

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO
MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA PETROLÍFERA


Claudia Firim

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



Prof. Nelson Maculan Filho, D. Sc., D. Habil.
(Presidente)



Prof. Paulo Roberto Oliveira, D. Ing.



Prof. Oto de Oliveira Bastos Vieira, D. Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Janeiro/1992

Pirim, Claudia

Metodologia de Resolução de um Modelo de
Programação Matemática para a Indústria
Petrolífera

7, 68p. 29.7 cm COPPE/UFRJ, M.Sc.,

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
1992

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE.

1. Programação Linear
2. Programação Não-Linear

I. COPPE / UFRJ. II. Título (série)

Para Bertholdo, Cecília,
André e Bruno.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Nelson Maculan Filho pelo contato com a Petrobrás, pela orientação deste trabalho e principalmente pelo estímulo.

Aos professores Paulo Roberto Oliveira e Oto de Oliveira Bastos Vieira pela participação na banca examinadora desta tese.

Ao pessoal da Petrobrás, em particular à Sarita pela colaboração na fase de pesquisa deste trabalho.

Ao Paulo e a Roberta pela contribuição na edição do texto.

Em particular, agradeço ao grande amigo, companheiro e co-orientador Adilson Elias Xavier, por sua dedicação, estímulo e apoio, sem o qual este trabalho não teria sido realizado.

Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desta tese.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em ciências (M.Sc.).

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO
MATEMÁTICA PARA A INDÚSTRIA PETROLÍFERA

Eláudia Pirim

Janeiro , 1992.

Orientador : Nelson Maculan Filho
Co-Orientador : Adilson Elias Xavier
Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho apresentamos uma metodologia de resolução para os modelos da indústria petrolífera. O procedimento descrito, programação linear sucessiva, visa contornar a não linearidade existente na modelagem do processo de refino do petróleo, com a vantagem de utilizar códigos de uso corrente de programação linear.

Este trabalho foi desenvolvido para a Petrobrás - Petróleo Brasileiro, por sugestão da própria Empresa, autora do modelo apresentado, objeto de nosso estudo.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ, as partial fulfillment of the requirements for the degree of master of science (M.Sc.).

RESOLUTION METHODOLOGY OF A MATHEMATICAL PROGRAMMING MODEL
FOR THE PETROLEUM INDUSTRY

Elardia Pirim

January , 1992.

Thesis Supervisor : Nelson Maculan Filho
Co-Thesis Supervisor : Adilson Elias Xavier
Department : Systems Engineering and Computer
Sciences

In this work we present a resolution technique for the models of the petroleum industry. The described procedure, Successive Linear Programming, aims at solving the existent nonlinearity of the petroleum refining modeling process with the advantage of using current linear programming codes.

This work was developed under Petrobrás' - Petróleo Brasileiro own suggestion, author of the presented model, object of our study.

INDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II - APRESENTAÇÃO DO PROJETO ESTRATÉGIA DE COMPRA DE PETRÓLEO - PETROBRÁS.....	4
II.1 - Histórico e Objetivos.....	4
II.2 - Descrições.....	6
II.3 - Equacionamento.....	10
CAPÍTULO III - PROGRAMAÇÃO LINEAR SUCESSIVA (SLP) E SUA APLICAÇÃO NO MODELO DA PETROBRÁS.....	23
III.1 - Formulação.....	24
III.2 - Algoritmo de Programação Linear Sucessiva.....	32
III.3 - Adaptação do modelo para a aplicação de SLP.....	37
CAPÍTULO IV - RESULTADOS COMPUTACIONAIS.....	43
IV.1 - Primeiros Resultados.....	43
IV.2 - O Problema da Mistura.....	51
IV.3 - Comentários.....	58
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	62
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	67

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

A opção por desenvolver uma tese aplicada e não aplicável levou-me à Divisão de Pesquisa Operacional da Petrobrás. Uma vez na Empresa, me foi sugerido que buscasse uma alternativa para a resolução de um modelo de uso corrente na Empresa. Esse modelo, além de elaborar um plano geral de suprimento para um dado horizonte, analisa propostas de operações comerciais, tais como troca, exportação de óleo, etc.

O modelo existente apresenta 2000 restrições e 4500 variáveis, sendo que 77 restrições são relações não lineares. O procedimento correntemente adotado para tratar essas não linearidades é o de uma técnica de recursividade, alternativa que pode apresentar problemas de convergência.

As relações não lineares do modelo decorrem de algumas restrições relativas ao processo de refino do petróleo, onde na mistura de fluxos com propriedades distintas, não somente o volume da combinação resultante mas também sua qualidade são informações necessárias, conforme as equações abaixo.

Generalizando:

$$V_M = \sum_i V_i \quad e \quad q_M = \sum_i q_i V_i / V_M$$

onde V_i e q_i são o volume e a qualidade dos fluxos i que

compõem a mistura e V_M e q_M o volume e a qualidade da mistura produzida.

Como podemos observar, a qualidade da mistura é uma função não linear.

Embora a aplicação da programação matemática na indústria petrolífera date do começo dos anos 50, isto é, logo após o desenvolvimento do algoritmo Simplex, somente no final desta década, com o aprimoramento dos modelos existentes, verificou-se que a formulação estritamente linear não era aderente à realidade, pois não considerava a mistura de fluxos, a qual, conforme descrito anteriormente, gera relações não lineares [1].

Diante disto, há mais de 3 décadas incansáveis esforços têm sido despendidos pela indústria petrolífera para contornar as dificuldades geradas por essas relações não lineares. Alguns algoritmos já foram utilizados, tais como gradiente reduzido, recursividade, programação linear generalizada e programação linear sucessiva.

Diante do porte e das características do modelo da Petrobrás, uma alternativa que se apresenta é resolvê-lo por programação linear sucessiva. A idéia subjacente a esse enfoque consiste em gerar, a partir do problema não linear, uma sequência de problemas lineares de tal forma que a sequência formada pelas soluções destes problemas convirja para a solução ótima do problema original. Deste modo, torna-se viável utilizar códigos de uso corrente de programação linear, capazes de operar eficazmente problemas desse porte.

O presente trabalho foi organizado da seguinte

forma:

No capítulo II, apresentamos o modelo da Petrobrás, definindo suas variáveis e descrevendo as principais restrições.

No capítulo III fazemos um estudo detalhado do algoritmo de programação linear sucessiva (SLP) descrito por Lasdon e Baker [2] e apresentamos algumas modificações no modelo da Petrobrás para a aplicação do algoritmo.

No capítulo IV, como uma etapa necessária à implementação do algoritmo pela Empresa, desenvolvemos a validação do mesmo através de pequenos exemplos. Testamos, outrossim, a resolução de um exemplo clássico da literatura, o Problema da Mistura [3],[4], que é similar ao modelo em questão. A partir de nossos testes, observamos que o algoritmo descrito por Lasdon e Baker apresentou uma pequena deficiência superada por uma modificação proposta no presente trabalho.

E, finalmente, no capítulo V, apresentamos algumas conclusões e sugestões, comparando a alternativa proposta com outros procedimentos passíveis de serem utilizados pela Empresa.

CAPITULO I I

APRESENTAÇÃO DO PROJETO

ESTRATÉGIA DE COMPRA DE PETRÓLEO - PETROBRÁS

Neste capítulo faremos um resumo do modelo, onde todas as informações que serão apresentadas foram fornecidas pela Empresa [5].

Para facilitar a compreensão, a apresentação foi dividida em três seções: histórico e objetivos, descrições (variáveis, dados de entrada, etc.) e equacionamento.

II.1) HISTÓRICO E OBJETIVOS

A utilização de um modelo de Programação Linear pelo Departamento Comercial da Petrobrás data de 1967. Devido a diversas alterações no mercado fornecedor de petróleo, o que acarretou em sucessivas mudanças no equacionamento, o sistema tornou-se pouco operacional e prático, o que levou o então Setor de Análise de Suprimento da Divisão de Pesquisa Operacional da Empresa à elaboração de um novo modelo em 1977 que somente entrou em operação no final de 1978.

Podemos destacar como um dos principais objetivos

do modelo, a elaboração de um plano geral de suprimento para um dado período.

A atividade de suprimento é responsável pelo abastecimento do país, de petróleo e derivados, isto é, aquisição do petróleo, estocagem no Brasil, distribuição pelas refinarias, produção de derivados, e, finalmente, o envio dos derivados às bases de suprimento.

Este conjunto de atividades está esquematizado na Figura II.1, onde estão representados os terminais (T), as refinarias (R) e as bases de suprimento (S).

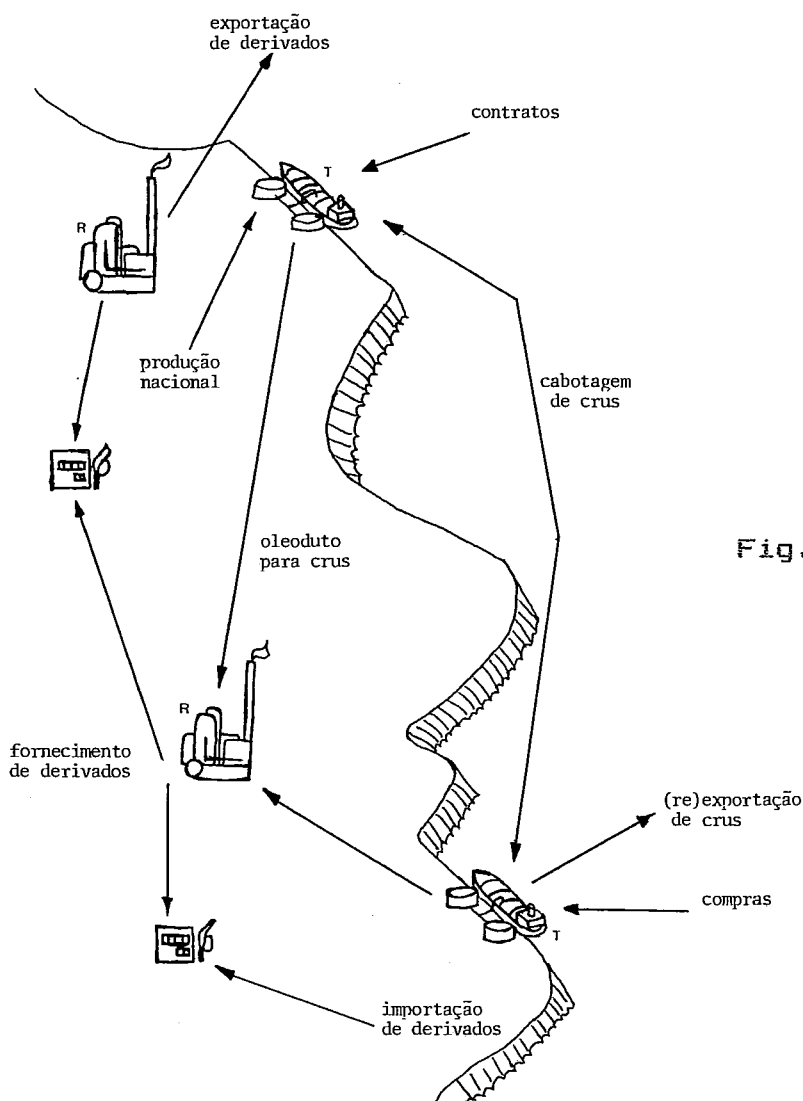


Fig. II.1

Por outro lado, o modelo deve fornecer ao Departamento Comercial da Empresa subsídios para análise de propostas comerciais, tais como, trocas, exportação de petróleos e derivados, etc.

