus \{f(v_i)\}$ ;

**Retornar**  $f$ ;

---

## Chang e Kuo

Em seguida, em 1996, Chang e Kuo [31] apresentaram um algoritmo que reduzia consideravelmente o limite superior de  $\lambda$  dado por Griggs e Yeh [44]. Para isso, faziam uma escolha inteligente dos vértices, levando em conta as suas distâncias.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo de Chang e Kuo

---

**Entrada:** Um grafo  $G$

**Saída:** Uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$

$i \leftarrow -1$ ;

$F_i \leftarrow \emptyset$ ;

$S_i \leftarrow \emptyset$ ;

**Enquanto** existir  $v \in V(G)$  sem cor **faça**

$i \leftarrow i + 1$ ;

$F_i = \{u \in V(G) \mid u \text{ não tem cor e } d(u, v) \geq 2, \forall v \in S_{i-1}\}$ ;

$S_i \leftarrow$  subconjunto de  $F_i$  2-estável maximal em  $G$ ;

**Para** cada  $w \in S_i$  **faça**

$f(w) \leftarrow i$ ;

**Retornar**  $f$ ;

---

**Lema 3.11 (Chang e Kuo [31])** *A saída do algoritmo de Chang e Kuo, é uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  do grafo  $G$ , dado como entrada.*

**Prova.** Todo vértice  $v$  recebe cor. Mesmo se  $F_j$  e  $S_j$  estejam vazios em uma iteração  $j$ , na próxima iteração  $j + 1$ , todo vértice sem cor faz parte de  $F_{j+1}$ , e o algoritmo só se encerraria após todos tiverem sido selecionados. Falta mostrar que a função  $f$  respeita as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$ . A restrição de distância 2 é respeitada, já que todo vértice que recebem uma mesma cor estão em um conjunto 2-estável, ou seja, estão à distância pelo menos 2 entre si. Já a restrição de adjacência é respeitada pelo fato que dois vértices  $u \in S_a$  e  $v \in S_{a+1}$

que recebem cores consecutivas  $a$  e  $a + 1$  não são adjacentes, pois  $S_{a+1} \subseteq F_{a+1}$  e  $F_{a+1}$  é formado por vértices que estão à distância pelo menos 2 de vértices de  $S_a$ .  $\square$

**Teorema 3.12 (Chang e Kuo [31])** *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ .*

**Prova.** Sejam  $f$  uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$  obtida pelo algoritmo de  $L(2, 1)$ -coloração de Chang e Kuo,  $k$  a última cor utilizada e  $v$  um vértice escolhido nessa última iteração  $k$ . Defina  $I_1$  como o conjunto de cores usadas por vértices em  $N(v)$ ,  $I_2$  o conjunto de cores usadas por vértices em  $(N(v) \cup N_2(v))$  e  $I_3$  o conjunto de cores usadas por vértices em  $(V(G) \setminus (N(v) \cup N_2(v)))$  (ou seja, cores em vértices à distância no mínimo 3 de  $v$ ).

Para cada cor  $i \in I_3$ , temos  $i - 1 \in I_1$ . Caso contrário, na iteração  $i < k$ , não existem vértices em  $N(v) \cup N_2(v)$  com a cor  $i$  e vértices em  $N(v)$  com a cor  $i - 1$ , e o vértice  $v$  faria parte de  $S_i$ , que é maximal. Portanto,  $|I_3| \leq |I_1|$ . Nesse sentido, por conveniência, as cores  $i$  não utilizadas pelo algoritmo também são atribuídas ao conjunto  $I_3$ , isto não altera a inequação anterior já que, da mesma forma, as cores  $i - 1$  precisam estar em  $I_1$ .

Ao fim do algoritmo temos  $k = |I_2| + |I_3|$  (onde  $k$  é a última cor utilizada). Como  $|I_2| \leq \Delta^2$  (pois  $|N(v) \cup N_2(v)| \leq \Delta^2$ ) e  $|I_1| \leq \Delta$ ,  $\lambda \leq k = |I_2| + |I_3| \leq |I_2| + |I_1| \leq \Delta^2 + \Delta$ .  $\square$

A Figura 3.14 descreve a aplicação do algoritmo do Teorema 3.12. É interessante verificar que, neste grafo, o algoritmo encontrou uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span$  5, enquanto  $\lambda = 4$ .

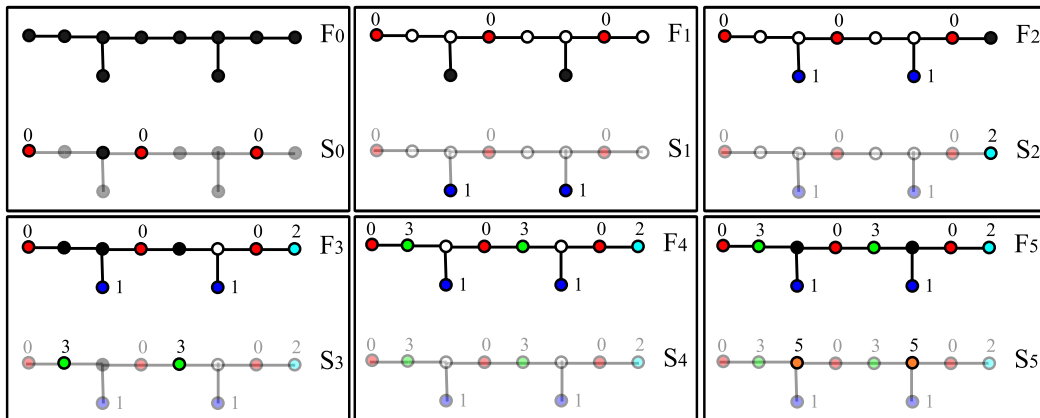


Figura 3.14: Algoritmo de Chang e Kuo para  $L(2, 1)$ -coloração de grafos.

## Král e Skrekovski

O problema da  $k$ -COLORAÇÃO DE CANAIS recebe como entrada um grafo  $G$  e uma atribuição  $w : E \rightarrow \mathbb{N}$  de números inteiros às suas arestas e, como pergunta,

---

**Algoritmo 3:** Algoritmo de Král e Skrekovski

---

**Entrada:** Um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 2$  e uma ordenação  $O' = (v_1, \dots, v_n)$  de  $V(G)$

**Saída:** Uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$

**Para**  $1 \leq i \leq n$ , **faça**

$cores(v_i) \leftarrow \{0, \dots, \Delta^2 + \Delta - 1\}$ ;

$f(v_i) \leftarrow -1$ ;

**Para**  $0 \leq i \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ , **faça**

**Para**  $1 \leq j \leq n$  **faça**

**Se**  $i \in cores(v_j)$  e  $f(v_j) = -1$  **então**

$f(v_j) = i$ ;

**Para** cada  $v_w \in N(v_j)$  **faça**

$cores(v_w) = cores(v_w) \setminus \{f(v_j) - 1, f(v_j), f(v_j) + 1\}$ ;

**Para** cada  $v_w \in N_2(v_j)$  **faça**

$cores(v_w) = cores(v_w) \setminus \{f(v_j)\}$ ;

**Retornar**  $f$ ;

---

se existe uma atribuição de  $G$  utilizando  $k$  cores onde se  $uv \in E(G)$ , então  $|f(u) - f(v)| \geq w(uv)$ . Sejam  $g_w(v) = \sum_{w \in N(v)} w(uv)$  e  $\Delta_w = \max_{v \in V(G)} g_w(v)$ . Em 2003, Král e

Skrekovski [63] provaram uma versão do teorema de Brooks cf. [47] para  $k$ -coloração de canais. Considere  $\chi_w$  como o menor  $k$  para uma  $k$ -coloração de canais de um grafo, eles provaram que  $\chi_w \leq \Delta_w$  para grafos diferentes de grafos completos e grafos ciclos ímpares. Por conveniência, vamos apenas adaptar uma parte da prova de Král e Skrekovski suficiente para a verificação de um novo limite superior,  $\lambda \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ , uma unidade menor do que o apresentado por Chang e Kuo [31]. Tal limite foi obtido primeiramente verificando que uma  $k$ - $L(2, 1)$ -coloração de um grafo  $G$  é relacionada diretamente a uma  $k$ -coloração de canais do grafo  $G^2$  onde  $w : E(G) \rightarrow 2$  e  $w : (E(G^2) \setminus E(G)) \rightarrow 1$ , em outras palavras, as arestas de  $G$  em  $G^2$  recebem peso dois e as arestas de  $G^2$ , correspondente as entre vértices que estavam à distância 2 em  $G$ , recebem peso um. Daqui em diante, tal atribuição será denotada por  $w'$ .

### $k$ -COLORAÇÃO DE CANAIS

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e uma função  $w : E \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Pergunta:** Existe uma atribuição  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  onde se  $uv \in E(G)$ , então  $|f(u) - f(v)| \geq k$ ?

A seguir fornecemos detalhes sobre o algoritmo de Král e Skrekovski, como é definida a ordenação  $O'$ , que é recebida como entrada do algoritmo, e a verificação do limite superior  $\lambda \leq \Delta^2 + \Delta - 1$  nessa atribuição.

**Lema 3.13 (Mike Molloy e Bruce Reed [77])** *Todo grafo 2-conexo  $G$  que não seja um ciclo ou um grafo completo, contém três vértices  $x, y$  e  $r$  tais que  $\{x, y\} \subseteq N(r)$ ,  $y \notin N(x)$  e  $G \setminus \{x, y\}$  é conexo.*

**Teorema 3.14 (Král e Skrekovski [63])** *O maior span de uma  $L(2,1)$ -coloração  $f$  de um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 2$  e uma ordenação  $O'$  específica de  $V(G)$ , obtida pelo algoritmo de Král e Skrekovski, é  $\Delta^2 + \Delta - 1$ .*

**Prova.** Os casos em que o grafo  $G^2$  é um grafo completo são dados quando  $G$  é um grafo diâmetro 2 e, para esses, sabemos que  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ . Além disso,  $G^2$  nunca é um ciclo. Considere então os casos restantes.

A ordenação  $O' = (x, y, v_{n-2}, \dots, v_2, r)$  é dada pela ordenação inversa a  $O = (r, v_2, \dots, v_{n-2})$ , obtida por uma subárvore geradora  $H$  de  $G^2 \setminus \{x, y\}$  enraizada em um vértice especial  $r$ , dado pelo Lema 3.13 no grafo 2-conexo  $G^2$ , adicionando os vértices  $x$  e  $y$  no início dessa ordenação.

Como todo vértice  $v_j$  em  $O$ , a menos da raiz, tem um vértice pai  $v_i$  com  $N^a(v_j) = v_i$  ou  $N_2^a(v_j) = v_i$ , em  $O'$ , então  $v_j$  tem  $N^d(v_j) = v_i$  ou  $N_2^d(v_j) = v_i$ . Consequentemente, reduzimos em uma unidade o valor máximo de  $|N^a(v_j)|$  ou  $|N_2^a(v_j)|$  na contagem dada no Teorema 3.8 e  $f(v_j) \leq 2|N^a(v_j)| + |N_2^a(v_j)| + |N^d(v_j)| \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ .

Falta obter esse limite para  $r$  (a raiz da subárvore) e os vértices  $x$  e  $y$ . Particularmente, sendo  $x$  o primeiro vértice na ordenação  $O'$ ,  $f(x) = 0$ . A seguir, como  $y$  está à distância 2 de  $x$  em  $G^2$ , este está à distância maior que 2 em  $G$  e também recebe  $f(y) = 0$ . Portanto, o número máximo de cores proibidas para  $r$  é reduzida em uma unidade, já que:  $x$  e  $y$  estão à distância no máximo 2 de  $r$ ; aparecem antes de  $r$  na ordenação e; recebem a mesma cor.  $\square$

## Gonçalves

Finalmente, em 2006, Gonçalves [42] utilizou um raciocínio similar ao do Teorema 3.14 para obter o melhor limite superior conhecido para grafos em geral:  $\lambda \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ . Seu raciocínio se baseia no fato que todo vértice  $v_j$ , a menos da raiz  $r$  e de um vértice  $r' \in N(r)$ , em uma ordenação  $O$ , inversa a dada por uma subárvore geradora enraizada  $H$  de  $G$ , tem pelo menos um vértice pai em  $N^d(v_j)$  e um vértice avô ou tio em  $N_2^d(v_j)$ , reduzindo em duas unidades o número máximo de suas cores proibidas.

**Teorema 3.15 (Gonçalves [42])** *Um grafo  $G$  com grau  $\Delta \geq 3$  tem:*

- (i) *um vértice com grau menor que  $\Delta$  ou;*
- (ii) *um ciclo de tamanho três ou;*
- (iii) *dois ciclos de tamanho quatro passando pelo mesmo vértice  $v$  ou;*
- (iv) *um vértice  $v$  adjacente a três vértices  $u$ ,  $x$  e  $y$  tal que existe ciclo de tamanho quatro passando pela aresta  $uv$  e com  $G \setminus \{x, y\}$  conexo ou;*
- (v) *um vértice  $u$  adjacente a dois vértices  $v$  e  $w$  tal que  $G \setminus X$  é conexo, onde  $X = (N(v) \cup N(u)) \setminus \{w\}$ .*



A escolha dos vértices  $r$  e  $r'$  é dada pelo Teorema 3.15. Maiores detalhes de como este teorema implica nesse limite superior para  $\lambda$  estão disponíveis em [81].

**Teorema 3.16 (Gonçalves [42])** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 3$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .*

## Havet, Reed e Sereni

Em 2008, Frédéric Havet, Reed e Jean-Sébastien Sereni [49] apresentaram uma prova da conjectura de Griggs e Yeh para grafos com  $\Delta$  suficientemente grande ( $\Delta \geq 10^{69}$ ). Esta prova é baseada em métodos probabilísticos, tais como o lema local de Lovász e as inequações de Talagrand, que são encontrados no livro [77].

**Teorema 3.17 (Havet, Reed e Sereni [49])** *Existe um  $\Delta_0$  tal que para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq \Delta_0$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .*

## 3.6 Limites para $\lambda$ em classes de grafos

A Tabela 3.1 enuncia alguns resultados conhecidos de limites superiores para  $\lambda$  em classes específicas de grafos. Para uma análise mais detalhada sobre esses limites, deixamos [81] como referência.

O limite superior para  $\lambda$  nas árvores, de Griggs e Yeh [44], vem da análise do algoritmo guloso aplicado na ordenação da árvore enraizada. Nesta, cada vértice  $v$  tem  $|N^a(v)| = 1$  e  $|N_2^a(v)| \leq \Delta - 1$ . Portanto, o *span* dessa atribuição é  $3 + \Delta - 1 = \Delta + 2$ .

O limite obtido na classe dos grafos *split* prova uma parte da conjectura da Král [60] para  $\lambda$  na classe dos grafos cordais. Esta ainda está em aberto para grafos cordais. Outra informação importante é que, para cografos, já se sabia que  $\lambda = n + pv(G^c) - 2$ . Entretanto, fornecemos um limite justo para essa classe em relação ao valor de  $\Delta$ .

Hemant Balakrishnan and Narsingh Deo [5] encontraram limites superiores e inferiores para a soma e o produto de  $\lambda(G)$  e  $\lambda(G^c)$ , utilizando os limites para  $\chi(G)$  e  $\chi(G^c)$  encontrados por Edward Nordhaus e James Gaddum [78].

**Teorema 3.18 (Nordhaus e Gaddum [78])** *Para um grafo  $G$  com  $n$  vértices:*

- (i)  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$ .
- (ii)  $n \leq \chi(G)\chi(G^c) \leq (\frac{n+1}{2})^2$ .

**Teorema 3.19 (Balakrishnan e Deo [5])** *Para um grafo  $G$  com  $n$  vértices:*

- (i)  $2\sqrt{n} - 2 \leq \lambda(G) + \lambda(G^c) \leq 3n - 3$ .
- (ii)  $0 \leq \lambda(G)\lambda(G^c) \leq (\frac{3n-3}{2})^2$ .

Classes	Limite
árvore	$\lambda \leq \Delta + 2$ Griggs e Yeh [44]
grafo bipartido cordal	$\lambda \leq \Delta^2 - \Delta + 2$ C. e P. [24]
grafo bipartido permutação	$\lambda \leq wb(G) + 1$ Araki [2]
grafo de cocomparabilidade	$\lambda \leq 4\Delta - 1$ Calamoneri et al. [18]
cografo	$\lambda \leq 2\Delta$ C. e P. [23]
grafo com diâmetro 2	$\lambda \leq \Delta^2$ Griggs e Yeh [44]
grafo fracamente cordal	$\lambda \leq \Delta^2$ C. e P. [24]
grafo de intervalo	$\lambda \leq 2\Delta$ Calamoneri et al. [18]
grafo linha	$\lambda \leq \min\{\frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}, \Delta^2\}$ C. e P. [23]
grafo de permutação	$\lambda \leq 4\Delta - 3$ C. e P. [23]
grafo planar	$\lambda \leq 2\Delta + 25$ van den Heuvel e McGuinness [87]
grafo split	$\lambda \leq 0.385\Delta^{1.5} + 2\Delta + \Delta^{0.5} - 2$ C. e P. [24]
grafo cordal	$\lambda \leq \frac{(\Delta+1)^{1.5}}{\sqrt{6}} + \Delta + 1$ Král [60]
grafo $k$ -partido	$\lambda \leq n + k - 2$ Chang e Kuo [31]

Tabela 3.1: Limites superiores para  $\lambda$  em classes de grafos

### 3.7 Complexidade

A partir de agora apresentamos algoritmos polinomiais conhecidos para obtenção de uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em classes de grafos e provas de  $\mathcal{NP}$ -completude em outras. Se o leitor estiver interessado em algoritmos exponenciais ou para a quantidade de  $L(2,1)$ -colorações ótimas de um grafo, deixamos [81] como referência. A Tabela 3.2 contém as complexidades conhecidas para o problema  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO em classes de grafos.

classe	complexidade	autores
árvores	$O(n)$	Hasunuma et al. [48]
$p$ -quase árvores	$O(\lambda^{2p+4.5}n)$	Kratochvíl et al. [34]
grafos bipartidos chain	$O(n)$	Araki [2]
grafos grades regulares	$O(n)$	Calamoneri e Petreschi [19]
cografos	$O(n + m)$	Chang e Kuo [31]
grafos <i>split</i> permutação	$O(n + m)$	C. e P. [26]
grafos $(q, q - 4)$ , $q$ fixo	$O(q^{5q}n)$	C., Martins, P., Sampaio [30]
grafos $P_4$ -tidy	$O(n + m)$	C. e P. [81]
grafos split	$\mathcal{NP}$ -completo	Bodlaender et al. [11]
grafos bipartido planar	$\mathcal{NP}$ -completo	Bodlaender et al. [11]
grafos diâmetro 2	$\mathcal{NP}$ -completo	Griggs e Yeh [44]
$k$ fixo	$\mathcal{NP}$ -completo	Fiala et al. [34]
grafos regulares	$\mathcal{NP}$ -completo	Fiala et al. [35]

Tabela 3.2: Complexidade do problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO

### 3.7.1 Métodos polinomiais

#### Árvores

Inicialmente, Griggs e Yeh [44] conjecturaram que o problema de decidir  $\Delta + 1 \leq \lambda \leq \Delta + 2$  é  $\mathcal{NP}$ -completo para as árvores. Em seguida, utilizando programação dinâmica, Chang e Kuo [31] apresentaram um algoritmo polinomial, com complexidade  $O(n\Delta^{4.5})$  que encontrava uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima nessa classe.

Neste, cada folha recebe um conjunto de todas as duplas com cores com diferença de duas unidades em  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$ . Calculamos então o conjunto das duplas para os vértices internos dessa árvore, uma dupla  $(a, b)$  faz parte de um vértice interno  $v$  da árvore se existe dupla  $(b, c_i)$  para cada filho  $v_i$  de  $v$  na árvore com  $1 \leq i \leq |N(v)| - 1$ , onde todo  $c_i$  é uma cor diferente. Essa verificação é feita para cada dupla possível  $(a, b)$ , com a verificação de um emparelhamento de tamanho  $i$  no grafo bipartido, onde uma das partes é formada pelos filhos  $v_i$  de  $v$  e a outra por cores  $c_i$  em  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$  e, existe uma aresta entre  $v_i$  e  $c_i$  se a dupla  $(b, c_i)$  é disponível neste vértice e  $c_i \neq a$ .

Se em algum momento um vértice não tiver uma dupla, então  $\lambda = \Delta + 2$  e uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima é obtida com qualquer método guloso na ordenação da árvore enraizada. Para cada vértice  $n$ , fazemos  $O(\Delta^2)$  emparelhamentos de grafos bipartidos, que são resolvidos em  $O(\Delta^{2.5})$ , cf.[86], ou seja, a complexidade desse algoritmo é  $O(n\Delta^{4.5})$ . A Figura 3.15 descreve a aplicação desse método. Vemos que a dupla  $(0, 2)$  não faz parte das contidas em  $I_v$ , porque se  $v$  recebe a cor 2 e o seu avô a cor 0, então os seus três filhos só têm disponíveis as cores  $\{4, 5\}$ . Por outro lado, a dupla  $(2, 0) \in I_v$ , pois nesse caso os seus filhos recebem cores em  $\{3, 4, 5\}$

e existe um emparelhamento nesse grafo bipartido que serve para atribuir as cores aos filhos de  $v$ .

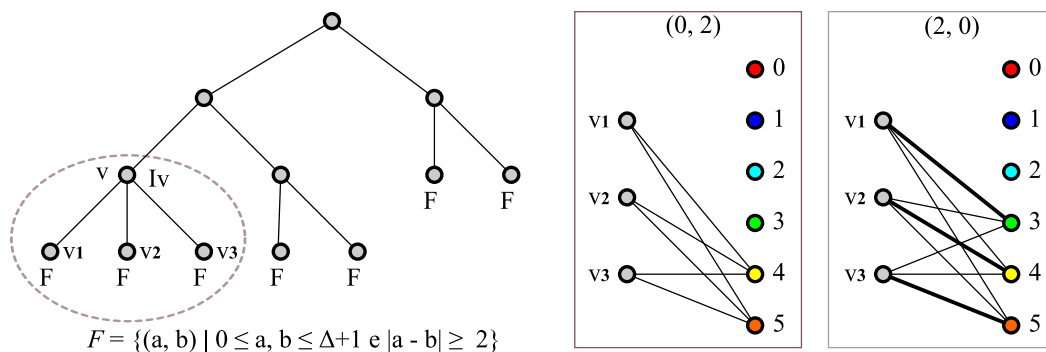


Figura 3.15: Algoritmo para  $L(2, 1)$ -coloração ótima em árvores.

Mais de uma década depois, Hasunuma et al. [48] melhoraram o algoritmo de Chang e Kuo [31] reduzindo o número de verificações necessárias para cada vértice, aplicando um problema de fluxo em redes ao invés de  $O(\Delta^2)$  emparelhamentos. Além disso, fizeram pré-processamentos na árvore e realizaram análises amortizadas para obter a linearidade do algoritmo.

### $p$ -quase árvores

Kratochvíl et al. [34] apresentaram algoritmo polinomial para  $p$ -quase árvores com  $p$  fixo, sendo uma variação do algoritmo de Chang e Kuo [31]. Basicamente, cada uma das  $xy$  arestas extras é “quebrada”, removendo essa aresta e adicionando dois vértices  $x'$  e  $y'$  e duas arestas  $x'x$  e  $y'y$ . Portanto, o grafo final é uma árvore. Então, fixamos todas as  $(\Delta + 2)^{2p}$  possibilidades de cores desses vértices em uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de forma que  $f(x') = f(y)$  e  $f(y') = f(x)$  e, para cada uma dessas, aplicamos o algoritmo  $O(n\Delta^{4.5})$  de Chang e Kuo [31]. A Figura 3.16 descreve a aplicação desse método.

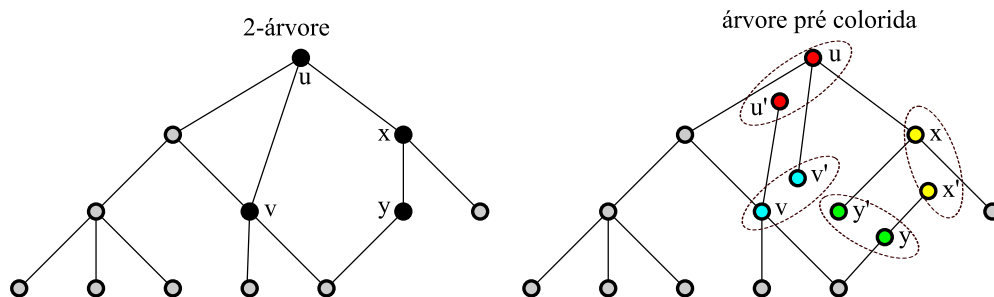


Figura 3.16: Algoritmo para  $L(2, 1)$ -coloração ótima em  $p$ -quase árvores.

## Grafos $k$ -partidos completos

Griggs e Yeh [44] em seu artigo pioneiro também apresentam um método para obtenção de uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos  $k$ -partidos completos com  $n$  vértices. Para tal, atribuímos cores consecutivas aos vértices de um mesmo conjunto independente e, ao passar para o próximo, pulamos uma das cores. Com isso, a maior cor utilizada é  $n + k - 2$ . Por outro lado, como esse grafo tem diâmetro 2, temos  $\lambda = n + pv(G^c) - 2$  e, para esse caso em específico,  $pv(G^c) = k$ , ou seja, essa atribuição é ótima. A Figura 3.17 descreve a aplicação desse método.

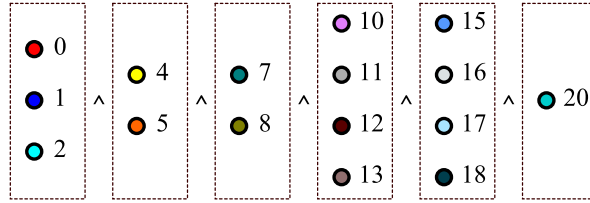


Figura 3.17: Algoritmo para  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos  $k$ -partidos completos.

## Cografos

Um algoritmo polinomial para cografos foi desenvolvido por Chang e Kuo [31]. Como só tratamos cografos conexos  $G = G_1 \wedge G_2$  (o caso desconexo é tratado pela Propriedade 3.1), e  $\lambda(G_1 \wedge G_2) = \lambda'(G_1 \wedge G_2) = \lambda'(G_1) + \lambda'(G_2) + 2 = V(G_1) + V(G_2) + pv(G_1^c) + pv(G_2^c) - 2$ , basta determinarmos  $pv(G_1^c)$  e  $pv(G_2^c)$ .

Estes são obtidos utilizando a árvore de decomposição modular desse cografo, onde se ocorrer uma operação de *join*  $G = G_1 \wedge G_2$ , então  $pv(G^c) = pv(G_1^c) + pv(G_2^c)$  (a soma dos caminhos disjuntos) e, caso contrário, existe uma operação de união  $G = G_1 \cup G_2$ , e  $pv(G^c) = \max\{pv(G_1^c) - |V(G_2)|, pv(G_2^c) - |V(G_1)|, 1\}$  (já que cada vértice de  $G_1$ , une dois caminhos disjuntos em  $G_2^c$  e vice-versa)

**Lema 3.20 (Chang e Kuo [31])** *Obtemos uma  $L(2,1)$ -coloração  $f$  de um grafo  $G$  com  $span\ n + pv(G^c) - 2$  tendo os seus  $pv(G^c)$  caminhos disjuntos.*

**Prova.** Definimos  $f$  atribuindo cores, sequencialmente, aos vértices do grafo, pulando uma cor entre o último vértice de um caminho disjunto para o primeiro do próximo. Como todo vértice recebe uma cor diferente, a restrição de distância 2 é respeitada. Além disso, dois vértices  $u$  e  $v$  só recebem cores consecutivas se  $uv \in E(G^c)$  e, portanto,  $uv \notin E(G)$ . Desta forma,  $f$  é uma  $L(2,1)$ -coloração com  $span\ n + pv(G^c) - 2$ .  $\square$

A atribuição de cores aos vértices do cografo é a utilizada no Lema 3.20. A Figura 3.18 descreve a aplicação desse método.

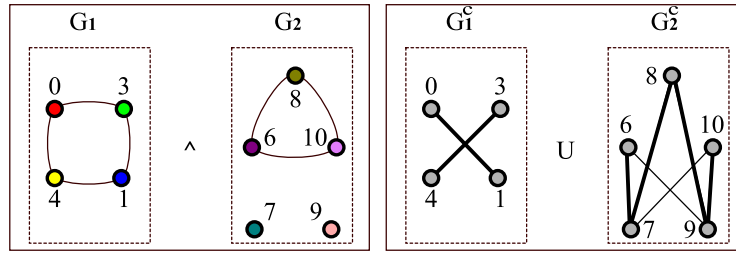


Figura 3.18: Método para  $L(2, 1)$ -coloração ótima em cografos.

## Grafos grades regulares

O problema do ladrilhamento consiste em cobrir o plano com cópias de um mesmo polígono. Um grafo  $G$  é *grade regular* se seus vértices e arestas são exatamente os vértices e as arestas dos polígonos do ladrilhamento. Essas coberturas são restritas a três tipos de polígonos: triângulos, quadrados e hexágonos, cf. [19].

Calamoneri e Rossella Petreschi [19] apresentaram um método linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos grades regulares. Inicialmente é escolhido um polígono qualquer e cores são atribuídas aos seus vértices. A seguir, é apresentada uma função que atribui, recursivamente, cores em  $\{0, \dots, \Delta + 2\}$  aos polígonos vizinhos. O processo é repetido até que todos os vértices sejam tratados. Essa atribuição é ótima pela Propriedade 3.7. As cores iniciais dos vértices dos polígonos e as funções de atribuição de cores para os vértices de polígonos vizinhos são dados na Figura 3.19.

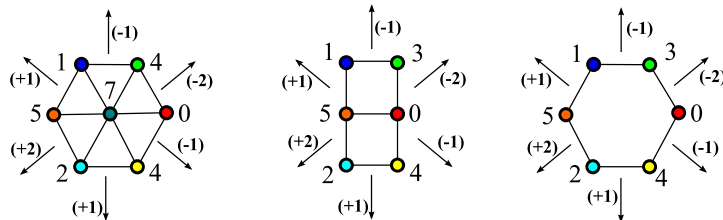


Figura 3.19: Método para  $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos grades regulares.

Como ilustrado na Figura 3.20, essa atribuição forma blocos que respeitam as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração, e esses blocos são copiados em todas as direções: norte, sul, leste e oeste.

### 3.7.2 $\mathcal{NP}$ -completude

Griggs e Yeh [44] estabeleceram a primeira prova de  $\mathcal{NP}$ -completude para o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO. Eles verificaram que decidir se existe uma  $k$ - $L(2, 1)$ -coloração com  $k \leq n$  de um grafo  $G \wedge K_1$  é equivalente a decidir se o grafo  $G^c$  tem um caminho hamiltoniano (que é um conhecido problema  $\mathcal{NP}$ -completo [37]).

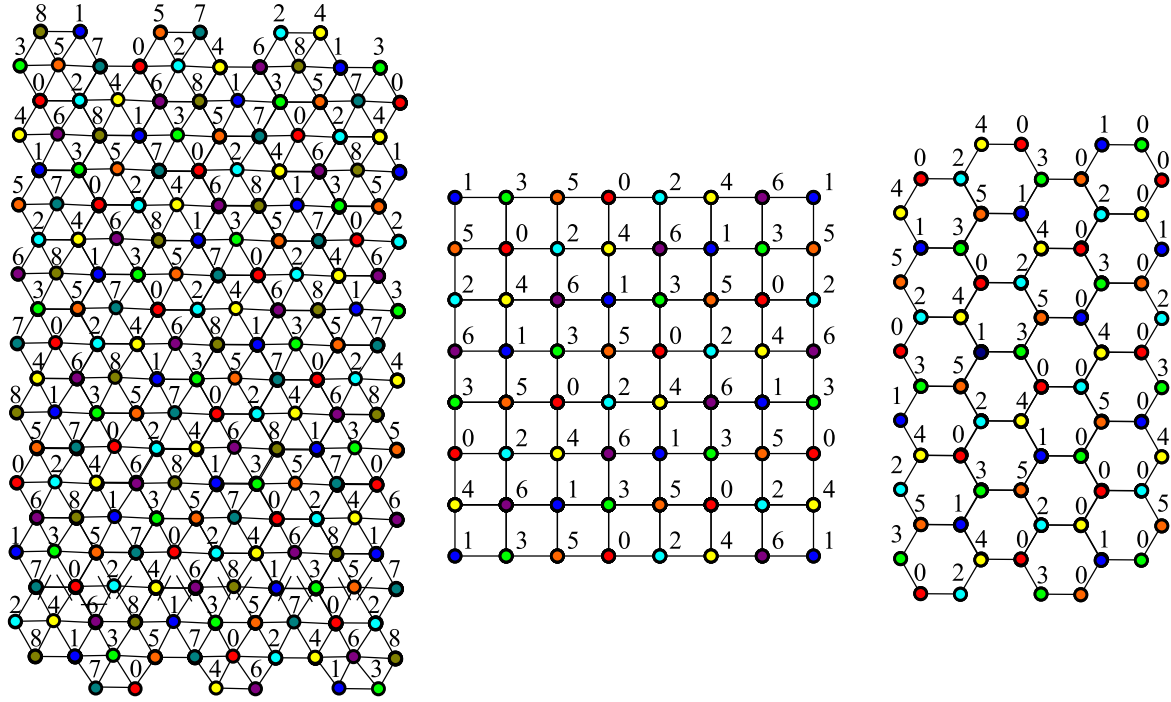


Figura 3.20: Blocos de atribuições de cores nos grafos grades regulares.

**Teorema 3.21 (Griggs e Yeh [44])** *O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO do grafo  $G \wedge K_1$  é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** Claramente o problema está em  $\mathcal{NP}$ , já que dada uma atribuição de cores checamos em tempo polinomial se esta é uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo.

Pela Propriedade 3.5, sabemos que se  $\lambda(G \wedge K_1) = \Delta + 1 = n$ , então o vértice  $K_1$  recebe a cor  $n$  (ou 0, sem perda de generalidade).

Se  $\lambda(G \wedge K_1) = n$ , como esse grafo é diâmetro 2, todos os seus vértices recebem cores diferentes em  $\{0, \dots, n\} \setminus \{n-1, n\}$ . Seja  $v_i$  o vértice que recebeu a cor  $i$  para  $0 \leq i \leq n-2$ . Como em uma  $L(2, 1)$ -coloração não existe aresta entre vértices com cores consecutivas, então  $v_i v_{i+1} \notin E(G)$  para  $0 \leq i \leq n-2$ . E, em  $G^c$ , essas arestas existem, formando um caminho hamiltoniano de tamanho  $n-2$ , desconsiderando o vértice isolado do  $K_1$ .

Por outro lado, se  $G^c$  tem um caminho hamiltoniano, atribuímos cores consecutivas em  $\{0, \dots, n-2\}$  aos vértices de  $G$  em uma  $L(2, 1)$ -coloração, já que não existe aresta entre eles, e atribuímos a cor  $n$  ao vértice universal do  $K_1$ .

Ou seja,  $G^c$  tem um caminho hamiltoniano se, e somente se,  $\lambda(G \wedge K_1) = n$ .  $\square$

Posteriormente, Hans Bodlaender, Ton Kloks, Richard Tan e Jan van Leeuwen fizeram uma generalização do Teorema 3.21 para grafos *split*.

**Teorema 3.22 (Bodlaender *et al.* [11])** *O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO em grafos *split* é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de grafos. Se para todo  $G \in \mathcal{F}$  a operação de *join* de  $G$  com um  $K_1$  resultar em um grafo  $G' \in \mathcal{F}$  e, se o problema CAMINHO HAMILTONIANO na classe dos grafos complemento de grafos em  $\mathcal{F}$  é  $\mathcal{NP}$ -completo, então o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO com  $k \leq n$  para a classe dos grafos  $\mathcal{F}$  é  $\mathcal{NP}$ -completo.

O complemento de um grafo *split* é um grafo *split* e, o problema CAMINHO HAMILTONIANO em um grafo *split* é  $\mathcal{NP}$ -completo, prova feita por Golumbic [41]. Conseqüentemente, o referido problema é  $\mathcal{NP}$ -completo em grafos *split*.  $\square$

Jirí Fiala, Kloks e Kratochvíl [34] provaram que, mesmo fixando o valor de  $k$ , o problema continua  $\mathcal{NP}$ -completo para qualquer valor  $k \geq 4$ . Esta prova é feita mostrando uma equivalência com o problema  $BW(r)$ -COLORAÇÃO DE GRAFOS, provado ser  $\mathcal{NP}$ -completo por Kratochvíl et al. [65]. Uma explicação detalhada desta prova está contida em [81].

Vale ressaltar que, pela Propriedade 3.4, os únicos grafos com  $\lambda \leq 3$  são os formados por florestas de caminhos com até quatro vértices, e estes são reconhecidos em tempo polinomial.

### $BW(r)$ -COLORAÇÃO

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  regular com grau  $r$ .

**Pergunta:** Existe uma atribuição de duas cores aos vértices de  $G$  onde todo vértice tem exatamente dois vizinhos com a sua cor?

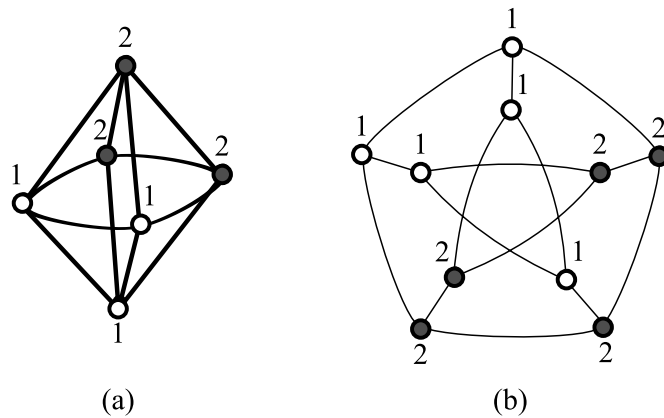


Figura 3.21: Uma coloração  $BW(4)$  do octaedro e uma  $BW(3)$  do grafo de Petersen.

**Teorema 3.23 (Fiala et al. [34])** *O problema da  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo para qualquer  $k \geq 4$  fixo.*

### 3.7.3 Análise das classes de grafos

Na Figura 3.22 está descrito um diagrama de classes de grafos, onde uma classe estar acima da outra e conectada por uma aresta significa que esta contém a de



baixo. Nela, está descrito a complexidade do problema  $k-L(2, 1)$ -COLORAÇÃO nas classes de grafos, se este está em aberto (**A**), é polinomial (**P**) ou  $\mathcal{NP}$ -completo (**NP-c**).

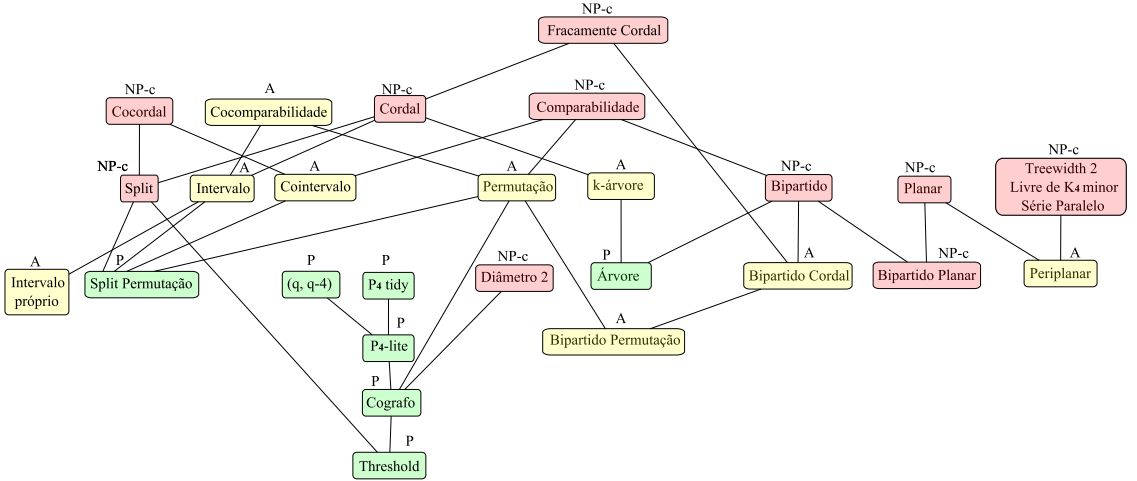


Figura 3.22: Diagrama de classes da complexidade  $k-L(2, 1)$ -COLORAÇÃO.

Note que ainda não existem soluções eficientes para o problema  $k-L(2, 1)$ -COLORAÇÃO em classes simples, como grafos bipartido permutação e grafos de intervalo próprio, mesmo essas já sendo estudadas por outros autores, como Araki [2] e Calamoneri et al. [18].

A nossa intuição para a classe dos grafos bipartido permutação, que tem *span* limitado  $wb(G) \leq \lambda(G) \leq wb(G) + 1$  [2] (onde  $wb(G)$  é o tamanho do seu maior subgrafo bipartido completo), é que o problema possa ser resolvido polinomialmente. Por outro lado, acreditamos que  $k-L(2, 1)$ -COLORAÇÃO passe a ser  $\mathcal{NP}$ -completo em grafos permutação e grafos de intervalo, pois existem provas de  $\mathcal{NP}$ -completude nessas classes para o problema  $k$ -COLORAÇÃO HARMÔNICA [57], que tem certa similaridade com uma  $L(2, 1)$ -coloração.

$k$ -COLORAÇÃO HARMÔNICA

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ .

**Pergunta:** Existe uma coloração de  $k$  cores aos vértices de  $G$  onde todo par de cores aparece no máximo uma vez em pares de vértices adjacentes?

Outra vertente interessante de estudo são as classes de grafos com poucos  $P_4$ 's. Chang e Kuo [31] foram os primeiros a encontrar uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima polinomial em uma dessas classes, os cografos. Posteriormente, em [81], foi apresentado um algoritmo polinomial para obter tal atribuição na classe dos grafos  $P_4$ -tidy. Acreditamos que novos resultados possam surgir nessas classes, principalmente por causa das características de suas decomposições modulares.

# Capítulo 4

## Grafos split permutação

Mesmo sendo estudado por décadas, uma  $L(2,1)$ -coloração ótima só foi encontrada eficientemente para poucas classes de grafos, como visto na Tabela 3.2. Descrevemos nesse capítulo algoritmos polinomiais para determinar  $\lambda$  e encontrar uma  $L(2,1)$ -coloração ótima na classe dos grafos *split* permutação. Este trabalho foi apresentando no Workshop Latino-Americano de Cliques [26], em novembro de 2010, na cidade de Itaipava, RJ.

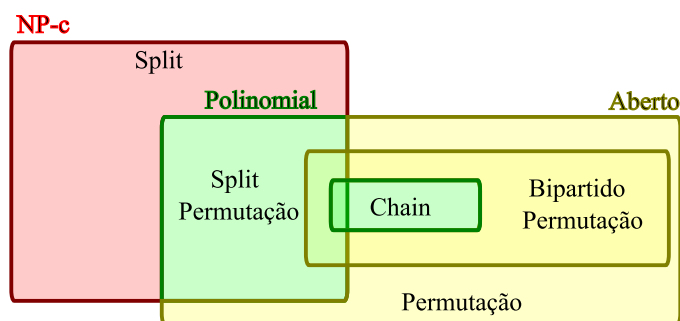


Figura 4.1: Complexidade da  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO em grafos *split* e grafos permutação.

Esses resultados são particularmente interessante, pois o problema  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo na classe dos grafos *split* [11] e, ainda está em aberto na classe dos grafos bipartido permutação, só tendo solução polinomial em uma de suas subclasses, os grafos *chain* [2], cenário descrito pela Figura 4.1. Note que a interseção entre a classe dos grafos bipartido permutação e grafos *split* permutação é muito pequena, formada apenas por grafos que são obtidos de dois grafos estrelas, adicionando uma aresta entre seus vértices universais.

### 4.1 Características

Um grafo  $G$  é *split permutação* se  $G$  é um grafo *split* e  $G$  é um grafo permutação. A primeira propriedade interessante para essa classe é a equivalência com a classe

dos grafos de *intervalo* e grafos *cointervalo*, vide Figura 4.2. Outro fato interessante é que essa classe não é pequena, pois tem  $\Theta(\frac{4^n}{\sqrt{n}})$  grafos [45], ou seja, um número exponencial de grafos na cardinalidade do número de vértices.

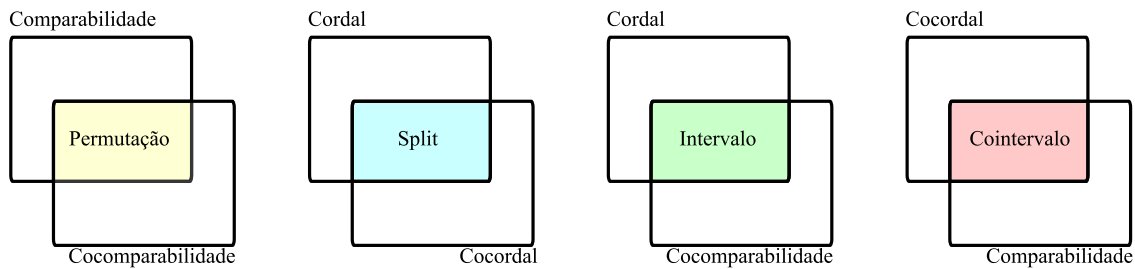


Figura 4.2: Equivalência de classes de grafos.

**Teorema 4.1** (cf. [14]) *Um grafo  $G$  é permutação se, e somente se,  $G$  e  $G^c$  são grafos comparabilidade.*

**Teorema 4.2** (cf. [14]) *Um grafo  $G$  é split se, e somente se,  $G$  e  $G^c$  são grafos cordais.*

**Teorema 4.3** (cf. [14]) *Um grafo  $G$  é de intervalo se, e somente se,  $G$  é cordal e cocomparabilidade.*

A prova da Propriedade 4.1 segue diretamente dos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3.

**Propriedade 4.1** (cf. [14]) *A classe dos grafos split permutação é equivalente a classe dos grafos que são grafos de intervalo e grafos cointervalo.*

O resultado do Teorema 4.4 é importante pois, em diversos momentos em nossas provas, chegamos a uma contradição apresentando uma tripla asteroidal.

**Teorema 4.4** (cf. [14]) *Se  $G$  é um grafo de cocomparabilidade, então  $G$  não tem uma tripla asteroidal.*

Para o restante deste capítulo particionamos os vértices dos grafos *split* permutação em 6 conjuntos disjuntos, que estão descritos na próxima seção. Fornecemos então propriedades nessa classe que especificam a criação desses conjuntos. Consideramos somente os grafos que são conexos, caso contrário, o grafo é formado por um grafo *split* conexo e vértices isolados, que recebem trivialmente a cor 0.

Verificamos posteriormente a existência de um trabalho [80] feito em paralelo, e divulgado em novembro de 2010, sobre o número de *threshold* em grafos *split* permutação, que utiliza uma decomposição semelhante a descrita na seção abaixo.

## Decomposição

**Propriedade 4.2** Se  $G = (V, E)$  é um grafo *split permutação conexo* com  $n \geq 2$ , então existem vértices  $u$  e  $v$  tais que  $N(u) \cup N(v) = V$ .

**Prova.** Pela Propriedade 4.1,  $G$  é um grafo de intervalo com um modelo de intervalos  $\mathcal{I}$ . Sabemos que os grafos de intervalo têm a propriedade *Helly* [85], em outras palavras, os intervalos de vértices de uma clique compartilham uma interseção  $I_{HELLY}$  em comum. Note que  $G$  é um grafo *split* e seus vértices são particionados em um conjunto independente  $S$  e uma clique  $K$ .

Sejam  $I_u$  um intervalo entre os vértices de  $K$  em  $\mathcal{I}$  que inicia primeiro e  $I_v$  um que termina por último. Tais intervalos têm uma interseção  $I_{HELLY}$  em comum com outros intervalos de  $K$  em  $\mathcal{I}$ . Adicionalmente, como a união dos intervalos  $I_u$  e  $I_v$  sobrepõe todos os intervalos de  $K$  em  $\mathcal{I}$  e todo intervalo de  $S$  tem interseção com algum intervalo de  $K$ , então todo intervalo de  $\mathcal{I}$  tem interseção com  $I_u$  ou  $I_v$ . Consequentemente, em  $G$ ,  $N(u) \cup N(v) = V$ .  $\square$

A Figura 4.3 ilustra os intervalos  $I_u$  e  $I_v$  da Propriedade 4.2.

