



UMA ABORDAGEM DE TEORIA DOS JOGOS PARA COLORAÇÃO DE GRAFOS

Aline Cristina Azevedo e Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Luerbio Faria

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2015

UMA ABORDAGEM DE TEORIA DOS JOGOS PARA COLORAÇÃO DE
GRAFOS

Aline Cristina Azevedo e Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

Prof. Mario Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.

Prof. Carlos Alberto de Jesus Martinhon, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2015

Silva, Aline Cristina Azevedo e

Uma abordagem de Teoria dos Jogos para Coloração de Grafos/Aline Cristina Azevedo e Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XII, 39 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Luerbio Faria

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 38 – 39.

1. Teoria dos Jogos. 2. Coloração de Grafos. 3. Jogo da Coloração. 4. Preço da Anarquia. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico aos meus pais,
Davi José e Fidelina.*

*“Não to mandei eu? Esforça-te,
e tem bom ânimo; não temas,
nem te espantes; porque o
Senhor teu Deus é contigo, por
onde quer que andares.”*

Josué 1:9

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que me deu capacidade para chegar até aqui. Me guardou e protegeu durante a caminhada até este momento, e sei continuará me guardando.

Agradeço aos meus queridos pais, Davi José e Fidelina, por todo amor, incentivo, apoio, investimento nos meus estudos e principalmente por me ensinar o caminho que devia andar. Aos meus familiares, tios, primos e minha avó, por estarem sempre perto de mim me ajudando e sustentando em oração.

Agradeço a Carlos Henrique, por seu apoio em todos os momentos e por sempre me ajudar e me incentivar. Aos meus amigos queridos, companheiros de turma na UERJ, que me incentivaram desde que surgiu a vontade de fazer o mestrado ainda na graduação. A minha querida Igreja, Primeira Igreja Batista em Alcântara, e a todos os meus amigos, que ali estão, pelas orações e apoio.

Agradeço aos meus amigos do Laboratório de Algoritmos e Combinatória, carinhosamente conhecido como LAC, por todo apoio e ajuda. Não poderia ter companheiros melhores que vocês! Que o Senhor Deus abençoe a vida de cada um.

Agradeço aos meus orientadores, Prof^ª. Celina de Figueiredo e Prof. Luerbio Faria. A Prof^ª. Celina, que sempre me incentiva a estudar e buscar respostas as perguntas que surgem, e tem me ensinado a ser mais disciplinada e organizada. Ao Prof. Luerbio, que me acompanha desde a graduação e me apresentou ao mundo da pesquisa, sempre atencioso e pronto a ajudar. É uma honra te-los como meus orientadores.

Muito obrigado ao Prof. Mario Benevides e ao Prof. Carlos Martinhon, por aceitarem participar da banca examinadora da minha dissertação de mestrado.

Agradeço ao PESC/COPPE, aos professores (em especial aos da linha de Algoritmos e Combinatória), a todos os funcionários da secretaria, suporte e serviços gerais, pois, sempre que precisamos de vocês, estão prontos a ajudar.

Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), órgão que me mantém financeiramente para que eu possa estar todos os dias na UFRJ.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UMA ABORDAGEM DE TEORIA DOS JOGOS PARA COLORAÇÃO DE GRAFOS

Aline Cristina Azevedo e Silva

Fevereiro/2015

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Luerbio Faria

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Nesta dissertação usamos a Teoria dos Jogos como uma ferramenta para colorir propriamente os vértices de um grafo $G = (V, E)$ qualquer, onde o algoritmo tem por base a pesquisa local. Neste jogo, denotado por $\Gamma(G)$, o conjunto de jogadores é o conjunto de vértices V , o conjunto de cores é o conjunto de estratégias possíveis para todos os vértices e a recompensa para cada vértice é o número de vértices que possui a sua cor. Começamos o jogo com uma coloração própria de vértices arbitrária (por exemplo, a coloração própria trivial onde para cada vértice é atribuída uma cor diferente), faz-se uma mudança local, permitindo que cada vértice (um por vez) mude para outra classe de cor com maior cardinalidade, até que não seja mais possível uma mudança local. Quando não é mais possível fazer esta mudança, temos que o algoritmo atingiu um *equilíbrio de Nash puro*.

Neste trabalho, analisamos limites superiores conhecidos na literatura para o número cromático $\chi(G)$ e verificamos se são também limites superiores para $\Gamma(G)$. Também estudamos o quão pior (Medida da Anarquia do Jogo) pode ser o número de cores retornado por $\Gamma(G)$ comparado ao número cromático para as classes Bipartido, Caminhos e Ciclo. Estabelecemos duas conjecturas para o preço da anarquia das Árvores e da família de Mycielski. Consideramos três problemas de decisão: COLORAÇÃO DO JOGO, MAIOR CLASSE DO JOGO e ANARQUIA BIPARTIDA associados ao jogo da coloração. Provamos que os problemas COLORAÇÃO DO JOGO, mesmo se $k = 3$, e MAIOR CLASSE DO JOGO, mesmo se G é cúbico, são NP-completos e conjecturamos que o problema ANARQUIA BIPARTIDA é NP-completo.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A GAME THEORY APPROACH TO GRAPH COLORING

Aline Cristina Azevedo e Silva

February/2015

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luerbio Faria

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this dissertation we use Game Theory as a tool to properly color the vertices of a graph $G = (V, E)$, where the algorithm is based on local search. In this game, denoted by $\Gamma(G)$ the set of players is the set of vertices V , the color set is the set of possible strategies for all vertices and the reward for each vertex is the number of vertices that have its color. We begin with an arbitrary proper vertex coloring (for example, the trivial proper coloring in which for each vertex a different color is assigned), a local change is made, allowing each vertex (one at time) to switch to another color class with higher cardinality, until a local change is no longer possible. When none can make any change, a *pure Nash equilibrium* is reached.

We explore known upper bounds in the literature for the chromatic number $\chi(G)$ and check if they are also upper bounds for $\Gamma(G)$. We also study how worse can be the number of colors returned by $\Gamma(G)$ compared (The Anarchy Price) to the chromatic number for the classes Bipartite, Paths and Cycles. We have established two conjectures for the price of anarchy of Trees and Mycielski family. We consider three decision problems: GAME COLORING, BIGGEST CLASS IN THE GAME and BIPARTITE ANARCHY associated with game coloring. We have proved that the GAME COLORING, even if $k = 3$, and BIGGEST CLASS IN THE GAME, even if G is cubic, are NP-complete. We conjecture that the BIPARTITE ANARCHY problem is NP-complete.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Definições e Notações	2
1.2 Organização e Principais Resultados	7
2 Jogo da Coloração	9
2.1 Existência do Equilíbrio de Nash Puro	11
2.2 Limites na Coloração	14
3 Novos Limites e Comparações	19
3.1 Limite 1: $k \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}$	19
3.2 Limite 2: $k \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$	21
3.3 Limite 3: $k \leq 1 + l(D)$	22
4 O Preço da Anarquia em Classes de Grafos	24
4.1 Bipartido	25
4.2 Ciclos (C_n)	27
4.3 Caminhos (P_n)	29
4.4 Completos (K_n)	30
4.5 Bipartido Completo ($K_{m,n}$)	30
5 Complexidade do Jogo de Coloração	32
5.1 Coloração do Jogo	33
5.2 Maior Classe do Jogo	33
5.3 Anarquia Bipartida	34
6 Conclusão	35
Referências Bibliográficas	38

Lista de Figuras

1.1	Dilema dos Prisioneiros.	2
1.2	Dilema dos Prisioneiros com preferências dado o conhecimento da escolha do outro prisioneiro.	2
1.3	Grafo $G = (V, E)$ onde, $\Delta(G) = 5$ e $\Delta_2(G) = \max_{u \in V} \max_{v \in N(u): \deg(v) \leq \deg(u)} \deg(v) = 3$	3
1.4	Exemplo da construção de Mycielski, (a) K_2 ; (b) C_5 ; (c) Grafo de Grötzsch.	5
1.5	Tabela da Função Potencial com o cálculo.	7
1.6	Tabela da Função Potencial com o resultado do cálculo.	7
2.1	Exemplo de Jogo $\Gamma(G)$ com 3 configurações até o equilíbrio de Nash c_2 . 10	
2.2	Grafo $G = (V, E)$ com $\chi(G) = 3$, onde L_δ (b) é lexicograficamente melhor que L_o (a).	11
2.3	Exemplo de coloração ótima em equilíbrio o' que não produz um vetor lexicograficamente melhor.	12
2.4	Exemplo de um grafo G com $\chi(G) = 3$ e uma coloração o'' que produz um vetor lexicograficamente melhor, dentre todas as colorações possíveis, e não é ótima.	13
3.1	Grafo $G = (V, E)$ e equilíbrio de Nash com $k = 5$, indicações do $\max_i \min \{d_i, i - 1\}$ e estabelecimento que $4 = \max_i \min \{d_i, i - 1\} + 1$ atingido nos vértices a, b, f e g	20
3.2	Temos $[(d_i(u), i - 1), \max_{v \in N(u): d(v) \leq d(u)} \deg(v)]$ (a) Temos $\Delta_2(G) = 3$ e $\max_i \min \{d_i, i - 1\} = 2$; (b) Temos $\Delta_2(G) = 2$ e $\max_i \min \{d_i, i - 1\} = 3$	21
3.3	Grafo $G = (V, E)$, onde $\max_{H \subseteq G} \delta(H) = 3$ e $k = 5$	22
3.4	(a) Grafo original; (b) $l(D) = 2$ e $k = 4$; (c) $l(D) = k - 1 = 3$	23
4.1	Grafo $G = (V, E)$ com as classes de cores, na configuração c , em ordem crescente, com a preferência dos vértices em mudar de cor.	25
4.2	Grafo Bipartido colorido com $\frac{n}{2} + 1$ cores.	26
4.3	Grafo Bipartido com mais 1 aresta.	26

4.4	Grafo Bipartido com menos 1 aresta.	27
4.5	C_{2n}	28
4.6	C_{2n+1}	29
4.7	P_n	29
4.8	P_n	30
4.9	$K_{m,n}$	31
6.1	Grafo de Grötzsch com todas as colorações possíveis retornadas pelo jogo: (a) $L = \{5, 3, 2, 1\}$; (b) $L = \{4, 4, 2, 1\}$; (c) $L = \{4, 4, 2, 1\}$	37
6.2	Árvore onde em (a) temos $k = \chi(G)$ e em (b) temos $k = 4 = \epsilon(c(G))+1$.	37

Lista de Tabelas

6.1	Comparação entre os limites para $\chi(G)$ e k	35
6.2	Limites superiores para o Preço da Anarquia das classes de grafos analisadas nesta dissertação.	36

Capítulo 1

Introdução

A Teoria dos Jogos é uma área da matemática aplicada que tem sido estudada e utilizada em diversas áreas como economia, biologia, sociologia e muitas outras. Esta teoria é capaz de modelar situações em que há conflitos e/ou cooperação entre agentes que atuem guiados por interesse próprio, buscando sempre maximizar seus benefícios. Normalmente, nessas situações, dois ou mais agentes interagem entre si de forma que a escolha de um, influencia na escolha do outro. Os resultados da teoria dos jogos tanto podem ser aplicados a simples jogos de entretenimento como a aspectos significativos da vida em sociedade.

Mas, o que é um jogo? A Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. Os elementos básicos de um jogo são seu conjunto de jogadores $J = \{J_1, \dots, J_n\}$ e o conjunto de estratégias $S_i, \forall J_i \in J$ (Ou seja, cada jogagor J_i possui seu conjunto de estratégias S_i). Quando cada jogador J_i escolhe sua estratégia $s \in S_i$, temos então uma configuração s no espaço de todas as situações possíveis, $S = \{S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n\}$. Cada jogador tem interesse ou preferências para uma situação no jogo. Em termos matemáticos, em um jogo $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ cada jogador tem uma função utilidade (ou recompensa) que atribui um número real a cada situação do jogo, i.e, $\lambda_i : S \rightarrow \mathbb{R}$. Para ilustrar, utilizaremos um dos jogos mais importantes e clássicos da área de Teoria dos Jogos conhecido como Dilema dos Prisioneiros. Para mais detalhes e exemplos de jogos, recomendamos ao leitor interessado que veja [6, 11, 15, 19].

Exemplo 1.1 (Dilema dos Prisioneiros) *Dois Prisioneiros, que chamaremos de P_1 e P_2 , estão sendo julgados por um crime onde a pena máxima é de 9 anos. Cada prisioneiro tem as opções de confessar o crime ou permanecer em silêncio. Se ambos confessarem, eles terão suas penas reduzidas por colaborarem e ficarão presos por apenas 6 anos. Se apenas um prisioneiro confessar e o outro permanecer em silêncio, o prisioneiro que confessar será premiado com a liberdade e o outro terá de cumprir*

a pena máxima. Se ambos permanecerem em silêncio a pena será de 1 ano. Porém, eles terão de escolher confessar ou silenciar sem saber a resposta do outro, pois serão entrevistados separadamente.

P_1, P_2	Confessar	Silenciar
Confessar	6, 6	0,9
Silenciar	9, 0	1, 1

Figura 1.1: Dilema dos Prisioneiros.

Nossos jogadores são os prisioneiros P_1 e P_2 , $J = \{P_1, P_2\}$. Cada jogador possui seu conjunto de estratégias S_1 e S_2 respectivamente, onde $S_1 = S_2 = \{Confessar, Silenciar\}$. Adotando as brevíaturas \mathcal{C} para *Confessar* e \mathcal{S} para *Silenciar*, nosso espaço de situações possíveis é $S = \{(\mathcal{C}, \mathcal{C}), (\mathcal{C}, \mathcal{S}), (\mathcal{S}, \mathcal{C}), (\mathcal{S}, \mathcal{S})\}$, e, por simetria, as recompensas para cada situação do jogo são iguais para os prisioneiros P_1 e P_2 , i.e., $\lambda_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \lambda_2(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = 6$, $\lambda_1(\mathcal{C}, \mathcal{S}) = \lambda_2(\mathcal{S}, \mathcal{C}) = 0$, $\lambda_1(\mathcal{S}, \mathcal{C}) = \lambda_2(\mathcal{C}, \mathcal{S}) = 9$ e $\lambda_1(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = \lambda_2(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 1$. A Figura 1.1 resume o jogo.