II.2) DESCRIÇÕES

Antes de entrarmos no equacionamento, vamos apresentar nesta seção uma lista das principais variáveis e dos dados de entrada, necessária à compreensão das restrições. E, no final mostramos um diagrama que representa a refinaria utilizada na modelagem.

As variáveis e os dados de entrada são indexados segundo um conjunto de classes que segue abaixo:

Petróleos	(OO)
Companhias	(CC)
Terminais	(L)
Refinarias	(R)
Unidades de Processamento	(U)
Produtos Intermediários	(PI)
Produtos Finais	(PF)
Produtos - (PF)+(PI)	(PP)
Regiões de Consumo	(W)
Óleos Combustíveis	(OC)
Períodos	(N)

Frentes de Exportação	(F)
Frentes de Importação	(G)

Principais Variáveis

KC (00)(CC)(L)(N) - compra do petróleo (00) da companhia (CC) descarregada no terminal (L) no período (N)

HC (00)(CC)(L)(N) - contrato do petróleo (00) da companhia (CC) descarregado no terminal (L) no período (N)

KB (00)(L)(N) - quantidade de petróleo (00) nacional disponível no terminal (L) no período (N)

X (00)(CC)(L)(N) - quantidade de petróleo (00) exportada para a companhia (CC) a partir do terminal (L) no período (N)

Z (00)(L)(J)(N) - quantidade de petróleo (00) enviada do terminal (L) para o terminal (J) no período (N)

ET (00)(L)(N) - estoque inicial do petróleo (00) no terminal (L) no período (N)

R (00)(L)(R)(N) - quantidade de petróleo (00) enviado do terminal (L) para a refinaria (R) no período (N)

- ER (OO)(R)(N) - estoque inicial do petróleo (OO) na refinaria (R) no período (N)
- CD (OO)(U)(R)(N) - carga do petróleo (OO) na unidade de destilação (U) da refinaria (R) no período (N)
- D (PP)(QQ)(R)(N) - transferência do produto (PP) para o produto (QQ) na refinaria (R) no período (N)
- P (PF)(R)(N) - produção do produto final (PF) na refinaria (R) no período (N)
- SF (PF)(R)(N) - estoque inicial do produto final (PF) na refinaria (R) no período (N)
- Y (PF)(R)(W)(N) - transferência do produto final (PF) da refinaria (R) para a região (W) no período (N)
- XD (PF)(R)(N) - exportação do produto final (PF) produzido na refinaria (R) no período (N)
- CI (PI)(U)(R)(N) - carga do produto intermediário (PI) na unidade (U) da refinaria (R) no período (N)
- O (PF)(R)(N) - consumo próprio do produto (PF) na refinaria (R) no período (N)
- I (PF)(G)(W)(N) - quantidade importada do produto (PF) da frente de importação (G) para a região (W) no período (N)

Dados de Entrada

- CONT (OO,CC,N) - quantidade contratada do petróleo (OO) com a companhia (CC) no período (N)
- OFERTA (OO,CC,N) - quantidade ofertada do petróleo (OO) pela companhia (CC) no período (N)
- REND (OO,U,R,PF) - rendimento do petróleo (OO) na unidade (U) da refinaria (R) para o produto final (PF)
- RENI (R,PF,PI,U) - rendimento do produto intermediário (PI) para o produto final (PF) na unidade (U) da refinaria (R)
- MERCADO (PF,W,N) - mercado do produto final (PF) na região (W) no período (N)
- VISC (PP) - viscosidade do derivado (PP)

Para finalizarmos esta seção apresentamos o diagrama da refinaria utilizada na modelagem. (Figura II.2)

Os derivados (LP, NF, etc.) estão dispostos de uma forma hierárquica, e as linhas verticais representam as transferências internas entre produtos.

A REFINARIA COMO MODELADA

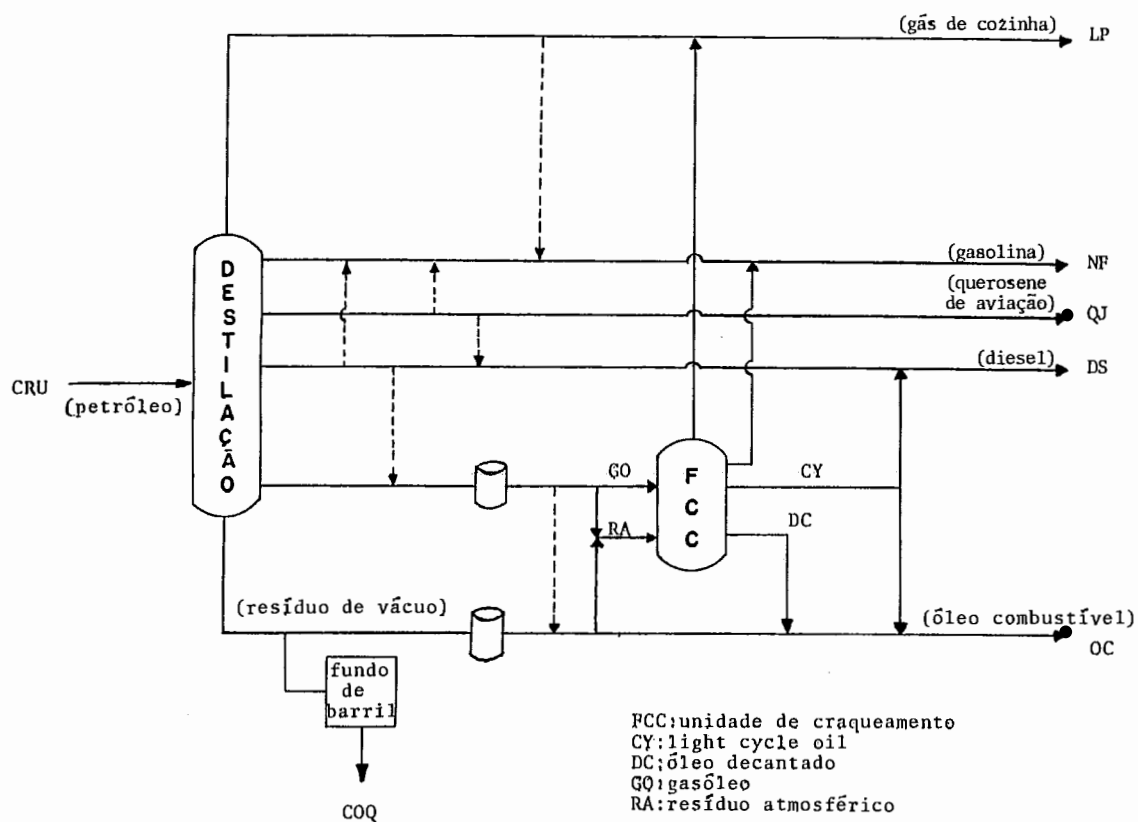


Fig. II.2

II.3) EQUACIONAMENTO

Como vimos no início deste capítulo, o modelo deve elaborar um plano geral de suprimento para um dado horizonte. A produção de derivados está incluída nesta elaboração, e portanto, achamos que vale detalharmos um

pouco o funcionamento de uma refinaria, isto é, como é processado o petróleo e como são obtidos seus derivados, os quais conhecemos somente como consumidores.

Existem no País 11 refinarias, e algumas chegam a ter até 3 unidades de processamento de petróleo. Como, para um dado horizonte coberto pelo modelo, temos em média 40 tipos diferentes de petróleo, 10 derivados e cerca de 15 regiões de consumo, podemos verificar que o problema tem uma dimensão bastante elevada.

O óleo combustível, como mostra a figura I.2, é obtido com a mistura do resíduo de vácuo, derivado pouco nobre, com óleo decantado, light cycle oil e diesel, derivados bem mais valorizados. Conhecendo as especificações de cada derivado, o modelo deve fornecer a quantidade ótima de cada produto na mistura de forma a obter o óleo combustível com as especificações requeridas.

Os óleos combustíveis tem 2 características principais: teor de enxofre (ate e bte) e viscosidade (4 índices diferentes), que se combinando formam 7 tipos de óleo, 3 com alto teor de enxofre e 4 com baixo teor de enxofre.

A nossa preocupação em detalhar a produção do óleo combustível decorre das dificuldades do problema residirem exatamente nas restrições relativas à viscosidade do óleo. Assim, as exigências de especificação dos óleos combustíveis engendram uma família de restrições não lineares, pois a combinação de produtos com especificações distintas nos fornece uma relação não linear. As demais

restrições (aquisição do petróleo, mercado, balanço nos terminais e refinarias, etc.) são todas lineares.

Vamos apresentar agora um resumo do equacionamento e em seguida o procedimento adotado pela Empresa.

II.3.1) Função Objetiva

Na função abaixo, temos como custos, as aquisições de petróleo (contratos e ofertas), a cabotagem, a transferência de produtos para as regiões de consumo e a importação de produtos, e, as receitas, se referem às exportações de petróleo e produtos.

Para obtermos a política ótima basta minimizarmos a diferença entre custos e receitas.

MINIMIZAR

$$\sum_{OO} \left\{ C_1 \text{ KC } (OO)(CC)(L)(N) + C_2 \text{ HC } (OO)(CC)(L)(N) + C_3 \text{ Z } (OO)(L)(J)(N) - R_1 \text{ X } (OO)(CC)(L)(N) \right\} +$$

$$\sum_{PF} \left\{ C_4 \text{ Y } (PF)(R)(W)(N) + C_5 \text{ I } (PF)(G)(W)(N) - R_2 \text{ XD } (PF)(R)(N) \right\}$$

onde os custos e as receitas são unitários e,

representam:

- C₁ - preço do petróleo (OO) contratado da companhia (CC) descarregado no terminal (L)
- C₂ - preço do petróleo (OO) ofertado pela companhia (CC) descarregado no terminal (L)
- C₃ - preço de cabotagem do petróleo (OO) entre os terminais (L) e (J)
- C₄ - preço da transferência do produto final (PF) da refinaria (R) para a região (W)
- C₅ - preço da importação do produto final (PF) da frente (G) para a região (W)
- R₁ - receita da exportação do petróleo (OO) para a companhia (CC) pelo terminal (L)
- R₂ - receita da exportação do produto final (PF) produzido na refinaria (R)

II.3.2) Aquisição de Petróleo

A aquisição do petróleo estrangeiro pelo País pode ser efetuada de 2 formas: contratos pré-estabelecidos ou ofertas.