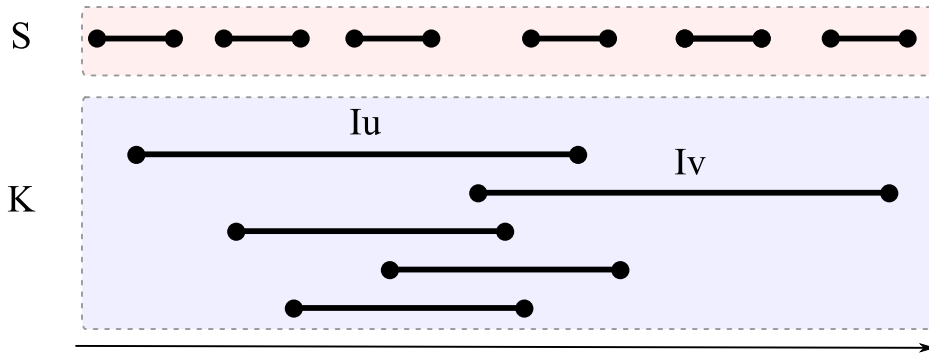


Figura 4.3: Modelo de intervalos de  $G$ .

**Propriedade 4.3** Se  $G = (V, E)$  é um grafo *split permutação conexo* com  $V = S \cup K$ , então o conjunto independente  $S$  pode ser particionado em  $S_L$ ,  $S_M$  e  $S_R$  e a clique  $K$  em  $K_L$ ,  $K_M$  e  $K_R$  tais que: se o vértice  $x \in S_R$ , então  $N(x) \subseteq K_R$  e; se  $y \in S_L$ , então  $N(y) \subseteq K_L$ .

**Prova.**

Pela Propriedade 4.1,  $G$  é um grafo de intervalo com um modelo de intervalos  $\mathcal{I}$ . Sejam  $I_u$  o intervalo de  $K$  em  $\mathcal{I}$  que inicie primeiro e  $I_v$  o que termina por último. Particione os vértices de  $G$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S'_L &= \{w \mid wu \in E \text{ e } wv \notin E\}; \\ S'_R &= \{w \mid wu \notin E \text{ e } wv \in E\}; \\ S'_M &= S \setminus (S'_L \cup S'_R); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K'_L &= \{w \mid wy \in E \text{ e } y \in S'_L\}; \\
K'_R &= \{w \mid wy \in E \text{ e } y \in S'_R\}; \\
K'_M &= K \setminus (K'_L \cup K'_R);
\end{aligned}$$

Suponha por contradição um vértice  $z$  que pertença simultaneamente a  $K'_L$  e a  $K'_R$  por causa de vértices  $y \in S'_L$  e  $x \in S'_R$ , respectivamente. Pela Propriedade 4.1,  $G$  é um grafo de comparabilidade, tendo assim uma ordenação transitiva de suas arestas.

Sem perda de generalidade, seja uma orientação transitiva de  $G$  com a aresta  $\vec{v}u$ . Consequentemente,  $\vec{v}w$  ( $\forall w \in (S'_M \cup S'_R)$ ) e  $\vec{w}u$  ( $\forall w \in (S'_M \cup S'_L)$ ).

No caso em que  $\vec{v}z$  e  $\vec{z}u$ , temos também  $\vec{z}x$  (ou  $xu \in E$  e  $x \in S'_M$ , um absurdo). Contudo, não temos orientação possível para a aresta  $yz$ . Se  $\vec{y}z$ , então  $\vec{y}x$ , onde  $x$  e  $y$  pertencem ao conjunto independente  $S$  senão,  $\vec{z}y$  e  $\vec{v}y$  mas, nesse caso,  $y \in S'_M$ . Tais casos são um absurdo, como ilustrado na Figura 4.4.

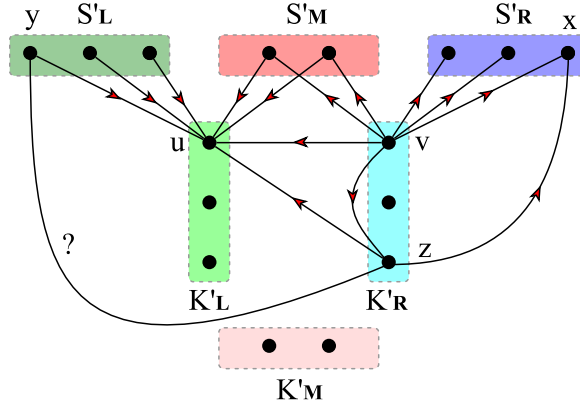


Figura 4.4: Orientação transitiva das arestas de  $G$ .

Por outro lado, se as orientações são  $\vec{z}v$  ou  $\vec{u}z$ , particionamos os vértices em novos conjuntos usando  $z$  em vez de  $v$  ou  $u$ , respectivamente. Se  $\vec{z}v$ , então  $\vec{z}w$  ( $\forall w \in (S'_M \cup S'_R)$ ), neste caso,  $N(v) \subseteq N(z)$ , o conjunto  $S'_R$  continua o mesmo, mas cada vez que isso ocorre, a cardinalidade do conjunto  $S'_M$  é incrementado em pelo menos uma unidade, pois o vértice  $y \in S'_L$  passa a ser  $S'_M$  quando usamos  $z$  em vez de  $v$ . O mesmo ocorre se  $\vec{u}z$ , só que escolhemos  $z$  em vez de  $u$ . Como o conjunto  $S'_M$  é incrementado em pelo menos uma unidade a cada nova escolha de vértices eventualmente este processo terá um fim em menos de  $O(n)$  iterações. Neste momento, os conjuntos obtidos correspondem aos descritos pelo teorema.  $\square$

De agora em diante, consideramos os vértices  $u$ ,  $v$ , e os conjuntos de vértices  $S_R$ ,  $S_M$ ,  $S_L$ ,  $K_R$ ,  $K_M$  e  $K_L$  como os obtidos na Propriedade 4.3.

**Propriedade 4.4** Se  $G = (V, E)$  é um grafo split permutação conexo que não tem diâmetro 2, então  $\forall z \in S_M$ ,  $K_R \subseteq N(z)$  ou  $K_L \subseteq N(z)$ .

**Prova.** Suponha por contradição um vértice  $z \in S_M$  onde  $K_R \not\subseteq N(z)$  e  $K_L \not\subseteq N(z)$ . Como  $G$  não tem diâmetro 2,  $S_L$  e  $S_R$  são conjuntos não vazios. Sejam  $x \in K_R$  e  $y \in K_L$  dois vértices que não pertençam a vizinhança de  $z$ . Pela construção dos conjuntos  $K_R$  e  $K_L$ , temos vértices  $x' \in S_R$  e  $y' \in S_L$  adjacentes a  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Pelo Teorema 4.4, sabemos que grafos de cocomparabilidade são *AT-free* e, nesse caso, o subgrafo induzido pelos vértices  $u, v, x, x', y, y', z$  é uma tripla asteroidal, um absurdo, como ilustrado na Figura 4.5.  $\square$

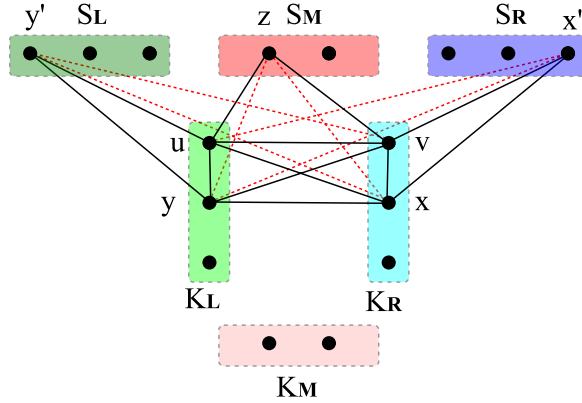


Figura 4.5: Vizinhança dos vértices de  $S_M$  de  $G$ .

**Propriedade 4.5** Se  $G = (V, E)$  é um grafo split permutação conexo que não tem diâmetro 2, então existe uma ordenação  $a_1, \dots, a_x$  dos vértices de  $S_L \cup S_M$  tal que em  $H = G[S_L \cup S_M \cup K_L]$ , a vizinhança de um vértice nessa ordenação é contida na vizinhança dos vértices que o sucedem, i.e.,  $N(a_i) \subseteq N(a_{i+1})$  em  $H$ ,  $1 \leq i \leq x - 1$ . O mesmo acontece para os vértices de  $S_R \cup S_M$  em  $G[S_R \cup S_M \cup K_R]$ .

**Prova.** Suponha por contradição os vértices  $y' \in (S_L \cup S_M)$  e  $z' \in (S_L \cup S_M)$  tais que  $N(z') \not\subseteq N(y')$  e  $N(y') \not\subseteq N(z')$  em  $H$ , assim, temos vértices  $y \in K_L$  e  $z \in K_L$  tais que  $y'y \in E$ ,  $y'z \notin E$ ,  $z'y \notin E$  e  $z'z \in E$ . E, como  $G$  não tem diâmetro 2, existe  $v' \in S_R$  com  $v'v \in E$ . Adicionalmente, se  $y'$  ou  $z'$  não pertencem a  $S_L$ , pela construção de  $K_L$ , temos pelo menos um vértice  $w'$  na vizinhança de  $y$  ou pelo menos um vértice  $w''$  na vizinhança de  $z$  que pertencem a  $S_L$ .

Sem perda de generalidade, considere a orientação  $\vec{v'u}$ . Tal orientação implica nas arestas  $\vec{v'v'}$ ,  $\vec{v'y}$ ,  $\vec{v'z}$ . Além disso,  $\forall w \in S_L$ , se existe aresta  $wy$  ou  $wz$ , então as suas orientações são  $\vec{w'y}$  ou  $\vec{w'z}$ . Tais orientações implicam que  $\vec{y'y}$  e  $\vec{z'z}$ .

Contudo, falta uma orientação para a aresta  $yz$ . Se  $\vec{y'z}$ , então  $\vec{y'y}$ , um absurdo pois  $y'z \notin E$ . Senão,  $\vec{z'y}$  e  $\vec{z'y}$ , um absurdo pois  $z'y \notin E$ . Esses casos são ilustrados na Figura 4.6.

Portanto, para cada par de vértices  $y'$  e  $z'$  de  $S_L \cup S_M$ , a vizinhança de um está contida na do outro em  $H$ , e determinamos trivialmente a ordenação do enunciado desse teorema.

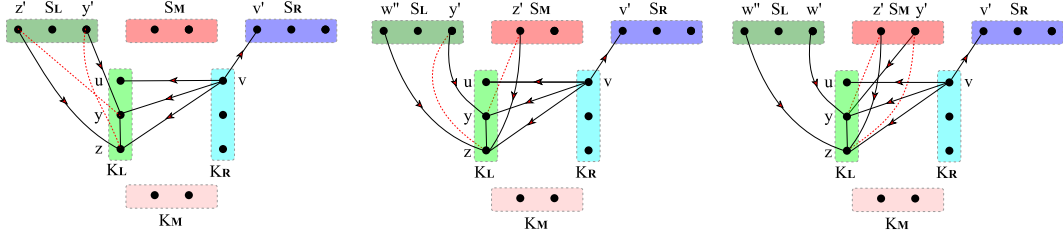


Figura 4.6: Orientação das arestas de  $G$  com  $y' \in (S_L \cup S_M)$  e  $z' \in (S_L \cup S_M)$ .

A prova para o caso que  $H = G[S_R \cup S_M \cup K_R]$  é análoga.  $\square$

**Propriedade 4.6** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo split permutação conexo que não tem diâmetro 2, então existe uma ordenação  $b_1, \dots, b_x$  dos vértices de  $S_L \cup S_M$ , uma ordenação  $c_1, \dots, c_l$  e outra  $d_1, \dots, d_l$  dos vértices de  $K_L$  onde  $N(b_i) \subseteq N(b_{i+1})$  em  $H^c$  ( $1 \leq i \leq x - 1$ ),  $N(c_j) \subseteq N(c_{j+1})$  em  $H$  e  $N(d_j) \subseteq N(d_{j+1})$  em  $H^c$  ( $1 \leq j \leq l - 1$ ). O mesmo vale quando tratarmos vértices de  $S_R \cup S_M$  no caso em que  $H = G[S_R \cup S_M \cup K_R]$ .*

**Prova.** Pela Propriedade 4.5, existe ordenação  $a_1, \dots, a_x$  dos vértices de  $S_L \cup S_M$  onde  $N(a_k) \subseteq N(a_{k+1})$  em  $H$ ,  $1 \leq k \leq x - 1$ . Suponha por contradição que não exista uma ordenação  $b_1, \dots, b_x$  como descrita no teorema. Sejam  $b_i$  e  $b_j$  dois vértices tais que  $N(b_i) \not\subseteq N(b_j)$  e  $N(b_j) \not\subseteq N(b_i)$  em  $H^c$  e  $i \in K_L$  e  $j \in K_L$  dois vértices tais que  $ib_i \in E(H^c)$ ,  $jb_j \in E(H^c)$ ,  $jb_i \notin E(H^c)$  e  $ib_j \notin E(H^c)$ . Neste caso,  $N(b_i) \not\subseteq N(b_j)$  e  $N(b_j) \not\subseteq N(b_i)$  em  $H$ , um absurdo com a existência da ordenação  $a_1, \dots, a_x$ .

Agora, suponha por contradição que não exista uma ordenação  $c_1, \dots, c_l$  dos vértices de  $K_L$ . Sejam  $c_i$  e  $c_j$  dois vértices tais que  $N(c_i) \not\subseteq N(c_j)$  e  $N(c_j) \not\subseteq N(c_i)$  em  $H$  e  $i \in (S_L \cup S_M)$  e  $j \in (S_L \cup S_M)$  dois vértices tais que  $ic_i \in E(H)$ ,  $jc_j \in E(H)$ ,  $jc_i \notin E(H)$  e  $ic_j \notin E(H)$ . Neste caso,  $N(i) \not\subseteq N(j)$  e  $N(j) \not\subseteq N(i)$  em  $H$ , um absurdo com a existência da ordenação  $a_1, \dots, a_x$ .

Da mesma forma, suponha por contradição que não exista uma ordenação  $d_1, \dots, d_l$  dos vértices de  $K_L$ . Sejam  $d_i$  e  $d_j$  dois vértices em que um não está contido na vizinhança do outro em  $H^c$  e  $i \in (S_L \cup S_M)$  e  $j \in (S_L \cup S_M)$  dois vértices tais que  $id_i \in E(H^c)$ ,  $jc_j \in E(H^c)$ ,  $jc_i \notin E(H^c)$  e  $ic_j \notin E(H^c)$ . Neste caso,  $N(i) \not\subseteq N(j)$  e  $N(j) \not\subseteq N(i)$  em  $H$ , um absurdo com a existência da ordenação  $a_1, \dots, a_x$ .  $\square$

## 4.2 Algoritmos para uma $L(2, 1)$ -coloração ótima

Para o resto dessa seção é interessante que o leitor tenha um entendimento do funcionamento do algoritmo linear para obtenção de caminhos disjuntos em um grafo de intervalo, feito por Srinivasa Arikati e Pandu Rangan [3].

---

**Algoritmo 4:** Algoritmo linear para obtenção de  $pv(G)$  em grafos de intervalo

---

**Entrada:** Um grafo de intervalo  $G$

**Saída:**  $pv(G)$  (o número mínimo de caminhos disjuntos de  $G$ )

$pv(G) \leftarrow 0;$

Obtenha  $\mathcal{I}$  um modelo de intervalos de  $G$ ;

Ordene os intervalos de  $\mathcal{I}$  por seus terminos;

**Enquanto** existir  $I_u \in \mathcal{I}$  ainda não selecionado nessa ordem **faça**;

**Se**  $I_u$  não tem interseção com o último intervalo selecionado **então**

$pv(G) \leftarrow pv(G) + 1;$

**Retornar**  $pv(G)$ ;

---

**Teorema 4.5 (Arikati e Rangan [3] - 1990)** *Se  $G$  é um grafo de intervalo, então existe algoritmo linear para determinar  $pv(G)$ .*

Note que o algoritmo escolhe, gulosamente, o próximo intervalo que termina. Se este tem interseção com o intervalo da iteração anterior, então o vértice que este intervalo representa faz parte do mesmo caminho disjunto. Senão, o vértice referente a esse intervalo começa um novo caminho disjunto.

A Figura 4.7 descreve a aplicação deste algoritmo em um grafo de intervalo  $G$ , obtendo  $pv(G) = 2$ , onde os caminhos disjuntos são formados pelos vértices  $(a, b, c, d, e)$  e  $(f, g)$ .

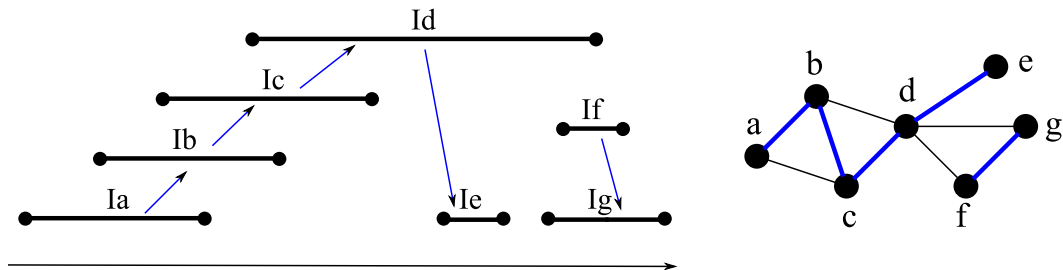


Figura 4.7: Algoritmo para obtenção de  $pv(G)$ .

Sejam  $G_L = G[V \setminus S_R]$  e  $G_R = G[V \setminus S_L]$ , como vemos na Figura 4.8.

A partir de agora, tratamos somente grafos *split* permutação que não tenham diâmetro 2. Caso contrário, é possível obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$  em tempo linear utilizando o Corolário 4.6.

**Corolário 4.6** *Existe algoritmo linear que obtém uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em um grafo *split* permutação com diâmetro 2 em tempo linear.*

**Prova.** Pela Propriedade 4.1,  $G^c$  é um grafo de intervalo. E, a partir do algoritmo do Teorema 4.5, obtemos os  $pv(G^c)$  caminhos disjuntos de  $G^c$  em tempo linear.

Como  $G$  é diâmetro 2, pelo Teorema 3.6,  $\lambda(G) = n + pv(G^c) - 2$ . E, atribuímos cores aos vértices como no Lema 3.20.  $\square$



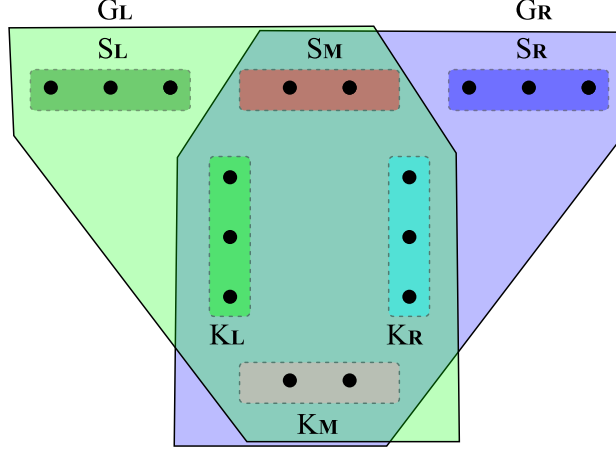


Figura 4.8:  $G_R$  e  $G_L$ .

A ideia do nosso algoritmo é obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de  $G_L$  utilizando os caminhos disjuntos de  $G_L^c$  do Teorema 4.5, que limite  $|Pro(r)|$ , o número máximo de cores proibidas a todo vértice  $r \in S_R$ . A seguir, mostramos que o *span* de  $f$  é  $\max\{\lambda(G_L), \lambda(G_R)\} \geq |Pro(r)|$ , onde colorimos os vértices restantes de  $S_R$  com  $\lambda(G) = \max\{\lambda(G_L), \lambda(G_R)\}$ .

Note que todo modelo de intervalos de  $G_L^c$  é parecido como o da Figura 4.9. Como  $xw \notin E(G_L)$ ,  $\forall x \in (K_M \cup K_R)$  e  $\forall w \in S_L$ , em  $G_L^c$ ,  $xw \in E(G_L^c)$ . De acordo, os intervalos de  $K_M \cup K_R$  têm interseção com todos os intervalos de  $S_L$  em qualquer modelo de intervalos de  $G_L^c$ . E, pela Propriedade 4.4, o conjunto de vértices  $S_M$  pode ser particionado nos conjuntos:  $S_{MT} = \{x \in S_M \mid (K_L \cup K_R) \subseteq N(x)\}$ ;  $S_{MR} = \{x \in S_M \mid x \notin S_{MT} \text{ e } K_L \subseteq N(x)\}$ ;  $S_{ML} = \{x \in S_M \mid x \notin S_{MT} \text{ e } K_R \subseteq N(x)\}$ .

**Teorema 4.7** *O algoritmo de pré-processamento do grafos split permutação  $G$  encontra uma ordenação  $O$  dos vértices referente aos seus  $pv(G_L^c)$  caminhos disjuntos.*

**Prova.** Detalhamos agora as alterações realizadas no modelo de intervalos de  $G_L^c$ . A primeira é feita no Passo 5, onde deslocamos os intervalos de  $K_L$  localizados à esquerda de  $I_{HELLY}$  para a sua direita. No modelo de intervalos de  $G_L^c$ , esses intervalos só têm interseção com intervalos de  $S_{ML} \cup S_L$  e intervalos de  $S_{ML}$  não têm interseção com intervalos de  $K_R$ . Claramente, os intervalos de  $K_L$  à esquerda de  $I_{HELLY}$  só têm interseção com intervalos de vértices de  $S_L$ . Pela Propriedade 4.6, temos uma ordenação  $(d_1, \dots, d_l)$  dos vértices de  $K_L$  em que  $N(d_i) \subseteq N(d_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq l-1$  em  $H^c$ . Portanto, deslocamos tais intervalos à esquerda de  $I_{HELLY}$  para a sua direita, pois os intervalos de  $K_L \cup K_M$  que têm interseção com intervalos de  $S_{ML}$  também têm interseção com os mesmos intervalos de  $S_L$  que os intervalos de  $K_L$  à esquerda de  $I_{HELLY}$  têm. Assim, estendemos os intervalos de  $S_L$  para a direita de forma que esses intervalos de  $K_L$  à esquerda de  $I_{HELLY}$  sejam deslocados para a sua direita, mantendo a sua adjacência em  $G_L^c$ . Na Figura 4.10 deslocamos

---

**Algoritmo 5:** Algoritmo para pré-processamento de  $G$ 

---

**Entrada:** Um grafo *split* permutação  $G = (V, E)$

**Saída:** Uma ordenação  $O$  de  $V$  referentes aos caminhos disjuntos  $pv(G)$

1. Obtenha um modelo de intervalos  $\mathcal{I}$  de  $G$ ;
  2. Obtenha os conjuntos  $S_R, S_L, S_M, K_R, K_L$  e  $K_M$  e os vértices  $u$  e  $v$  pelo método da Propriedade 4.3;
  3. Obtenha um modelo de intervalos  $\mathcal{I}'$  de  $G_L^c$ ;
  4. Encontre a interseção  $I_{HELLY}$  em  $\mathcal{I}$ ;
  5. **Para** todo  $x \in K_L$  **faça**
  6.     No modelo  $\mathcal{I}'$ , desloque o intervalo  $I_x$  para a direita de  $I_{HELLY}$ ;
  7. **Para** todo  $y \in (K_L \cup K_M \cup K_R)$  **faça**
  8.     No modelo  $\mathcal{I}'$ , altere os intervalos  $I_y$  para pontos (o término de  $I_y$  se este estiver a direita de  $I_{HELLY}$ , ou o seu início, caso contrário);
  9. **Enquanto** Passo 10 responder  $pv(G_L^c)$  ao remover os vértices  $S_R$  adicionados ou todos os vértices de  $S_R$  forem utilizados **faça**
  10.     Aplique o algoritmo do Teorema 4.5 no modelo de intervalos  $\mathcal{I}'$  utilizando o modelo de intervalos espelhado, ou seja, a ordem em que os intervalos começam, da direita para esquerda, com a seguinte modificação: sempre que possível, desloque um intervalo  $K_M$  para a esquerda do próximo intervalo  $K_R$  e, guarde a informação de quando um intervalo  $S_R$  é utilizado em vez de um intervalo  $S_L$ , para estes receberem a mesma cor em  $f$ ;
  11.     **Se** o Passo 10 aplicado no modelo  $\mathcal{I}' \cup I_x$  para um intervalo  $I_x$  referente a um vértice de  $S_R$ , que não esteja a direita de  $I_{HELLY}$ , responde  $pv(G_L^c)$  ao remover esse vértice de  $S_R$  adicionado **então**
  12.     Estenda o intervalo  $I_x$  para cobrir todos os intervalos a direita de  $I_{HELLY}$  e volte para o Passo 10 com esse modelo  $\mathcal{I}'$  modificado;
  13.     Guarde a ordenação  $O$  dos vértices dos caminhos disjuntos de  $pv(G_L^c)$  obtida no Passo 10;
  14.     Escolha um vértice  $x \in S_R$  com grau máximo ainda não utilizado e adicione  $I_x$  em  $\mathcal{I}'$  com término em  $I_{HELLY}$  e começo respeitando a sua vizinhança em  $K_R$ ;
  15.     **Se** existe vértice de  $S_L$  que sucedem do último vértice de  $K_R$  no final da ordem  $O$  em um mesmo caminho  $P'$  **então**
  16.     **Se** ainda existe vértice de  $S_R$  não colorido **então**
  17.     Desloque o restante dos vértices de  $P'$  após o último vértice de  $K_R$  e para antes do primeiro vértice de  $K_R$  em  $P'$  utilizando um vértice de  $S_R$  como ligação.
  18.     Desloque os vértices isolados após  $P'$  para antes dos vértices do caminho  $P'$  na ordem  $O$ .
  18. **Retorne**  $O$ ;
-

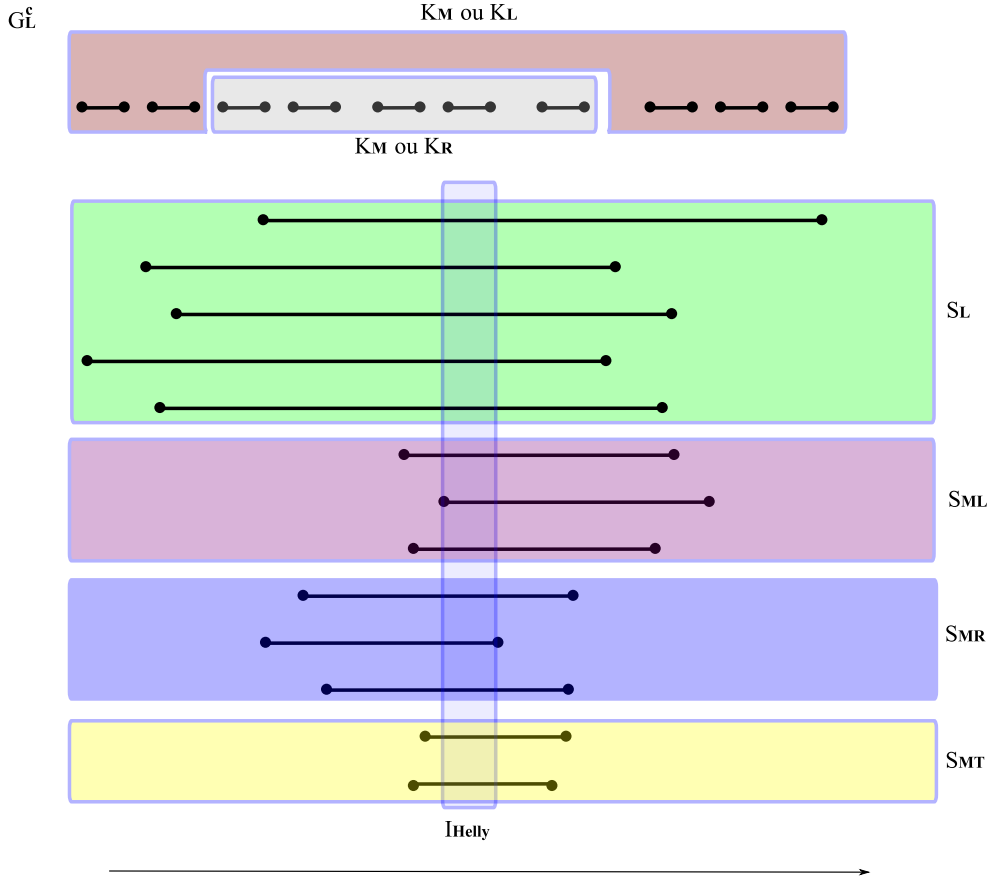


Figura 4.9: Modelo de intervalos de  $G_L^c$ .

o intervalo  $I_y$  do vértice  $y \in K_L$  que está à esquerda de  $I_{HELLY}$  para a direita de  $I_{HELLY}$ , sendo disposto entre os intervalos dos vértices  $x \in K_L$  e  $z \in K_L$ , que o precede e o sucede na ordenação  $(d_1, \dots, d_l)$ .

No Passo 7 transformamos os intervalos de  $K$  em pontos. Esse ponto é o início do intervalo, se este está à direita de  $I_{HELLY}$  ou o seu término, caso contrário. Sem perda de generalidade, suponha por contradição que transformar um intervalo  $I_k$  de um vértice  $k \in (K_L \cup K_M)$  à esquerda de  $I_{HELLY}$  para um ponto, dado por seu término, modifica  $G_L^c = \Theta(\mathcal{I}')$ . Então, pelo menos uma interseção de um intervalo com  $I_k$  não ocorre em seu término, e essa foi perdida nesse passo. Entretanto, todos os intervalos de  $K_L \cup K_M$  só têm interseção com intervalos de  $S_L \cup S_M$ , que começam a partir de  $I_{HELLY}$ , o que torna isso um absurdo.

No Passo 10, deslocamos sempre que possível um intervalo  $I_m$  de  $K_M$  para a esquerda do próximo intervalo  $I_r$  de  $K_R$ . Existem três possibilidades: **(a)**  $N(r) = N(m)$ ; **(b)**  $N'(r) = N'(m)$  onde  $N'(x)$  é dada como a vizinhança do vértice  $x$  desconsiderando vértices já tratados; **(c)** caso contrário.

Em **(a)**, como ambos os intervalos têm a mesma vizinhança, deslocarmos  $I_m$  para à esquerda de  $I_r$  não modifica o grafo de interseção. Por outro lado, no caso **(b)**, deslocamos  $I_m$  para à esquerda de  $I_r$  mesmo se isso modificar o grafo de interseção.

---

**Algoritmo 6:** Algoritmo para  $L(2, 1)$ -coloração em grafos *split* permutação
 

---

**Entrada:** Um grafo *split* permutação  $G = (V, E)$  e uma ordenação  $O$  de  $V$

**Saída:** Uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de  $G$

1. **Se**  $G$  tem diâmetro 2 **então**;
  2.     Obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$  pelo Corolário 4.6;
  3. **Senão então**;
  4.     Gulosamente, de cores a  $V(G_L)$  usando a ordenação inversa de  $O$ ;
  5.     **Se** todos os vértices de  $S_R$  estão em  $O$  **então**
  6.         **Retorne**  $f$  (os vértices já receberam cores em  $\{0, \dots, \lambda(G_L)\}$ );
  7.     **Senão então**
  8.         Atribua cores de forma gulosa aos vértices restantes de  $S_R$ ;
  9.     **Retorne**  $f$ ;
- 

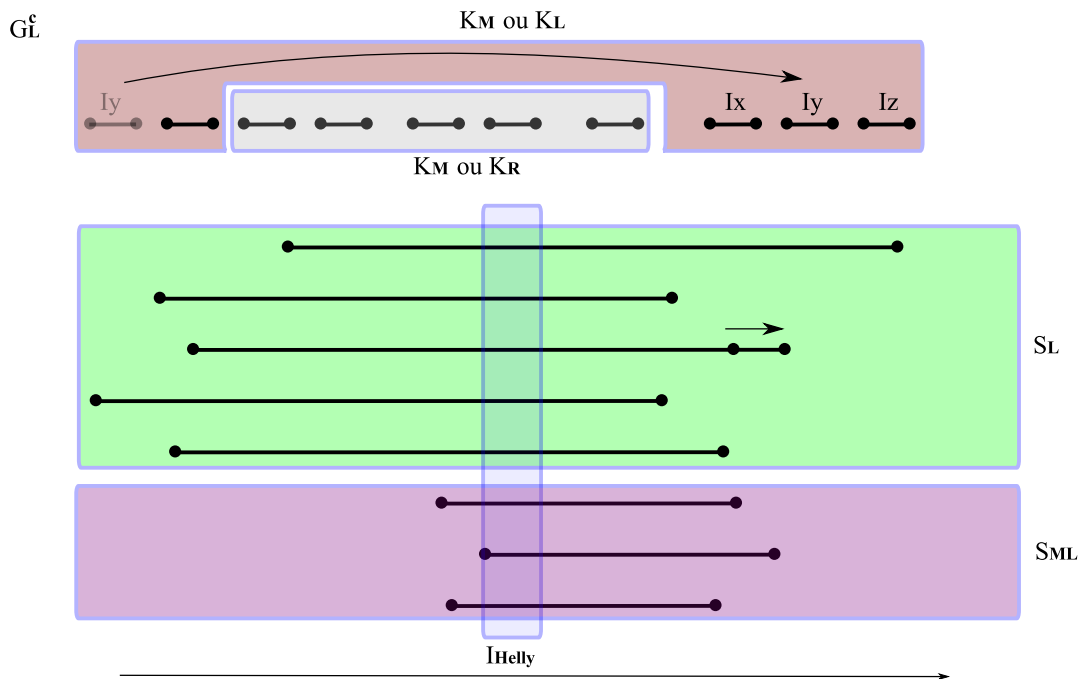


Figura 4.10: Deslocando o intervalo  $I_y$  para a direita de  $I_{HELLY}$ .

Esse deslocamento não altera os caminhos disjuntos que cobrem  $pv(G_L^c)$  obtidos pelo algoritmo, já que os vértices  $m$  de  $K_M$  e  $r$  de  $K_R$  tinham a mesma vizinhança, se forem desconsiderados os vértices já tratados pelo algoritmo, i.e., que já fazem parte de algum dos  $pv(G_L^c)$  caminhos disjuntos e, desta forma, deslocarmos  $I_m$  para à esquerda de  $I_r$  não modifica a escolha dos caminhos disjuntos. Caso contrário, não é feito nenhum deslocamento de  $I_m$ , e o modelo de intervalos permanece o mesmo. A Figura 4.11 ilustra esses três casos.

No Passo 15 deslocamos os intervalos que aparecem após o último vértice  $r \in K_R$  em  $O$  para antes do primeiro vértice de  $K_R$ , utilizando um vértice ainda não colorido de  $S_R$ . Nesse caso, ligamos o vértice  $s' \in S_R$  ao último vértice do mesmo caminho disjunto de  $r$  e cortamos a ligação de um vértice  $s \in S_L$  que era o próximo vértice

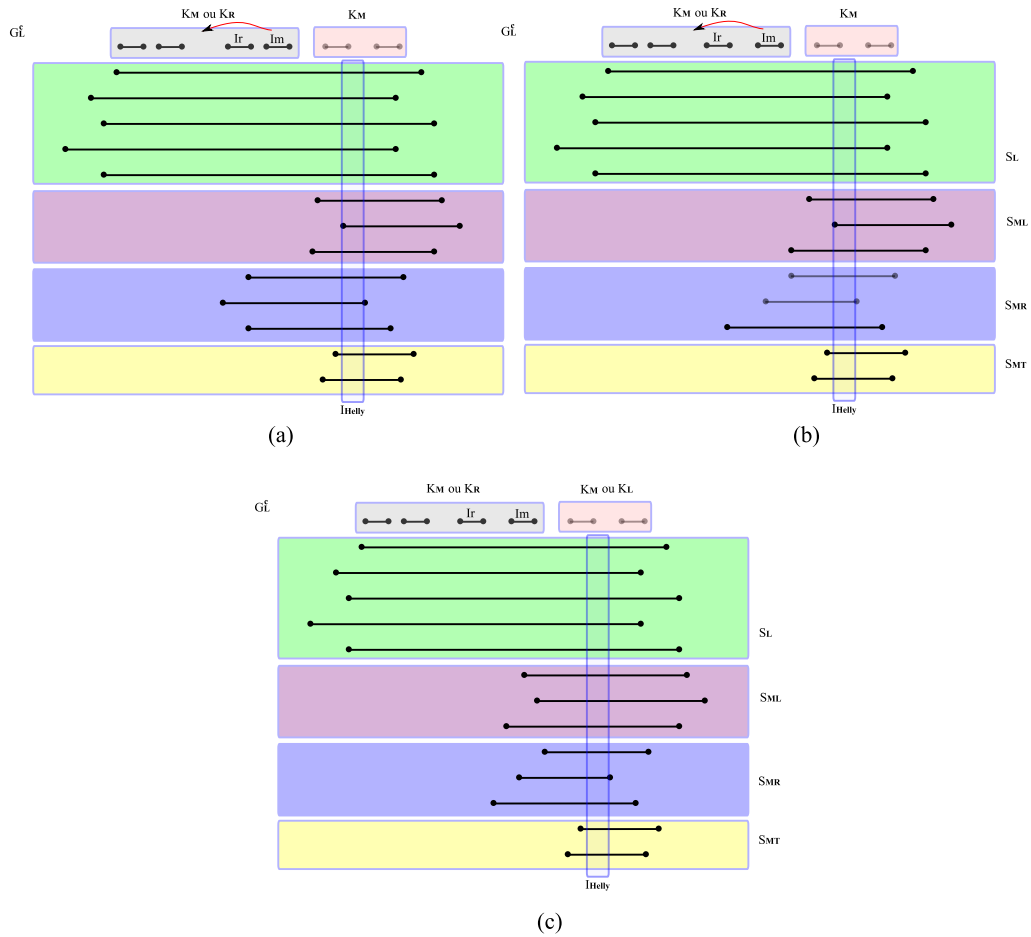


Figura 4.11: Deslocando o intervalo  $I_m$  para a direita de  $I_r$ .

no mesmo caminho de  $pv(G_L^c)$  de  $r$  em  $O$ . Agora temos dois vértices de  $S$  como extremos do caminho, e podemos uni-lo no mesmo caminho disjunto que pertencia antes, só que agora antes da aparição do primeiro vértice de  $r' \in K_R$ . Os casos possíveis são: o caminho disjunto de  $r$  tem dois vértices de  $S$  consecutivos antes da aparição de  $r'$  e a criação desse novo caminho disjunto é trivial, já que todos os vértices de  $S$  formam um completo em  $G_L^c$ , e ligamos  $s'$  e  $s$  a esses dois vértices de  $S$  consecutivos; o caminho disjunto de  $r$  tem  $r'$  como extremo do caminho, e ligamos  $s'$  ou  $s$  ou; tem dois vértices consecutivos um de  $S$  e outro de  $K_M$  antes de  $r'$  e, como nem  $s'$  nem  $s$  são adjacentes a vértices de  $K_M$  nem de  $S$  em  $G_L$ , ligamos os extremos desses caminhos a esses dois vértices consecutivos. A Figura 4.12 descreve o caso em que temos um vértice de  $S_M$  e outro de  $K_M$  no caminho disjunto, antes do primeiro vértice de  $K_R$ . As ilustrações para os outros casos são similares.

Finalmente, a última alteração do Passo 14 feita no modelo de intervalos é a de adicionarmos intervalos de  $S_R$ . Como a condição para essa adição é o número de caminhos disjuntos do grafo resultante permanecer  $pv(G_L^c)$  quando os vértices de  $S_R$  forem retirados então, ao adicionar cada vértice de  $S_R$  ao grafo  $G_L^c$ , o que ocorre é que o número de caminhos disjuntos é reduzido em uma unidade e, quando

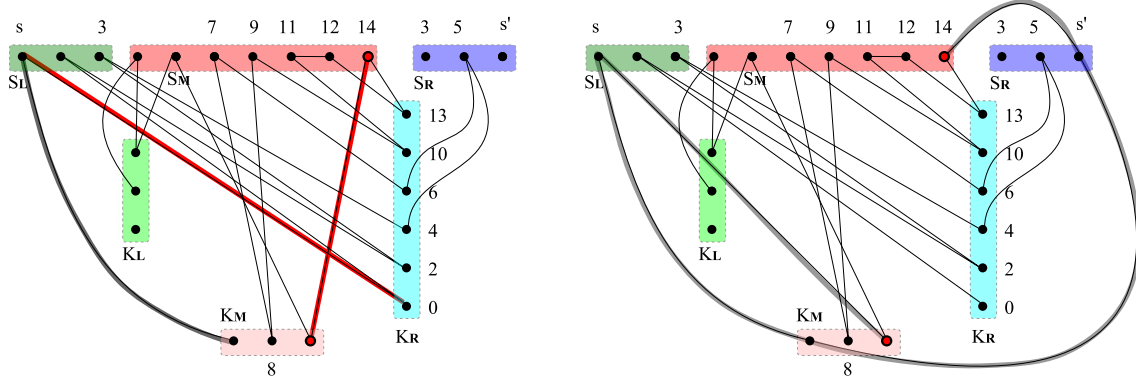


Figura 4.12: Passo 15 do algoritmo de pré-processamento.

removemos estes vértices de  $S_R$ , o grafo continua com  $pv(G_L^c)$  caminhos disjuntos, só que agora os caminhos disjuntos são diferentes.  $\square$

**Lema 4.8** *O número máximo de cores proibidas para um vértice  $r \in S_R$  após uma  $L(2,1)$ -coloração de forma gulosa em cima da reversa da ordem  $O$  dos vértices de  $G_L$ , obtida pelo algoritmo de pré-processamento de um grafo split permutação  $G$  é  $|Pro(r)| \leq 2|K_R| + |S_L| + |S_M| + |K_L| + |K_M| + |S_R| - 1 - c_m$ , onde  $c_m$  é o número máximo de arestas em um emparelhamento de  $H'' = (V(H'), E(H') \setminus \{uv \mid u \text{ e } v \in (S_M \cup S_R)\})$  e  $H' = G_L^c[S_R \cup S_M \cup K_R]$ .*

**Prova.** Sejam  $I_r$  o primeiro intervalo de  $K_R$  alcançado pelo algoritmo na construção de  $O$  e  $I_{r'}$  o último de  $K_R$  que faz parte do mesmo caminho disjunto que  $r$ .

Todo vértice  $r'' \in K_R$  que não estiver neste caminho disjunto são vértices isolados. Em outras palavras, se  $I_{r''}$  não faz parte do mesmo caminho disjunto de  $r$  significa que toda a sua vizinhança foi utilizada pelo algoritmo e, qualquer intervalo de  $K_R$  à esquerda de  $I_{r''}$  no modelo de intervalo também tem toda sua vizinhança utilizada. Conseqüentemente, esses vértices são vértices isolados na partição de caminhos disjuntos. Além disso, os últimos vértices de  $S$  que são utilizados são os de  $S_L$ , já que esses têm os primeiros inícios no modelo de intervalo de  $G_L^c$ , sendo os últimos no modelo espelhado.

Cada vez que o caminho disjunto  $P = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ , obtido pelo algoritmo e em que  $r$  faz parte, não alterna vértices de  $K_R$  um dos seguintes casos ocorre: **(a)** dois vértices de  $S_M$  consecutivos; **(b)** um vértice de  $K_M$  é utilizado.

Cada vez que o caso **(a)** ocorre, a cor mínima que o vértice  $r$  receberia é acrescida de uma unidade e; em **(b)** esse número é acrescido de duas unidades. Então, a cor recebida por  $r$  é  $2|K_R| - 2 + |a| + 2|b|$ , onde  $|a|$  é o número de vezes que o caso **(a)** ocorreu e  $|b|$  o número de vezes do caso **(b)** e a cor do primeiro vértice de  $K_R$  recebe é 0.

A cor do primeiro vértice de  $K_R$  é zero porque deslocamos os vértices que o sucedem na ordenação  $O$  no Passo 15 do algoritmo de pré-processamento. O único caso em que esse vértice não recebe a cor 0 é se, por um acaso, todos os vértices de  $S_R$  já tiverem suas cores atribuídas. Contudo, nesse caso, deixamos o algoritmo terminar normalmente, já que não é necessário nos preocuparmos com  $|Pro(r)|$ .

Note que cada vez que os casos **(a)** ou **(b)** ocorrem, vértices de  $S_M$  ou de  $K_M$  recebem cores no intervalo  $\{0, \dots, 2|K_R| + |a| + 2|b|\}$ , processo ilustrado na Figura 4.13.

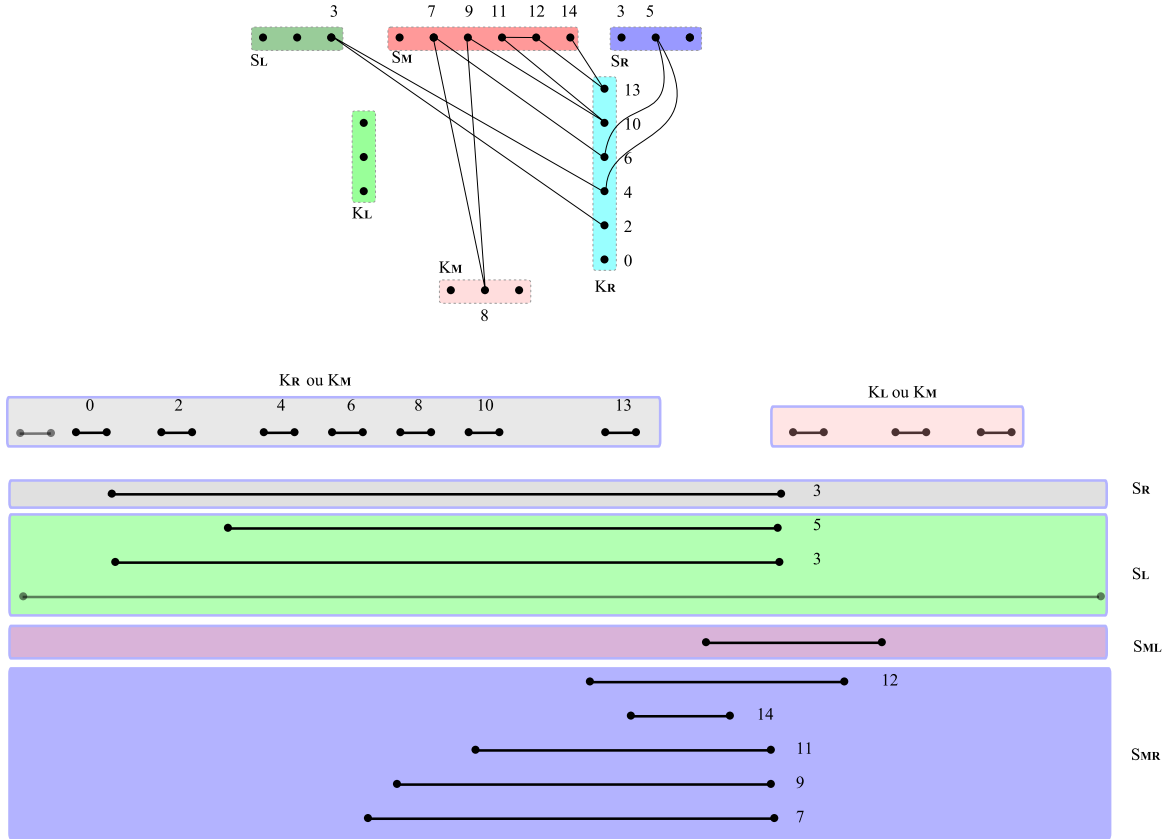


Figura 4.13: Atribuição de cores a vértices de  $K_R$ .