Vamos analisar a escolha do prisioneiro P_1 de acordo com as possíveis escolhas do prisioneiro P_2 . Se o prisioneiro P_2 escolher *Confessar*, é preferível ao prisioneiro P_1 escolher *Confessar* também, pois ficará 6 anos preso ao invés de receber a pena máxima de 9 anos. Se o prisioneiro P_2 escolher *Silenciar*, é preferível ao prisioneiro P_1 escolher *Confessar*, pois, ao invés de receber a pena de 1 ano, ficará livre. A mesma análise pode ser feita pelo prisioneiro P_2 . Assim, é preferível para um prisioneiro escolher *Confessar*. Pois, com esta escolha cada prisioneiro fica preso no máximo 6 anos. Por outro lado, se ambos ficassem em silêncio, cada um ficaria preso apenas 1 ano na prisão. Porém, este não é um resultado estável, mesmo que os prisioneiros combinem previamente, uma vez que no momento da escolha um prisioneiro tem motivação de trair e ficar menos tempo preso.

Figura 1.2: Dilema dos Prisioneiros com preferências dado o conhecimento da escolha do outro prisioneiro.

1.1 Definições e Notações

Esta seção é dedicada às definições e notações principais desta dissertação. Ao longo do texto, apresentamos mais algumas definições, notações e conceitos que são utilizados a partir de um determinado ponto da dissertação ou somente em

um capítulo ou seção. Para o leitor que deseja mais detalhes sobre as definições relacionadas a teoria dos grafos, recomendamos a leitura de [2, 22] e sobre teoria dos jogos [6, 11, 15, 19].

Denotamos por $G = (V, E)$ um *grafo* simples não-direcionado: onde V é o conjunto de *vértices* e E é o conjunto de *arestas* de cardinalidades $|V| = n$ e $|E| = m$. Para um vértice $v \in V$ denotamos $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ o conjunto de seus *vizinhos* e $\deg(v) = |N(v)|$ o seu *grau*. Por favor acompanhe a Figura 1.3 para o restante das definições do parágrafo. Sejam $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(v)$ o grau mínimo de G , $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$ o grau máximo de G e $\Delta_2(G) = \max_{u \in V} \max_{v \in N(u): \deg(v) \leq \deg(u)} \deg(v)$ é o grau máximo que um vértice v pode ter, sujeito a condição que v é adjacente a pelo menos um vértice u de grau maior ou igual a $\deg(v)$.

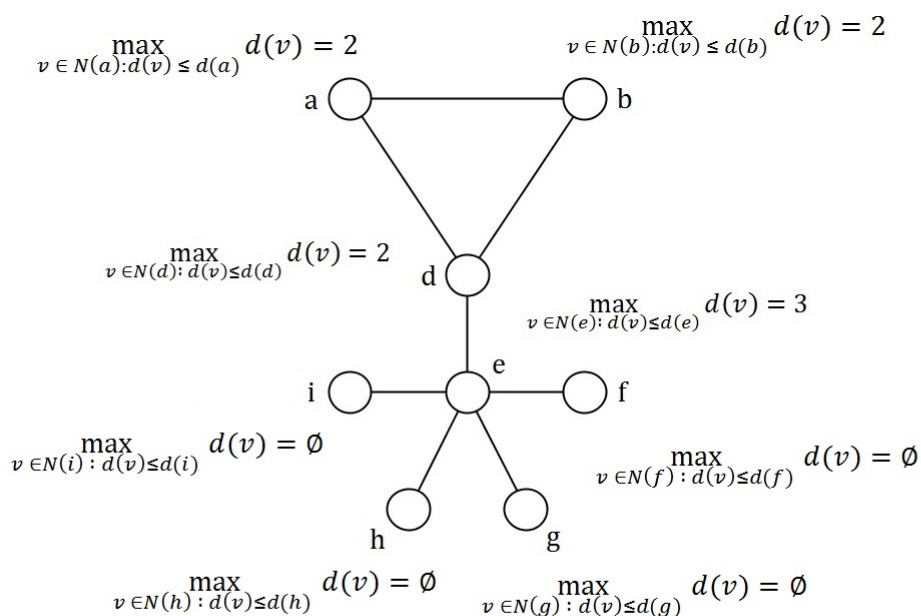


Figura 1.3: Grafo $G = (V, E)$ onde, $\Delta(G) = 5$ e $\Delta_2(G) = \max_{u \in V} \max_{v \in N(u): \deg(v) \leq \deg(u)} \deg(v) = 3$.

Uma *coloração* de vértices de G é uma atribuição de k cores, $1, 2, \dots, k$, para os vértices de G . Se dois vértices adjacentes não possuem a mesma cor, então a coloração é dita *própria*. Denotamos uma coloração própria de vértices por k -coloração. O *número cromático* $\chi(G)$ de G , é o menor número k para qual G é k -colorível. Quando $\chi(G) = k$, G é dito ser k -cromático.

Sejam G e H . H é dito *subgrafo* de G se: $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Nós dizemos que um grafo G é k -*crítico* quando $\chi(H) < \chi(G)$ para todo subgrafo

próprio H de G .

Seja A um subconjunto dos vértices de G , $A \subseteq V(G)$. O subgrafo H de G induzido por A é denotado por $G[A]$ e definimos por: $V(H) = V(G[A]) = A$ e $E(H) = E(G[A]) = \{xy \in E(G) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$. H é dito *subgrafo induzido* de G .

Um grafo G é dito *completo* quando todos os seus pares de vértices distintos são adjacentes. O grafo completo de n vértices é frequentemente denotado por K_n .

Seja A um subconjunto de vértices de G . A é uma *clique* de G quando $G[A]$ é um grafo completo. Denotamos por $\omega(G)$ o tamanho da clique máxima de um grafo G .

Um grafo G é dito *Nulo* quando todos os seus pares de vértices distintos não são adjacentes. O grafo nulo de n vértices é frequentemente denotado por N_n .

Seja S um subconjunto de vértices de G . S é um *conjunto independente* de G quando $G[S]$ é um grafo nulo. Denotamos por $\alpha(G)$ o número de vértices em um conjunto independente máximo de G .

A *excentricidade* $\epsilon(v)$ de um vértice v de G , denotado por $\epsilon(v)$, é o valor da maior distância de v aos outros vértices de G , $\epsilon(v) = \max_{w \in V(G)} \{d(v, w)\}$.

O centro $c(G)$ de um grafo G é conjunto $c(G) = \{v \in V(G) \mid \min \epsilon(v)\}$ dos vértices de G que tem a menor excentricidade.

Um grafo *ciclo* é um grafo que consiste de um único ciclo. O grafo ciclo com n vértices é chamado C_n .

Um grafo *acíclico* é um grafo que não possui ciclos.

Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo.

Um grafo *Caminho* é um grafo que consiste em um único caminho. O grafo caminho de n vértices é frequentemente denotado por P_n , $n \geq 1$.

Um grafo $G = (V, E)$ é um grafo *Bipartido* se o seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois conjuntos independentes V_1 e V_2 , onde $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dizemos que (V_1, V_2) é uma *bipartição* de V .

Um grafo *Bipartido Completo* é um grafo bipartido tal que cada vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2 .

Definimos um hipergrafo como um par ordenado (V, A) , no qual $A \subseteq (2^V \setminus \emptyset)$, onde 2^V é o conjunto das partes de V . O conjunto V é chamado de conjunto de vértices e o conjunto A é o conjunto de hiperarestas. Ou seja, um hipergrafo é um conjunto de vértices associado com um conjunto de hiperarestas, sendo que cada hiperaresta é um subconjunto não vazio do conjunto de vértices.

Família de Mycielski, Mycielski em 1955 [13] achou uma construção que produz, a partir de um grafo G livre de triângulos k -cromático, um hipergrafo G livre de triângulos $k + 1$ -cromático. Dado $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, adicionamos um conjunto de vértices $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ e mais um vértice w . Começando com $G'[V] = G$, adicionamos arestas para fazer u_i adjacente a toda vizinhança de v_i ,

$N(v_i)$ e fazemos $N(w) = U$. Note que U é um conjunto independente em G' . A construção de Mycielski começa com um completo $G = K_\omega$, $\omega \geq 2$. Para o K_2 , uma iteração da construção de Mycielski produz o C_5 , 3-cromático. A segunda iteração produz o grafo de Grötzsch [7], 4-cromático (Figura 1.4).

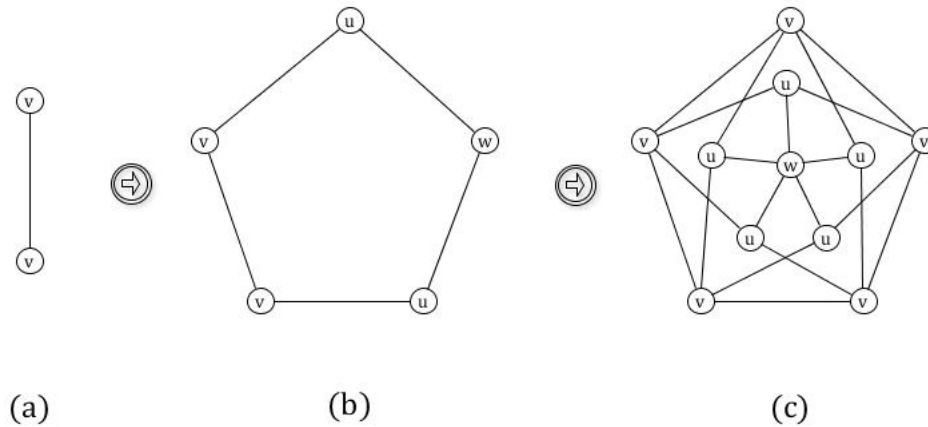


Figura 1.4: Exemplo da construção de Mycielski, (a) K_2 ; (b) C_5 ; (c) Grafo de Grötzsch.

Em um jogo, quando cada jogador faz a cada momento a escolha de apenas uma estratégia, cada uma dessas estratégias é chamada de *estratégia pura* e estes jogos são chamados de *jogos com estratégias puras*. Quando os jogadores atingem um resultado onde cada jogador não possui interesse em mudar de estratégia unilateralmente, dizemos que o vetor de estratégias que representa tal resultado é um *equilíbrio de Nash puro*. Por exemplo, no Dilema dos Prisioneiros o resultado onde ambos confessam o crime é um equilíbrio de Nash puro, pois estando neste resultado nenhum dos prisioneiros diminui seus anos de cadeia ao mudarem suas escolhas individualmente (ou unilateralmente). Formalmente temos:

A função social é a recompensa corrente $\lambda_i(s)$ do jogador J_i usando a estratégia s_i . Representamos por $\lambda_i(s_k, s_{-i})$ a recompensa resultante após a mudança do Jogador J_i da estratégia s_i para a estratégia s_k .

Definição 1.2 Um vetor de estratégias $s \in S$ é dito um *equilíbrio de Nash puro*, ENP, se, $\forall J_i \in J$, $\lambda_i(s_k, s_{-i}) \leq \lambda_i(s)$, $\forall s_k \in S_i$.

Uma vez definida a função social do jogo, $\lambda_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, precisamos saber como os resultados em equilíbrio se comparam com os melhores resultados do jogo, definido por esta função social. Dada uma função social, um resultado do jogo é chamado de resultado *ótimo social* se a função aplicada ao resultado nos dá o maior benefício (ou menor custo) dentre todos os possíveis resultados do jogo. Um resultado ótimo social pode inclusive não estar em equilíbrio.

Por exemplo, se considerarmos a função social do Dilema dos Prisioneiros 1.1, como o tempo que os prisioneiros ficam presos, o resultado ótimo social é aquele onde ambos os prisioneiros ficam presos 1 ano. Já o resultado em equilíbrio é aquele onde ambos os prisioneiros ficam presos 6 anos, que é 6 vezes maior que a solução ótima social.

Baseado neste tipo de comparação, definimos a seguir o *preço da anarquia* como, PoA , a maior razão entre o valor de um resultado em equilíbrio e o valor de um resultado ótimo social. Esse conceito foi introduzido por Koutsoupas e Papadimitriou no artigo *Worst-case Equilibria* [10].

Definição 1.3 *Um jogo é dito ser um Jogo Potencial se o incentivo de todos os jogadores a mudar a sua estratégia pode ser expresso usando uma única função global chamada função potencial.*

A *função potencial* é uma ferramenta útil para analisar propriedades de equilíbrio de jogos, uma vez que os incentivos de todos os jogadores são mapeados em uma única função, e o conjunto de equilíbrios de Nash puros podem ser encontrados através da localização dos ótimos locais da função potencial. O conceito foi proposto em 1973 por Robert W. Rosenthal [17] e depois por D. Monderer e L.S Shapley em 1996 [12].

Definição 1.4 *Seja $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ um jogo. Uma função $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ é um Potencial para o jogo Γ , se $\forall i \in J$ e $\forall s_{-i} \in S_{-i}$, onde $S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$, temos:*

$$\lambda_i(s_{-i}, y) - \lambda_i(s_{-i}, z) > 0 \text{ sse } \Phi(s_{-i}, y) - \Phi(s_{-i}, z) > 0, \forall y, z \in S_i$$

Exemplo 1.5 *No Dilema dos prisioneiros (Figura 1.1) a função potencial pode ser definida como:*

$$\Phi(s) = \begin{cases} \frac{\lambda_i(s_1) + \lambda_i(s_2)}{3}, & \text{se } s_1 \neq s_2, \\ 2 \cdot \lambda_i(s_1) + 2 \cdot \lambda_i(s_2), & \text{se } s_1 = s_2 = S, \\ \lambda_i(s_1) - \lambda_i(s_2), & \text{se } s_1 = s_2 = C. \end{cases}$$

ficando assim:

ϕ	Confessar	Silenciar
Confessar	$\lambda_i(s_1) - \lambda_i(s_2) = 6 - 6$	$\frac{\lambda_i(s_1) + \lambda_i(s_2)}{3} = \frac{0+9}{3}$
Silenciar	$\frac{\lambda_i(s_1) + \lambda_i(s_2)}{3} = \frac{9+0}{3}$	$2\lambda_i(s_1) + 2\lambda_i(s_2) = 2.1 + 2.1$

Figura 1.5: Tabela da Função Potencial com o cálculo.

e portanto:

Φ	Confessar	Silenciar
Confessar	0	3
Silenciar	3	4

Figura 1.6: Tabela da Função Potencial com o resultado do cálculo.