As restrições abaixo garantem que o volume de um determinado petróleo (OO) contratado, restrições (a), ou ofertado, restrições (b), por uma companhia (CC) seja igual ao volume total no País deste mesmo petróleo, considerando

todos os terminais.

a) Contratos

$$\sum_L HC(00)(CC)(L)(N) = CONT(00,CC,N)$$

b) Ofertas

$$\sum_L KC(00)(CC)(L)(N) \leq OFERTA(00,CC,N)$$

II.3.3) Balanço dos Petróleos nos Terminais

Em cada terminal (L) são descarregadas várias cargas de petróleo: compras feitas por contratos ou ofertas, produção nacional e cabotagem de outros terminais. Logo, o volume de petróleo no terminal é a soma das cargas citadas acima com o estoque inicial.

A família de restrições abaixo garante que para um dado período (N) este volume seja igual ao enviado por este

terminal (exportação, refinarias e cabotagem para outros terminais), adicionado ao estoque final.

$$KB (00)(L)(N) + \sum_{CC} KC (00)(CC)(L)(N) +$$

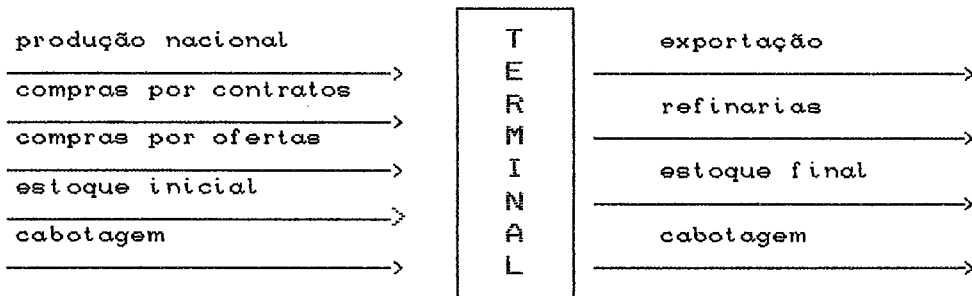
$$ET (00)(L)(N) + \sum_{CC} HC (00)(CC)(L)(N) +$$

$$\sum_{L'} Z (00)(L')(L)(N)$$

=

$$\sum_{CC} X (00)(CC)(L)(N) + \sum_R R (00)(L)(R)(N) +$$

$$ET (00)(L)(N + 1) + \sum_{L'} Z (00)(L)(L')(N)$$



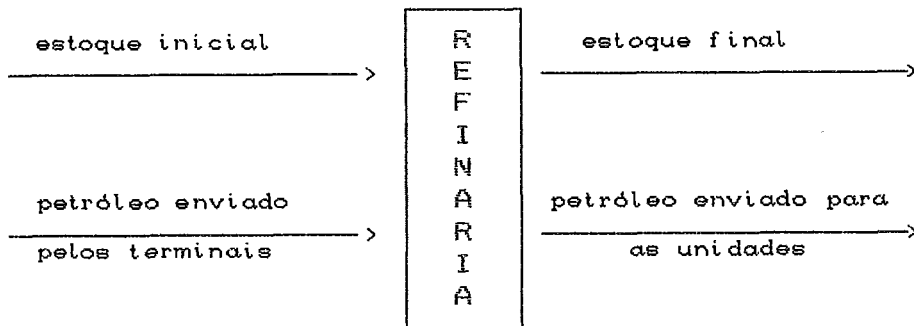
II.3.4) Balço de Petrleo na Refinaria

Temos um raciocnio anlogo para as refinarias.

$$ER (OO) (R) (N) + \sum_L R (OO) (L) (R) (N)$$

=

$$ER (OO) (R) (N + 1) + \sum_U CD (OO) (U) (R) (N)$$



II.3.5) Produo de derivado

Os derivados sã obtidos de diferentes formas,

pelo processamento do petróleo bruto nas unidades de destilação, pelo processamento de produtos intermediários em unidades intermediárias, a partir de transferências internas de outros produtos ou pela combinação das 3 possibilidades.

Para calcularmos o volume final produzido de um derivado devemos considerar os volumes citados acima e retirar o que foi transferido deste produto para outros.

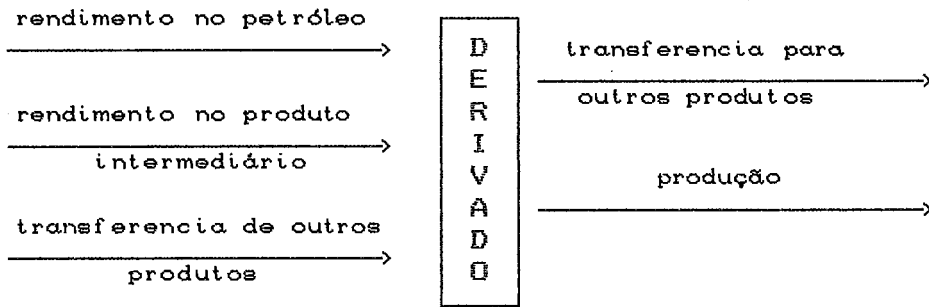
$$\sum_{(OO),U} CD (OO)(U)(R)(N) * \underset{(OO)}{REND (OO,U,R,PF)}$$

$$\sum_{(PI),U} CI (PI)(U)(R)(N) * \underset{(PI)}{RENI (R,PF,PI,U)} +$$

$$\sum_{PP} D (PP)(PF)(R)(N) - \sum_{PF'} D (PF)(PF')(R)(N)$$

=

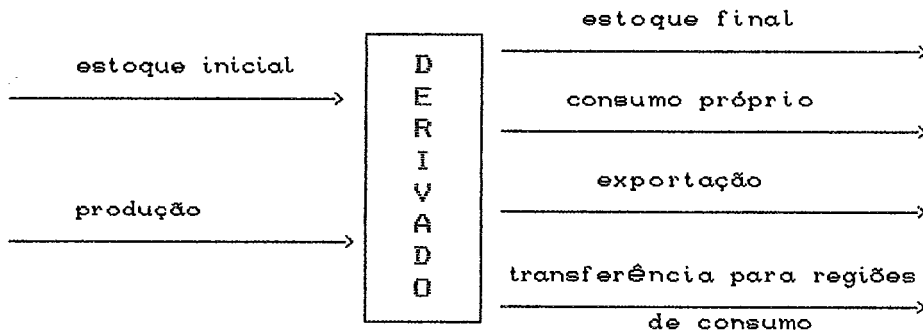
$$F (PF)(R)(N)$$



II.3.6) Distribuição (transferência) de Derivado

Para cada refinaria e para cada derivado temos uma restrição como abaixo, que assegura que o volume de um determinado produto que foi exportado, transferido para as regiões de consumo ou consumido pela própria refinaria adicionado ao estoque final, seja igual ao estoque inicial somado à produção deste derivado neste mesmo período.

$$\begin{aligned}
 & SF (PF)(R)(N) + P(PF)(R)(N) \\
 & = \\
 & SF (PF)(R)(N + 1) + O (PF)(R)(N) + \\
 & XD (PF)(R)(N) + \sum_W Y (PF)(R)(W)(N)
 \end{aligned}$$



II.3.7) Atendimento ao Mercado

Para nos certificarmos que a demanda de um produto em uma dada região será satisfeita, o volume enviado pelas refinarias adicionado ao volume importado para esta região, deverá ser igual ao mercado.

$$\sum_R Y (PF)(R)(W)(N) + \sum_G I (PF)(G)(W)(N)$$

=

MERCADO (PF,W,N)

II.3.8) Viscosidade do Óleo Combustível

Todas as restrições vistas até o momento garantem

apenas o balanço de volume de fluxos (em terminais, refinarias, etc.).

As restrições abaixo asseguram a qualidade requerida do óleo combustível, tomando a média ponderada dos fluxos que o compõem.

Vamos verificar como fica a equação de produção (II.3.5) do óleo combustível.

Como foi visto anteriormente, o óleo combustível é obtido através da mistura de derivados diretos do petróleo: resíduo de vácuo, óleo decantado, diesel e light cycle oil.

Logo, a equação de produção só apresentará o fator referente à transferência de outros produtos.

$$\sum_{PP} D (PP)(OC)(R)(N) = P (OC)(R)(N)$$

ou

$$\begin{aligned} & D (RV)(OC)(R)(N) + D (DC)(OC)(R)(N) + \\ & D (DS)(OC)(R)(N) + D (CY)(OC)(R)(N) \\ & = \\ & P (OC)(R)(N) \end{aligned}$$

E, a equação de viscosidade, a média ponderada das correntes acima:

$$\begin{aligned}
 & D (RV)(OC)(R)(N) * VISC (RV) + \\
 & \sum_{DL} D (DL)(OC)(R)(N) * VISC (DL) \\
 & \geq P (OC)(R)(N) * VISC (OC)
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 VISC (RV) = & \frac{\sum_{(OO)} CD (OO)(U)(R)(N) * \underset{(OO)}{REND (RV)} * VISC (OO)}{\sum_{(OO)} CD (OO)(U)(R)(N) * \underset{(OO)}{REND (RV)}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Como podemos ver, a restrição acima é não linear pois temos o produto de 2 variáveis, $D (RV)(OC)(R)(N)$ e $VISC (RV)$. Logo, com 11 refinarias e 7 tipos de óleo, o modelo apresenta 77 restrições como esta.

Na resolução computacional, tem sido adotado um procedimento de recursividade para contornar a não linearidade, ou seja, é considerado um valor inicial para $VISC (RV)$ em (1), obtém-se a solução ótima do modelo linear

resultante (valor ótimo para CD (00)) e ajusta-se VISC (RV) em (2). Com este novo valor, altera-se o coeficiente da variável D (RV)(OC) em (1) e obtém-se um novo problema linear.

Este procedimento é feito simultaneamente em todas as refinarias para todos os óleos combustíveis, e termina quando em todas as equações os coeficientes estão ajustados.

Como registra a bibliografia [3] [4], o procedimento de recursividade pode, algumas vezes, enfrentar dificuldades na convergência.

Diante deste fato, por sugestão da Empresa, estamos apresentando uma alternativa, Programação Linear Sucessiva (SLP) [2], que em testes comparativos com outros procedimentos também adotados neste tipo de problema, tem mostrado vantagens computacionais e de convergência.

No capítulo III faremos uma apresentação detalhada de SLP.

CAPÍTULO III

PROGRAMAÇÃO LINEAR SUCESSIVA (SLP) E SUA APLICAÇÃO NO MODELO DA PETROBRÁS

Neste capítulo faremos uma descrição detalhada do algoritmo de Programação Linear Sucessiva e, em seguida apresentaremos as modificações que devem ser feitas no equacionamento do modelo da Petrobrás para a aplicação do procedimento descrito.