Suponha por contradição um vértice  $w \in K_R$  que não faz parte de  $P$  e pertença ao emparelhamento máximo de  $H''$  com uma aresta  $ww'$ . O intervalo  $I_w$  está à esquerda do intervalo de  $K_R$  mais à esquerda de um vértice em  $P$  em  $\mathcal{I}$  de  $G_L^c$ . E, o intervalo do vértice  $w'$ , adjacente a  $w$ , precisa ter interseção com todos os intervalos de vértices em  $P$ . Se  $w'$  não pertence a  $P$  (ou se for o último vértice em  $P$ ), então o algoritmo teria incluído os vértices  $w'$  e  $w$  como os vértices finais do caminho  $P$ , um absurdo. Se  $w'$  precede um vértice  $s \in S_M$  no caminho  $P$ , o início de  $I_s$  é anterior ao de  $I_{w'}$ , e existe um intervalo  $I_w$  (representado por um ponto nesse modelo de intervalos) que inicia depois que  $I_s$  e não foi escolhido pelo algoritmo, um absurdo.

Se  $w'$  precede um vértice  $m \in K_M$  no caminho  $P$  temos  $N'(w) \subseteq N'(m)$ , pois qualquer intervalo de vértice em  $N(m)$  ainda não utilizado pelo algoritmo que iniciasse depois do intervalo de  $w'$  seria escolhido em vez de  $w'$  e, o Passo 10 do algoritmo de pré-processamento teria deslocado  $I_m$  para a esquerda de  $I_w$ , sendo  $w$  escolhido ao invés de  $m$ , um absurdo. Então,  $w'$  precede um vértice de  $x_a \in K_R$  em  $P$  que, no emparelhamento máximo, teve escolhida uma aresta  $x'_a x_a$ , já que  $w'$  foi utilizada por  $w$  neste emparelhamento. Da mesma forma, esse vértice  $x'_a$  precede um vértice de  $x_b \in K_R$  do caminho  $P$  que é adjacente a um vértice  $x'_b$  no emparelhamento e, assim por diante, para todos os vértices de  $K_R$  neste caminho  $P$ .

A única maneira de  $w'$  preceder  $x_i \in K_R$ , com  $x_i \neq w$ , no caminho  $P$ , é termos um intervalo  $I_y$ , que tenha início depois do início de  $I_{x_j}$  (onde  $x_j$  é o primeiro vértice de  $K_R$  que faz parte do caminho  $P$ ), que suceda o vértice  $x'_j$  e faz  $x'_{j+1}$  preceder  $x_j$  no caminho  $P$ .

O vértice  $y \notin K_R$ , ou  $x_j$  não seria o primeiro vértice de  $P$  que faz parte de  $K_R$ . Além disso,  $y \notin K_M$ , senão pelo Passo 10 do algoritmo  $I_y$  seria deslocado para a esquerda de  $I_{x_j}$ . E,  $y \notin S_L$ , já que os intervalos de  $S_L$  são os primeiros a começar no modelo de intervalos, e o algoritmo não o teria selecionado antes de  $I_w$ . Como um intervalo de  $S_R$  só é adicionado ao modelo de intervalos se este não aumentar o número de caminhos disjuntos do novo modelo, então  $y \notin S_R$ .

Portanto, o vértice  $y$  só pode fazer parte de  $S_M$ . Entretanto, neste caso,  $y$  não precede o vértice  $x'_{j+1}$  e sim o vértice  $x'_j$ , pois o seu intervalo inicia depois do intervalo de  $x'_j$ , um absurdo.

Logo,  $w$  pertence ao caminho  $P$ . A Figura 4.14 ilustra o caminho  $P$  e um emparelhamento máximo de  $H''$ .

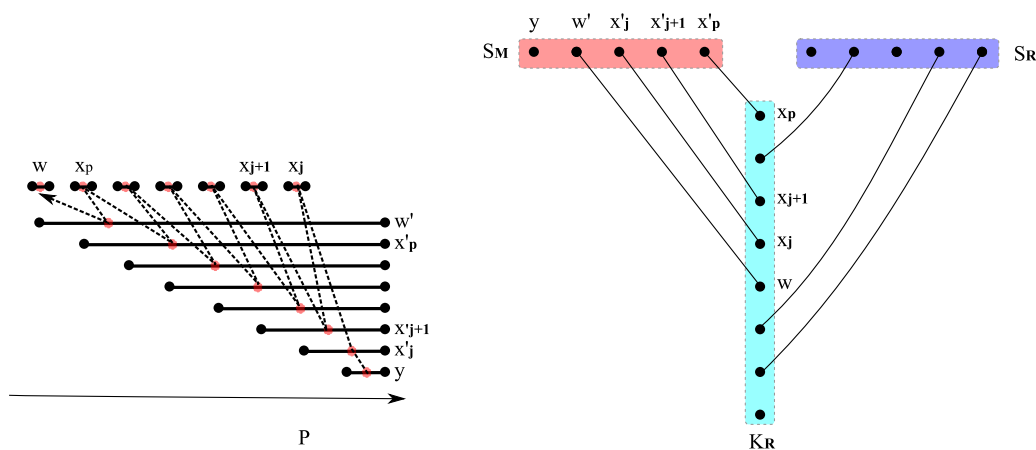


Figura 4.14: Vértices de  $K_R$  que estão no caminho disjunto  $P$ .

Se o primeiro vértice de  $K_R$  receber a cor 0. Seja  $r$  um vértice de  $S_R$ , o número máximo de cores proibidas  $|Pro(r)|$  é:



$2|K_R| + |a| + 2|b|$  (de vértices de  $K_R$ )  
 $+|S_M| - |a| - |b|$  (de vértices de  $S_M$  que não pertencem ao emparelhamento e têm cores proibidas já contadas por causa dos vértices de  $K_R$ ).  
 $+|K_M| - |b|$  (de vértices de  $K_M$  e  $S_M$  que não pertençam ao emparelhamento e têm cores proibidas já contadas por causa dos vértices de  $K_R$ ).  
 $+|K_L|$  (de vértices de  $K_L$ )  
 $+|S_R| - 1$  (de vértices de  $S_R$ )  
 $-cm$  (de vértices do emparelhamento que têm cores proibidas já contadas por causa dos vértices de  $K_R$ ).

Então,  $|Pro(r)| \leq 2|K_R| + |S_L| + |S_M| + |K_L| + |K_M| + |S_R| - 1 - cm$ .  $\square$

A Figura 4.15 ilustra essa contagem, onde as arestas escuras são as do emparelhamento de  $c_m$ . Cada vez que temos dois vértices de  $S_M$  consecutivos no mesmo caminho disjunto que o primeiro vértice  $r \in K_R$ , a cor máxima que  $r$  recebe é acrescida de uma unidade, entretanto, existe uma cor 12 de  $S_M$  em  $\{0, \dots, 2|K_R| + |a| + 2|b| - 1\}$  já contada como proibida e que não é dada a vértice do emparelhamento. E, cada vez que temos vértices de  $K_M$  aparecendo nesse caminho disjunto, a cor máxima de  $r$  é acrescida de duas unidades, entretanto, existem uma cor 9 de  $S_M$  e outra 8 de  $K_M$ , já contadas como proibida e que não são dadas a vértices do emparelhamento.

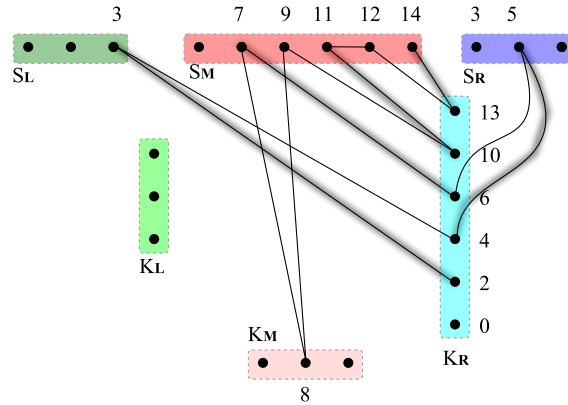


Figura 4.15: Contagem de cores proibidas a vértices de  $S_R$ .

**Teorema 4.9** *O algoritmo de  $L(2, 1)$ -coloração de grafos split permutação encontra uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima com  $\lambda = \max\{\lambda(G_L), \lambda(G_R)\}$ .*

**Prova.** Se  $\lambda(G_R) \geq |Pro(r)|$ , como atribuímos no máximo a cor  $\lambda(G_L)$  para os vértices de  $G_L$  e, posteriormente, no máximo a cor  $|Pro(R)|$  para os vértices de  $S_R$ , então todos os vértices de  $G$  recebem uma cor em  $\{0, \dots, \max\{\lambda(G_L), \lambda(G_R)\}\}$ .

Suponha por contradição  $\lambda(G_R) \leq |P(R)| - 1$ . Pelo Teorema 3.6,  $\lambda(G_R) = n_R + pv(G_R^c) - 2$ , onde  $n_R = |K_R| + |K_L| + |K_M| + |S_R| + |S_M|$ . Então,  $|K_R| + |K_L| + |K_M| + |S_R| + |S_M| + pv(G_R^c) - 2 \leq |P(R)| - 1$ . Pelo Lema 4.8,  $|Pro(r)| \leq 2|K_R| + |S_M| + |K_M| + |K_L| + |S_R| - 1 - c_m$ . E,  $pv(G_R^c) \leq |K_R| - c_m$ .

Todo vértice de  $K_R$  que não pertença ao emparelhamento máximo  $c_m$  é adjacente a vértices de  $S_M \cup S_R$  que fazem parte do emparelhamento. Em  $G_R^c$ ,  $K_R$  é um conjunto independente e os vértices de  $K_R$  só têm adjacências com vértices de  $S_M \cup S_R$ . Para  $pv(G_R^c) = |K_R| - c_m$ , é necessário que cada vértice de  $(S_M \cup S_R)$ , que façam parte do emparelhamento máximo dado, precedam e sucedam vértices de  $K_R$  nos caminhos disjuntos de  $pv(G_R^c)$ . Senão,  $pv(G_R^c) > |K_R| - c_m$ , pois o caminho disjunto deste vértice que não faz parte de  $K_R$  nunca poderia retornar a um vértice de  $K_R$  (ou o emparelhamento não seria máximo).

E, se todo o vértice do emparelhamento máximo precede e sucede vértices de  $K_R$  nos caminhos disjuntos de  $pv(G_R^c)$ , então temos  $|K_R| - c_m$  caminhos, que cobrem todos os vértices de  $K_R$  e os vértices de  $(S_R \cup S_M)$  que pertencem ao emparelhamento máximo. Entretanto, pelo menos um vértice de  $K_L$  ainda não foi coberto e, como todos esses  $|K_R| - c_m$  caminhos disjuntos têm seus extremos em  $K_R$ , não tendo mais nenhuma adjacência para vértices de  $(S_R \cup S_M)$  que não sejam do emparelhamento máximo (ou o emparelhamento não seria máximo), então temos pelo menos mais um caminho disjunto para cobrir todos os vértices de  $G_R^c$ , ou seja,  $pv(G_R^c) > |K_R| - c_m$ , um absurdo.  $\square$

**Lema 4.10** *Se  $G$  é um grafo split permutação, obtemos os conjuntos  $K_L, K_R, K_M, S_L, S_R$  e  $S_M$  em tempo linear.*

**Prova.** Basta aplicar o seguinte procedimento.

- i. Construa o modelo de intervalos  $\mathcal{I}$  de  $G$ .
- ii. Ordene os vértices de  $G$  pelo tamanho de seus graus.
- iii. Seja  $I_u$  e  $I_v$  os intervalos de  $K$  em  $\mathcal{I}$  que têm o primeiro início e o último fim.
- iv. Enquanto existir um vértice  $w$  de  $K$  com grau maior ou igual ao grau de  $u$  (ou maior ou igual que o grau de  $v$ ) faça
  - v. Se  $N(u) \subseteq N(w)$  (ou  $N(v) \subseteq N(w)$ ), escolha  $I_w$  em vez de  $I_u$  (ou  $I_v$ ).

Este procedimento pode ser feito em tempo linear, já que cada vértice  $w \in K$  só é considerado uma vez. E, essa verificação de vizinhança contida pode ser feita em  $O(\text{grau}(w) + \text{grau}(u))$  (ou  $O(\text{grau}(w) + \text{grau}(v))$ ) para cada vértice  $w$  (ou  $v$ ).  $\square$

**Teorema 4.11** *Se  $G$  é um grafo split permutação, então existe algoritmo linear para determinar  $\lambda(G)$ .*

**Prova.** Pelo Teorema 4.9,  $\lambda(G) = \max\{\lambda(G_R), \lambda(G_L)\}$ . Pelo Lema 4.10, obtemos as partições os grafos  $G_R$  e  $G_L$  em tempo linear. Como  $G_R$  e  $G_L$  têm diâmetro 2, pelo Teorema 3.6,  $\lambda(G_R) = |V(G_R)| + pv(G_R^c) - 2$  e  $\lambda(G_L) = |V(G_L)| + pv(G_L^c) - 2$ . Ou seja, só é necessário calcular  $pv(G_R^c)$  e  $pv(G_L^c)$  que, pelo Teorema 4.5, são obtidos em tempo linear.  $\square$

**Teorema 4.12** *Se  $G$  é um grafo split permutação, então existe algoritmo  $O(n^3)$  que encontra uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$ .*

**Prova.** Pelo Teorema 4.9 o algoritmo para  $L(2, 1)$ -coloração em grafos *split* permutação encontra uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima.

A complexidade do algoritmo de pré-processamento é  $O(n^3)$ . Os Passos 1 e 3 do algoritmo de pré-processamento têm complexidade  $O(n + m)$ , pois esta é a complexidade para se encontrar o modelo de intervalos de um grafo de intervalo [68]. Pelo Lema 4.10, o Passo 2 do algoritmo de pré-processamento que determina os conjuntos  $K_R, K_L, K_M, S_R, S_L$  e  $S_M$  tem complexidade linear. O Passo 4 encontra a interseção HELLY deste modelo de intervalos em  $O(n)$  (testando a interseção entre cada intervalo de  $K$ ). O Passo 5 é feito em  $O(n^2)$ , deslocando cada um dos no máximo  $O(n)$  vértices de  $K_L$  à esquerda de  $I_{HELLY}$  para a sua posição correta, à sua direita. Já o Passo 7 pode ser feito trivialmente em  $O(n)$ . A complexidade do Passo 9 é  $O(n^3)$ , já que existem  $O(n)$  iterações nesse passo e, a cada iteração, são necessárias  $O(n^2)$  operações para deslocar os intervalos de vértices de  $K_M$ . O Passo 10 é o que domina a complexidade dos outros passos (que é feito em  $O(n)$ ) dentro dessa iteração. Os Passos 15 e 17 são feitos trivialmente em  $O(n^2)$ .

Para o algoritmo de  $L(2, 1)$ -coloração em grafos *split* permutação, o Passo 1 tem complexidade  $O(n+m)$ , pois tendo os caminhos disjuntos, que são obtidos em tempo linear pelo Teorema 4.5, é possível encontrar uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$ . E, o Passo 3 pode ser feito em  $O(n^3)$ , já que a cada vértice é necessário saber as cores proibidas de seus vizinhos e de vértices à distância 2. Ou seja, para cada um dos  $n$  vértices são necessárias, no máximo,  $O(n^2)$  verificações.  $\square$

### 4.3 Perspectivas

Apresentamos neste capítulo um algoritmo polinomial para obtermos uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima na classe dos grafos *split* permutação. Além disso, determinamos o valor de  $\lambda$  nessa classe como o máximo do valor desse parâmetro entre dois de seus subgrafos.

Deixamos em aberto estender o nosso algoritmo para a classe dos grafos *split* comparabilidade. A prova da Propriedade 4.4, que utiliza o fato do grafo ser comparabilidade (e por isso não tem uma tripla asteroidal) foi feita inicialmente de forma alternativa, utilizando o fato do grafo ter uma orientação transitiva. Acreditamos também que o restante das provas deste capítulo possam ser estendidas para a classe dos grafos *split* comparabilidade com pequenas alterações.

# Capítulo 5

## Grafos $(q, q - 4)$

Um algoritmo é *FPT* (*Fixed-Parameter Tractable*) se tem solução em tempo polinomial ao fixarmos algum de seus parâmetros. Este capítulo contém um algoritmo *FPT* para obtermos uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima nos grafos  $(q, q - 4)$  quando o valor de  $q$  é fixo e uma análise do limite superior para  $\lambda$  em grafos nessa classe. Este trabalho foi feito em conjunto com o Professor Rudini Sampaio da UFC e de seu aluno Nicolas Martins, sendo apresentado no SBPO 2011, UBATUBA-SP [30].

### 5.1 Características

Um grafo  $G = (V, E)$  com  $V = S \cup K \cup R$ , onde  $G[S \cup K]$  é um grafo *split* e  $\{uv \mid u \in K \text{ e } v \in R\} \subseteq E$ , é: **(i)** *aranha magra* se existe uma função bijetiva  $g : S \rightarrow K$  que associa as arestas de  $E$  entre vértices de  $S$  e  $K$  ou; **(ii)** *aranha gorda* se existe função bijetiva  $g : S \rightarrow K$  que associa as não arestas entre vértices desses dois conjuntos.

É interessante notar que  $|S| = |K|$  e, se  $G$  é uma aranha magra, então  $G^c$  é uma aranha gorda (e vice-versa). A Figura 5.1 ilustra exemplos de aranha magra e de aranha gorda. Usualmente denotamos os conjuntos  $S$ ,  $K$  e  $R$  por *pernas*, *corpo* e *cabeça* da aranha.

**Teorema 5.1** (Babel e Olariu [4]) *Um grafo  $G$  é um grafo  $(q, q - 4)$  se nenhum conjunto com  $q$  vértices induz mais do que  $q - 4$  caminhos distintos de tamanho quatro.*

Desta forma, os cografos são grafos  $(4, 0)$  (já que são os grafos que não têm  $P_4$ 's) e os grafos  $P_4$ -esparsos são os  $(5, 1)$ .

Um grafo é *p-conexo* se, para toda partição dos vértices de  $G$  em conjuntos  $A$  e  $B$ , existe um  $P_4$  utilizando vértices de  $A$  e  $B$ . Uma *p-componente separável* é um subgrafo *p-conexo* maximal com uma bipartição  $H_1$  e  $H_2$  onde todo  $P_4$   $xyzw$  com vértices em  $H_1$  e  $H_2$  é tal que  $w, y \in H_1$  e  $x, z \in H_2$ .

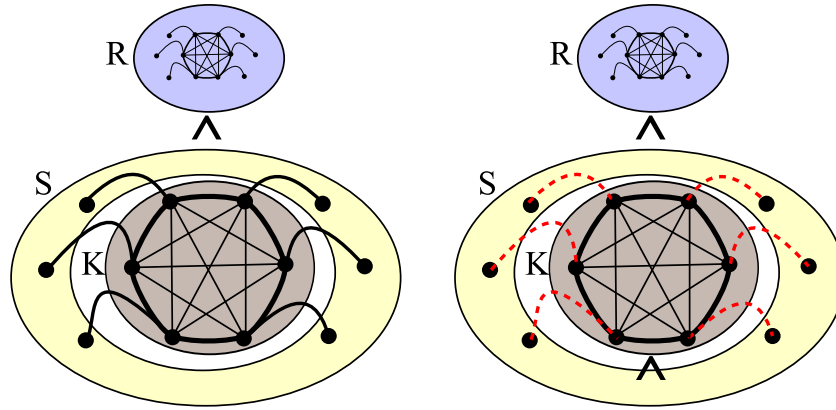


Figura 5.1: Aranha magra e aranha gorda.

**Teorema 5.2** (Babel e Olariu [4] - 1998) *Um grafo  $(q, q - 4)$  com  $q$  fixo satisfaz:*

- (i)  $G$  é desconexo;
- (ii)  $G^c$  é desconexo;
- (iii)  $G$  é aranha, onde a sua cabeça é um grafo  $(q, q - 4)$ , ou;
- (iv)  $G$  possui uma  $p$ -componente separável  $H = (H_1, H_2)$  com menos que  $q$  vértices tal que todo vértice de  $V(G) \setminus H$  é adjacente aos vértices de  $H_1$  e não-adjacentes aos vértices de  $H_2$ .

Além disso, a caracterização pode ser obtida em tempo linear [4]. A Figura 5.2 ilustra um grafo  $(q, q - 4)$ . Nesta, temos um *join* entre vértices de  $G \setminus H$  e de  $H_1$ , entretanto, não existe aresta entre vértices de  $G \setminus H$  e de  $H_2$ .

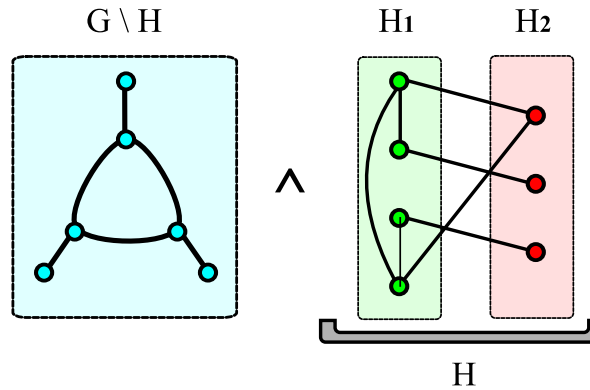


Figura 5.2: Grafo  $(q, q - 4)$ .

## 5.2 $L(2, 1)$ -coloração ótima de grafos aranha

Já havíamos trabalhado com os grafos aranha quando obtivemos uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima dos grafos  $P_4$ -tidy [25]. Contudo, aqui é descrita uma forma mais simples para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima nesses grafos do que a do algo-

ritmo na classe dos grafos  $P_4$ -tidy, onde realizamos uma análise intensiva dos casos possíveis.

**Teorema 5.3** (Georges et al. [38] - 1994) *Para um grafo  $G = G_1 \wedge G_2$ , onde  $n_1 = |V(G_1)|$  e  $n_2 = |V(G_2)|$ ,  $\lambda(G) = \max\{n_1 - 1, \lambda(G_1)\} + \max\{n_2 - 1, \lambda(G_2)\} + 2$ .*

**Teorema 5.4** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo aranha magra com  $V = S \cup K \cup R$ , onde  $|K| > 3$ , então  $\lambda(G) = \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2|K|$ .*

**Prova.** Sejam  $f$  uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G[K \cup R]$  e  $s_i \in S$  o vértice adjacente a  $c_i \in K$ .

Pelo Teorema 5.3,  $\lambda(G[K \cup R]) = \max\{|K| - 1, \lambda(G[K])\} + \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2$ . Como  $\lambda(G[K]) = 2|K| - 2$ , então  $\lambda(G) \geq \lambda(G[K \cup R]) = 2|K| - 2 + \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2$ .

Seja  $g$  uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G[R]$  com  $\lambda(G[R])$ . Definimos uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$  com  $\text{span } \lambda(G) = \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2|K|$  segundo:  $f(v) \in \{0, \dots, 2|K| - 2\}$ , se  $v \in K$  e;  $f(v) = 2|K| - 2 + 2 + g(v)$ , se  $v \in R$ .

Atribuímos então as cores pares de 0 até  $2|K| - 2$  aos vértices de  $G[K]$ . Desta forma,  $|K| - 1$  cores não são utilizadas no intervalo  $\{0, \dots, 2|K| - 2\}$ . Cada vértice  $s_i \in S$  não pode utilizar apenas duas dessas  $|K| - 1$  cores (as cores  $f(c_i) + 1$  e  $f(c_i) - 1$ ). Mas, como  $|K| > 3$ , temos pelo menos uma cor  $c_i \in \{0, \dots, \max\{|R| - 1, \lambda(G[R])\} + 2|K|\}$  para qualquer vértice  $s_i \in S$ , onde  $f(s_i) = c_i$ .  $\square$

**Teorema 5.5** (Giakoumakis et al. [39] - 1994) *Se  $G = (V, E)$  é um grafo aranha magra com  $V = S \cup K \cup R$ , então  $pv(G) = pv(R) + \lceil \max\{0, \frac{|K|}{2} - pv(R)\} \rceil$ .*

No Teorema 5.6, note que uma aranha gorda com  $|K| = 1$  é desconexa e quando  $|K| = 2$  esta é tratada como uma aranha magra. Portanto, consideramos os casos em que  $|K| > 2$ .

**Teorema 5.6** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo aranha gorda com  $V = S \cup K \cup R$ , onde  $|K| > 2$ , então*

$$\lambda(G) = \begin{cases} \lambda(G[R]) + 2|K| & \text{se } \lambda(G[R]) \geq |R| + \lceil \frac{|K|}{2} \rceil - 2 \\ |V(G)| + \lceil \frac{|K|}{2} \rceil - 2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Prova.** Como  $G$  é um grafo aranha gorda, então  $G^c$  é um grafo aranha magra. Se  $pv(G^c[R]) \geq \lceil \frac{|K|}{2} \rceil$ , então pelo Teorema 3.7,  $\lambda(G[R]) = |R| + pv(G^c[R]) - 2$ . Além disso, pelo Teorema 5.5,  $pv(G^c) = pv(G^c[R])$ . Como  $G$  tem diâmetro 2, pelo Teorema 3.6,  $\lambda(G) = n + pv(G^c) - 2 = |K| + |S| + |R| + pv(G^c[R]) - 2 = \lambda(R) + 2|K|$

Caso contrário, se  $pv(G^c[R]) < \lceil \frac{|K|}{2} \rceil$ , pelo Teorema 5.5,  $pv(G^c) = \frac{|K|}{2}$  e, pelo Teorema 3.7,  $\lambda(G) = |V(G)| + \lceil \frac{|K|}{2} \rceil - 2$ . Em ambos os casos atribuímos cores aos vértices de  $G$  como descrito no Lema 3.20.  $\square$

### 5.3 Algoritmo para $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos $(q, q - 4)$ com $q$ fixo

Inicialmente, estabelecemos um método para obter os  $pv(G)$  caminhos disjuntos em um grafo  $(q, q - 4)$ .

**Teorema 5.7** *Seja  $q$  um inteiro fixo e  $G$  um grafo com mais do que  $2q$  vértices que tem um subgrafo  $H = (H_1, H_2)$  com no máximo  $q$  vértices tal que todo vértice de  $G \setminus H$  é adjacente aos vértices de  $H_1$  e não adjacente aos vértices de  $H_2$ . Para toda cobertura  $\phi$  de caminhos disjuntos de  $H$ , sejam  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  os caminhos disjuntos que tenham ambas as extremidades em  $H_1$ , em  $H_2$  e uma extremidade em  $H_1$  e outra em  $H_2$ , respectivamente. Então,  $pv(G) = \min_{\phi \in C_H} \{\max\{pv(G \setminus H) - |B_1(\phi)|, \lceil \frac{|B_3(\phi)|}{2} \rceil, 1\} + |B_2(\phi)|\}$ , onde  $C_H$  é o conjunto de todas as coberturas por caminhos de  $H$ . Além disso, é possível obter uma cobertura mínima de  $G$  a partir de uma cobertura mínima de  $G \setminus H$ .*

**Prova.** Seja  $\gamma$  uma cobertura por caminhos mínima de  $G \setminus H$ . Se  $\gamma < |B_1(\phi)| + \frac{|B_3(\phi)|}{2}$  então, como  $G \setminus H$  tem mais que  $q$  vértices, podemos quebrar esses caminhos em  $\gamma = |B_1(\phi)| + \frac{|B_3(\phi)|}{2}$  caminhos disjuntos.

Para  $i = 1$  até  $|B_1(\phi)|$ , usamos a aresta entre a segunda extremidade do  $i$ -ésimo caminho de  $\gamma$  com a primeira extremidade do  $i$ -ésimo caminho de  $B_1(\phi)$  e entre a primeira extremidade do  $(i + 1)$ -ésimo caminho de  $\gamma$  com a segunda extremidade do  $i$ -ésimo caminho de  $B_1(\phi)$ . Com este procedimento, formamos um caminho a partir de  $|B_1(\phi)|$  caminhos de  $\gamma$  e de todos os caminhos de  $B_1(\phi)$ .

Seja  $\Omega$  o conjunto dos caminhos formado após o procedimento anterior, os caminhos de  $\gamma$  que não foram alterados pelo procedimento e mais os caminhos de  $B_2(\phi)$ .

Atualize os caminhos de  $\Omega$  da seguinte forma: para  $i = 1$  até  $|B_3(\phi)|$  usamos a aresta entre o  $i$ -ésimo caminho de  $B_3(\phi)$  que está em  $H_1$  e a primeira (se  $i$  for par) ou segunda (se  $i$  for ímpar) extremidade do  $(\lceil \frac{i}{2} \rceil)$ -ésimo caminho de  $\Omega$  para formar novos caminhos disjuntos.

Este procedimento obtém uma cobertura por caminhos disjuntos de  $G$  com  $|\gamma| - |B_1(\phi)| + |B_2(\phi)|$  caminhos. Portanto,  $pv(G) \leq |\gamma| - |B_1(\phi)| + |B_2(\phi)|$ . Tal procedimento vale para qualquer  $\phi \in C_H$ , valendo também para a cobertura mínima de  $H$  entre todas as coberturas de  $C_H$ , como ilustrado na Figura 5.3.

Sejam agora  $\Gamma$  uma cobertura mínima de caminhos disjuntos de  $G$  e  $\gamma$  e  $\phi$  coberturas de  $G \setminus H$  e  $H$ , respectivamente, induzidas por  $\Gamma$ , sendo  $B_1(\phi)$ ,  $B_2(\phi)$  e  $B_3(\phi)$  como definidos anteriormente. Nestas coberturas, supomos que os caminhos de  $B_1(\phi)$  e  $B_3(\phi)$  não são inteiros (senão, é possível rearranjar os caminhos de  $\Gamma$

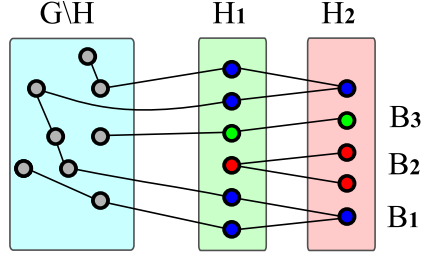


Figura 5.3: Caminhos disjuntos em um grafo  $(q, q - 4)$ .

para obter o desejado, mantendo uma cobertura de mesmo tamanho, já que  $G \setminus H$  tem mais que  $q$  vértices). Pelo mesmo motivo, supomos que nenhuma extremidade de um caminho de  $B_1$  é extremidade de caminho em  $\Gamma$ .

Então, recuperamos os caminhos de  $\Gamma$  ligando caminhos de  $\gamma$  com caminhos de  $B_1(\phi)$ . E, acrescentamos os caminhos de  $B_3(\phi)$  as extremidades dos caminhos gerados. Desta forma,  $|\gamma| \geq |B_1(\phi)| + \lceil \frac{|B_3(\phi)|}{2} \rceil$  e,  $pv(G) = |\gamma| - |B_1(\phi)| + |B_2(\phi)| \geq pv(G \setminus H) - |B_1(\phi)| + |B_2(\phi)|$ . Valendo também para o caso em que  $\phi$  é o mínimo entre todas as coberturas de  $C_H$ .

Quando  $pv(G \setminus H) < |B_1(\phi)|$  e  $|B_3(\phi)| = 0$ , existe um caminho disjunto formado pelos caminhos disjuntos de  $G \setminus H$  e os de  $B_1(\phi)$ . Senão, se  $pv(G \setminus H) > |B_1(\phi)|$  e  $pv(G \setminus H) - |B_1(\phi)| \geq \lceil \frac{|B_3(\phi)|}{2} \rceil$ , então existem  $pv(G \setminus H) - |B_1(\phi)|$  caminhos disjuntos formados pelos caminhos disjuntos de  $G \setminus H$ ,  $B_1(\phi)$  e  $B_3(\phi)$ . Finalmente, se  $pv(G \setminus H) > |B_1(\phi)|$  e  $pv(G \setminus H) - |B_1(\phi)| \leq \lceil \frac{|B_3(\phi)|}{2} \rceil$ , então existem  $\lceil \frac{|B_3(\phi)|}{2} \rceil$  caminhos disjuntos formados pelos caminhos disjuntos de  $G \setminus H$ ,  $B_1(\phi)$  e  $B_3(\phi)$ . Em todos os casos, os caminhos disjuntos de  $B_2(\phi)$  permanecem na cobertura mínima de  $G$ .

Como o número  $q$  e o tamanho de o tamanho de  $C_H$  são uma constantes e, dado um  $\phi \in C_H$ , obtemos em tempo linear uma cobertura mínima por caminhos disjuntos de  $G$  utilizando os caminhos disjuntos de  $\phi$ , então, calculamos o número mínimo de caminhos disjuntos para uma grafo  $(q, q - 4)$  que tenha um componente  $p$ -conexo em tempo linear.  $\square$

Quando nos referimos a operação de *condensar* dois vértices  $u$  e  $v$  em um grafo  $G$ , temos como resultado o grafo  $G'$  retirando os dois vértices  $u$  e  $v$  e adicionando um vértice  $uv$  com  $N(uv) = N(u) \cup N(v)$ .

**Teorema 5.8** *Dado um grafo  $(q, q - 4)$ , obtemos uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$  em tempo  $O(n(q^q))$ .*

**Prova.** Pelo Teorema 5.2,  $G$  é um grafo desconexo, um grafo complemento desconexo, um grafo aranha ou possui uma  $p$ -componente separável com menos que  $q$  vértices.



---

**Algoritmo 7:** Algoritmo de  $L(2, 1)$ -coloração em grafos  $(q, q - 4)$ 

---

**Entrada:** Um grafo  $(q, q - 4)$   $G = (V, E)$  com  $q$  fixo e sua decomposição do Teorema 5.2.

**Saída:** Uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de  $G$

**Se**  $G$  tem menos que  $2q$  vértices **então**

**Retornar**  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$  usando qualquer algoritmo exponencial (e.g., método guloso).

**Se**  $G$  é desconexo **então**

aplique este algoritmo para cada componente conexo de  $G$ .

**Se**  $G = G_1 \wedge G_2$  é complemento desconexo **então**

**Retornar** Atribuição de cores  $f$  de  $G$  obtida segundo o Teorema 5.3 (aplicando o algoritmo novamente nos subgrafos  $G_1$  e  $G_2$ ).

**Se**  $G$  é grafo aranha **então**

**Retornar**  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G$  obtida pelos Teoremas 5.4 e 5.6.

**Se**  $G$  tem componente  $p$ -separável **então**

**Para** todo  $G'$  obtido condensando vértices à distância 3 de  $G$  **faça**

encontrar  $pv(G'^c)$  utilizando o Teorema 5.7

obter  $L(2, 1)$ -coloração de  $G'$  a partir de  $pv(G'^c)$  como no

Lema 3.20.

guardar uma  $L(2, 1)$ -coloração  $f$  de  $G'$  com  $span$  mínimo.

**Retornar**  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de  $G$  a partir da  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G'$ , descondensando os vértices.

---

Os casos em que  $G$  é um grafo desconexo, um grafo complemento desconexo ou um grafo aranha são resolvidos pelos Teoremas 5.3, 5.4 e 5.6, respectivamente, com exceção das aranhas magras com  $|K| \leq 3$  (que são tratadas como um componente  $p$ -separável).

Seja  $G$  um grafo com uma componente  $p$ -separável com menos que  $q$  vértices. O grafo  $G^c$ , complemento de  $G$ , também é um grafo  $(q, q - 4)$ , onde  $H^c$  é um  $p$ -componente separável de  $G^c$  com menos de  $q$  vértices (neste caso, os conjuntos  $H_1^c = H_2$  e  $H_2^c = H_1$ ).

Se  $|V(G)| \leq 2q$ , geramos todas as  $L(2, 1)$ -colorações de  $G$  em  $O((2q)^{4q}) = O(q^q)$  utilizando o algoritmo exponencial de Kratochvíl et al. [56]. Senão, pelo Teorema 5.7, calculamos  $pv(G^c)$  gerando todas as coberturas por caminhos de  $G^c[H]$ . E, como  $|V(G^c[H])| \leq q$ , então  $|C_{H^c}| \leq q^q$ .

Pelo Teorema 3.7, se  $pv(G^c) > 1$ , então  $\lambda(G) = |V(G)| + pv(G^c) - 2$ . Senão, quando  $pv(G^c) = 1$ , seja  $f'$  uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$  onde temos vértices de  $G$  com uma mesma cor. Estes vértices precisam estar à distância 3 entre si para não desrespeitar a restrição de distância 2. Neste caso, esses vértices são de  $H_1$  ou  $H_2$ , pois apenas nesses conjuntos existem vértices com distância 3 para outros vértices do grafo.

Seja  $G'$  o grafo obtido ao condensar todos os vértices de  $H_1$  e  $H_2$  que tenham uma mesma cor em  $f'$ . Pelo Teorema 5.7, é possível encontrar  $pv(G'^c)$  em tempo

linear. Note que ao condensar dois vértices de  $H_1$  e  $H_2$  podem aparecer grafos  $P_4$  onde os extremos não estão em  $H_2$ , entretanto, o Teorema 5.7 não leva em conta o fato de que os extremos de todos os  $P_4$  tenham que estar em  $H_2$ , de forma que este continua encontrando  $pv(G'^c)$  em tempo linear.

Quando  $pv(G'^c) > 1$ , pelo Teorema 3.7,  $\lambda(G') = |V(G')| + pv(G'^c) - 2$ , obtemos a atribuição de cores de  $f'$  segundo os caminhos disjuntos de  $G'^c$  como descrito no Lema 3.20, e estendemos essa atribuição de cores para  $G$  repetindo as mesmas cores aos vértices condensados.

Caso contrário,  $pv(G'^c) = 1$ , e como todos os vértices de  $G$  com uma mesma cor em  $f'$  foram condensados, então cada vértice em  $G'$  recebe uma cor diferente. Neste caso, utilizamos o caminho hamiltoniano de  $G'^c$  para atribuir cores em  $\{0, \dots, |V(G')| - 1\}$  aos vértices de  $G'$ , e estendemos essa atribuição de cores para os vértices condensados, obtendo uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$ .

Portanto, para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$  no caso em que  $pv(G^c) = 1$ , verificamos entre todos os no máximo  $q^q$  grafos  $G'$ , obtidos a partir de  $G$  condensando vértices à distância 3 que estão em  $H_1$  ou em  $H_2$ , quais são os que têm o menor *span* ao aplicar o algoritmo descrito neste teorema. Desta forma, o algoritmo tem complexidade  $O(n(q^q))$ , que é linear em  $n$  quando  $q$  é fixo.  $\square$

## Exemplo

A Figura 5.4 ilustra um grafo  $(q, q - 4)$  que tem uma componente  $p$ -separável  $H$ , onde  $pv(G \setminus H) = 2$ .

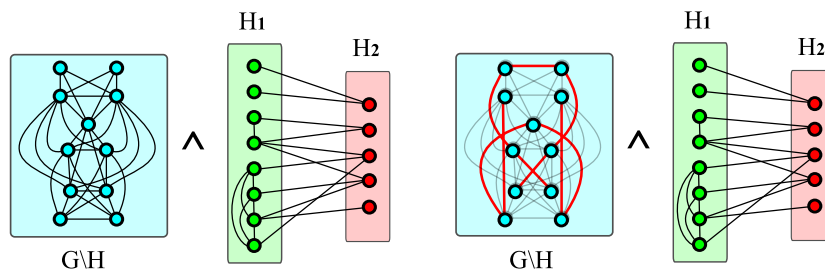


Figura 5.4: Aplicação do algoritmo em grafos  $(q, q - 4)$ .

Uma condensação possível de vértices que estão à distância 3 é apresentada na Figura 5.5, obtendo assim o grafo  $G'$ .

Na Figura 5.6 tratamos o grafo complemento. Verificamos agora quais das partições dos vértices em caminhos disjuntos de  $H'^c$  podem ser estendida para todo o grafo  $G'^c$  de forma a encontrar  $pv(G'^c)$ . Na primeira tentativa, obtemos  $pv(G'^c) = 4$ , entretanto, como ilustrado na segunda tentativa, existe uma partição dos vértices de  $H'^c$  em caminhos disjuntos que pode ser estendida para o grafo  $G^c$  de forma que  $pv(G^c) = 1$ .

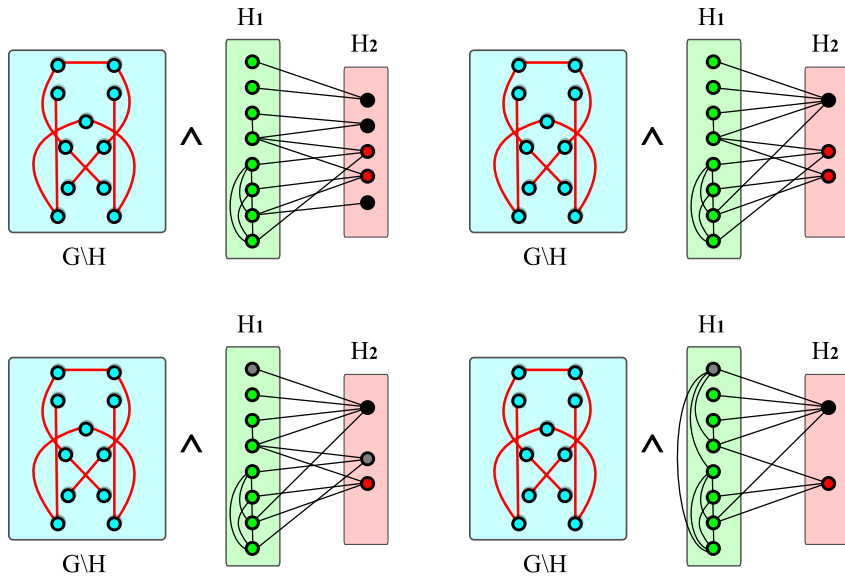


Figura 5.5: Aplicação do algoritmo em grafos  $(q, q - 4)$ .

Portanto, atribuímos cores aos vértices de  $G'$  respeitando uma  $L(2, 1)$ -coloração utilizando cores sequenciais aos vértices desses caminhos disjuntos em  $G'^c$ , sempre não utilizando uma cor cada vez que passamos do fim de um caminho para o início do próximo.

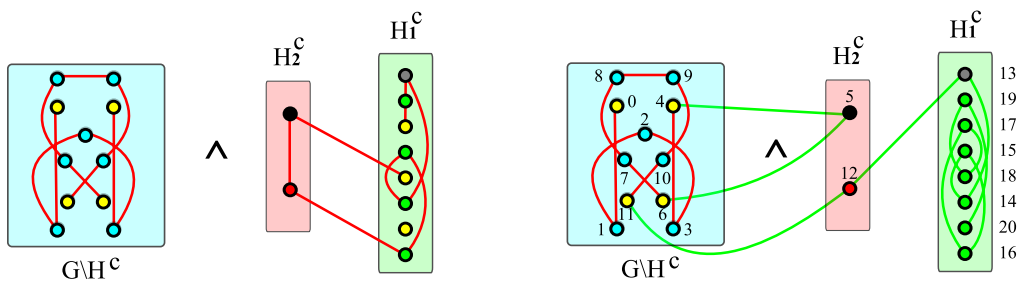


Figura 5.6: Aplicação do algoritmo para grafos  $(q, q - 4)$ .

Após esse processo, descondensamos os vértices do grafo, mantendo a mesma cor nesses vértices, como ilustrado na Figura 5.7, obtendo assim uma atribuição de cores para o grafo  $G$ .

O algoritmo testa, para cada condensação possível  $G'$  de  $G$ , todas as partições dos caminhos disjuntos de  $H'^c$  e, o mínimo entre todos os  $\lambda(G')$  obtidos é  $\lambda(G)$ .

## 5.4 Limite superior para $\lambda$ em grafos $(q, q - 4)$

Nesta seção, determinamos um limite superior para  $\lambda$  em grafos  $(q, q - 4)$ .

**Teorema 5.9** *Se  $G$  é um grafo  $(q, q - 4)$ , então  $\lambda(G) \leq 2\Delta + |V(H_2)| + pv(G^c) - \omega(G \setminus H_2)$ .*

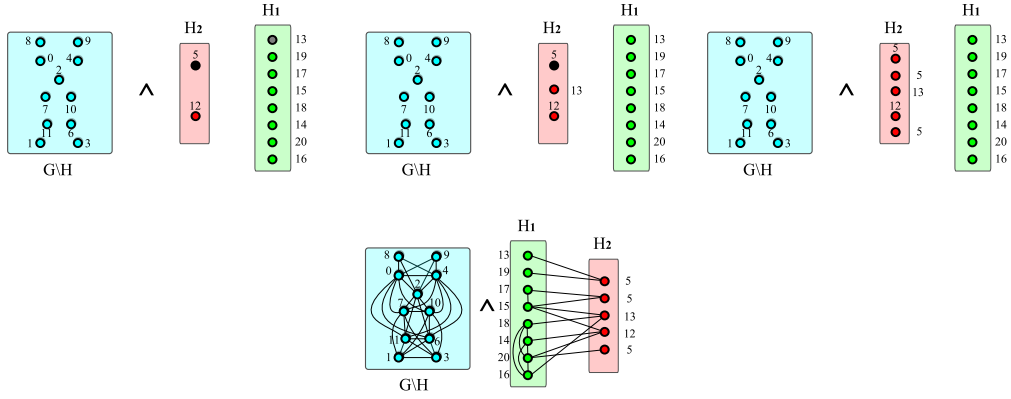


Figura 5.7: Aplicação do algoritmo para grafos  $(q, q - 4)$ .

**Prova.** Como  $G[V \setminus H_2] = G[V \setminus (H_2 \cup H_1)] \wedge G[H_1]$ , então  $\Delta(G[V \setminus H_2]) = \max\{\Delta(G[H_1]) + |V(G \setminus (H_2 \cup H_1))|, \Delta(G[V \setminus (H_2 \cup H_1)]) + |V(H_1)|\}$ .

Logo,  $2\Delta(G[V \setminus H_2]) \geq \Delta(G[H_1]) + |V(G \setminus (H_2 \cup H_1))| + \Delta(G[V \setminus (H_2 \cup H_1)]) + |V(H_1)|$ . Desta forma,  $|V(G \setminus (H_2 \cup H_1))| + |V(H_1)| \leq 2\Delta(G[V \setminus H_2]) - \Delta(G[V \setminus (H_2 \cup H_1)]) - \Delta(G[H_1])$ , i.e.,  $|V(G)| \leq 2\Delta(G[V \setminus H_2]) - \Delta(G[V \setminus (H_2 \cup H_1)]) - \Delta(G[H_1]) + |V(H_2)|$ .

Pelo Teorema 3.6,  $\lambda(G) \leq |V(G)| + pv(G^c) - 2$ . Portanto,  $\lambda(G) \leq 2\Delta(G[V \setminus H_2]) - \Delta(G[V \setminus (H_2 \cup H_1)]) - \Delta(G[H_1]) + |V(H_2)| + pv(G^c) - 2$ .

Como  $2\Delta(G[V \setminus H_2]) \leq 2\Delta(G)$  e  $\omega(G \setminus H_2) \leq \Delta(G[V \setminus (H_2 \cup H_1)]) + \Delta(G[H_1]) + 2$ , então  $\lambda(G) \leq 2\Delta + |V(H_2)| + pv(G^c) - \omega(G)$ .  $\square$

**Corolário 5.10** *Se  $G$  é um grafo  $(q, q - 4)$ , então  $\lambda(G) \leq 3\Delta + q - \omega(G \setminus H_2)$ .*

**Prova.** Por definição, temos  $|V(H)| = |V(H_1)| + |V(H_2)| \leq q$ . Este limite segue diretamente do resultado do Teorema 5.9 considerando que, para qualquer grafo  $G$  diferente do grafo completo (que tem  $\lambda \leq 2\Delta$  pelo Teorema 3.1) e ciclo ímpar (que tem  $\lambda \leq 2\Delta$  pelo Teorema 3.3),  $pv(G^c) \leq \chi(G) \leq \Delta$ .  $\square$

**Corolário 5.11** *Se  $G$  é um grafo  $(q, q - 4)$  e  $G^c$  é hamiltoniano, então  $\lambda(G) \leq 2\Delta + q - \omega(G \setminus H_2) + 1$ .*

**Prova.** Segue diretamente do resultado do Teorema 5.9.  $\square$

## 5.5 Perspectivas

Fornecemos nesse capítulo um algoritmo linear para grafos  $(q, q - 4)$ , com  $q$  fixo, que encontra uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima nessa classe. Além disso, estabelecemos novos métodos para determinar tais atribuições em grafos aranhas, de forma mais simples do que as de [81]. Mesmo o algoritmo *FPT* dado nesse capítulo sendo  $O(n)$

quando  $q$  é fixo, seria interessante tentar reduzir um pouco a sua constante  $(2q)^{5q}$ , já que essa pode crescer rapidamente dependendo de  $q$ .