Agora vamos comparar a tabela da Figura 1.6, Função Potencial, com a tabela de configurações e recompensas da Figura 1.1. Note que o potencial 0 indica o equilíbrio de Nash puro para a configuração $(Confessar, Confessar)$ com recompensa $(6, 6)$.

Nós utilizaremos a *função potencial* no Capítulo 2 na prova do Teorema 2.7, quando é feita a análise de complexidade.

1.2 Organização e Principais Resultados

O primeiro assunto estudado durante o nosso mestrado foi o trabalho proposto por Fernandes, Ferreira, Miyazawa e Wakabayashi [4], onde é considerado um problema de bin packing “jogo-teórico”. Neste artigo é investigado a versão 2D, onde o objetivo é empacotar quadrados de área menor que 1 em *bins* (quadrados unitários) de forma que usemos o menor número de bins para isso. Cada jogador controla apenas 1 quadrado a ser empacotado. O jogo começa com apenas 1 quadrado em cada bin. Para permanecer no bin os quadrados pagam uma taxa (um custo) que é a área do quadrado à ser empacotado dividido pela área total ocupada no bin (contando com a área do quadrado que planeja entrar no bin), e portanto cada quadrado deseja minimizar essa taxa. A teoria dos jogos é usada como uma ferramenta para essa minimização. Foram identificados todos os problemas em aberto apresentados no artigo e sugeridos alguns por nós mesmos, porém nenhum resultado foi acrescentado por nós.

O segundo trabalho que estudamos, assunto desta dissertação, é um jogo proposto em 2008 por Kontogiannis, Panagopolou e Spirakis [16] para a coloração de vértices de um grafo qualquer, que tem por base a pesquisa local. A coloração como um jogo será tratada no Capítulo 2. Neste jogo, o conjunto de jogadores é o conjunto de vértices V de G , o conjunto de cores X é o conjunto de estratégias possíveis para cada vértice de G e a recompensa para cada vértice é o número de vértices que possui a sua classe de cor. Começamos o jogo com uma coloração própria de vértices arbitrária (onde para cada vértice é atribuída uma cor diferente), faz-se uma mudança local, permitindo que cada vértice (um por vez) mude para outra classe de cor com maior cardinalidade, até que não seja mais possível uma mudança local. Neste ponto obtemos o equilíbrio de Nash puro para o jogo da coloração. Ainda neste capítulo mostraremos que todo grafo tem um jogo que produz a coloração ótima $\chi(G)$, e mostraremos limites superiores para a coloração produzida pelo jogo $\Gamma(G)$. No Capítulo 3 mostramos que nem todos os limites superiores conhecidos na literatura para o número cromático $\chi(G)$ são também limites superiores para a coloração produzida pelo jogo $\Gamma(G)$. No Capítulo 4, estabelecemos limites superiores para o preço da anarquia para a classe dos grafos bipartidos, ciclos e caminhos; e conjecturamos limites superiores para o preço da anarquia para a classe das árvores e da família de Mycielski. No Capítulo 5 nós consideramos 3 problemas associados ao jogo da coloração: COLORAÇÃO DE JOGO, MAIOR CLASSE DO JOGO e ANARQUIA BIPARTIDA, nos quais 2 deles provamos que são NP-completos, COLORAÇÃO DO JOGO, mesmo se $k = 3$, e MAIOR CLASSE DO JOGO, mesmo se G é cúbico. Conjecturamos que o problema ANARQUIA BIPARTIDA é NP-completo.

Capítulo 2

Jogo da Coloração

Dado um grafo simples não direcionado $G = (V, E)$, definimos $\Gamma(G)$ o *jogo da coloração de G* , como: Os vértices de G sendo os jogadores, o conjunto de cores $X = \{1, \dots, n\}$ sendo o conjunto de estratégias para cada jogador e a *configuração* ou o *perfil* de estratégias sendo a sequência $c = (x_v)_{v \in V} \in X^n$, onde x_v é a cor escolhida pelo vértice v . Para uma configuração $c \in X^n$ e uma cor $x \in X$, denotamos por $n_x(c)$ o número de vértices que são coloridos por x em c , i.e. $n_x(c) = |\{v \in V : x_v = x\}|$. A *recompensa* que o vértice $v \in V$ recebe na configuração $c \in X^n$ é

$$\lambda_v(c) = \begin{cases} 0, & \text{se } \exists u \in N(v) : x_u = x_v, \\ n_{x_v}(c), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um *equilíbrio de Nash puro* para $\Gamma(G)$ é a configuração $c \in X^n$ tal que nenhum vértice pode aumentar a sua recompensa desviando unilateralmente.

Definição 2.1 *Uma configuração $c \in X^n$ de $\Gamma(G)$ é um equilíbrio de Nash puro se, $\forall v \in V, \lambda_v(x, x_{-v}) \leq \lambda_v(c), \forall x \in X$.*

Exemplo 2.2 *Considere o grafo $G = (V, E)$ (Figura 2.1).*

O conjunto de jogadores é $V = \{a, b, d, e, f\}$ e o conjunto de cores é $X = \{1, \dots, 5\}$. O jogo começa com uma coloração própria arbitrária (por exemplo, a coloração própria trivial, c_0 , onde para cada vértice é atribuída uma cor diferente). Faz-se uma mudança local, permitindo que cada vértice (um por vez) mude para outra classe de cor de forma que a sua classe de cor cresça, até que não seja mais possível uma mudança local.

Assim, neste grafo temos inicialmente $\lambda_{v_i}(c_0) = \lambda_{v_j}(c_0) = 1, \forall v_i, v_j \in V$, onde c_0 é a configuração inicial do jogo. Vamos assumir que a ordem alfabética é a sequência de vezes de jogar dos vértices de G . O vértice a quer aumentar sua recompensa e como todas as classes de cor possuem a mesma cardinalidade, qualquer

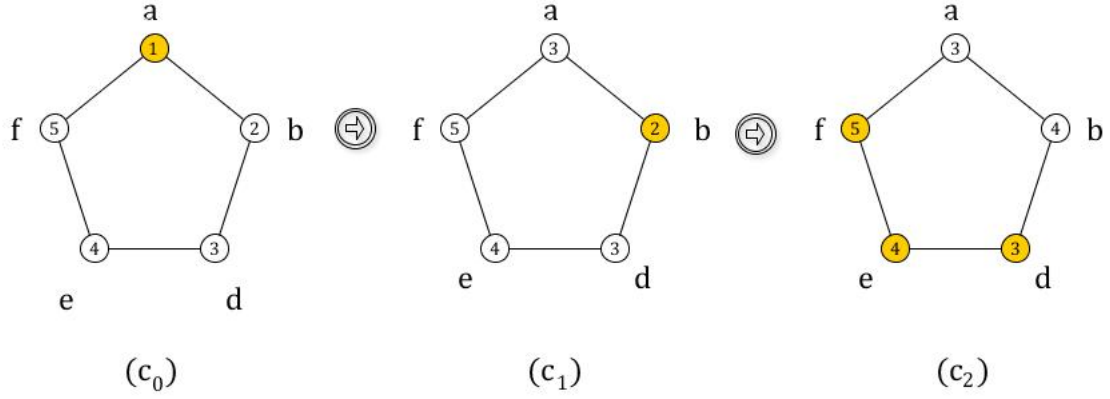


Figura 2.1: Exemplo de Jogo $\Gamma(G)$ com 3 configurações até o equilíbrio de Nash c_2 .

cor de um vértice não adjacente que for escolhida aumentará a sua recompensa, por exemplo a cor 3 do vértice d , ficando o vértice a com $\lambda_a(c_1) = \lambda_d(c_1) = 2$ e $\lambda_b(c_1) = \lambda_e(c_1) = \lambda_f(c_1) = 1$, onde c_1 é a configuração do jogo após a mudança do vértice a . Seja b o próximo jogador. Ele gostaria de jogar na cor 3, pois é a de maior cardinalidade, porém os vértices a e d são seus vizinhos e sua recompensa seria $\lambda_b(c_2) = 0$, logo ele escolherá outra cor, por exemplo a cor 4 que é a cor do vértice e , ficando o vértice b com $\lambda_b(c_2) = \lambda_e(c_2) = \lambda_a(c_2) = \lambda_d(c_2) = 2$ e $\lambda_f(c_2) = 1$, onde c_2 é a configuração após a mudança do vértice b . Na vez dos vértices d, e e f eles se mantêm com suas cores, pois não há mais incentivo para uma mudança. Em qualquer mudança feita por eles a partir da configuração c_2 , a recompensa diminui ficando igual a 0, $\forall v \in V$. Logo atingimos o equilíbrio de Nash em c_2 .

Um vértice $v \in V$ está *insatisfeito* na configuração $c \in X^n$ se existe uma cor $x \neq x_v$, tal que $\lambda_v(x, x_{-v}) > \lambda_v(c)$; caso contrário, dizemos que v está *satisfeito*. Para um vértice insatisfeito $v \in V$ na configuração c , dizemos que v executa uma *ação egoísta* se v desvia unilateralmente para alguma cor $x \neq x_v$ tal que $\lambda_v(x, x_{-v}) > \lambda_v(c)$.

O *custo social* $CS(G, c)$ de uma configuração $c \in X^n$ de $\Gamma(G)$ é o número de cores distintas em c , i.e., $CS(G, c) = |\{x \in X | n_x(c) > 0\}|$. Dado um grafo G , o *Preço da Anarquia*, $PoA_\Gamma(G)$, considera, sobre todo equilíbrio de Nash, o maior custo social em relação ao número cromático:

$$PoA_\Gamma(G) = \max_{c: c \text{ é um ENP}} \frac{CS(G, c)}{\chi(G)}$$

. Exemplo, na Figura 2.1 temos $\max_{c: c \text{ é um ENP}} CS(G, c) = 3$ e $\chi(G) = 3$, Logo $PoA_\Gamma(G) = \frac{3}{3} = 1$.

2.1 Existência do Equilíbrio de Nash Puro

O primeiro resultado estabelece que todo jogo da coloração de grafos admite um equilíbrio de Nash puro que o colore otimamente.

Teorema 2.3 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Dado um grafo G existe um jogo da coloração de grafos $\Gamma(G)$ que possui um equilíbrio de Nash puro c , tal que $SC(G, c) = \chi(G)$.*

Demonstração. Considere uma coloração ótima $o \in X^n$ de G . Então sabemos que o utiliza $k = \chi(G)$ cores. Seja o vetor $L_o = (l_o(1), l_o(2), \dots, l_o(k))$, um vetor ordenado decrescentemente, $l_o(i) \geq l_o(j)$ se $i \leq j$, de acordo com a cardinalidade das cores utilizadas em o , onde $l_o(j)$ é o número de vértices que receberam a cor que ocupa a j -ésima posição em L_o . Seja ainda $L_{\hat{o}}$, um vetor lexicograficamente melhor dentre todas as colorações ótimas (ou seja, $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $j \leq i$, $l_o(i) \leq l_{\hat{o}}(j)$ e $l_o(i+1) \leq l_{\hat{o}}(i+1)$), corresponde a coloração \hat{o} (Como no exemplo da Figura 2.2).

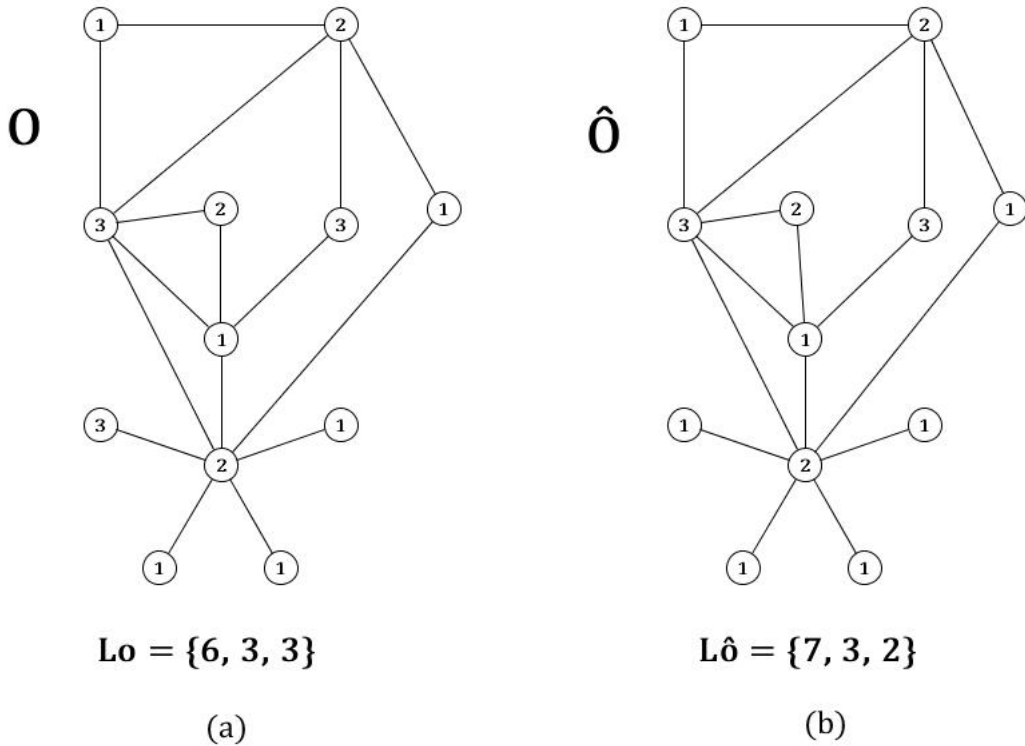


Figura 2.2: Grafo $G = (V, E)$ com $\chi(G) = 3$, onde $L_{\hat{o}}$ (b) é lexicograficamente melhor que L_o (a).

