Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

COPPE UFRJ

MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO MAX-LINEAR EM OTIMIZAÇÃO

João Benicio de Melo Neto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Nelson Maculan Filho

Rio de Janeiro
Março de 2015

MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO MAX-LINEAR EM OTIMIZAÇÃO

João Benicio de Melo Neto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Ing.

Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.

Prof. João Xavier da Cruz Neto, D.Sc

Prof. Carlile Campos Lavor, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2015

Melo Neto, João Benicio de

Métodos de Programação Max-linear em Otimização/João Benicio de Melo Neto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

IX, 67 p. 29,7cm.

Orientador: Nelson Maculan Filho

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 66 – 66.

1. dioide. 2. moduloide. 3. sistema max-linear. 4. programação max-linear. 5. valor ótimo. I. , Nelson Maculan Filho. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

À minha esposa Selma , aos
meus filhos Ornela e João Felipe
e ao meu neto Davi.
À memoria do meu pai José
Ribeiro, da Minha mãe Eliza e
do meu irmão Zé Ribeiro.

Agradecimentos

Ao Prof. Nelson Maculan Filho pela orientação, amizade, confiança e apoio durante a realização do Curso de Doutorado;

Aos Professores Paulo Roberto Oliveira e João Xavier da Cruz Neto por terem viabilizando o DINTER entre UFPI/UFRJ/UESPI, permitindo assim a realização do Curso de doutorado;

Aos Professores Paulo Roberto Oliveira, Adilson Elias Xavier, João Xavier da Cruz Neto e Carlile Campos Lavor, por aceitarem participar da banca de defesa desta tese e pelas sugestões pertinentes apresentadas visando melhoria deste trabalho;

A minha esposa Selma, aos meus filhos Ornela e João Felipe, ao meu neto Davi e aos meus irmãos Toinho, Nêa, Nato, Luiza e Julio pela compreensão, incentivo e paciência;

A UFPI, pelo apoio constante durante a realização deste curso, em especial ao Prof. Luiz de Souza Santos Junior e ao Prof. Gildásio Guedes Fernandes pela paciencia e encorajamento na trajetória final;

Aos Professores Arnaldo Junior e Vicente Paulo, pela divisão nas tarefas do CEAD e incentivo na elaboração desta tese;

Aos Professores do Departamento de Matemática - UFPI, em especial aos Professores Barnabé, João Xavier, Roger Peres e Paulo Sergio Marques dos Santos, pelas sugestões e orientações durante a realização deste trabalho;

A todos os professores e funcionarios da COPESE/UFPI pelos convivio, amizade e tolerancia, em especial aos Professores Gilvan, Lucia Couto, Macedo e Naziozenio;

Aos Professores Arimatea Melo e Italo Dowell, pelo auxilio na digitação e organização do texto final desta tese;

Aos colegas do Curso de Doutorado, em especial os Piauienses, Pedro, Arnaldo, Afonso e Jesus, pela amizade e ajuda em muitas ocasiões;

A todos os professores e funcionarios do PESC/COPPE pelos conhecimentos transmitidos, incentivo e amizade;

A todos que de alguma forma contribuiram para o desenvolvimento deste trabalho.

Muito obrigado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO MAX-LINEAR EM OTIMIZAÇÃO

João Benicio de Melo Neto

Março/2015

Orientador: Nelson Maculan Filho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho diz respeito à Programação Max-linear com restrições de desigualdades Max-lineares de dois lados, cuja importância se faz pela possibilidade de estudos e aplicações no âmbito da Programação não linear, muito utilizada em problemas de transporte, sincronização, automação, eventos discretos. Estes problemas produzem modelos não lineares na álgebra usual, no entanto, podem ser descritos por modelos lineares numa estrutura algébrica denominada Álgebra Max-lineares. Apresentamos definições, exemplos e resultados, visando encontrar uma solução para o sistema de desigualdades max-lineares de dois lados, utilizando o método alternante. Utilizamos uma versão do método numérico da falsa posição para encontrarmos o valor ótimo da função max-linear, sujeito às restrições de desigualdades Max-lineares de dois lados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

PROGRAMMING METHODS MAX-LINEAR IN OPTIMIZATION

João Benicio de Melo Neto

March/2015

Advisor: Nelson Maculan Filho

Department: Systems Engineering and Computer Science

This paper is about Max-Linear Programming with two-sided Max-Linear inequality restrictions, important in studies and applications in the domain of Non-Linear Programming, used intensively in problems from the areas of transport, synchronisation, automation, and discrete event. These problems produce non-linear models in usual Algebra, although they can be described by linear models in an algebraic structure named Max-Linear Algebra. We present definitions, examples, and results, in the effort to find a solution for the two-sided Max-Linear inequality system, using the alternating method. We use a version of the false-position numerical method to find the optimal value of the Max-Linear function, subjected to the two-sided Max-Linear inequality restrictions.

Sumário

Introdução

Ao longo dos últimos séculos, a ênfase tem sido dada aos estudos das estruturas matemáticas de grupos, anéis e corpos. Recentemente, nas últimas décadas, certos problemas impulsionaram os estudos de uma nova estrutura, a saber, a estrutura de dioide, que ao contrário das estruturas de grupos, anéis e corpos, onde cada elemento possui o inverso aditivo, seus elementos não possuem o inverso aditivo. De fato, a definição de dioide é incompatível com a existência de inverso aditivo.

Neste trabalho, vamos apresentar no capítulo 1, a definição de dioide, assim como os principais tipos e exemplo desta estrutura. Apresentamos uma solução, num dioide qualquer $(E, \oplus, \otimes)$, para a importante equação do tipo (1.1):

$$x = a \otimes x \oplus b$$

Estabelecemos o análogo de alguns conceitos da Álgebra Linear, como dependência linear sobre um dioide, moduloides e bideterminante de uma matriz A com entrada num dioide E.

No Capítulo 2, vamos estudar sobre o dioide $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$, os métodos e as técnicas de resolução de sistemas de equações lineares do tipo (2.1):

$$A \otimes x = b,$$

onde $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}\big(\mathbb{T}\big)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{T}^m$.

Estudamos também os sistemas de inequações lineares do tipo (2.2):

$$C \otimes x \leq d,$$

onde $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}\big(\mathbb{T}\big)$, $d = (d_1, \ldots, d_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é o dioide max-plus do exemplo (1.1.2).

O sistema de equações (2.1) é denominado de sistema unilateral de equações max-lineares, em deferência à variável x, que se encontra somente de um lado do sistema, enquanto que o sistema (2.2) é conhecido como sistema unilateral de inequações max-lineares. Sistemas do tipo (2.1) e (2.2) têm sido estudados por [2], [5], [7], [8] e [20]. Usamos o método combinatorial e o método algébrico para discutirmos os sistemas do tipo (2.1) e (2.2).

Consideramos também, no capítulo 2, o sistema de equações max-lineares da forma (2.3):

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d,$$

onde A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ e c, $d \in \mathbb{T}^m$. O sistema de equações max-lineares da forma (2.3) é conhecido na literatura especializada como sistema de equações max-lineares de dois lados. Na mesma linha, o sistema do tipo (2.4)

$$A \otimes x = B \otimes x$$

é denominado de sistema homogêneo de equações max-lineares de dois lados. Abordamos também sistema de equações max-lineares do tipo (2.5)

$$A \otimes x = B \otimes y,$$

onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $B \in M_{m\times k}(\mathbb{T})$. Por sua vez, o sistema (2.5) é denominado de sistema de equações max-lineares com variáveis separáveis.

Estabelecemos quando o sistema do tipo (2.5) tem solução em $\mathbb{T}$. Usamos o método alternante para decidir se $A \otimes x = B \otimes y$ tem solução e, em caso afirmativo, exibir uma.

No capítulo 3, estudamos a Programação Linear sobre o dioide $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$, do exemplo (1.1.2), sua álgebra é conhecida como Álgebra Max Plus, Álgebra Tropical, ou simplesmente Max-álgebra, por sua vez a Programação Linear sobre $\mathbb{T}$ é conhecida na literatura especializada como Programação Max-linear. Assim, vamos estudar os métodos, as técnicas e os algoritmos para minimizar (ou maximizar) uma função objetiva max-linear, sujeita às restrições de um sistema de equações max-lineares ou um sistema de inequações max-lineares.

Destacamos três importantes problemas, a seguir:

Problema(1): Programação max-linear com restrições de um sistema unilateral de equações max-lineares.

Sejam os vetores $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$, $b = (b_1, b_2, .., b_m)^T \in \mathbb{T}^m$, a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \otimes x$, queremos minimizar, $f(x)$ sujeito as condições: $A \otimes x = b$. Isto é,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow min$$

sujeito a:

$$A \otimes x = b.$$

O sistema unilateral com max-linear equações

$$A \otimes x = b$$

tem sido estudado por muitos autores, por exemplo em: [2], [5], [6], [18] e [19] dentre outras obras da max-álgebra e no capítulo 3 deste trabalho. Usamos também a notação:

$$Minimizar\ f(x) = f^T \otimes x$$

Por outro lado, resolvemos o problema (1) usamos o algoritmo:(ONEMAXLINMIN one-sided max-linear minimization), da referência [5].

Problema(2): Programação Max-linear com restrições de um sistema de equações max-lineares dois lados.

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, os vetores $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$ e $d = (d_1, d_2, ..., d_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$, e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \otimes x$, queremos minimizar $f(x)$ sujeito às condições: $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$. Isto é,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow min$$

sujeito a:

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d.$$

Sistema de equações max-lineares de dois lados não homogêneos

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$$

tem sido estudado em algumas referências, por exemplo em: [2], [5], [6] e [11]. Resolvemos o Problema (2), utilizando os critérios de viabilidade, na busca do valor ótimo, estabelicidos na referência [5] através do algoritmo 10.2.20 - MAXLINMIN.

Problema(3): Programação Max-linear com restrições simultâneas de um sistema unilateral de equações max-lineares e um sistema unilateral de inequações max-lineares.

Sejam as matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ e $C = (c_{ij}) \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$, os vetores $b = (b_1, b_2, ..., b_k)^T \in \mathbb{R}^k$ e $d = (d_1, d_2, ..., d_r)^T \in \mathbb{R}^r$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{R}^n$, e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \otimes x$, queremos minimizar $f(x)$ sujeito às condições simultâneas: $A \otimes x = b$ e $C \otimes x \leq d$. Ou seja,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow min$$

sujeito a:

$$A \otimes x = b,$$

$$C \otimes x \leq d,$$

Resolvemos o problema(3) seguindo o estabelecido na referência [12].

No capítulo 4, apresentamos as principais contribuições desta tese, resolvemos o problema de programação max-linear (MLP^{min}), dados por (4.1) e (4.2), a saber:

$$Minimizar \ f(x) = f^T \otimes x$$

sujeito a:

$$A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d,$$

onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, os vetores $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$, $d = (d_1, d_2, ..., d_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$.

Vamos resolver também o problema de programação max-linear (MLP^{max}) composto pelas condições (4.3) e (4.4) abaixo:

$$Maximizar \ q(x) = q^T \otimes x$$

sujeito a:

$$E \otimes x \oplus g \leq L \otimes x \oplus h,$$

com $E = (e_{ij})$ e $L = (l_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, os vetores $g = (g_1, g_2, ..., g_m)^T$ e $h = (h_1, h_2, ..., h_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T \in \mathbb{T}^n$.

Sistemas de desigualdades da forma (4.2) são denominados de sistemas de desigualdades max-lineares de dois lados, em deferência à variável x, que se encontra em ambos os lados do sistema, e têm sido estudados em [2], [3], [7], [13] e [19].

Para Resolver os problemas (MLP^{min}) e (MLP^{max}), seguimos a abordagem desenvolvida em [5], [7], [10], [13], [20] e mais rescentemente [14] e [15].

No capítulo 5, apresentamos as conclusões desta tese e propomos novas metas de estudos na area das estruturas matemática tendo como base um dioide E e sua álgebra, dentre as metas a serem buscadas destamos a programação linear sobre o dioide E.

Daremos continuidade aos estudos da programação max-linear visando encontrar métodos mais eficientes no cálculo do valor ótimo da função f, definida por $f(x) = f^T \otimes x$, utilizando propriedades da f não utilizadas nos métodos existentes atualmente.

Capítulo 1

Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo abordamos conceitos, exemplos e resultados essenciais ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes deste trabalho. As demonstrações dos resultados citados neste capítulo se encontram nas referências indicadas.

1.1 Dioide

Definição 1.1.1 (Monoide [1]) *Seja M um conjunto não vazio, munido da operação interna $+$. Dizemos que o par $(M, +)$ é um monoide se são válidas as seguintes propriedades:*

(M1) $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\, a,\, b,\, c \in G$;

(M2) *Existência do elemento neutro da operação $+$, indicado por ε, isto é,*
$a + \varepsilon = \varepsilon + a = a,\ \forall\, a \in M$.

Se em um monoide $(M, +)$ verifica-se a propriedade:

(M3) $a + b = b + a,\ \forall\, a,\, b \in M$,

dizemos que o monoide $(M, +)$ é um monoide comutativo.

A fim de simplificar a notação algumas vezes usamos M em vez de $(M, +)$, para denotar um monoide.

Num monoide M a operação $+$ induz uma relação binária $\leq$ sobre M, definida por: dados $a, b \in M$, dizemos que a é menor do que ou igual a b, notação $a \leq b$, se somente se, existe $c \in M$ talque $b = a + c$.

Simbolicamente temos: $a \leq b \Longleftrightarrow \exists\, c \in M : b = a + c$.

A relação binária $\leq$ definida sobre M é uma relação de pre-ordem, isto é, reflexiva e transitiva, denominada de pre-ordem canônica.

Um monoide M é dito canonicamente ordenado se a pre-ordem canônica é uma ordem em M, isto é, vale a propriedade antissimétrica.

Definição 1.1.2 (Semi-anel [1]) *Seja E um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de soma e produto em E e denotamos por $\oplus$ e $\otimes$. Diz-se que o trio $(E, \oplus, \otimes)$ é um semi-anel se são válidas as seguintes propriedades:*

(E1) *$(E, \oplus)$ é um monoide comutativo, com elemento neutro ε;*

(E2) *$(E, \otimes)$ é um monoide, com elemento unidade e;*

(E3) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ *e* $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c),\ \forall\, a,\, b,\, c \in E$;

(E4) $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon,\ \forall\, a \in E$.

Se um semi-anel $(E, \oplus, \otimes)$, satisfaz a propriedade:

(E5) $a \otimes b = b \otimes a,\ \forall\, a,\, b \in E$,

dizemos que o $(E, \oplus, \otimes)$ é um semi-anel comutativo.

Definição 1.1.3 (Dioide [1]) *Seja $(E, \oplus, \otimes)$ um semi-anel com o monoide, $(E, \oplus)$ ordenado canonicamente, neste caso dizemos que $(E, \oplus, \otimes)$ é um dioide.*

Definição 1.1.4 *Seja $(M, +)$ um monoide, que satisfaz a propriedade: $a + a = a$, $\forall\, a \in M$, neste caso dizemos que o monoide $(M, +)$, é idempotente. Além disso, num dioide $(E, \oplus, \otimes)$ em que $(E, \oplus)$ é um monoide idempotente, diz-se neste caso, que o dioide $(E, \oplus, \otimes)$ é idempotente. Também dizemos que o dioide $(E, \oplus, \otimes)$ é duplamente idempotente sempre que os monoides $(E, \oplus)$ e $(E, \otimes)$, forem idempotentes.*

Definição 1.1.5 *Seja $(M, +)$ um monoide, que satisfaz a propriedade: $a + b = a$ ou $a + b = b$, $\forall\, a,\, b \in M$ neste caso dizemos que o monoide $(M, +)$, é seletivo. Da mesma forma, num dioide $(E, \oplus, \otimes)$ em que $(E, \oplus)$ é um monoide seletivo, diz-se neste caso, que o dioide $(E, \oplus, \otimes)$ é seletivo. Também dizemos que o dioide $(E, \oplus, \otimes)$ é duplamente seletivo sempre que os monoides $(E, \oplus)$ e $(E, \otimes)$, forem seletivos.*

Definição 1.1.6 *Sejam $(M, +)$ um monoide e a um elemento de M, dizemos que a é cancelativo á direita, se satisfaz a seguinte propriedade:*

(C1) $x + a = y + a \Rightarrow x = y,\ \forall\, x,\, y \in M$.

De modo análogo dizemos que um elemento b do monoide $(M,+)$, é cancelativo á esquerda, se satisfaz a seguinte propriedade:

(C2) $b+x=b+y \Rightarrow x=y, \forall\, x,\, y \in M.$

Finalmente, dizemos que um elemento c do monoide $(M,+)$ é cancelativo se satisfaz as propriedades (C1) e $(C2)$.