Um outro trabalho em aberto para esta classe é melhorar o limite superior para o valor de  $\lambda$  ou encontrar exemplos de grafos  $(q, q - 4)$  que tornem esses limites justos. Além disso, podemos estender os estudos e o nosso algoritmo para outras classes de grafos com poucos  $P_4$ 's, como grafos  $P_4$ -laden e  $P_4$ -laden estendidos.

# Capítulo 6

## Grafos aleatórios

Este capítulo contém provas de que, com grande probabilidade, grafos aleatórios esparsos têm  $\lambda \leq c\Delta$  (onde  $c$  é uma constante). Esse estudo foi feito em conjunto com o Prof. Daniel Ratton. O raciocínio envolvido para obtermos tal prova passa pela classe dos grafos com  $b$ -núcleos limitados. Como consequência, destacamos também nesse capítulo limites superiores para  $\lambda$  nessa classe que são de grande interesse, pois provam a Conjectura de Griggs e Yeh para várias famílias de grafos. Estes resultados foram apresentados no Workshop Latino-Americano de Cliques 2012 [27], em Buenos Aires, Argentina.

### 6.1 Características

Um grafo  $G = (V, E)$  é uma *amostra* de um *grafo aleatório*  $G(n, p)$  se cada aresta de  $E$  ocorre independentemente com probabilidade  $p$ . Este modelo foi introduzido por Erdős e Rényi [33] e mais informações sobre o mesmo podem ser obtidas em [12]. Uma amostra de um grafo aleatório *esparso* tem  $np = c > 1$ , onde  $c$  é uma constante.

Criamos amostras de um  $G(6, p)$  gerando 15 números aleatórios entre 0 e 100 que correspondem a probabilidade de cada uma das 15 possíveis arestas de um grafo de 6 vértices existir. A Figura 6.1 ilustra amostras geradas por esses números aleatórios para alguns casos de valores de  $p$ .

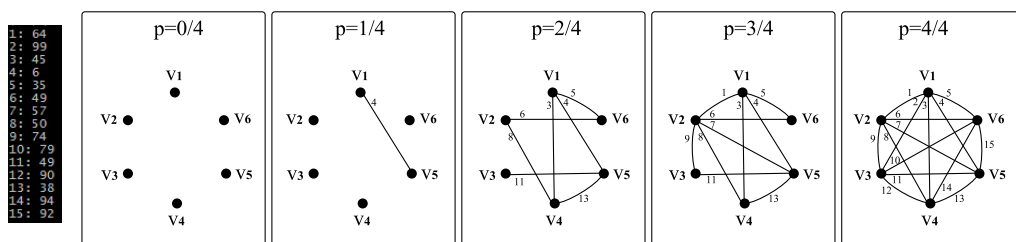


Figura 6.1: Amostras de  $G(6, p)$ .

Uma função  $t(n)$  é *threshold* de uma propriedade  $\pi$  de um grafo aleatório  $G(n, p)$

com probabilidade  $p = f(n)$  se, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{f(n)}{t(n)} \rightarrow 0$ , um grafo amostra de  $G(n, p)$  não tem a propriedade  $\pi$  com grande probabilidade (i.e., a probabilidade do grafo ter a propriedade  $\pi$  tende a zero quando  $n$  tende a infinito) e, se  $\frac{f(n)}{t(n)} \rightarrow \infty$ , com grande probabilidade, um grafo amostra de  $G(n, p)$  tem essa propriedade. Uma função  $ts(n)$  é *sharp threshold* para uma constante  $c$  se esta propriedade  $\pi$  aparece, com grande probabilidade, quando  $\frac{f(n)}{ts(n)} \rightarrow c$ .

Um  $b$ -núcleo de um grafo  $G$  é um subgrafo induzido de  $G$  onde todo vértice tem grau pelo menos  $b$ . Trivialmente, verificamos se um grafo tem um  $b$ -núcleo retirando recursivamente vértices com grau menor que  $b$ . Ao fim, se sobram vértices, este grafo tem um  $b$ -núcleo. Um grafo  $G$  é  $b$ -núcleo limitado se  $G$  tem um  $b$ -núcleo, mas não tem um  $(b + 1)$ -núcleo. Na Figura 6.2 temos um grafo que tem um 3-núcleo, mas não tem um 4-núcleo, então este é 3-núcleo limitado.

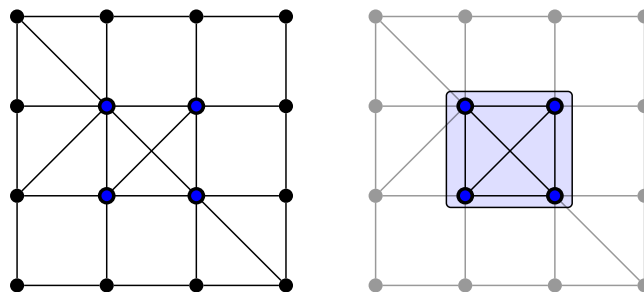


Figura 6.2: Grafo 3-núcleo limitado.

**Teorema 6.1 (Jason e Luczak [55])** *Se  $G$  é um grafo  $G(n, p)$ , então existe constante  $c_b$  onde  $t(n) = \frac{c_b}{n}$  é função sharp threshold para o aparecimento de  $b$ -núcleos, onde  $b \approx c_b$  é uma constante.*

## 6.2 Grafos $b$ -núcleo limitados

Inicialmente, utilizamos o método de McDiarmid do Teorema 3.8 e obtemos um limite superior para o valor de  $\lambda$  em grafos  $b$ -núcleo limitados.

**Teorema 6.2** *Para grafos  $b$ -núcleo limitados,  $\lambda \leq 2b\Delta - b^2 + b$ .*

**Prova.** Seja  $O = (v_1, \dots, v_n)$  uma ordenação dos vértices de  $G$  onde cada vértice  $v_i$  tem no máximo  $b$  vizinhos que o sucedam na ordenação. Esta ordenação ocorre, pois  $v_i$  e os vértices que sucedem  $v_i$  em  $O$  não fazem parte de um  $(b + 1)$ -núcleo. Seja  $O^r = (v_n, \dots, v_1)$  a ordenação reversa a  $O$ . Ao aplicar o método de McDiarmid do Teorema 3.8 na ordenação  $O^r$ , o número máximo de cores proibidas a um vértice  $v_i$  é  $2|N_1^a(v_i)| + |N_1^d(v_i)| + |N_2^a(v_i)| \leq 2b + (\Delta - b) + (\Delta - b)(b - 1) + b(\Delta - 1) = 2b\Delta - b^2 + b$ , como ilustrado na Figura 6.3.  $\square$

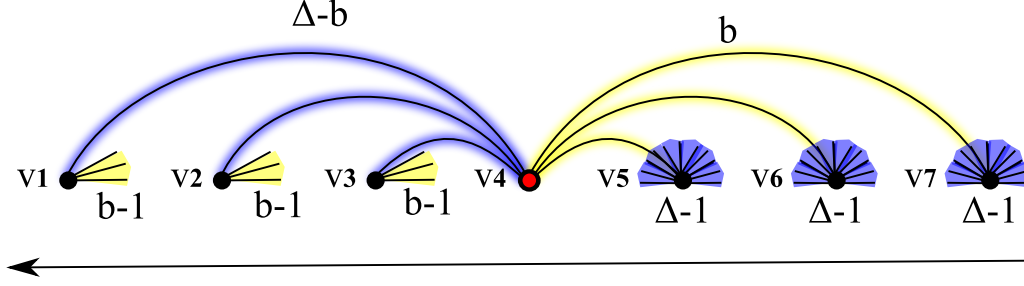


Figura 6.3: Cores proibidas para vértices em grafos  $b$ -núcleo limitados.

**Corolário 6.3** Para grafos  $b$ -núcleo limitados,  $\lambda_{h,k} \leq \Delta^2(k-1) + \Delta(2kb + h - k - 1) - b^2 + b(3 - 2k)$ .

**Prova.** Ao aplicarmos o método de McDiarmid do Teorema 3.8 na ordenação  $O^r$ , por um argumento similar ao do Teorema 6.2, obtemos  $\lambda_{h,k} \leq (h)|N_1^a(v_i)| + (h-1)|N_1^d(v_i)| + (k)|N_2^a(v_i)| + (k-1)|N_2^d(v_i)|$ . No pior caso, o valor de  $\lambda_{h,k}$  é máximo quando  $|N_1^a(v_i)| = b$ ,  $|N_1^d(v_i)| = \Delta - b$ ,  $|N_2^a(v_i)| = b(\Delta - 1) + (\Delta - b)(b - 1)$  e  $|N_2^d(v_i)| = (\Delta - b)(\Delta - b)$ . Consequentemente,  $\lambda_{h,k} \leq hb + (h-1)(\Delta - b) + kb(\Delta - 1) + k(\Delta - b)(b - 1) + (k-1)(\Delta - b) + \Delta - b = \Delta^2(k-1) + \Delta(2kb + h - k - 1) - b^2 + b(3 - 2k)$ .  $\square$

A seguir, provamos a conjectura de Griggs e Yeh para famílias de grafos com  $b$ -núcleo limitados. Diferente da prova feita por Havet et al. [49] (para grafos em geral), que é dada para valores muito grande de  $\Delta$  ( $\Delta \geq 10^{69}$ ), a prova (para grafos com  $b$ -núcleo limitados) é verificada em valores menos restritos de  $\Delta$ .

**Corolário 6.4** Para grafos  $b$ -núcleo limitados  $G$ , onde  $b = (1 - \epsilon)\Delta$  e  $0 < \epsilon \leq 1$  é uma constante, existe uma constante  $\Delta_0$  tal que se  $\Delta \geq \Delta_0$ , a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira.

**Prova.** Pelo Teorema 6.2,  $\lambda \leq 2b\Delta - b^2 + b$ . Como  $b = (1 - \epsilon)\Delta$ , então  $\lambda(G) \leq 2(1 - \epsilon)\Delta^2 - (1 - \epsilon)^2\Delta^2 + (1 - \epsilon)\Delta = \Delta^2(2 - 2\epsilon - (1 - \epsilon^2)) + (1 - \epsilon)\Delta = \Delta^2(1 - \epsilon^2) + (1 - \epsilon)\Delta$ . E,  $\lambda \leq \Delta^2$  quando  $\Delta \geq \frac{(1 - \epsilon)}{\epsilon^2}$ , em outras palavras, a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira para grafos  $b$ -núcleos limitados com  $\Delta \geq \Delta_0 = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^2}$ .  $\square$

**Corolário 6.5** Para grafos  $b$ -núcleo limitados  $G$ , onde  $b \leq \Delta - \sqrt{\Delta}$ , a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira.

**Prova.** Seja  $b = \Delta - c$ , pelo Teorema 6.2,  $\lambda \leq 2b\Delta - b^2 + b$ . Então,  $\lambda \leq 2(\Delta - c)\Delta - (\Delta - c)^2 + \Delta - c$ . Se  $c \geq \sqrt{\Delta} \geq \sqrt{\Delta - c}$ ,  $\lambda \leq \Delta^2$ . E, este caso ocorre quando  $b \leq \Delta - \sqrt{\Delta}$ .  $\square$

Seja  $G$  um grafo com  $\Delta = 100$  e  $b = 0.9\Delta$ , pelo Corolário 6.4, como  $\epsilon = 0.1$ , para a conjectura de Griggs e Yeh ser verdadeira basta que  $\Delta \geq \frac{1 - 0.1}{0.1^2} = 90$ , o



que é verdade neste caso. Por outro lado, a conjectura também é verificada pelo Corolário 6.5, já que  $b \leq 100 - \sqrt{100}$ . Ou seja, esses dois corolários fornecem novas condições suficientes para verificação da conjectura de Griggs e Yeh considerando os  $b$ -núcleos dos grafos, que podem ser vistas como duas famílias de grafos que respeitam essa conjectura.

### 6.3 Determinação de $\lambda$ em amostras de $G(n, p)$

Nesta seção analisamos uma  $L(2, 1)$ -coloração de amostras de grafos aleatórios  $G(n, p)$  dependendo do intervalo dos valores de  $p$ .

**Caso (i)**  $0 \leq p \leq \frac{1}{n-1}$ : Para este, com grande probabilidade, não existem componentes conexas gigantes, i.e., que tenham números de vértices da ordem  $O(\log n)$  [12] e, encontramos uma  $L(2, 1)$ -coloração para cada subgrafo induzido formado pelas componentes conexas, independentemente. Para essas componentes conexas, com grande probabilidade  $p \geq \frac{1}{n-1}$ .

**Caso (ii)**  $p = \frac{c}{n-1}$  onde ( $c \geq 1$  é uma constante):

**Teorema 6.6** *Se  $G$  é uma amostra de grafo  $G(n, p)$  com  $p = \frac{c}{n-1}$  onde  $c \geq 1$  é uma constante, com grande probabilidade  $\lambda = \Theta(\Delta)$ .*

**Prova.** Pelo Teorema 6.1, sabemos que existe função  $\frac{b}{n} \approx \frac{c}{n}$  que é *sharp threshold* para o aparecimento com grande probabilidade de  $b$ -núcleos (onde  $b$  é constante) em amostras de grafos  $G(n, p)$ .

E, pelo Teorema 6.2,  $\lambda \leq 2b\Delta - b^2 + b$ . Além disso,  $\Delta = \Theta(\frac{\log n}{\log \log n})$  vai para infinito junto com  $n$  [12].

Como  $b$  é constante em relação a  $\Delta$  e, pela Propriedade 3.5,  $\lambda \geq \Delta + 1$ , então  $\lambda = \Theta(\Delta)$ .  $\square$

**Caso (iii)**  $p = \frac{f(n)}{n-1}$ : quando  $f(n) \leq O(\log n)$ , com grande probabilidade o grafo é desconexo [12] e, aplicamos uma  $L(2, 1)$ -coloração em cada uma de suas componentes conexas. Caso contrário, sabemos que este tipo de amostras têm, com grande probabilidade, apenas um vértice com grau  $\Delta$  [12]. E, pela Propriedade 6.1, a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira.

**Propriedade 6.1** *Para um grafo  $G$ , com apenas um vértice com grau  $\Delta$ ,  $\lambda \leq \Delta^2$ .*

**Prova.** Basta aplicar o método de McDiarmid do Teorema 3.8 em qualquer ordenação dos vértices de uma árvore geradora do grafo em que o único vértice de grau  $\Delta$  seja o primeiro vértice a receber cor, desta forma, o número máximo de cores proibidas para qualquer vértice  $v$  diferente da raiz é  $|Pro(v)| \leq 2|N_1^a(v)| + |N_1^d(v)| + |N_2^a(v)| \leq 2(\Delta - 1) + (\Delta - 1)(\Delta - 1) = \Delta^2 - 1$ . Todo vértice  $v$ , diferente

da raiz desta árvore, utiliza uma cor menor que  $\Delta^2$ . E, ao escolher a raiz da mesma forma que a utilizada por Král e Skrekovski, como explicado na Seção 3.5, a raiz também recebe uma cor com no máximo esse valor.  $\square$

**Caso (iv)**  $p \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ : Como, com grande probabilidade, o valor esperado do grau dos vértices é  $\sqrt{n}$ , temos  $\Delta \geq \sqrt{n}$ . E, pela Propriedade 6.2,  $\lambda \leq \Delta^2$  ou  $\lambda \leq n - 1 \leq \Delta^2$ .

**Propriedade 6.2 (Griggs e Yeh [44] - 1992)** *Seja  $G$  um grafo, então  $\lambda \leq \Delta^2$  ou  $\lambda \leq n - 1$*

**Caso (v)**  $p \geq \frac{O(n)}{n-1}$ : Como, com grande probabilidade, o valor esperado do grau de qualquer vértice do grafo é  $O(n)$ , então  $\Delta = O(n)$ . E, pelo Teorema 3.6.  $\lambda \leq n + q - 2 \leq c\Delta + \Delta - 2 \leq c\Delta$ , onde  $c$  é uma constante. Com isso, temos  $\lambda = \Theta(\Delta)$ .

## 6.4 Experimentos

A origem dos estudos para esse trabalho ocorreu com a realização de experimentos em amostras de grafos  $G(n, p)$ . Obtivemos  $L(2, 1)$ -colorações utilizando o método de McDiarmid do Teorema 3.8, ordenando os vértices priorizando os de maiores graus, em valores diversos de  $n$  e  $p$ , onde 200.000 grafos eram gerados a cada amostragem. A Figura 6.4 ilustra resultados para o caso em que  $n = 100$  para alguns valores de  $p$ . Tais resultados indicam um limite superior para  $\lambda$  linear em relação a  $\Delta$ , em amostras de grafos nesta classe, independente do valor de  $p$ .

Na Figura 6.4, o eixo  $Y$  representa a distribuição dos grafos pelos seus maiores graus e o eixo  $X$  o *span* obtido em uma  $L(2, 1)$ -coloração dos grafos utilizando o método de McDiarmid. Ou seja, o elemento  $a_{i,j}$  representa para um determinado  $p$ , a quantidade de grafos com grau máximo  $i$  em que o algoritmo obteve uma  $L(2, 1)$ -coloração com *span*  $r$ , estes resultados estão sobrepostos para diversos valores de  $p$ . Note que, quando o valor de  $p$  cresce, os valores dos *spans* aumentam, até  $p$  chegar próximo de 1, nesse caso, a maioria das amostras são próximas do grafo completo, com seus *spans* próximos de  $2n - 2$ . A reta diagonal indica um limite superior de  $2\Delta$  para  $\lambda$  em grafos nessa classe. Em particular, obtivemos poucos casos de grafos que utilizaram mais de  $2\Delta$  cores.

A seguir, investigamos mais profundamente o assunto, com o estudo teórico do início deste capítulo. Isso nos levou a obter provas da linearidade deste limite superior para  $\lambda$  nos grafos nesta classe, quando  $p = \frac{c}{n-1}$ , para alguma constante  $c \geq 1$ . A heurística inicial sofreu uma pequena alteração, ao invés de priorizar os vértices de maiores graus, utilizamos a dada pela obtenção de  $b$ -núcleos em um grafo. Como o esperado, os resultados foram similares, já que para amostras de



esta classe de grafos ter uma  $L(2, 1)$ -coloração com *span* linear em relação a  $\Delta$ . Por outro lado, seria interessante fazer uma análise dos casos em que  $\frac{\log n}{n-1} \leq p \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ , de forma a provar um limite superior para  $\lambda$  que também seja linear em relação a  $\Delta$ .

Outro objetivo é estendermos esse estudo para outros modelos de grafos aleatórios, como os grafos com *preferential attachment* (Albert-László Barabási e Réka Albert [1]) e os grafos *Small-World* (Duncan Watts and Steven Strogatz [89]).

E, finalmente, continuarmos nossos estudos na classe dos grafos  $b$ -núcleo limitados, de forma a reduzir o limite superior obtido ou obter exemplos justos, além de estender as famílias destes grafos aonde a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira.

# Capítulo 7

## Superclasses de árvores

Neste capítulo estudamos as  $L(2, 1)$ -colorações em classes de grafos que têm relações diretas com as árvores. Inicialmente, melhoramos o limite superior para  $\lambda$  na classe dos grafos  $k$ -árvores. A seguir, fornecemos um limite superior para  $\lambda$  na classe dos grafos com *treewidth* limitado. Esse resultado limita as famílias de grafos que podem ser contraexemplos da conjectura de Griggs e Yeh. Ao fim, detalhamos os estudos em uma subclasse dos grafos blocos, que incentivou a definição de um novo tipo de coloração, vista no Capítulo 8.

Esses resultados foram obtidos durante a minha colaboração na orientação do aluno de iniciação científica Gabriel Barros, e foram aceitos para serem apresentados no CNMAC 2014, em Natal-RN.

### 7.1 Características

Um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é *simplicial* se  $G[N(v)]$  é um grafo completo. Um grafo é uma  $k$ -árvore se é um grafo completo de  $k$  vértices ou se é obtido a partir de um grafo  $k$ -árvore adicionando um vértice simplicial de grau  $k$ . Uma ordenação dos vértices de um grafo  $k$ -árvore possui a propriedade  $\pi$  se segue tal sequência de adições de vértices, em outras palavras,  $O = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  possui a propriedade  $\pi$  se  $G[\{v_1, v_2, \dots, v_k\}]$  é um grafo completo e, para  $k + 1 \leq i \leq n$ ,  $G[N^a(v_i)]$  é um grafo completo de  $k$  vértices. Tais ordenações nos fornecem informações importantes para a determinação de limites superiores para  $\lambda$ .

Um *esquema de eliminação perfeita* é uma sequência de remoções de vértices simpliciais de um grafo, desta forma, um grafo  $k$ -árvore tem um esquema de eliminação perfeita onde todo vértice, a menos os da clique inicial, tem grau  $k$  ao ser eliminado. Todo grafo cordal tem um esquema de eliminação perfeita cf. [83] e, portanto, todo grafo  $k$ -árvore é um grafo cordal.

A classe das 1-árvores é equivalente à das árvores. A Figura 7.1 ilustra o processo de obtenção de uma 3-árvore.

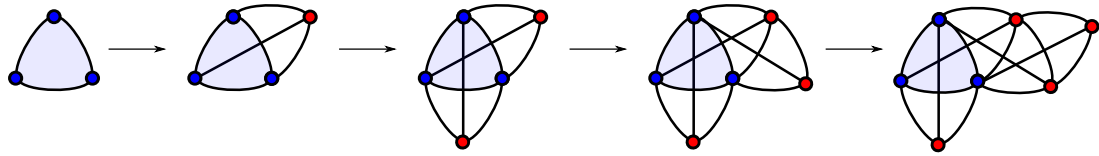


Figura 7.1: Uma 3-árvore.

O *treewidth* de um grafo  $G$ , denotado por  $tw(G)$ , é o mínimo  $k$  para o qual  $G$  é subgrafo de um grafo  $k$ -árvore. Uma *floresta* é um grafo cujas componentes conexas são árvores. A classe dos grafos com *treewidth* 1 são as florestas. O grafo da Figura 7.2 tem *treewidth* 2, pois é um subgrafo de uma 2-árvore, mas não o é de uma 1-árvore.

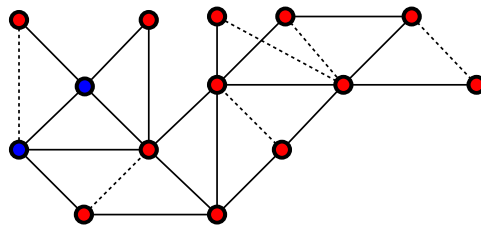


Figura 7.2: Grafo  $G$  com *treewidth* 2 (as arestas pontilhadas são da 2-árvore).

Um grafo é *bloco* se é conexo e todo subgrafo maximal 2-conexo induz uma clique. As árvores são os grafos blocos com  $\omega = 2$ . O grafo da Figura 7.3 é um grafo bloco com  $\omega = 5$ .

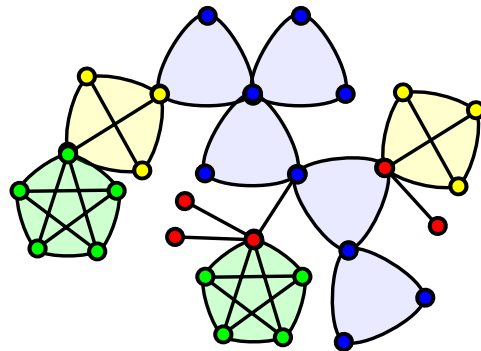


Figura 7.3: Um grafo bloco.

## 7.2 Grafos $k$ -árvores

Bodlaender et al. [11] provaram que, para grafos  $k$ -árvores,  $\lambda \leq k(\Delta - k + 3)$ . Esse limite é justo para as árvores, pois temos grafos nessa classe com  $\lambda = \Delta + 2$ . Nós reduzimos esse limite superior em um fator de ordem  $k^2$  quando  $k \geq 2$ .

Seja  $G_k$  o subgrafo induzido pelos vértices do grafo completo inicial  $K_k$  e os vértices adjacentes a pelo menos dois vértices de  $K_k$ . No caso do grafo da Figura 7.1,

$G_k$  teria todos os vértices do grafo a menos do vértice mais à direita, que só tem um vértice do grafo completo inicial na sua adjacência. A seguir, estabelecemos algumas propriedades sobre  $G_k$  que nos são úteis.

**Lema 7.1** *Para um grafo  $k$ -árvore  $G$  com  $k \geq 2$ ,  $|V(G_k)| \leq k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$ .*

**Prova.** Cada vértice  $u$  de  $G_k$  que não pertence ao grafo completo inicial  $K_k$  satisfaz  $|N(u) \cap V(K_k)| \geq 2$  e cada vértice  $v$  que pertence a  $K_k$  satisfaz  $|N(v) \setminus V(K_k)| \leq \Delta - k + 1$ . Desta forma, o número de vértices de  $G_k$  que não fazem parte de  $K_k$  é no máximo  $\frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$ .  $\square$

**Lema 7.2** *Existe uma ordenação dos vértices de um grafo  $k$ -árvore  $G$ , com a propriedade  $\pi$ , onde vértices de  $G \setminus G_k$  sucedem vértices de  $G_k$ .*

**Prova.** Sejam  $O$  uma ordenação com a propriedade  $\pi$  de  $G$ ,  $u \in V(G \setminus G_k)$  e  $v \in V(G_k \setminus K_k)$ . Suponha por contradição que  $uv \in E(G)$  e  $u$  preceda  $v$  em  $O$ . Como  $|N(v) \cap V(K_k)| \geq 2$ , o vértice  $u$  e pelo menos dois vértices de  $K_k$  fazem parte da vizinhança de  $v$  ao ser adicionado no grafo  $k$ -árvore. Como  $|N(u) \cap V(K_k)| \leq 1$ ,  $u$  só pode ser adjacente a um desses dois vértices de  $K_k$ , e a vizinhança de  $v$  não induz um grafo completo, um absurdo. Portanto, para todo  $uv \in E(G)$ ,  $v$  precede  $u$  na ordenação.

Resta o caso em que  $uv \notin E(G)$  e  $u$  precede  $v$  na ordenação. Como  $u$ , e a cadeia de vértices que dependem de  $u$  para serem vértices simpliciais de grau  $k$ , fazem parte de  $G \setminus G_k$ , nenhum deles é adjacente a vértices de  $G_k$  que não sejam adjacentes a  $u$ . Desta forma, deslocamos tanto  $u$ , quanto essa cadeia de vértices, para após os vértices de  $G_k$  que não sejam adjacentes a  $u$ , obtendo uma nova ordenação que também tem a propriedade  $\pi$  e onde vértices de  $G \setminus G_k$  sucedem vértices de  $G_k \setminus K_k$ . Além disso, os vértices de  $K_k$  são os  $k$  primeiros em ambas as ordenações.  $\square$

**Lema 7.3** *Para todo  $v \in V(G \setminus G_k)$  de um grafo  $k$ -árvore  $G$ , em qualquer ordenação  $O$  com a propriedade  $\pi$ ,  $N_2^a(v) \leq k(\Delta - k) - \frac{k}{2}(k - 1)$ .*

**Prova.** Sejam  $v_i, v_j$  e  $v_k$  três vértices tais que  $v_i$  precede  $v_j \in V(G \setminus G_k)$ , que por sua vez precede  $v_k$  na ordenação  $O$ . Se  $v_i$  tem um caminho de distância 2 para  $v_j$  que passa por  $v_k$ , então  $v_i v_j \in E(G)$ . Desta forma, nos preocupamos somente com a contagem de vértices à distância 2 de  $v_j$  que passam por vértices em  $N^a(v_j)$ .

Como tratamos um grafo  $k$ -árvore,  $N^a(v_j) \leq k$ . Sejam  $(w_1, \dots, w_k)$  esses vértices, ordenados pela sua aparição na ordenação. Sabemos que  $G[\{w_1, \dots, w_k\}]$  é um grafo completo. Além disso, temos  $w'_k \in N^a(w_k)$ , que forma um subgrafo completo  $G[\{w_1, \dots, w_{k-1}, w'_k\}]$ . Da mesma forma, existe  $w'_{k-i} \in N^a(w_{k-i})$ , onde  $w'_{k-i} \neq w'_{k-i+1}$ , que forma um subgrafo completo  $G[\{w_1, \dots, w_{k-i-1}, w'_{k-i}\}]$ , para

todo  $1 \leq i \leq k - 2$ . O fato que  $w'_{k-i} \neq w'_{k-i+1}$  vem de que o vértice  $w_{k-i}$  tem  $i + 1$  vizinhos do tipo  $w'_{k-i}$ , dessa forma, sempre existe pelo menos um  $w'_{k-i} \neq w'_{k-j+1}$ , para  $1 \leq j \leq i$ .

Com isso,  $N_2^a(v) \leq \sum_{i=1}^k [(\Delta - k) - (i - 1)] = k(\Delta - k) - \frac{k}{2}(k - 1)$ .  $\square$

A Figura 7.4 ilustra a contagem do Lema 7.3.

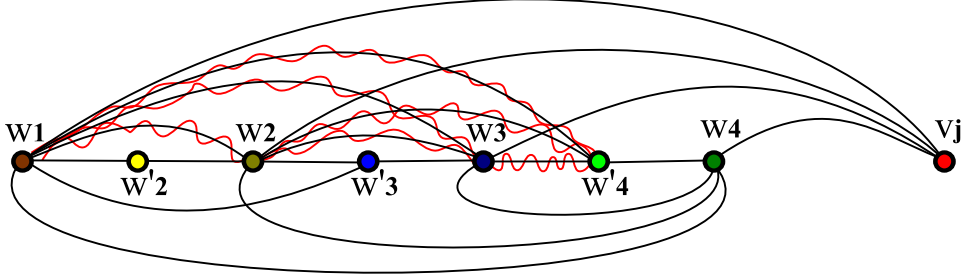


Figura 7.4: Redução da contagem máxima de  $N_2^a(v_j)$ .

**Teorema 7.4** Para um grafo  $k$ -árvore  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \max\{k(3 + \Delta - k) - \frac{k}{2}(k - 1), \frac{k(3+\Delta-k)}{2} + k - 1\}$ .

**Prova.** A primeira parte dessa função de máximo se refere a atribuição de cores aos vértices de  $G \setminus G_k$  e a segunda aos vértices de  $G_k$ . Pelo Teorema 3.6,  $\lambda(G) \leq n + pv(G^c) - 2$ . Temos que  $pv(G^c) \leq \chi(G)$ , já que em uma coloração de  $G$ , os seus vértices são particionados em  $\chi(G)$  conjuntos independentes e, em  $G^c$ , esses vértices induzem um subgrafo completo. Portanto, no pior caso, particionamos os vértices de  $G^c$  em  $\chi(G)$  caminhos disjuntos. Além disso, temos  $\chi(G) \leq k + 1$  para grafos  $k$ -árvores, já que, em uma abordagem gulosa de atribuição de cores em uma ordenação com propriedade  $\pi$ , utilizamos no máximo  $k + 1$  cores. E, pelo Lema 7.1,  $|V(G_k)| \leq k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$ . Obtemos assim uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G_k$  com  $\text{span } |V(G_k)| + pv(G_k^c) - 2 \leq k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1) + k + 1 - 2 = \frac{k(3+\Delta-k)}{2} + k - 1$ .

Considere a ordenação  $O$  obtida pelo Lema 7.2. Como já atribuímos cores a vértices de  $G_k$  e, esses vértices precedem os vértices restantes do grafo, realizamos agora uma atribuição gulosa de cores a esses vértices. Desta forma, o número máximo de cores proibidas para vértices  $v \in V(G \setminus G_k)$  é três cores para cada um dos  $k$  vértices em  $N^a(v)$  mais uma cor para cada vértice em  $N_2^a(v)$ , que verificamos no Lema 7.3 ser limitado por  $k(\Delta - k) - \frac{k}{2}(k - 1)$ . Portanto,  $v$  tem pelo menos uma cor disponível em  $\{0, \dots, k(3 + \Delta - k) - \frac{k}{2}(k - 1)\}$ .  $\square$

Observe que o valor de máximo de  $\frac{k(3+\Delta-k)}{2} + k - 1$  só ocorre quando  $\Delta \leq 2k - 3$ . No entanto, um vértice  $v \in V(G \setminus G_k)$  implica que  $\Delta \geq 2k - 1$ , pois existe um vértice  $u$  do grafo completo inicial  $K_k$  que também é adjacente a  $v$  e aos outros  $k - 1$  vértices da vizinhança de  $v$  da qual  $v$  era simplicial. Como ilustrado na Figura 7.1, o vértice



do completo inicial adjacente ao vértice mais à direita, também tem adjacência com  $k - 1$  vértices do completo original e os outros  $k$  vértices da adjacência do vértice mais à direita. Desta forma, segue o resultado do Corolário 7.5.

**Corolário 7.5** *Para um grafo  $k$ -árvore  $G$ , com  $G \setminus G_k \neq \emptyset$ ,  $\lambda(G) \leq k(3 + \Delta - k) - \frac{k}{2}(k - 1)$ .*

Král [60] provou que  $\lambda \leq O(\Delta^{1.5})$  para grafos cordais e, portanto, esse limite se estende para grafos  $k$ -árvores. Comparando os dois limites observamos que o nosso é assintoticamente melhor para os casos em que  $1 \leq k < O(\Delta^{0.5})$ . Já o limite de Král é melhor quando  $O(\Delta^{0.5}) \leq k < \Delta$ . No caso em que  $k = \Delta$  o grafo é completo e, pelo Teorema 3.1,  $\lambda = 2\Delta$ .

### 7.3 Grafos com treewidth limitado

Bodlaender et al. [11] estabeleceram que  $\lambda(G) \leq k(\Delta + 2)$  para um grafo  $G$  com  $tw(G) = k$ . Nós obtivemos um resultado alternativo  $\lambda(G) \leq \Delta(k + 1)$ , analisando o método de McDiarmid do Teorema 3.8 em grafos nessa classe.

**Teorema 7.6** *Para um grafo  $G$  com  $tw(G) = k$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta(k + 1)$ .*

**Prova.** Sejam  $H$  um grafo  $k$ -árvore da qual  $G$  é subgrafo,  $O$  a ordenação de  $H$  com a propriedade  $\pi$  e  $v$  um vértice de  $G$ . Em  $O$ , cada vértice  $x \in N_2^a(v)$  que seja adjacente a um vértice  $w \in N^d(v)$  implica que  $vx \in E(H)$ , mas  $vx \notin E(G)$ . Ou seja, cada um dos  $i \leq k$  vértices em  $N_2^a(v)$  por causa de um vértice em  $N^d(v)$  representa menos um dos  $k$  possíveis vértices em  $N^a(v)$ . Com isso,  $\max_{v \in V(G)} \{2|N^a(v)| + |N^d(v)| + |N_2^a(v)|\} \leq \max_{0 \leq i \leq k} \{2(k - i) + (\Delta - k + i) + (k - i)(\Delta - 1) + i\} \leq \Delta(k + 1)$ . E, aplicando o método de McDiarmid, obtemos uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span \Delta(k + 1)$ .  $\square$

Este resultado estabelece uma família de grafos com *treewidth* limitado em relação a  $\Delta$  na qual a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira. Por exemplo, um grafo com *treewidth* 3 só poderia ser um possível contraexemplo para conjectura de Griggs e Yeh se  $\Delta \leq 3$ . Um outro modo de ver este resultado é que a conjectura é verdadeira para qualquer grafo com *treewidth* 3 e  $\Delta \geq 4$ .

**Corolário 7.7** *Para um grafo  $G$  com  $tw(G) < \Delta$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .*

**Prova.** Como  $tw(G) = k$ , pelo Teorema 7.6 temos  $\lambda(G) \leq \Delta(k + 1)$ . Como  $tw(G) \leq \Delta - 1$ , então  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .  $\square$

Note que o *treewidth* de um grafo é bem diferente do que o conceito dos seus  $b$ -núcleos. Por exemplo, os grafos grades regulares quadradas, que têm *treewidth*

$O(\sqrt{n})$  cf. [10] e apenas um 2-núcleo. Dessa forma, pelo Teorema 7.6,  $\lambda \leq O(\sqrt{n}\Delta)$ , enquanto pelo Teorema 6.2,  $\lambda \leq 2b\Delta - b^2 + b = 14$ . Essa diferença ocorre também com os grafos  $k$ -árvores, onde o limite do Teorema 7.4 é melhor do que o obtido no Teorema 6.2 considerando os grafos  $k$ -árvores como grafos  $k$ -núcleo limitados.

Seja  $G$  um grafo com *treewidth*  $tw(G) = k$  e  $H$  um grafo  $k$ -árvore da qual  $G$  é subgrafo, onde  $\Delta(H) = \Delta(G) + c$ . Utilizando nosso resultado para grafos  $k$ -árvores e o de Král para grafos cordais temos  $\lambda(H) \leq \min\{k(3 + \Delta(H) - k) - \frac{k}{2}(k - 1), \frac{(\Delta(H)+1)^{1.5}}{\sqrt{6}} + \Delta(H) + 1\}$ . Podemos definir agora outra família de grafos com *treewidth* limitado onde a conjectura de Griggs e Yeh é assintoticamente verdadeira, ou seja, para valores suficientemente grandes de  $\Delta(G)$ .

Queremos saber quando  $\min\{k(3 + \Delta(G) + c - k) - \frac{k}{2}(k - 1), \frac{(\Delta(G)+c+1)^{1.5}}{\sqrt{6}} + \Delta(G) + c + 1\} < O(\Delta(G)^2)$ . Limitamos então a análise a termos que dominem  $O(\Delta(G)^2)$  em ambos os lados do mínimo. Isto é, na segunda parte, consideramos apenas o termo  $c^{1.5} < O(\Delta(G)^2)$ , que ocorre quando  $c < \Delta(G)^{\frac{4}{3}}$ . Agora, utilizamos a primeira parte do mínimo para restringir valores maiores de  $c$ . O único termo que pode ultrapassar  $O(\Delta(G)^2)$  é  $kc$ , e isto não ocorre quando  $c < \Delta(G)^{2-\log_{\Delta(G)} k}$ , que é melhor que o anterior quando  $1 \leq k \leq \Delta(G)^{\frac{2}{3}}$ . Portanto, se  $\Delta(H) \leq \Delta(G) + \max\{\Delta(G)^{\frac{4}{3}}, \Delta(G)^{2-\log_{\Delta(G)} k}\}$  a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira, a primeira parte ocorre quando  $\Delta(G)^{\frac{2}{3}} \leq k < \Delta(H)$  e a segunda quando  $1 \leq k < \Delta(G)^{\frac{2}{3}}$ .

Se  $G$  é contraexemplo da conjectura de Griggs e Yeh, então tem  $c \geq \Delta(G)^{\frac{4}{3}}$  e precisa de um grau máximo pequeno em relação ao grau máximo de  $H$ . Ou seja,  $\Delta(G) \leq \frac{\Delta(H)}{a}$  para qualquer constante  $a$ . Caso contrário,  $a\Delta(G) \geq \Delta(H) \geq \Delta(G) + \Delta(G)^{\frac{4}{3}}$  para valores grandes de  $\Delta(G)$ , um absurdo.

**Corolário 7.8** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta(G)$  suficientemente grande,  $tw(G) = k$  e um grafo  $k$ -árvore  $H$  da qual  $G$  é subgrafo, se  $\Delta(H) \leq \Delta(G) + \max\{\Delta(G)^{\frac{4}{3}}, \Delta(G)^{2-\log_{\Delta(G)} k}\}$ , então  $\lambda(G) \leq \Delta(G)^2$ .*

## 7.4 Grafos blocos

A  $L(2, 1)$ -coloração em grafos blocos já foi estudado por Flávia Bonomo e Márcia Cerioli [13], onde foi verificado que  $\lambda \leq \max\{\Delta + 2, \min\{3\omega - 2, \Delta + \omega\}\} \leq 2\Delta + 1$  em grafos nessa classe, a menos do  $K_2$ . Além disso, foi feito um estudo sobre a  $L(2, 1)$ -coloração em alguns casos específicos quando  $\omega = 3$ , como os grafos caminhos de triângulos.

Nessa seção, estudamos a  $L(2, 1)$ -coloração em uma subclasse dos grafos blocos. Um grafo bloco pertence a  $\beta$  se todas as suas cliques têm tamanho três e pelo menos um vértice de cada clique tem grau 2. Em outras palavras, se  $G \in \beta$ , então existe uma árvore  $T$  tal que o grafo obtido ao adicionar, para cada aresta

$uv \in E(T)$ , um vértice  $uv$  com  $N(uv) = \{u, v\}$  é  $G$ . Assim, uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $G \in \beta$  é corresponde a uma  $L(2, 1)$ -coloração total da árvore  $T$  da qual  $G$  foi obtido. Portanto, os nossos resultados de  $L(2, 1)$ -coloração total para árvores da Seção 8.5 valem para  $L(2, 1)$ -coloração dessa subclasse de grafos blocos. Dessa forma, como  $2\Delta(T) + 1 \leq \lambda_T(T) \leq 2\Delta(T) + 2$  para uma árvore  $T$ , para um grafo  $G \in \beta$ ,  $\Delta(G) + 1 \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 2$ .

Pensamos a princípio em obter uma relação direta entre uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G \in \beta$  e outra da árvore  $T$  da qual  $G$  foi gerado. Isso acabou se tornando verdade no caso em que  $\lambda(T) = \Delta(T) + 1$ , que nos diz que  $\lambda(G) = \Delta(G) + 1$ . Por outro lado, quando  $\lambda(T) = \Delta(T) + 2$ ,  $\lambda(G)$  pode ter os dois valores possíveis.

Intuitivamente, o algoritmo de Chang e Kuo, detalhado na Seção 3.7.1, parece uma boa opção para tratar uma  $L(2, 1)$ -coloração em grafos nessa classe. Considere os triângulos desse grafo  $G$  como vértices de uma árvore e enraíze  $G$  por um desses triângulos. Começando pelos triângulos folhas, testamos para cada uma das  $O(\Delta^3)$  combinações 3 a 3 de cores em  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$ , para cada triângulo interno  $T_i$ , se esta tripla faz parte das suas cores possíveis ou não, dependendo da possibilidade de atribuir cores aos seus triângulos filhos. Contudo, não podemos meramente utilizar um emparelhamento em um grafo bipartido para atribuir cores aos filhos desse triângulo, essa atribuição é bem mais complexa e um método para obtê-la é dada a seguir.

Crie uma tabela  $\Delta + 2$  por  $\Delta + 2$  com valores de  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$  em cada eixo. Os elementos  $(1, 3)$  e  $(3, 1)$  dessa tabela têm os triângulos filhos de  $T_i$  que podem receber essas cores nos vértices ainda não coloridos (note que um dos vértices de cada triângulo filho já têm cor atribuída por causa de  $T_i$ ). Queremos saber se existe uma seleção dos filhos de  $T_i$  dessa tabela de forma que nenhum deles tenha a mesma coordenada  $x$  ou  $y$  entre si.

Uma outra forma de ver esse problema é criar um grafo completo que vai ter tamanho  $\Delta - 3$  ou  $\Delta - 2$ , dependendo se a cor 0 ou  $\Delta + 1$  está sendo testada para  $T_i$ , onde cada aresta, e.g. 13, desse grafo completo vai receber os triângulos filhos de  $T_i$  que têm as cores 1 e 3 disponíveis e queremos encontrar um emparelhamento máximo desse grafo completo onde cada aresta corresponde a um dos filhos de  $T_i$ . O problema é que o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo completo é duplamente fatorial na sua cardinalidade cf. [43]. Finalmente, esse problema também é equivalente a verificarmos se em todas as atribuições de cores possíveis no complemento do grafo linha desse grafo completo  $L(K_n)^c$  (mantendo as listas de triângulos disponíveis das arestas do grafo completo como listas de cores para os vértices em  $L(K_n)^c$ ), todo subgrafo completo de tamanho igual ao número de triângulos filhos de  $T_i$  tem pelo menos uma cor repetida. Neste caso, não é possível atribuir essa tripla de cores ao triângulo  $T_i$ , caso contrário, mapeamos as cores de um subgrafo

completo de  $L(K_n)^c$  que têm todas as cores diferentes nas bases dos triângulos filhos de  $T_i$ .

Dessa forma, testamos para cada um dos  $O(n)$  triângulos  $T_i$  de  $G$  as  $O(\Delta^3)$  combinações de cores possíveis. Em cada teste, verificamos se em algum dos  $O(\Delta!!)$  emparelhamentos perfeitos do grafo completo explicado anteriormente existe uma atribuição injetiva aos triângulos filhos do triângulo  $T_i$ . Ou seja, a complexidade final do algoritmo é  $O(n\Delta^3(\Delta!!))$ . A Figura 7.5 ilustra esse algoritmo.

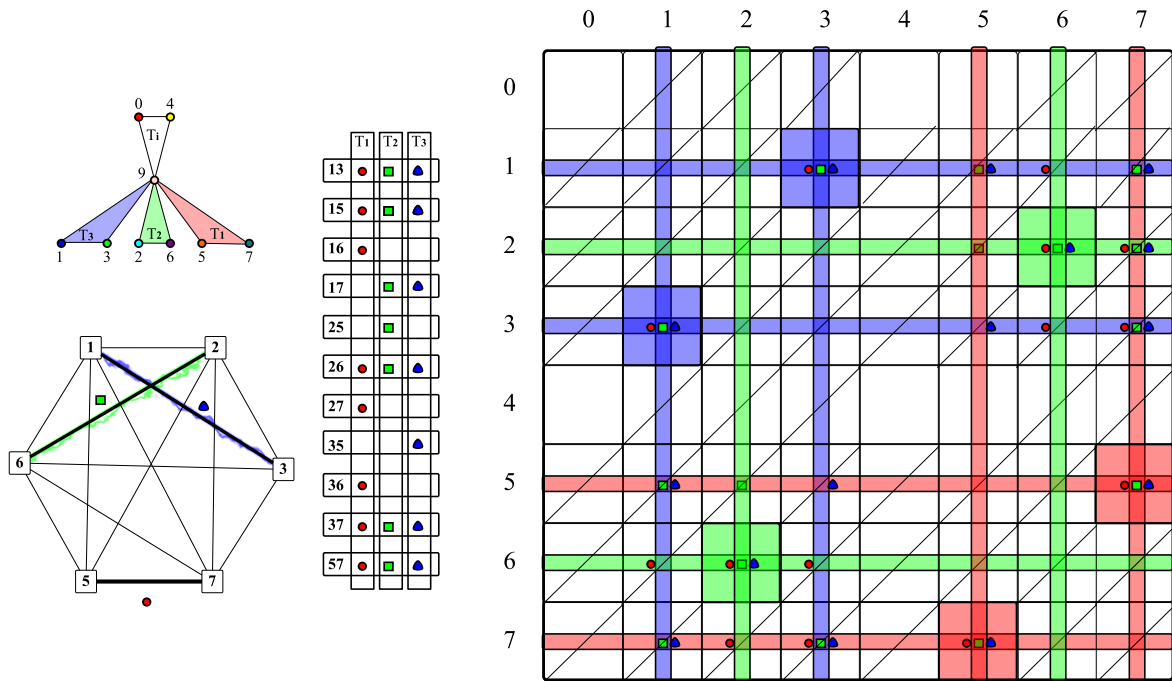


Figura 7.5: Algoritmo para  $L(2,1)$ -coloração em grafos  $G \in \beta$ .

Acreditamos em um método mais rápido do que testar todos os emparelhamentos desse grafo completo, já que obtemos diversas restrições de cores a esses triângulos dadas pelos Teoremas 8.16 e 8.17, da Seção 8.5. Contudo, no caso que  $\Delta$  é constante, mesmo testando todas os emparelhamentos do grafo completo, esse algoritmo tem complexidade linear. Note que esse algoritmo também vale para uma  $L(2,1)$ -coloração total de uma árvore com  $\Delta$  constante.