Como foi visto no capítulo II, a aplicação da Programação Matemática na indústria petrolífera gera, comumente, modelos não lineares.

Alguns procedimentos já foram utilizados por outras Companhias, para contornar a não linearidade, tais como, o Método do Gradiente Projetado (Rosen, 1960) [6], a 1ª versão de Programação Linear Sucessiva, SLP (Griffith e Stewart para a Shell, 1961) [7], outra versão de SLP (Boddington para a Chevron, 1979) [8] e a forma de SLP que será descrita neste capítulo apresentada por Lasdon e Baker para a Exxon em 1985 [2].

A técnica de SLP consiste em gerar uma sequência de problemas lineares, obtidos substituindo-se as relações

não lineares pelos primeiros 2 termos da respectiva expansão em Série de Taylor, de tal forma que a sequência formada pelas soluções destes problemas convirja para a solução ótima do problema não linear.

Apresentamos a seguir a formulação do problema, a aplicação da expansão em Série de Taylor, o algoritmo SLP e a adaptação do modelo da Petrobrás para sua utilização.

III.1) FORMULAÇÃO

Seja o problema não linear:

MINIMIZAR

$$\psi_c(x, y, z) = c'x + g(z)'y$$

s.a.

$$\psi_i(x, y, z) = Ax + \bar{G}(z)y = b, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y} \quad (1)$$

$$\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$$

onde o vetor c , os elementos da matriz A e o vetor b são constantes e o vetor $g(z)$ e os elementos da matriz $\bar{G}(z)$ funções.

Assim, o conjunto das variáveis do problema pode ser separado da seguinte forma:

$X = \{ x \}$, variáveis com coeficientes constantes
que denominaremos por "variáveis lineares"

$Y = \{ y \}$, variáveis que possuem pelo menos um
coeficiente não constante que denominaremos
por variáveis "não lineares"

$Z = \{ z \}$, variáveis das quais os elementos de Y
dependem

Podemos escrever o problema (1) da seguinte forma:

MINIMIZAR

$$\psi_0(x, y, z) = c'x + g(z)'y$$

s.a.

$$\psi_i(x, y, z) = A_i x_i + G_i(z) y_i = b_i, \quad i \in RN$$

$$A_i x_i + B_i y_i = b_i, \quad i \in RL$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y}$$

$$\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$$

(2)

onde:

$$\bar{G}(z) = \begin{bmatrix} G(z) \\ B \end{bmatrix},$$

B submatriz com todos elementos constantes,

$RN = \{ i / \Psi_i \text{ é restrição não linear} \}$ e

$RL = \{ i / \Psi_i \text{ é restrição linear} \}$

Como vemos, tanto na função objetivo como em um subconjunto das restrições temos termos não lineares.

A idéia é substituir estes termos por suas respectivas aproximações lineares, usando o desenvolvimento em Série de Taylor.

Teorema de Taylor: [9]

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, p vetor unitário, h escalar e $F(x) \in C^r$ (classe das funções que possuem derivadas contínuas até ordem r). Então:

$$F(x + hp) = F(x) + h \nabla F(x)^t p + \frac{1}{2} h^2 p^t \nabla^2 F(x) p + \dots + \frac{1}{(r-1)!} h^{r-1} D^{r-1} F(x) + \frac{1}{r!} h^r D^r F(x + \theta hp) ,$$

para algum θ , tal que $0 \leq \theta \leq 1$, onde:

$$D^s F(x) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_s=1}^n \left\{ p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s} \frac{\partial^s F(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \right\}$$

Considerando a expansão acima em torno de um ponto x^0 , e ignorando os termos não lineares, temos:

$$F(x) = F(x^0) + \nabla F(x^0)^t \Delta x + O(\Delta x^2),$$

onde $\Delta x = x - x^0$ e $O(\Delta x^2)$ representa o resíduo.

O termo $O(\Delta x^2)$ pode ser explicado pelo teorema:

Teorema do Valor Médio [9] [10]

$\exists \bar{x}$, $\bar{x} = x^0 + \beta \Delta x$, $\beta \in [0,1]$ tal que:
resíduo = $(\Delta x^2) F''(\bar{x})$.

Ou seja, quanto menor Δx , melhor a aproximação.

A figura III.1.1 ilustra a aproximação feita acima.

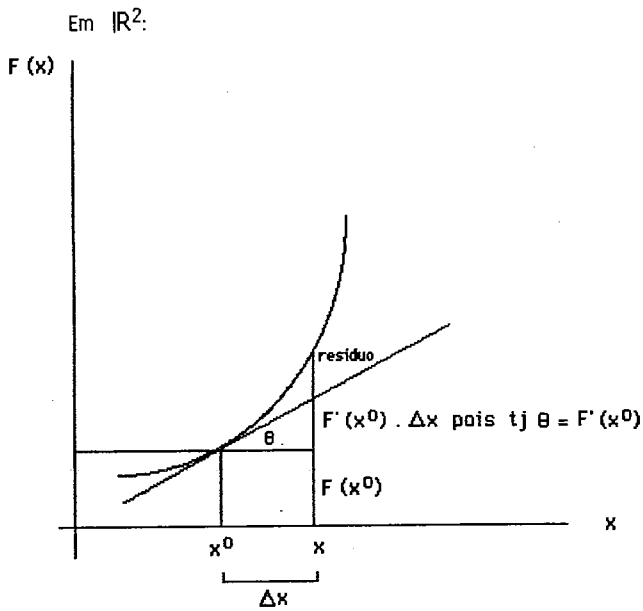


Fig. III.1.1

Voltando ao nosso problema, sejam:

$$F(y, z) = G(z)y \quad \text{e} \quad f(y, z) = g(z)y$$

e, tomando a expansão em Série de Taylor em torno de (y^0, z^0) , temos:

$$G(z)y \simeq y G(z^0) + y^0 \nabla G(z^0)^t \Delta z$$

$$g(z)y \simeq y g(z^0) + y^0 \nabla g(z^0)^t \Delta z$$

As expressões acima nos fornecem uma aproximação linear para $\psi_0(x, y, z)$ e $\psi_i(x, y, z)$, $i \in \mathbb{R}^n$ do problema (2).

Se fizermos os seguintes procedimentos,

- 1 - substituíremos $G(z)y$ e $g(z)y$ por suas aproximações lineares,
- 2 - atribuíremos cotas inferior e superior ao nosso novo vetor de variáveis Δz ,
- 3 - definirmos variáveis s_i^+ e s_i^- não negativas que representem os afastamentos às reais restrições de igualdade e,
- 4 - penalizarmos estes afastamentos na função objetivo,

teremos o seguinte problema linearizado:

$$PL(x, y^0, z^0, p)$$

MINIMIZAR

$$\psi_0(x, y^0, z^0) = c'x + g(z^0)'y + y^0 \nabla g(z^0)' \Delta z + p \sum_{i \in RN} (s_i^+ + s_i^-)$$

s.a.

$$\psi_i(x, y^0, z^0) = A_i x_i + G_i(z^0) y_i + y^0 \nabla G_i(z^0)' \Delta z - s_i^+ + s_i^- = b_i$$

$i \in RN$

$$A_i x_i + B_i y_i = b_i$$

$$i \in RL$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

$$\underline{y} \leq y \leq \bar{y}$$

$$\underline{z} \leq z \leq \bar{z} \quad (3)$$

$$-D \leq \Delta z \leq D$$

$$s_i^+, s_i^- \geq 0$$

Vamos fazer algumas observações sobre a formulação acima:

- 1 - O vetor D , das cotas impostas à Δz limita o deslocamento da variável z na linearização (conforme visto anteriormente o resíduo é da ordem $O(\Delta z^2)$) e define uma "região de confiança". Veremos mais a frente que o próprio algoritmo se encarrega de calibrar D .
- 2 - A penalização p é um escalar positivo que deve ser grande o suficiente para que s_i^+ e s_i^- sejam nulos na solução ótima. Porém, devemos ter cautela, pois sabemos que penalizações muito fortes podem gerar convergências lentas [9].

- 3 - O termo $p \sum_{i \in RN} (s_i^+ + s_i^-)$ pode ser explicado:

Podemos ter $|\psi_i(x,y,z) - b_i| \neq 0$ para algum $i \in \text{RN}$. O problema (3) tenta fazer com que estas restrições sejam satisfeitas através de uma forte penalização aos afastamentos das reais restrições.

Para vermos o efeito da penalização, considere o problema:

$$Q(x,y,z,p) = \psi_0 + p \sum_{i \in \text{RN}} |\psi_i(x,y,z) - b_i|,$$

onde uma forma para minimizar Q , é minimizarmos uma sequência de aproximações de Q . A aproximação utilizada no problema linearizado substitui ψ_0 e ψ_i , $i \in \text{RN}$, por suas aproximações lineares obtidas através da Expansão de Taylor, isto é, $L\psi_0$ e $L\psi_i$.

$$\bar{Q}(x,y,z,p) = L\psi_0 + p \sum_{i \in \text{RN}} |L\psi_i - b_i|$$

Mas, por (3), temos que $L\psi_i - b_i = s_i^+ - s_i^-$ com $s_i^+, s_i^- \geq 0$, o que nos fornece $|L\psi_i - b_i| = s_i^+ + s_i^-$ com $s_i^+ \cdot s_i^- = 0$. É fácil ver que a restrição $s_i^+ \cdot s_i^- = 0$ é automaticamente satisfeita pois s_i^+ e s_i^- estão associadas a vetores linearmente dependentes nas restrições do problema linearizado.

Desta forma, qualquer solução viável para as restrições lineares de (2) é viável para o problema linearizado (3).

Como já foi dito no começo deste capítulo, a idéia do algoritmo é gerar uma sequência de problemas lineares, $\{ PL_1, PL_2, \dots, PL_n \}$ tal que a solução ótima de PL_n seja ótima para o problema não linear (2).

Vamos apresentar o algoritmo e em seguida faremos alguns comentários.

III.2) ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR SUCESSIVA (SLP)

Inicialização : Escolha valores positivos para p (penalidade), ϵ (tolerância).
Escolha valores iniciais y^0 , z^0 e D^0 .

Passo 1 : Calcule $g(z^0)$, $y^0 \nabla g(z^0)^t$, $G(z^0)$ e $y^0 \nabla G(z^0)^t$.
Substitua-os na matriz do problema.

Passo 2 : Resolva o subproblema linear obtendo o valor ótimo para o vetor Δz e para as variáveis x e y .
 $z = z^0 + \Delta z$.

Passo 3 : Se $|\Delta z_i| < \epsilon \quad \forall i \in RN$, pare.