Definição 1.1.7 (Dioide Completo [2]) *Seja $(E,\oplus,\otimes)$ um dioide, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *É fechado para somas infintas;*

(ii) *a distributividade se aplica para somas infinitas.*

Neste caso, dizemos que o dioide $(E,\oplus,\otimes)$ é completo.

Apresentamos alguns exemplos de dioides, em conformidade com as referências [1], [2] e [3]:

Exemplo 1.1.1 $(E=\mathbb{N},+,\times)$, *conjunto dos números naturais com as operações usuais $+$ e $\times$; é um dioide comutativo onde $\varepsilon=0$, $e=1$; além do mais, os monoides $(E=\mathbb{N},+)$ e $(E=\mathbb{N}\setminus\{0\},\times)$ são cancelativos.*

Exemplo 1.1.2 *Seja $(\mathbb{T}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\oplus,\otimes)$, onde o conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, com as operações $a\oplus b=max(a,b)$ e $a\otimes b=a+b$, $\forall\, a,b\in\mathbb{T}$, é um dioide (denominado de dioide max plus e denotado por $\mathbb{R}_{\max}$ e as vezes simplesmente por $\mathbb{T}$), comutativo, idempotente e seletivo, onde $\varepsilon=-\infty$, $e=0$; observemos que $2\oplus 4=4$ e $2\otimes 4=6$. Temos ainda que dado $a\in\mathbb{T}\setminus\{\varepsilon\}$, existe o inverso de a com respeito a operação $\otimes$, a saber $b\in\mathbb{T}$, tal que $a\otimes b=b\otimes a=0$, sendo assim, $(\mathbb{T}\setminus\{\varepsilon\},\otimes)$ é um grupo.*

Exemplo 1.1.3 *Com as operações definidas no exemplo (1.1.2), temos que os conjuntos $E=\mathbb{Q}\cup\{-\infty\}$ e $E=\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$, também são dioides comutativos, idempotente e seletivo, onde $\varepsilon=-\infty$, $e=0$. Estes dioides são denotados por $\mathbb{Q}_{\max}$ e $\mathbb{Z}_{\max}$ respectivamente.*

Exemplo 1.1.4 *Seja $(E=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},\oplus,\otimes)$, com as operações definidas como segue; $a\oplus b=max\{a,b\}$ e $a\otimes b=min\{a,b\}$, $\forall\, a,\, b\in E$, é um dioide comutativo, duplamente idempotente, duplamente seletivo e completo, onde $\varepsilon=-\infty$, $e=+\infty$. Desta forma, tem-se que $3\oplus 3=3$, $5\otimes 5=5$, $2\oplus 5=5$ e $2\otimes 5=2$.*

Exemplo 1.1.5 *Seja* $(E = \mathbb{R}_+, +, \times)$, *onde* $\mathbb{R}_+$ *é o conjunto dos números reais não negativos, com as operações* $+$ *e* $\times$ *usuais, é um dioide comutativo onde* $\varepsilon = 0$ *,* $e = 1$*. Temos que, dado* $a \in E \setminus \{0\}$*, existe o inverso de* a *com respeito a operação* $\times$*, a saber* $b \in E$*, tal que* $a \times b = b \times a = 1$*, sendo assim, o monoide* $(E \setminus \{0\}, \times)$ *é um grupo, de onde segue que* $(E \setminus \{0\}, \times)$ *é cancelativo.*

Exemplo 1.1.6 *O conjunto* $E = \{+, -, 0, ?\}$*, é um dioide comutativo, onde* $\varepsilon = 0$*,* $e = +$*, e as operações* $\oplus$ *e* $\otimes$ *são definidas conforme tabelas abaixo:*

$\oplus$	$+$	$-$	0	$?$
$+$	$+$	$?$	0	$?$
$-$	$?$	$-$	$-$	$?$
0	$+$	$-$	0	$?$
$?$	$?$	$?$	$?$	$?$

$\otimes$	$+$	$-$	0	$?$
$+$	$+$	$-$	0	$?$
$-$	$-$	$+$	0	$?$
0	0	0	0	0
$?$	$?$	$?$	0	$?$

O monoide $(E = \{+, -, 0, ?\}, \oplus)$ *é idempotente.*

Exemplo 1.1.7 *Seja* $E = 2^{\mathbb{R}^2}$ *o conjunto formado por todos os subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$*. Com as operações* $\oplus$ *e* $\otimes$ *defindas como segue:*

$$A \oplus B = A \cup B$$
$$A \otimes B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + z,\, y \in A,\, z \in B\},\ \forall\, A,\, B \in E,$$

$(E, \oplus, \otimes)$ *é um dioide comutativo e idempotente onde* $\varepsilon = \phi$*,* $e = \{(0, 0)\}$*.*

Exemplo 1.1.8 (*dioide dos endomorfismos de um monoide canonicamente ordenado [3]*) *Seja* $(M, +)$ *um monoide comutativo, com elemento neutro* ε*. Seja* H *o conjunto dos endomofismo de* M*, isto é, das funções* h *de* M *em* M *tais que:* $h(a+b) = h(a)+h(b)$ *e* $h(\varepsilon) = \varepsilon$*,* $\forall h \in H$ *e* $a, b \in M$*. A operação* $+$ *de* M *induz uma operação* $\oplus$ *em* H*, definida como segue:* $h \oplus g = (h+g)(a) = h(a)+g(a)$*,* $\forall h, g \in H$*,* $a \in M$*. O par* $(H, \oplus)$ *é um monoide comutativo, com elemento neutro,* h^ε*, onde* $h^\varepsilon(a) = \varepsilon$*,* $\forall a \in M$*. De fato, temos* $(h^\varepsilon \oplus h)(a) = h^\varepsilon(a) + h(a) = \varepsilon + h(a) = h(a)$*, e* $(h \oplus h^\varepsilon)(a) = h(a) + h^\varepsilon(a) = h(a) + \varepsilon = h(a)$*. Portanto* $h^\varepsilon \oplus h = h \oplus h^\varepsilon = h$*,* $\forall h \in H$*. Definiremos a segunda operação* $\otimes$ *em* H*, como sendo a composição de funções, isto é, definida como segue:* $h \otimes g = g \circ h$*. Note que a operação* $\otimes$ *não é comutativa, tem elemento unidade (neutro)* e*, definido por,* $e(a) = a$*,* $\forall a \in M$*.*

Podemos provar que $(H, \oplus, \otimes)$ é um dioide, se somente se, o monoide $(M, +)$ é um monoide canonicamente ordenado. A quadrupla $(M, H, \oplus, \otimes)$ é denominada Álgebra de Endomorfismo.

Exemplo 1.1.9 *Seja $(E, \oplus, \otimes)$ um dioide, o conjunto das matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $n \times n$ com entradas em E, notação $M_n(E)$, com as operações, $\oplus$ e $\otimes$ definidas de maneira usual, isto é, dados $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de $M_n(E)$, definimos $A \oplus B$, como sendo a matriz $S = (s_{ij})$, dada por $(s_{ij}) = (a_{ij}) \oplus (b_{ij})$, $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, e definimos $A \otimes B$, como sendo a matriz $T = (t_{ij})$, dada por $(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}) \otimes (b_{kj})$, $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ (onde o somatório é sobre a soma $\oplus$ do dioide E). $(M_n(E), \oplus, \otimes)$, é também um dioide, em geral não comutativo, onde o elemento neutro da operação $\oplus$ é:*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & ... & \varepsilon \\ ... & ... & ... \\ \varepsilon & ... & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Além disso o elemento unidade de $M_n(E)$ é:

$$I = \begin{bmatrix} e & ... & \varepsilon \\ ... & e & ... \\ \varepsilon & ... & e \end{bmatrix},$$

onde os elementos da diagonal principal de I, são todos e, o elemento neutro (unidade) da operação $\otimes$do dióde E, e os outros elementos de I são ε, o elemento neutro da operação $\oplus$ do diódе E.

Podemos definir uma operação externa $\odot$, ao dioide $M_n(E)$ como segue: sejam $\alpha \in E$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(E)$, definimos $\alpha \odot A$, como sendo a matriz $\alpha \odot A = (\alpha \otimes a_{ij})$.

O conjunto $M_n(E)$, munido das operações $\oplus$, $\otimes$ e $\odot$, e denominado de álgebra das matrizes de ordem n, sobre o dioide E

Observação 1.1.1 *Alguns cálculos na álgebra das Matrizes $M_n(\mathbb{T})$, sobre o dioide $\mathbb{T}$, lembramos que $(\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$, consideremos as matrizes A e B, e $\alpha \in \mathbb{T}$, como segue:*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \alpha = 3.$$

Temos que a adição, a multiplicação, e produto por α, são indicados e calculados *a seguir:*

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 6 \oplus 2 & 1 \oplus 5 \\ 3 \oplus 3 & 7 \oplus 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (6 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3) & (6 \otimes 5) \oplus (1 \otimes 4) \\ (3 \otimes 2) \oplus (7 \otimes 3) & (3 \otimes 5) \oplus (7 \otimes 4) \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 8 \oplus 4 & 11 \oplus 5 \\ 5 \oplus 10 & 8 \oplus 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

e

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \odot A = \begin{bmatrix} 3 \otimes 6 & 3 \otimes 1 \\ 3 \otimes 3 & 3 \otimes 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Observamos que a propriedade comutativa da multiplicação em $M_n(\mathbb{T})$, não é válida, visto que, neste caso, temos

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

Definição 1.1.8 *Sejam $(E, \oplus, \otimes)$ um dioide e C um subconjunto de E, dizemos que C é um subdioide de E, se $(C, \oplus, \otimes)$ é um dioide, isto é, satisfaz as seguintes condições:*

(S1) *$e \in C$ e $\epsilon \in C$;*

(S2) *C é fechado para as operações $\oplus$ e $\otimes$, de E.*

Exemplo 1.1.10 *1. $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, max, +)$, é subdioide de $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$*

2. $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, max, min)$, é subdioide de $(E = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, max, min)$

Definição 1.1.9 *Sejam $E, \oplus, \otimes$ um dioide, $a \in E \setminus \{\varepsilon\}$ e $k \in \mathbb{N}$, definiremos a potência de base a e expoente k, notação a^k como sendo, $a^k = a \otimes a \otimes a \otimes .. \otimes a$ (k vezes) e $a^0 = e$. Além disso $\varepsilon^k = \varepsilon$, para $k > 0$, não definiremos ε^0.*

Exemplo 1.1.11 *No dioide $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\max}$, tem-se $2^3 = 6$, $3^0 = 0$, $-\infty^4 = -\infty$. Neste dioide podemos considerar o expoente da potência a^k, como sendo um número real, desta forma ampliaremos a definição de potência como segue: $a^\alpha = \alpha \cdot a$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, onde $\alpha \cdot a$ é a multiplicação usual em $\mathbb{R}$. Não definiremos ε^α, para $\alpha \leq 0$. Desta forma temos que $8^{\frac{1}{2}} = 4$, $12^{-\frac{1}{4}} = -3$. Além do mais podemos verificar as seguintes propriedades, dados $m, n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$:*

(P1) $a^m \otimes a^n = a^{m \otimes n}$;

(P2) $(a^m)^n = a^{m^n}$;

(P3) $a^1 = a$;

(P4) $a^m \otimes b^m = (a \otimes b)^m$.

Observação 1.1.2 *Resolução da equação*

$$x = a \otimes x \oplus b, \tag{1.1}$$

num dioide qualquer $(E, \oplus, \otimes)$. *Seja* $(E, \oplus, \otimes)$, *um dioide e considere a equação* $x = a \otimes x \oplus b$, *com* a, b *elementos de* E, *para resolvermos esta equação em* E, *podemos seguir o seguinte algoritmo: tomemos como um valor inicial* $x(0)$, *digamos* $x(0) = \varepsilon$ *e suponhamos que saibamos determinar* $x(k)$, *para* $k \geq 1$, *por recorrência definiremos* $x(k+1) = a \otimes x(k) \oplus b$, *com* $k \in \mathbb{N}$, *dai temos*

$$x(0) = \varepsilon,\ x(1) = b,\ x(2) = a \otimes b,\ x(3) = a^2 \otimes b,\ x(4) = a^3 \otimes b,\ ....$$

de onde segue-se que:

$$x(k+1) = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus ... \oplus a^k \oplus ....) \otimes b.$$

Se a soma infinita $e \oplus a \oplus a^2 \oplus ... \oplus a^k \oplus ....$ *convergir em* E, *quando* $k \to +\infty$, *então*

$$x(k+1) = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus ... \oplus a^k \oplus ....) \otimes b$$

convergirá para uma solução da equação $x = a \otimes x \oplus b$.

Exemplo 1.1.12 *1. Sejam* $A = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & 0 \\ 1 & -\infty & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ *e* $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\infty \\ 0 \end{bmatrix}$, *matrizes com entrada no dioide,* $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\max}$

Vamos verificar se a equação

$$x = A \otimes x \oplus b,$$

tem solução no dioide $\mathbb{T} = \mathbb{R}_{\max}$.

Em

$$x = b \oplus A \otimes b \oplus A^2 \otimes b \oplus A^3 \otimes b \oplus ....$$

$$\text{temos } x = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus .... = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

é uma solução da equação matricial $x = A \otimes x \oplus b$, *na álgebra max plus* $M_3(\mathbb{T})$.

2. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, *matrizes com entrada no dioide,* $\mathbb{Z}_{\max}$

   Vamos verificar se a equação

$$x = A \otimes x \oplus b,$$

   tem solução no dioide $\mathbb{Z}_{\max}$.

   Em

$$x = b \oplus A \otimes b \oplus A^2 \otimes b \oplus A^3 \otimes b \oplus ....$$

$$\text{temos } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \oplus ..... = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Portanto

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   é uma solução da equação matricial $x = A \otimes x \oplus b$ *em* $\mathbb{Z}_{\max}$.

Definição 1.1.10 *Sejam* $(E, \oplus, \otimes)$ *um dioide e* $a \in E$, *definimos a estrela de Kleene de* a, *notação* $a^\star$ *ou* $star(a)$, *como sendo* $a^{(k)} = e \oplus a \oplus a^2 \oplus ... \oplus a^k \oplus ....$, *quando* $k \to +\infty$, *com* $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.13 1. *No dioide* $\mathbb{T}$, *temos* $2^* = +\infty$, $(-\infty)^* = 0$ *e* $0^* = 0$

2. *No dioide ,* $(M_3(\mathbb{T}), \oplus, \otimes)$, *consideremos a matriz A:*

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 & 0 \\ 1 & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 1.1.11 ([3]) *Seja a um elemento de um dióde $(E, \oplus, \otimes)$, dizemos que a é p-regular, se existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $a^{(p)} = a^{(p+1)}$. Além disso, dizemos que $a \in E$ é regular se existe $p \in \mathbb{N}$, tal que a é p-regular. Desta forma sendo a um elemento p-regular de um dióde tem-se que: $a^{(p)} = a^{(p+r)}$, $\forall r \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.1.14 *No dioide, $E = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, min, max)$, todo elemento a é 1-regular, pois $a^{(2)} = e \oplus a \oplus a^2 = e \oplus a \oplus a = e \oplus a = a^{(1)}$, no entanto no dioide $E = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, min, +)$, temos que para todo $a \geq 0$ é 0-regular, pois $a^{(1)} = e \oplus a = e = a^{(0)}$, quando $a < 0$, tem-se que a não é regular, pois $a^{(k)} = min\{0, a, 2a, ...ka\} = ka$ e $a^{(k)} \rightarrow -\infty$ quando $k \longrightarrow +\infty$.*

Definimos para elementos regulares de um dioide, o conceito de quasi inverso, como segue:

Definição 1.1.12 *Sejam E um dioide e a um elemento p-regular de E, definimos a quasi inversa de a, notação a^*, como sendo o limite, quando existe, $lim_{k \to +\infty} a^{(k)} = a^{(p)} = a^{(p+1)} = ...$*

Teorema 1.1.1 *([2]) Sejam a e b elementos de um dioide E. Se a é regular, com quasi-inversa a^*, a equação $x = a \otimes x \oplus b$ tem solução em E, a saber $x = a^*b$. Além disso a^*b é a menor solução de $x = a \otimes x \oplus b$, isto é, dada uma solução qualquer x de $x = a \otimes x \oplus b$, em E, tem-se $x \geq a^*b$.*

Corolário 1.1.1 *Seja a um elemento regular de um dioide E, então a equação $x = a \otimes x \oplus a$ tem solução em E, a saber $x = a^*a = aa^*$. Além disso a^*a é a menor solução de $x = a \otimes x \oplus a$.*

Observação 1.1.3 *Resolução da equação matricial $A \otimes x = B \otimes y$, sobre o dioide Max Plus.*

Na referência [4] é apresentado um algoritmo para encontrar uma solução, quando existe, da equação $A \otimes x = B \otimes y$, sobre o dioide $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$. Além do mais quando existe solução finita o algoritmo converge para um solução, independente do valor inicial finito considerado. Condições a respeito das matrizes A e B são apresentadas no sentido de assegurar a solução da equação $A \otimes x = B \otimes y$ e a convergência do algoritmo. Desta forma o algoritmo começa com qualquer valor *finito* $x(0)$ *e produz iterativamente, para cada* $r = 0, 1, 2, ...$ *a sequência de pares* $\{(x(r+1), y(r))\}$*, definida como segue:*

$$x(r+1) = A^c \otimes' (B \otimes y(r))$$

$$y(r) = B^c \otimes' (A \otimes x(r))$$

Onde a operação $a \otimes' b = min\{a, b\}$ *e se* $H = (h_{ij})$ *é uma matriz com entradas em* $\mathbb{T}$*, então definimos* $H^c = -H^T = (-h_{ji})$ *com entradas em* $\overline{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$.