**Teorema 7.9** *Existe um algoritmo  $O(n\Delta^3(\Delta!!))$  para obter uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos blocos  $\beta$ .*

**Corolário 7.10** *Existe um algoritmo linear para obter uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos blocos  $\beta$  quando  $\Delta$  é constante.*

**Corolário 7.11** *Existe um algoritmo polinomial para obter uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos blocos  $\beta$  quando  $\Delta!!$  é  $O(n^c)$  para uma constante  $c$ .*

## 7.5 Perspectivas

Neste capítulo reduzimos o limite superior conhecido para  $\lambda$  em grafos  $k$ -árvores de um fator de  $O(k^2)$ . Para tal, realizamos um estudo em propriedades inerentes dos grafos  $k$ -árvores, decompondo estes grafos em duas partes:  $G_k$ , formada pelos vértices do grafo completo inicial  $K_k$  e dos vértices  $v$  tal que  $|N(v) \cup V(K_k)| \geq 2$  e  $G \setminus G_k$ , formada pelos vértices  $u$  tal que  $|N(u) \cup V(K_k)| \leq 1$ . Estabelecemos também várias propriedades para essas partes do grafo, que podem ser utilizadas para solução de outros problemas.

Além disso, determinamos um limite superior alternativo para  $\lambda$  em grafos com *treewidth* limitado. Como consequência, estabelecemos uma classe de grafos infinita em que a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira e restringimos possíveis contra-exemplos para essa conjectura a grafos com  $tw(G) < \Delta$ . E, utilizando o resultado obtido para grafos  $k$ -árvores, definimos uma família de grafos com *treewidth* limitado, onde  $\Delta(H) \leq \Delta(G) + \max\{\Delta(G)^{\frac{4}{3}}, \Delta(G)^{2-\log_{\Delta(G)} k}\}$ , que respeitam a conjectura de Griggs e Yeh para valores grandes de  $\Delta(G)$ .

Estamos trabalhando atualmente na obtenção de grafos que testemunhem as cotas obtidas neste trabalho para torná-las justas. Fica também em aberto a prova da conjectura de Griggs e Yeh para casos particulares de grafos com  $tw(G)$  pequenos, já que a conjectura continua em aberto mesmo quando  $tw(G) = 3$ . Para  $tw(G) = 1$ , como descrito na Seção 3.7.1,  $\lambda(G) \leq \Delta + 2$  para árvores e florestas. E, pelo Corolário 7.7, somente grafos com  $tw(G) = 2$  e  $\Delta \leq 2$  poderiam ser contraexemplos para a conjectura, mas pelos Teoremas 3.2 e 3.3, tais grafos têm  $\lambda \leq 4$ . No caso dos grafos  $k$ -árvores, como esses têm *treewidth*  $k$  e  $\Delta > k$  (a não ser os grafos completos que têm  $\lambda = 2\Delta$ ), pelo Corolário 7.7, a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira.

Quanto aos grafos blocos, mostramos um algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima na subclasse  $\beta$  dos grafos blocos com  $\Delta$  fixo. Esse resultado é de interesse para o próximo capítulo, onde vemos que esse algoritmo fornece uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima para árvores com  $\Delta$  fixo. E, como dito anteriormente, pretendemos encontrar um método mais eficiente do que verificar todos os emparelhamentos do grafo completo para encontrar o emparelhamento onde cada triângulo filho faz parte de uma aresta diferente, ou provar que esse método é necessário e procurar estabelecer uma prova de  $\mathcal{NP}$ -completude considerando esse fato.

# Capítulo 8

## $L(2, 1)$ -coloração total

Neste capítulo definimos um novo tipo de coloração de grafos, a  $L(2, 1)$ -coloração total. Iniciamos com propriedades no valor do parâmetro  $\lambda_T$  em relação a  $\Delta$  e a outras invariantes de grafos, como o índice cromático  $\chi'$ . Depois, criamos diversos métodos eficientes para obtenção de  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas nas classes dos grafos caminho, grafos ciclo, grafos estrela, grafos roda e grafos completo. Indo além, descrevemos uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos grades regulares.

Realizamos também um estudo da  $L(2, 1)$ -coloração total nas classes das árvores e dos grafos  $k$ -partidos completos. A seguir, adaptamos a Conjectura de Griggs e Yeh para esse novo tipo de coloração, e não somente a provamos para grafos diâmetro 2, como encontramos limites justos para  $\lambda_T$  em duas de suas subclasses: cografos e grafos *threshold*. Ao fim, fornecemos prova de que a versão decisão desse novo problema é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a grafos bipartidos e enunciamos classes de grafos onde as complexidades dos problemas  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL e  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO são diferentes, i.e., um tem solução polinomial e o outro é  $\mathcal{NP}$ -completo, ambos têm solução polinomial ou ambos são  $\mathcal{NP}$ -completos.

A parte inicial, com os resultados para as classes simples, as árvores, os grafos  $k$ -partidos completos e a prova da  $\mathcal{NP}$ -completude do problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL foi apresentada no CTW 2013 [28], em Enschede, Holanda. Já a segunda parte, contendo o restante da pesquisa, ou seja, os resultados para grades regulares, os grafos  $k$ -partidos completos e a nova versão da conjectura de Griggs e Yeh, junto com os estudos dos cografos e grafos *threshold*, foi apresentada no ICGT 2014 [29], em Grenoble, França.

### 8.1 Problema

Uma  $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $G$  é uma função  $f$  que associa a cada vértice e aresta de  $G$  um inteiro não negativo de forma que se **(i)**  $uv \in E(G)$ , então:  $|f(u) - f(v)| \geq 2$ ;  $|f(u) - f(uv)| \geq 2$ ; e  $|f(v) - f(uv)| \geq 2$  e se **(ii)**  $uv \in E(G)$  e

$vw \in E(G)$ , então:  $f(uv) \neq f(vw)$ ;  $f(u) \neq f(vw)$ ;  $f(uv) \neq f(w)$ ; e  $f(u) \neq f(w)$ . Em geral, uma  $k$ - $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $G$  é uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  que utiliza apenas inteiros em  $\{0, \dots, k\}$ . O *span* de uma  $L(2, 1)$ -coloração total é a sua maior cor. Uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  é *ótima* quando possui o menor *span* possível e o *span* de tal atribuição é denotado por  $\lambda_T(G)$ , ou simplesmente  $\lambda_T$  quando  $G$  for subentendido. Na Figura 8.1 estão presentes exemplos de  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas.

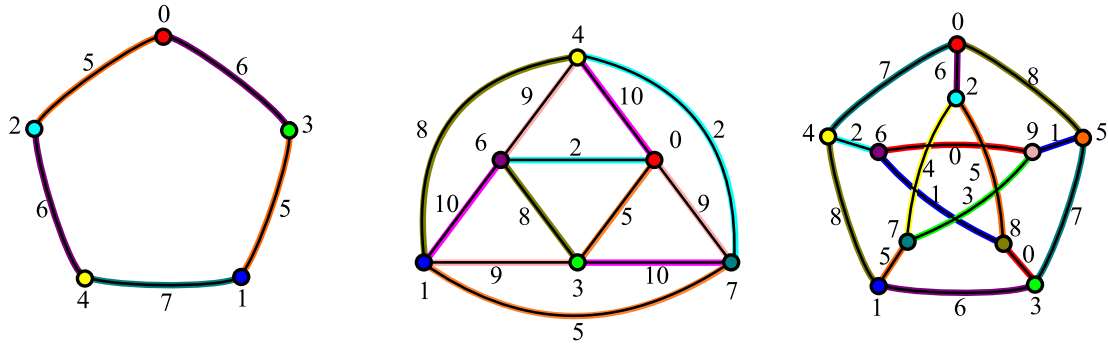


Figura 8.1:  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas.

O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL recebe como instância um grafo  $G$  um inteiro  $k$  e e como pergunta a existência de uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  com *span*  $k$ .

### $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ .

**Pergunta:** Existe uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  que utiliza no máximo a cor  $k$ ?

Um grafo é  $TR(G)$  de um grafo  $G$  se  $V(TR(G)) = V(G) \cup E(G)$  e  $E(TR(G)) = E(G) \cup \{u uv, uv v \mid uv \in E(G)\}$ . Assim,  $TR(G)$  tem as mesmas arestas de  $G$  mais duas arestas  $u uv$  e  $uv v$  para cada aresta  $uv \in E(G)$ . Em outras palavras, são os grafos obtidos trocando as arestas  $uv \in E(G)$  por um  $K_3$ :  $u, v$  e  $uv$ , como ilustrado na Figura 8.2.

**Teorema 8.1** *Uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima  $f$  de  $G$  e uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $g$  de  $TR(G)$  são diretamente relacionadas.*

**Prova.** Se  $f$  é dada, definimos  $g$ :  $g(v) = f(v), \forall v \in V(G)$  e;  $g(e) = f(e), \forall e \in E(G)$ . Uma atribuição apenas dos vértices de uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  respeita uma  $L(2, 1)$ -coloração parcial de  $TR(G)$ . Além disso, como  $f(v)$  para  $v \in V(G)$  difere de pelo menos duas unidades das cores  $f(e)$  das arestas em  $e \in N_E(v)$ , essas diferenças se mantêm em  $g$ . As restrições  $g(e_1) \neq g(e_2)$  se  $dist_{TR(G)}(e_1, e_2) = 2$  e  $g(u) \neq g(e)$  se

$dist_{TR(G)}(u, e) = 2$  seguem diretamente de  $f(e_1) \neq f(e_2)$ , pois ambos compartilham um extremo de  $G$  e  $f(u) \neq f(e)$ , pois existe aresta  $uv$  que compartilha extremo com aresta  $e = vw$  em  $G$ , sendo  $f(u) \neq f(vw)$ .

Se  $g$  é dada, definimos  $f: f(v) = g(v), \forall v \in V(G)$  e;  $f(e) = g(e), \forall e \in E(G)$ . A atribuição  $g$  restrita aos vértices de  $G$  respeita as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração total parcial de  $G$ . Além disso, como  $f(e) = g(e), \forall e \in E(G)$ ,  $|f(e) - f(v)| \geq 2$  se  $e \in N_E(v)$  em  $G$ , pois  $ev \in E(TR(G))$ . E,  $f(e_1) \neq f(e_2)$  quando  $e_1$  e  $e_2$  incidem em um mesmo vértice, já que  $dist_{TR(G)}(e_1, e_2) = 2$ . Só falta o caso em que  $f(u) \neq f(e)$  quando existe vizinho de  $u$  que é extremo de  $e$  em  $G$ . Nesse caso,  $dist_{TR(G)}(u, e) = 2$  e  $g(u) \neq g(e)$ .  $\square$

Como visto na Figura 8.2, as restrições de uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $TR(G)$  são as mesmas que as em uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$ , ou seja, é possível atribuir as cores dos vértices de  $TR(G)$  para os vértices e arestas de  $G$ , e vice-versa. Dessa forma,  $\lambda_T(G) = \lambda(TR(G))$ .

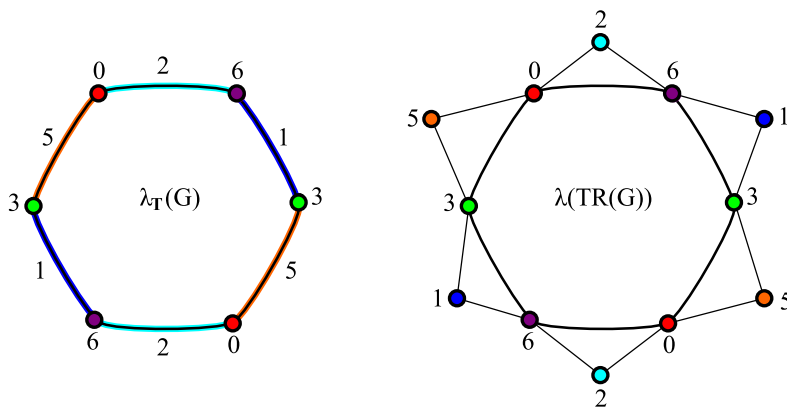


Figura 8.2: Relação direta entre  $\lambda_T(G)$  e  $\lambda(TR(G))$ .

Havet e Min-Li Yu [50] estudaram a  $(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $G$ , que é diretamente relacionada a uma  $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $H$ , incidente de  $G$ . Por outro lado, Ziming Duan, Pingli Lv, Lianying Miao, Zhengke Miao e Cuiqi Wang [32] investigaram a  $L(2, 1)$ -coloração de  $T(G)$ , o grafo total de  $G$ , que pode ser vista como uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $H^2$ . Como foi dito anteriormente, uma  $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $G$  é diretamente relacionada a uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $TR(G)$ . Claramente, temos que  $H$  é subgrafo de  $TR(G)$  e que  $TR(G)$  é subgrafo de  $H^2$ , portanto, podemos dizer que uma  $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $G$  tem  $\lambda(G) \leq \lambda(TR(G)) = \lambda_T(G) \leq \lambda(H^2)$ , como ilustrado na Figura 8.3

## Histórico e motivação

A ideia para esse novo tipo de coloração surgiu da verificação de uma inveracidade em uma suposição para  $L(2, 1)$ -coloração na subclasse  $\mathcal{B}$  dos grafos blocos (descrita



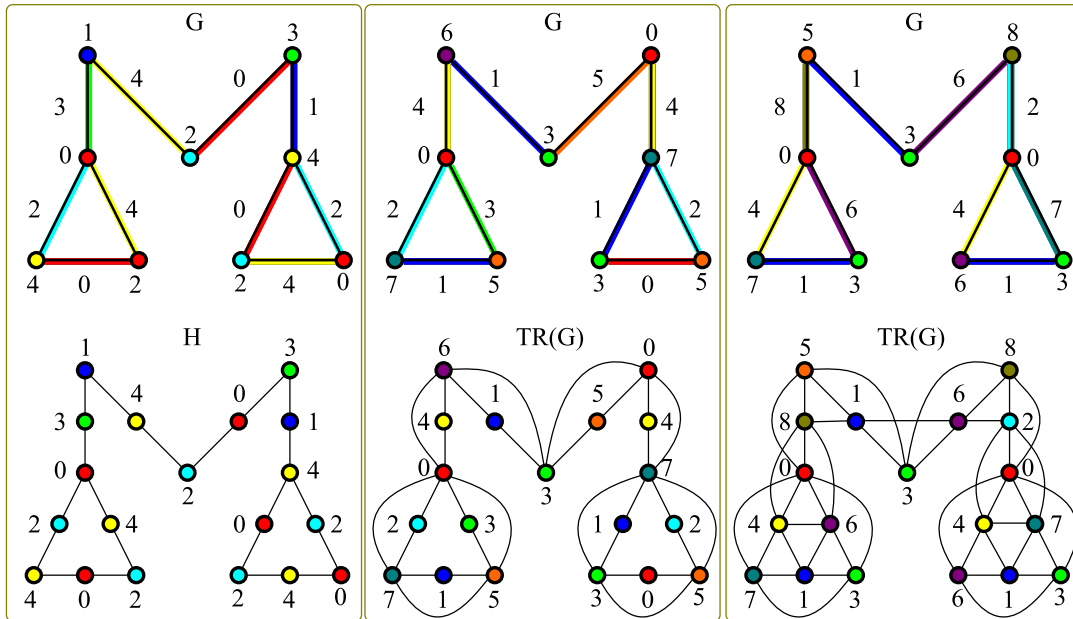


Figura 8.3: Uma  $(2, 1)$ -coloração de  $G$  como uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $H$ , uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  como uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $TR(G)$  e uma atribuição de  $G$  como uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $T(G)$ .

no Capítulo 7). Inicialmente, acreditávamos que uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima para um grafo  $G \in \mathcal{B}$  era diretamente relacionada a de uma árvore  $T$ , da qual  $G$  foi gerado, sendo  $\lambda(G) = \lambda(T) + \Delta$ . Entretanto, verificamos posteriormente a existência de casos em que  $\lambda(T) = \Delta + 2$  e  $\lambda(G) = 2\Delta + 1$ .

Investigamos mais profundamente e constatamos que uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima na classe de grafos  $\mathcal{B}$  é muito mais complexa do que imaginávamos. E, por conveniência, para facilitar a visualização das colorações, utilizamos as arestas para representar os vértices de grau dois dos grafos blocos  $\mathcal{B}$ .

Não demorou muito para pensarmos como esta atribuição se comportaria em outras classes de grafos, por exemplo, grafos caminhos, grafos rodas e grafos completos. Da mesma forma que Tait cf. [59] definiu as colorações de arestas em uma prova errada da 4-COLORAÇÃO de um grafo planar surgiu a  $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo, a partir de um erro na obtenção de uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em uma restrição das classes dos grafos blocos, que acabou sendo equivalente a uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima na classe das árvores.

Similarmente a uma  $L(2, 1)$ -coloração de um grafo [44], uma motivação para o estudo dessa nova coloração é a necessidade de cenários mais realistas para o problema de atribuição de frequências em redes de transmissores sem fio. Imagine o caso em que precisamos de frequências não somente para países, mas também para as suas fronteiras. Pela Propriedade 8.3, quando  $\lambda \geq 4\Delta + 2$ , não utilizar o nosso novo tipo de atribuição apenas desperdiça frequências disponíveis.

Relacione em um grafo  $G$  cada país a um vértice e uma aresta entre países se

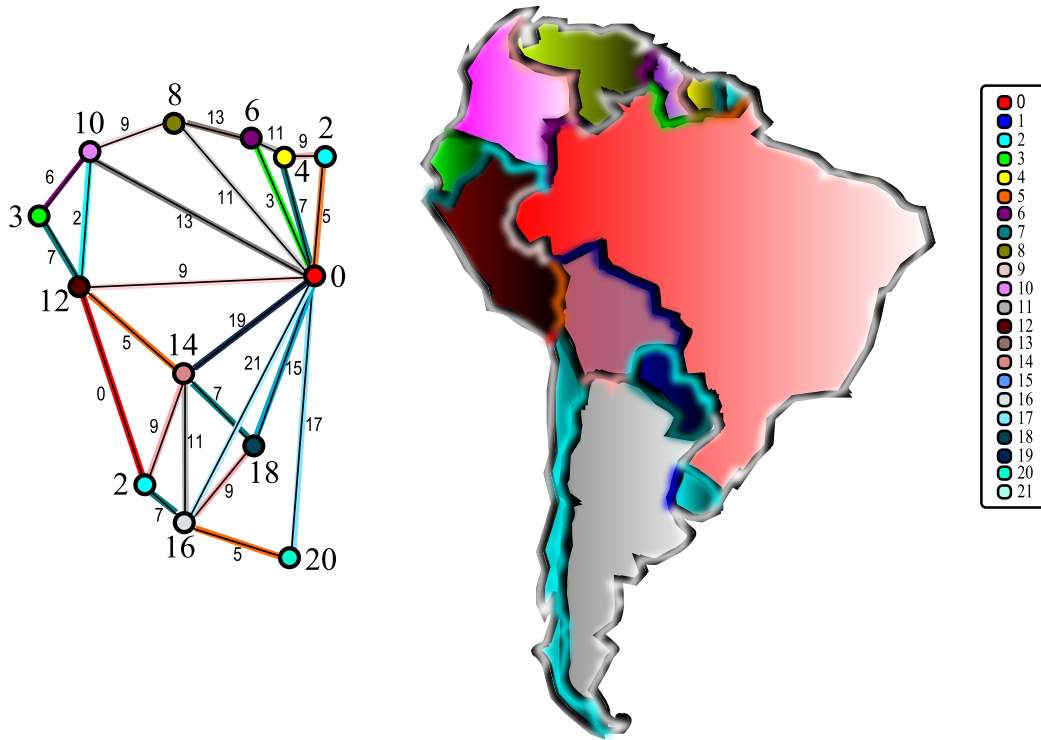


Figura 8.4: Uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima do grafo do mapa da América do Sul.

estes têm uma fronteira em comum. Uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  nos fornece uma atribuição a esses países e fronteiras onde: **(i)** países vizinhos e; **(ii)** um país e suas fronteiras recebem frequências que diferem bastante. Além disso, temos: **(iii)** países que tenham um país em comum em sua vizinhança; **(iv)** fronteiras de um mesmo país e; **(v)** as fronteiras de um país e um país vizinho, com frequências diferentes. A Figura 8.4 ilustra uma  $L(2, 1)$ -coloração total do grafo do mapa da América do Sul.

Outra questão é o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL ter uma relação intrigante com o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO. Como descrevemos no final desse capítulo, existem classes de grafos onde ambos os problemas têm solução polinomial, uma onde ambos são  $\mathcal{NP}$ -completos, e outras onde um tem solução polinomial e o outro é  $\mathcal{NP}$ -completo e vice-versa. Isso por si só já torna interessante o estudo dessa nova coloração.

## 8.2 Propriedades de uma $L(2, 1)$ -coloração total

A seguir são descritas propriedades para  $\lambda_T$  que são utilizadas em várias provas.

**Propriedade 8.1** *Se um grafo  $G$  tem várias componentes conexas  $G_1, \dots, G_p$ ,  $\lambda_T(G) = \max\{\lambda_T(G_1), \dots, \lambda_T(G_p)\}$ .*

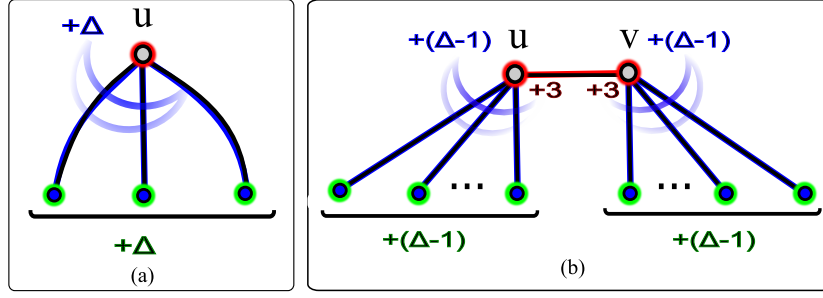


Figura 8.5: Número de cores proibidas relativo a um vértice e a uma aresta em uma  $L(2, 1)$ -coloração total.

**Prova.** Em uma  $L(2, 1)$ -coloração total os vértices e arestas de uma componente conexa não influem na atribuição de cores dos vértices e arestas em outra componente conexa, portanto, tomamos  $\lambda_T$  como o máximo entre os das componentes conexas do grafo.  $\square$

**Propriedade 8.2** Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 1$ ,  $\lambda_T(G) \geq 2\Delta + 1$  e, se  $G$  tem uma  $D2T$ , então  $\lambda_T(G) \geq 2\Delta + 2$ .

**Prova.** Seja  $u$  um vértice com grau  $\Delta$  em  $G$ . Os vértices e arestas em  $N(u) \cup N_E(u)$  precisam de cores diferentes em uma  $L(2, 1)$ -coloração total  $f$  de  $G$ . Essas cores não são:  $f(u) - 1$ ,  $f(u)$  e  $f(u) + 1$ . Se todos os vértices de grau  $\Delta$  recebem cores em  $\{0, \lambda_T\}$ , são necessárias  $2 + |N(u)| + |N_E(u)| = 2\Delta + 2$  cores diferentes, que estão disponíveis em  $\{0, \dots, 2\Delta + 1\}$ . Caso contrário, um vértice com grau  $\Delta$  que recebe cor diferente de 0 e  $\lambda_T$ , precisa de  $2\Delta + 3$  cores, só disponíveis em  $\{0, \dots, 2\Delta + 2\}$ . Esse último caso ocorre quando temos uma  $D2T$ .  $\square$

**Propriedade 8.3** Para um grafo  $G$ , se  $\lambda(G) \geq 4\Delta + 2$ , então  $\lambda(G) = \lambda_T(G)$ .

**Prova.** Seja  $f$  uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $G$ . Defina  $g$  como  $g(v) = f(v)$ ,  $\forall v \in V(G)$ . A seguir, atribua gulosamente cores em  $g$  as arestas de  $G$ . Para qualquer aresta  $e \in E(G)$  o número máximo de cores proibidas são  $4\Delta - 4 + 6 = 4\Delta + 2$ . Portanto, temos uma cor em  $\{0, \dots, \lambda\}$  disponível para qualquer aresta  $e$ .  $\square$

A Figura 8.5 (a) ilustra a contagem de cores proibidas de um vértice da Propriedade 8.2. E, a Figura 8.5 (b) ilustra a contagem de cores proibidas de uma aresta da Propriedade 8.3.

**Propriedade 8.4** Para um grafo  $G$ ,  $\lambda_T(G) \leq \lambda(G) + 1 + \chi'(G)$ .

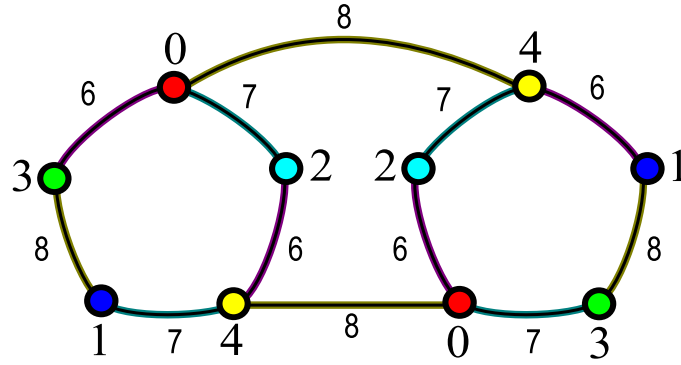


Figura 8.6: Uma  $L(2,1)$ -coloração total obtida pela Propriedade 8.4.

**Prova.** Seja  $f$  uma  $L(2,1)$ -coloração ótima de  $G$ . Defina  $g$  com  $g(v) = f(v)$  para  $v \in V(G)$ . A seguir, mapeie nas cores  $\{\lambda(G) + 2, \dots, \lambda(G) + 1 + \chi'(G)\}$  de  $g$  as classes de cores das arestas seguindo uma coloração de arestas ótima de  $G$ .  $\square$

A Figura 8.6 ilustra a atribuição da Propriedade 8.4. Primeiro atribuímos as cores em  $\{0, \dots, 4\}$  aos vértices do grafo, como em uma  $L(2,1)$ -coloração ótima e, a seguir, atribuímos as cores em  $\{6, 7, 8\}$  as suas arestas, segundo uma coloração de arestas ótima desse grafo com  $\chi' = 3$ .

**Propriedade 8.5** Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \lambda_T(G)$ .

**Prova.** As cores dos vértices de uma  $L(2,1)$ -coloração total ótima de  $G$  nos fornecem uma  $L(2,1)$ -coloração de  $G$ .  $\square$

**Propriedade 8.6** Para um grafo  $G$  e um de seus subgrafos  $H$ ,  $\lambda_T(H) \leq \lambda_T(G)$ .

**Prova.** Uma  $L(2,1)$ -coloração total ótima de  $G$  nos fornece uma  $L(2,1)$ -coloração total de  $H$ , desconsiderando as cores dos vértices e das arestas de  $G$  que não estão em  $H$ .  $\square$

**Propriedade 8.7** Existem pelo menos duas  $L(2,1)$ -colorações totais ótimas de um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 1$ .

**Prova.** Uma  $L(2,1)$ -coloração ótima de um grafo  $G$  pode ser relacionada diretamente a uma  $L(2,1)$ -coloração ótima do grafo  $TR(G)$  e, pela Propriedade 3.8,  $TR(G)$  tem pelo menos duas  $L(2,1)$ -colorações ótimas.  $\square$

### 8.3 Classes simples

Nesta seção apresentamos métodos para a obtenção de uma  $L(2,1)$ -coloração total ótima em várias classes simples de grafos.

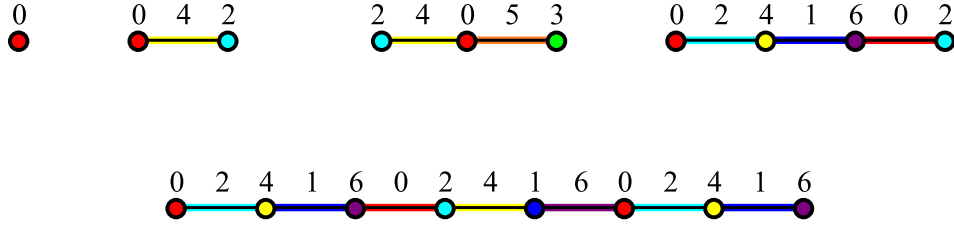


Figura 8.7:  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas em grafos caminhos.

## Grafo Caminho

Bonomo e Cerioli [13] estudaram uma  $L(2, 1)$ -coloração na classe dos grafos blocos e determinaram que para grafos que são caminhos de triângulos,  $\lambda \leq 6$ . Como um caminho de triângulos é o grafo  $TR(P_n)$  dos grafos caminhos  $P_n$ ,  $\lambda_T(P_n) \leq 6$ . Por outro lado, pela Propriedade 8.2, todo  $P_n$  com  $n \geq 5$  tem uma  $D2T$  e  $\lambda_T(P_n) \geq 2\Delta + 2 = 6$ . E, obtemos uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos  $P_n$  com  $n \geq 5$  atribuindo repetidamente as cores 0, 2, 4, 1 e 6 aos vértices e arestas de  $P_n$ . Para os casos restantes,  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas estão dispostas na Figura 8.7.

**Teorema 8.2** Para grafos caminhos  $P_n$  com  $n \geq 4$ ,  $\lambda_T(P_n) = 6$ .

**Teorema 8.3** Existe algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos caminho.

## Grafo Ciclo

**Teorema 8.4** Para grafos ciclos  $C_n$  com  $n \neq 5$ ,  $\lambda_T(C_n) = 6$ .

**Prova.** Como todo grafo ciclo tem uma  $D2T$ , pela Propriedade 8.2,  $\lambda_T(C_n) \geq 2\Delta + 2 = 6$ . Seja  $C_n$  descrito como  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n, e_n)$ . Definimos uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $C_n$  dependendo do valor do resto da divisão de  $n$  por 3.

Se  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , quando  $n \geq 6$ , atribuímos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad (0, 5, 3, 1, 6, 2, 0, 5, 3, 1, 6, 2); \\ (ii) \quad \text{e atribuímos } (0, 5, 3, 1, 6, 2) \text{ repetidamente para os outros vértices e arestas.} \end{array} \right.$$

Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , quando  $n \geq 7$ , atribuímos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad (6, 4, 0, 2, 5, 3, 1, 4, 6, 2, 0, 5, 3, 1); \\ (ii) \quad \text{e atribuímos } (6, 2, 0, 5, 3, 1) \text{ repetidamente para os outros vértices e arestas.} \end{array} \right.$$

Caso contrário, se  $n \equiv 2 \pmod 3$ , quando  $n \geq 14$ , atribuímos:

- $$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad (6, 4, 0, 2, 5, 3, 1, 4, 6, 2, 0, 5, 3, 1, 6, 4, 0, 2, 5, 3, 1, 4, 6, 2, 0, 5, 3, 1); \\ (ii) \quad \text{e atribuímos } (6, 2, 0, 5, 3, 1) \text{ repetidamente para os outros vértices e arestas.} \end{array} \right.$$

Nos casos restantes,  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas com  $\lambda_T = 6$  para os ciclos  $C_3, C_4, C_6, C_8$  e  $C_{11}$  são dadas na Figura 8.8 (a), (b) e (c). Com observação, diferente dos outros grafos ciclos, um grafo ciclo de tamanho 5 tem  $\lambda_T(C_5) = 7$ .  $\square$

**Teorema 8.5** *Existe algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos ciclo.*

A Figura 8.8 (a) apresenta o método de atribuição para  $C_n$  do Teorema 8.4 no caso que  $n \equiv 2 \pmod 3$ , em (b) está descrito o método para o caso  $n \equiv 0 \pmod 3$  e, em (c), o caso  $n \equiv 1 \pmod 3$ .

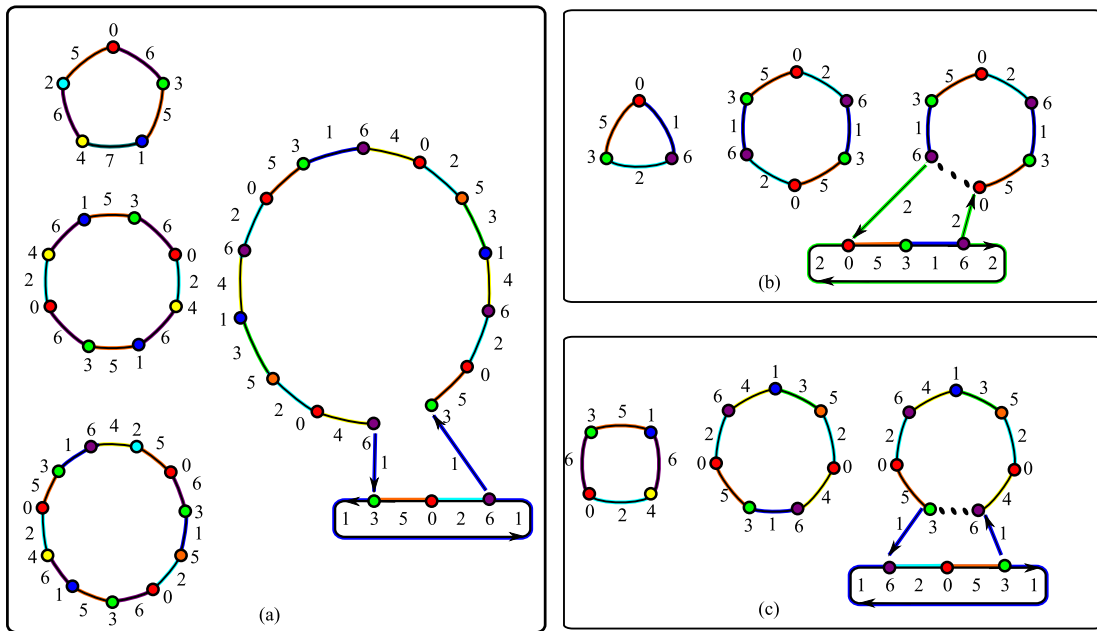


Figura 8.8:  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas em grafos ciclos.

## Grafo Estrela

**Teorema 8.6** *Para grafos estrelas  $S_n$  com  $n \geq 3$ ,  $\lambda_T(S_n) = 2\Delta + 1$ .*

**Prova.** Pela Propriedade 8.2,  $\lambda_T(S_n) \geq 2\Delta + 1$ . Para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima de um grafo estrela  $S_n$  atribuímos a cor 0 ao vértice universal  $u$ , as cores  $\{2, \dots, \Delta + 1\}$  aos vértices de  $N(u)$  e as cores em  $\{\Delta + 2, \dots, 2\Delta + 1\}$  para as arestas em  $N_E(u)$ . Só é necessário evitar que a cor  $\Delta + 2$  esteja na aresta incidente ao vértice que recebeu a cor  $\Delta + 1$ .  $\square$

A Figura 8.9 apresenta o método de atribuição de cores do Teorema 8.6 para grafos estrelas.

**Teorema 8.7** *Existe algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos estrela.*

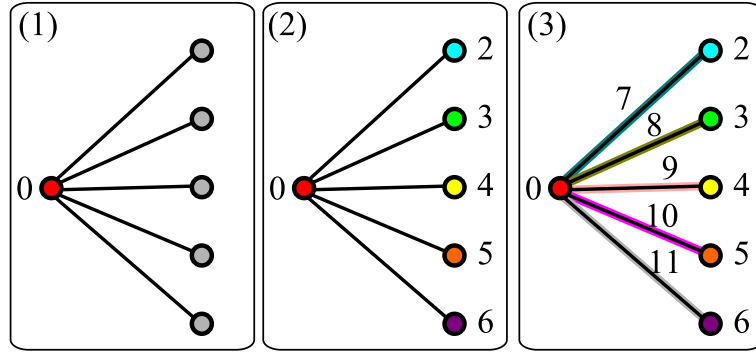


Figura 8.9: Método para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos estrelas.

## Grafo Roda

**Teorema 8.8** *Para grafos rodas  $W_n$  com  $n \geq 7$ ,  $\lambda_T(W_n) = 2\Delta + 1$ .*

**Prova.** Pela Propriedade 8.2 um grafo roda tem  $\lambda_T(W_n) \geq 2\Delta + 1$ . Para os grafos rodas  $W_n$  com  $n \geq 7$ , obtemos uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima atribuindo inicialmente as cores  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$  aos vértices de  $G$  da mesma forma que para uma  $L(2, 1)$ -coloração, como descrito na Seção 3.1. A seguir, atribuímos as cores  $\{\Delta + 2, \dots, 2\Delta + 1\}$  as arestas em  $N_E(v)$  (onde  $v$  é o vértice universal desse grafo roda). Só evite atribuir a cor  $\Delta + 2$  a aresta incidente ao vértice que recebeu a cor  $\Delta + 1$ . Finalmente, o número máximo de cores proibidas para as arestas do ciclo externo desse grafo roda é 13 e, atribuímos gulosamente cores em  $\{0, \dots, 2\Delta + 1\}$  a essas arestas quando  $\Delta \geq 6$ .  $\square$

A Figura 8.10 fornece  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas dos grafos  $W_5$  e  $W_6$  com  $span$   $2\Delta + 1$  e descreve as cores proibidas as arestas do ciclo externo desses grafos rodas. O grafo  $W_4$  é o único grafo roda com  $\lambda_T = 2\Delta + 2$ , entretanto, este é visto como um grafo completo e é tratado a seguir.

**Teorema 8.9** *Existe algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos rodas.*

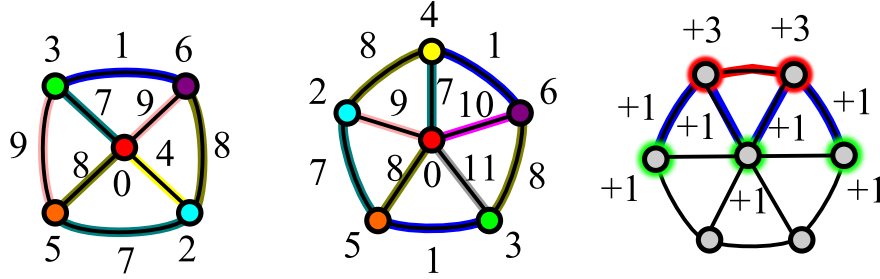


Figura 8.10:  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas de  $W_5$ ,  $W_6$  e cores proibidas das arestas restantes.

## Grafo Completo

**Teorema 8.10** *Para grafos completos  $K_n$ :  $\lambda(K_1) = 0$ ;  $\lambda_T(K_n) = 2n + 1$  se  $n$  é ímpar (a não ser  $K_3$  e  $K_5$ ) e;  $\lambda_T(K_n) = 2n$  caso contrário.*

**Prova.** Uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima do grafo  $K_1$  e outra do grafo  $K_2$  são dadas na Figura 8.7. Pela Propriedade 8.2, quando  $n \geq 3$ ,  $\lambda_T(K_n) \geq 2\Delta + 2 = 2n$ . Esse limite inferior é justo nos grafos  $K_3$ ,  $K_5$  e  $K_n$  quando  $n$  é par, caso contrário, mostramos que  $\lambda_T(K_n) = 2n + 1$ . Como observação, diferente dos outros grafos completos com número ímpar de vértices, os grafos  $K_3$  e  $K_5$  têm  $\lambda_T = 2n$ , essas atribuições estão presentes na Figura 8.11.

Suponha por contradição que  $\lambda_T(K_n) = 2n$  quando  $n \geq 7$  é ímpar. Temos  $2n + 1$  cores em  $\{0, \dots, 2n\}$ . Os vértices do  $K_n$  recebem cores que diferem de pelo menos duas unidades entre si. Portanto, em qualquer atribuição de cores a vértices do  $K_n$ , no máximo quatro cores não utilizadas por vértices de  $K_n$  não têm uma de suas cores consecutivas em vértices do  $K_n$ . Essas quatro cores podem ser utilizadas em, no máximo,  $\frac{n-1}{2}$  arestas cada e, as outras  $n-3$  cores, em  $\frac{n-3}{2}$  arestas. Como tratamos de um grafo completo, precisamos que  $4\frac{n-1}{2} + \frac{(n-3)(n-3)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$ . Entretanto, isso só ocorre quando  $n \leq 5$ , uma contradição. Em outras palavras,  $\lambda_T(K_n) \geq 2n + 1$  quando  $n \geq 7$  é ímpar.

Fornecemos agora um método semelhante ao da construção geométrica na coloração de arestas de um grafo completo, disponível em [8], para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima de grafos completos com número ímpar de vértices:

(i) Atribuímos as cores pares em  $\{0, \dots, 2n - 4\}$  aos vértices do grafo completo em um sentido horário e a cor  $2n$  ao último vértice.

(ii) Para cada  $i$  ímpar em  $\{1, \dots, 2n - 5\}$ , usamos  $i$  nas  $\frac{n-3}{2}$  arestas paralelas a arestas cujos extremos recebem cores  $i - 1$  e  $i + 1$ .

(iii) Atribuímos a cor  $2n + 1$  para as  $\frac{n-1}{2}$  arestas do ciclo externo de forma que não seja incidente ao vértice que recebeu a cor  $2n$ .

(iv) Similarmente, atribuímos a cor  $2n - 3$  para as outras  $\frac{n-1}{2}$  arestas do ciclo externo, sem ser incidente ao vértice que recebeu a cor  $2n - 4$ .



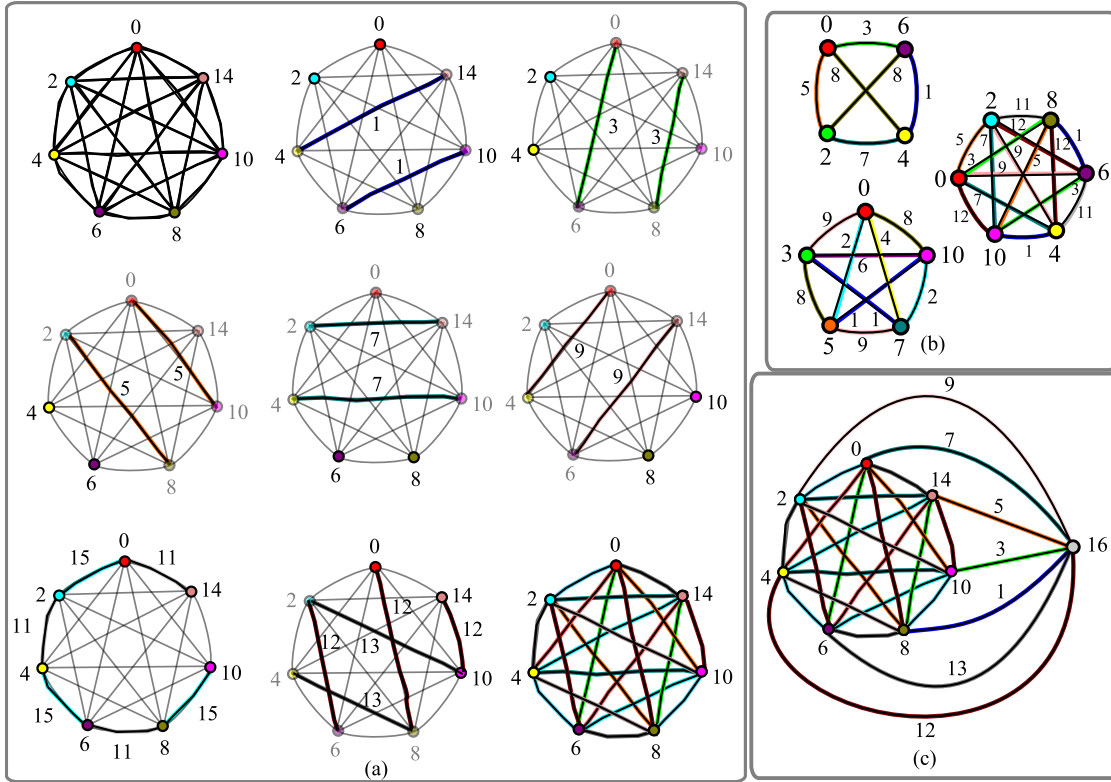


Figura 8.11:  $L(2,1)$ -colorações totais ótimas de  $K_4$  e  $K_5$  e método de atribuição para os grafos  $K_7$  e  $K_8$ .

(v) Então, atribuímos a cor  $2n - 2$  a última aresta do ciclo externo e as arestas paralelas à aresta cujo extremos receberam cores  $2n - 4$  e  $2n$ .

(vi) Finalmente, atribuímos a cor  $2n - 1$  as arestas restantes do grafo completo (que são as paralelas aos vértices que receberam as cores 0 e  $2n$ ).

Assim,  $\lambda_T(K_n) \leq 2n + 1$  para valores ímpares com  $n \geq 7$ . Indo além, a cor  $2n + 1$  só é utilizada por arestas do grafo completo e, cada vértice do  $K_n$  tem pelo menos uma cor disponível que são diferentes entre si e de  $2n + 1$ . Como consequência, estendemos essa atribuição para  $K_{n+1}$  quando  $n \geq 7$  é ímpar. Basta atribuímos a cor  $2n + 2$  ao novo vértice universal e as cores disponíveis a cada vértice do  $K_n$  para as suas novas arestas incidentes. Portanto,  $\lambda_T(K_n) = 2n$  para  $n \geq 8$  par.  $\square$

**Teorema 8.11** *Existe algoritmo linear para obter uma  $L(2,1)$ -coloração total ótima em grafos completos.*

A Figura 8.11 (a) descreve o método de atribuição para o  $K_7$ , a letra (b) apresenta  $L(2,1)$ -colorações totais ótimas do  $K_4$ ,  $K_5$  e  $K_6$  e, a letra (c) mostra como estender a  $L(2,1)$ -coloração total ótima do  $K_7$  para uma do  $K_8$ .

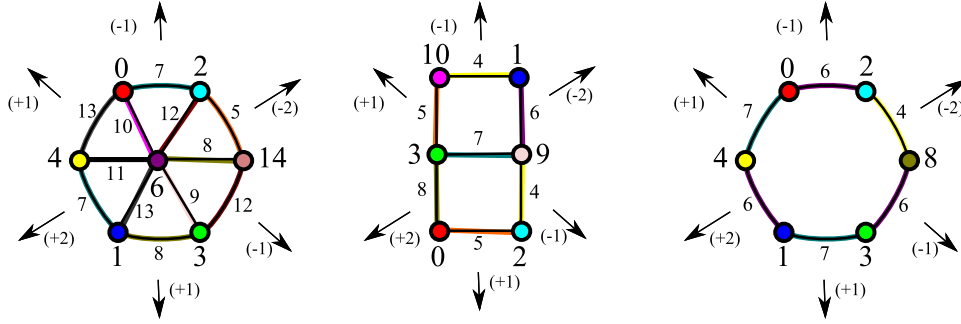


Figura 8.12:  $L(2, 1)$ -colorações totais ótimas em polígonos de grafos grades regulares.

## 8.4 Grafos grades regulares

Nesta seção apresentamos uma adaptação do algoritmo de Calamoneri et al., enunciado na Seção 3.7.1, para obtermos uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos grades regulares. O raciocínio por trás do algoritmo é o mesmo: estabelecemos uma atribuição para os vértices e arestas dos polígonos e fornecemos uma função que distribui novas cores aos elementos dos polígonos vizinhos. Pela Propriedade 8.2, temos que  $\lambda_T \geq 2\Delta + 2$ . A seguir fornecemos uma  $L(2, 1)$ -coloração total para esses grafos utilizando com *span*.

A Figura 8.12 fornece a atribuição dos polígonos das grades triangulares, quadradas e hexagonais e as funções de atribuição de cores módulo  $2\Delta + 2$  para os elementos de polígonos vizinhos.

Continuando, de forma semelhante a ocorrência nas  $L(2, 1)$ -coloração, blocos que respeitam uma  $L(2, 1)$ -coloração total são formados nessa atribuição. Esses blocos são copiados nas direções norte, sul, leste e oeste, atribuindo cores a todos os vértices e arestas desses grafos grades regulares. A Figura 8.13 ilustra esses blocos.

**Teorema 8.12** *Existe algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos grades regulares.*

## 8.5 Árvores

O estudo da  $L(2, 1)$ -coloração total nas árvores começou como um estudo da  $L(2, 1)$ -coloração em uma subclasse  $\mathcal{B}$  dos grafos blocos, como descrito no Capítulo 7. Resumidamente, um grafo  $G$  é  $\mathcal{B}$  se esse foi gerado a partir de uma árvore  $T$ , onde  $G = TR(T)$ . Consideramos apenas árvores com  $\Delta \geq 3$ , para os outros casos, essas são tratadas como grafos caminhos. Seja  $O_R = (v_1, \dots, v_n)$  uma ordenação dos vértices da árvore enraizada  $T$  com  $v_1$  sendo um vértice de grau  $\Delta$ .