Passo 4 : Calibração de D:

$\forall i \in RN$,

Se Δz_i mudou de sinal da última iteração,

$$D_i^0 = D_i^0 / 2.$$

Se $\Delta z_i = D_i^0$ por 3 iterações consecutivas,

$$D_i^0 = 2D_i^0.$$

Se $\Delta z_i = -D_i^0$ por 3 iterações consecutivas,

$$D_i^0 = 2D_i^0$$

Passo 5 : Faça $y^0 = y$, $z^0 = z$.

Volte para o passo 1.

Os valores iniciais, a princípio, só precisam satisfazer às restrições lineares de (1), pois, desta forma, como já foi explicado, garantimos viabilidade no problema linearizado. Mas, em geral, é possível escolhermos uma solução inicial que satisfaça às restrições ψ_i , $i \in RN$ em (2). Para tanto, basta ignorarmos os termos não lineares, obtermos uma solução viável para o problema linear resultante, e, a partir desta solução ajustarmos z .

Desta forma, o primeiro subproblema linear, LP_1 , tem $s_i^+ = s_i^- = 0 \quad \forall i \in RN$ em sua solução inicial. A partir de LP_2 , entramos no passo 2 com os afastamentos não nulos, situação que será contornada pela penalização na função objetivo.

A Figura III.2.1 ilustra este procedimento. A partir do ponto inicial x^0 linearizamos ($s=0$) e minimizamos obtendo o ponto x^1 pertencente a uma curva "paralela" a original. Linearizamos em x^1 ($s > 0$) e minimizamos ($s=0$) obtendo o ponto x^2 que pertence a outra curva "paralela". Este processo se repete até estarmos tão perto da solução ótima, a ponto de não termos mais para onde caminhar, isto é, Δz desprezível.

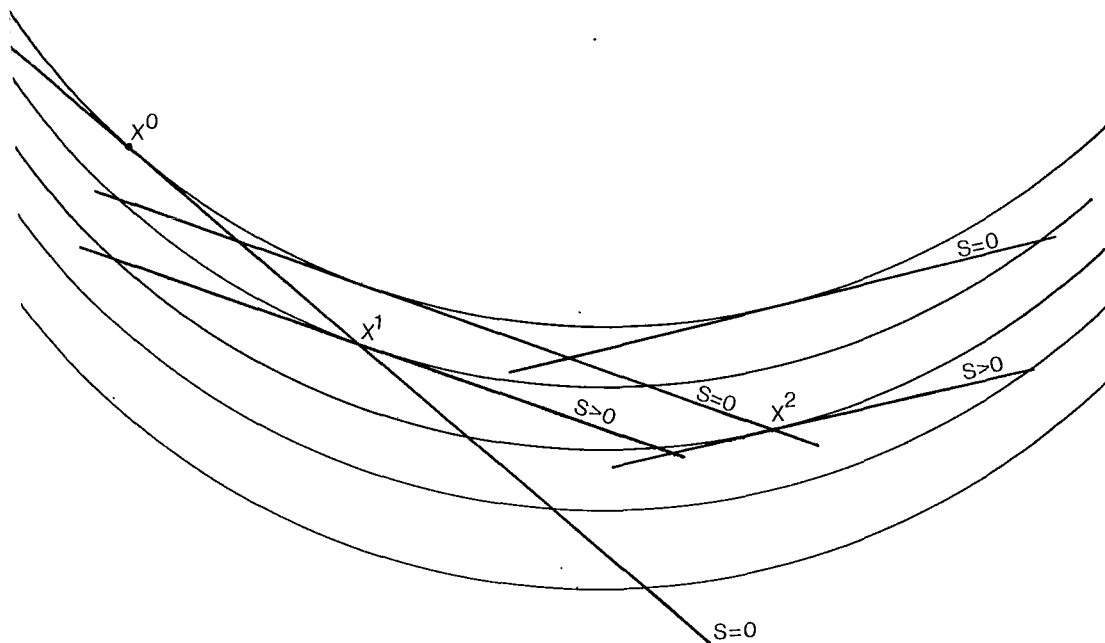


fig. III.2.1

O tamanho do passo que podemos dar é fornecido pelas limitações de Δz , ou seja, pelo vetor D . O próprio algoritmo se encarrega de calibrá-lo, aumentando-o se estamos distante da solução ótima ou reduzindo-o se estamos

perto. Observe a Figura III.2.2:

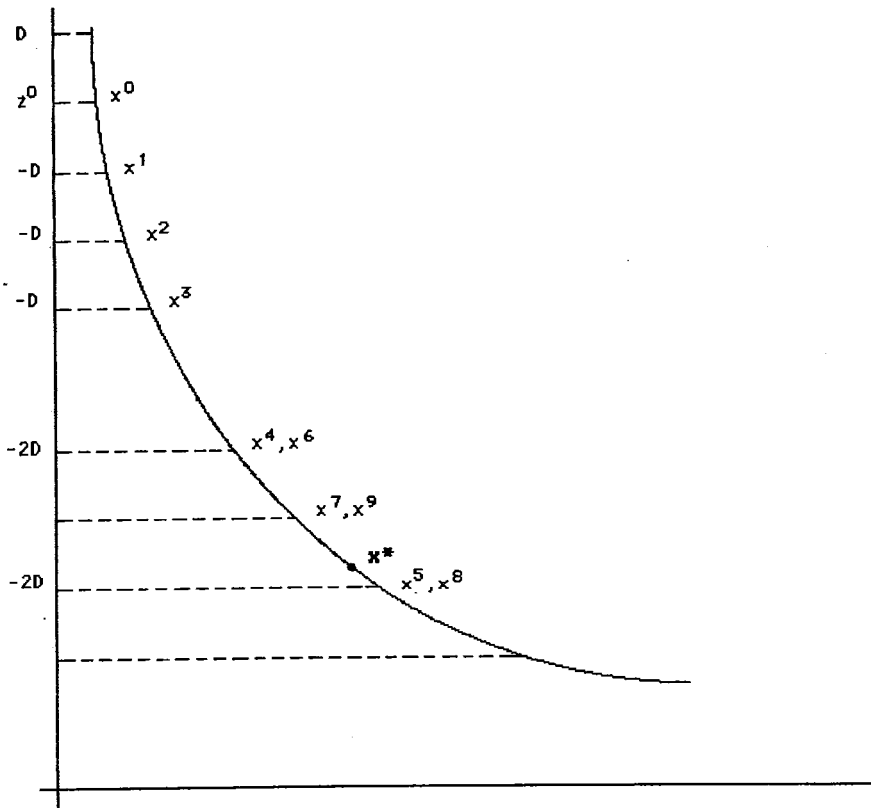


fig. III.2.2

Como, para 3 iterações consecutivas $\Delta z = -D$, o algoritmo dobrou o valor de D , e em seguida, de x^4 para x^5 , reduziu-o, pois começamos a nos aproximar da solução ótima.

Vale notar, que quanto mais perto estamos da solução ótima x^* , menor o valor de D , conseqüentemente também o de Δz .

A escolha de D^0 é muito importante, pois em funções com raio de curvatura pequeno podemos ter a situação limite mostrada na Figura III.2.3.

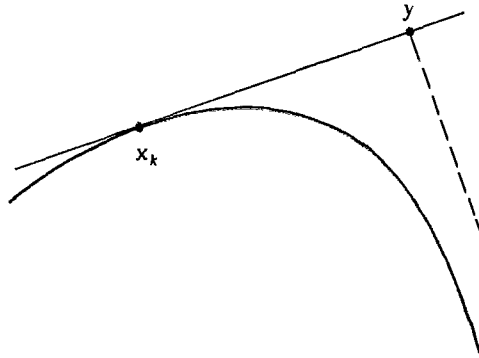


fig III.2.3

Ou seja, um passo "guloso" pode gerar uma inviabilidade irreparável.

Para garantirmos a convergência do algoritmo para uma solução ótima global, à rigor, devemos ter todas as exigências usuais satisfeitas, ou seja, convexidade da região viável e função objetivo convexa e pertencente a classe C^1 . Mas, a prática tem mostrado um bom desempenho de SLP desde que o grau de curvatura do espaço viável seja cuidadosamente observado (fig.III.2.3), pois em geral, a função objetivo pode ser linearizada [7].

Felizmente, as relações não lineares geradas por processos de refino de petróleo são bem comportadas [7], e, em particular, a função objetivo do modelo da Petrobrás é uma função linear, satisfazendo portanto às condições citadas acima.

Diante disto, podemos afirmar que o procedimento

apresentado nesta seção é uma boa alternativa para a Empresa. Descrevemos a seguir as alterações que devem ser feitas no modelo para a aplicação do algoritmo SLP.

III.3) ADAPTAÇÃO DO MODELO PARA APLICAÇÃO DE SLP

Como foi visto no capítulo II, temos 77 restrições relativas à viscosidade do óleo combustível da forma:

$$\frac{D(RV)(OC)(R)(N)}{va} * \frac{VISC(RV)}{va} +$$

$$\sum_{DL} \frac{D(DL)(OC)(R)(N)}{va} * \frac{VISC(DL)}{par}$$

$$\geq \quad (1)$$

$$\frac{P(OC)(R)(N)}{va} * \frac{VISC(OC)}{par}$$

onde:

$$VISC(RV) = \frac{\sum_{(OO)} \frac{CD(OO)(U)(R)(N)}{va} * \frac{REND(OO)}{(OO)} * \frac{VISC(OO)}{par}}{\sum_{(OO)} \frac{CD(OO)(U)(R)(N)}{va} * \frac{REND(OO)}{par}}$$

va variáveis e par parâmetros do problema.

Se substituirmos a equação (2) em (1), teremos uma restrição não linear onde o coeficiente da variável não linear $D(RV)(OC)(R)(N)$ é uma função racional.

Para obtermos uma relação não linear mais amigável, vamos transformar a equação de especificação do óleo combustível em uma equação bilinear.

Pela equação de produção de derivado II.3.5, temos:

$$\sum_{oo} CD(oo)(U)(R)(N) * \underset{(oo)}{REND(RV)} = P(RV)(R)(N)$$

pois o resíduo de vácuo é obtido através do processamento do petróleo bruto nas unidades de destilação (fig. II.2).

Seja $\rho(OC)(R)(N)$ uma nova variável, tal que:

$$D(RV)(OC)(R)(N) = \rho(OC)(R)(N) * P(RV)(R)(N),$$

$$0 \leq \rho \leq 1,$$

(3)

ou seja, $\rho (OC)(R)(N)$ representa o percentual da produção de resíduo de vácuo destinado ao óleo combustível (OC) na refinaria (R).

Se substituirmos (2) e (3) em (1), obtemos a seguinte equação:

$$\rho (OC)(R)(N) * \sum_{OO} CD (OO)(U)(R)(N) * \underset{(OO)}{REND (RV)} * VISC (OO) +$$

$$\sum_{DL} D (DL)(OC)(R)(N) * VISC (DL)$$

$$\geq \quad (4)$$

$$P (OC)(R)(N) * VISC (OC)$$

que apresenta a forma bilinear desejada.