Queremos mostrar que \hat{o} é um equilíbrio de Nash puro. Como \hat{o} é uma coloração própria, todos os vértices de G possuem recompensa $\lambda_v(\hat{o}) \geq 1$, e ainda, $L_{\hat{o}}$ é

lexicograficamente melhor. Agora, considere um vértice v com a cor \hat{o}_v e i a posição de \hat{o}_v em $L_{\hat{o}}$. Se v tivesse incentivo de escolher uma cor $x \neq \hat{o}_v$, então $n_x(\hat{o}) > n_{\hat{o}_v}(\hat{o})$, isso produziria coloração ótima \hat{o}' lexicograficamente melhor que \hat{o} , contradição. Portanto \hat{o} é um equilíbrio de Nash e $SC(G, \hat{o}) = \chi(G)$. \square

Observação 2.4 *Como vimos acima, todo vetor L_o correspondente a uma coloração ótima que é lexicograficamente melhor dentre todas as colorações ótimas de um grafo G , é um equilíbrio de Nash puro. Porém, nem toda coloração ótima de um grafo G que está em equilíbrio produz um vetor L_o lexicograficamente melhor dentre todas as colorações ótimas (Exemplo na Figura 2.3).*

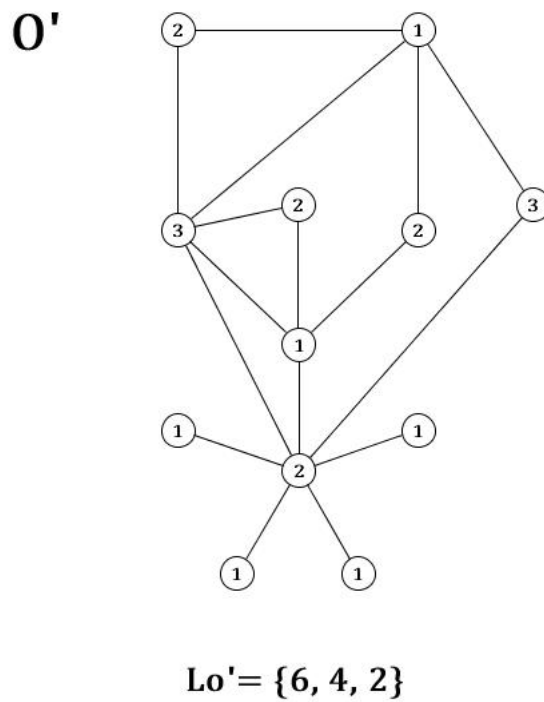
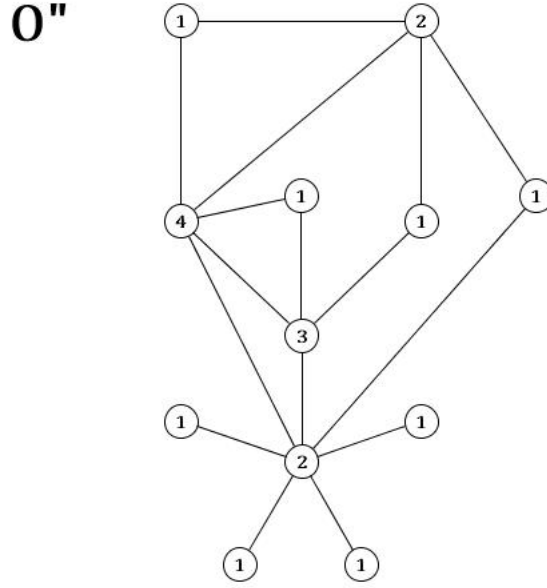


Figura 2.3: Exemplo de coloração ótima em equilíbrio o' que não produz um vetor lexicograficamente melhor.

Observação 2.5 *Uma coloração que produz o vetor lexicograficamente melhor dentre todas as colorações possíveis de um grafo G nem sempre é ótima (Figura 2.4).*

Lema 2.6 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Todo equilíbrio de Nash puro c de $\Gamma(G)$ é uma coloração própria de G .*

Demonstração. Suponha, por contradição, que c não é uma coloração própria. Então, existe algum vértice $v \in V$ que recebe $\lambda_v(c) = 0$. Como o jogo começa com vértices com cores diferentes, temos que existe alguma cor $x \in X$ tal que $x_v \neq x, \forall v \in V$. Consequentemente, temos $\lambda_v(x, x_{-v}) = 1 > 0 = \lambda_v(c)$. \square



$$\mathbf{Lo''} = \{8, 2, 1, 1\}$$

Figura 2.4: Exemplo de um grafo G com $\chi(G) = 3$ e uma coloração o'' que produz um vetor lexicograficamente melhor, dentre todas as colorações possíveis, e não é ótima.

Teorema 2.7 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Todo Jogo de coloração de grafo $\Gamma(G)$ possui pelo menos um equilíbrio de Nash puro e pode ser computado em $O(n \cdot \alpha(G))$ passos egoístas, onde n é o número de vértices de G e $\alpha(G)$ o número de vértices em um conjunto independente máximo de G .*

Demonstração. Vamos definir uma função potencial $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde $S \subseteq X^n$ é o conjunto de todas as configurações de coloração própria de G , como $\Phi(c) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} n_x^2(c)$ para toda coloração própria de c . Fixando a coloração própria c . Assuma que o vértice $v \in V$ pode aumentar a sua recompensa mudando para a cor $y \neq x_v$, $y \in X$. Isso implica que $n_y(c) \geq n_{x_v}(c)$. Se v de fato mudar para y , então resulta em uma nova configuração c' que também é própria. O aumento da recompensa de v é

$$\lambda(c') - \lambda(c) = n_y(c') - n_{x_v}(c) = n_y(c) + 1 - n_{x_v}(c).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Phi_v(c') - \Phi_v(c) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in X} n_x^2(c') - \frac{1}{2} \sum_{x \in X} n_x^2(c) = \frac{1}{2} (n_y^2(c') + n_{x_v}^2(c') - n_y^2(c) - n_{x_v}^2(c)) \\ &= \frac{1}{2} ((n_y(c) + 1)^2 + (n_{x_v}(c) - 1)^2 - n_y^2(c) - n_{x_v}^2(c)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(n_y^2(c) + 2n_y(c) + 1 + n_{x_v}^2(c) - 2n_{x_v}(c) + 1 - n_y^2(c) - n_{x_v}^2(c)) \\
&= \frac{1}{2}(2n_y(c) + 2 - 2n_{x_v}(c)) = n_y(c) + 1 - n_{x_v}(c) = \lambda(c') - \lambda(c).
\end{aligned}$$

Portanto, se qualquer $v \in V$ faz um movimento egoísta, então o valor Φ aumentará assim como a recompensa de v pelo menos 1. Então após qualquer passo egoísta o valor de Φ aumenta no mínimo 1. Agora observe que, $\forall c \in S$ e $\forall x \in X, n_x(c) \leq \alpha(G)$, portanto,

$$\begin{aligned}
\Phi(c) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in X} n_x^2(c) \leq \sum_{x \in X} (n_x(c) \cdot \alpha(G)) \\
&= \frac{1}{2} \alpha(G) \sum_{x \in X} n_x(c) = \frac{n \cdot \alpha(G)}{2}.
\end{aligned}$$

Além disso, o menor valor de $\Phi(c) = n/2$ atingido por qualquer coloração própria trivial. Portanto, se permitirmos que qualquer vértice faça movimentos egoístas, após no máximo $\frac{n \cdot \alpha(G) - n}{2}$ passos, não haverá mais vértices podendo aumentar sua recompensa, assim um equilíbrio de Nash terá sido alcançado. \square

Algoritmo

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e o conjunto de cores $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Saída: Um equilíbrio de Nash puro $c = (x_{v_1}, \dots, x_{v_n}) \in X^n$ de $\Gamma(G)$.

Inicialização: **Para** $i = 1..n$. **fazer** $x_v = x_i$.

Repetir achar um vértice insatisfeito $v \in V$ e uma cor $x \in X$ tal que $\lambda_v(x, x_{-v}) > \lambda_v(c)$; $x_v = x$.

Até todos vértices estejam satisfeitos.

2.2 Limites na Coloração

Panagopoulou e Spirakis [16] descreveram seu jogo $\Gamma(G)$ e mostraram 4 limites superiores para o resultado do número de cores produzido pelo jogo os quais reproduzimos nesta seção.

Em 2001, Ladislav Stacho [18] provou que $\chi(G) \leq \Delta_2(G) + 1$. No próximo teorema os autores mostram que este limite superior é também um limite superior para o resultado k do jogo.

Lema 2.8 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Em um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, o número de cores utilizadas satisfaz $k \leq \Delta_2(G) + 1$ e consequentemente $k \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Considere um equilíbrio de Nash puro c de $\Gamma(G)$. Seja k o número de cores distintas usadas em c . Se $k = 1$, então G é totalmente desconexo, i.e., $\Delta(G) = \Delta_2(G) = 0$ e portanto $k = \Delta_2(G) + 1$. Assumindo que $k \geq 2$. Sejam x_i e $x_j \in X$ cores usadas em c de tal forma que possuam o menor número de vértices usando-as. Sem perda de generalidade, assumamos que $n_{x_i}(c) \leq n_{x_j}(c) \leq n_x(c)$, $x \notin \{x_i, x_j\}$ para toda cor utilizada em c . Seja v o vértice que possui a cor x_i , $x_v = x_i$, então seu $\lambda_v(c) = n_{x_i}(c)$. Agora, considere uma cor qualquer $x \neq x_i$ utilizada em c . Assumamos que não existe aresta entre o vértice v e um vértice $u \in V$, e $x_u = x$. Então, como c é um equilíbrio de Nash, temos que $n_{x_i}(c) \geq n_x(c) + 1$, contradição. Portanto, existe uma aresta entre o vértice v e pelo menos um vértice de cada cor, consequentemente o grau do vértice v é pelo menos o número de cores usadas em c menos 1, i.e., $\deg(v) \geq k - 1$. Além disso, seja u um vértice de cor $x_u = x_j$ adjacente a v . Com o mesmo argumento de v , e sabendo que $n_{x_i}(c) \leq n_{x_j}(c) \leq n_x(c)$, seja u adjacente a pelo menos um vértice de cor x , $\forall x \notin \{x_i, x_j\}$ usada em c e ainda u é adjacente a v , portanto $\deg(u) \geq k - 1$. Agora,

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &= \max_{s \in V} \max_{\substack{t \in N(s); \\ \deg(t) \leq \deg(s)}} \deg(t) \geq \max \left\{ \max_{\substack{t \in N(v); \\ \deg(t) \leq \deg(v)}} \deg(t), \max_{\substack{t \in N(u); \\ \deg(t) \leq \deg(u)}} \deg(t) \right\} \geq \\ &\geq \min\{\deg(v), \deg(u)\} \geq k - 1 \end{aligned}$$

e portanto, $k \leq \Delta_2(G) + 1$. □

Lema 2.9 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Em um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, todos os vértices que estão associados a uma classe de cor de cardinalidade 1, formam uma clique.*

Demonstração. Considere um equilíbrio de Nash puro c de um grafo $G = (V, E)$. Sejam $u, v \in V$ e x_u, x_v as cores associadas a eles respectivamente de forma que $n_{x_u}(c) = n_{x_v}(c) = 1$. Então, para ambos, a recompensa é 1. Suponha que não existe aresta entre os vértices u e v , como c é um equilíbrio, temos que $1 = \lambda_v(c) \geq \lambda_v(x_u, x_{-v}) = 2$, uma contradição. Portanto, $\forall v, u \in V$, onde $n_{x_u}(c) = n_{x_v}(c) = 1$ temos uma aresta entre eles, formando assim uma clique. □

Lema 2.10 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Em um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, o número de cores utilizadas satisfaz $k \leq \frac{n + \omega(G)}{2}$.*

Demonstração. Considere um equilíbrio de Nash puro c de $\Gamma(G)$. Assumamos que t vértices possuem recompensa igual a 1, $t \geq 0$. Então, pelo Lema 2.9, esses t vértices formam uma clique e consequentemente $t \leq \omega(G)$. Sendo $n = |V|$, temos que os

vértices restantes, $n - t$, são os vértices que possuem recompensa maior que 1, então o número de cores em c é

$$k < t + \frac{n - t}{2} = \frac{n + t}{2} \leq \frac{n + \omega(G)}{2}.$$

□

Lema 2.11 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Em um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, o número de cores utilizadas satisfaz $k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$.*

Demonstração. Considere um equilíbrio de Nash puro c de $\Gamma(G)$. Sem perda de generalidade, assuma que as k cores utilizadas em c são x_1, x_2, \dots, x_k . Seja V_i , $1 \leq i \leq k$, o subconjunto dos vértices de V tal que $v \in V_i$ se $x_v = x_i$. Sem perda de generalidade, assuma ainda que $|V_1| \leq |V_2| \leq \dots \leq |V_k|$. Observe que, para cada vértice $v_i \in V_i$, existe aresta entre v_i e algum $v_j \in V_j$, $\forall j > i$. Senão, v_i poderia aumentar sua recompensa escolhendo a cor x_j . O que implica que

$$m \geq \sum_{i=1}^{k-1} (k - i)|V_i|,$$

e desde que $V_i \geq 1$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, e como todo vértice de V_i possui pelo menos uma aresta em um vértice de V_j temos que,

$$m \geq \sum_{i=1}^{k-1} (k - i) = \frac{(k - 1)k}{2}.$$

Portanto,

$$k^2 - k - 2m \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}.$$

□

Teorema 2.12 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Em um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, o número de cores utilizadas satisfaz $k \leq n - \alpha(G) + 1$.*

Demonstração. Considere um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$. Seja t a maior recompensa de um vértice em c sobre todos os vértices de V , i.e.,

$$t = \max_{x \in X} n_x(c).$$

e sejam ainda V_1, \dots, V_t subconjuntos de V , onde $v \in V_i$ se, e somente se, $\lambda_v(c) = i$, e seja k_i o número de cores que aparecem em V_i . Logo,

$$|V_i| = k_i \cdot i \text{ e } k = \sum_{k=1}^t k_i.$$

Seja I o conjunto independente máximo de G . Os vértices em V_1 formam uma clique pelo Lema 2.9, portanto I contém no máximo um vértice em V_1 . Vamos dividir a demonstração em dois casos:

Primeiro caso: Se $\exists i > 1$ tal que $k_i = 1$ e I contém todos os vértices em V_i , então $k \leq n - \alpha(G) + 1$.