**Lema 8.13** *Para uma árvore  $T$  com  $\Delta \geq 3$ ,  $2\Delta + 1 \leq \lambda_T(T) \leq 2\Delta + 2$ .*

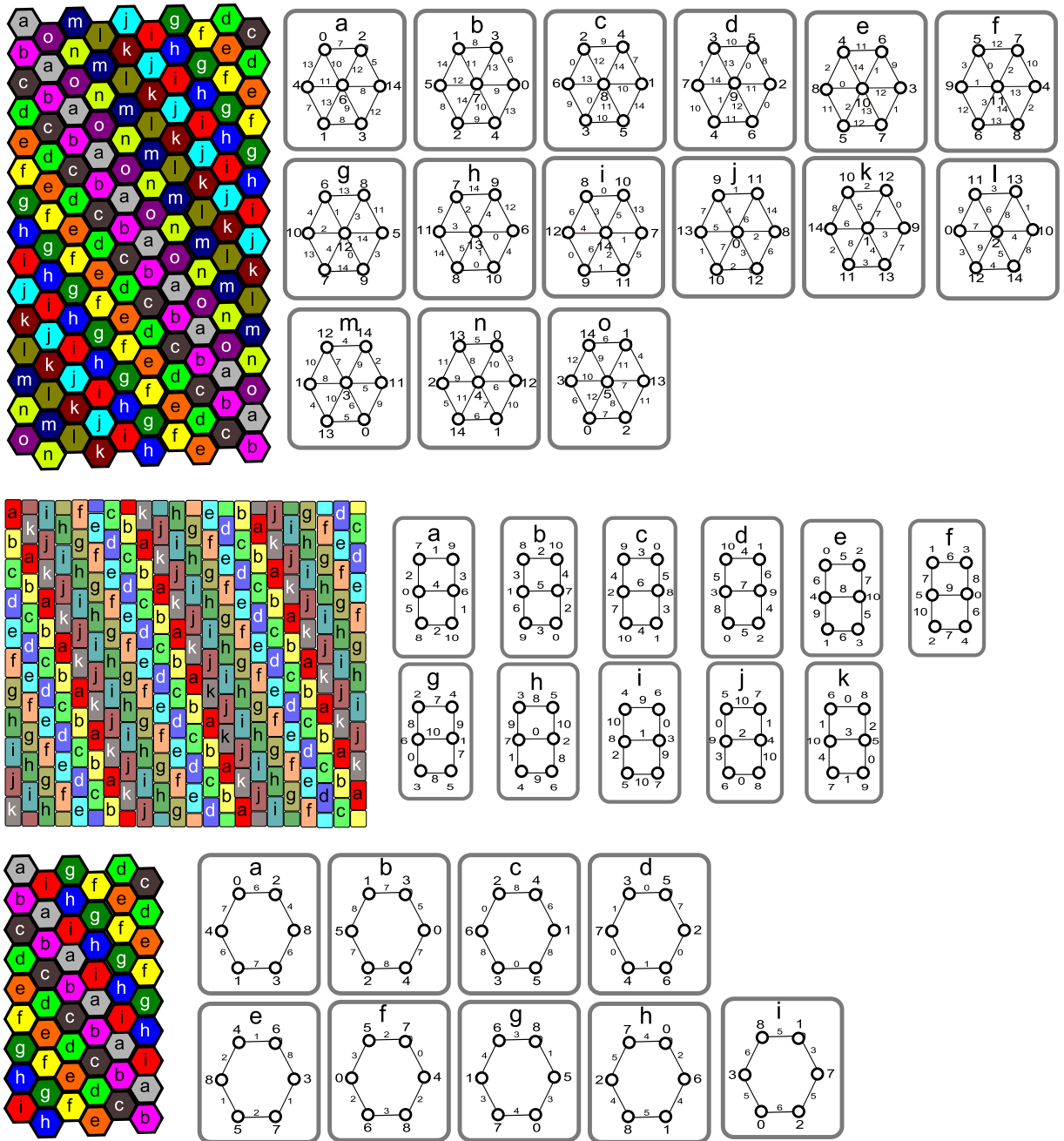


Figura 8.13: Blocos em  $L(2,1)$ -colorações totais em grafos grades regulares triangulares, quadradas e hexagonais.

**Prova.** Pela Propriedade 8.2,  $\lambda_T(T) \geq 2\Delta + 1$ . Inicialmente, atribuímos cores a  $v_1$  e sua vizinhança  $N(v_1)$  e  $N_E(v_1)$  da mesma forma que para um grafo estrela. A seguir, seguindo a ordenação  $O_R$ , começamos a atribuir gulosamente cores às vizinhanças  $N(v_j) \cup N_E(v_j)$  dos vértices  $v_j$  já coloridos. E, repetimos esse processo até todos tenham recebido cores. No pior caso, as cores proibidas para  $N(v_j) \cup N_E(v_j)$  ao ser tratados são: três, por causa de  $v_j$ , mais duas, uma por causa da cor de  $v_i$ , pai de  $v_j$  nessa árvore, e outra por causa da cor da aresta  $v_i v_j$ . Portanto, temos  $2\Delta + 3 - 5 = 2\Delta - 2$  cores disponíveis em  $\{0, \dots, 2\Delta + 2\}$  para os, no máximo,  $2\Delta - 2$  vértices e arestas de  $N(v_j) \cup N_E(v_j)$  sem cores. Essa atribuição é feita gulosamente, atribuindo inicialmente as cores aos vértices de  $N(v_j)$  e, posteriormente, às arestas de  $N_E(v_j)$ .  $\square$

Verificamos que em uma árvore  $T$ , se  $\lambda = \Delta + 1$ , então  $\lambda_T = 2\Delta + 1$ . Por outro lado, quando  $\lambda = \Delta + 2$ ,  $\lambda_T$  tem os dois valores possíveis, como ilustrado na Figura 8.14. O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL ainda está em aberto para as árvores mas, a seguir, fornecemos a solução para alguns casos.

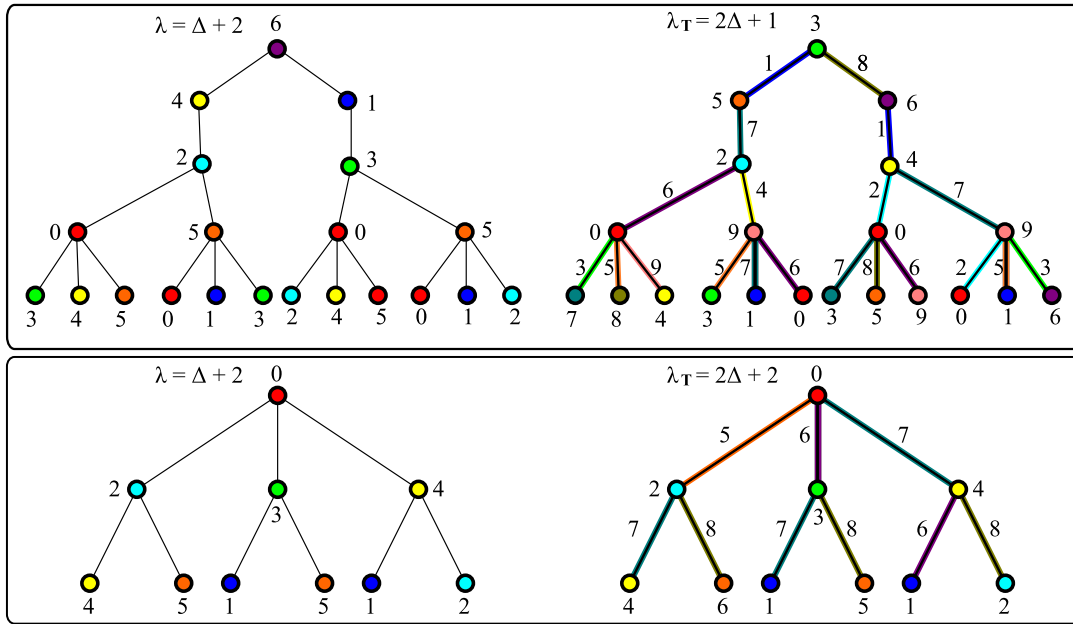


Figura 8.14: Árvores com  $\lambda = \Delta + 2$ , uma com  $\lambda_T = 2\Delta + 1$  e outra com  $\lambda_T = 2\Delta + 2$ .

**Teorema 8.14** Para uma árvore  $T$  com  $\lambda = \Delta + 1$ ,  $\lambda_T = 2\Delta + 1$ .

**Prova.** Seja  $f$  uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de  $T$  com  $\lambda = \Delta + 1$ . Defina  $g$ :

$$g(v) = \begin{cases} f(v), & \text{if } f(v) \leq \Delta - 1 \\ 2\Delta, & \text{if } f(v) = \Delta \\ 2\Delta + 1, & \text{if } f(v) = \Delta + 1 \end{cases}$$

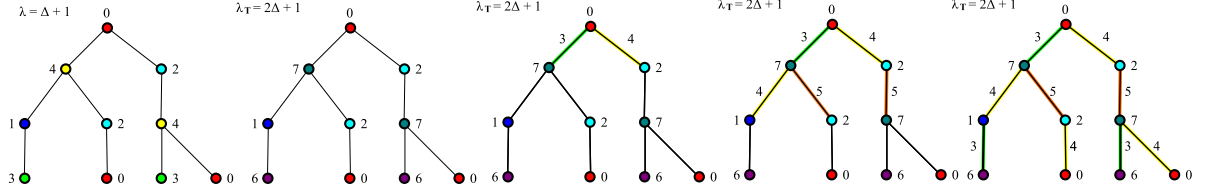


Figura 8.15: Atribuição do Teorema 8.14.

Atribuímos cores em  $g$  ao vértice raiz  $v_1$  e sua vizinhança  $N(v_1)$  e  $N_E(v_1)$  como em um grafo estrela. Sem perda de generalidade, seja a raiz  $v_1$  dessa árvore um vértice de grau  $\Delta$ . Como  $v_1$  tem grau  $\Delta$ , pela Propriedade 8.2,  $f(v_1) \in \{0, \Delta + 1\}$  e  $g(v_1) \in \{0, 2\Delta + 1\}$ . Sejam, sem perda de generalidade,  $f(v_1) = 0$  e  $v_j$  com  $j \geq 2$  filho de  $v_i$  na árvore. Se o grau de  $v_j$  é  $\Delta$ ,  $f(v_j) \in \{0, \Delta + 1\}$  e  $g(v_j) = 0$  ou  $g(v_j) = 2\Delta + 1$ . Novamente, sem perda de generalidade, seja  $f(v_j) = 0$ . Considere o pior cenário possível, onde o número de cores proibidas para as arestas em  $N_E(v_j)$ , desconsiderando as cores  $\Delta$  e  $2\Delta + 1$  proibidas por vértices com as cores  $\Delta - 1$  e  $2\Delta$ , são: uma (da cor da aresta  $v_i v_j$ ) +  $\Delta + 2$  (cores em  $\{0, \dots, \Delta - 1\} \cup \{2\Delta, 2\Delta + 1\}$  utilizadas por vértices da árvore) =  $\Delta + 3$ . Portanto, temos  $2\Delta + 2 - (\Delta + 3) = \Delta - 1$  cores disponíveis em  $\{0, \dots, 2\Delta + 1\}$  para as  $\Delta - 1$  arestas que ainda não receberam cores. Tal atribuição é uma  $L(2, 1)$ -coloração total parcial dessa árvore, só evite que a cor  $\Delta$  seja atribuída a aresta incidente ao vértice com a cor  $\Delta - 1$  e a cor  $2\Delta - 1$  não seja atribuída a aresta incidente ao vértice com a cor  $2\Delta$ .

Caso contrário, o grau de  $v_j$  é menor que  $\Delta$  e, no pior cenário possível, o número de cores proibidas para arestas em  $N_E(v_j)$  são: uma (da cor da aresta  $v_i v_j$ ) +  $\Delta + 2$  (cores em  $\{0, \dots, \Delta - 1\} \cup \{2\Delta, 2\Delta + 1\}$  utilizadas por vértices da árvore) + uma (cor  $\Delta$  se  $g(v_j) = \Delta - 1$  ou cor  $2\Delta - 1$  se  $g(v_j) = 2\Delta$ ). Portanto, temos  $2\Delta + 2 - (\Delta + 4) = \Delta - 2$  cores para atribuir as  $\Delta - 2$  arestas sem cores de  $N_E(v_j)$ . Isso é trivial quando  $\Delta \geq 4$ , só evite que a cor  $\Delta$  seja atribuída a aresta incidente ao vértice com a cor  $\Delta - 1$  e a cor  $2\Delta - 1$  a aresta incidente ao vértice com a cor  $2\Delta$ . Quando  $\Delta = 3$ , tal atribuição também é possível a não ser que  $g(v_j), g(v_w) \in \{\Delta - 1, 2\Delta\}$ , onde  $v_w$  é filho de  $v_j$  na árvore  $T$ . Contudo, isso implicaria que  $f(v_j) = \Delta - 1$  e  $f(v_w) = \Delta$  com  $v_j v_w \in E(G)$ , uma contradição com o fato que  $f$  é uma  $L(2, 1)$ -coloração.  $\square$

A Figura 8.15 ilustra a atribuição do Teorema 8.14.

Utilizando a Propriedade 8.2, o Teorema 8.14 e o resultado que uma árvore com  $\Delta = \Omega(\sqrt{|V(T)|})$  tem  $\lambda = \Delta + 1$  se, e somente se,  $T$  não tem uma  $D2T$  [48], enunciamos o Teorema 8.15.

**Teorema 8.15** *Uma árvore  $T$  com  $\Delta = \Omega(\sqrt{|V(T)|})$  tem  $\lambda_T = 2\Delta + 1$  se, e somente se,  $T$  tem uma  $D2T$ , que pode ser verificado em tempo linear.*

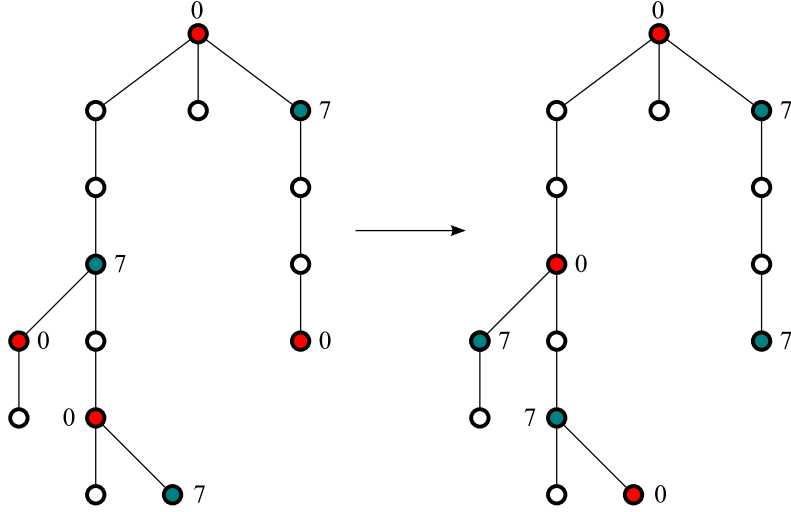


Figura 8.16: Modificação na atribuição  $g$ .

Note que, pelo Teorema 7.10, existe um algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima nas árvores quando  $\Delta$  é constante e outro polinomial quando  $\Delta$  é  $O(n^c)$  para uma constante  $c$ . Portanto, fica em aberto apenas os casos em que  $\Delta$  está entre  $n^{\frac{c}{\Delta}}$  para uma constante  $c$  e a raiz quadrada de  $n$  mais uma constante  $d$ .

A seguir faremos um estudo de casos, fornecendo duas condições, uma suficiente e outra necessária, para que uma árvore com  $\lambda = \Delta + 2$  tenha  $\lambda_T = 2\Delta + 1$ .

**Teorema 8.16** *Seja  $T$  uma árvore com  $\lambda = \Delta + 2$ . Se  $T$  tem uma  $L(2, 1)$ -coloração parcial  $g$  dos seus vértices, onde: (i) vértices de grau  $\Delta$  e algum vértice na sua vizinhança recebem cores 0 e  $2\Delta + 1$  e; (ii) vértices de grau  $\Delta - 1$  ou algum vértice na sua vizinhança recebem cores 0 ou  $2\Delta + 1$ ; então  $\lambda_T = 2\Delta + 1$ .*

**Prova.** A princípio, modificamos a atribuição  $g$  para que, sempre que possível, os vértices com distância 3 na árvore  $T$  recebam a mesma cor. A Figura 8.16 ilustra essa alteração na atribuição  $g$ .

O vértice  $v_1$  e as suas vizinhanças  $N(v_1)$  e  $N_E(v_1)$  são tratados como um grafo estrela. Definimos uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima  $f$  de  $T$  utilizando método guloso para atribuir cores aos vértices sem cores de  $g$  na ordenação  $O_R$ .

Seja  $v_h, v_i$  e  $v_j$  três vértices de  $T$  tais que  $v_h$  é pai de  $v_i$  e  $v_i$  é pai de  $v_j$ . Se o grau de  $v_i$  é  $\Delta$ , então  $v_i$  e um dos seus vizinhos recebem as cores 0 e  $2\Delta + 1$  em  $g$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $g(v_i) = 0$ . Se  $g(v_h) = 2\Delta + 1$ , existem  $2\Delta + 2 - 4 = 2\Delta - 2$  cores disponíveis que atribuímos gulosamente aos  $2\Delta - 2$  vértices e arestas não coloridos em  $N(v_i) \cup N_E(v_i)$ . Caso contrário,  $g(v_j) = 2\Delta + 1$ , e existem  $2\Delta + 2 - 5 = 2\Delta - 3$  cores disponíveis que atribuímos gulosamente aos  $2\Delta - 3$  vértices e arestas não coloridos em  $N(v_i) \cup N_E(v_i)$ . Novamente, só evite a atribuição da cor  $2\Delta$  a arestas incidente ao vértice que recebeu a cor  $2\Delta + 1$ .

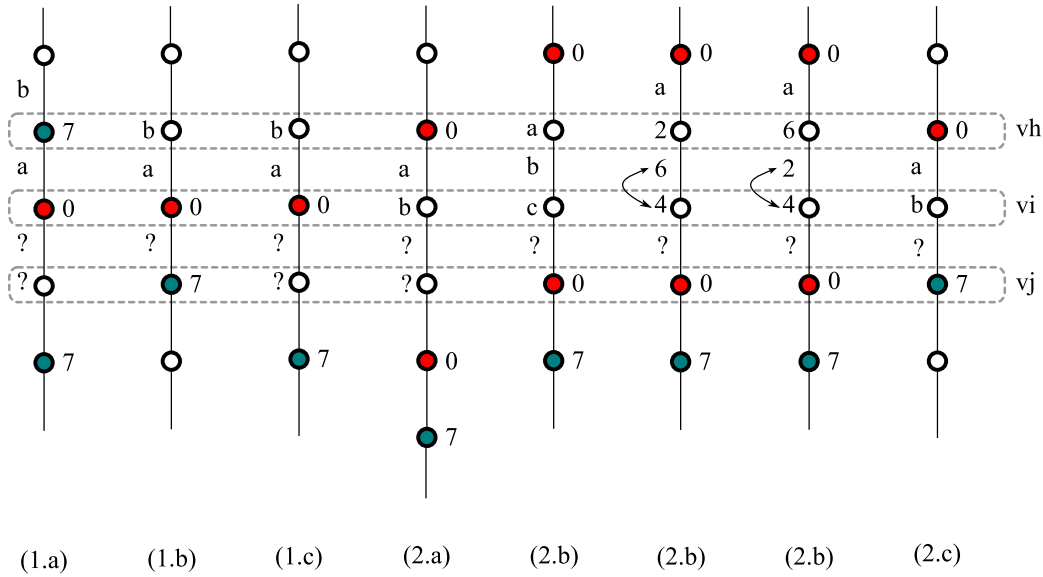


Figura 8.17: Descrição dos casos em que  $\Delta = 3$ .

Agora, considere que o grau de  $v_i$  é menor que  $\Delta$ . Se  $\Delta \geq 4$ , sem perda de generalidade, seja  $g(v_i) = 0$ . Existem  $2\Delta + 2 - 5 = 2\Delta - 3$  cores disponíveis que atribuímos gulosamente aos  $2\Delta - 4$  vértices e arestas em  $N(v_i) \cup N_E(v_i)$ . Só evite atribuir a cor  $2\Delta$  a aresta incidente ao vértice que recebeu a cor  $2\Delta + 1$ . Senão, seja  $g(v_i) \neq \{0, 2\Delta + 1\}$ . Desconsiderando as cores proibidas por causa dos vértices com as cores 0 e  $2\Delta + 1$ , existem  $2\Delta + 2 - 6 = 2\Delta - 4$  cores disponíveis que atribuímos gulosamente aos  $2\Delta - 4$  vértices e arestas em  $N(v_i) \cup N_E(v_i)$ . Só evite atribuir as cores 1 e  $2\Delta$  as arestas incidentes aos vértices com as cores 0 e  $2\Delta + 1$ , respectivamente.

Finalmente, quando  $\Delta = 3$ , dividimos a prova em casos, que são ilustrados na Figura 8.17:

**(1)**  $g(v_i) \in \{0, 7\}$ : **(1.a)**  $g(v_h) \in \{0, 7\}$ ; **(1.b)**  $g(v_j) \in \{0, 7\}$ ; **(1.c)**  $g(v_h) \notin \{0, 7\}$  e  $g(v_j) \notin \{0, 7\}$ .

**(2)**  $g(v_i) \notin \{0, 7\}$ : **(2.a)**  $g(v_h) \in \{0, 7\}$  e  $g(v_j) \notin \{0, 7\}$ ; **(2.b)**  $g(v_j) \in \{0, 7\}$  e  $g(v_h) \notin \{0, 7\}$ ; **(2.c)**  $g(v_h) \in \{0, 7\}$  e  $g(v_j) \in \{0, 7\}$ .

No caso **(1.a)** atribuímos cores a aresta  $v_i v_j$  e ao vértice  $v_j$ . As cores proibidas para esses elementos são  $\{0, 1, f(v_h v_i), 7\}$ . E, as cores em  $\{2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{f(v_h v_i)\}$  são suficientes para fazermos isso.

No caso **(1.b)** só a aresta  $v_i v_j$  está sem cor. As cores proibidas para essa aresta são  $\{0, 1, f(v_h v_i), f(v_h), 6, 7\}$ . E, sobram duas cores disponíveis que são suficientes.

No caso **(1.c)** atribuímos cores a aresta  $v_i v_j$  e ao vértice  $v_j$ . As cores proibidas para esses elementos são  $\{0, 1, f(v_h v_i), f(v_h), 7\}$ . E, existem três cores disponíveis que são suficientes para a aresta  $v_i v_j$  e o vértice  $v_j$ . Excepcionalmente a cor 6 é proibida ao vértice  $v_j$ , nesse caso, atribuímos 6 a aresta  $v_i v_j$ .

Já no caso **(2.a)** atribuímos cores a aresta  $v_i v_j$  e ao vértice  $v_j$ . As cores proibidas para esses elementos são  $\{0, f(v_h v_i), f(v_i) - 1, f(v_i), f(v_i) + 1\}$ . E, sobram três cores disponíveis que são suficientes para a aresta  $v_i v_j$  e o vértice  $v_j$ . Excepcionalmente as cores 1 e 7 podem ser proibidas ao vértice  $v_j$ , nesse caso, atribuímos a cor 1 ou 7 a aresta  $v_i v_j$  e a cor restante para  $v_j$ .

No caso **(2.b)** só a aresta  $v_i v_j$  está sem cor. As cores proibidas para esses elementos são  $\{0, 1, f(v_h), f(v_h v_i), f(v_i) - 1, f(v_i), f(v_i) + 1, 7\}$ . E, existe uma cor disponível que é suficiente para essa aresta **ou**  $\{f(v_h), f(v_h v_i), f(v_i)\} \in \{2, 4, 6\}$ . Neste caso, tal atribuição para a aresta  $v_i v_j$  é possível a não ser que  $f(v_h) = 2$ ,  $f(v_h v_i) = 6$ , e  $f(v_i) = 4$  ou  $f(v_h) = 6$ ,  $f(v_h v_i) = 2$ , e  $f(v_i) = 4$ . Em ambos, como  $a \notin \{f(v_i), f(v_h v_i)\}$ , podemos trocar as cores entre  $f(v_h v_i)$  e  $f(v_i)$ , obtendo assim uma cor para a aresta  $v_i v_j$ .

Finalmente, no caso **(2.c)** só a aresta  $v_i v_j$  está sem cor. As cores proibidas para essa aresta são  $\{0, f(v_h v_i), f(v_i) - 1, f(v_i), f(v_i) + 1, 6, 7\}$  Portanto, existe uma cor que é suficiente para essa aresta.  $\square$

**Teorema 8.17** *Uma árvore  $T$  com  $\lambda_T = 2\Delta_T + 1$  tem uma  $L(2, 1)$ -coloração parcial  $g$  dos vértices de  $TR(T)$  onde  $\forall v \in V(TR(T))$  com grau  $2(\Delta_T - k)$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad g(v) \in \{0, \dots, k-1\} \cup \{2\Delta_T + 2 - k, \dots, 2\Delta_T + 1\} \text{ ou,} \\ (ii) \quad \exists w \in N(v) \mid g(w) \in \{0, \dots, k-1\} \cup \{2\Delta_T + 2 - k, \dots, 2\Delta_T + 1\} \text{ ou,} \\ (iii) \quad g(v) \in \{k, 2\Delta_T + 1 - k\} \text{ e } \exists w \in N(v) \mid g(w) \in \{k, 2\Delta_T + 1 - k\} \end{array} \right.$$

**Prova.** Suponha por contradição alguma  $L(2, 1)$ -coloração parcial  $g$  de  $TR(T)$  com um vértice  $v$  de grau  $2(\Delta - k)$  que não é coberto pelas condições (i), (ii) ou (iii), mas que é possível estender essa atribuição para uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima de  $T$  com  $span\ 2\Delta_T + 1$ .

Quando  $k = 0$ , pela Propriedade 8.2, precisamos que a condição (iii) seja verdadeira.

Para  $1 \leq k \leq \Delta_T - 1$ , como  $v$  tem grau  $2(\Delta_T - k)$  em  $TR(T)$  e as condições (i) e (ii) não são verdadeiras, nem  $v$ , nem vértices em  $N(v)$  recebem  $2k$  cores em  $\{0, \dots, k-1\} \cup \{2\Delta_T + 1 - (k-1), \dots, 2\Delta_T + 1\}$ . Existem  $2\Delta_T + 2 - 2k$  cores disponíveis para  $v$  e vértices e arestas em  $N(v) \cup N_E(v)$ . Entretanto, como (iii) não é verdadeira, toda cor disponível para  $v$  reduz o número de cores disponíveis em  $N(v) \cup N_E(v)$  em três unidades, i.e., existem  $2\Delta_T - 2k - 1$  cores para  $2\Delta_T - 2k$  vértices e arestas não coloridos em  $N(v) \cup N_E(v)$ , um absurdo.  $\square$



## 8.6 Grafos $k$ -partidos completos

A Tabela 8.1 resume os nossos resultados para  $L(2, 1)$ -coloração total na classe dos grafos  $k$ -partidos completos.

# vértices universais	$n$ ímpar	$n$ par
0	$\lambda_T = n + \Delta$	$\lambda_T = n + \Delta$
1 ou 2	$\lambda_T = n + \Delta$	$n + \Delta \leq \lambda_T \leq n + \Delta + 1$
3 ou mais	$n + \Delta + 1 \leq \lambda_T \leq n + \Delta + 2$	$\lambda_T = n + \Delta + 1$

Tabela 8.1: Grafos  $k$ -partidos completos

**Lema 8.18** *Para um grafo  $k$ -partido completo  $G$  com  $\Delta \geq 1$ ,  $\lambda_T \geq n + \Delta$ .*

**Prova.** Seja  $v$  um vértice que recebeu a maior cor em um dos  $k$  conjuntos independentes de tamanho mínimo em uma  $L(2, 1)$ -coloração total  $f$  de  $G$ . As cores proibidas para as arestas em  $N_E(v)$  são a dos  $n$  vértices de  $G$  mais a cor  $f(v) + 1$ , que não é utilizada por nenhum vértice do grafo. Portanto, não somente as  $\Delta$  arestas em  $N_E(v)$  têm  $n + 1$  cores proibidas, mas também recebem cores diferentes entre si. Tal atribuição requer  $span$  pelo menos  $n + \Delta$ .  $\square$

**(Caso 1.A)** Iniciamos os estudos em grafos  $k$ -partidos completos com os que têm um número ímpar de vértices e sem vértice universal. Hian-Poh Yap [90] mostrou uma coloração total em grafos  $k$ -partidos completos com número ímpar de vértices utilizando  $\Delta + 1$  cores onde cada vértice, a não ser os de uma das partes  $V_1$ , recebem cores diferentes em  $\{1, \dots, \Delta\}$  e, vértices de  $V_1$  recebem a cor  $\Delta + 1$ .

**Lema 8.19** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número ímpar de vértices e sem vértice universal, então  $\lambda_T(G) = n + \Delta$ .*

**Prova.** Pelo Lema 8.18,  $\lambda_T \geq n + \Delta$ . Sejam  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , as partes de  $G$ , ordenadas por sua cardinalidade.

Defina  $f$  como uma atribuição consecutiva de cores aos vértices de  $V_1, \dots, V_{q-1}$ , pulando duas cores entre cada parte. Para vértices de  $V_q$ , atribuímos cores de  $n + \Delta - |V_q| + 1$  até  $n + \Delta$ . Essa atribuição não excede a cor  $n + \Delta$ , já que  $G$  não tem vértice universal e  $n + 2(k - 1) - 1 \leq n + \Delta$ . A seguir, mapeamos as outras  $\Delta + 1$  cores para as arestas de  $G$ .

Seja  $g$  uma coloração total de  $G$  obtida como descrita por Yap [90]. Mapeamos agora as cores das arestas de  $g$  em cores para as arestas da função  $f$  para torná-la uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$ . Atribuímos a cor  $\Delta + 1$  de  $g$  para a cor  $|V_1|$  de  $f$  e, para cada vértice em  $V_i$ ,  $1 < i \leq q$ , existe exatamente uma cor diferente faltando em  $g$  (a cor que esse vértice recebe na coloração total) em  $\{0, \dots, \Delta\}$ .

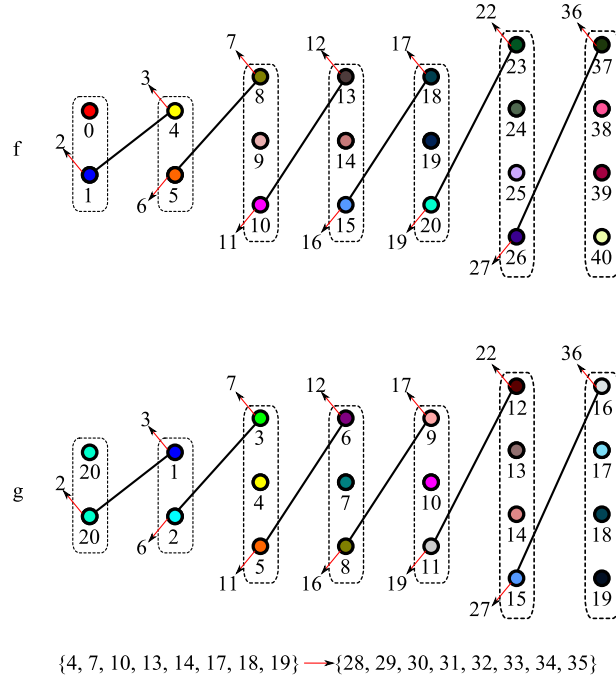


Figura 8.18:  $L(2, 1)$ -coloração total ótima de um grafo  $k$ -partido completo com  $n$  ímpar e sem vértice universal.

Sejam  $u_i$  e  $v_i$  os vértices com menor e maior cor em  $f$  para cada parte  $V_i$ ,  $1 < i \leq q - 1$ . Mapeamos a cor faltando nos vértices  $u_i$  e  $v_i$  em  $g$  para as cores  $f(u_i) - 1$  e  $f(v_i) + 1$ , respectivamente. Para  $V_q$ , mapeamos apenas a cor faltando de  $u_q$  em  $g$  para  $f(u_q) - 1$ . Todas as outras  $\Delta + 1 - 2(q - 1)$  cores de  $g$  ainda não utilizadas são mapeadas gulosamente as classes de cores das arestas em  $f$ .  $\square$

A Figura 8.18 ilustra a atribuição do Lema 8.19. Mapeamos a cor 20 de  $g$ , que falta nas arestas incidentes aos vértices de  $V_1$  para a cor 2 em  $f$ . Portanto, não existe aresta com cor 2 incidente a vértices com a cor 1 em  $f$ . Continuando, mapeamos as outras cores de  $g$  em  $f$  de tal forma que vértices com as cores mínimas e máximas em cada parte não tenham arestas com cores proibidas incidindo neles.

**Caso (1.B.i)** Um grafo  $k$ -partido completo  $G$  sem uma de suas partes com tamanho 1 ou 2 e com número par de vértices.

Dean Hoffman e Christopher Rodger [52] provaram que uma coloração de arestas do grafo  $k$ -partido completo tem  $\chi'(G) = \Delta$  se, e somente se, o grafo não é *overfull* (i.e., se  $m > \lceil \frac{n\Delta}{2} \rceil$ ). De fato, esses grafos têm um número ímpar de vértices para ser *overfull*.

Em uma coloração de arestas de um grafo  $k$ -partido completo, um *caminho multicolorido* é um emparelhamento  $M$  de tamanho  $q - 1$  onde as arestas recebem cores diferentes e têm, como extremos, dois vértices de cada conjunto independente  $V_2, \dots, V_{q-1}$  e um vértice de  $V_1$  e  $V_q$ . A Figura 8.19 ilustra um caminho multicolorido.

**Lema 8.20** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices e sem*

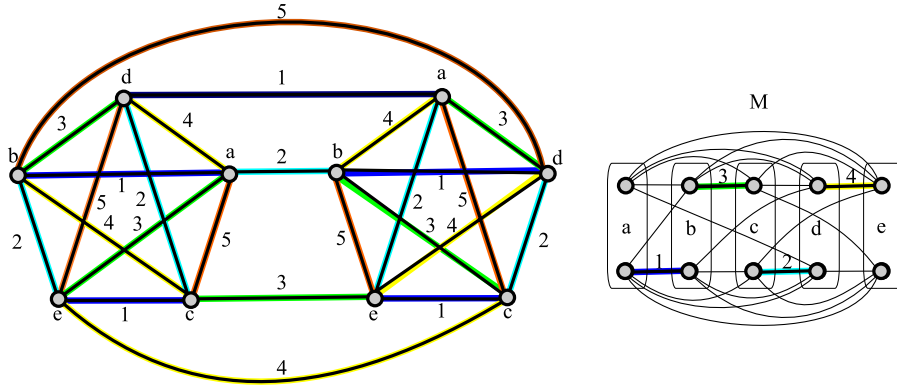


Figura 8.19: Caminho multicolorido.

uma de suas partes com tamanho um ou dois, então tem um caminho multicolorido  $M$  de tamanho  $q - 1$ .

**Prova.** Como  $G$  tem número par de vértices, então não é *overflow*. Considere uma coloração de aresta ótima de  $G$  com  $\chi'(G) = \Delta$ . Suponha por contradição agora que o tamanho máximo de um caminho multicolorido  $M$  seja  $x < q - 1$ , por conveniência, mapeie essas cores para as cores  $\{1, \dots, x\}$ . Essas arestas de  $M$  estão nas partes  $V_1, \dots, V_{x+1}$ . Sejam  $w, y$  e  $z$  três vértices de  $I_{x+2}$ ,  $a_i$  e  $b_i$  os extremos das arestas multicoloridas com a cor  $i$  para  $1 \leq i \leq x$  e  $c_i$  um vértice de  $V_i$  que não seja extremo de nenhuma aresta de  $M$ .

Para cada  $1 \leq i \leq x$ , considere as nove arestas entre os vértices  $a_i, b_i, c_i, w, y$  e  $z$ . Se existem no máximo duas dessas nove arestas com cores em  $\{1, \dots, x\}$ , então temos pelo menos sete arestas com cores diferentes. E, um vértice de (a)  $V_i$  ou (b)  $V_{i+1}$  tem três cores diferentes incidindo nele. Em ambos os casos, obtemos um emparelhamento multicolorido  $M' = (M \setminus e_i) \cup \{e_{x'}, e_{x''}\}$  (onde  $e_a$  é a aresta com cor  $a$  e  $\{x', x''\} \notin \{1, \dots, x\}$ ) com cardinalidade maior que  $M$ , um absurdo. A Figura 8.20 ilustra esse caso.

Senão, para cada uma das  $x$  arestas em  $M$  existem 3 ou mais arestas com cores em  $\{1, \dots, x\}$  incidentes aos vértices  $x, y$ , e  $z$ . Portanto, esses três vértices têm todas as cores em  $\{1, \dots, x\}$  nas cores de suas arestas incidentes. Entretanto, falta um vértice  $t$  em  $V_{x+1}$  com arestas  $tw, ty$  e  $tz$  que não utilizam cores em  $\{1, \dots, x\}$ , uma contradição com  $M$  ser maximal.  $\square$

**Lema 8.21** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices e sem uma de suas partes com tamanho um ou dois, então  $\lambda_T = n + \Delta$ .*

**Prova.** Pelo Lema 8.18,  $\lambda_T \geq n + \Delta$ . E, pelo Lema 8.20,  $G$  tem uma coloração de aresta com  $\chi' = \Delta$  e um caminho multicolorido  $M$  com  $q - 1$  arestas. Além disso, a parte  $V_1$  pode ser escolhida arbitrariamente. Seja então  $V_1$  com cardinalidade

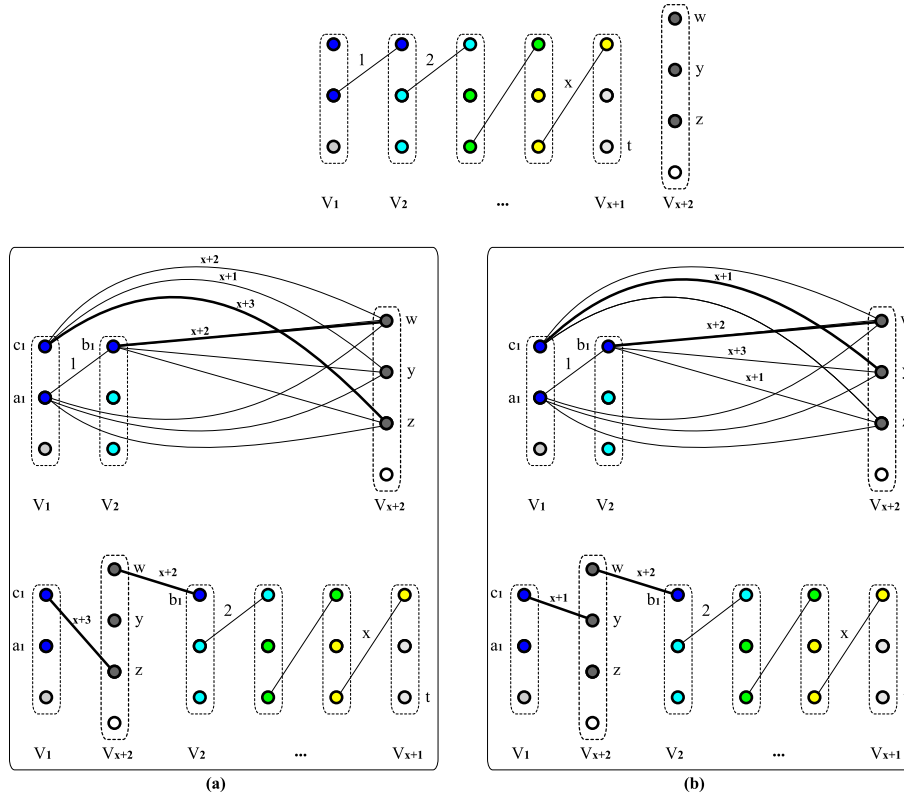


Figura 8.20: Caminho multicolorido  $M'$  onde  $|M'| \geq |M|$ .

máxima e, após obter  $M$ , nós adicionamos a  $M$  outra aresta entre um vértice de  $V_1$  que não pertence a  $M$  e um dos, no mínimo,  $q$  outros vértices de  $G$  que não pertencem a  $M$ , com uma cor diferente de  $\{1, \dots, q-1\}$ .

Defina  $f$  como uma atribuição consecutiva aos vértices de  $V_1, \dots, V_q$ , pulando uma cor entre o último vértice de uma parte para o primeiro da próxima. Mapeamos agora as cores  $\{1, \dots, \Delta\}$  da coloração de arestas de  $G$  para as cores das arestas de  $f$ , respeitando uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$ . Para isso, mapeamos as cores  $\{1, \dots, q\}$  das arestas de  $M$  nas cores que não foram utilizadas, entre vértices partes diferentes e, as outras cores em  $\{q-1, \dots, \Delta\}$  nas cores  $\{n+q, \dots, n+\Delta-1\}$ . Finalmente, modificamos as cores das arestas de  $M$  (que são as únicas que têm algum conflito com as cores dos vértices) para a cor  $n+\Delta$ .  $\square$

A Figura 8.21 ilustra uma  $L(2, 1)$ -coloração total obtida pelo Lema 8.21.

Agora tratamos o **Caso (1.B.ii)**, um grafo  $k$ -partido completo sem vértice universal, número par de vértices e com uma de suas partes com tamanho 2.

**Lema 8.22** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices, sem vértice universal e com uma de suas partes de tamanho 2, então  $\lambda_T(G) = n + \Delta$ .*

**Prova.** Pelo Lema 8.18,  $\lambda_T \geq n + \Delta$ . Defina  $g$  como uma coloração de arestas do  $K_n$  obtida cf. Berge [7] usando um método geométrico, onde  $\chi' = \Delta(K_n)$ .

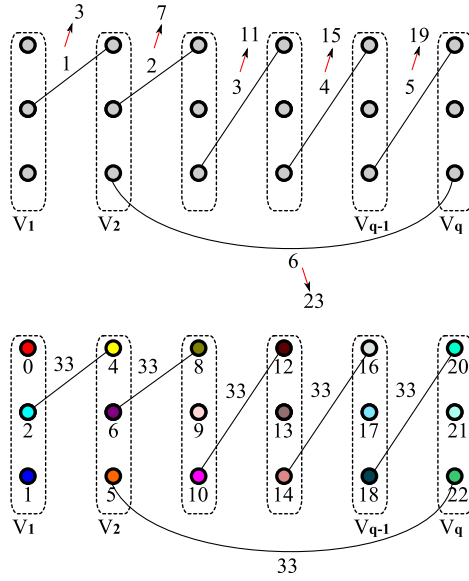


Figura 8.21: Uma  $L(2,1)$ -coloração total de um grafo  $k$ -partido completo com número de vértices par e sem parte de tamanho 1 ou 2.

Mapeamos os vértices de  $G$  no grafo completo  $K_n$  da seguinte forma: A parte com tamanho dois é o vértice central e um dos vértices do ciclo externo, sem perda de generalidade, o mais acima. Agora, mapeamos os vértices das partes de tamanho par em vértices consecutivos dos dois lados do ciclo externo. Finalmente, mapeamos os vértices das partes de tamanho ímpar em vértices consecutivos dos dois lados, onde se o conjunto terminar em um vértice do lado direito, o próximo começa mapeando a partir do vértice da esquerda, e vice-versa.

Precisamos eliminar uma cor  $a$  dessa atribuição. A classe de cor  $a$  das arestas da primeira parte de tamanho dois é coberta por não arestas em todas as partes de tamanho par. E, para cada par de partes de tamanho ímpar, existe uma aresta com cor  $a$  que não é coberta. Entretanto, como escolhemos essas partes para estarem disposta em vértices consecutivos, alteramos essa cor  $a$  das arestas entre pares de partes de tamanho ímpar pela cor  $b$  dada pela primeira aresta do ciclo externo, já que essas arestas são removidas desses vértices e essas cores estão disponíveis.

Agora, temos uma coloração de arestas de  $G$  com  $\chi'(G) = \Delta(G)$ . A seguir, mostramos um caminho multicolorido  $M$  nessa atribuição que pode ser estendida a uma  $L(2,1)$ -coloração total de  $G$  com  $span\ n + \Delta$ , de forma similar a prova do Lema 8.21.

No método geométrico da coloração dos grafos completos  $K_n$ , cada aresta do ciclo externo recebe cor diferente. Usamos então essas arestas como um caminho multicolorido de tamanho  $q$ . A primeira aresta de  $M$  é a cor  $c$ , oposta a cor  $b$  no início do ciclo externo. Acrescentamos a  $M$  agora arestas dos lados opostos do ciclo externo, para conectar as partes. No final, adicionamos a aresta com a cor removida das partes de tamanho ímpar para conectar a última parte na primeira parte de

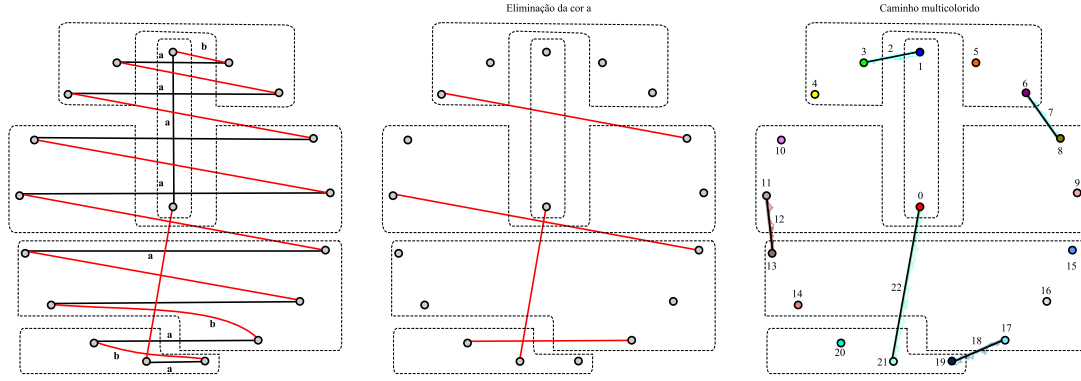


Figura 8.22: Uma  $L(2,1)$ -coloração total de um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices, sem vértice universal e com uma parte de tamanho 2.

tamanho 2.

Defina  $f$  uma atribuição gulosa de cores aos vértices, pulando uma cor entre o último vértice de uma parte e o primeiro da próxima. Mapeamos as cores dessas  $q$  arestas de  $M$  para as cores puladas na atribuição  $f$  e, as outras cores são mapeadas em  $\{n + q, \dots, n + \Delta - 1\}$ . Finalmente, designamos cores das arestas em  $M$  (as únicas que podem estar em conflito com uma  $L(2,1)$ -coloração total de  $G$ ) para  $n + \Delta$ .  $\square$

A Figura 8.22 ilustra a atribuição do Lema 8.22 no  $K_{2,3,4,5}$ .

Chegamos no **Caso (2.A)** um grafo  $k$ -partido completo com  $\Delta \geq 2$ , um ou dois vértices universais e número ímpar de vértices.

**Lema 8.23** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com  $\Delta \geq 2$ , número ímpar de vértices e um ou dois vértices universais, então  $\lambda_T = n + \Delta$ .*

**Prova.** A prova é exatamente a mesma dada no Lema 8.19. Só é preciso que o primeiro vértice universal seja  $V_1$  e, que o segundo, se houver, seja  $V_q$ .  $\square$

Continuamos então para o **Caso (2.B)** um grafo  $k$ -partido completo, número par de vértices e um ou dois vértices universais.