E, para garantirmos o balanço da produção de resíduo de vácuo, criamos uma nova variável $OU (R)(N)$, que representa a quantidade de resíduo de vácuo reservada para outros destinos na refinaria (R), tal que:

$$OU (R)(N) = [1 - \rho (OC)(R)(N)] * P (RV)(R)(N) \quad (5)$$

E, se em (4),

$$VN (R)(N) = \sum_{(OO)} CD (OO)(U)(R)(N) * \underset{(OO)}{REND (RV)} * VISC (OO) ,$$

para cada um dos 7 óleos combustíveis, para cada uma das 11 refinarias, teremos o seguinte par de restrições bilineares:

$$\rho (OC)(R)(N) * VN (R)(N) + \sum_{DL} D (DL)(OC)(R)(N) * VISC (DL) - \tag{6}$$

$$P (OC)(R)(N) * VISC (OC) \geq 0$$

$$P (RV)(R)(N) * [1 - \rho (OC)(R)(N)] - DU (R)(N) = 0 \tag{7}$$

Assim, obtemos as restrições não lineares do modelo em uma forma adequada para usarmos SLP.

Em (6) e (7), $VN (R)(N)$ e $P (RV)(R)(N)$ representam as variáveis não lineares com os respectivos coeficientes:

$$G [\rho (OC)(R)(N)] = \rho (OC)(R)(N)$$

e

$$G [P (RV)(R)(N)] = 1 - \rho (OC)(R)(N) .$$

Expandindo em Série de Taylor e substituindo nas restrições, passamos a ter as seguintes formas linearizadas:

$$VN(R)(N) * \rho^0(OC)(R)(N) + VN^0(R)(N) * \Delta\rho(OC)(R)(N) +$$

$$\sum_{DL} D(DL)(OC)(R)(N) * VISC(DL) - P(OC)(R)(N) * VISC(OC) +$$

$$ESN(OC) \geq 0$$

=

$$P(RV)(R)(N) * [1 - \rho^0(OC)(R)(N)] -$$

$$P^0(RV)(R)(N) * \Delta\rho(OC)(R)(N) -$$

$$OU(R)(N) + ERN(OC) - ERM(OC) = 0$$

onde:

$$\Delta\rho(OC)(R)(N) = \rho(OC)(R)(N) - \rho^0(OC)(R)(N),$$

e ESN(OC), ERN(OC) e ERM(OC) representam os afastamentos às reais restrições do problema original (variáveis s_i de SLP).

Como podemos constatar, as modificações necessárias no modelo da Petrobrás para a utilização do

algoritmo de Programação Linear Sucessiva são bastante simples.

Como uma etapa indispensável à implementação do algoritmo pela Empresa, foi desenvolvida a validação do mesmo através de um conjunto de pequenos exemplos, que será apresentada no capítulo IV.

CAPITULO IV

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados obtidos com a aplicação de SLP. O algoritmo foi testado manualmente, com exceção das otimizações dos subproblemas lineares (passo 2), para as quais foi utilizado o programa LINDO de Linus E. Schrage da Universidade de Chicago.

IV.1) PRIMEIROS RESULTADOS

Nesta seção apresentaremos 2 pequenos exemplos que ilustram o funcionamento do algoritmo.

Em ambos, utilizamos uma penalidade fraca, $p = 1$ e a tolerância, $\epsilon = 10^{-5}$.

Problema 1

$$\text{Minimizar } Z = -x_1 - 2x_2$$

s.a.

$$-3yx_1 + 4yx_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Ilustramos o exemplo acima na Figura IV.1.1, onde as retas pontilhadas representam as curvas de nível da restrição não linear.

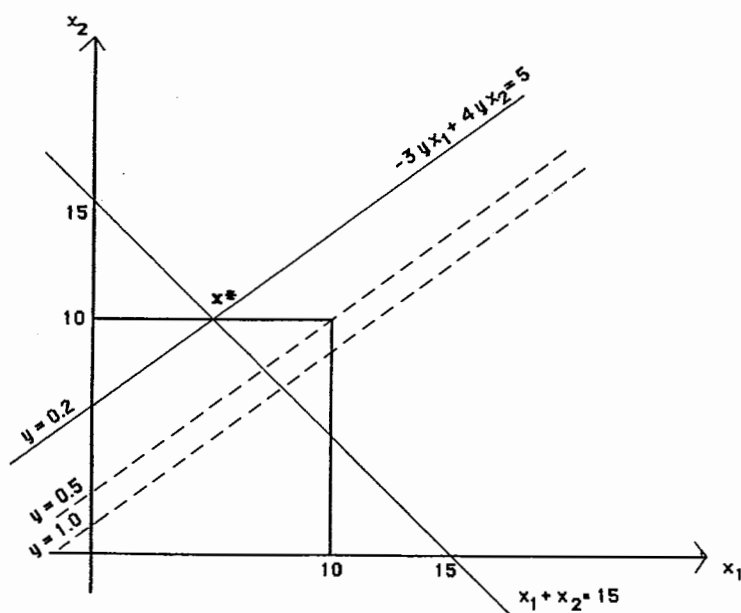


fig. IV.1.1

Temos o seguinte problema linearizado:

$$\text{Minimizar } \bar{Z} = -x_1 - 2x_2 + p(s_1 + s_2)$$

s.a.

$$-3y^0 x_1 + 4y^0 x_2 + (4x_2^0 - 3x_1^0)\Delta y + s_1 - s_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 = 15$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$-D \leq \Delta y \leq D$$

$$s_1, s_2 \geq 0$$

sendo que o valor inicial y^0 satisfaz as desigualdades

$$0 \leq y^0 \leq 1$$

A Tabela IV.1.1 mostra os resultados obtidos em cada iteração:

	Inicial.	Iter.1	Iter.2	Iter.3	Iter.4	Sol.
x_1	7.142857	6.857143	6.357143	5.452381	5.0	5.0
x_2	7.857143	8.142858	8.642858	9.547620	10.0	10.0
Δy	---	- 0.1	- 0.1	- 0.1	0.0	0.0
y	0.5	0.4	0.3	0.2	0.2	0.2
s_1	---	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_2	---	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.1	0.1	0.1	0.2	---	---

tab. IV.1.1

Como mostra a tabela acima, o algoritmo convergiu para a solução ótima.

Vale observar, que na iteração 3 o valor de D foi dobrado, pois $\Delta y = -D$ por 3 iterações consecutivas, e mesmo assim, obtivemos $|\Delta y| = 0$ nesta iteração.

É trivial, que se analisarmos graficamente as soluções obtidas, teremos uma reta, pois estamos sobre a

restrição linear em todas as iterações.

Problema 2

$$\text{Minimizar } Z = -x_1 - 2x_2$$

s.a.

$$-3yx_1 + 4yx_2 = 5$$

$$2yx_1 + x_2 = 12$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 1$$

Observe na Figura IV.1.2 que as curvas de nível da primeira restrição são paralelas, mas as da segunda tem inclinação variando com y .

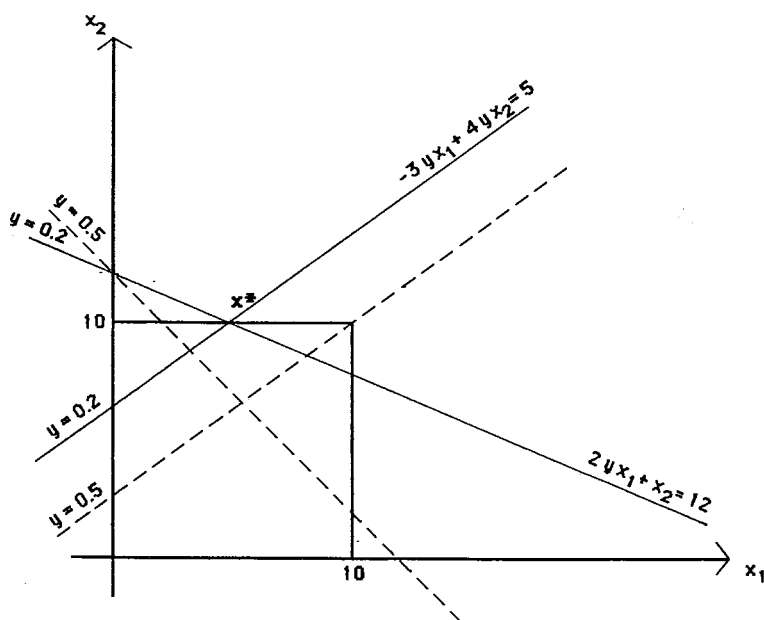


fig. IV.1.2

Para o Problema 2, temos o seguinte problema linearizado:

$$\text{Minimizar } \bar{Z} = -x_1 - 2x_2 + p(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$$

s.a.

$$-3y^0 x_1 + 4y^0 x_2 + (4x_2^0 - 3x_1^0) \Delta y + s_1 - s_2 = 5$$

$$2y^0 x_1 + x_2 + 2x_1^0 \Delta y + s_3 - s_4 = 12$$

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$-D \leq \Delta y \leq D$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

com o valor inicial y^0 satisfazendo as inequações

$$0 \leq y^0 \leq 1$$

As Tabelas IV.1.2-A e IV.1.2-B mostram os resultados obtidos na resolução do problema:

	Inicial.	Iter.1	Iter.2	Iter.3	Iter.4	Iter.5
x_1	5.428571	5.528980	5.623087	5.707736	5.854892	5.884415
x_2	6.571428	6.796735	7.046038	7.314579	7.883917	8.583497
Δy	---	- 0.03	- 0.03	- 0.03	- 0.06	- 0.06
y	0.5	0.47	0.44	0.41	0.35	0.29
s_1	---	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_2	---	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_3	---	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_4	---	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.03	0.03	0.03	0.06	0.06	0.06

tab. IV.1.2-A

	Iter.6	Iter.7	Iter.8	Iter.9	solução
x_1	5.663900	5.131994	4.998772	5.0	5.0
x_2	9.421067	10.0	10.0	10.0	10.0
Δy	-0.06	-0.031844	0.001844	0.0	0.0
y	0.23	0.198156	0.2	0.2	0.2
s_1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
s_4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.12	0.12	0.6	---	---

tab. IV.1.2-B

A Figura IV.1.3 mostra a sequência de pontos gerados pelo algoritmo.

Vale observar, como foi descrito no capítulo III, que o tamanho do passo depende da liberdade que impomos a Δy , ou seja, o valor de D . O próprio algoritmo encarregou-se de calibrá-lo. Observe que entre as soluções x^3 e x^4 o tamanho do passo aumentou, e entre os pontos x^7 e x^8 diminuiu pois estávamos perto da solução ótima.