Exemplo 1.1.15 *1. Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que as matrizes A^c *e* B^c *com entradas em* $\overline{\mathbb{T}}$*, são:*

$$A^c = \begin{bmatrix} -3 & -1 & +\infty \\ +\infty & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^c = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tomando

$$x = x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O algoritmo fornece, na primeira iteração os seguintes valores : $A \otimes x = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } B \otimes y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Na segunda iteração o algoritmo fornece, os seguintes valores :

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, A \otimes x = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } B \otimes y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Na terceira iteração o algoritmo fornece, os seguintes valores :

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, A \otimes x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Como $A \otimes x(3) = B \otimes y(2)$, temos que a solução da equação $A \otimes x = B \otimes y$, para as matrizes dadas é $(x(3), y(2))$.

Observação 1.1.4 *Sistema Linear na Álgebra Max Plus*

Algumas considerações a respeito do Sistema de Equação Linear, do tipo:

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$$

onde A, B são matrizes de ordem n e, c e d são n-vetores com entradas no dioide $\mathbb{T}$. Por simplicidade as vezes referimo-nos a álgebra max plus, como sendo a max-álgebra.

Definição 1.1.13 *Dizemos que o sistema*

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$$

encontra-se na forma canônica (normal) se as matrizes A, B e os vetores c e d satisfazem:

$A_{ij} = \varepsilon$ quando ocorre $A_{ij} < B_{ij}$,

$B_{ij} = \varepsilon$ sempre que $B_{ij} < A_{ij}$,

$c_i = \varepsilon$ quando ocorre $d_i < c_i$.

$d_i = \varepsilon$ sempre que $c_i < d_i$.

Examplos:

1) Sejam

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que na forma canônica fica:

$$\begin{bmatrix} -\infty & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -\infty \\ -\infty & 0 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ 4 \end{bmatrix}$$

2) Sejam

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

que na forma canônica fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

efetuando as operações indicadas temos:

$$\begin{bmatrix} (0 \otimes x) \oplus (-\infty \otimes y) \\ (3 \otimes x) \oplus (2 \otimes y) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\infty \otimes x) \oplus (1 \otimes y) \\ (-\infty \otimes x) \oplus (2 \otimes y) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ (3 \otimes x) \oplus (2 \otimes y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \otimes y \\ 2 \otimes y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ou ainda que:

$$\begin{bmatrix} x = max(1 + y, 2) \\ max(3 + x, 2 + y) = max(2 + y, 7) \end{bmatrix}$$

de onde segue-se que:

$x = 1 + y$, *se* $1 + y \geq 2$, *e* $4 + y = 7$. *Sendo assim temos* $x = 4$ *e* $y = 3$.

A outra possibilidade, $x = 2$, se $1 + y < 2$, conduz a um absurdo. Portanto $x = 4$ e $y = 3$ é uma solução do sistema proposto.

No Capítulo 2, faremos um apanhado dos métodos e técnicas de resolução, na Max-álgebra, dos sistemas do tipo:

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$$

1.2 Dependência Linear em Moduloides

Apresentamos o conceito de dependência linear sobre um dioide E, estabelecemos o conceito de bideterminante de uma matriz A com entrada em um dioide E, referências [1], [2], [3] e [5].

1.2.1 Moduloides

Definição 1.2.1 *(Moduloides) Seja $(E, \oplus, \otimes)$ um dioide comutativo, onde ε e e representam os elementos neutro de $\oplus$ e $\otimes$, respectivamente. Um moduloide sobre o dioide E é um conjunto M, munido da operação interna $\Box$ e da operação externa $\perp$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) *$(M, \Box)$ é um monoide comutativo, canonicamente ordenado com elemento neutro 0;*

(b) *$\perp$ é uma operação externa sobre M, definida como segue: dados $\lambda \in E$, $x \in M$, associamos $\lambda \perp x \in M$, satisfazendo:*

- **(b1)** $\lambda \perp (x \Box y) = (\lambda \perp x) \Box (\lambda \perp y)$, $\forall \lambda \in E$, $\forall x, y \in M$;
- **(b2)** $(\lambda \oplus \mu) \perp x = (\lambda \perp x) \Box (\mu \perp x)$, $\forall \lambda, \mu \in E$, $\forall x \in M$;
- **(b3)** $\lambda \perp (\mu \perp x) = (\lambda \otimes \mu) \perp x$; $\forall \lambda, \mu \in E$, $\forall x \in M$;
- **(b4)** $e \perp x = x$ *e* $\varepsilon \perp x = 0$, $\forall x \in M$;
- **(b5)** $\lambda \perp 0 = 0$, $\forall \lambda \in E$.

Exemplo 1.2.1 *Sejam $(E, \oplus, \otimes)$ um dioide e E^n o conjunto dos vetores com componentes sobre E, com a operações $\Box$ e $\perp$ definidas como segue: dados $x = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$, $y = (y_i)_{i=1,\ldots,n}$ em E^n e $\lambda \in E$, definimos $x \Box y = (x_i \oplus y_i)_{i=1,\ldots,n}$ e $\lambda \perp x = (\lambda \otimes x_i)_{i=1,\ldots,n}$. Temos que $(E^n, \Box, \perp)$ é um moduloide sobre E.*

Exemplo 1.2.2 *Seja $(M, \oplus)$ monóide comutativo canonicamente ordenado, com elemento neutro ε, considere o dioide $(\mathbb{N}, +, \times)$, definiremos a operação externa $\perp$, como segue:*

$$n \perp x = x \oplus x \oplus \ldots \oplus x \ (n \text{ vezes}) \text{ e } 0 \perp x = \varepsilon.$$

Temos que $(M, \oplus, \perp)$ *é um moduloide.*

Exemplo 1.2.3 *Sejam* $(E, \oplus, \otimes)$ *um dioide comutativo,* $A \in M_n(E)$*,* $\lambda \in E$ *e* $v \in E^n$ *tal que:* $A \otimes v = \lambda \otimes v$*,(*$v$ *é dito um auto vetor de* A*, para um autovalor* λ*). O conjunto* V_λ *de todos os autovetores de* A *para o autovalor* $\lambda \in E$*, é um moduloide.*

De fato,

$$A \otimes (\alpha \otimes v \oplus \beta \otimes w) = (\alpha \otimes \lambda) \otimes v \oplus (\beta \otimes \lambda) \otimes w = \lambda \otimes (\alpha \otimes v \oplus \beta \otimes w),$$

$\forall\, v,\, w \in V_\lambda$ *e* $\forall\, \alpha,\, \beta \in E$.

Definição 1.2.2 *(Bideterminante) Seja* $A = (a_{ij}) \in M_n(E)$*, onde* $(E, \oplus, \otimes)$ *é um dioide comutativo. Definimos o bideterminante de* A*, como sendo o par* $\big(\det^+(A), \big(\det^-(A)\big)$ *com*

$$\det^+(A) = \sum_{\pi \in per^+(n)} \big(\prod_{i=1}^{n} a_i, \pi(i)\big)$$
$$\det^-(A) = \sum_{\pi \in per^-(n)} \big(\prod_{i=1}^{n} a_i, \pi(i)\big),$$

onde $per^+(n)$ *e* $per^-(n)$ *representam os conjuntos das permutações pares e ímpares de* $1, 2, \ldots, n$*, respectivamente, e, as somas e os produtos são efetuados no dioide* $(E, \oplus, \otimes)$.

Definição 1.2.3 (*Conjunto Linearmente Dependente*) *Sejam* $(E, \oplus, \otimes)$ *um dioide e* $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *vetores de* E^n*. Dizemos que* $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *são linearmente dependente sobre* E*, no sentido de Gondran-Minoux, se, e somente se existem dois subconjuntos disjuntos* $I \subset \{1, 2, \ldots, p\}$*,* $J \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ *e* $\lambda_i \neq \varepsilon(\forall\, i \in I \cup J \neq \emptyset)$ *tais que*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \otimes u_i = \sum_{i \in J} \lambda_i \otimes u_i.$$

Se tais I*,* J *e* λ_i *não existem, os vetores* $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *são linearmente independentes.*

Citaremos agora um resultado, encontrado na max-álgebra:

Proposição 1.2.1 ([3]) *As colunas de* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\max}$ *são linearmente independentes (no sentido Gondan-Minoux) se,e somente se,* $\det^+ A \neq \det^- A$.

Capítulo 2

Sistemas de Equações Max-lineares

Neste capítulo tratamos os métodos e as técnicas de resolução de sistemas de equações max-lineares, fizemos um apanhado na literatura da max-álgebra dos principais resultados existentes.

2.1 Sistema Unilateral de Equações Max-lineares

Começamos estudando o sistema de equações lineares do tipo:

$$A \otimes x = b \tag{2.1}$$

onde, $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{T}^m$.

Estudamos também os sistemas de inequações lineares do tipo:

$$C \otimes x \leq d \tag{2.2}$$

onde, $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $d = (d_1, \ldots, d_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é o dioide max-plus do exemplo (1.1.2).

O sistema de equações (2.1) é denominado de sistema unilateral de equações max-lineares em deferência a variável x que encontra-se somente de um lado do sistema. Enquanto que o sistema (2.2) é conhecido como sistema unilateral de inequações max-lineares. Sistemas do tipo (2.1) e (2.2), tem sido estudado por [2], [5], [6], [7] e [8]. Usamos o método combinatorial e o método algébrico para discutirmos os sistemas do tipo (2.1) e (2.2).

Vamos fixar a notação e fornecer algumas definições necessárias para os próximos resultados:

$M = \{1, 2, \ldots, m\}$
$N = \{1, 2, \ldots, n\}$
$a^{-1} = -a, \forall\, a \in \mathbb{R}$
$S(A, b) = \{x \in \mathbb{T}^n : A \otimes x = b\}$
$M_j = \{k \in M; b_k \otimes a_{kj}^{-1} = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1})\}, \forall\, j \in N$
$\overline{x}_j = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1})$
$\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)^T$
$S(A, b, \leq) = \{x \in \mathbb{R}^n; A \otimes x \leq b\}$

Definição 2.1.1 *Seja $A \in M_{m\times n}(\overline{\mathbb{T}})$ uma matriz que tem pelo menos uma entrada finita em cada linha(coluna), neste caso, dizemos que A é linha $\mathbb{R}$-astic (coluna $\mathbb{R}$-astic). Dizemos que A é duplamente $\mathbb{R}$-astic se é linha $\mathbb{R}$-astic e coluna $\mathbb{R}$-astic.*

Definição 2.1.2 *Seja f uma função definida sobre $\mathbb{T}^n$, dizemos que f é max-linear se vale:*

$$f(\alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y) = \alpha \otimes f(x) \oplus \beta \otimes f(y), \forall\ x,\, y \in \mathbb{T}^n,\ \ e\, \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{T}.$$

A função definida por $f(x) = f^T \otimes x$ é max-linear, em conformidade com [5]. Além disso vale: se $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{T}^n$.

Para resolução dos sistemas (2.1) e (2.2) encontramos na literatura os seguintes resultados: método combinatorial e o método algébrico.

2.1.1 Método Combinatorial

Teorema 2.1.1 *([5]) Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ uma matriz duplamente $\mathbb{R}$-astic e $b \in \mathbb{R}^m$. Então*

(a) $A \otimes \overline{x} \leq b$

(b) $x \leq \overline{x}$, $\forall\, x \in S(A, b)$

(c) $x \in S(A, b) \Leftrightarrow x \leq \overline{x}$ *e* $M = \bigcup\limits_{j:x_j=\overline{x}_j} M_j$

(d) *Existe* $i \in M$*:* $(A \otimes \overline{x})_i = b_i$

Corolário 2.1.1 *Sejam $A \in M_{m\times n} \in (\mathbb{T})$ uma matriz duplamente $\mathbb{R}$-astic e $b \in \mathbb{R}^m$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $S(A, b) \neq \emptyset$;

(b) $\overline{x} \in S(A, b)$;

(c) $\bigcup_{j\in N} M_j = M$

Corolário 2.1.2 *Sejam $A \in M_{m\times n} \in (\mathbb{T})$ uma matriz duplamente $\mathbb{R}$-astic e $b \in \mathbb{R}^m$. Então $S(A,b) = \{\overline{x}\}$ se, e somente se*

(a) $\bigcup_{j\in N} M_j = M$ *e*

(b) $\bigcup_{j\in N'} M_j \neq M$ *para $N' \subset N$, $N' \neq N$.*

Exemplo 2.1.1 *Considere o sistema $A \otimes x = b$, para $A \in M_{5\times 3}(\mathbb{T})$ e $b \in \mathbb{R}^5$, dado por*

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -\infty & -\infty & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Considere a matriz diagonal $B = \operatorname{diag}(b^{-1}) = \begin{bmatrix} -3 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 2 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -1 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -5 \end{bmatrix}.$

Daí, $B \otimes A \otimes x = B \otimes x$, tem

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -\infty & -\infty & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & -\infty \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\overline{x} = (3, 1, -2)^T$, $M_1 = \{2, 4\}$, $M_2 = \{1, 2, 5\}$, $M_3 = \{3, 4\}$. Como $\bigcup_{j\in N} M_j = M$, temos que $\overline{x} \in S(A,b)$.

Observação 2.1.1 *Como $M = M_2 \cup M_3$ e nenhuma outra combinação dos conjuntos M_1, M_2, M_3 é igual a M, temos que o conjunto solução do sistema é:*

$$S(A,b) = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{T}^3 : x_1 \leq 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2\}.$$

2.1.2 O Método Algébrico

Teorema 2.1.2 *([5]) Sejam* $A \in M_{m\times n}(\overline{\mathbb{T}})$, $b \in \overline{\mathbb{T}}^m$ *e* $x \in \overline{\mathbb{T}}^n$ *então*

$$A \otimes x \leq b \ \text{ se, e somente se, } \ x \leq (-A)^T \otimes' b.$$

Corolário 2.1.3 *Sejam* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $b \in \mathbb{T}^m$ *e* $c \in \mathbb{T}^n$, *então*

(a) $\overline{x}$ *é a maior solução de* $A \otimes x \leq b$, *isto é,* $A \otimes (-A^T \otimes' b) \leq b$,

(b) $A \otimes x = b$ *tem uma solução se, e somente se,* $\overline{x}$ *é uma solução, e*

(c) $A \otimes \big(- A^T \otimes' (A \otimes c)\big) = A \otimes c$.

Generalizando, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.1.4 *Se* $A \in M_{m\times n}(\overline{\mathbb{T}})$, $B \in M_{m\times k}(\overline{\mathbb{T}})$ *e* $C \in \overline{\mathbb{T}}^{n\times 1}$ *e* $\overline{X} = -A^T \otimes' B$, *então*

(a) $\overline{X}$ *é a maior solução de* $A \otimes X \leq B$,

(b) $A \otimes X = B$ *tem solução se, e somente se,* $\overline{X}$ *é uma solução, e*

(c) $A \otimes \big(- A^T \otimes' (A \otimes C)\big) = A \otimes C$.

2.2 Sistema de Equações Max-lineares de dois lados

Iremos considerar agora o sistema de equações max-lineares da forma:

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d, \tag{2.3}$$

onde A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ e c, $d \in \mathbb{T}^m$. O sistema de equações da forma (2.3) é conhecido na literatura como sistema não homogêneo de equações max-lineares de dois lados. Na mesma linha, o sistema

$$A \otimes x = B \otimes x \tag{2.4}$$

é denominado de sistema homogêneo de equações max-lineares de dois lados. Abordamos também sistemas equações max-linear do tipo:

$$A \otimes x = B \otimes y, \tag{2.5}$$

onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $B \in M_{m\times k}(\mathbb{T})$. Por sua vez, o sistema (2.5) é denominação de sistema de equações max-lineares com variáveis separáveis.