Seja x a única cor que apareça em V_i . I possui todos os vértices de V_i , então ele não pode ter nenhum vértice em V_1, \dots, V_{i-1} (Senão não estaria em equilíbrio) e além disso cada vértice em V_i possui pelo menos um vizinho em cada cor que aparece em $V_{i+1} \cup \dots \cup V_t$ e portanto,

$$\begin{aligned} |I| = \alpha(G) &\leq |V_i| + \sum_{j=i+1}^t |V_j| - \sum_{j=i+1}^t k_j = \\ &= \underbrace{i \cdot k_i + \sum_{j=i+1}^t j \cdot k_j}_{= n - \sum_{j=1}^{i-1} j \cdot K_j} - \underbrace{\sum_{j=i+1}^t k_j}_{= k - \sum_{j=1}^i k_j} \\ &= (n - \sum_{j=1}^{i-1} j \cdot K_j) - (k - \sum_{j=1}^i k_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(G) \leq n - \sum_{j=1}^{i-1} |V_j| - k + \sum_{j=1}^i k_j &\Rightarrow k \leq n - \alpha(G) + \sum_{j=1}^{i-1} (k_j - |V_j|) + k_i \\ k &\leq n - \alpha(G) + \sum_{j=1}^{i-1} k_j(1 - j) + k_i \leq n - \alpha(G) + k_i \\ k &\leq n - \alpha(G) + 1. \end{aligned}$$

Segundo caso: $\forall i > 1$ com $k_i \neq 1$, I não pode conter mais que $|V_i| - k_i$ vértices entre os vértices V_i .

Para $k_i = 0$ é verdade (e daí $|V_i| = 0$). Agora, assumamos que $k_i \geq 2$. Para todo vértice $v_i \in V_i$ deve existir uma aresta entre v_i e um vértice de cada um dos restantes $k_i - 1$ que aparece em V_i (caso contrário, v_i poderia mudar sua cor e aumentar a sua recompensa por 1, o que contradiz o equilíbrio). Fixando uma cor x das cores k_i que aparecem em V_i , se I contém todos os vértices de cor x , então ele não pode conter qualquer vértice de qualquer cor diferente de x que aparece em V_i . Portanto, I pode conter no máximo $i \leq (i - 1)k_i = |V_i| - k_i$ vértices entre os vértices em V_i . Por outro lado, se I contém pelo menos $i - 1$ vértices de cada cor x que aparece em V_i , então I contém novamente $(i - 1)k_i = |V_i| - k_i$ vértices entre V_i .

Portanto I não pode ter mais que $|V_i| - k_i$ vértices entre os vértices de $V_i, \forall i > 1$,

além de um vértice de V_i . Logo,

$$|I| = \alpha(G) \leq 1 + \sum_{i=2}^t (|V_i| - k_i) = 1 + n - |V_1| - (k - |V_1|) = n - k + 1.$$

Logo, em qualquer caso, $k \leq n - \alpha(G) + 1$. \square

Teorema 2.13 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Para todo jogo de coloração de grafo $\Gamma(G)$ e qualquer equilíbrio de Nash puro c de $\Gamma(G)$, $CS(G, c) \leq \min \{ \Delta_2(G) + 1, \frac{n+\omega(G)}{2}, \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}, n - \alpha(G) + 1 \}$.*

Demonstração. Pelos Lemas 2.8, 2.10, 2.11 e Teorema 2.12, temos o desejado.

\square

Corolário 2.14 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *Para qualquer grafo G , a coloração própria que é usada é no máximo $k \leq \min \{ \Delta_2(G) + 1, \frac{n+\omega(G)}{2}, \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}, n - \alpha(G) + 1 \}$ cores que podem ser computadas em tempo polinomial.*

Capítulo 3

Novos Limites e Comparações

A história deste capítulo se desenvolveu pelo estudo do artigo de Panagopoulou e Spirakis [16] onde estabeleceram limites superiores para o número de cores k do jogo $\Gamma(G)$, descritos no capítulo 2. Pensamos então em analisar alguns limites superiores já conhecidos na literatura para o número cromático $\chi(G)$ de grafos, e verificar se esses limites são também limites para uma coloração obtida por um jogo $\Gamma(G)$ após ter atingido o equilíbrio de Nash puro, mas nossos resultados foram negativos e são apresentados neste capítulo.

Nós apresentaremos a seguir os resultados do livro Graph Theory de Douglas West [22] associados aos resultados negativos de limites superiores para o número cromático $\chi(G)$ e o resultado k do jogo $\Gamma(G)$.

3.1 Limite 1: $k \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}$

É conhecido que o algoritmo guloso colore G com no máximo $\Delta(G) + 1$ cores. É fácil vermos que $\delta(G) \leq \max_i \min\{d_i, i - 1\} \leq \Delta(G)$, uma vez que $\delta(G) \leq d_i \leq \Delta(G)$ por definição (Seção 1.1). Logo, $\Delta(G) \geq \min\{d_i, i - 1\}, \forall i$ e daí $\Delta(G) \geq \max_i \min\{d_i, i - 1\}$.

Teorema 3.1 (Welsh-Powell [21]) *Se um grafo $G = (V, G)$ possui uma sequência não crescente de graus, $d_1 \geq \dots \geq d_n$, então $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}$.*

Demonstração. Aplicando o algoritmo de coloração gulosa em ordem não crescente de graus, temos que ao colorir o i -ésimo vértice, o vértice v_i tem no máximo $\min\{d_i, i - 1\}$ vizinhos anteriores, logo no máximo $\min\{d_i, i - 1\}$ cores já foram usadas pelo algoritmo para colorir os vizinhos anteriores de v_i . Portanto, a cor que atribuímos a v_i é no máximo $1 + \min\{d_i, i - 1\}$. Isto vale para cada vértice ao longo do algoritmo guloso, portanto ao maximizar sobre i , obtemos o limite superior para o número de cores utilizadas. \square

Teorema 3.2 *Nem sempre um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$ com k cores, onde a sequência de graus $d_1 \geq \dots \geq d_n$, o número de cores k utilizadas satisfaz $k \leq 1 + \max_i \min \{d_i, i - 1\}$.*

Demonstração. Considere o grafo $G = (V, E)$ na Figura 3.1. O grafo está colorido com 5 cores e está em equilíbrio, nenhum vértice possui incentivo de mudar a sua estratégia, pois sua recompensa diminuiria, como pode ser exaustivamente verificado.

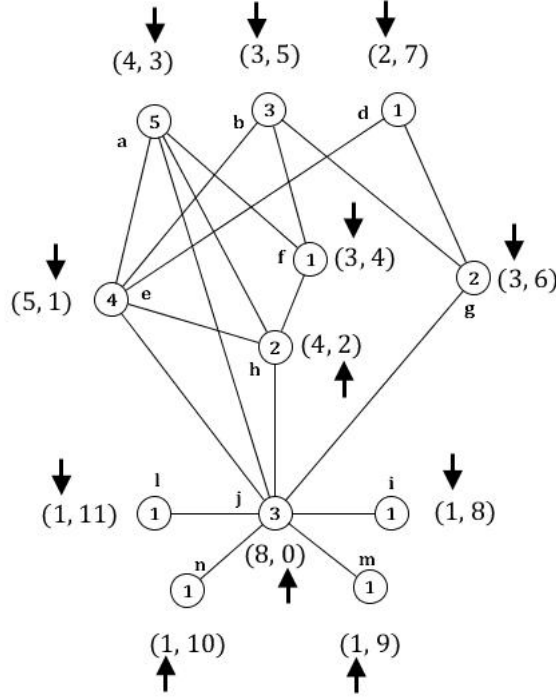


Figura 3.1: Grafo $G = (V, E)$ e equilíbrio de Nash com $k = 5$, indicações do $\max_i \min \{d_i, i - 1\}$ e estabelecimento que $4 = \max_i \min \{d_i, i - 1\} + 1$ atingido nos vértices a, b, f e g .

Ordenamos os vértices de acordo com o grau e diminuímos esta posição na ordem de 1, de forma que colocamos ao lado de cada vértice, Figura 3.1, seu grau e sua posição diminuída de 1, i.e. $(d_i, i - 1)$, como está na figura, $(8, 0)$, $(5, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(2, 7)$, $(1, 8)$, $(1, 9)$, $(1, 10)$, $(1, 11)$. Fazendo o mínimo entre $(d_i, i - 1)$ temos $0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1$ e 1 . Logo, $\max_i \min \{d_i, i - 1\} = 3$ ficando $5 = k > 1 + \max_i \min \{d_i, i - 1\} = 4$. \square

Gostaríamos de relacionar $\max_i \min \{d_i, i - 1\}$ com $\Delta_2(G)$, por $\Delta_2(G) + 1$ ser um dois limites para o jogo $\Gamma(G)$. Porém, há casos em que $\Delta_2(G) \geq \max_i \min \{d_i, i - 1\}$ e casos em que $\Delta_2(G) < \max_i \min \{d_i, i - 1\}$. Logo, nada podemos afirmar sobre essa relação (Figura 3.2).

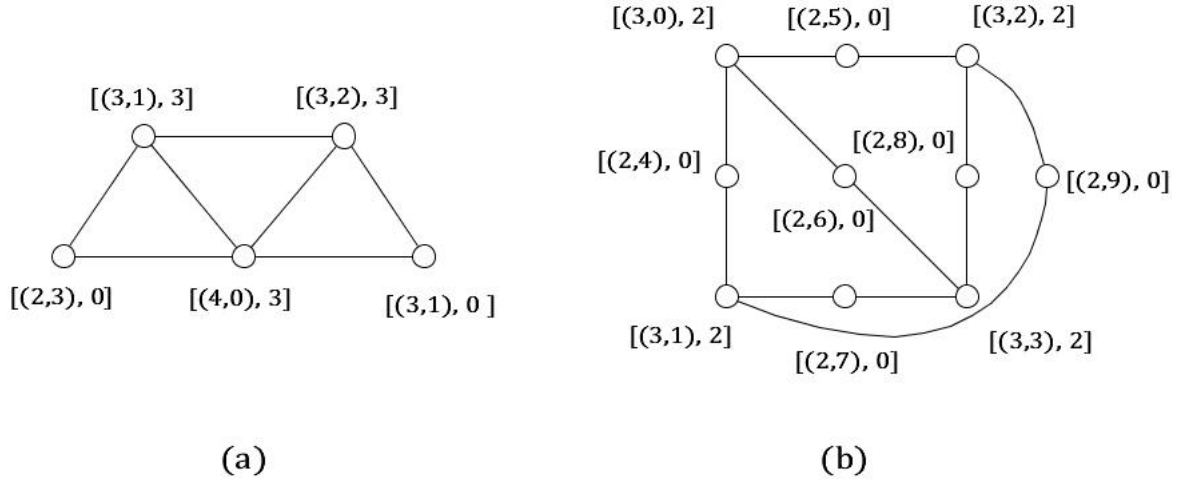


Figura 3.2: Temos $[(d_i(u), i - 1), \max_{v \in N(u): d(v) \leq d(u)} \deg(v)]$ (a) Temos $\Delta_2(G) = 3$ e $\max_i \min \{d_i, i - 1\} = 2$; (b) Temos $\Delta_2(G) = 2$ e $\max_i \min \{d_i, i - 1\} = 3$.

3.2 Limite 2: $k \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$

Lema 3.3 (West) *Se H é um grafo k -crítico, então $\delta(H) \geq k - 1$.*

Demonstração. Suponha que v é um vértice de H . Como H é k -crítico, $H - v$ é $k - 1$ -colorível. Se $\deg_H(v) < k - 1$, então todas as $k - 1$ cores usadas em $H - v$ não aparecem em $N(v)$, e nós podemos atribuir 1 dessas cores, que não aparecem em $N(v)$, a v para estender essa coloração para H . Isso contradiz nossa hipótese. Logo, todo vértice de H tem grau pelo menos $k - 1$. \square

Teorema 3.4 (Szekeres-Wilf [20]) *Se G é um grafo, então $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$.*

Demonstração. Seja $k = \chi(G)$, e seja H' um subgrafo k -crítico de G . Pelo Lema 3.3, temos que $\chi(G) - 1 \leq \delta(H') \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. \square

Teorema 3.5 *Nem sempre um equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, o número de cores k utilizadas não satisfaz $k \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$.*

Demonstração. Considere a Figura 3.3, o grafo $G = (V, E)$ está colorido com 5 cores e está em equilíbrio, pois nenhum vértice possui incentivo de mudar, como pode ser verificado.