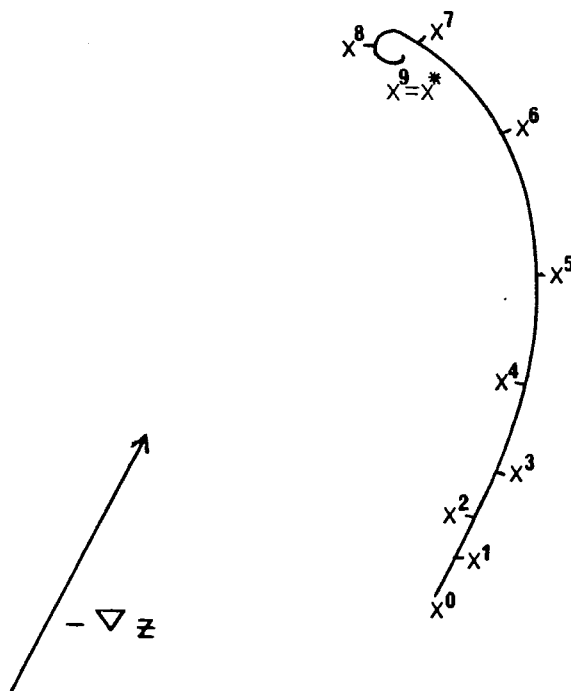


fig.IV.1.3

Com estes mesmos exemplos foram feitos outros

testes, partindo de outras soluções iniciais, alterando o valor de D^0 e da penalidade, e para todas as alternativas obtivemos a convergência para a solução ótima.

Devemos registrar que foram feitos outros testes com problemas de pequeno porte e em todos os casos foi observada a convergência à solução ótima.

A única particularidade que merece ser destacada, é o fato de que em 2 exemplos obtivemos um dos afastamentos (variável de folga s_i) não nulo, como solução de um subproblema linear, apesar de estar penalizado na função objetivo. Todavia, na solução ótima, o algoritmo sempre retorna com todos os afastamentos nulos.

Este fato já foi comentado no capítulo III, isto é, SLP busca a solução ótima do problema não linear exigindo viabilidade para os subproblemas lineares, e, eventualmente podemos ter termos da sequência de soluções geradas pelo algoritmo, $\{ x^1, x^2, \dots \}$, não viáveis para o problema original.

Em todos estes exemplos tínhamos regiões viáveis bem comportadas, o que favorece o bom desempenho de qualquer algoritmo para problemas não lineares.

Vamos apresentar agora o comportamento do algoritmo frente a um problema de natureza mais complexa.

Trata-se de uma aplicação característica da indústria petroquímica, com uma estrutura bastante parecida com o modelo da Petrobrás.

Este exemplo tem sido objeto de estudo para diversos autores como Haverly [3] e Lasdon, Waren, Sarkar e

Palacios [4], sendo considerado na literatura como um problema difícil, devida a forma irregular de sua região viável.

IV.2) O PROBLEMA DA MISTURA

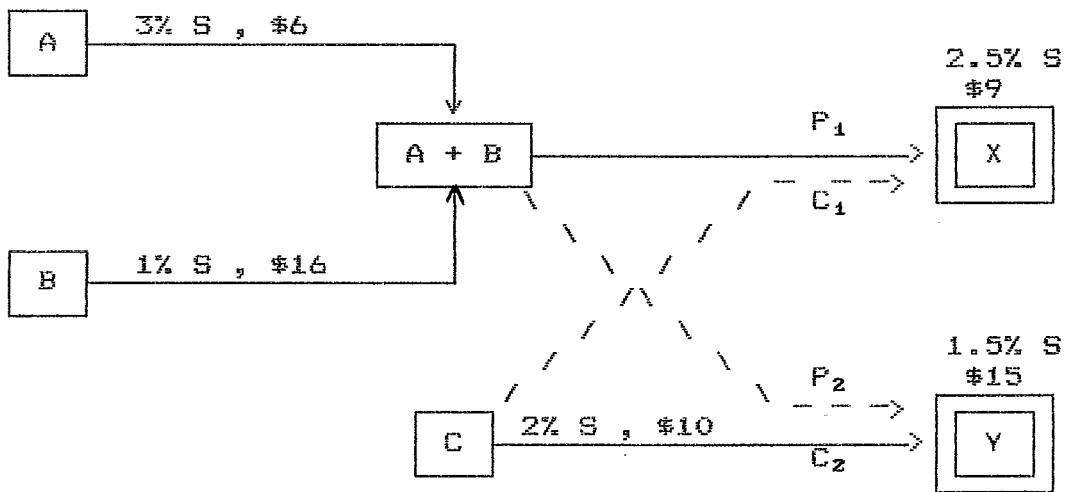


Fig. IV.2.1

O diagrama acima ilustra o seguinte problema:

Deseja-se obter a política ótima para a produção de 2 produtos, X e Y, cujas demandas máximas são 100 e 200, o teor de enxofre máximo admitido, 2.5% e 1.5%, e os preços \$9 e \$15, respectivamente.

Estes 2 produtos são obtidos a partir da mistura de duas correntes A e B, cujos preços e teor de enxofre são, respectivamente, \$6 e \$16, e 3% e 1%, combinada a outra corrente C, que apresenta 2% de teor de enxofre e preço unitário de \$10.

Logo, temos a seguinte formulação:

MAXIMIZAR

$$L = - 6A - 16B - 10C_1 - 10C_2 + 9X + 15Y$$

s.a.

$$A + B - P_1 - P_2 = 0 \quad (1)$$

$$P_1 + C_1 - X = 0 \quad (2)$$

$$P_2 + C_2 - Y = 0 \quad (3)$$

$$tP_1 + 2C_1 - 2.5X \leq 0 \quad (4)$$

$$tP_2 + 2C_2 - 1.5Y \leq 0 \quad (5)$$

$$(t-3)A + (t-1)B = 0 \quad (6)$$

$$1 \leq t \leq 3 \quad (7)$$

$$X \leq 100 \quad (8)$$

$$Y \leq 200 \quad (9)$$

onde:

- t representa o teor de enxofre da mistura das correntes A e B,

- as equações (1), (2) e (3) são restrições

relativas à balanço do volume da mistura, do produto X e do produto Y, respectivamente,

- as desigualdades (4) e (5) referem-se ao teor de enxofre máximo admitido para os produtos X e Y,

- a igualdade (6) define o teor de enxofre da mistura, pois: $t = \frac{3A + B}{A + B}$,

- as inequações (7) são as limitações naturais do teor de enxofre da mistura e, finalmente,

- as desigualdades (8) e (9) representam as restrições correspondentes as demandas dos produtos X e Y respectivamente.

Logo, teremos o seguinte problema linearizado:

MAXIMIZAR

$$L = - 6A - 16B - 10C_1 - 10C_2 + 9X + 15Y - p (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$$

s.a.

$$A + B - P_1 - P_2 = 0$$

$$P_1 + C_1 - X = 0$$

$$P_2 + C_2 - Y = 0$$

$$t^0 P_1 + P_1^0 \Delta t + 2C_1 - 2.5X - s_1 \leq 0$$

$$t^0 P_2 + P_2^0 \Delta t + 2C_2 - 1.5Y - s_2 \leq 0$$

$$(t^0 - 3)A + (t^0 - 1)B + (A^0 + B^0) \Delta t - s_3 + s_4 = 0$$

$$X \leq 100$$

$$Y \leq 200$$

$$-D \leq \Delta t \leq D$$

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

$$1 \leq t^0 \leq 3$$

Antes de analisarmos os resultados obtidos, vamos observar algumas características do espaço viável do problema.

Como pode ser verificado, as restrições (4), (5) e (6) nos fornecem uma região de viabilidade não convexa e bastante desfavorável, apresentando, conforme enfatizado por Lasdon, Waren, Sarkar e Palacios [4], três pontos, listados abaixo, que satisfazem as condições de Kuhn-Tucker:

ponto de sela - $L = \$0$

$$t = 2$$

$$A = B = C_1 = C_2 = P_1 = P_2 = X = Y = 0$$

ótimo local - $L = \$100$

$$t = 3$$

$$A = P_1 = C_1 = 50, X = 100, B = C_2 = P_2 = Y = 0$$

ótimo global - $L = \$400$

$$t = 1$$

$$A = P_1 = C_1 = X = 0, B = P_2 = C_2 = 100, Y = 200$$

Diante disto, vamos analisar o comportamento do algoritmo em 5 valores iniciais para t^0 : 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 e 3.0.

Para todos estes valores de t^0 iniciamos com $A^0 = B^0 = F_1^0 = F_2^0 = 10$, $p = 10000$ e $\epsilon = 10^{-5}$.

t^0	Resultado produzido pelo algoritmo
1.0	Ótimo Global
1.5	Ótimo Global
2.0	Ponto de Sela
2.5	Ótimo Local
3.0	Ótimo Local

tab.IV.2.1

Como podemos observar na Tabela IV.2.1, o algoritmo sempre nos forneceu um ponto satisfazendo as condições de Kuhn-Tucker.

As Tabelas IV.2.2-A e IV.2.2-B mostram os resultados obtidos em cada iteração:

	Inicial.	Iter.1	Iter.1'(*)	Iter.2	Iter.3
A	10.0	50.0	48.0	0.0	21.4285
B	10.0	150.0	148.0	100.0	121.4286
C ₁	---	0.0	0.0	0.0	0.0
C ₂	---	0.0	4.0	100.0	57.1428
P ₁	10.0	0.0	0.0	0.0	0.0
P ₂	10.0	200.0	196.0	100.0	142.8572
t	1.5	1.5	1.49	1.44	1.24
Δt	---	0.0	- 0.01	- 0.05	- 0.2
X	---	0.0	0.0	0.0	0.0
Y	---	200.0	200.0	200.0	200.0
S ₁	---	0.0	0.0	0.0	0.0
S ₂	---	0.0	0.0	0.0	0.0
S ₃	---	0.0	0.0	0.0	0.0
S ₄	---	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.01	0.01	0.2	0.2	0.2

tab. IV.2.2 - A

	Iter.4	Iter.5	Iter.6	solução
A	0.0	0.0	0.0	0.0
B	100.0	100.0	100.0	100.0
C ₁	0.0	0.0	0.0	0.0
C ₂	100.0	100.0	100.0	100.0
P ₁	0.0	0.0	0.0	0.0
P ₂	100.0	100.0	100.0	100.0
t	1.072	1.0	1.0	1.0
Δt	- 0.168	- 0.072	1.0	1.0
X	0.0	0.0	0.0	0.0
Y	200.0	200.0	200.0	200.0
s ₁	0.0	0.0	0.0	0.0
s ₂	0.0	0.0	0.0	0.0
s ₃	0.0	0.0	0.0	0.0
s ₄	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.2	0.2	---	---

tab. IV.2.2 - B

O (*) na Iteração 1' representa uma observação muito importante. Pelo critério de parada do algoritmo SLP na sua formulação dada por Baker e Lasdon [2], já teríamos atingido o "ponto ótimo", pois $\Delta t = 0$. Todavia, procedemos uma pequena modificação (abaixo detalhada), entrando com a solução ótima fornecida nesta iteração, e a partir daí, como pode ser verificado nas Tabelas IV.2.2-A e IV.2.2-B, obtendo a solução ótima global.