Estabelecemos quando o sistema do tipo (2.5) tem solução. Usamos o método alternante para decidir se $A \otimes x = B \otimes y$ tem solução, e em caso afirmativo, exibí-la.

2.2.1 O Método Alternante na Resolução de Sistema de Equações Max-lineares com Variáveis Separáveis

Para Resolvermos sobre $\mathbb{T}$, o sistema de equações max-lineares com variáveis separáveis:

$$A \otimes x = B \otimes y$$

onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ e $B \in M_{m\times k}(\mathbb{T})$, com as variáveis $x \in \mathbb{T}^n$ e $y \in \mathbb{T}^k$. Usamos o método alternante encontrado em [4], [5], [14] e [15], partimos de algum $x = x(0)$, isto é, do sistema unilateral de equações max-lineares $B \otimes y = A \otimes x(0)$ e encontramos a solução principal $y(0)$, do sistema do tipo(2.1), isto é, $B \otimes y = A \otimes x(0)$, em seguida encontramos a solução principal, $x(1)$ do sistema unilateral de equações max-lineares $A \otimes x = B \otimes y(0)$, e assim por diante, até decidirmos o problema, ou seja encontrando uma solução ou verificando a impossibidade do sistema. A solução do sistema $A \otimes x = B \otimes y$ é o maior y tal que $B \otimes y \leq A \otimes x$ e o maior x tal que $A \otimes x \leq B \otimes y$. Como um sistema de desigualdade do tipo (2.2) sobre $\mathbb{T}$, sempre possui uma solução (principal), temos que o procedimento descrito é pertinente, sendo que a maior solução de (2.2) é:

$$x = -A^T \otimes' b.$$

O próximo teorema garante que caso exista uma solução não-nula para (2.5), o procedimento acima convergirá para uma solução não-nula, qualquer que seja o valor inicial de $x(0)$.

Teorema 2.2.1 *([5]) A sequência de pares $\{(x(r), y(r))\}_{r\in\mathbb{N}}$ gerada pelo algoritmo acima converge se, e somente se, uma solução existe. A convergência é monotóna, para uma solução estável, para qualquer escolha de $x(0) \in \mathbb{R}^n$.*

Observação 2.2.1 *No capítulo 1, estudamos o seguinte exemplo, retirado de ([5]):*

Exemplo 2.2.1 *Sejam as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que as matrizes $A^c = -A^T$ *e* $B^c = -B^T$ *com entradas em* $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$, *são:*

$$A^c = \begin{bmatrix} -3 & -1 & +\infty \\ +\infty & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^c = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tomando

$$x = x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O algoritmo fornece, na primeira iteração os seguintes valores :

$$A \otimes x = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } B \otimes y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Na segunda iteração o algoritmo fornece, os seguintes valores :

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ A \otimes x = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } B \otimes y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Na terceira iteração o algoritmo fornece, os seguintes valores :

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ A \otimes x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Como $A \otimes x(3) = B \otimes y(2)$, temos que a solução da equação $A \otimes x = B \otimes y$, para as matrizes dadas é $(x(3), y(2))$.

Observação 2.2.2 *Quando A, B possuem entradas inteiras temos o seguinte resultado:*

Teorema 2.2.2 *([5]) Sejam $A \in M_{m\times n}(\overline{\mathbb{Z}})$, $B \in M_{m\times k}(\overline{\mathbb{Z}})$, onde A e B são $\mathbb{R}$-astic, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, e uma solução de (2.5) existe, então para um valor inicial $x(0) \in \mathbb{Z}^n$, o algoritmo produz uma solução em um número finito de passos.*

O sistema (2.3) pode ser convertido no sistema (2.4) introduzindo-se uma variável, digamos x_{n+1}. Daí,

$$\widetilde{A} \otimes z = \widetilde{B} \otimes z \tag{2.6}$$

onde $\widetilde{A} = \big(A|c\big)$, $\widetilde{B} = \big(B|d\big)$ e $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$.

Teorema 2.2.3 *([5]) Sejam A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ e c, $d \in \mathbb{T}^m$. Então o sistema (2.3) tem uma solução se, e somente se, o sistema (2.6) tem uma solução com $z_{n+1} = 0$.*

Observação 2.2.3 *Quando as entradas das matrizes são finitas, temos:*

Teorema 2.2.4 *([5]) Sejam A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e c, $d \in \mathbb{R}^m$. Então o sistema de equações (2.3) tem uma solução se, e somente se, o sistema (2.6) tem uma solução não trivial.*

Observação 2.2.4 *O sistema homogêneo do tipo (2.4) pode ser escrito na forma do sistema (2.5), como segue: Sejam A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ matrizes duplamente $\mathbb{R}$-astic, do sistema*

$$A \otimes x = B \otimes x$$

temos $A \otimes x = y$ e $B \otimes x = y$, de onde obtemos que

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \otimes x = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \otimes y$$
$$C \otimes x = D \otimes y,$$

onde C, $D \in M_{2m\times n}(\mathbb{T})$ são matrizes duplamente $\mathbb{R}$-astic. Podemos aplicar o método alternante.

2.2.2 Um Método de Eliminação na Resolução da Equação $A\otimes \ x = B \otimes x$

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrizes do conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{T})$. Consideremos o conjunto S definido por:

$$S = \{x \in \mathbb{T}^n : A \otimes x = B \otimes x\}.$$

Nas referências [5] e [9] prova-se que S é um moduloide finitamente gerado, além do que é fornecido um roteiro para encontrarmos um conjunto de vetores que geram S. Começamos com o caso em que, $A = (a_{kj}))$ e $B = (b_{kj}))$, para k fixo em M e $j \in N$, isto é, A e B são vetores linha. Nessas condições, o problema reduz-se a resolvermos a equação:

$$a_{k1} \otimes x_1 \oplus ... \oplus a_{kn} \otimes x_n = b_{k1} \otimes x_1 \oplus ... \oplus b_{kn} \otimes x_n, \tag{2.7}$$

que numa formulação simplificada, sem considerar o índice que determina às linhas, vamos resolver em $\mathbb{T}^n$, para cada linha, a equaçãão:

$$a_1 \otimes x_1 \oplus ... \oplus a_n \otimes x_n = b_1 \otimes x_1 \oplus ... \oplus b_1 \otimes x_n \tag{2.8}$$

Supondo que a equação (2.8) tenha uma solução não-trivial, no conjunto $\mathbb{T}^n$. De onde segue que existem $i, j \in N$, tais que $a_i \otimes x_i = b_j \otimes x_j$ com $a_k \otimes x_k \leq a_i \otimes x_i$ e $b_k \otimes x_k \leq b_j \otimes x_j$, $\forall k \in N$.

Sejam os vetores $v^{(l,p)} \in T^n$, definidos por:

$$v^{(l,p)}(l) = b_p, \quad v^{(l,p)}(p) = a_l \quad \text{e} \quad v^{(l,p)}(k) = \varepsilon$$

para $k \neq l$ e $k \neq p$, para os quais $a_l \geq b_l$ e $b_p \geq a_p$. Desta forma definamos o conjunto

$$\gamma = \{(l,p) \in N \times N; a_l \geq b_l \text{ e } b_p \geq a_p\}$$

Considere a matriz T_1 cujas colunas são os vetores $v^{(l,p)}$ onde $(l,p) \in \gamma$. Observemos que todos os vetores na imagem de T_1 são soluções da equação (2.8).
Para resolvemos o caso geral, após resolvermos a equação oriunda da primeira linha das matrizes A e B, procedemos do mesmo modo com a segunda equação proviniente da segunda linha das matrizes A e B, obtemos uma matriz T_2 cujas colunas são os vetores $v^{(l,p)}$ onde $(l,p) \in \gamma$, temos que os vetores da imagem de T_2 são soluções da segunda equação, além disso os vetores na imagem de $T = T_1 \otimes T_2$, são soluções das duas primeiras equações de $A \otimes\ x = B \otimes x$. Procedemos assim até m-ésima equação proviniente da m-ésima linha das matrizes A e B. Desta forma, encontramos uma matriz $T = T_1 \otimes T_2 ... \otimes T_m$, com a propriedade de que os vetores da imagem de T são soluções de $A \otimes\ \ x = B \otimes x$.

Exemplo 2.2.2 *Resolver o sistema $A \otimes x = B \otimes x$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\infty & 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A equação provineiente da primeira linha de A e da primeira linha de B é:

$$0 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 = 1 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2.$$

Temos que

$$\gamma_1 = \{(l,p)|\, a_l \geq b_l \quad e \quad b_p \geq a_p\} = \{(2,1); (2,2)\}.$$

Como $v^{(l,p)}(l) = b_p$, $v^{(l,p)}(p) = a_l$, $v^{(l,p)}(k) = \epsilon$, com $k \notin \{l,p\}$, assim

$$v^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad v^{(2,2)} = \begin{bmatrix} -\infty \\ 2 \end{bmatrix}.$$

De onde segue que

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -\infty \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & -\infty \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & -\infty \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtemos a equação referente a segunda linha de A e a segunda linha de B.

$$6 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = 3 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2$$

$$\gamma_2 = \{(2,1)\}$$

$$v^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$T_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$T = T_1 \otimes T_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Assim, uma solução para o sistema $A \otimes x = B \otimes x$ é:

$$x = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.2.3 *Encontre $x \in \mathbb{T}^3$ tal que $A \otimes x = B \otimes x$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -\infty & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

A equação referente a primeira linha de A e a primeira linha de B é:

$$0 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 \oplus 1 \otimes x_3 = 1 \otimes x_1 \oplus 2 \otimes x_2 \oplus 5 \otimes x_3$$

$$\gamma_1 = \{(2,1); (2,2); (2,3)\}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -\infty & -\infty \\ 1 & 2 & 5 \\ -\infty & -\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

De

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \otimes T_1 \otimes x = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -5 \end{bmatrix} \otimes T_1 \otimes x.$$

Obtemos a equação referente a segunda linha de A e a segunda linha de B.

$$6 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 \oplus 6 \otimes x_3 = 4 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2 \oplus 8 \otimes x_3$$

$$\gamma_2 = \{(1,2); (1,3)\}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & -\infty \\ -\infty & 6 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$T = T_1 \otimes T_2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ -\infty & 8 \end{bmatrix}.$$

Os vetores da imagem de T são soluções de $A \otimes \ x = B \otimes x$.

Resumimos o estudo dos sistemas de equações e inequações na max-álgebra em sete tipos, em conformidade com [10], como segue:
Sejam A, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $C \in M_{s\times n}(\mathbb{T})$, $D \in M_{s\times m}(\mathbb{T})$ matrizes e os vetores a, $b \in \mathbb{T}^m$, discutiremos os sistemas:

- $P1$: $A \otimes x = 0$
- $P2$: $A \otimes x = b$
- $P3$: $A \otimes x \leq b$
- $P4$: $A \otimes x = B \otimes x$
- $P5$: $A \otimes x \leq B \otimes x$
- $P6$: $C \otimes x = D \otimes y$
- $P7$: $A \otimes x \oplus a = B \otimes x \oplus b$

Para cada problema P acima discutir (decidir) significa dizer se o sistema é possível ou impossível, se possível encontrar $x \in \mathbb{T}^n$ e $y \in \mathbb{T}^m$ que satisfazem P.

Observação 2.2.5 *Temos que:*

(1) $x = -\infty$, $y = -\infty$ *é solução dos problemas* $P3$, $P4$, $P5$ *e* $P6$.

(2) *Se* $b \in \mathbb{R}^m$, *o problema* $P2$ *reduz-se a* $P1$. *De fato, em* $A \otimes x = b$ *onde* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, *considere a matriz diagonal*

$$M = \mathrm{diag}(-b) = \begin{bmatrix} -b_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & -b_2 & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & -b_m \end{bmatrix}$$

daí temos

$$\begin{aligned} M \otimes A \otimes x &= M \otimes b \\ \overline{A} \otimes x &= 0, \end{aligned}$$

onde $\overline{A} = M \otimes A$.

(3) *Se* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *então o problema* $P3$ *é possível, na verdadade* $-A^T \otimes' b$ *é uma solução (conhecida como solução principal). Por outro se* $P2$ *é possível então* $-A^T \otimes' b$ *é a maior solução de* $P2$.

(4) *Decidir* $P6$ *implica decidir* $P2$.
De fato, Sejam o vetor $b \in \mathbb{T}^m$ *e a matriz* $A \in M_{m \times n}(\mathbb{T})$, *como sabemos discurtir,*

$$A \otimes x = I \otimes y.$$

Que tendo solução, digamos o par x, y, *basta definir* $y = b$, *se for compatível. Dai decidimos* $P2$.

(5) *Decidir* $P4$ *é equivalente a decidir* $P6$.
De fato, suponha que x *é uma solução do problema* $P4$ *e escreva* $A \otimes x = y$. *Considere* $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \in M_{2m \times n}(\mathbb{T})$, $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \in M_{2m \times n}(\mathbb{T})$, *onde* I *é a matriz identidade de ordem* n, *de modo que,*

$$C \otimes x = D \otimes y.$$

Sendo assim, ao decidirmos o problema $P6$ *podemos decidir o problema* $P4$.
Por outro lado, suponha que x, y *são soluções do problema* $P6$ *e escreva*

$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{T}^{2n}$, $A = [C, -\infty] \in M_{2m\times(n+1)}(\mathbb{T})$, $B = [-\infty, D] \in M_{2m\times(n+1)}(\mathbb{T})$. Daí,

$$A \otimes z = B \otimes z.$$

Portanto, se podemos decidir o problema $P4$, então podemos decidir o problema $P6$.

(6) *Decidir $P4$ é equivalente a decidir $P5$.*
De fato, pois $A \otimes x = B \otimes x$ é equivalente a $A \otimes x \leq B \otimes x$ e $A \otimes x \geq B \otimes x$. Por outro lado, $(A + B) \otimes x = B \otimes x$.

(7) *Decidir $P4$ implica em decidir $P7$ De fato, seja $z \in \mathbb{R}$ e escreva*

$$A \otimes x \oplus a \otimes z = B \otimes x \oplus b \otimes z.$$

Seja $t = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, $[A, a]$, $[B, b]$. Daí, $C \otimes t = D \otimes t$. Assim, resolvido o problema $P4$ e definindo $t_{n+1} = z = 0$ resolveremos $P7$.

Capítulo 3

Programação Max-linear

Neste Capítulo vamos estudar a Programação Linear sobre o dioide, do exemplo (1.1.2), $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$. Sua Àlgebra é conhecida como Álgebra Max Plus, ou simplesmente max-álgebra, por sua vez a Programação Linear sobre $\mathbb{T}$ é conhecida, na literatura especializada, como Programação Max-linear. Assim, vamos estudar os métodos, as técnicas e os algoritmos para minimizar (ou maximizar) uma função objetiva max-linear, sujeita às restrições de um sistema de equações max-lineares ou um sistema de inequações max-lineares.

Destacamos três importantes problemas, que listamos a seguir:

3.1 Programação Max-linear com Restrições de Equações Max-lineares Unilaterais

Sejam os vetores $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$, $b = (b_1, b_2, .., b_m)^T \in \mathbb{T}^m$, a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{T})$ e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \otimes x$. Queremos minimizar, $f(x)$ sujeito as condições do sistema de equações max-lineares: $A \otimes x = b$. Isto é,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow \min$$

sujeito a:

$$A \otimes x = b.$$

Estudamos no capitulo 2, o sistema do tipo:

$$A \otimes x = b.$$

Utilizamos a notação:

$M = \{1, 2, \ldots, m\}$
$N = \{1, 2, \ldots, n\}$

$S = S(A, b) = \{x \in \mathbb{T}^n : A \otimes x = b\}$
$M_j = \{k \in M; b_k \otimes a_{kj}^{-1} = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1})\}, \forall\, j \in N$
$\overline{x}_j = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1})$
$\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)^T$

Por outro lado, vamos usar a notação MLP_1^{min}, para indicar o problema (1), indicamos ainda o conjunto das soluções ótimas de MLP_1^{min}, por S_1^{min}, e para encontrar o conjunto S_1^{min} usamos o algoritmo:(ONEMAXLINMIN one-sided max-linear minimization), da referência [5].

Algorithm: ONEMAXLINMIN (one-side max-linear minimization)
Input: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^n$.
Output: $x \in S_1^{\min}$.