Porém, como podemos ver na Figura 3.3, temos $\max_{H \subseteq G} \delta(H) = 3$ e portanto teríamos $5 = k \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H) = 3 + 1$. Logo, $1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$ não é limite superior para a coloração do jogo. \square

Observação 3.6 *Podemos dizer que $\delta(G) \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H) \leq \Delta(G)$.*

Demonstração. Trivial. \square

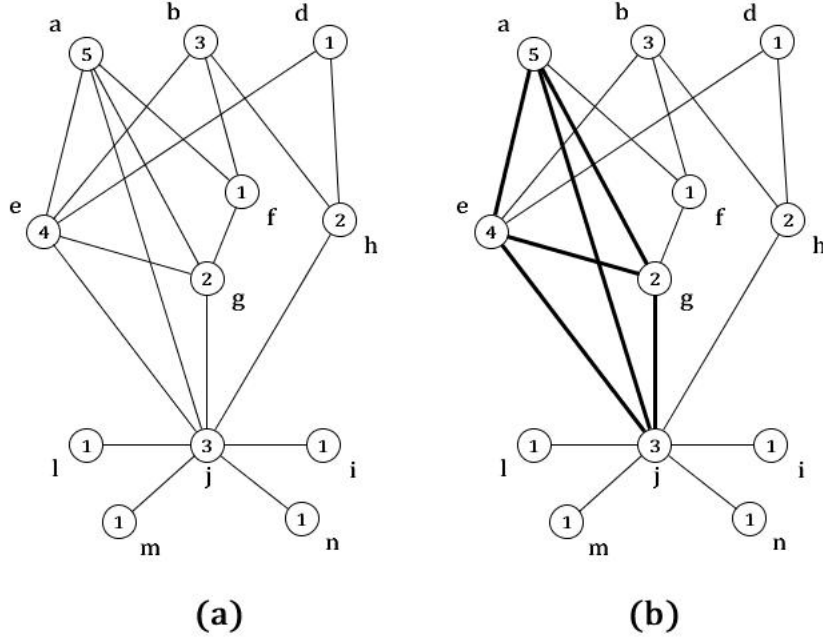


Figura 3.3: Grafo $G = (V, E)$, onde $\max_{H \subseteq G} \delta(H) = 3$ e $k = 5$.

3.3 Limite 3: $k \leq 1 + l(D)$

Teorema 3.7 (Gallai [5]) *Se D é uma orientação de G sendo $l(D)$ seu maior caminho, então $\chi(G) \leq 1 + l(D)$. Além disso, a igualdade vale para alguma orientação de G .*

Teorema 3.8 *Nem todo equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, se D é uma orientação de G com caminho mais longo $l(D)$, o número de cores k utilizadas não satisfaz $k \leq 1 + l(D)$.*

Demonstração. Um exemplo para isso apresentamos na Figura 3.4(b) abaixo. Este grafo está colorido com 4 cores e está em equilíbrio, pois nenhum vértice possui incentivo de mudar, como pode ser verificado, porém $l(D) = 2$.

Podemos dar uma orientação ao um grafo com coloração em equilíbrio de forma que $l(D) = k - 1$, basta orientar as arestas de forma que vértices de menor recompensa apontem para os vértices de maior recompensa, ou vértices de maior recompensa apontem para o de menor recompensa (Figura 3.4).

□

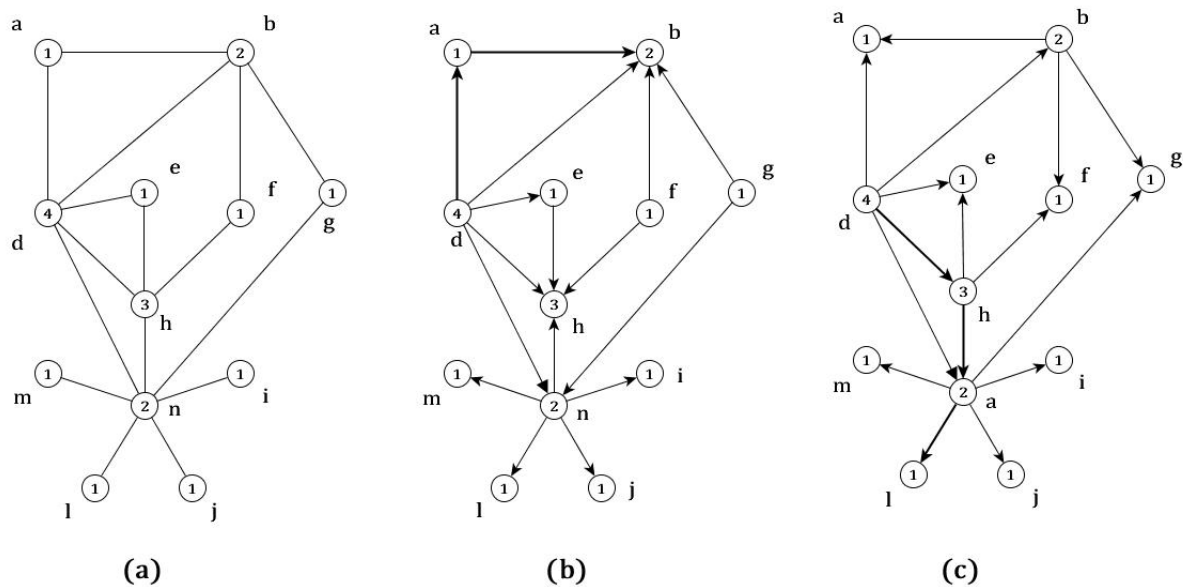


Figura 3.4: (a) Grafo original; (b) $l(D) = 2$ e $k = 4$; (c) $l(D) = k - 1 = 3$.

Capítulo 4

O Preço da Anarquia em Classes de Grafos

Como já vimos no Capítulo 2, chamamos por $CS(G,c)$, uma configuração $c \in X^n$ de $\Gamma(G)$ é o número de cores distintas em c , ou seja, $CS(G,c) = |\{x \in X | n_x(c) > 0\}|$. Uma vez definida a função social do jogo, $\lambda_i : X^n \rightarrow \mathbb{R}$, precisamos saber como os resultados em equilíbrio se comparam com os melhores resultados do jogo.

Definição 4.1 *Dado um grafo G , a o Preço da Anarquia, $PoA(G)$, é a relação do pior custo social, sobre todo o equilíbrio de Nash, para o número cromático:*

$$PoA(G) = \max_{c:c \text{ é um ENP}} \frac{SC(G,c)}{\chi(G)}.$$

Proposição 4.2 (Panagopoulou-Spirakis [16]) *O Preço da Anarquia de um Jogo $\Gamma(G)$ é*

$$PoA \leq \frac{\min \{ \Delta_2(G) + 1, \frac{n+\omega(G)}{2}, \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}, n - \alpha(G) + 1 \}}{\chi(G)}.$$

Demonstração. Segue direto pela Definição 4.1, Corolário 2.14 e Teorema 2.13. \square

Durante nossos estudos descobrimos algumas propriedades de coloração em equilíbrio.

Propriedade 4.1 *Para todo equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, a classe de cor de maior cardinalidade em c é um conjunto independente maximal.*

Demonstração. Seja c um equilíbrio de Nash puro de um jogo $\Gamma(G)$. Suponha que $x = \max_{x \in X} n_x(c)$ não seja um conjunto independente maximal, então $\exists v \in V$ que não é adjacente a nenhum vértice com a cor x , logo $\lambda_v(x, x_v) > \lambda(c)$, o que é um absurdo, pois c está em equilíbrio. Portanto temos o desejado. \square

Propriedade 4.2 Para todo equilíbrio de Nash puro c de um jogo $\Gamma(G)$, a classe de cor x' é um conjunto independente maximal de $G - V'$, onde $v \in V'$ sse $n_{x_v}(c) \geq n_{x'}(c) + 1$.

Demonstração. Seja c um equilíbrio de Nash puro de um jogo $\Gamma(G)$. Tomemos x_1 a cor de maior cardinalidade, $x_1 = \max_{x \in X} n_x(c)$ e x_n a classe de cor de menor cardinalidade, $x_n = \min_{x \in X} n_x(c)$. Sejam x' talque $n_{x_n}(c) \leq n_{x'}(c) \leq n_{x_1}(c)$ e V' conjunto de vértices de V , onde $v \in V'$ sse $n_{x_v}(c) \geq n_{x'}(c) + 1$. Suponha contraditóriamente que a cor x' não seja um conjunto independente maximal para $G - V'$. Então (Figura 4.1), existe um vértice u que não pertence a vizinhança dos vértices de x' em $G - V'$ tal que $\lambda_u(x', x_u) > \lambda(c)$, o que contradiz a nossa hipótese.

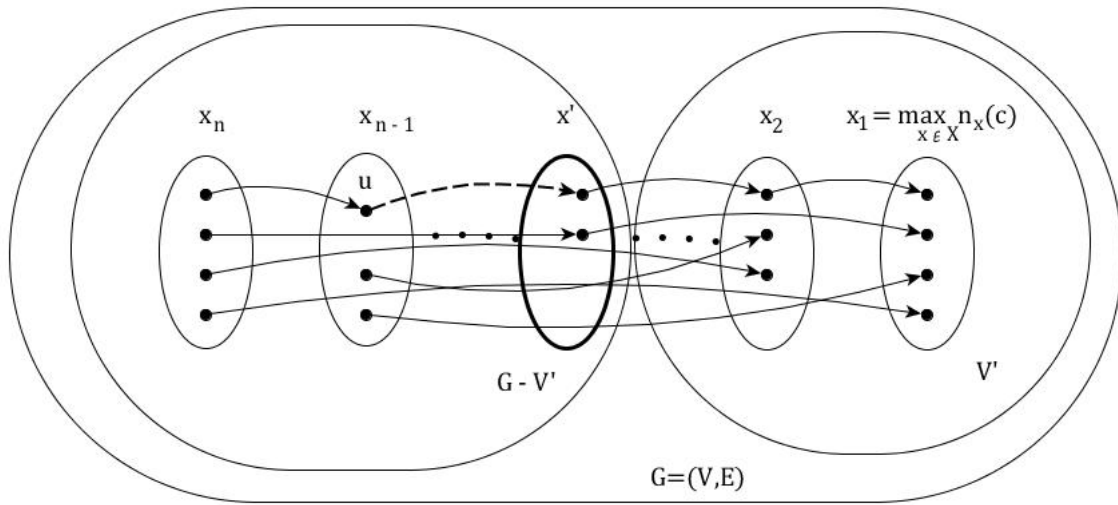


Figura 4.1: Grafo $G = (V, E)$ com as classes de cores, na configuração c , em ordem crescente, com a preferência dos vértices em mudar de cor.

□

4.1 Bipartido

A primeira classe onde começamos a estudar o comportamento do jogo foi os grafos Bipartidos, como o leitor poderá notar, a maioria das classes estudadas são tipos particulares de grafo bipartido, por exemplo, Caminhos, Ciclos par e etc.

Teorema 4.3 Para grafos Bipartidos o $PoA \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$.

Demonstração. Seja $G = (U, V, E)$ um grafo Bipartido, onde todo $v \in U$ possui uma cópia $v' \in V$, onde $N(v) = V - v'$ e $N(v') = U - v$, com exceção dos vértice x e x' , onde $N(x) = V$ e $N(x') = U$ (Figura 4.2).

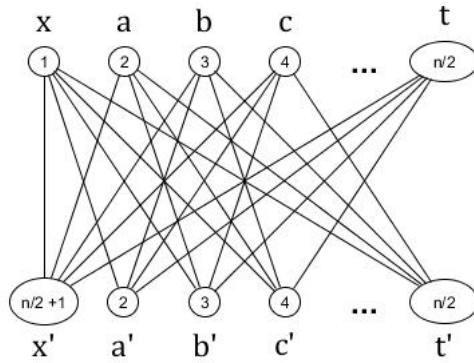


Figura 4.2: Grafo Bipartido colorido com $\frac{n}{2} + 1$ cores.

Temos o pior caso de coloração em equilíbrio retornada pelo jogo $\Gamma(G)$ em um grafo Bipartido nesta estrutura. Pois, se acrescentarmos uma ou mais aresta nesta estrutura, o número de cores diminuirá, pois as cópias, por exemplo v e v' terão a mesma cor e obrigatoriamente terão incentivo de mudar para as cores de x e x' respectivamente (Figura 4.3).

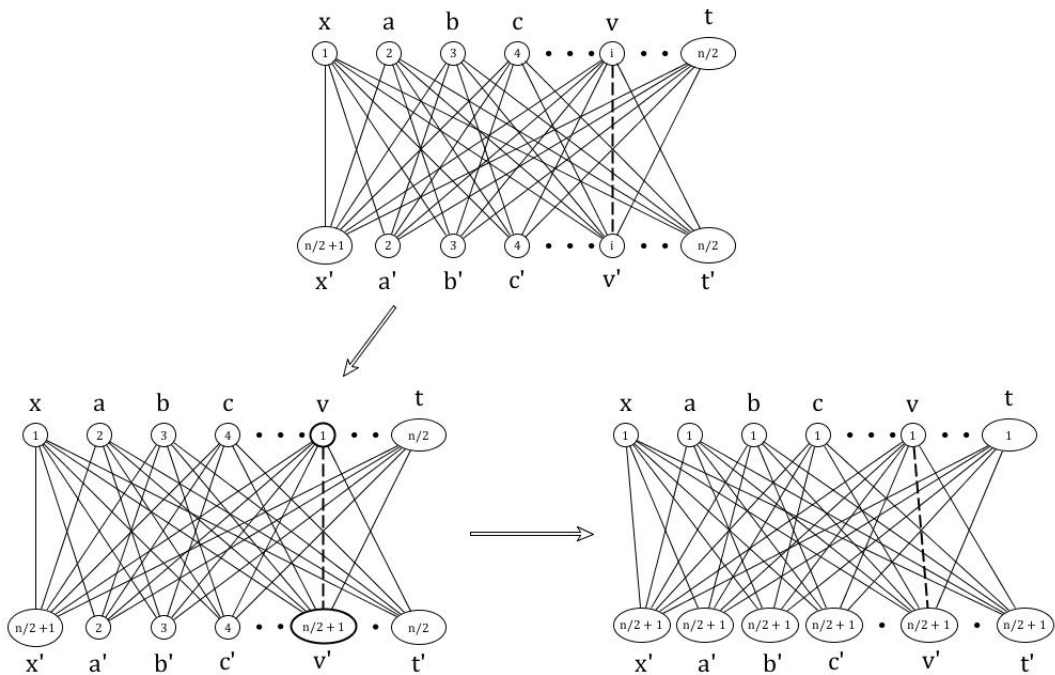


Figura 4.3: Grafo Bipartido com mais 1 aresta.

Se tirarmos uma ou mais arestas desta estrutura, o número de cores diminuirá, pois em relação aos vértices que eram adjacentes, um poderá atribuir a cor do outro. (Figura 4.4).