**Lema 8.24** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices e um ou dois vértices universais, então  $n + \Delta \leq \lambda_T(G) \leq n + \Delta + 1$ .*

**Prova.** Pelo Lema 8.18,  $\lambda_T \geq n + \Delta$ . E,  $G$  é subgrafo do  $K_n$  com  $n$  par, que tem  $\lambda_T(K_n) = n + \Delta + 1$ .  $\square$

Chegamos no **Caso (3.A)** um grafo  $k$ -partido completo com número ímpar de vértices e três ou mais vértices universais.

**Lema 8.25** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número ímpar de vértices e três ou mais vértices universais, então  $n + \Delta + 1 \leq \lambda_T(G) \leq n + \Delta + 2$ .*

**Prova.** Pela Propriedade 8.2, como  $G$  tem uma  $D2T$ ,  $\lambda_T \geq 2\Delta + 2 = n + \Delta + 1$ . E,  $G$  é subgrafo do  $K_n$  com número ímpar de vértices com  $\lambda_T(K_n) = n + \Delta + 2$ .  $\square$

Esses limite são justos. Temos exemplos como o  $K_7 \setminus \{e\}$  que tem  $\lambda_T(K_7 - \{e\}) = n + \Delta + 1$  e, outros como  $K_{11} - \{e\}$ , que tem  $\lambda_T(K_{11} - \{e\}) = n + \Delta + 2$ . Esses valores para  $\lambda_T$  foram obtidos verificando todas as atribuições possíveis para esses grafos.

Finalmente, tratamos o último **Caso** (3.B) um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices e três ou mais vértices universais.

**Lema 8.26** *Se  $G$  é um grafo  $k$ -partido completo com número par de vértices e três ou mais vértices universais, então  $\lambda_T(G) = n + \Delta + 1$ .*

**Prova.** Pela Propriedade 8.2,  $\lambda_T \geq 2\Delta + 2 = n + \Delta + 1$ . E,  $G$  é subgrafo do  $K_n$  com número par de vértices com  $\lambda_T(K_n) = n + \Delta + 1$ .  $\square$

A prova do Teorema 8.27 segue diretamente dos Lemas 8.19, 8.21, e 8.22.

**Teorema 8.27** *Para um grafo  $k$ -partido completo,  $n + \Delta + 2 \geq \lambda_T \geq n + \Delta$ . E, se não tem um vértice universal, então  $\lambda_T = n + \Delta$ .*

## 8.7 Conjectura da $L(2, 1)$ -coloração total

Como descrito na Seção 3.5, a Conjectura de Griggs e Yeh, de que  $\lambda \leq \Delta^2$  em grafos com  $\Delta \geq 2$  é a mais conhecida sobre  $L(2, 1)$ -coloração em grafos. Agora, estendemos essa conjectura para a  $L(2, 1)$ -coloração total em grafos com  $\Delta \geq 3$ .

**Conjectura 8.28** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 3$ ,  $\lambda_T \leq \Delta^2$ .*

Essa conjectura não inclui grafos com  $\Delta \geq 2$ . Mesmo os grafos ciclos  $C_n$  tendo  $\lambda(C_n) = \Delta^2 = 4$  [44], em uma  $L(2, 1)$ -coloração total, temos  $\lambda_T(C_n) = \Delta^2 + 2 = 6$  (exceto o  $C_5$ , onde  $\lambda_T(C_5) = 7$ ). Portanto, existe um classe infinita de grafos com  $\Delta = 2$  onde a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira em uma  $L(2, 1)$ -coloração, mas que é falsa na sua versão para  $L(2, 1)$ -coloração total.

Afirmamos também que, para grafos com  $\Delta \geq 5$ , as conjecturas se tornam a mesma.

**Lema 8.29** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 5$ ,  $\lambda \leq \Delta^2$  se, e somente se,  $\lambda_T \leq \Delta^2$ .*

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ) Defina uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G$  com  $span \Delta^2$  usando as mesmas cores da  $L(2, 1)$ -coloração de  $G$  com  $span \Delta^2$  e, a seguir, atribua gulosamente

cores em  $\{0, \dots, \Delta^2\}$  as arestas de  $G$ . Como  $\Delta^2 \geq 4\Delta + 2$  quando  $\Delta \geq 5$ , pela Propriedade 8.3, temos pelo menos uma cor disponível em  $\{0, \dots, \Delta^2\}$  para qualquer aresta de  $G$ .

( $\Leftarrow$ ) Pela Propriedade 8.5,  $\lambda \leq \lambda_T$  e, nesse caso,  $\lambda \leq \lambda_T \leq \Delta^2$ .  $\square$

Dessa forma, grafos com  $3 \leq \Delta \leq 4$  são os únicos que podem ser contraexemplos da Conjectura 8.28 e respeitarem a versão clássica da conjectura de Griggs e Yeh para a  $L(2, 1)$ -coloração.

## Grafos com diâmetro 2

Griggs e Yeh provaram que um grafo diâmetro 2 tem  $\lambda \leq \Delta^2$  [44]. Portanto, pelo Lema 8.29,  $\lambda_T \leq \Delta^2$  quando  $\Delta \geq 5$ .

Claramente um grafo com diâmetro 2 tem  $n \leq \Delta^2 + 1$ , pois para um vértice  $v$  qualquer desse grafo,  $|N(v)| \leq \Delta$  e  $N_2(v) \leq \Delta(\Delta - 1)$ . Dessa forma, se  $\Delta = 3$ , então  $n \leq 10$  e, se  $\Delta = 4$ , então  $n \leq 17$ . Como enunciado anteriormente, os únicos grafos de Moore com diâmetro 2 são o  $C_5$ , o grafo de Petersen, o grafo Hoffman-Singleton e, talvez, um outro grafo com  $\Delta = 57$ . Dessa forma, limitamos  $n \leq 16$  para o caso  $\Delta = 4$ , já que se tivesse cardinalidade  $n = \Delta^2 + 1$ , seria um grafo de Moore.

A Propriedade 8.4 pode ser melhorada quando tratamos de grafos diâmetro 2. Dada uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima  $f$  de um grafo  $G$  diâmetro 2 e uma coloração de arestas de  $G$  com  $\chi' = \Delta + 1$ , definimos uma  $L(2, 1)$ -coloração total  $h$  de  $G$  onde  $h(v) = f(v)$ ,  $\forall v \in V(G)$  e, como só há um vértice com a cor  $\lambda$  em  $f$ , mapeamos a cor que falta em  $g$  das suas arestas incidentes para a classe de cor  $\lambda + 1$  em  $h$  e, as outras classes de cores das arestas em  $g$  são mapeadas de qualquer forma nas classes de cores das arestas em  $h$ . Dessa forma, segue o Corolário 8.30

**Corolário 8.30** *Para um grafo diâmetro 2,  $\lambda_T \leq \lambda + \Delta + 1$ .*

Utilizando o Corolário 8.30, se  $\lambda \leq \Delta^2 - \Delta - 1$ , então  $\lambda_T \leq \Delta^2$ . Portanto, qualquer contraexemplo para a Conjectura 8.28 tem  $\lambda \geq \Delta^2 - \Delta$ . Sabemos que, para grafos diâmetro 2,  $\lambda = n + pv(G^c) - 2$  [44]. Então, estamos limitados aos casos em que  $n \geq \Delta^2 - \Delta - pv(G^c) + 2$ , i.e.,  $n \geq 8 - pv(G^c)$  quando  $\Delta = 3$  e  $n \geq 14 - pv(G^c)$  quando  $\Delta = 4$ . Os grafos completos são os únicos onde  $pv(G^c) = \Delta + 1$  e, para esses, sabemos que  $\lambda_T \leq 2\Delta + 3 \leq \Delta^2$  para  $\Delta \geq 3$ . Os únicos grafos com  $pv(G^c) = \Delta$  têm como caminhos disjuntos no grafo complemento  $\Delta - 1$  vértices isolados e um caminho, já que se houvessem dois ou mais caminhos, qualquer extremo do caminho não tem aresta em  $G^c$  com os outros, pelo menos,  $\Delta + 1$  extremos de caminhos diferentes e teria essas arestas em  $G$ , um absurdo com o grau máximo ser  $\Delta$ .

No caso  $\Delta = 3$  e  $pv(G^c) = 3$ , para ser um contraexemplo para a conjectura, precisamos que  $n \geq 5$ . O caso  $n > 5$  não pode ocorrer, já que os dois vértices



isolados precisam ser adjacentes a todos os outros vértices do caminho em  $G^c$  a não ser os seus extremos e, neste caso,  $pv(G^c) = 2$ , um absurdo. O caso  $n = 5$  poderia ocorrer, mas só se  $G$  fosse o complemento do grafo  $S_5$ , que é desconexo, também um absurdo, agora com o fato de  $G$  ser diâmetro 2.

No caso  $\Delta = 4$  e  $pv(G^c) = 4$ , para ser um contraexemplo para a conjectura, precisamos que  $n \geq 10$ , o que não pode ocorrer, já que os três vértices isolados precisam ser adjacentes a todos os outros vértices do caminho em  $G^c$  a não ser os seus extremos e, nesse caso,  $pv(G^c) = 2$ , um absurdo.

Faltam os casos em que  $\Delta = 3$  e  $1 \leq pv(G^c) \leq 2$  e  $\Delta = 4$  e  $1 \leq pv(G^c) \leq 3$ . Nesses,  $n \geq 6$  e  $n \geq 11$ , respectivamente. Geramos então todos os grafos com  $\Delta = 3$  e  $6 \leq n \leq 9$  e com  $\Delta = 4$  e  $11 \leq n \leq 16$  utilizando a ferramenta Nauty [75]. No caso que  $\Delta = 4$  e  $n \geq 14$ , consideramos apenas os casos em que  $\delta = \Delta = 4$ , pois se existisse  $v$  com grau 3, então  $|N(v)| \leq 3$  e  $|N_2(v)| \leq 9$ , haveria pelo menos um dos quatorze vértices desse grafo que está à distância maior que 3 de  $v$ .

A seguir, verificamos o quadrado das matrizes de adjacências desses grafos com intuito de restringirmos apenas os grafos com diâmetro 2. E, para os grafos remanescentes, geramos  $L(2,1)$ -colorações totais de forma aleatória até encontrarmos alguma com  $span$  no máximo  $\Delta^2$ . As matrizes de adjacência desses grafos e as respectivas  $L(2,1)$ -colorações totais estão disponíveis em: <http://www.cos.ufrj.br/~posner/L21T/diametro2/>. Dessa forma, segue o limite do Teorema 8.31. Esse limite é justo, já que temos um grafo diâmetro 2, o grafo de Petersen, que tem  $\lambda_T = \Delta^2 = 9$ , como ilustrado na Figura 8.1.

**Teorema 8.31** *Para um grafo diâmetro 2 com  $\Delta \geq 3$ ,  $\lambda_T \leq \Delta^2$ .*

### Cografos e grafos *threshold*

Abaixo segue um resultado de [81]. Como dito anteriormente, tratamos apenas os cografos conexos, caso contrário, tratamos cada uma das suas componentes conexas separadamente.

**Teorema 8.32 (C. e P. [23])** *Para um cografo  $G = G_1 \wedge G_2$ ,  $\lambda \leq 2\Delta(G)$  para grafos completos, grafos bipartido completos ou ciclos e  $\lambda \leq 2\Delta(G) - 1$  para os casos restantes.*

Utilizando o Corolário 8.30 e o Teorema 8.32 obtemos o limite superior  $\lambda_T \leq 3\Delta$ . Esse limite é justo, já que grafos bipartidos completos com mesmo número de vértices em ambas as partes (a não ser o  $K_2$ ) têm  $\lambda_T = n + \Delta = 3\Delta$ .

**Teorema 8.33** *Para cografos,  $2\Delta + 1 \leq \lambda_T \leq 3\Delta$ , e esses limites são justos.*

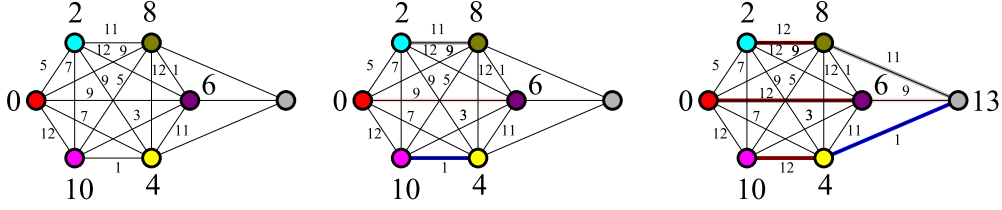


Figura 8.23:  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em grafos *threshold* com  $\delta \leq \frac{n-3}{2}$ .

Como os grafos *threshold* têm pelo menos um vértice com grau  $\Delta = n - 1$ , pela Propriedade 8.2,  $\lambda_T \geq 2\Delta + 1 = 2n - 1$ . Note que os valores de  $\lambda_T(K_n)$  do Teorema 8.10 servem como limites superiores para qualquer grafo com o mesmo número de vértices. Consequentemente,  $2n - 1 \leq \lambda_T \leq 2n$  se  $n$  é par e  $2n - 1 \leq \lambda_T \leq 2n + 1$  se  $n$  é ímpar. Como discutido anteriormente, todos esses limite são justos.

**Teorema 8.34** *Para grafos threshold  $\lambda_T \geq 2n - 1$ ,  $\lambda_T \leq 2n$  se  $n$  é par e  $\lambda_T \leq 2n + 1$  se  $n$  é ímpar.*

Pela Propriedade 8.2, se  $G$  tem três ou mais vértices universais, então  $\lambda_T \geq 2n$ . Portanto, se  $n$  é par, então  $\lambda_T = 2n$ . Se  $n$  é ímpar e  $\delta \leq \frac{n-3}{2}$ , seja  $v$  um vértice com grau  $\frac{n-3}{2}$ . Considere uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $G[V \setminus \{v\}]$  como a de um grafo completo par com *span*  $2n - 2$ , descrita no Teorema 8.10. Definimos então um emparelhamento multicolorido  $M$  nesse grafo completo, onde os extremos das arestas são mapeados na vizinhança de  $v$ . Se atribuirmos a cor  $2n - 2$  a  $v$  e a cor  $2n - 1$  nas arestas do emparelhamento  $M$ , obtemos as cores necessárias para as arestas de  $N_E(v)$ , como descrito na Figura 8.23.

**Teorema 8.35** *Para grafos threshold com número par de vértices e três ou mais vértices universais ou número ímpar de vértices e  $\delta \leq \frac{n-3}{2}$ ,  $\lambda_T \leq 2n$ .*

Só falta o caso onde  $n$  é ímpar e  $\delta > \frac{n-3}{2}$ . Nesse cenário, existe um subgrafo completo de tamanho pelo menos  $\frac{n-3}{2}$ , sendo as últimas  $\frac{n-3}{2}$  operações realizadas na construção desse grafo *threshold* de adição de vértice universal.

## 8.8 Complexidade

Nesta seção buscamos um entendimento maior sobre a complexidade do problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL de grafos. Nesse sentido, não só provamos que este é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a classe dos grafos bipartidos, como apresentamos classes de grafos que divergem com a complexidade do problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO de grafos. Essa investigação sobre a complexidade

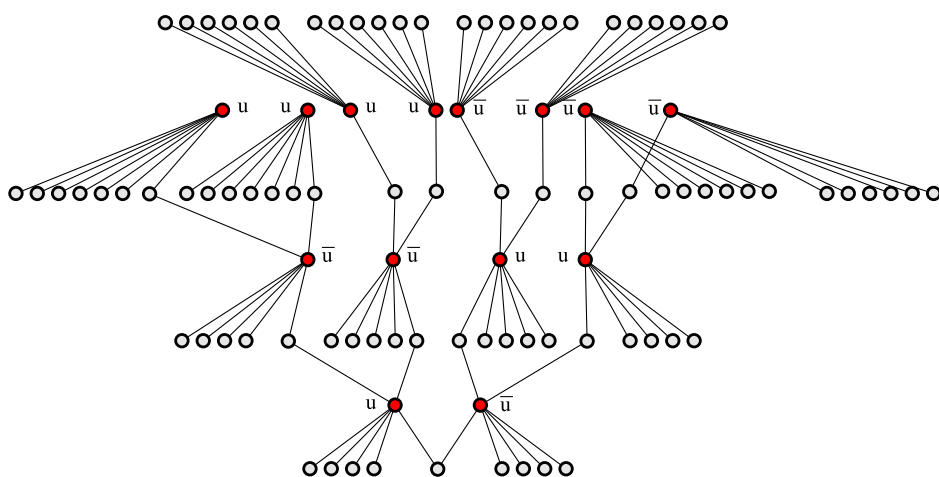


Figura 8.24: Construção das árvores  $T$  para os literais  $u \in U$ .

é interessante, pois esclarece um pouco a natureza dos dois problemas, que em certos momentos são tão similares e, em outros, bem diferentes.

Inicialmente enunciamos o conhecido problema NAE 3-SAT, que foi provado ser  $\mathcal{NP}$ -completo cf. [37].

### NAE 3-SAT

**Instância:** Um conjunto  $U$  de variáveis e uma coleção  $C$  de cláusulas de elementos de  $U$  onde toda cláusula tem tamanho 3.

**Pergunta:** Existe atribuição de valores as variáveis de  $U$  de forma que toda cláusula em  $C$  tem pelo menos um literal verdadeiro e um literal falso?

Seja  $C$  uma coleção de cláusulas de uma instância de NAE 3-SAT. Construímos um grafo  $G$  com  $\Delta = 7$  da seguinte forma:

Inicialmente, construímos uma árvore  $T$  para cada variável de  $u \in U$ . Essa árvore começa com dois vértices de grau 7, notados por  $u$  e  $\bar{u}$ , com um vizinho em comum. Então, adicionamos mais dois vértices de grau 7 com um vizinho em comum a  $u$  e  $\bar{u}$  e esse processo se repete até obtermos um número de vértices de grau  $\Delta$  no último nível dessa árvore igual ao dobro do número das aparições de  $u$  e  $\bar{u}$  nas cláusulas de  $C$ . Pela Propriedade 8.2, em uma  $L(2, 1)$ -coloração total de  $T$  com  $span\ 2\Delta + 1 = 15$ , todos os vértices de grau  $\Delta$  recebem cores 0 ou 15. Desta forma, esses vértices de grau  $\Delta$  replicam a cor dos vértices  $u$  e  $\bar{u}$ . E, como  $dist(u, \bar{u}) = 2$ , esses vértices recebem cores diferentes em  $\{0, 15\}$ . Sem perda de generalidade, a partir de agora consideramos que um literal  $u$  é **verdadeiro** se recebe a cor 0 e é **falso** se recebe a cor 15. A Figura 8.24 ilustra a construção dessa árvore  $T$ .

A seguir, construímos um  $K_{5,5}$  para cada cláusula  $c \in C$ . E, para cada literal da cláusula  $c$ , removemos um vértice do último nível da árvore que representa esse literal

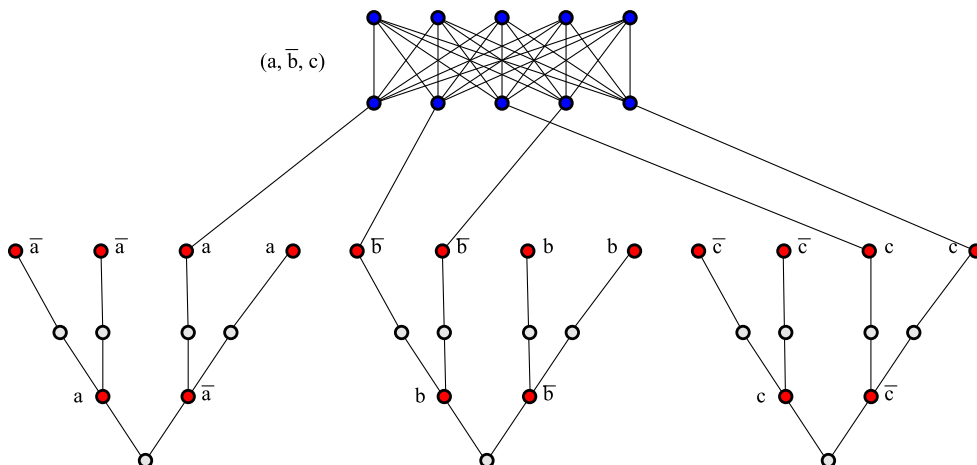


Figura 8.25: Conexão entre o  $K_{5,5}$  da cláusula  $(a, \bar{b}, c)$  e as árvores dos literais.

e o conectamos a um dos vértices de uma das partes do  $K_{5,5}$ . Como existem 3 literais na cláusula, ainda faltam dois vértices de uma das partes do  $K_{5,5}$ , nós completamos utilizando o mesmo processo com outros vértices das árvores que representem literais dessa cláusula. A Figura 8.25 ilustra essa conexão entre o  $K_{5,5}$  e as árvores dos literais, nessa, repetimos a adição dos vértices que representam os literais  $\bar{b}$  e  $c$ .

Temos no máximo  $6|C|$  vértices com grau 7 perto do último nível das  $|U|$  árvores de literais, o que implica em no máximo  $12|C|$  vértices de grau 7. Como esses vértices de grau 7 cobrem todos os vértices da árvore, o número de vértices dessas árvores é limitado por  $96|C|$  e, o seu número de arestas é limitado por  $96|C| - |U|$ . Além disso, temos  $|C|$  grafos bipartidos completos  $K_{5,5}$  com um total de  $10|C|$  vértices e  $25|C|$  arestas. Portanto, temos que  $|V(G)| \leq 106|C|$  e  $E(G) \leq 121|C| - |U|$  e o tamanho de  $G$  é linear no tamanho da entrada da instância do NAE 3-SAT.

Vamos verificar agora que, dado um grafo  $G$  construído a partir de uma instância  $I$  do problema NAE 3-SAT,  $\lambda_T(G) = 15$  se, e somente se,  $I$  é satisfeita. Isto é, se  $\lambda_T(G) = 15$ , então esta nos fornece uma atribuição dos literais que satisfaz a instância  $I$  e, se existe uma atribuição que satisfaz os literais de  $I$ , então  $\lambda_T(G) = 15$ .

Considere que  $\lambda_T(G) = 15$ . Como descrito na Seção 8.6,  $\lambda_T(K_{5,5}) = 15$  e vértices ou arestas desse grafo utilizam as cores 0 e 15 (senão reduziríamos o *span* da atribuição ótima em uma unidade). Sem perda de generalidade, suponha por contradição que todos os literais de uma cláusula são verdadeiros, todos recebem a cor 0 e os vértices e arestas de  $K_{5,5}$  não recebem esse rótulo, o que implica que  $\lambda_T(G) \geq 16$ , um absurdo. O mesmo ocorre no caso que todos os literais forem falsos. Portanto, em toda cláusula existe pelo menos um literal **falso** e um literal **verdadeiro**, satisfazendo a instância  $I$ .

Por outro lado, considere que a instância  $I$  é satisfeita. Definimos agora uma  $L(2,1)$ -coloração total  $f$  de  $G$  com *span* 15. Inicialmente, atribuímos as cores 0 e 15 aos vértices das árvores dos literais de acordo com as respectivas variáveis sendo

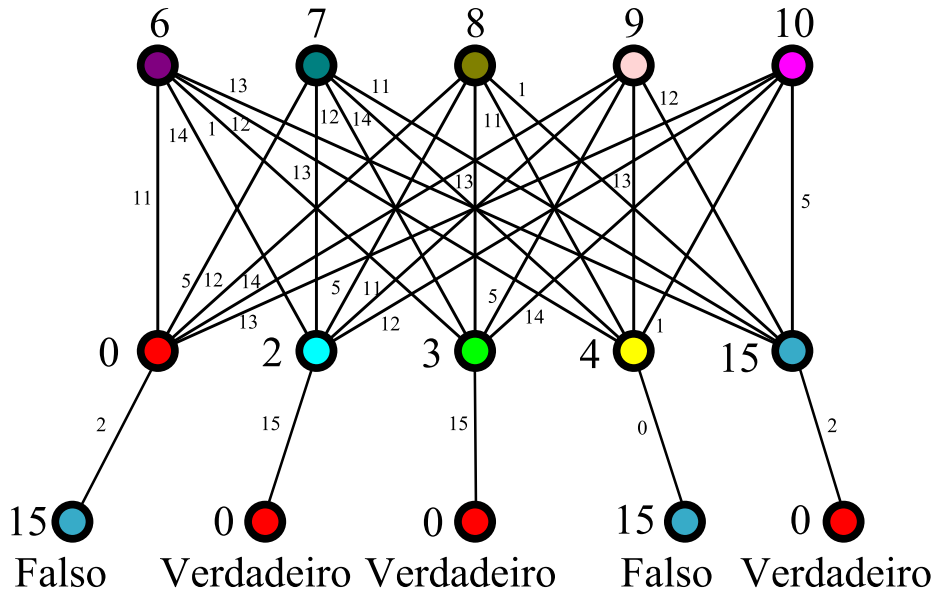


Figura 8.26: Atribuição de cores aos vértices do  $K_{5,5}$ .

**verdadeiras** ou **falsas**, respectivamente. A seguir, atribuímos cores aos vértices do  $K_{5,5}$  como descrito na Figura 8.26, só tome cuidado para o vértice que recebeu a cor 0 esteja conectado a um vértice que represente um literal **falso** na instância  $I$  e o vértice que recebeu a cor 15, esteja conectado a um vértice que represente um literal **verdadeiro**.

Faltam ainda os vértices e arestas das árvores de literais que ainda não receberam cores. Tal atribuição pode ser feita utilizando uma abordagem gulosa na ordenação respeitando os níveis da árvore de literal da Figura 8.27. Como ilustrado na Figura 8.27, só precisamos tomar cuidado em dois casos: **(a)** ao atribuirmos cores as vizinhanças dos vértices  $u$  e  $v$ , precisamos que  $f(u') \neq f(v')$ , mas como ainda temos dez cores disponíveis para os vértices e arestas em  $N(u) \cup N_E(u)$  e outras dez cores disponíveis para  $N(v) \cup N_E(v)$ , isso pode ser feito trivialmente; **(b)** nesse caso, precisamos que as cores do vértice  $x$  e das arestas  $xy$  e  $xz$  estejam nas cores disponíveis para as vizinhanças de ambos os vértices  $y$  e  $z$ , para tal, atribuímos as cores a esse vértice e arestas antes do resto das vizinhanças não coloridas. No pior caso, temos quatro cores disponíveis (doze cores em  $\{2, \dots, 13\}$  menos as oito cores de vértices e arestas das vizinhanças de  $y$  e  $z$  que já tiverem suas cores atribuídas), que são suficientes para colorir  $x$ ,  $xy$  e  $yz$ .

Note que esse grafo  $G$  é bipartido. As árvores e o grafo bipartido completo são claramente bipartidos. Além disso, não é difícil verificar que as arestas entre os vértices do  $K_{5,5}$  e as árvores não criam nenhum ciclo ímpar. Isso ocorre pois os caminhos entre os vértices que representam os literais com maior nível nas árvores de literais têm tamanho ímpar e, conectando dois desses caminhos com mais três vértices de outro grafo bipartido completo resulta em um novo caminho de tamanho

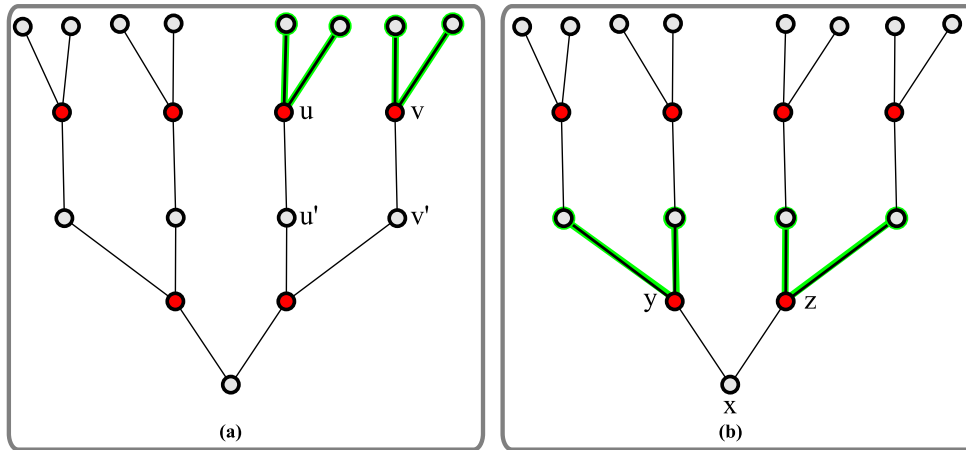


Figura 8.27: Atribuição de cores ao restante dos vértices das árvores de literais.

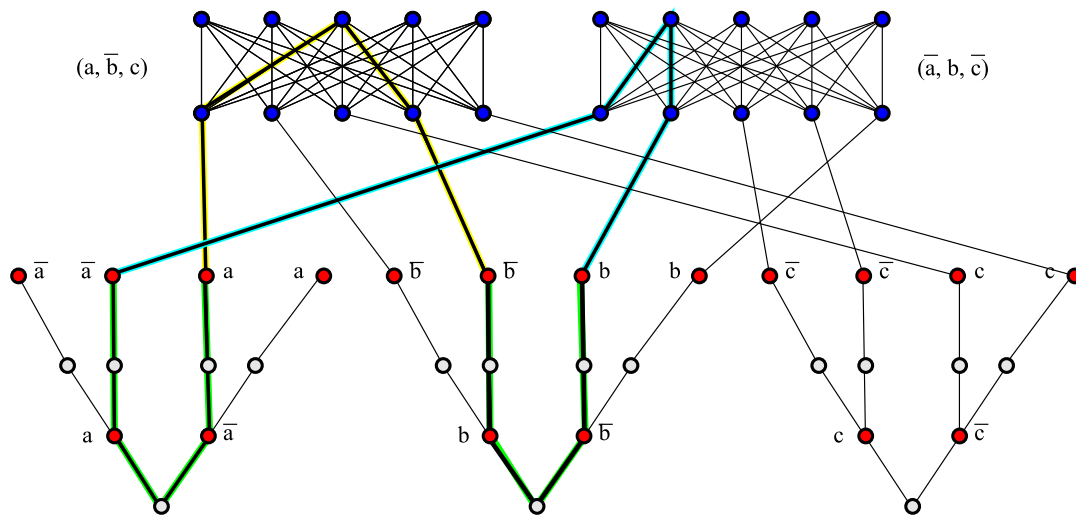


Figura 8.28: Ciclos pares no grafo  $G$ .

ímpar. No final, ao fechar um desses caminhos ímpares, incluímos mais três vértices, formando sempre um ciclo de tamanho par. A Figura 8.28 ilustra a formação desses ciclos pares.

Verificar se uma atribuição do grafo  $G$  é uma  $L(2, 1)$ -coloração total está obviamente em  $\mathcal{NP}$ . E, como mostramos que resolver se uma instância  $I$  do NAE 3-SAT é satisfeita é equivalente a decidir se um grafo bipartido especial, criado a partir dessa instância, tem  $\lambda_T = 15$ , nós afirmamos o seguinte teorema.

**Teorema 8.36** *O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a classe dos grafos bipartidos.*

Mudando o cenário, determinamos uma  $L(2, 1)$ -coloração na classe dos grafos das instâncias do problema NAE 3-SAT de forma trivial com  $\lambda = 10$ . Inicialmente, atribuímos as cores  $\{0, \dots, 10\}$  aos vértices dos  $K_{5,5}$  como descrito na Seção 3.7.1. Então, os vértices com grau  $\Delta$  das árvores dos literais recebem as cores 0 e 10 e,

em seguida, os outros recebem cores em  $\{0, \dots, 10\}$  de forma gulosa, utilizando a ordenação respeitando os níveis da árvore de literal da Figura 8.27, novamente, tomando cuidado no caso (a) para a cor de  $u'$  ser diferente da de  $v'$  e, no caso (b), para o vértice  $x$  receba a cor antes dos outros vizinhos de  $y$  e  $z$  ainda não coloridos.

Considere agora a classe  $\mathcal{C}$  dos grafos com 3 ou mais vértices universais. Para qualquer grafo  $G$ , uma pessoa pode construir um grafo  $G' \in \mathcal{C}$  adicionado três (se  $n$  for ímpar) ou quatro (se  $n$  for par) vértices universais. Griggs e Yeh [44] mostraram que o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo na classe de grafos  $\mathcal{C}$ . Entretanto, como esses grafos são subgrafos de um grafo completo,  $\lambda_T \leq 2n$  e, como existem três ou mais vértices universais,  $\lambda_T \geq 2\Delta + 2 = 2n$ . Portanto, se  $G \in \mathcal{C}$ , então  $\lambda_T(G) = 2n$ . A Tabela abaixo resume os resultados apresentados nessa seção.

Classe	$\lambda$	$\lambda_T$
Grafos ciclo, grafos estrela, grafos completo	$\mathcal{P}$ [44]	$\mathcal{P}$ [*]
Grafos instância de NAE 3-SAT	$\mathcal{P}$ [*]	$\mathcal{NP}$ -completo [*]
Grafos com 3 ou mais vértices universais	$\mathcal{NP}$ -completo [44]	$\mathcal{P}$ [*]
Grafos bipartidos	$\mathcal{NP}$ -completo [11]	$\mathcal{NP}$ -completo[*]

Tabela 8.2: Diferenças nas complexidades de determinar  $\lambda$  e  $\lambda_T$  em classes de grafos

## 8.9 Perspectivas

Restam ainda alguns trabalhos em aberto descritos nesse capítulo. Por exemplo, a caracterização dos dois casos restantes em grafos  $k$ -partidos completos, determinando em que condições ocorrem os dois valores possíveis de  $\lambda_T$ . E, a seguir, terminarmos os estudos nas árvores, já que mesmo obtendo resultados em diversas situações, ainda faltam casos não totalmente caracterizados. Além disso seria de grande interesse verificar a equivalência da versão clássica da conjectura de Griggs e Yeh, sobre  $L(2, 1)$ -coloração, com a sua nova versão, para  $L(2, 1)$ -coloração total de grafos.

Outra vertente é realizarmos um estudo mais profundo em relação a complexidade desse novo tipo de coloração em outras classes de grafos. Ou procurarmos outros *gadgets* que nos permitam reduzir o valor de  $\lambda_T$  para o qual provamos que o problema é  $\mathcal{NP}$ -completo, que atualmente é de  $\lambda = 15$  em grafos bipartidos com  $\Delta = 7$ .

Em relação a variações de  $L(2, 1)$ -coloração total, seria interessante investigarmos a  $L(h, p)$ -coloração total nas classes estudadas nesse capítulo. Outra variante possível é em relação ao grafo de entrada, e.g., se aplicarmos a  $L(2, 1)$ -coloração total em um multigrafo  $G$ . De acordo, a trataríamos como uma  $L(2, 1)$ -coloração do

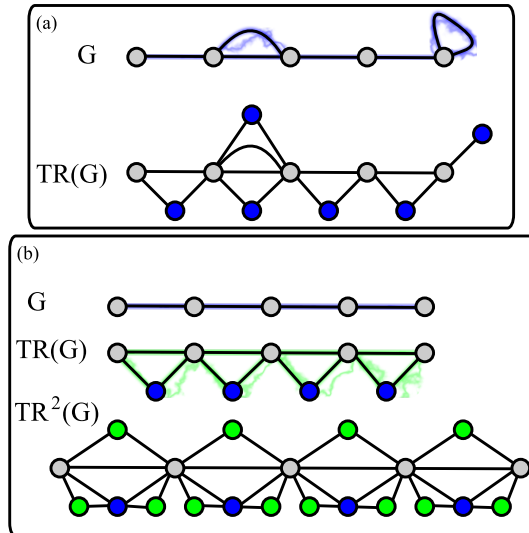


Figura 8.29: (a)  $L(2,1)$ -coloração total em um multigrafo; e (b)  $TR(TR(G))$ .

grafo  $TR(G)$ , agora obtido trocando uma aresta múltipla por vários triângulos. Nesse caso, guardaríamos frequências extras para as arestas, em vez de apenas uma. Ou então, aplicaríamos o operador  $TR$  repetidamente a um grafo, ou seja,  $TR^2(G) = TR(TR(G))$ , que é o grafo obtido ao substituir as arestas de  $G$  por grafos de Hajos. De maneira análoga, uma  $L(2,1)$ -coloração total<sup>p</sup> de um grafo seria diretamente relacionada a uma  $L(2,1)$ -coloração obtida por aplicar o operador  $TR$   $p$  vezes. A Figura 8.29 (a) ilustra uma  $L(2,1)$ -coloração total de um multigrafo e a (b) uma operação  $TR(TR(G))$ .

Fica claro então que o estudo desse novo tipo de coloração é vasto e ainda há muito a ser feito. Contudo, acreditamos que já demos um pequeno passo, conseguindo bons resultados sobre o assunto.



# Capítulo 9

## Relação entre colorações

Neste capítulo relacionamos  $L(2, 1)$ -coloração com outros tipos de colorações. Apresentamos também uma prova da  $\mathcal{NP}$ -completude para o problema  $(2\omega - 2) - L(2, 1)$ -COLORAÇÃO, utilizando o problema  $k$ -COLORAÇÃO. E, mostramos como adaptar os *gadgets* para uma versão mais restrita de coloração, a LISTA COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Ao fim, enunciamos uma variação de  $L(2, 1)$ -coloração que é polinomialmente equivalente a  $k$ -CHOOSABILITY, sendo assim  $\Pi_2^p$ -completo.

Vale lembrar que uma  $L(2, 1)$ -coloração total de um grafo  $G$  tem uma equivalência com uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $TR(G)$ . Desta forma, transferimos todos os resultados nos grafos  $G$  do Capítulo 8 para as  $L(2, 1)$ -coloração nas respectivas classes de  $TR(G)$ .

### 9.1 $(2\omega - 2) - L(2, 1)$ -coloração é $\mathcal{NP}$ -completo

Existem diversos trabalhos na literatura sobre a complexidade do problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO. Fiala et al. [34] provaram que  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo para um  $k$  fixo. Essa prova foi feita mostrando que o problema COLORAÇÃO  $BW(r)$  em grafos regulares é equivalente ao  $(\Delta + 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO em uma determinada classe de grafos (formada pelos grafos obtidos desses grafos regulares trocando suas arestas por alguns *gadgets*). Já Bodlaender et al. [11] mostraram que o problema  $n$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a grafos *split*, mas para as instâncias tratadas, temos  $n = \Delta - 1$ . Essa prova foi feita mostrando uma equivalência com o problema CAMINHO HAMILTONIANO em grafos *split*.

Um problema  $\mathcal{NP}$ -completo que é bem conhecido é  $k$ -COLORAÇÃO dos vértices de um grafo [37]. Nesta seção, mostramos que  $k$ -COLORAÇÃO  $\leq_P (2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO, ou seja, um grafo  $G$  tem uma coloração utilizando  $k$  cores se, e somente se, um grafo  $H$ , obtido de  $G$  em tempo polinomial, tem uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span\ 2\omega(H) - 2$ . Como  $2\omega(H) - 2$  é um limite inferior para  $\lambda$  (pois precisamos

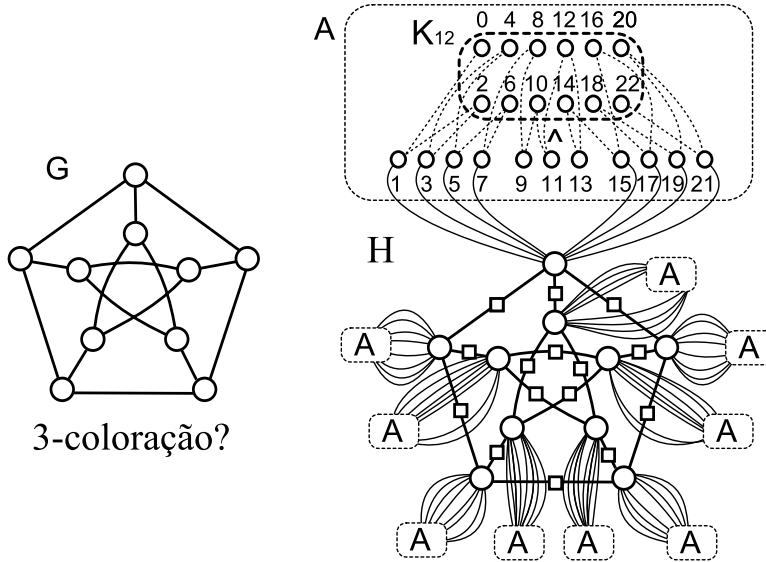


Figura 9.1: Criação do grafo  $H$ .

de  $span\ 2\omega(H) - 2$  para atribuir cores ao subgrafo completo de tamanho  $\omega(H)$ ), o problema é equivalente a decidir se  $\lambda(H) = 2\omega(H) - 2$ .

Antes de mais nada,  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO está claramente em  $\mathcal{NP}$ , pois dado um certificado (uma atribuição de cores aos vértices do grafo), checamos se este é uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span\ k$  trivialmente em  $O(n^3)$ . Basta verificarmos para cada vértice  $v$ , se as cores de vértices em  $N(v)$  diferem de pelo menos duas unidades da cor de  $v$  e se os vértices em  $N_2(v)$  têm cores diferentes da de  $v$ .

Seja  $G$  um grafo instância da  $k$ -COLORAÇÃO. Crie um grafo  $A$ , inicialmente como o grafo completo de tamanho  $4\Delta(G) + 3 - k$ . Encontre um caminho máximo  $(v_1 \dots v_x)$  em  $A$  e, para cada  $1 \leq i \leq x - 1$ , adicione a  $A$  um vértice  $w_i$  adjacente a todos os vértices de  $A$  exceto  $v_i$  e  $v_{i+1}$ .

Defina um grafo  $H$ , inicialmente como o grafo incidente de  $G$ . Adicione agora  $|V(G)|$  cópias  $A_j$  de  $A$  em  $H$ , mapeando cada uma delas a um vértice original  $u_j$  de  $G$  em  $H$ , para  $1 \leq j \leq |V(G)|$ . Finalmente, para cada  $A_j$ , crie arestas  $w_i u_j$  e  $w_{x-i} u_j$ ,  $1 \leq i \leq \frac{x-1-k}{2}$ . A Figura 9.1 ilustra a confecção desse grafo  $H$ . Qualquer vértice  $u_i$  de  $G$  em  $H$  só recebe cores em  $\{9, 11, 13\}$  em uma  $L(2, 1)$ -coloração e, no final dessa seção, mostramos que essas cores são mapeadas a uma 3-coloração do grafo  $G$  original.

**Lema 9.1** *Existem apenas duas atribuições possíveis para uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $H[A]$  com  $span\ 2\omega(H) - 2$ .*

**Prova.** Claramente, os vértices do subgrafo completo  $A$  recebem todas as cores pares em  $\{0, \dots, 2\omega(H) - 2\}$ . Suponha por contradição que  $w_1$  recebe uma cor  $f(w_1) \notin \{1, 2\omega(H) - 1\}$ . Então,  $f(w_1)$  e  $f(w_2)$  recebem cores em  $\{f(w) - 1, f(w) + 1\}$  e todos os outros vértices  $w_2, w_l$ , e  $w_l$  com  $2 \leq l \leq x - 1$  e  $w_x$  recebem cores

consecutivas. Contudo, existe um vértice  $v_p$  com:  $f(w_p) = 2\omega(H) - 2$  e  $f(w_{p+1}) = 0$  ou;  $f(w_p) = 0$  e  $f(w_{p+1}) = 2\omega(H) - 2$  que não tem cor disponível, um absurdo.

Assim,  $f(w_1) \in \{1, 2\omega(H) - 1\}$ , sem perda de generalidade, seja  $f(w_1) = 1$ . Definimos a atribuição  $f(v_1) = 0, f(v_2) = 2, \dots, f(v_x) = 2\omega(H) - 2$  e  $f(w_2) = 3, f(w_3) = 5, \dots, f(w_{x-1}) = 2\omega(H) - 1$ . Caso contrário, temos  $f(v_1) = 2\omega(H) - 2, f(w_1) = 2\omega(H) - 1, f(v_2) = 2\omega(H) - 2, \dots, f(w_{x-1}) = 1, f(v_x) = 0$ .  $\square$

**Lema 9.2** *O grafo  $H$  tem uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span\ 2\omega(H) - 2$  se, e somente se,  $G$  tem uma coloração com  $k$  cores.*

**Prova.** Pelo Lema 9.1, o subgrafo  $A$  só tem duas atribuições possíveis. Em ambos os casos, considerando apenas a atribuição de  $H[A_j]$  para  $1 \leq j \leq |V(G)|$ , todos os vértices  $u_j$  de  $G$  em  $H$  tem as mesmas  $k$  cores disponíveis. Além disso, um vértice da subdivisão das arestas de  $G$  em  $H$  tem, no máximo,  $3 + 3 + 4(\Delta(G) - 1) + \omega(H) - 1 - k = 4\Delta(G) + 1 + \omega(H) - k$  cores proibidas,  $4\Delta(G) + 2$  provenientes de vértices e arestas da subdivisão e as outras  $\omega(H) - 1 - k$  provenientes dos vértices de dois subgrafos  $A$ . Portanto, se  $\lambda = 2\omega(H) - 2 \geq 4\Delta(G) + 1 + \omega(H) - k$ , então existe pelo menos uma cor disponível para esses vértices, e isso é válido pela construção de  $H$ .

( $\Rightarrow$ ) Cada vértice de  $G$  em  $H$  recebe uma das suas  $k$  cores disponíveis. E, se  $uv \in E(G)$ , então  $dist_H(u, v) = 2$ , o que implica que as cores de  $u$  e  $v$  são diferentes. Desta forma, mapeamos essas mesmas  $k$  cores disponíveis a todos os vértices  $u_j$  de  $H$  para uma coloração de  $G$  utilizando  $k$  cores. Observe que é possível que um vértice de  $H$  criado pela subdivisão de  $G$  receba uma dessas  $k$  cores, entretanto, como existe uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span\ 2\omega(H) - 2$ , isso só ocorre quando não afeta a atribuição dos vértices de  $G$  em  $H$ , caso contrário, esse vértice da subdivisão teria recebido uma outra de suas cores disponíveis, que não atrapalharia com o  $span$  desejado.

( $\Leftarrow$ ) Conseguimos uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $span\ 2\omega(H) - 2$  atribuindo as cores dos subgrafos  $A_j$  como descrito no Lema 9.1. A seguir, mapeamos as cores da coloração de  $G$  com  $k$  cores nos vértices de  $G$  em  $H$  para as  $k$  cores de vértices de  $A_j$  que não são adjacente a vértices  $u_j$ . Finalmente, atribuímos gulosamente as cores dos vértices restantes, que são subdivisões das arestas de  $G$  em  $H$  que, como verificado, têm pelo menos uma cor disponível quando o  $span$  é maior ou igual a  $4\Delta(G) + 1 + \omega(H) - k$ .  $\square$

Dessa forma, como o tamanho do grafo  $H$  é claramente polinomial em relação a  $G$ , enunciamos o seguinte teorema.

**Teorema 9.3** *O problema  $2\omega - 2$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo, mesmo quando a entrada são grafos  $H$ , obtidos de instâncias do problema da  $k$ -COLORAÇÃO.*

Sabemos agora como decidir se um grafo  $G$  qualquer tem uma  $k$ -coloração (e obter uma coloração com esse número de cores) verificando uma  $L(2, 1)$ -coloração do grafo  $H$ , obtido a partir de  $G$ , com  $\text{span } 2\omega(H) - 2$ .

Como COLORAÇÃO DE ARESTAS e  $k$ -COLORAÇÃO TOTAL de um grafo  $G$  admitem uma solução utilizando uma  $k$ -COLORAÇÃO do seu grafo linha  $L(G)$  e seu grafo total  $T(G)$ , respectivamente, estendemos a transformação polinomial para ambos. Isso também vale para  $k$ - $L(1, 1)$ -COLORAÇÃO de  $G$ , pois este admite solução utilizando uma  $k$ -COLORAÇÃO de  $G^2$ .