1. Find $\overline{x}$ and M_j, $j \in N$.

2. Sort $(f_j \otimes \overline{x}_j;\, j \in N)$, without loss of generality let

$$f_1 \otimes \overline{x}_1 \leq f_2 \otimes \overline{x}_2 \cdots \leq f_n \otimes \overline{x}_n.$$

3. $J := \{1\}$, $r := 1$.

4. If

$$\bigcup_{j\in J} M_j = M$$

then stop ($x_j = \overline{x}_j$ for $j \in J$ and x_j small enough for $j \notin J$).

5. $r := r + 1$, $J := J \cup \{r\}$.

6. Go to 4.

Observação 3.1.1 *De modo análogo ao Problema(1), podemos definir o seguinte problema:*

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow \max$$

sujeito a:

$$A \otimes x = b,$$

o qual representamos por MLP_1^{max} e o conjunto das soluções ótimas será denotado por, S_1^{max}. Além disso, se S não for vazio, então a solução de $[MLP_1^{max}]$ é imediata, pois, $\overline{x} \in S_1^{max}$. Isto é, $S_1^{max} = \{\overline{x}\}$.

Exemplo 3.1.1 *Maximizar f definida por $f(x) = f^T \otimes x$, sujeita as condições:*

$A \otimes x = b$, *onde*

$$f = (2, 3, -1)^T, \ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \ e\ b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos $\overline{x} = (-6, -6, -7)^T$ *e como* $\overline{x} \in S$ *segue que* $\overline{x} \in S_1^{max}$ *e daí* $f^{\max} = -3$.

3.2 Programação Max-linear com Restrições de Equações Max-lineares de Dois Lados

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{T})$, os vetores $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$ e $d = (d_1, d_2, ..., d_m)^T \in \mathbb{T}^m$, o vetor $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$, e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \otimes x$, queremos minimizar [min] ou maximizar [max] a função $f(x)$ sujeito às condições: $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$. Isto é,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow \min ou[\max]$$

sujeito a:

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d,$$

Sistema com dois lados não homogêneos de equações max-lineares

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d,$$

tem sido estudado em algumas referências, por exemplo em: [2], [5], [6] e [11].

Os dois problemas de Programação Max-linear [min], [max] com restrições de dois lados serão indicados por $MLP^{\min}$, e $MLP^{\max}$ respectivamente.

Além disso indicamos ainda:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d\}$$

$$S^{min} = \{x \in S : f(x) \leq f(z)\ \forall z \in S\}$$

$$S^{max} = \{x \in S : f(x) \geq f(z)\ \forall z \in S\}.$$

Resolvemos O Problema (2), utilizando os criterios de viabilidade, na busca do valor ótimo, estabelicidos na referência [5] através do algoritmo 10.2.20 - MAXLIN-MIN, para a versão MLP^{min} e o algortimo 10.2.22 - MAXLINMAX, para discutir a versão MLP^{max}. Uma maneira para resolver o sistema do tipo $P7$ é transforama-lo em um sistema equivalente do tipo $P4$ e posteriormente num sistema da forma $P6$, em seguida usamos o método alternante ou o método de eliminação, para resolver (discutir) $P6$.

O caso inteiro é discutido para o problema(2) na mesma referencia [5].

Assim com o caso em que a função objetiva é definida utilizando o vetor: $f = (0, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n$. É apresentado em [12].

Exemplo 3.2.1 *Aplicar o algoritmo MAXLINMIN para minimizar f definida por $f(x) = f^T \otimes x$, sujeita as condições: $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$, onde*

$$f = (2,5)^T, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -\infty \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -\infty \\ 0 & 0 \\ -\infty & 1 \\ 3 & -\infty \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} e\ d = \begin{bmatrix} 6 \\ -\infty \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos a solução $x^0 = (-1, 3)^T$ de $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$, como vetor inicial, dai $f(x^0) = 8$, $M^> = \{2, 4\}$ e o limite inferior é:

$$L = \max_{r \in M^>} \min_{k \in N} f_k \otimes c_r \otimes b_{rk}^{-1} = 4.$$

Aplicando o algoritmo MAXLINMIN (para números inteiros) da referencia [5] e considerando, $\epsilon < 1$ obtemos:

Iteração 1: *Verificaremos se $L = 4$ é atingido por $f(x)$ para algum $x \in S$ resolvendo o sistema:*

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\infty & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -2 & -\infty & 6 \\ 0 & 0 & -\infty \\ -\infty & 1 & 4 \\ 3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 4 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não há solução, logo $L(0) := 4$, $U(0) := 8$, $r := 0$, $\alpha := 6$.

Verificando que se $f(x) = 6$ é satisfeito para algum $x \in S$, resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\infty & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -2 & -\infty & 6 \\ 0 & 0 & -\infty \\ -\infty & 1 & 4 \\ 3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 6 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Há uma solução $x = (-2, 1)^T$. Logo, $U(1) := 6$, $L(1) := 4$, $r := 1$, $U(1) - L(1) \geq 1$ e $\alpha := 5$

Iteração 2: *Verificando se $f(x) = 5$ é satisfeito para algum $x \in S$ resolvendo o sistema:*

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\infty & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -2 & -\infty & 6 \\ 0 & 0 & -\infty \\ -\infty & 1 & 4 \\ 3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 5 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não há solução. Logo, $U(2) := 5$, $L(2) := 4$, $r := 2$, $U(2) - L(2) = 1$. PARE, pois $f(x) \neq 5, \forall x \in S$. Portanto, $f^{\min} = 6$, uma solução ótima é $x = (-2, 1)^T$.

3.3 Programação Max-linear com Restrições Simultâneas de Equações Max-lineares Unilaterais e Desigualdades Max-lineares Unilaterais

Sejam as matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ e $C = (c_{ij}) \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$, os vetores $b = (b_1, b_2, ..., b_k)^T \in \mathbb{R}^k$ e $d = (d_1, d_2, ..., d_r)^T \in \mathbb{R}^r$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{R}^n$, e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \otimes x$, queremos minimizar ou maximizar $f(x)$ sujeito às condições simultâneas: $A \otimes x = b$ e $C \otimes x \leq d$. Ou seja,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow \min \text{ ou } \max$$

sujeito a:

$$A \otimes x = b,$$

$$C \otimes x \leq d,$$

Indicaremos os dois problemas de Programação Max-linear min [max] com restrições silmultâneas de equações e inequações max-linares por $MLP_{\leq}^{min}$ e $[MLP_{\leq}^{max}]$., assim como indicamos os conjuntos soluções ótimas como segue; S^{min} (A, C, b, d) e $S^{max}(A, C, b, d)$.
O problema(3) foi estudado na referência [12], para discutimos este problema fixaremos a notação:

$R = \{1, 2, \ldots, r\}$,
$S(A, C, b, d) = \{x \in \mathbb{R}^n : A \otimes x = b \text{ e } C \otimes x \leq d\}$,

$S(C, d, \leq) = \{x \in \mathbb{R}^n : C \otimes x \leq d\}$,
$N = \{1, 2, \ldots, n\}$
$\overline{\overline{x}}_j = \min(d_i \otimes c_{ij}^{-1})\, \forall j \in N$,
$\overline{\overline{x}} = (\overline{\overline{x}}_1, \ldots, \overline{\overline{x}}_n)^T$,
$K = \{1, 2, \ldots, k\}$,
$K_j = \{k \in K; b_k \otimes a_{kj}^{-1} = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1})\} \forall\, j \in N$,
$\overline{x}_j = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1}) \forall\, j \in N$,
$\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)^T$,
$J = \{j \in N; \overline{\overline{x}}_j \ \geq \overline{x}_j\}$ e
$L = N \setminus J$.

Definamos o vetor $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)^T$, dado por:

$$\hat{x}_j = \overline{x}_j \text{ se } j \in J \text{ ou}$$

$$\hat{x}_j = \overline{\overline{x}}_j \text{ se } j \in L$$

e

$$N_{\hat{x}} = \{j \in N; \hat{x}_j = \overline{x}_j\}$$

Agora citaremos os principais, resultados encontrados em [12].

Teorema 3.3.1 *Sejam as matrizes $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ e os vetores $b \in \mathbb{R}^k$, $d \in \mathbb{R}^r$. Então as seguites condições são equivalentes:*

(i) $S(A, C, b, d) \neq \emptyset$*;*

(ii) $\hat{x} \in S(A, C, b, d)$*;*

(iii) $\bigcup_{j\in\mathbb{J}} K_j = K$

Teorema 3.3.2 *Sejam as matrizes $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ e os vetores $b \in \mathbb{R}^k$, $d \in \mathbb{R}^r$. Então $x \in S(A, C, b, d)$ se e somente se,*

(i) $x \leq \hat{x}$*;*

(ii) $\bigcup_{j\in\mathbb{J}} K_j = K$*, onde* $N_x = \{j \in N; x_j = \overline{x}_j\}$*.*

Além disso, se $|S(A, C, b, d)| = 1$ *então* $|S(A, b)| = 1$

Teorema 3.3.3 *Sejam as matrizes $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ e os vetores $b \in \mathbb{R}^k$, $d \in \mathbb{R}^r$. Se $|S(A, C, b, d)| = 1$ então $J = N$. Neste caso $S(A, C, b, d) = \{\overline{x}\}$.*

Temos ainda o seguinte resultado:

Teorema 3.3.4 *Sejam as matrizes $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ e os vetores $b \in \mathbb{R}^k$, $d \in \mathbb{R}^r$. Se $|S(A,C,b,d)| > 1$ então $S(A,C,b,d)$ é infinito.*

Finalmente, para resolvermos o Problema(3), na versão $[MLP_{\leq}^{max}]$, observamos que se $S^{max}(A,C,b,d) \neq \emptyset$, então $\overline{x} \in S^{max}(A,C,b,d)$, e portanto $S^{max}(A,C,b,d) = \{\overline{x}\}$.
Por outro lado para resolvermos o Problema(3), na versão $[MLP_{\leq}^{min}]$, utilizaremos o algoritmo ONEMLP-EI da referência [12], para encontramos $S^{min}(A,C,b,d)$ ou decidirmos que $S^{min}(A,C,b,d) = \emptyset$.

Algoritmo ONEMLP-EI (Max-linear program with one-sided equations and inequalities):
Input: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)^T \in \mathbb{R}^k$, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_r)^T \in \mathbb{R}^r$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ e $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{r\times n}$.
Output: $x \in S^{\min}(A,C,b,d)$.

1. Find $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$, $\hat{x}$ and K_j, $j \in J$, $J = \{j \in N; \bar{\bar{x}}_j \geq \bar{x}_j\}$.

2. $x := \hat{x}$.

3. $H(x) := \{j \in N; f_j + x_j = f(x)\}$.

4. $J := J \setminus H(x)$.

5. Se

$$\bigcup_{j\in J} K_j \neq K$$

then stop ($x \in S^{\min}(A,C,b,d)$).

6. Set x_j small enough (so that it is not active on any equation or inequality) for every $j \in H(x)$.

7. Go to 3.

Para ilustrar o exposto acima a respeito do Problema (3), retiramos da referencia [12] o exemplo a seguir:

Exemplo 3.3.1 *Mininimizar a função f sujeita as condições $A\otimes x = b$ e $C\otimes x \leq d$, onde $f = (5,6,1,4,-1)^T$,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o algorítimo ONEMLP-EI, para $\overline{x}(A,b) = (5,-1,3,3,-1)^T$*,* $\overline{x}(C,d) = (2,1,7,3,-1)^T$*,* $\widehat{x}(A,C,b,d) = (2,-1,3,3,-1)^T$*,* $J = \{2,3,4,5\}$*,* $K_2 = \{1,2\}$*,* $K_3 = \{1,2\}$*,* $K_4 = \{2,3\}$ *e* $K_5 = \{3\}$*.* $x := \widehat{x} = (2,-1,3,3,-1)^T$*,* $H(x) = \{1,4\}$ *e* $J \subsetneq H(x)$*. Temos também* $J := J\backslash H(x) = \{2,3,5\}$ *e* $K_2 \cup K_3 \cup K_5 = K$*. Em seguida definamos* $x_1 = x_4 = 10^{-4}$ *e* $x = (10^{-4},-1,3,10^{-4},-1)^T$*. Agora,* $H(x) = \{2\}$ *e* $J := J\backslash H(x) = \{3,5\}$*. Como* $K_3 \cup K_5 = K$ *e* $x_2 = 10^{-4}$ *e temos que* $x = (10^{-4},10^{-4},3,10^{-4},-1)^T$*. Agora,* $H(x) = \{3\}$ *e* $J := J\backslash H(x) = \{5\}$*. Visto que* $K_5 \neq K$ *então paramos e uma solução ótima é* $x = (10^{-4},10^{-4},3,10^{-4},-1)^T$ *e* $f^{\min} = 4$*.*

Capítulo 4

Programação Max-linear com Restrições de Desigualdades Max-lineares de Dois Lados

O presente capítulo tem como finalidade tratar da Programação Max-linear com restrições de desigualdades Max-lineares de dois lados, cuja importância se faz pela possibilidade de estudos e aplicações no âmbito da Programação não linear, muito utilizada em problemas de transporte, sincronização, automação, eventos discretos. Estes problemas produzem modelos não lineares na álgebra usual, no entanto, podem ser descritos por modelos lineares numa estrutura algébrica denominada Álgebra Max-lineares.

Apresentamos definições, exemplos e resultados, visando encontrar uma solução para o sistema de desigualdades max-lineares de dois lados, utilizando o método alternante. Utilizamos uma versão do método numérico da falsa posição para encontrarmos o valor ótimo da função max-linear f, sujeito às restrições de desigualdades max-lineares de dois lados, definidas abaixo. O material exposto neste capítulo é parte do artigo: Max-Linear Programming with Two-Sided Max-Linear Inequality Restrictions, de João Benicio de MELO Neto & Nelson MACULAN, submetido para publicação no RAIRO-Operations Research em 30/11/2014 e constitui as principais contribuições desta tese.

Inicialmente, vamos lembrar alguns conceitos e resultados no dioide $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ do exemplo 1.1.2, apresentados nos capitulos anteriores.

Sejam $a, b \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. Definamos em $\mathbb{T}$, as operações adição $\oplus$ e multiplicação $\otimes$, como segue:

$$a \oplus b = max(a, b)$$

$$a \otimes b = a + b.$$

O elemento neutro da operação $\oplus$, denotado por ε, é dado por $\varepsilon = -\infty$, enquanto que o elemento neutro da operação multiplicacação $\otimes$, representado por e, é $e = 0$. Representamos também por $\varepsilon = -\infty$ a matriz cujas entradas são todas, $-\infty$. A relação de ordem menor do que ou igual, denotada por $a \leq b$, é verificada quando existe c em $\mathbb{T}$, tal que $b = a \oplus c$.

A tripla $(\mathbb{T}, \oplus, \otimes)$ define uma estrutura matemática denominada de dioide, conforme referência [2], [3] e [11]. Observemos que na estrutura de dioide a relação de ordem $\leq$ é incompatível com a existência do elemento inverso da operação $\oplus$. As operações $\oplus$ e $\otimes$ são estendidas a vetores e matrizes de maneira análoga ao desenvolvido na Álgebra Linear. Desta forma, sejam $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, definimos $A \oplus B$, como sendo a matriz $S = (s_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, dada por $s_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$, $\forall i \in M = \{1, 2, ..., m\}$ e $\forall j \in N = \{1, 2, ..., n\}$. Seja $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times l}(\mathbb{T})$, definimos $A \otimes C$, como sendo a matriz $P = (p_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times l}(\mathbb{T})$, com $p_{ij} = \oplus_{k=1}^{n}(a_{ik} \otimes c_{kj})$, $\forall i \in M$ e $\forall j \in \{1, 2, ..., l\}$. Finalmente, dado $\alpha \in \mathbb{T}$ definimos a operação $\odot$, externa a $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, notação $\alpha \odot A$, como sendo a matriz dada por: $\alpha \odot A = \alpha \otimes A = (\alpha \otimes a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$.

De forma específica, o objetivo deste capítulo é encontrar $x \in \mathbb{T}^n$ para resolver os problemas de programação max-linear (MLP^{min}) e (MLP^{min}) , definidos respectivamente por (4.1) e (4.2), (4.3) e (4.4).

$$Minimizar\ f(x) = f^T \otimes x \tag{4.1}$$

sujeito a:

$$A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d, \tag{4.2}$$

onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, os vetores $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$, $d = (d_1, d_2, ..., d_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$, assim como resolver o problema de programação max-linear (MLP^{max}) composto pelas condições (4.3) e (4.4) abaixo:

$$Maximizar\ q(x) = q^T \otimes x \tag{4.3}$$

sujeito a:

$$E \otimes x \oplus g \leq L \otimes x \oplus h, \tag{4.4}$$

com $E = (e_{ij})$ e $L = (l_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, os vetores $g = (g_1, g_2, ..., g_m)^T$ e $h = (h_1, h_2, ..., h_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T \in \mathbb{T}^n$.