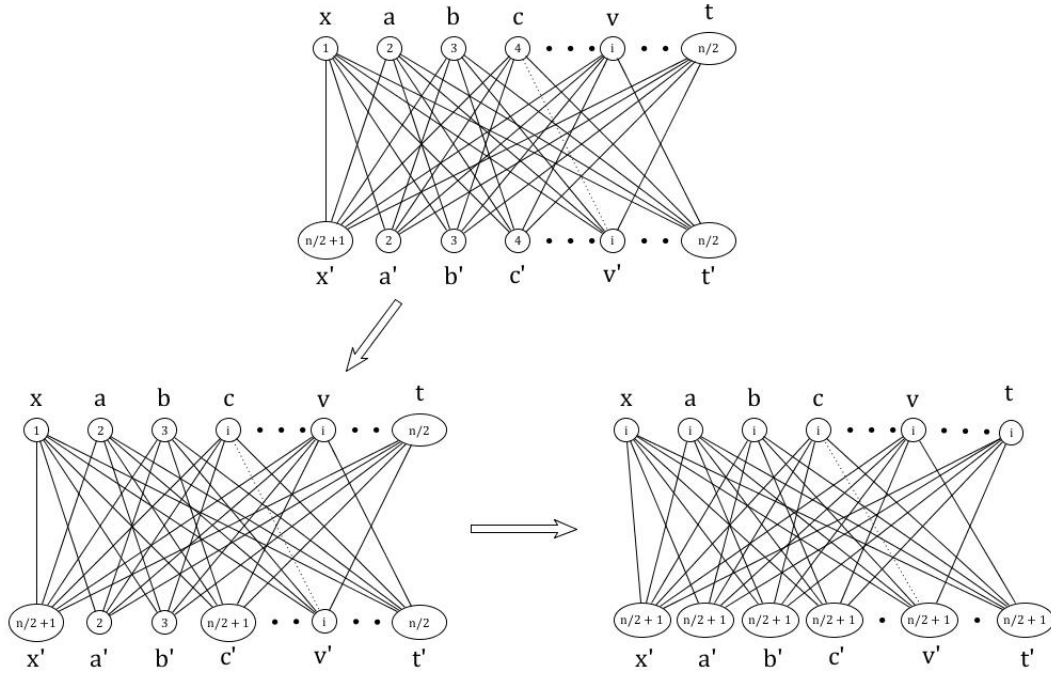


Figura 4.4: Grafo Bipartido com menos 1 aresta.

Logo, temos $k = \frac{n}{2} + 1$ o pior caso. E como é conhecido, $\chi(G) = 2$ para grafos Bipartidos. E portando

$$PoA \leq \frac{\frac{n}{2} + 1}{2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}.$$

□

Propriedade 4.3 *Seja k o número de cores em um jogo no grafo bipartido da Figura 4.2, então ou $k = 2$ ou $k = \frac{n}{2} + 1$.*

Demonstração. Nesse grafo temos apenas dois tamanhos de conjuntos independentes maximais, 2 ou $n/2$, e portanto a cor de maior cardinalidade ou tem tamanho 2 ou tem tamanho $n/2$, pela Propriedade 4.1. Se a cor de maior cardinalidade é $n/2$, então $k = 2$, pois cada bipartição terá uma cor. Se a cor de maior cardinalidade é 2, então obrigatoriamente as demais cores estarão em conjuntos independentes maximais de tamanho 2 ou de tamanho 1. Nesse grafo bipartido temos $n/2 - 1$ conjuntos independentes maximais de tamanho 2 que não fazem intersecção um com o outro que podem ter cada um uma cor e mais 2 vértices em bipartições diferentes x e x' que veem todos os demais conjuntos independentes maximais e se veem que terão de ter cada um uma cor. Logo temos $k = n/2 - 1 + 2 = n/2 + 1$ (Figura 4.2). □

4.2 Ciclos (C_n)

Teorema 4.4 *Para todo Ciclo Par, C_{2n} , o Preço da Anarquia é $PoA \leq \frac{3}{2}$.*

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ um ciclo par e c um equilíbrio de Nash puro retornado por $\Gamma(G)$. Seja ainda x a cor de maior tamanho em c , i.e, $x = \max_{x \in X} n_x(c)$. $\forall v \in V(G)$, faremos $v \in V_x$ se $\lambda_v(c) = n_x(c)$, temos que V_x é um conjunto independente maximal, Propriedade 4.1. Se V_x não for máximo, ao fazermos $G - V_x$ teremos um subgrafo desconexo onde pelo menos uma componente é uma clique de tamanho 2 e as demais componentes unitárias, ou todas as componentes serão cliques de tamanho 2 (Figura 4.5), ou seja, o jogo $\Gamma(G)$ retornará em $G - V_x$, $k' = 2$. Portanto, com a cor x , temos que $k = 3$ para todo c de $\Gamma(G)$, onde k é o número de cores em c , é o pior caso. Portanto, como $\chi(G) = 2$ temos,

$$PoA \leq \frac{3}{2}.$$

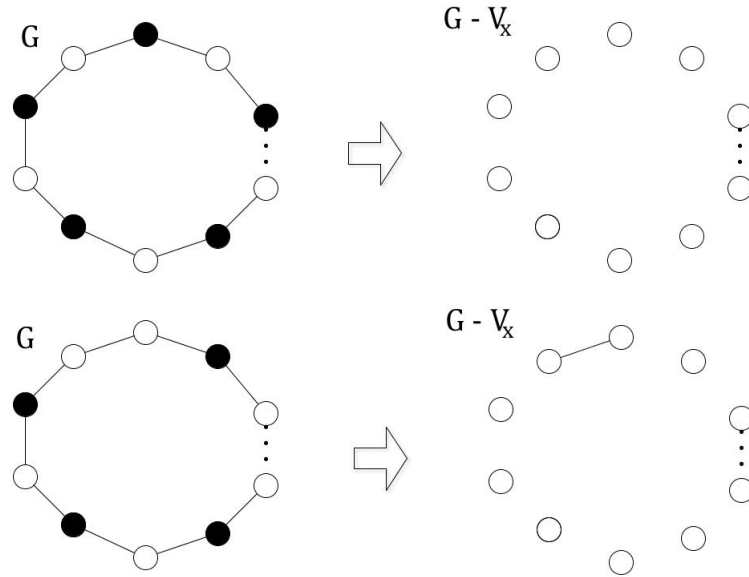


Figura 4.5: C_{2n}

□

Teorema 4.5 *Para todo Ciclo Ímpar C_{2n+1} o jogo sempre retorna uma coloração ótima. Ou seja, $PoA = 1$*

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ um ciclo ímpar e c um equilíbrio de Nash puro retornado por $\Gamma(G)$. Seja x a cor de maior tamanho em c , i.e, $x = \max_{x \in X} n_x(c)$. $\forall v \in V(G)$, faremos $v \in V_x$ se $\lambda_v(c) = n_x(c)$, temos que V_x é um conjunto independente maximal. Ao fazermos $G - V_x$, teremos um subgrafo desconexo onde pelo menos uma componente é uma clique de tamanho 2 e as demais são componentes unitárias, ou todas as componentes serão cliques de tamanho 2 (Figura 4.6), ou seja, o jogo Γ retornará em $G - V_x$, $k' = 2$. Portanto, com a cor x , temos que $k = 3$ para todo c de $\Gamma(G)$.

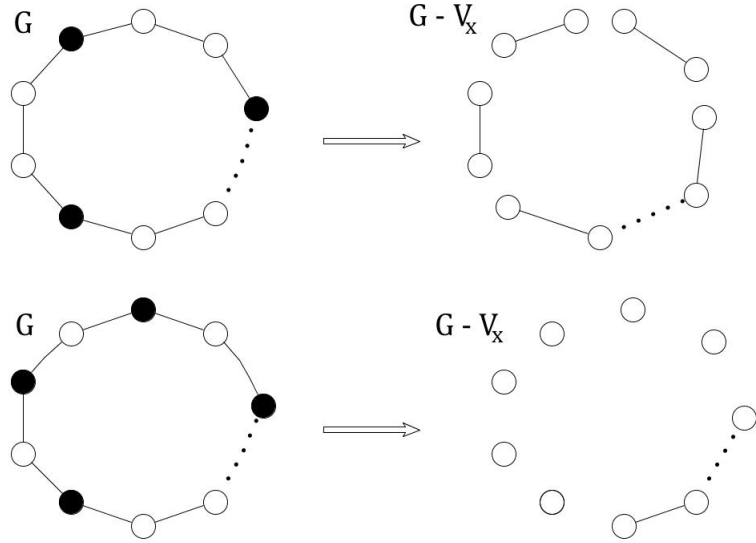


Figura 4.6: C_{2n+1}

□

4.3 Caminhos (P_n)

Teorema 4.6 Para todo Caminhos, P_n , o Preço da Anarquia é $PoA \leq \frac{3}{2}$.

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ um Caminho e c um equilíbrio de Nash puro retornado por $\Gamma(G)$. Seja x a cor de maior tamanho em c , i.e, $x = \max_{x \in X} n_x(c)$. $\forall v \in V(G)$, faremos $v \in V_x$ se $\lambda_v(c) = n_x(c)$. Temos que V_x é um conjunto independente maximal de G . Ao fazermos $G - V_x$, teremos um subgrafo desconexo onde temos pelo menos uma componente sendo uma clique de tamanho 2 e as demais componentes unitárias, ou todas as componentes serão cliques de tamanho 2 (Figura 4.6), ou seja, o jogo Γ retornará em $G - V_x$, $k' = 2$. Portanto, com a cor x , temos que $k = 3$ para todo c de $\Gamma(G)$, onde k é o número de cores em c .

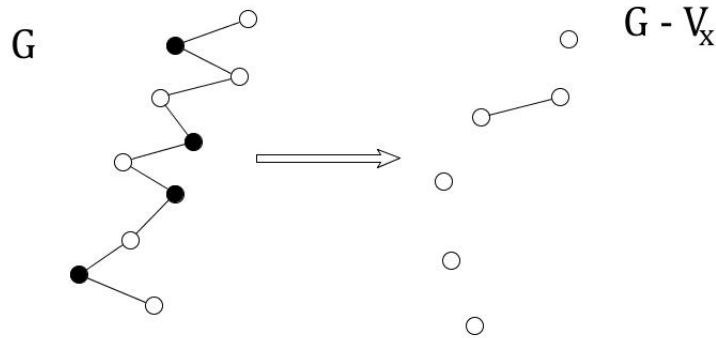


Figura 4.7: P_n

□

4.4 Completos (K_n)

Teorema 4.7 Para toda grafo Completo, K_n , o Preço da Anarquia é $PoA \leq 1$.

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ uma grafo Completo e c um equilíbrio de Nash puro retornado por $\Gamma(G)$. Seja x a cor de maior tamanho em c , i.e, $x = \max_{x \in X} n_x(c)$. Para grafos Completos, é conhecido que o conjunto independente máximo tem tamanho 1, ou seja, $n_x(c) = 1, \forall x \in X$. Portanto, o jogo sempre retornará a coloração inicial $k = n$, onde k é o número de cores em c . (Figura 4.8)

Logo,

$$PoA = \frac{n}{n} = 1$$

□

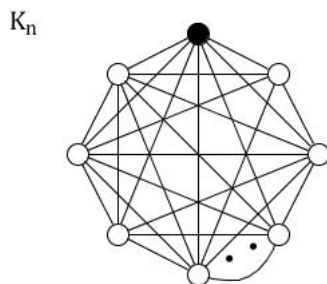


Figura 4.8: P_n

4.5 Bipartido Completo ($K_{m,n}$)

Teorema 4.8 Para todo Bipartido Completo, $K_{m,n}$, $\Gamma(G)$ sempre retorna a coloração ótima, ou seja, o Preço da Anarquia é $PoA = 1$.

Demonstração. Sejam $G = (V, U, E)$ um grafo Bipartido Completo e c um equilíbrio de Nash puro retornado por $\Gamma(G)$. Seja x a cor de maior tamanho em c , i.e, $x = \max_{x \in X} n_x(c)$. Para o grafo Bipartido Completo é conhecido que todo conjunto independente maximal é uma de suas bipartições, ou seja, $n_x(c) = |U|$ ou $n_x(c) = |V|, \forall x \in X$. $\forall v \in V(G)$, faremos $v \in V_x$ se $\lambda_v(c) = n_x(c)$. Temos que V_x é um conjunto independente máximo de G e portanto é uma de suas bipartições. Fazendo $G - V_x$, teremos que $G - V_x$ será a outra bipartição, que também é um conjunto independente maximal. Portanto, o jogo sempre retornará a coloração ótima $k = 2$, onde k é o número de cores em c . (Figura 4.9)

Logo,

$$PoA = \frac{2}{2} = 1$$

□

$K_{m,n}$

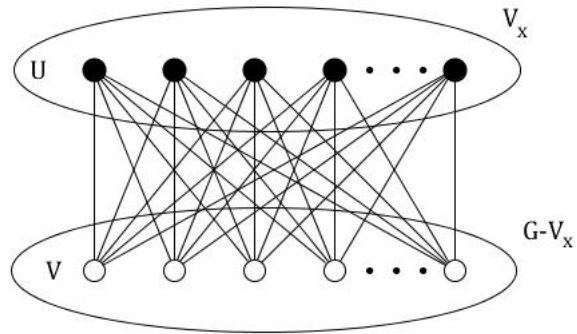


Figura 4.9: $K_{m,n}$

Capítulo 5

Complexidade do Jogo de Coloração

Neste capítulo consideramos três problemas associados ao Jogo da Coloração:

COLORAÇÃO DO JOGO

Instância: Dado um grafo $G = (V, E)$ e um $k \in \mathbb{Z}^+$.

Pergunta: Existe um jogo $\Gamma(G)$ que retorna um equilíbrio com k ou menos cores?

MAIOR CLASSE DO JOGO

Instância: Dado um grafo $G = (V, E)$ e um $\ell \in \mathbb{Z}^+$.

Pergunta: Existe um jogo $\Gamma(G)$ que retorna um jogo em equilíbrio com uma classe de cor com ℓ ou mais vértices?

ANARQUIA BIPARTIDA

Instância: Dado um grafo bipartido B e $k \in \mathbb{Z}^+$.

Pergunta: Existe um jogo $\Gamma(G)$ que retorna um equilíbrio com k ou mais cores?