**Corolário 9.4** *Obtemos uma coloração com  $k$  cores de um grafo  $G$  usando uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $H$  com  $\text{span } 2\omega(H) - 2$ .*

**Corolário 9.5** *Obtemos uma coloração de arestas de um grafo  $G'$  como uma coloração de  $G = L(G')$  usando uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $H$  com  $\text{span } 2\omega(H) - 2$ .*

**Corolário 9.6** *Obtemos uma coloração total de um grafo  $G'$  com  $k$  cores como uma coloração de  $G = T(G')$  usando uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $H$  com  $\text{span } 2\omega(H) - 2$ .*

**Corolário 9.7** *Obtemos uma  $L(1, 1)$ -coloração de um grafo  $G'$  com  $k$  cores como uma coloração de  $G = G'^2$  usando uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $H$  com  $\text{span } 2\omega(H) - 2$ .*

## Relação de $(k - 1)$ - $L(1, 1)$ -coloração com $k$ -coloração total

Uma coloração total  $f$  de um grafo  $G$  é equivalente a uma  $L(1, 1)$ -coloração  $g$  do grafo incidente  $I$  de  $G$ . Em outras palavras, cada vértice e aresta em  $G$  corresponde a um vértice em  $I$  e, se  $uv \in E(G)$ , então  $\text{dist}_I(u, v) = 2$ ,  $\text{dist}_I(u, uv) = 1$  e  $\text{dist}_I(uv, v) = 1$ , ou seja, se temos uma  $L(1, 1)$ -coloração  $g$  de  $I$ , então  $g(u) \neq g(v)$ ,  $g(u) \neq g(vu)$  e  $g(uv) \neq g(v)$ , e definimos uma coloração total de  $G$  de acordo, com  $f(u) \neq f(v)$ ,  $f(u) \neq f(uv)$  e  $f(uv) \neq f(v)$ . Similarmente, se temos uma coloração total  $f$  de  $G$ , definimos uma  $L(1, 1)$ -coloração  $g$  de  $I$  mantendo as cores dos vértices como as mesmas cores dos vértices e arestas que esses representam em  $G$ . A Figura 9.2 ilustra essa relação.

Claramente, o grafo de incidência  $I$  de  $G$  é um grafo bipartido, já que qualquer ciclo em  $G$  corresponde a um ciclo com o dobro de tamanho em  $I$ , grafo de incidência de  $G$ . E, observe que uma coloração total começa utilizando cores em  $\{1, \dots, k\}$ , enquanto uma  $L(1, 1)$ -coloração utiliza cores em  $\{0, \dots, k - 1\}$ .

**Corolário 9.8** *Obtemos uma coloração total de um grafo  $G$  com  $k$  cores como uma  $L(1, 1)$ -coloração com  $\text{span } k - 1$  do grafo de incidência  $I$  de  $G$ .*

Uma consequência dessa relação é a transferência de provas de  $\mathcal{NP}$ -completude da  $k$ -COLORAÇÃO TOTAL em uma classe de grafos para  $(k - 1)$ - $L(1, 1)$ -COLORAÇÃO

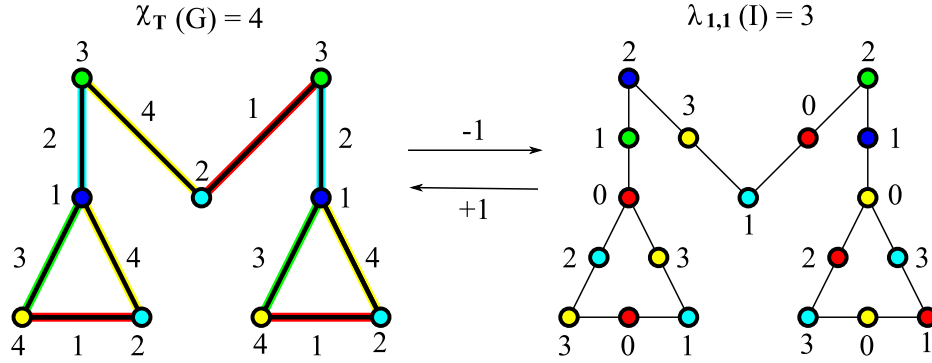


Figura 9.2: Coloração total de  $G$  relacionada a uma  $L(1, 1)$ -coloração de  $I$ .

na classe dos seus grafos de incidência. Por exemplo, um grafo é *livre de corda única* se não tem como subgrafo induzido um ciclo adicionado de uma aresta. Raphael Machado e Celina Figueiredo [69] provaram que  $(\Delta + 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada são grafos bipartido livre de corda única. Como o grafo de incidência  $I$  de um grafo bipartido livre de corda única continua bipartido livre de corda única, essa prova de  $\mathcal{NP}$ -completude também vale para  $k$ - $L(1, 1)$ -COLORAÇÃO.

**Corolário 9.9** *O problema  $k$ - $L(1, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo para  $k \leq \Delta$  mesmo quando a entrada é restrita a grafos bipartidos livres de corda única.*

## Relação com lista coloração de vértices

Continuando nossos estudos na relação com outros tipo de colorações, adaptamos os nossos *gadgets* para apresentar uma transformação polinomial do problema LISTA COLORAÇÃO no  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO.

### LISTA COLORAÇÃO

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e uma lista de cores para cada  $v \in V$ .

**Pergunta:** Existe uma atribuição aos vértices utilizando suas listas de cores que seja uma coloração de  $G$ ?

A ideia principal é identificar as cores proibidas aos vértices de  $G$  em  $H$ . Para tal, fixamos as  $L(2, 1)$ -colorações dos subgrafos  $H[A_j]$  em  $H$ . Assim, construímos “florestas” de vértices conectando metade das  $k$  cores disponíveis aos vértices de  $G$  em  $H$ . Essas florestas implicam que as cores dos vértices em  $A_j$  serão alternadas e, entarão, estão identificadas. Observe que precisamos tomar cuidado especial na escolha do novo tamanho dos subgrafos completos  $A_j$ , pois agora não somente precisamos cobrir as cores das listas dos vértices (que “” não são limitadas”) como

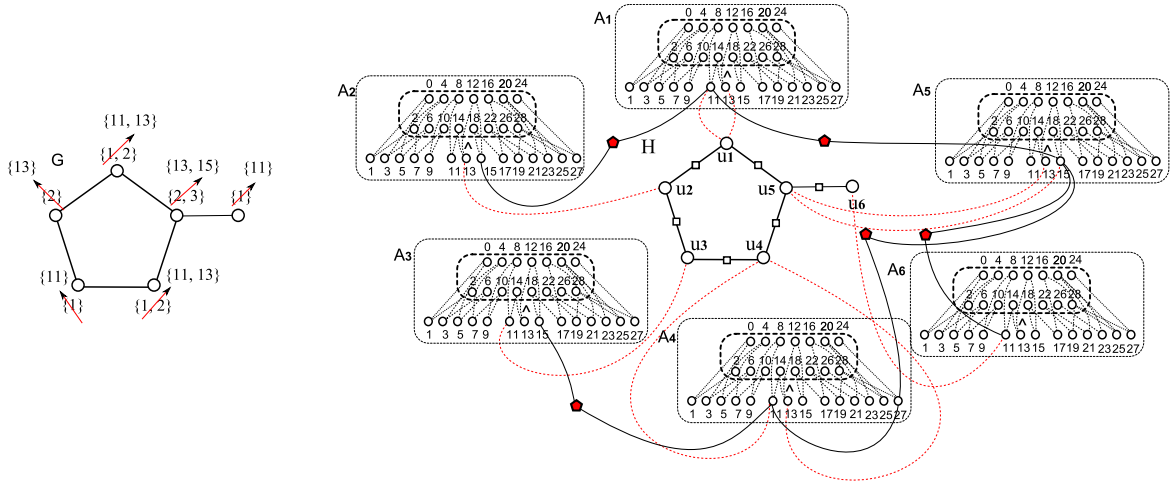


Figura 9.3: Criação do novo grafo  $H$ .

também precisamos de novas cores para atribuímos aos vértices das florestas recentemente criados, não esquecendo do restante dos vértices de  $H$  que recebem novas cores proibidas.

O número de cores proibidas para um vértice  $u_j$  de  $G$  em  $H$  proveniente de vértices de  $A$  é  $2\omega + 3 - |L(u_j)|$ , desconsiderando os vértices da subdivisão e os dos conectores das florestas. O número máximo de cores proibidas para um vértice da subdivisão de  $G$  em  $H$  é  $4\Delta(G) + 2 + \omega - 1$ . E, um vértice das florestas de conectores têm todas as cores proibidas a menos das ímpares em  $\{0, \dots, 2\omega - 2\}$  que não estão disponíveis a vértices de  $G$ . Consideremos ainda as cores proibidas provenientes de outros  $\Delta(G) - 1$  vértices de florestas de conectores que possivelmente incidem em um mesmo vértice em comum. Dessa forma, precisamos que  $\omega - 1 - p \geq \Delta(G)$ . Portanto,  $\omega \geq \max\{p + \Delta + 1, 4\Delta(G) + 3\}$ .

A Figura 9.3 ilustra a construção do novo grafo  $H$  com as florestas de conectores. Nesta, temos todas as arestas entre os vértices de cores ímpares em  $A_j$  e o vértice  $u_j$  para  $1 \leq j \leq |V(G)|$  e, entre os vértices em  $A_j$  a menos entre aqueles interligados por arestas pontilhadas. Os vértices representados por pentágonos são os da floresta de conectores que foram adicionados ao *gadget* original para podermos identificar as cores intermediárias nesses grafos  $A_j$  e, conseqüentemente, formarmos a lista de cores desejada para  $u_j$ .

Note que quando dizemos “florestas” é porque o subgrafo induzido por esses novos vértices conectores formam uma floresta. E, quando falamos que as cores das listas dos vértices “não são limitadas”, na verdade sabemos que essas cores são de alguma forma limitada, i.e., os vértices com  $\Delta + 1$  cores ou mais em suas listas podem ter suas cores trivialmente atribuídas de forma gulosa (ou seja, ignoramos esse vértice, que recebe sua cor ao fim da atribuição), dessa forma, utilizamos no máximo a cor  $n\Delta$  e, qualquer cor nessas listas acima desse valor pode ser mapeada

para cores em  $\{1, \dots, n\Delta\}$ .

**Corolário 9.10** *Obtemos uma lista coloração de um grafo  $G$  usando uma  $L(2, 1)$ -coloração de  $H$  com  $\text{span } 2\omega(H) - 2$ .*

## 9.2 $L(2, 1)$ -coloração quântica é $\Pi_2^p$ -completo

Nesta seção mostramos que uma variação da  $L(2, 1)$ -coloração é equivalente ao problema  $k$ -CHOOSABILITY, que sabemos ser  $\Pi_2^p$ -completo, cf. [40].

### $k$ -CHOOSABILITY

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ .

**Pergunta:** Existe uma lista coloração dos vértices de  $G$ , onde toda lista tem tamanho exatamente  $k$ , em qualquer distribuição de cores nessas listas?

Definimos agora uma  $L(2, 1)$ -coloração quântica de um grafo da mesma forma que uma  $L(2, 1)$ -coloração, só que o seu grafo de entrada  $G_q = (V, E \cup E_q)$  tem  $V$  e  $E$  semelhantes a um grafo comum mais  $E_q$ , que são um subconjunto de arestas de  $G_q$  que podem ou não existir segundo alguma regra. Uma amostra de  $G_q$  é uma das possibilidades de grafos gerados pelas regras de  $E_q$ .

### $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA

**Instância:** Um grafo  $G_q = (V, E \cup E_q)$ , um inteiro  $k$  e um conjunto de regras para existência de arestas em  $E_q$ .

**Pergunta:** Existe uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $\text{span } k$  em todas as amostras de  $G_q$ ?

Seja  $H_q$  criado a partir de  $G$ , um grafo instância da  $k$ -CHOOSABILITY, como descrito para LISTA COLORAÇÃO. Considere a regra de existência de arestas  $E_q(H_q)$  como escolher  $p - k$  das  $p$  possíveis arestas entre os vértices de  $A_j$  e  $u_j$ , onde  $p$  é a maior cor utilizada por uma das listas de  $G$ . Portanto, as amostras de  $H_q$  correspondem a lista colorações de  $G$  com listas diferentes de tamanho  $k$  para os vértices. E, se temos uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $\text{span } 2\omega(H_q) - 2$  para todas as amostras de  $H_q$ , então existe uma lista coloração para todas as listas possíveis com tamanho  $k$  de  $G$ .

Como existe uma transformação polinomial entre  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA e  $k$ -CHOOSABILITY, e  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA está em  $\Pi_2^p$  (já que a instância é verdadeira se e somente para todas as amostras de  $G_q$  não existe uma  $L(2, 1)$ -coloração com  $\text{span}$  maior que  $k$ ), então enunciamos o seguinte teorema.

**Teorema 9.11** *O problema  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA é  $\Pi_2^P$ -completo.*

Por outro lado, se pensarmos o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA onde  $H_q$  é um grafo ciclo quântico ou um grafo caminho quântico, independente da regra de existência das arestas  $E_q$ , os grafos resultados têm como componente conexas grafos caminhos (ou um ciclo se todas as arestas  $E_q$  do ciclo existirem), que sabemos ter  $\lambda \leq 4$ . A decisão da  $3$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA nesse caso vai depender se a regra de existência das arestas de  $E_q$  permite ou não a existência de um caminho de tamanho três. Similarmente, a decisão da  $2$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA vai depender se a regra para  $E_q$  permite caminhos de tamanho maior que um.

**Corolário 9.12** *O problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA é polinomial quando o grafo de entrada é restrito a grafos caminhos quânticos ou grafos ciclos quânticos.*

Sabemos que as árvores têm  $\Delta + 1 \leq \lambda \leq \Delta + 2$ . Seja  $T$  a árvore obtida de uma árvore quântica  $T_q$  com a existência de todas as arestas de  $E_q$ . A decisão da  $(\Delta(T)+2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA de uma árvore quântica  $T_q$  pode ser feita trivialmente, independente da regra para  $E_q$ . Entretanto, a da  $(\Delta(T) + 1)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO QUÂNTICA dessa árvore já é muito mais complexa. Se  $\lambda(T) = \Delta(T) + 1$  a resposta é simples, contudo, se  $\lambda(T) = \Delta(T) + 2$ , precisamos verificar se em todas as amostras de  $T_q$  a retirada das arestas de  $E_q$  seguindo a regra determinada transforma os subgrafos árvores da amostra de  $T_q$  em árvores com  $\lambda \leq \Delta(T) + 1$ . Se o número de amostras é limitado polinomialmente, decidimos esse problema utilizando o algoritmo para árvores em tempo polinomial. Entretanto, se o número de amostras gerados pelas regras de existência das arestas de  $E_q$  for exponencial, ainda não sabemos a sua complexidade.

### 9.3 Perspectivas

Nesse capítulo apresentamos algumas relações da  $L(2, 1)$ -coloração com diversos outros tipos de colorações de grafos, por exemplo, coloração de vértices, coloração de arestas e coloração total. Tais relações nos permitem transportar resultados já estabelecidos para estas colorações mais conhecidas para o nosso problema. Particularmente, provamos que o problema  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo relacionando-o com o problema  $k$ -COLORAÇÃO.

A Figura 9.4 detalha as relações entre as colorações vistas nesse capítulo. Uma coloração está acima da outra com uma seta significa que, se tratarmos a coloração de cima na classe dos grafos que rotula a seta, resolveremos a coloração de baixo para



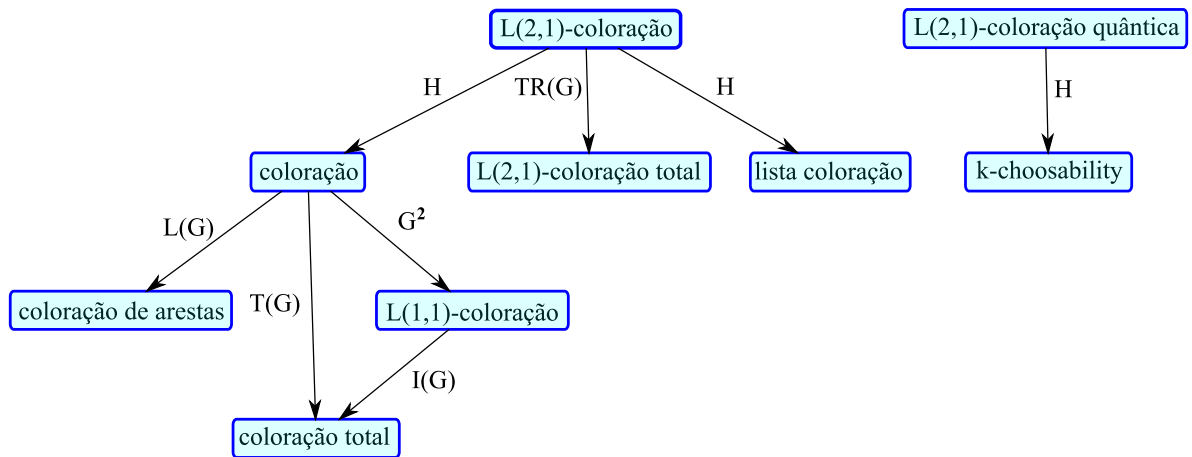


Figura 9.4: Relações entre colorações.

qualquer grafo. Fica em aberto encontrar novos resultados sobre estas colorações de grafos que possam ser estendidas às  $L(2, 1)$ -colorações usando essas relações.

Outras provas anteriores na literatura restringiam os valores do *span* da  $L(2, 1)$ -coloração em função de  $\Delta$  e não no parâmetro  $\omega$ . Além disso, provamos que  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a entrada é restrita a classe dos grafos  $H$ . E, essa classe não é superclasse de nenhuma em provas conhecidas de  $\mathcal{NP}$ -completude de  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO.

Achamos também que é importante continuar os estudos sobre  $L(2, 1)$ -coloração quântica, a qual provamos ser  $\Pi_2^p$ -completo, já que são poucos os problemas combinatórios conhecidos que pertencem a essa classe de complexidade cf. [62], como 3-CHOOSABILITY e o problema de computar o número de Ramsey generalizado. Acreditamos que seja possível obtermos novos resultados, tanto algoritmos polinomiais, quanto provas de  $\mathcal{NP}$ -completude, dependendo das restrições dos grafos de entradas e das regras de existência das arestas em  $E_q$ .

# Capítulo 10

## Conclusões

Mesmo sendo estudado por décadas, existem poucas classes de grafos onde é possível obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima de forma eficiente (vide Tabela 3.2). A ideia inicial para essa tese era a de conseguir desenvolver novos algoritmos para classes de grafos. Nesse sentido obtivemos êxito, já que incluímos os grafos *split* permutação e grafos  $(q, q - 4)$  com  $q$  fixo nas classes de grafos para as quais determinamos uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em tempo polinomial. Note que uma superclasse dos grafos  $(8, 4)$  são os grafos *brittle*. Esta por sua vez também é superclasse dos grafos intervalo próprio. Como os grafos *split* permutação são grafos de intervalo, seria interessante continuar esses estudos e tentar obter um algoritmo polinomial para os grafos *brittle*, ou pelo menos para grafos intervalo próprio.

Outro tema dessa tese é o de estabelecer limites para o valor de  $\lambda$  em classes de grafos. A conjectura de Griggs e Yeh ainda está em aberto, e não conhecemos um limite justo deste parâmetro para grafos. Entretanto, estabelecemos diversas famílias de grafos, como grafos com  $b$ -núcleo ou *treewidth* limitados, em que a conjectura é verdadeira, reduzindo as possibilidades de contraexemplos. Além disso, realizamos um primeiro estudo em grafos aleatórios e melhoramos alguns limites conhecidos para grafos que são superclasses de árvores.

Resolvemos então dedicar nossos estudos ao inexplorado e, como sentimos falta de uma versão do problema em que cores fossem atribuídas não somente a vértices, mas também a arestas, definimos a  $L(2, 1)$ -coloração total de grafos. Também notamos a necessidade de estabelecer relações entre a  $L(2, 1)$ -coloração e outros tipos de colorações de grafos. Verificamos então tais relações, o que nos permitiu transportar resultados já conhecidos de outras colorações para  $L(2, 1)$ -coloração.

A partir de agora, descrevemos resumidamente os resultados obtidos na tese. O início desse trabalho contém uma coletânea de informações necessárias para o bom entendimento do texto. Com essas informações, traçamos metas, escolhendo aonde poderíamos avançar no estudo da arte da  $L(2, 1)$ -coloração.

O nosso primeiro desafio foi elaborar um algoritmo eficiente para obter uma

$L(2, 1)$ -coloração ótima em uma classe de grafos. Conseguimos obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos *split* permutação em tempo  $O(n^3)$  e determinamos  $\lambda$  com complexidade linear. Tal resultado é interessante, já que o problema da  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo na classe dos grafos *split* [11] e ainda está em aberto para a classe dos grafos permutação [2]. Esse trabalho foi apresentado no Workshop Latino-Americano de Cliques 2010 [26], em Itaipava, RJ.

Então, resolvemos dar um passo atrás, e voltar a um trabalho nosso mais antigo. Utilizando o resultado para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em grafos  $P_4$ -tidy, elaboramos um algoritmo *FPT* para grafos  $(q, q - 4)$  que encontra uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima em tempo linear, trabalho feito em conjunto com o Professor Rudini Sampaio da UFC e seu aluno Nicolas Martins. Inicialmente, determinamos um método mais elegante para encontrar uma  $L(2, 1)$ -coloração nos grafos aranha do que o anteriormente feito em [81], que consistia na verificação de casos. Em seguida, desenvolvemos um algoritmo para encontrar  $pv(G)$  em grafos  $(q, q - 4)$  e mostramos como alterá-lo para encontrar uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima. Ao fim, determinamos limites superiores para o valor de  $\lambda$  em grafos nessa classe. Esses resultados foram apresentados no SBPO 2011 [30], em Ubatuba - SP.

Em seguida, buscamos classes de grafos que modelassem cenários mais práticos para o problema. Escolhemos então o famoso modelo dos grafos  $G(n, p)$ , criada por Erdős and Rényi [33]. Esse estudo foi feito em conjunto com o Prof. Daniel Rattón. Realizamos diversos testes de casos para esses grafos, obtendo indícios que o limite superior de  $\lambda$  em uma  $L(2, 1)$ -coloração nessa classe é constante em relação a  $\Delta$ . Não satisfeitos apenas com essa bateria de testes, buscamos uma base teórica que fundamentasse esse resultado. Como consequência, determinamos um limite superior para  $\lambda$  em grafos com  $b$ -núcleo limitados que nos permitiu realizar uma análise no valor desse parâmetro para amostras dos grafos aleatórios  $G(n, p)$ . Essas provas corroboram os resultados experimentais obtidos com o método de McDiarmid do Teorema 3.8 para uma  $L(2, 1)$ -coloração em amostras desses grafos, utilizando a ordenação dos vértices feita pelo algoritmo que encontra os  $b$ -núcleos. Indo além, determinamos famílias de grafos com  $b$  limitado onde a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira. Os resultados desse trabalho foram apresentados no Workshop Latino-Americano de Cliques 2012 [27], em Buenos Aires, Argentina.

Continuamos, então, com a obtenção de limites superiores de  $\lambda$ , tratando agora superclasses de árvores. Neste, obtemos resultados em  $L(2, 1)$ -colorações nos grafos  $k$ -árvores, melhorando o limite superior conhecido para  $\lambda$  e nos grafos com *treewidth* limitado, onde estabelecemos um limite superior alternativo. Este último acabou delimitando outra família de grafos com *treewidth* limitado onde a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira. E, realizamos um estudo nos grafos blocos, onde desenvolvemos um algoritmo linear para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima na subclasse

$\beta$ , quando  $\Delta$  é fixo. Esse estudo na subclasse dos grafos blocos acabou evidenciando a natureza de outro tipo de coloração, a  $L(2, 1)$ -coloração total. Os limites superiores para grafos  $k$ -árvores e para grafos com *treewidth* limitado foram obtidos em conjunto com o aluno de iniciação científica Gabriel Barros e aceitos para serem apresentados no CNMAC 2014, em Natal, RN.

Finalmente, resolvemos dar um passo a frente e dedicar nosso tempo no estudo da  $L(2, 1)$ -coloração total de grafos. Acredito que foi muito produtivo e que desenvolvemos uma série de resultados que detalharam essa atribuição em vários aspectos. Encontramos métodos eficientes para obter uma  $L(2, 1)$ -coloração total ótima em classes simples de grafos, como grafos completos, grafos ciclos e grafos rodas. Mostramos também como obter tal atribuição na classe dos grafos grades regulares. Investigando a sua complexidade, verificamos que o problema  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL é  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando a sua entrada é restrita a grafos bipartidos. Em seguida, verificamos que esta nova atribuição, que em diversos momentos é muito parecida com uma  $L(2, 1)$ -coloração, em outros pode variar drasticamente; em outras palavras, existem classes de grafos em que  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO e  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO TOTAL são polinomiais, outras que ambos são  $\mathcal{NP}$ -completo e algumas em que um é  $\mathcal{NP}$ -completo e o outro tem solução polinomial. Indo além, estabelecemos uma versão da Conjectura de Griggs e Yeh para a nova atribuição, mostrando a sua equivalência para os casos em que  $\Delta \geq 5$ , provando-a para grafos diâmetro 2 e determinando limites justos de  $\lambda_T$  em duas de suas subclasses, grafos *threshold* e cografos. E, estudamos  $L(2, 1)$ -coloração total nas árvores e em grafos  $k$ -partidos completos, verificando a existência de apenas dois valores possíveis consecutivos de  $\lambda_T$ , caracterizando diversos casos. Esses resultados foram apresentados, em partes, em dois congressos: CTW 2013 [28], em Enschede, Holanda e ICGT 2014 [29], em Grenoble, França.

Ao fim, começamos a pensar como seria a relação entre a  $L(2, 1)$ -coloração e outras colorações de grafos. Determinamos então que  $(2\omega - 2)$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO é  $\mathcal{NP}$ -completo mostrando uma transformação polinomial para o problema  $k$ -COLORAÇÃO. Dessa forma, encontrar uma  $L(2, 1)$ -coloração ótima com  $span \lambda(H) = 2\omega(H) - 2$  de grafos  $H$ , obtidos de instâncias da  $k$ -COLORAÇÃO, é equivalente a encontrar uma coloração de  $G$  com  $k$  cores. Em outras palavras,  $\lambda(H) = 2\omega(H) - 2$  se, e somente se, existe uma coloração de  $G$  com  $k$  cores. Automaticamente essa relação se estendeu a  $L(1, 1)$ -coloração, coloração de arestas e coloração total de um grafo, e com isso podemos transportar todas as provas de  $\mathcal{NP}$ -completude dessas colorações para  $L(2, 1)$ -coloração total, restrita a classe dos grafos  $H$ . Além disso, conseguimos alterar os nossos *gadgets* para relacionar  $k$ - $L(2, 1)$ -COLORAÇÃO com LISTA COLORAÇÃO DE VÉRTICES e, definimos uma variação da  $L(2, 1)$ -coloração, onde a versão decisão do problema se torna equivalente a  $k$ -CHOOSABILITY, um

conhecido problema  $\Pi_2^P$ -completo.

## Problemas em aberto

Alguns problemas deixados em aberto no texto, são listados de forma ordenada a seguir:

- 1 Existe algoritmo polinomial para obter uma  $L(2,1)$ -coloração ótima em grafos *split* comparabilidade? (Seção 4.3)
- 2 Qual é a constante  $c$  tal que as amostras de grafos  $G(n, p)$  são limitadas, com grande probabilidade, superiormente por  $\lambda \leq cn$ ? (Seção 6.5)
- 3 Como se comporta uma  $L(2,1)$ -coloração em grafos *preferential attachment* e grafos *Small-World*? (Seção 6.5)
- 4 Existem exemplos que justifiquem as cotas superiores do limite  $\lambda \leq 2b\Delta - b^2 + b$  na classe dos grafos  $b$ -núcleo limitados? (Seção 6.5)
- 5 Existem exemplos que justifiquem as cotas superiores do limite  $\lambda \leq 3\Delta + q - \omega(G \setminus H_2)$  na classe dos grafos  $(q, q - 4)$ ? (Seção 5.5)
- 6 Existem exemplos que justifiquem as cotas superiores do limite  $\lambda \leq \Delta(tw + 1)$  na classe dos grafos com *treewidth* limitado  $tw$ ? (Seção 7.5)
- 7 A conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira para grafos com *treewidth* 3? (Seção 7.5)
- 8 O problema  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO na classe grafos blocos  $\beta$  é  $\mathcal{NP}$ -completo? Em outras palavras  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO TOTAL é  $\mathcal{NP}$ -completo nas árvores? (Seção 7.5)
- 9 Caracterizar os casos restantes de uma  $L(2,1)$ -coloração total ótima em grafos  $k$ -partidos completos. (Seção 8.9)
- 10 Caracterizar os casos restantes de uma  $L(2,1)$ -coloração total ótima nas árvores. (Seção 8.9)
- 11 Estender a prova de  $\mathcal{NP}$ -completude da  $k$ - $L(2,1)$ -COLORAÇÃO TOTAL em outras classes de grafos ou para valores de  $k$  além de 15. (Seção 8.9)
- 12 Provar a equivalência da versão clássica da conjectura de Griggs e Yeh com a sua nova versão (para  $L(2,1)$ -coloração total), quando  $3 \leq \Delta \leq 4$ . (Seção 8.9)

**13** Estudar  $L(2, 1)$ -coloração total<sup>p</sup>, obtida aplicando o operador  $TR$   $p$  vezes a um grafo. (Seção 8.9)

**14** Estudar  $L(2, 1)$ -coloração total em multigrafos. (Seção 8.9)

**15** Obter novos resultados em colorações de grafos que possam ser estendidos a uma  $L(2, 1)$ -coloração, utilizando as relações obtidas no Capítulo 9. (Seção 9.3)

**16** Estudar  $L(2, 1)$ -coloração em grafos quânticos. (Seção 9.3)

## Participações em congressos

- 5th Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium  
LAGOS 2009 - Gramado-RS - 2009  
Apresentando: On  $L(2, 1)$ -coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graph
- 4th Latin American Workshop on Cliques in Graphs  
LAWCG 2010 - Itaipava-RJ - 2010  
Apresentando: On  $L(2, 1)$ -coloring split permutation graphs
- 30th Congresso da Sociedade Brasileira de Computação  
CSBC 2010 - Belo Horizonte-MG - 2010  
Apresentando:  $L(2, 1)$ -colorações: algoritmos e limites superiores em classes de grafos
- 8th French Combinatorial Conference  
8FCC - Orsay - França - 2010  
Apresentando: On  $L(2, 1)$ -coloring  $P_4$ -tidy graphs
- 4th Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium  
LAGOS 2011 - Bariloche - Argentina - 2011  
Ouvinte
- CALIN Seminars  
CALIN 2011 - Paris - França - 2011  
Apresentando: Efficient solutions for the  $L(2, 1)$ -coloring problem on classes of graphs
- 5th Latin American Workshop on Cliques in Graphs  
LAWCG 2012 - Open Door - Argentina - 2012  
Apresentando: On  $L(h, k)$ -coloring  $b$ -core limited graphs

- 12th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization  
CTW 2013 - Enschede - Holanda - 2013  
Apresentando: On Total  $L(2, 1)$ -coloring
- 9th International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics  
ICGT 2014 - Grenoble - França - 2014  
Apresentando: On total  $L(2, 1)$ -coloring regular grids and diameter two graphs

## Publicações durante o doutorado

- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
On  $L(2, 1)$ -coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graph  
(resumo estendido)  
Proceedings of the 5th LAGOS, Gramado, RS  
Electronic Notes in Discrete Mathematics, v. 35, p. 299-304, 2009  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2009.11.049>
- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
On  $L(2, 1)$ -coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graph  
Discrete Applied Mathematics, v. 160, p. 2655-2661, 2012  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2012.03.018>
- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
On  $L(2, 1)$ -coloring of  $P_4$ -tidy graphs (resumo)  
Proceedings of the 8th FCC, Orsay, France, 2010.
- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
On  $L(2, 1)$ -coloring split permutation graphs (resumo estendido)  
Proceedings of 4th LAWCG, Itaipava, RJ  
Matemática Contemporânea, Rio de Janeiro, SBM, 2010.

- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
 $L(2, 1)$ -colorações: Algoritmos e limites superiores em classes de grafos  
(resumo estendido)  
Anais do XXX CSBC, Belo Horizonte, MG, 2010.
- CERIOLI, M. R., MARTINS, N. A., SAMPAIO, R. M., POSNER, D. F. D.  
Um algoritmo FPT para o problema da  $L(2, 1)$ -coloração (artigo completo)  
Anais do XLIII SBPO, Ubatuba, SP, 2011
- BARROS, G. F., CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
 $L(2, 1)$ -coloração em superclasses de árvores (resumo)  
Anais da 64a Reunião Anual da SBPC, São Luís, MA, 2012
- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
On  $L(h, k)$ -coloring  $b$ -core limited graphs (resumo)  
Proceedings of the 5th LAWCG, Open Door, Argentina, 2012
- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
Total  $L(2, 1)$ -coloring of graphs (resumo estendido)  
Proceedings of the 12th CTW, Enschede, Holanda, 2013
- CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
On total  $L(2, 1)$ -coloring regular grids and diameter two graphs  
(resumo estendido)  
Proceedings of the 9th ICGT, Grenoble, França 2014
- BARROS, G. F., CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D.  
 $L(2, 1)$ -coloração de  $k$ -árvores e grafos com treewidth limitado  
(artigo completo)  
Anais do XXXV CNMAC, Natal, RN, 2014



# Referências Bibliográficas

- [1] ALBERT, R., BARABÁSI, L. Emergence of scaling in random networks, *Science* v. 286, n. 1, pp. 509–512, 1999.
- [2] ARAKI, T. Labeling bipartite permutation graphs with a condition at distance two, *Discrete Applied Mathematics* v. 157, n. 8, pp. 1677–1686, 2009.
- [3] ARIKATI, S., RANGAN, P. Linear algorithm for optimal path cover problem on interval graphs, *Information Processing Letters* v. 35, pp. 149–153, 1990.
- [4] BABEL, L., OLARIU, S. On the structure of graphs with few  $P_4$ s, *Discrete Applied Mathematics* v. 84, pp. 1–13, 1998.
- [5] BALAKRISHNAN, H., DEO, N. Parallel algorithm for radiocoloring a graph, *Congressus Numerantium* v. 160, pp. 192–205, 2003.
- [6] BATTITI, R., BERTOSSI, A., BONUCCELLI, M. Assigning codes in wireless networks: bounds and scaling properties, *Wireless Networks* v. 5, pp. 195–209, 1999.
- [7] BERGE, C. Perfect graphs, *Six papers on graph theory - Indian Statistical Institute* v. 11, pp. 1–21, 1963.
- [8] BERGE, C. *Graphs*. London, North-Holland, 1991.
- [9] BERTOSSI, A., BONUCCELLI, M. Code assignment for hidden terminal interference avoidance in multihop packet radio networks, *IEEE/ACM Transactions on Networking* v. 3, pp. 441–449, 1995.
- [10] BODLAENDER, H., GRIGORIEV, A., KOSTER, A. Treewidth lower bounds with brambles, *Algorithmica* v. 51, n. 1, pp. 81–98, 2008.
- [11] BODLAENDER, H. L., KLOKS, T., TAN, R. B., VAN LEEUWEN, J. Approximations for  $\lambda$ -coloring of graphs, *The Computer Journal* v. 47, pp. 193–204, 2004.

- [12] BOLLOBÁS, B. *Random Graphs*. London, Academic Press, 1985.
- [13] BONOMO, F., CERIOLI, M. R. On  $L(2,1)$ -labeling of block graphs., *International Journal of Computer Mathematics* v. 88, n. 3, pp. 468–475, 2010.
- [14] BRANDSTAEDT, A., LE, V., SPINRAD, J. P. *Graph Classes: A Survey*. Philadelphia, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [15] CAI, L., ELLIS, J. NP-completeness of edge-colouring some restricted graphs, *Discrete Applied Mathematics* v. 30, pp. 15–27, 1991.
- [16] CALAMONERI, T. The  $L(h, k)$ -labelling problem: A survey and annotated bibliography. <http://www.dsi.uniroma1.it/~calamo/survey.html>.
- [17] CALAMONERI, T. The  $L(h, k)$ -labelling problem: a survey and annotated bibliography, *The Computer Journal* v. 54, n. 8, pp. 1344–1371, 2011.
- [18] CALAMONERI, T., CAMINITI, S., OLARIU, S., PETRESCHI, R. On the  $L(h, k)$ -labeling of co-comparability graphs, *Proceedings of ESCAPE'07*, pp. 116–127, 2007.
- [19] CALAMONERI, T., PETRESCHI, R.  $\lambda$ -coloring of regular tiling, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* v. 8, pp. 18–21, 2001.
- [20] CAMPOS, C. N., DE FIGUEIREDO, C. M. H., MACHADO, R. C. S., DE MELLO, C. P. The chromatic number of split-indifference graphs, *Discrete Mathematics* v. 312, pp. 2590–2693, 2012.
- [21] CAMPOS, C. N., DE MELLO, C. P. The total chromatic number of some bipartite graphs, *Ars Combinatoria* v. 88, pp. 335–347, 2008.
- [22] CASPI, Y., DEKEL, E. Edge coloring series parallel graphs, *Journal of Algorithms* v. 18, n. 2, pp. 296–321, 1995.
- [23] CERIOLI, M., POSNER, D. Limites superiores para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos cografos, grafos de permutação e grafos linha, *Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá - MT*, pp. 489–495, 2009.
- [24] CERIOLI, M., POSNER, D. On  $\lambda$ -coloring split, chordal bipartite and weakly chordal graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* v. 35, n. 1, pp. 299–304, 2009.

- [25] CERIOLI, M., POSNER, D. On  $L(2, 1)$ -coloring  $P_4$ -tidy graphs, *Proceedings of 8FCC French Combinatorial Conference*, p. 164, 2010.
- [26] CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D. On  $L(2, 1)$ -coloring split permutation graphs, *Matemática Contemporânea* v. 39, pp. 23–30, 2010.
- [27] CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D. On  $L(h, k)$ -coloring  $b$ -core limited graphs., *Proceedings of the 5th Latin American Workshop on Cliques in Graphs, Open Door, Argentina*, 2012.
- [28] CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D. Total  $L(2, 1)$ -coloring of graphs, *Proceedings of the 12th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, Enschede, Netherlands*, pp. 43–46, 2013.
- [29] CERIOLI, M. R., POSNER, D. F. D. On total  $L(2, 1)$ -coloring regular grids and diameter two graphs, *Proceedings of the 9th International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics, Grenoble, France*, 2014.
- [30] CEROLI, M., MARTINS, N., POSNER, D., SAMPAIO, R. Um algoritmo FPT para o problema da  $L(2, 1)$ -coloração, *Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 2615–2622, 2011.
- [31] CHANG, G. J., KUO, D. The  $L(2, 1)$ -labeling problem on graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 9, n. 2, pp. 309–316, 1996.
- [32] DUAN, Z., LV, P., MIAO, L., MIAO, Z., WANG, C. The  $\Delta^2$ -conjecture for  $L(2, 1)$ -labelings is true for total graphs, *Applied Mathematics Letters* v. 24, pp. 1491–1494, 2011.
- [33] ERDÖS, P., RÉNYI, A. On random graphs, *Publicationes Mathematicae* v. 6, n. 1, pp. 290–297, 1959.
- [34] FIALA, J., KLOKS, T., KRATOCHVÍL, J. Fixed-parameter complexity of  $\lambda$ -labelings, *Discrete Applied Mathematics* v. 113, pp. 59–72, 2001.
- [35] FIALA, J., KRATOCHVÍL, J. On the computational complexity of the  $L(2, 1)$ -labeling problem for regular graphs, *Theoretical Computer Science* v. 406, n. 1, pp. 228–236, 2005.
- [36] FISHBURN, P. C., ROBERTS, F. S. Full color theorems for  $L(2, 1)$ -colorings, *DIMACS Technical Report* v. 1, 2000.
- [37] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, Freeman, 1979.

- [38] GEORGES, J., MAURO, D. W., WHITTLESEY, M. Relating path covering to vertex labelings with a condition at distance two, *Discrete Mathematics* v. 135, pp. 103–111, 1994.
- [39] GIAKOUMAKIS, V., ROUSSEL, F., THUILLIER, H. On  $P_4$ -tidy graphs, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* v. 1, pp. 17–41, 1997.
- [40] GOLOVACH, P. A., HEGGERNES, P., HOF, P., PAULUSMA, D. Choosability on  $H$ -free graphs, *Information Processing Letters* v. 113, pp. 107–110, 2013.
- [41] GOLUBIC, M. C. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. New York, Academic Press, 1980.
- [42] GONÇALVES, D. On the  $L(p, 1)$ -labeling of graphs, *Proceedings of European conference on Combinatorics Graph Theory and Applications* v. 5, n. 9, pp. 81–86, 2006.
- [43] GOULD, H., QUAINANCE, J. Double fun with double factorials, *Mathematics Magazine* v. 85, n. 3, pp. 177–192, 2012.
- [44] GRIGGS, J. R., YEH, R. K. Labelling graphs with a condition at distance 2, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 5, n. 4, pp. 586–595, 1992.
- [45] GURUSWAMI, V. Enumerative aspects of certain subclasses of perfect graphs, *Discrete Mathematics* v. 205, pp. 97–117, 1999.
- [46] HALE, W. K. Frequency assignment: theory and applications, *Proceedings of IEEE* v. 68, n. 12, pp. 1497–1514, 1980.
- [47] HARARY, F. *Graph Theory*. Massachusetts, Addison Wesley, 1969.
- [48] HASUNUMA, T., ISHII, T., ONO, H., UNO, Y. A linear time algorithm for  $L(2, 1)$ -labeling of trees, *Lecture Notes in Computer Science* v. 5757, pp. 35–46, 2009.
- [49] HAVET, F., REED, B., SERENI, J.  $L(2, 1)$ -labelling of graphs. In: *Proceedings of annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms*, pp. 621–630, SIAM, 2008.
- [50] HAVET, F., YU, M.-L.  $(p, 1)$ -total labelling of graphs, *Discrete Mathematics* v. 308, pp. 496–513, 2008.

- [51] HEGGERNES, P., TELLE, J. Partitioning graphs into generalized dominating sets, *Nordic Journal of Computing* v. 5, n. 2, pp. 128–143, 1998.
- [52] HOFFMAN, A. J., SINGLETON, R. R. On moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM Journal of Research and Development* v. 4, pp. 497–504, 1960.
- [53] HOFFMAN, D. G., RODGER, C. A. The chromatic index of complete multipartite graph, *Journal of Graph Theory Volume* v. 16, n. 2, pp. 159–163, 1992.
- [54] HOLYER, I. The NP-completeness of edge-colouring, *SIAM Journal on Computing* v. 10, n. 4, pp. 718–720, 1981.
- [55] JANSON, S., LUCZAK, J. A simple solution to the  $k$ -core problem, *Random Structures and Algorithms*, pp. 50–62, 2007.
- [56] JUNOSZA-SZANIAWSKI, K., KRATOCHVÍL, J., LIEDLOFF, M., ROSS-MANITH, P., RZAZEWSKI, P. Fast exact algorithm for  $L(2,1)$ -labeling of graphs, *Theoretical Computer Science* v. 505, pp. 42–54, 2013.
- [57] K. ASDRE, K. I. E. S. N. The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, *Discrete Applied Mathematics* v. 155, n. 17, pp. 2377–2382, 2007.
- [58] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller e J. W. Thatcher, Eds. Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
- [59] KNUTH, D. E. *Combinatorics: Ancient and Modern*. Oxford, Oxford University Press, 2013.
- [60] KRÁL, D. Coloring powers of chordal graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 18, n. 3, pp. 451–461, 2004.
- [61] KRÁL, D. An exact algorithm for the channel assignment problem, *Discrete Applied Mathematics* v. 145, pp. 326–331, 2005.
- [62] KRÁL, D. Group coloring is  $\pi_2^P$ -complete, *Theoretical Computer Science* v. 349, pp. 99–111, 2005.
- [63] KRÁL, D., SKREKOVSKI, R. A theorem about the channel assignment problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 16, pp. 426–437, 2003.
- [64] KRATOCHVÍL, J., KRATSCH, D., LIEDLOFF, M. Exact algorithms for  $L(2,1)$ -labelings of graphs, *Proceedings of 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* v. 4, pp. 513–524, 2007.

- [65] KRATOCHVÍL, J., PROSKUROWSKI, A., TELLE, J. Covering directed multigraphs. In: *Graph-Theoretical Concepts in Computer Science*, pp. 242–257, Berlin, Springer, 1997.
- [66] LIH, K. W. The equitable coloring of graphs. In *Handbook of Combinatorial Optimization*, vol. 3. Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 543–566.
- [67] LIN, Y., SKIENA, S. Algorithms for square roots of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 8, pp. 99–118, 1995.
- [68] M. HABIB, R. MCCONNELL, C. P., VIENNOT, L. *Lex – BFS* and partition refinement, with applications to transitive orientation, interval graph recognition, and consecutive ones testing, *Theoretical Computer Science* v. 234, pp. 59–84, 2000.
- [69] MACHADO, R. C. S., DE FIGUEIREDO, C. M. H. Complexity separating classes for edge-colouring and total-colouring, *Journal of the Brazilian Computer Society* v. 17, pp. 281–285, 2011.
- [70] MACHADO, R. C. S., DE FIGUEIREDO, C. M. H., VUSKOVIC, K. The chromatic index of graphs with no cycle with unique chord, *Theoretical Computer Science* v. 411, pp. 1221–1234, 2010.
- [71] MAKANSI, T. Transmitter-oriented code assignment for multihop packet radio, *IEEE Transactions on Communications* v. 12, n. 35, pp. 1379–1382, 1987.
- [72] MCCORMICK, S. T. Optimal approximation of sparse Hessians and its equivalence to a graph coloring problem, *Mathematical Programming* v. 26, n. 1, pp. 153–171, 1983.
- [73] MCDIARMID, C. On the span in channel assignment problems: Bounds, computing and counting, *Discrete Mathematics* v. 266, pp. 387–397, 2003.
- [74] MCDIARMID, C. J. H. Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard, *Discrete Mathematics* v. 124, pp. 155–162, 1994.
- [75] MCKAY, B. D. Nauty. <http://cs.anu.edu.au/people/bdm/nauty/>.
- [76] MCKEE, T. A., MCMORRIS, F. R. *Topics in Intersection Graph Theory*. Philadelphia, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, 1999.
- [77] MOLLOY, M., REED, B. *Graph Colouring and the Probabilistic Method*. Berlin, Springer, 2001.

- [78] NORDHAUS, E. A., GADDUM, J. W. On complementary graphs, *American Mathematical Monthly* v. 63, pp. 175–177, 1956.
- [79] ORTIZ, C., MACULAN, N., SZWARCFITER, J. L. Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs, *Discrete Applied Mathematics* v. 82, pp. 209–217, 1998.
- [80] ORTIZ, C., VILLANUEVA, M. Threshold dimension of split-permutation graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* v. 75, n. 1, pp. 117–127, 2010.
- [81] POSNER, D. *L(2,1)-colorações: algoritmos e limites superiores em classes de grafos*. Dissertação de mestrado para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação, PESC/COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- [82] ROBERTS, F. S. *T*-colorings of graphs: recent results and open problems, *Discrete Mathematics* v. 93, pp. 229–245, 1991.
- [83] ROSE, D., LUEKER, G., TARJAN, R. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, *SIAM Journal on Computing* v. 5, pp. 266–283, 1976.
- [84] SAKAI, D. Labeling chordal graphs: distance two condition, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 7, pp. 133–140, 1994.
- [85] SPINRAD, J. P. *Efficient Graph Representation*. Providence, American Mathematical Society, 2003.
- [86] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. 2 ed. Rio de Janeiro, Campus, 1984.
- [87] VAN DEN HEUVEL, J., MCGUINNESS, S. Colouring the square of a planar graph, *Journal of Graph Theory* v. 42, pp. 110–124, 2003.
- [88] WANG, S. D., PANG, S. C. The determination of the total-chromatic number of series-parallel graphs, *Graphs and Combinatorics* v. 21, pp. 531–540, 2005.
- [89] WATTS, D., STROGATZ, H. Collective dynamics of small-world networks, *Nature* v. 393, n. 1, pp. 440–442, 1998.
- [90] YAP, H. P. *Total Colourings of Graphs*. Berlin, Springer-Verlag, 1996.
- [91] ZHOU, X., NAKANO, S., NISHIZEKI, T. A linear algorithm for edge-coloring partial *k*-trees, *Lecture Notes in Computer Science* v. 726, pp. 409–418, 1993.