Dessa forma, estruturamos este capítulo da seguinte maneira: no primeiro momento, tratamos de sistemas de desigualdades max-lineares de dois lados com o propósito de apresentar alguns resultados conhecidos na literatura da Álgebra Max-linear. No segundo momento, abordamos a programação max-linear com restrições de desigualdades max-linear de dois lados.

Sistemas de desigualdades da forma (4.2) são denominados de sistemas de desigualdades max-lineares de dois lados, em deferência à variável x, que se encontra em ambos os lados do sistema, e têm sido estudados em [5],[6],[9],[10] e [13].

A função definida por $f(x) = f^T \otimes x$ é max-linear, em conformidade com [5], isto é, satisfaz: $f(\alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y) = \alpha \otimes f(x) \oplus \beta \otimes f(y)$, $\forall\ x,\ y \in \mathbb{T}^n$, $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{T}$. Além do que, se $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{T}^n$.

Para minimizar a função (4.1) sujeita às restrições (4.2) ou maximizar a função (4.3) sujeita às restrições (4.4), seguimos a abordagem desenvolvida em [4], [5], [7], [10], [12], [20] e mais rescentemente [14] e [15].

4.1 Sistemas de Equações Max-lineares

No capítulo 2, estudamos o sistema max-linear unilateral, sistema max-linear de dois lados, método alternante na resolução de sistema de equações max-lineares de dois lados com variáveis separáveis e sistema de desigualdades max- lineares.

Sistema unilateral de equações max-lineares do tipo (2.1) e sistema unilateral de desigualdades max-lineares do tipo (2.2) têm sido estudados nas referências [2], [5], [6], [7] e [8]. Os teoremas (2.1.1), (2.1.2), e seus corolários (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4), estabelecem resultados necessários para encontramos soluções dos sistemas (2.1), (2.2) e enunciarmos o método alternante.

O vetor $\overline{x}$, definido por $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)^T$, onde $\overline{x}_j = \min(b_i \otimes a_{ij}^{-1})$, é denominado de solução principal dos sistemas (2.1) e (2.2), eventualmente pode ocorrer que $\overline{x}$ não seja solução do sistema (2.1), mas se (2.1) tiver solução, então $\overline{x}$ é uma solução, no entanto $\overline{x}$ é sempre uma solução do sistema (2.2).

4.1.1 Sistema Max-linear de Dois Lados

Sistema não homogêneo de equações max-lineares da forma (2.3)

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d,$$

onde $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ são matrizes duplamente $\mathbb{R}$-astic, c e $d \in \mathbb{T}^m$. Pode ser transformado em um sistema homogêneo de equações max-lineares de dois lados, do tipo (2.4):

$$E \otimes z = F \otimes z,$$

onde $E = (A \mid c)$ e $F = (B \mid d) \in \mathbb{M}_{m \times n+1}(\mathbb{T})$ são matrizes duplamente $\mathbb{R}$-astic, obtidas de A e B, acrescentando-se os vetores c e d como última coluna de A e B, respectivamente.

Considerando o vetor $z = (z_1, \ldots, z_m, z_{n+1}) \in \mathbb{T}^{n+1}$, o resultado a seguir estabelece uma relação entre as soluções dos sistemas (2.3) e (2.4)

Teorema 4.1.1 ([5]) *Sejam A, $B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{T})$, matrizes duplamente $\mathbb{R}$-astic, c e $d \in \mathbb{T}^m$. Então o sistema (2.3) tem uma solução se, e somente se, o sistema (2.4) tem uma solução com $z_{n+1} = 0$.*

Para determinar o conjunto $S_h = \{z \in \mathbb{T}^{n+1} : E \otimes z = F \otimes z\}$ das soluções do sistema (2.4), utilizamos um método de eliminação encontrado nas referências [5], [9] e [11] que consiste em determinar um conjunto finito de vetores que geram o conjunto S_h. Em conformidade com as referências [5], [9], [11], [12], [16] e [17] o conjunto S_h, munido da operações $\oplus$ e $\odot$, forma um moduloide finitamente gerado sobre $\mathbb{T}$.

Por outro lado, o sistema de equações (2.4) pode ser escrito, utilizando a substituição:

$$E \otimes z = y$$

$$F \otimes z = y,$$

como sendo o sistema de equações max-lineares de dois lados com variáveis separáveis do tipo (2.5):

$$G \otimes z = H \otimes y,$$

onde G, $H \in \mathbb{M}_{2m \times n+1}(\mathbb{T})$ são matrizes duplamente $\mathbb{R}$-astic, dadas por $G = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$ e $H = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$.

Aplicamos o método alternante, descrito a seguir, para decidir se $G \otimes z = H \otimes y$ tem solução e, em caso afirmativo, encontrar uma.

4.1.2 Um algoritmo para o Método Alternante

Para resolvermos sobre $\mathbb{T}$, o sistema de equações max-lineares com variáveis separáveis dado por

$$A \otimes x = B \otimes y,$$

onde $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ e $B \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{T})$, partimos de algum $x = x(0) \in \mathbb{T}^n$, isto é, do sistema unilateral de equações max-lineares $B \otimes y = A \otimes x(0)$ e encontramos a solução principal $y(0)$, do sistema do tipo (2.1), em seguida encontramos a solução principal $x(1)$ do sistema unilateral de equações max-lineares $A \otimes x = B \otimes y(0)$, e assim por diante, até decidirmos o problema. Daí, a solução principal é o maior y tal que $B \otimes y \leq A \otimes x$ e o maior x tal que $A \otimes x \leq B \otimes y$. Um sistema de desigualdade do tipo (2.2) sobre $\mathbb{T}$ sempre possui uma solução, sendo a maior solução

$$x = -A^T \otimes' b.$$

Algorithm: Alternating Method
Input: $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, $B \in \mathbb{M}_{m\times k}(\mathbb{T})$ doubly $\mathbb{R}$-astic.
Output: A solution $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathbb{T}^k$ such that $A \otimes x = B \otimes y$ or an indication that no such solution exists.
Let $x(0) \in \mathbb{T}^n$ be any vector.

1. $r := 0$.

2. $y(r) := -B^T \otimes' \big(A \otimes x(r)\big)$.

3. $x(r+1) := -A^T \otimes' \big(B \otimes y(r)\big)$.

4. If $x_i(r+1) < x_i(0)$ for every $i \in N$ then stop (no solution).

5. If $A \otimes x(r+1) = B \otimes y(r)$ then stop $\big((x(r+1), y(r))$ is a solution$\big)$.

6. Go to 2.

4.2 Sistema de Desigualdades Max-lineares

Sistema de desigualdades max-lineares unilateral tem sido estudado nas referências: [5], [6], [7], [12], [18] e [19] dentre outras obras da Max-álgebra. Seus estudos têm sido importantes para estabelecer o Método Alternante na resolução de sistema de equações max-lineares de dois lados, conforme [4]. A programação max-linear com restrições de sistema de desigualdades max-lineares de um lado tem sido discutida em [20].

Sistemas de desigualdades max-lineares de dois lados:

$$A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d, \tag{4.5}$$

onde $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ e c, $d \in \mathbb{T}^m$, foram apresentados em [13], quando se trata de duas desigualdades e m variáveis. Neste trabalho, vamos estudar programação max-linear, com restrições de sistema de desigualdades max-lineares de dois lados, ou seja, resolver os problemas: (MLP^{min}) e (MLP^{max}).

Para resolver o sistema de desigualdades max-lineares de dois lados do tipo (4.5) podemos utilizar o método desenvolvido em [9] para determinar o modoloide de todas as soluções do equivalente sistema homogêneo de equações max-lineares de dois lados:

$$[(A \oplus B) \mid (c + d)] \otimes w = (B \mid d) \otimes w \tag{4.6}$$

Em muitos casos, precisamos somente de uma solução do sistema de desigualdades max-lineares de dois lados do tipo (4.5), que pode ser obtida através do método alternante, aplicado ao equivalente sistema homogêneo de equações max-lineares de variáveis separáveis do tipo (2.5)

$$\begin{bmatrix} [(A \oplus B) \mid (c + d)] \\ (B \mid d) \end{bmatrix} \otimes x = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \otimes y.$$

Enunciamos o importante resultado:

Teorema 4.2.1 *Sejam A, $B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$, matrizes duplamente $\mathbb{R}-astic$. Então o sistema de desigualdade $A \otimes x \leq B \otimes x$ tem uma solução não nula se, e somente se, $(x, y)^T$ é uma solução do sistema $C \otimes x = D \otimes y$, para algum $y \in \mathbb{T}^m$, com $C = \begin{bmatrix} A \oplus B \\ B \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$ e I é a matriz identidade de ordem m, sobre $\mathbb{T}$.*

Prova: Suponha que $x \in \mathbb{T}^n$, seja uma solução não nula de $A \otimes x \leq B \otimes x$, ou seja, $(A \oplus B) \otimes x = B \otimes x$. Fazendo $y = (A \oplus B) \otimes x$ e $y = B \otimes x$, obtemos

$$\begin{bmatrix} A \oplus B \\ B \end{bmatrix} \otimes x = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \otimes y,$$

de onde segue que $C \otimes x = D \otimes y$.

Reciprocamente, se $z = (x, y)^T$ é uma solução do sistema $C \otimes x = D \otimes y$, isto é,

$$C \otimes x \leq D \otimes y \text{ e } D \otimes y \leq C \otimes x,$$

considerando $A = \begin{bmatrix} C & \varepsilon \\ \varepsilon & D \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & D \\ C & \varepsilon \end{bmatrix}$, onde $\varepsilon \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ e todas as entradas são iguais a $-\infty$, temos:

$$A \otimes z = \begin{bmatrix} C & \varepsilon \\ \varepsilon & D \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \otimes x \\ D \otimes y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} D \otimes y \\ C \otimes x \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes x \oplus D \otimes y \\ C \otimes x \oplus \varepsilon \otimes y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & D \\ C & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \otimes z.$$

Portanto, $A \otimes z \leq B \otimes z$. ■

4.3 Programação Max-linear com Restrições de Desigualdades Max-lineares de Dois Lados

O objetivo deste trabalho é encontrar $x \in \mathbb{T}^n$ para minimizar a função (4.1) sujeita às condições (4.2), isto é, resolver o problema de programação max-linear (MLP^{min}), assim como resolver o problema de programação max-linear (MLP^{max}), composto pelas condições (4.3) e (4.4).

A notação (MLP^{min}) e (MLP^{max}), representam neste capítulo, a programação que minimiza funções max-lineares com restrições de desigualdades max-lineares de dois lados e a programação que maximiza funções max-lineares com restrições de desigualdades max-lineares de dois lados, respectivamente.

Para os resultados a seguir, usamos a notação:

$S(A, B, c, d, \leq) = S = \{x \in \mathbb{T}^n : A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d\}$.

$M^{>} = \{i \in M : \; c_i > d_i\}$.

$L_r = \min_{k\in N} (f_k \otimes c_r \otimes b_{rk}^{-1}), \; r \in M^{>}$.

$L = \max_{r\in M^{>}} \; L_r$.

$U_r = \max_{j\in N} \; q_j \otimes (e_{rj} \oplus l_{rj})^{-1} \otimes g_r, \; r \in M$.

$U = \max_{r\in M} \; U_r$.

$S^{\min} = \{x \in S : f(x) \leq f(z), \forall z \in S\}$.

$S^{\max} = \{x \in S : q(x) \geq q(z), \forall z \in S\}$.

$f^{\min} = \min_{x\in S_1} f(x)$,

onde $S_1 = S \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \; p_j \leq x_j \leq f_j^{-1} \otimes f(\hat{x}), \; j \in N, \; \widehat{x} \in S\}$,

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ e

$p_j = \min\big(\min_{r\in M}(a_{rj}\oplus b_{rj})^{-1}\otimes(c\oplus d)_j,\ \min b_{rj}^{-1}\otimes d_j,\ f_j^{-1}\otimes L\big),\ j\in N.$

$q^{\max} = \max_{x\in S_2} q(x)$, onde $S_2 = S\cap\{x\in\mathbb{R}^n : p'_j \le x_j \le q_j^{-1}\otimes U,\ j\in N\}$,

$p' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)^T$ e

$p'_j = \min\big(\min_{r\in M}(e_{rj}\oplus l_{rj})^{-1}\otimes(g\oplus h)_j,\ \min l_{rj}^{-1}\otimes g_j\big),\ j\in N$

Proposição 4.3.1 *Sejam a, b, c, $d\in\mathbb{T}$, com $a>b$. Então, $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$, temos:*

$$c\oplus a\otimes\alpha = d\oplus b\otimes\alpha$$

se, e somente se

$$c\oplus a\otimes\alpha = d.$$

Prova: Se $d = c\oplus a\otimes\alpha$, temos que $d\ge a\otimes\alpha\ge b\otimes\alpha$, portanto, $d\oplus b\otimes\alpha = d$, de onde segue que $c\oplus a\otimes\alpha = d\oplus b\otimes\alpha$. Por outro lado, se $c\oplus a\otimes\alpha = d\oplus b\otimes\alpha$, temos que

$$c\oplus a\otimes\alpha\ge a\otimes\alpha > b\otimes\alpha,$$

de onde segue que $c\oplus a\otimes\alpha = d$. ■

Corolário 4.3.1 *Sejam α, $\alpha'\in\mathbb{R}$, com $\alpha>\alpha'$ e $f(x) = f^T\otimes x$ e $f'(x) = f'^T\otimes x$, onde $f_j > f'_j$, $\forall\,j\in N$. Então, para todo $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\alpha$ se, e somente se, $f(x)\oplus\alpha' = f'(x)\oplus\alpha$.*

Corolário 4.3.2 *$f(x)=\alpha$ para algum $x\in S$ se e, somente se, os seguintes sistemas max-linear não homogêneos tem uma solução:*

$$A\otimes x\oplus c\le B\otimes x\oplus d$$
$$f(x)\oplus\alpha' = f'(x)\oplus\alpha,$$

onde $\alpha'<\alpha$, $f'(x) = f'^T\otimes x$ e $f'_j < f_j$ para todo $j\in N$.

Proposição 4.3.2 *Sejam $x, y\in S$, com $\alpha = f(x)$ e $\beta = f(y)$. Se $\alpha<\beta$, então dado $\gamma\in(\alpha,\beta)$, existe $z\in S$, tal que $f(z)=\gamma$.*

Prova: Considere $z = \lambda\otimes x\oplus\mu\otimes y$, com $\lambda = 0$ e $\mu = \beta^{-1}\otimes\gamma$, temos que

$$\lambda\oplus\mu = 0\oplus(\beta^{-1}\otimes\gamma) = 0\oplus(\gamma-\beta) = 0,$$

pois $\gamma<\beta$. Daí,

$$f(z) = \lambda\otimes f(x)\oplus\mu\otimes f(y) = 0\otimes\alpha\oplus(\beta^{-1}\otimes\gamma)\otimes\beta = \alpha\oplus\gamma = \gamma.$$

■

4.3.1 MLP^{min}

A seguir, vamos estabelecer no corolário 4.3.3 as condições para que a função f, definida por $f(x) = f^T \otimes x$ seja ilimitada e portanto $f^{\min} = -\infty$. Considerando f limitada inferiormente por L, em conformidade com o teorema 4.2.1 e utilizando o método alternante para encontrar uma solução x^0 do sistema (4.2), tal que $f(x^0) = L$, então $f^{\min} = L$ e uma solução ótima é x^0, na outra possibilidade; $f(x^0) > L$, consideramos o intervalo $[L, f(x^0)]$ e utilizamos a proposição 4.3.1, numa versão do método numérico da falsa posição para encontrar um valor intermediário $\alpha \in [L, f(x^0)]$. Verificamos a existência de $x \in S$ tal que $f(x) = \alpha$. A existência de $\overline{x} \in S_1 \subset S$, com $f(\overline{x}) = f^{\min}$ é assegurada pelo teorema de Weierstrass, aplicado ao conjunto compacto S_1 e à função contínua f, definida por $f(x) = f^T \otimes x$. Dado $\epsilon > 0$, repetimos o procedimento de localização de $\alpha \in [L(r), U(r)]$, com $r \in \mathbb{N}$, escolhemos um dos intervalos $[\alpha, U(r+1)]$ ou $[L(r+1), \alpha]$, verificamos se um dos extremos do intervalo escolhido é repetido pelo menos três vezes para utilizarmos uma rotina estabelecida no algoritmo de Illinois, prosseguimos até encontrarmos $s \in \mathbb{N}$ e $\overline{x} \in S$, tal que $U(s) - L(s) \leq \epsilon$, isto é, $f(\overline{x}) - f^{\min} \leq \epsilon$. Daí, $f(\overline{x}) = f^{\min}$ com uma solução ótima $\overline{x}$ e tolerância ϵ.