Nós conseguimos provar que os problemas COLORAÇÃO DO JOGO e MAIOR CLASSE DO JOGO são NP-completos e deixamos o problema da ANARQUIA BIPARTIDA conjecturada como NP-completo.

5.1 Coloração do Jogo

Teorema 5.1 COLORAÇÃO DO JOGO é NP-completo mesmo para $k = 3$.

Demonstração. COLORAÇÃO DO JOGO \in NP, pois dado um grafo $G = (V, E)$, um inteiro $k \geq 0$ e um jogo $\Gamma(G)$ certificado, pelo Teorema 2.7, é tempo polinomial $O(n^2)$ determinar se o equilíbrio eventualmente tem k cores.

Considere o problema NP-completo [9],

3-COLORAÇÃO

Instância: Dado um grafo $G = (V, E)$.

Pergunta: Existe uma 3-coloração de $G = (V, E)$?

Dada uma instância $G = (V, E)$ de 3-COLORAÇÃO construímos para COLORAÇÃO DO JOGO a instância $(G = (V, E), k = 3)$. Se G tem uma 3-coloração ψ , então $\chi \leq 3$. Pelo Teorema 2.3, existe um jogo $\Gamma(G)$ que retorna um equilíbrio com χ cores com $\chi = k \leq 3$.

Se G possui um jogo que retorna um equilíbrio com $k \leq 3$ cores, então G por definição é 3-colorível.

Portanto, G é 3-colorível se, e somente se, existe um jogo $\Gamma(G)$ que no equilíbrio possui $k = 3$ ou menos cores. Assim COLORAÇÃO DO JOGO é NP-completo. □

5.2 Maior Classe do Jogo

Teorema 5.2 MAIOR CLASSE DO JOGO é NP-completo mesmo para grafos cúbicos.

Demonstração. MAIOR CLASSE DO JOGO \in NP, pois dado um $\Gamma(G)$ como certificado, em tempo polinomial $O(n^2)$ podemos, pelo Teorema 2.7, determinar se existe uma classe de cor com ℓ ou mais vértices no equilíbrio.

Considere o problema NP-completo [8],

CONJUNTO INDEPENDENTE PARA GRAFOS CÚBICOS

Instância: Dado um grafo cúbico $G = (V, E)$ e $\ell \in \mathbb{Z}^+$.

Pergunta: Existe um conjunto independente S de G com $|S| \geq \ell$?

Dada uma instância $(G = (V, E), \ell)$ de CONJUNTO INDEPENDENTE PARA GRAFOS CÚBICOS, construímos em tempo polinomial a mesma instância $(G = (V, E), \ell)$ de MAIOR CLASSE DO JOGO. Se G possui um conjunto independente S com $|S| \geq \ell$. Considere o jogo $\Gamma(G)$ que começa por uma sequência de vértices de S inicialmente, e escolhe nos primeiros passos os $|S|$ elementos de S . Pela definição do jogo, uma

classe de cor atinge o equilíbrio com $|S|$ ou mais vértices, pois o tamanho do conjunto independente máximo é monótono no jogo.

Se G possui um jogo com uma classe S com ℓ ou mais vértices, então pela definição da recompensa do jogo do Capítulo 2, temos que S é um conjunto independente de G com ℓ ou mais vértices. Portanto, G possui um conjunto independente de tamanho maior ou igual a ℓ se, e somente se, existe um jogo $\Gamma(G)$ que retorna um equilíbrio com uma classe de cor com ℓ ou mais vértices. E assim, MAIOR CLASSE DO JOGO é NP-completo.

□

5.3 Anarquia Bipartida

Conjectura 5.3 *A ANARQUIA BIPARTIDA é NP-completo.*

Acreditamos que o problema ANARQUIA BIPARTIDA seja NP-completo com base no grafo bipartido usado na Seção 4.1, Figura 4.2, onde é possível notar durante a nossa demonstração do Teorema 4.3, que é mais fácil colorir o grafo Bipartido com $\chi(G)$ cores ao invés de colorir com o pior caso.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação tivemos algumas contribuições para o jogo da coloração de grafos, como propriedades e o comportamento do jogo em algumas classes de grafos. Vimos no Capítulo 3, que alguns limites conhecidos na literatura para o número cromático de um grafo G qualquer não limitam o número k de cores retornada pelo jogo $\Gamma(G)$, Tabela 6.1.

Função	Limite superior para $\chi(G)$	Limite superior para k
$\Delta_2(G) + 1$	sim	sim
$n - \alpha(G) + 1$	sim	sim
$\frac{n + \omega(G)}{2}$	sim	sim
$\frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$	sim	sim
$1 + \max_i \min \{d_i, i - 1\}$	sim	não
$1 + \max_{H \subseteq G} \delta(G)$	sim	não
$1 + \ell(D)$	sim	não

Tabela 6.1: Comparação entre os limites para $\chi(G)$ e k .

No Capítulo 4, vimos o preço da anarquia do jogo $\Gamma(G)$ para grafos em geral e para algumas classes de grafos. Nossas contribuições estão listadas na Tabela 6.2.

Classes de Grafos	$PoA_{\Gamma}(G)$
Bipartido	$\frac{n}{4} + \frac{1}{2}$
K_n	1
C_{2n}	$\frac{3}{2}$
C_{2n+1}	1
$K_{m,n}$	1
P_n	$\frac{3}{2}$
Árvore	$\frac{\epsilon(c(G))+1}{2}$?
Mycielski	1?

Tabela 6.2: Limites superiores para o Preço da Anarquia das classes de grafos analisadas nesta dissertação.

Ao analisarmos o preço da anarquia de algumas classes de grafos, duas classes estudadas ficaram em aberto, Árvores e a família de Mycielski.

Para a família de Mycielski acreditamos que o jogo $\Gamma(G)$ retorna sempre a coloração ótima $\chi(G)$, e assim o preço da anarquia $PoA = 1$, apesar dos parâmetros para os limites do jogo $\Gamma(G)$, como $\Delta_2(G)$ e $\alpha(G)$, crescerem exponencialmente a cada iteração da construção de Mycielski.

Exemplo: Na Figura 6.1 temos todas as colorações possíveis em equilíbrio retornadas pelo jogo $\Gamma(G)$ para o grafo de Grötzsch, que pertence a família de Mycielski. Todas elas usam $\chi(G) = 4$ cores.

Para Árvores acreditamos que no pior caso, o jogo $\Gamma(G)$ retorna $\epsilon(c(G)) + 1$.

Exemplo: Na Figura 6.2 temos um exemplo em que uma árvore cuja coloração está em equilíbrio e usa $k = 4 = \epsilon(c(G)) + 1$, e não se consegue colorir equilibradamente com mais cores.

No Capítulo 2 vimos que em todo Jogo da coloração de grafos $\Gamma(G)$, o equilíbrio de Nash puro c pode ser computado em $O(n \cdot \alpha(G))$ passos egoístas. Porém, acre-

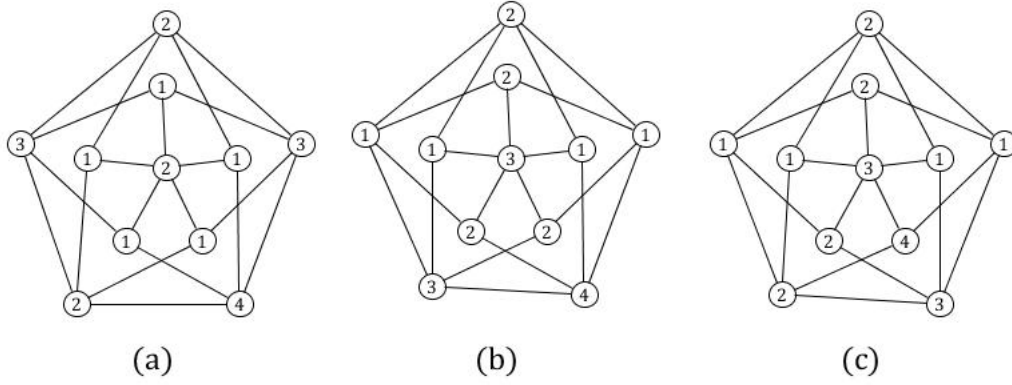


Figura 6.1: Grafo de Grötzsch com todas as colorações possíveis retornadas pelo jogo: (a) $L = \{5, 3, 2, 1\}$; (b) $L = \{4, 4, 2, 1\}$; (c) $L = \{4, 4, 2, 1\}$.

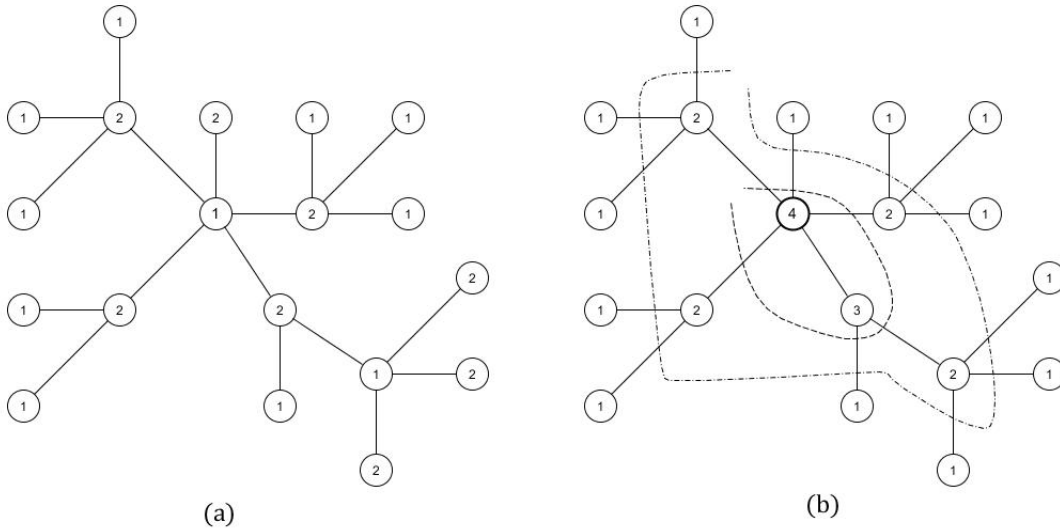


Figura 6.2: Árvore onde em (a) temos $k = \chi(G)$ e em (b) temos $k = 4 = \epsilon(c(G)) + 1$.

ditamos ainda que o jogo $\Gamma(G)$ pode encontrar o equilíbrio Nash puro c em $O(n \cdot t)$ passos, onde t é uma constante, em vez de $O(n \cdot \alpha(G))$.

No Capítulo 5 consideramos 3 problemas associados ao jogo da coloração: COLORAÇÃO DE JOGO, MAIOR CLASSE DO JOGO e ANARQUIA BIPARTIDA. Nós provamos que COLORAÇÃO DO JOGO e MAIOR CLASSE DO JOGO são NP-completos, e deixamos conjecturado que ANARQUIA BIPARTIDA é NP-completo.

Referências Bibliográficas

- [1] Bodlaender, H. L., 1991, “On the complexity of some coloring games”, *International Journal of Foundations of Computer Science*, , n. 2, pp. 133–147.
- [2] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., 1982, *Graph Theory With Applications*. Fifth ed. Canadá, North-Holland.
- [3] Dinski, T., Zhu, X., 1999, “A bound for the game chromatic number of graphs”, *Discrete Mathematics*, , n. 196, pp. 109–115.
- [4] Fernandes, C. G., Ferreira, C. E., Miyazawa, F. K., et al., 2011, “Selfish Square Packing”. In: *Graphs and Optimization Symposium*. Electronic Notes in Discrete Mathematics.
- [5] Gallai, T., 1968, “On directed paths and circuits”, *Theory of Graphs*, pp. 115–116.
- [6] Gibbons, R., 1992, *A Primer in Game Theory*. Financial Times / Prentice Hall.
- [7] Grötzsch, H., 1958-1959, “Zur Theorie der diskreten Gebilde VII: Ein Dreifarben-satz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel”, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe*, v. 8, pp. 109–120.
- [8] Johnson, D. S., Garey, M. R., 1979, *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman&Co, San Francisco.
- [9] Karp, R. M., 1972, “Reducibility Among Combinatorial Problems”, *Complexity of Computer Computations*, p. 85103.
- [10] Koutsoupias, E., Papadimitriou, C. H., 1999, “Worst-case equilibria”. In: *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pp. 404–413. STACS.
- [11] Miyazawa, F. K., 2010, *Introdução à Teoria dos Jogos Algorítmica*.
- [12] Monderer, D., Shapley, L., 1996, “Potential games”, *Games and Economic Behavior*, , n. 14, pp. 124–143.

- [13] Mycielski, J., 1955, “Sur le coloriage des graphes”, *Colloq. Math.*, , n. 3, pp. 161–162.
- [14] Nash, J., 1951, “Non-cooperative Games”, *The Annals of Mathematics*, v. 54, n. 2, pp. 286–295.
- [15] Nisan, N., Roughgaden, T., Tardos, E., et al., 2007, *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press.
- [16] Panagopoulou, P. N., Spirakis, P. G., 2008, “A Game Theoretic Approach for Efficient Graph Coloring”. In: *Proceedings of the 19th International Symposium on Algorithmic Aspects of Computing*, LNCS 5369, pp. 183–195. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [17] Rosenthal, R. W., 73, “A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria”, *Int. J. Game Theory*, , n. 2, pp. 65–67.
- [18] Stacho, L., 2001, “New upper bounds for the chromatic number of a graph”, *Journal of Graph Theory*, v. 36, n. 2, pp. 117–120.
- [19] Straffin, P. D., 1993, *Game Theory and Strategy*. New Mathematical Library.
- [20] Szekeres, G., Wilf, H. S., 1968, “An inequality for the chromatic number of a graph”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. 4, pp. 1–3.
- [21] Welsh, D. J. A., Powell, M. B., 1967, “An upper bound for the chromatic number of a graph and application to timetabling problems”, *Computer Journal*, , n. 10, pp. 85–87.
- [22] West, D. B., 1996, *Introduction to Graph Theory*. Pearson.