Proposição 4.3.3 *$f(x) \geq L$, $\forall\, x \in S$.*

Prova: Se $M^{>} = \emptyset$, então $L = -\infty$, segue-se que $f(x) \geq -\infty$, $\forall\, x \in S$. Dado $x \in S$ e $r \in M^{>}$, temos que

$$(B \otimes x)_r \geq (c \oplus d)_r.$$

Portanto,

$$x_k \geq c_r \otimes b_{rk}^{-1}, \text{ para algum } k \in N,$$

sendo assim,

$$f_k \otimes x_k \geq f_k \otimes (c \oplus d)_r \otimes b_{rk}^{-1} = L_r.$$

Como $f(x) \geq f_k \otimes x_k$, temos $f(x) \geq L_r$, $\forall\, r \in M^{>}$, $x \in S$.
Finalmente, $f(x) \geq L$. ■

Corolário 4.3.3 *$c \leq d$ se, e somente se, $f^{min} = -\infty$*

Prova: Se $c = d$, então $\alpha \otimes x \in S$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (α suficientemente pequeno). Temos que

$$f(\alpha \otimes x) = \alpha \otimes f(x) \to -\infty, \text{ quando } \alpha \to -\infty.$$

Consideremos agora o caso $c < d$, suponha por absurdo que $c > d$, pela proposição 4.3.3 temos que $L > -\infty$. $\blacksquare$

Proposição 4.3.4 *Se* $\left[(A \oplus B) \otimes x\right]_i > (c \oplus d)_i$, $\forall\, i \in M$, $x \in S$, *então existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $x' = \alpha \otimes x \in S$ *e* $\left[(A \oplus B) \otimes x'\right]_i = (c \oplus d)_i$ *para algum* $i \in M$, *onde* $\alpha = \max_{i \in M} \left[(c \oplus d)_i \otimes \left[(A \oplus B) \otimes x\right]_i^{-1}\right]$.

Prova: Seja $x \in S$, por hipótese, temos que

$$\left[(A \oplus B) \otimes x\right]_i > (c \oplus d)_i, \, \forall\, i \in M,$$

então, $(A \oplus B) \otimes x = B \otimes x$.
Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$(A \oplus B) \otimes (\alpha \otimes x) = B \otimes (\alpha \otimes x)$$

e

$$\big((A \oplus B) \otimes (\alpha \otimes x)\big)_i = \alpha \otimes \left[(A \oplus B) \otimes x\right]_i \geq (c \oplus d)_i, \, \forall\, i \in M,$$

valendo a igualdade, pelo menos, para um $i \in M$. Segue a proposição. $\blacksquare$

Proposição 4.3.5 *Seja* $x \in S$, *existe* $x' \in S$ *tal que* $x' \geq p$ *e* $f(x) = f(x')$.

Prova: Seja $x \in S$, definamos $x' = x \oplus p$ se $x_j < p_j$, $j \in N$. Temos, então, que

$$x' \geq p \;\text{ e }\; f(x) = f(x').$$

$\blacksquare$

Corolário 4.3.4 *Se* $f^{\min} > -\infty$ *e* $S \neq \emptyset$, *então existe um conjunto compacto* $S_1 \subset S$ *tal que,* $f^{\min} = \min_{x \in S_1} f(x)$.

Prova: Considere o conjunto S_1, definido acima, temos que S_1 é compacto em S. Seja $\hat{x} \in S$, com $\hat{x} \geq p$. Suponha por absurdo que existe $y \in S$ tal que $f(y) < \min_{x \in S_1} f(x) \leq f(\hat{x})$, pela proposição 4.3.5, existe $y' \in S$, com $y' \geq p$ e $f(y') = f(y)$. Portanto,

$$f_j \otimes y'_j \leq f(y') = f(y) \leq f(\hat{x}), \, \forall\, j \in N.$$

E assim, $y' \in S_1$, com $f(y') < \min_{x \in S_1} f(x)$, o que é um absurdo. $\blacksquare$

Corolário 4.3.5 *Se* $S \neq \emptyset$ *e* $f^{\min} > -\infty$, *então* $S^{\min} \neq \emptyset$.

4.3.2 Algorithm 1: Max-linear Minimização

Input: $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ e $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T \in \mathbb{T}^m$ e $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $c \oplus d \neq d$, $\epsilon > 0$.
Output: $x \in S$ such that $f(x) - f^{\min} \leq \epsilon$.

1. If $L = f(x)$, $\exists\, x \in S$, then stop e $f^{\min} = L$

2. Find an $x^0 \in S$. If $[(A \oplus B) \otimes x^0]_i > (c \oplus d)_i$, $\forall\, i \in M$, scale x^0 by $\alpha = \max_{i\in M}\Big[(c \oplus d)_i \otimes \big((A \oplus B) \otimes x\big)_i^{-1}\Big]$.

3. $L(0) := L$; $U(0) = f(x^0)$, $r = 0$.

4. $\alpha_{r+1} := \dfrac{1}{5}\Big(L(r) + 4U(r)\Big)$.

5. Check whether $f(x) = \alpha$, $\exists\, x \in S$,

If yes, find one; and is at least the third successively "yes"?
− not, then $U(r+1) := \alpha$, $L(r+1) := L(r)$;
− yes, then $L(r+1) := 4L(r)$ and $U(r+1) := \dfrac{1}{4}\alpha$.

If not; and is at least the third successively "not"?
− not, then $L(r+1) := 4\alpha$ and $U(r+1) := \dfrac{1}{4}\, U(r)$;
− yes, then $L(r+1) := \alpha$ and $U(r+1) := U(r)$.

6. $r := r + 1$.

7. If $\epsilon_{r+1} := U(r) - L(r) \leq \epsilon$, then stop. Else go to 4.

Exemplo 4.3.1 *Minimizar* $f(x) = 2 \otimes x_1 \oplus (-3) \otimes x_2$
s.a

$$\begin{aligned} &x_1 \oplus 1 \leq x_2\\ &x_2 \leq 1 \otimes x_1 \oplus 3\\ &x_1 \leq 2\\ &0 \leq x_1 \end{aligned}$$

sendo assim, vamos minimizar a função definida por $f(x) = 2 \otimes x_1 \oplus (-3) \otimes x_2$
s.a

$$A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -\infty & 0 \\ 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix} -\infty \\ 3 \\ 2 \\ -\infty \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$M = \{1,2,3,4\},\ N = \{1,2\},\ M^{>} = \{1,4\}$$

$$L_1 = \min_{k\in N} \left(f_k \otimes c_1 \otimes b_{1k}^{-1}\right) = \min\left(2+1+\infty,\ -3+1+0\right) = -2$$

$$L_4 = \min_{k\in N} \left(f_k \otimes c_4 \otimes b_{4k}^{-1}\right) = \min\left(2+0-0,\ -3+0+\infty\right) = 2$$

$$L = \max_{r\in M^{>}} L_r = \max\left(L_1, L_2\right) = 2.$$

Como existe $x \in S^{min}$*, a saber* $x = (0,3)^T$ *ou* $x = (0,1)^T$*, tais que* $f(x) = L = 2$*, temos que* $f^{\min} = 2$.

Exemplo 4.3.2 *Minimizar* $f(x) = -2 \otimes x_1 \oplus 0 \otimes x_2 \oplus (-1) \otimes x_3$

s.a

$$\begin{aligned} & -1 \otimes x_1 \oplus -1 \otimes x_3 \leq -1 \otimes x_2 \oplus 0 \\ & -2 \otimes x_2 \oplus 0 \leq x_3 \\ & 0 \leq x_2 \\ & -3 \otimes x_2 \oplus 0 \leq x_1 \\ & -4 \otimes x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

para $\epsilon = 0.001$.

Considerando:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\infty & -1 \\ -\infty & -2 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -3 & -\infty \\ -\infty & -4 & -\infty \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \\ -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{bmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos minimizar a função definida por

$$f(x) = -2 \otimes x_1 \oplus 0 \otimes x_2 \oplus (-1) \otimes x_3$$

s.a

$$A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d.$$

Temos:

$$M = \{1,2,3,4,5\},\ N = \{1,2,3\},\ M^{>} = \{2,3,4\}$$

$$L_2 = \min_{k \in N} \left(f_k \otimes c_2 \otimes b_{2k}^{-1} \right) = -1$$

$$L_3 = \min_{k \in N} \left(f_k \otimes c_3 \otimes b_{3k}^{-1} \right) = -2$$

$$L_4 = \min_{k \in N} \left(f_k \otimes c_4 \otimes b_{4k}^{-1} \right) = -2$$

Portanto,

$$L = \max_{r \in M^{>}} L_r = \max\left(L_2, L_3, L_4\right) = -2.$$

Verificando se $f(x) = -2$, $\exists\, x \in S^{min}$, *isto é,* $\exists\, x \in \mathbb{T}^3$, *tal que*

$$\begin{cases} A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d \\ f(x) = -2 \end{cases}.$$

Ou de maneira equivalente, existe $w = (x \mid 0) \in \mathbb{T}^4$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \otimes w.$$

verifica-se a impossibilidade do sistema em $\mathbb{T}^4$.
Utilizando o método alternante, obtemos uma solução $x^0 = (0,0,1)^T$, *do sistema:*

$$A \otimes x \oplus c \leq B \otimes x \oplus d,$$

com $f(x^0) = 0$. *Considerando*

$$L(0) := -2,\ U(0) := 0,\ r := 0 \text{ temos } \alpha := -0.4.$$

1ª ***Iteração:*** *Verificando que $f(x) = -0.4$, $\exists\, x \in S$.*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -0.4 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^3$, portanto temos

$$L(1) := -0.4,\, U(1) := 0,\, r := 1,\, U(1) - L(1) = 0.4 > \epsilon \text{ e } \alpha = -0.08.$$

2ª ***Iteração:*** *Verificando que $f(x) = -0.08$, $\exists\, x \in S$.*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -0.08 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^3$, portanto temos

$$L(2) := -0.08,\, U(2) := 0,\, r := 2,\;\; U(2) - L(2) = 0.08 > \epsilon \text{ e } \alpha = -0.016.$$

3ª ***Iteração:*** *Verificando que $f(x) = -0.016$, $\exists\, x \in S$.*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -0.016 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^3$, portanto temos $L(3) := -0.016, U(3) := 0, r := 3,\;\; U(3) - L(3) = 0.016 > \epsilon$ Pelo menos três vezes sucessivamente, o extremo $U(r)$, foi repetido, dai temos que $\alpha = -0.0128$.

4ª ***Iteração:*** *Verificando que* $f(x) = -0.0128$, $\exists\, x \in S$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -0.0128 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^3$*, portanto temos*

$$L(4) := -0.0128,\ U(4) := 0,\ r := 4,\ \ U(4) - L(4) = 0{,}0128 > \epsilon \ e \ \alpha = -0.01024.$$

5ª ***Iteração:*** *Verificando que* $f(x) = -0.01024$, $\exists\, x \in S$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -0.01024 \end{bmatrix} \otimes w.$$

prosseguindo obtemos:

$$L(7) := -0.001638,\ U(7) := 0,\ r := 7,\ \ U(7) - L(7) = 0.006192 > \epsilon \ e \ \alpha = -0.0003276.$$

8ª ***Iteração:*** *Verificando que* $f(x) = -0.0003276$, $\exists\, x \in S$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -\infty & -2 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\infty & 0 \\ -\infty & -4 & -\infty & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -\infty & -1 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -0.0003276 \end{bmatrix} \otimes w$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^3$*, portanto temos*

$$L(8) := -0.0003276,\ U(8) := 0,\ r := 8,\ \ U(8) - L(8) = 0{,}0003276 \leq \epsilon$$

pare, $f^{\min} = 0$*, uma solução ótima é* $x = (0, 0, 1)^T$.

Resumindo na tabela abaixo:

Iteração	$L(r)$	$U(r)$	ϵ_{r+1}	α_{r+1}	α_{r+1} *é viável ?*
Inicio	-2	0	2	-0.4	*no*
1	-0.4	0	0.4	-0.08	*no*
2	-0.08	0	0.08	-0.016	*no*
3	-0.016	0	0.016	-0.0128	*no*
4	-0.0128	0	0.0128	-0.01024	*no*
5	-0.001024	0	0.01024	-0.001638	*no*
6	-0.001638	0	0.001638	-0.0003276	*no*
7	-0.0003276	0	0.0003276	*STOP*	-

4.3.3 MLP^{max}

Estabelecemos na proposição 4.3.7 condições para que a função q, definida por $q(x) = q^T \otimes x$, seja ilimitada, e portanto $q^{\max} = +\infty$. Considerando que q é limitada superiormante por U, verificamos a existência de $x^0 \in S$, tal que $q(x^0) = U$, em caso afirmativo temos $q^{\max} = U$. Se $q(x) < U$, $\forall\, x \in S$, consideramos o intervalo $[q(x^1), U]$, com $x^1 \in S$. Aplicamos o algoritmo 2 para encontrar $\alpha \in [L(r), U(r)]$ e escolher um dos intervalos: $[\alpha, U(r)]$ ou $[L(r), \alpha]$ para prosseguir o processo iterativo e verificar se um dos extremos do intervalo é repetido pelo menos três vezes para utilizarmos uma rotina estabelecida no algoritmo de Illinois. O conjunto S_2 é um compacto de S, sendo assim a função contínua q atinge máximo em S_2. Dado $\epsilon > 0$, existem $s \in \mathbb{N}$ e $\overline{x} \in S_2$ tal que $U(s) - L(s) \leq \epsilon$, ou seja, $q^{\max} - q(\overline{x}) \leq \epsilon$. Portanto, $q^{\max} = q(\overline{x})$ com tolerância ϵ.

Proposição 4.3.6 *Se $[(E \oplus L) \otimes x]_r \leq (g \oplus h)_r$, para algum $r \in M$, então $q(x) \leq U$, $\forall\, x \in S$.*

Prova: Como $(g \oplus h) \geq h$ e $(e_{rj} \oplus l_{rj}) \otimes x_j \leq (g \oplus h)_r$, $\forall\, j \in N$, temos que

$$q(x) \leq \max_{j \in N} \left\{ q_j \otimes (e_{rj} \oplus l_{rj})^{-1} \otimes (g \oplus h)_r \right\} = U_r \leq U.$$

■

Corolário 4.3.6 *Se o sistema $(E \oplus L) \otimes x = L \otimes x$ não possui solução não nula, então*

$$q(x) \leq U, \forall\, x \in S.$$

Prova: Se $S = \emptyset$, temos que $q(x) \leq U$. Considere $x \in S$, temos que

$$(E \oplus L)_r \leq (g \oplus h)_r, \, \exists \, r \in M,$$

por outro lado, $(E \oplus L) \otimes x = L \otimes x$, segue da proposição 4.3.6 que $q(x) \leq U$. ■

Proposição 4.3.7 *$q^{max} = +\infty$ se, e somente se, $(E \oplus L) \otimes x = L \otimes x$ tem solução não trivial.*

Prova: Sabendo-se que $g \oplus h \geq h$. Se $(E \oplus L) \otimes x = L \otimes x$ não possui soluão, então pela proposição 4.3.6 segue que $q^{\max} = +\infty$.
Por outro lado, seja z uma solução não trivial do sistema $(E \oplus L) \otimes x = L \otimes x$, temos que

$$(E \oplus L) \otimes (\alpha \otimes z) = L \otimes (\alpha \otimes z) \geq g \oplus h.$$

Portanto, temos que

$$(E \oplus L) \otimes (\alpha \otimes z) \oplus (g \oplus h) = L \otimes (\alpha \otimes z) \oplus h,$$

isto é, $\alpha \otimes z \in S$. Segue-se que

$$q(\alpha \otimes z) = \alpha \otimes q(z) \to +\infty, \text{ quando } \alpha \to +\infty.$$

■

Proposição 4.3.8 *Seja $x \in S$, existe $x' \in S$ tal que $x' \geq p'$ e $q(x) \leq q(x')$.*

Prova:

Seja $x \in S$, definamos $x' = x \oplus p'$ se $x_j < p'_j$, $j \in N$. Daí

$$x' \geq p' \;\; \text{e} \;\; q(x) \leq q(x').$$

■

De modo análogo ao Cor 6, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.3.7 *Se $q^{\max} < +\infty$ e $S \neq \emptyset$, então existe um subconjunto compacto S_2 tal que $q^{\max} = \max_{x \in S_2} q(x)$.*

Prova: Basta considerar o conjunto S_2 definido acima.

■

Corolário 4.3.8 *Se $S \neq \emptyset$ e $q^{\max} < +\infty$, então $S^{\max} \neq \emptyset$.*

4.3.4 Algorithm 2: Max-linear Maximização

Input: $E = (e_{ij}), L = (l_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{T})$ e $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^T$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)^T \in \mathbb{T}^m$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$, $\epsilon > 0$.
Output: $x \in S$ such that $q^{\max} - q(x) \leq \epsilon$, or an indication that $q^{\max} = +\infty$

1. If $U = q(x)$, $\exists\, x \in S$, then stop e $q^{\max} = U$

2. Check whether $(E \oplus L) \otimes (x) = L \otimes (x)$ has a solution. If yes, stop ($q^{\max} = +\infty$)

3. Find an $x^0 \in S$ and $x^0 := x^0 \oplus p'$, where $p' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_n)^T$. with $p'_j = \min\left(\min_{r\in M} (e_{rj} \oplus l_{rj})^{-1} \otimes (g \oplus h), \min l_{rj}^{-1} \otimes h_j\right)$,

4. $L(0) := q(x^0)$ e $U(0) := U$, $r := 0$.

5. $\alpha_{r+1} := \dfrac{1}{5}\Bigg(4L(r) + U(r)\Bigg)$.

6. Check whether $q(x) = \alpha$, $\exists\, x \in S$,

If yes, find one; and is at least the third successively "yes"?
− not, then $U(r+1) := U(r)$ and $L(r+1) := \alpha$;
− yes, then $U(r+1) := 4U(r)$ and $L(r+1) := \dfrac{1}{4}\alpha$.

If not; and is at least the third successively "not"?
− not, then $U(r+1) := 4\alpha$ and $L(r+1) := \dfrac{1}{4}\, L(r)$;
− yes, then $U(r+1) := \alpha$ and $L(r+1) := L(r)$.

7. $r := r + 1$.

8. If $\epsilon_{r+1} := U(r) - L(r) \leq \epsilon$, then stop. Else go to 5.

Exemplo 4.3.3 *Maximizar* $q(x) = -1 \otimes x_1 \oplus 0 \otimes x_2 \oplus 1 \otimes x_3 \oplus 2 \otimes x_4$,
s.a

$$E \otimes x \oplus g \leq L \otimes x \oplus h,$$

onde

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & -13 & 4 & 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$h = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e\ \epsilon = 0.0001.$$

Temos $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$

$$U_1 = \max_{j \in N} q_1 \otimes (e_{1j} \oplus l_{1j})^{-1} \otimes g_1 = 4$$

$$U_2 = \max_{j \in N} q_2 \otimes (e_{2j} \oplus l_{2j})^{-1} \otimes g_2 = 2$$

$$U_3 = \max_{j \in N} q_3 \otimes (e_{3j} \oplus l_{3j})^{-1} \otimes g_3 = 16$$

Portanto,

$$U = \max_{r \in N} U_r = \max(U_1, U_2, U_3) = 16.$$

Verificando se $q(x) = 16$, $\exists\, x \in S^{max}$, *isto é,* $\exists\, x \in \mathbb{T}^4$, *tal que*

$$\begin{cases} E \otimes x \oplus g \leq L \otimes x \oplus h \\ q(x) = 16 \end{cases}$$

Ou de maneira equivalente, existe $w = (x \mid 0) \in \mathbb{T}^5$ *tal que*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -12 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -13 & 4 & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 16 \end{bmatrix} \otimes w.$$

verifica-se a impossibilidade do sistema em $\mathbb{T}^5$.
Utilizando o método alternante, obtemos uma solução $x^0 = (-1, 0, -2, -\infty)^T$, *com* $q(x^0) = 0$. *Considerando*

$$L(0) := 0,\ U(0) := 16,\ r := 0 \text{ temos } \alpha_1 := 3.2$$

1ª Iteração: *Verificando que* $q(x) = 3.2$, $\exists\, x \in S$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -12 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -13 & 4 & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 3.2 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^4$, *portanto temos*

$L(1) := 0$, $U(1) := 3.2$, $r := 1$, $\epsilon_2 = 3.2 > \epsilon$, *considerando* $\alpha_2 = 2.56$.

*2ª **Iteração:** Verificando que $q(x) = 2.56$, $\exists\, x \in S$, tal que*

$$\begin{cases} E \otimes x \oplus g \leq L \otimes x \oplus h \\ q(x) = 2.56 \end{cases}$$

Existe solução em $\mathbb{T}^4$, uma solução é $x = (-1, 0, -2, 0.56)^T$, com $q(x) = 2.56$, portanto temos

$L(2) := 2.56$, $U(2) := 3.2$, $r := 2$, $\epsilon_3 = 0.64 > \epsilon$, *considerando* $\alpha_3 = 2.688$.

*3ª **Iteração:** Verificando que $q(x) = 2.688$, $\exists\, x \in S$, tal que*

$$\begin{cases} E \otimes x \oplus g \leq L \otimes x \oplus h \\ q(x) = 2.688 \end{cases}$$

Existe solução em $\mathbb{T}^4$, uma solução é $x = (-1, 0, -2, 0.688)^T$, com $q(x) = 2.688$, portanto temos

$L(3) := 2.688$, $U(3) := 3.2$, $r := 3$, $\epsilon_4 = 0.512 > \epsilon$, *considerando* $\alpha = 2.7904$.

*4ª **Iteração:** Verificando que $q(x) = 2.7904$, $\exists\, x \in S$.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -12 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -13 & 4 & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 2.7904 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Existe solução em $\mathbb{T}^4$, uma solução é $x^0 = (-1, 0, -2, 0.7904)^T$, portanto temos

$L(4) := 2.7904$, $U(4) := 3.2$, $r := 4$, $\epsilon_5 = 0.4096 > \epsilon$, *como o extremo $U(r)$ foi repetido sucessivamente pelo menos três vezes, consideremos* $\alpha = 3.11808$.

*5ª **Iteração:** Verificando que $q(x) = 3.11808$, $\exists\, x \in S$.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -12 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -13 & 4 & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 3.11808 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^4$, portanto temos

$L(5) := 2.7904$, $U(5) := 3.11808$, $r := 5$, $\epsilon_6 = 0.32768 > \epsilon$, considerando $\alpha = 3.052544$.

Prosseguindo temos:

16ª Iteração:
$L(16) := 2.9999434$, $U(16) := 3.00005335$, $r := 16$, $\epsilon_{17} = 0.00010995 > \epsilon$, considerando $\alpha = 3.00003136$

Verificando que $q(x) = 3.00003136$, $\exists\, x \in S$, tal que

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -12 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -\infty \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -13 & 4 & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 2.999972 \end{bmatrix} \otimes w.$$

Não existe solução em $\mathbb{T}^4$, portanto temos

$L(17) := 2.9999434$, $U(17) := 3.000003136$, $r := 17$, $\epsilon_{18} = 0.00008796 \leq \epsilon$.
Pare, $q^{\max} = 2.9999434$, uma solução ótima é $(-1, 0, -2, 0.9999434)^T$.

Os cálculos acima apontam para $q^{\max} = 3$ com uma solução ótima $x = (-1, 0, -2, 1)^T$.

Resumimos o exemplo 3 na tabela a seguir:

Iteração	$L(r)$	$U(r)$	ϵ_{r+1}	α_{r+1}	α_{r+1} *é viável ?*
Inicio	0	16	16	3.2	*no*
1	0	3.2	3.2	2.56	*yes*
2	2.56	3.2	0.64	2.688	*yes*
3	2.688	3.2	0.512	2.7904	*yes*
4	2.7904	3.2	0.4096	3.11808	*no*
5	2.7904	3.11808	0.32768	3.05254	*no*
6	2.7904	3.05254	0.2621444	2.832343	*yes*
8	2.832343	3.0001152	0.1677722	2.865897	*yes*
9	2.865897	3.0001152	0.1342182	2.892741	*yes*
10	2.892741	3.0001152	0.1073742	2.978640	*yes*
11	2.978640	3.0001152	0.0214752	2.995820	*yes*
12	2.995820	3.0001152	0.0042952	2.9992562	*yes*
13	2.9992562	3.0001152	0.0008532	2.9999434	*yes*
14	2.9999434	3.0001152	0.0001718	3.00008084	*no*
15	2.9999434	3.00008084	0.0001374	3.000005335	*no*
16	2.9999434	3.00005335	0.00010995	3.00003136	*no*
17	2.9999434	3.00003136	0.00008796	*STOP*	

Capítulo 5

Considerações Finais e Trabalhos Futuros

Neste trabalho apresentamos a programação max-linear com restrições de desigualdades max-lineares de dois lados, resolvemos os problemas (MLP^{min}) e (MLP^{max}), para isso usamos o método alternante ou o método de eliminação exposto no capítulo 2, para encontrar uma solução do sistema de desigualdade max-linear de dois lados. Estabelecemos condições de existencia de solução para os problemas (MLP^{min}) e (MLP^{max}), em seguinda utilizamos uma versão do método numérico da falsa posição para encontrar o valor ótimo da função max-linear f, definida por $f(x) = f^T \otimes x$. Na implementação dos algoritmos, na resolução dos sistemas max-lineares e na apresentação dos exemplos, utilizamos o software gratuito Scilab referência [22], mais precisamente para os cálculos efetuados na max-álgebra usamos o software gratuito ScicoLab 4.4, referência [23].

Pretendemos estudar Programação Linear sobre o dioide $\overline{S} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \oplus, \wedge)$, com as operações definidas por $a \oplus b = max\{a, b\}$ e $a \wedge b = min\{a, b\}$, $\forall\, a,\, b \in \overline{S}$. A álgebra sobre este dioide é conhecida com (max,min)-álgebra, mais especificamente iremos resolver os seguintes problemas.

Problema(1): Programação (max, min)-linear com restrições simultâneas de equações e inequações unilaterais.

Sejam as matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{k\times n}(\overline{S})$ e $C = (c_{ij}) \in M_{r\times n}(\overline{S})$, os vetores $b = (b_1, b_2, ..., b_k)^T \in \overline{S}^k$ e $d = (d_1, d_2, ..., d_r)^T \in \overline{S}^r$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \overline{S}^n$, e a função definida sobre $\overline{S}^n$, por $f(x) = f^T \wedge x$, queremos minimizar [ou maximizar] $f(x)$ sujeito as condições simultâneas: $A \wedge x = b$ e $C \wedge x \leq d$. Ou seja,

$$f(x) = f^T \wedge x \longrightarrow min\ [max]$$

sujeito a:

$$A \wedge x = b,$$

$$C \wedge x \leq c,$$

Sistemas de equações (max,min)-linear, foi estudado por Gavalec and K. Zimmermann, na referência [16]. Nosso objetivo neste tema é estudarmos a Programação (max,min)- linear, visando minimizar [maximizar], uma função objetiva do tipo: $f(x) = f^T \wedge x$, sujeita as condições simultâneas: $A \wedge x = b$, e $C \wedge x \leq c$. Este problema (1), tem como uma referência o capitulo (6) de [21].

Os problemas seguintes são extensões dos problemas citados e resolvidos nesta tese, desta forma poderão ser estudados com as mesmas ferramentas que foram (serão) utilizadas para trabalharmos cada uma das citadas questões.

Problema(2): Programação (max,min)-linear com restriçoes simultâneas de equações e inequações com dois lados

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$, $E = (e_{ij})$ e $H = (h_{ij}) \in M_{r\times n}(\mathbb{T})$, os vetores $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$, $d = (d_1, d_2, ..., d_m)^T \in \mathbb{T}^m$, $g = (g_1, g_2, ..., g_r)^T$ e $h = (h_1, h_2, ..., h_r)^T \in \mathbb{T}^r$ e $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \in \mathbb{T}^n$, e a função definida sobre $\mathbb{T}^n$, por $f(x) = f^T \wedge x$.
Queremos minimizar [ou maximizar], $f(x)$ sujeito as condições: $A \wedge x \oplus c = B \wedge x \oplus d$ e $E \wedge x \oplus g \leq H \wedge x \oplus h$. Isto é,

$$f(x) = f^T \otimes x \longrightarrow min\ [max]$$

sujeito a:

$$A \wedge x \oplus c = B \wedge x \oplus d,$$

$$E \wedge x \oplus g \leq H \wedge x \oplus h.$$

Problema(3): Programação max-quadrática com restrições unilateral

Sejam a matriz simétrica $Q = (q_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, a matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{T})$ e o vetor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, e a função definida sobre $\mathbb{R}^n$, por $f(x) = x^T \otimes Q \otimes x$. Queremos, minimizar [ou maximizar], este caso especial de função quadrática dada por $f(x)$, sobre o dioide $\mathbb{T}$, sujeito as condições: $A \otimes x = b$. Isto é,

$$f(x) = x^T \otimes Q \otimes x \longrightarrow min\ [max]$$

sujeito a:

$$A \otimes x = b.$$

Continuaremos os estudos da programação max-linear procurando métodos mais eficientes para o cálculo do valor ótimo da função f, definida por $f(x) = f^T \otimes x$, utilizando propriedades da f não usadas no método exposto nesta tese.

Referências Bibliográficas

[**1**] Minoux, M. and Gondran, M., *Graphs Dioids and semi-rings. New models and algorithms*, Springer, 2008.

[**2**] Quadrat, J.P., Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley, New York, 1992, pp 489.

[**3**] Minoux, M. and Gondran, M., *Dioids and Semi-rings: Links to Fuzzy sets and other Applications.* Fuzzy sets and Systems, 158, 2007, 12, pp 1273-1294.

[**4**] Cuninghame-Green, R. A., Butkovic, P., *The equation $Ax = By$ over (max,+)*, Theoretic. Compute. Sci. 293, 2003, pp 3-12.

[**5**] Butkovic, P., *Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag 2010.

[**6**] Butkovic, P., *Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?, Linear Algebra* & *Appl. 367*, 2003, pp 313-335.

[**7**] Butkovic, P. and Aminu, A. , *Introduction to Max-linear programming*, IMA Journal of Management Mathematics 2008, doi: 10.1093/imaman/dpn 029.

[**8**] Heidelberg, B., Olsder, G. J. and van der Woude, J., *Max-plus at work, Modelling and Analysis of Synchronized Systems: A course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[**9**] Butkovic, P. and Hegedus, G., *An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra*, Ekonom. mat. Obzor 20, 1984, pp 203-215.

[**10**] Lorenzo, E. and de la Puente, M.J., *An algorithm to describe the solution set of any tropical linear system $A \otimes x = B \otimes x$*, arXiv:1007.5193v3 math.RA, 2011.

[11] Walkup, E. A. and Boriello, G., *A general linear max-plus solution technique*, in: Gunawardena(Ed.), Idempotency, Cambridge, 1988, pp 406-415.

[12] Aminu, A. , *Simultaneous solution of linear equations and inequalities in max-algebra*. Kybernetica, Vol. 47, 2011, pp 241-250.

[13] Sergeev, S. and Wagneur, E., *Basic solutions of systems with two max-linear inequalities*, arXiv 1002.0758, 2010.

[14] Butkovic, P. and MacCaing, M., *On the integer max-linear programming problem*, Discrete Applied Mathematics 162, 2014, pp 128-141.

[15] Butkovic, P. and MacCaig, M., *A strongly polynomial method for solving integer max-linear programs in a generic case*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, pp 1-23, DOI: 10.1007/s10957-014-0596-5

[16] Gavalec, M. and Zimmermann, K., *Solving systems of two-sided (max,min)-linear equations*. Kybernetika, vol. 46, 2010, pp 405-414.

[17] Minoux, M. and Gondran, M., *Linear Algebra in Dioids: a survey of recent results*, Ann.Discrete Math. 19, 1984, pp 147-164.

[18] Cuninghame-Green, R. A., *Minimax Algebra, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol.166, Springer, Berlin, 1979.

[19] Minoux, M. and Gondran, M., *Eigenvalues and eigen-functionals of diagonally dominant endomorphisms in min-max analysis*, Linear Algebra Appl. 282, 1998, pp 47-61.

[20] Butkovic, P. and Aminu, A. , *Non-linear programs with max-linear constraints: A heuristic approach*, IMA Journal of Management Mathematics 2011, doi: 10.1093/imaman.

[21] Zimmermann, K., Fiedler, M., Nedoma, J., Rohn, J., *Linear Optimization Problems with Inexact Data*. Springer-Verlag 2006.

[22] Stéphane, G. and Scilab, Max P., *Max-plus Linear Algebra with Scilab*, ALAPEDES Max-Plus SOFTWARE WORKSHOP INRIA June 18-19, 1998.

[23] *ScicosLab-4.4 Copyright © 1994-2014.INRIA. Scicos is an INRIA product.*