A situação acima decorre do seguinte fato:

Existem 2 enfoques para o valor de t em cada iteração:

$$(1) - t^{k+1} = t^k + \Delta t^k$$

$$(2) - t^{k+1} = F(x^k) , \quad x \text{ vetor formado pelas outras variáveis do problema}$$

Se só considerarmos o enfoque (1), teríamos parado na iteração 1, produzindo uma solução errada para o problema.

O enfoque (2) nos informa que para um mesmo valor de t , podemos ter as outras variáveis do problema com seus valores modificados, no caso, A , B , P_1 e P_2 . Esta situação sugere que no critério de parada sejam incluídos testes que verifiquem se as outras variáveis sofreram alguma alteração.

Além de detalharmos o fato descrito acima, faremos algumas observações diante dos resultados obtidos nas seções IV.1 e IV.2.

IV.3) COMENTÁRIOS

Como registra a bibliografia [11], os algoritmos iterativos para problemas não lineares "convergem" quando conseguem atingir uma solução "próxima" da solução ótima,

vizinhança esta, determinada pela tolerância dada.

Além deste fato, a convergência global somente é garantida quando a função objetivo é convexa e minimizamos em um espaço convexo.

Mas, similarmente a outros algoritmos, é razoável supor, que quando trabalhamos com restrições amigáveis encontramos bons resultados para SLP.

Na 1^a seção deste capítulo, foram apresentados 2 exemplos em que o algoritmo convergiu para a solução ótima global de uma forma eficiente.

No Problema da Mistura, apesar das dificuldades registradas na literatura [3],[4], o algoritmo sempre convergiu para um ponto satisfazendo as condições de Kuhn-Tucker. Dessa forma, o desempenho apresentado por SLP pode ser considerado positivo.

Todavia, o algoritmo não garante à convergência ao ótimo global, o que não representa uma desvantagem particular uma vez que todos os algoritmos de programação não linear padecem das mesmas dificuldades.

Quando tomamos o ponto inicial próximo da solução, SLP obteve o ótimo global, o que infelizmente não significa a convergência global do algoritmo para problemas não lineares [11].

Recomenda-se portanto ao usuário de SLP cautela tanto na escolha da solução inicial, como em uma avaliação da solução fornecida pelo algoritmo.

O comportamento do algoritmo na seção 2 nos

forneceu um resultado importante.

Constatamos que em determinados problemas, o critério de parada do algoritmo apresentado por Lasdon e Baker [2] é insuficiente.

Além do teste descrito no capítulo III, devemos verificar se as variáveis lineares x e as variáveis não lineares y sofreram alterações significativas.

Seguindo a formulação dada do algoritmo no capítulo III, vamos enunciar o algoritmo de SLP modificado, considerando o enfoque $z^{k+1} = F(x^k, y^k)$ no critério de parada.

Algoritmo de SLP modificado

Inicialização : Escolha valores positivos para p e ϵ .
 Escolha valores iniciais y^0 , z^0 e D^0 .
 $k = 0$

Passo 1 : Calcule $g(z^k)$, $y^k \nabla g(z^k)^t$, $G(z^k)$ e $y^k \nabla G(z^k)^t$.
 Substitua-os na matriz do problema.

Passo 2 : Resolva o subproblema linear obtendo o valor ótimo para o vetor Δz^{k+1} e para as variáveis x^{k+1} e y^{k+1}
 $z^{k+1} = z^k + \Delta z^{k+1}$

$$\Delta y^{k+1} = y^{k+1} - y^k$$

$$\text{Se } k \geq 1, \quad \Delta x^{k+1} = x^{k+1} - x^k$$

Passo 3 : Se $|\Delta z_i^{k+1}| < \varepsilon \quad \forall i \in \text{RN}$, $|\Delta y^{k+1}| < \varepsilon$, e
Se $k \geq 1$ e $|\Delta x^{k+1}| < \varepsilon$, pare.

Passo 4 : Calibração de D:

$$\forall i \in \text{RN},$$

Se Δz_i mudou de sinal da última iteração,

$$D_i^{\circ} = D_i^{\circ} / 2.$$

Se $\Delta z_i = D_i^{\circ}$ por 3 iterações consecutivas,

$$D_i^{\circ} = 2D_i^{\circ}.$$

Se $\Delta z_i = -D_i^{\circ}$ por 3 iterações consecutivas,

$$D_i^{\circ} = 2D_i^{\circ}$$

Passo 5 : $k = k + 1$

Volte para o passo 1.

Desta forma é evitada a parada prematura do algoritmo, produzindo uma solução incorreta como ocorrido no problema da mistura acima descrito.

No próximo capítulo citaremos outros algoritmos para programação não linear e mostraremos algumas vantagens de SLP sobre estes procedimentos em determinados problemas com características semelhantes ao modelo da Petrobrás.

CAPÍTULO VCONCLUSÕES E SUGESTÕES

Após termos descrito o modelo que motivou este trabalho e uma alternativa para resolvê-lo, resta defrontarmos o algoritmo de SLP [2] frente a outros procedimentos existentes para resolução de problemas similares ao da Petrobrás.

A não linearidade em modelos matemáticos na indústria petrolífera é inevitável pois, como foi visto nos capítulos anteriores, em qualquer processo que se faça necessária a mistura de fluxos com propriedades distintas, e não somente o volume desta combinação, mas também a qualidade é uma informação relevante, recai-se em relações não lineares.

Como citamos no capítulo III, incansáveis esforços tem sido despendidos pelas companhias petroquímicas para incorporar funções não lineares em seus modelos de forma a torná-los mais aderentes à realidade.

A transformação de problemas não lineares em lineares através do desenvolvimento em Série de Taylor até

o 1º termo se apresenta como uma alternativa natural, desde que é inquestionável o fato de que problemas lineares, mesmo que de grande porte, convergem globalmente de uma forma eficiente.

Por outro lado, podemos também considerar inquestionável as grandes dificuldades que enfrentam os algoritmos para Programação Não Linear, principalmente para problemas com milhares de variáveis.

Diante disto, a maior vantagem de métodos de Programação Linear Sucessiva é o fato de utilizarem códigos de uso corrente de Programação Linear, capazes de operar eficazmente problemas de grande porte.

A primeira versão de SLP foi descrita por Griffith e Stewart em 1961 [7], na qual foi considerado um problema em que as restrições e a função objetivo tinham a forma $ax + f(y)$ e, dado um valor inicial y^0 , as funções não lineares f eram aproximadas por Série de Taylor, $f(y^0) + \nabla f(y^0)\Delta y$. Similarmente à versão estudada neste trabalho [2], cotas inferior e superior eram impostas ao vetor Δy , de forma a validar a aproximação.

A diferença fundamental entre as diversas versões existentes de SLP, é a heurística utilizada para determinar se o novo valor de y , $y^1 = y^0 + \Delta y$, é aceito e se há necessidade de se alterar as cotas impostas à Δy .

Uma versão sofisticada de SLP foi descrita por Batchelor em 1976, que se combina com o Método do Gradiente Reduzido [12].

Uma outra alternativa para a resolução das não

linearidades que surgem nos modelos da indústria petroquímica seria a utilização do Algoritmo do Gradiente Reduzido. Este método foi originalmente proposto por Wolfe em 1967 para resolver problemas lineares e, em 1969, generalizado para Programação Não Linear por Abadie e Carpentier, conforme citado por Luenberger [11].

A idéia sucinta do Método do Gradiente Reduzido consiste em buscar a solução ótima somente considerando as restrições ativas, reduzindo a este espaço a função objetivo e mantendo a viabilidade. Se o espaço viável é linear, conseguimos evitar inviabilidades, o que infelizmente não ocorre com restrições não lineares. Ou seja, o algoritmo propõe uma projeção do gradiente da função objetivo sobre o espaço viável reduzido, formado somente pelas restrições ativas [9].

Todavia, a sua aplicação para problemas do porte do modelo da Petrobrás seria um pouco trabalhosa, pois sua implementação é bastante complexa.

Como já foi citado, existem algumas versões para Programação Linear Sucessiva, as quais diferem, também quanto a forma de sua apresentação, aditiva ou multiplicativa.

Na forma aditiva, as relações não lineares aparecem como foi descrito por Griffith e Stewart [7], $ax + f(y)$, onde x são as variáveis lineares e y as não lineares. E na forma multiplicativa, temos $ax + f(z)y$, como descrito no capítulo III, versão dada por Lasdon e Baker [2]. Embora teoricamente equivalentes, a forma

multiplicativa apresenta uma importante vantagem por ser compatível com formulações existentes de problemas não lineares que se utilizam da Programação Linear tomando z constante. Nestes casos a implementação de SLP torna-se bastante simples, reduzindo-se somente ao acréscimo de colunas relativas aos afastamentos (variáveis s_i) e ao vetor Δz .

Um outro procedimento que também apresenta a forma multiplicativa é o de programação linear generalizada descrita por Wolfe e citada por Lasdon [2] [13]. Este método também utiliza códigos de programação linear para resolver problemas não lineares, apresentando, no entanto, desvantagens sobre SLP, pois em problemas como o da Petrobrás, exigiria o acréscimo de muitas restrições ao modelo original.

As mudanças que propomos ao modelo da Petrobrás, que frente ao porte do problema não são muitas, foram para garantir uma maior facilidade na aplicação de SLP, pois o equacionamento original apresenta as relações não lineares mais imbricadas, enquanto na formulação ora proposta essas se reduzem a relações bilineares.

Quanto ao desempenho do algoritmo mostrado no capítulo IV, consideramos bom, porque mesmo no Problema da Mistura, um problema conhecidamente difícil [3] [4], quando não foi obtida a convergência para o ponto de mínimo global, o algoritmo detectou somente pontos satisfazendo as condições de 1^ª ordem de Kuhn-Tucker. Tal desempenho recomenda o método no contexto dos procedimentos conhecidos

para Programação Não Linear.

Aproveitando o exemplo citado acima, Haverly [3] mostrou que utilizando o procedimento de recursividade no Problema da Mistura em sua forma original, obteve-se somente convergência para o ponto de mínimo local, para qualquer solução inicial. Ademais, o procedimento de recursividade apresenta uma grande desvantagem sobre os outros, por carecer de uma maior fundamentação teórica.

Diante dessas considerações, podemos concluir que a implementação de SLP pela Empresa se apresenta como uma alternativa merecedora de análise.

A formulação proposta por Lasdon e Baker [2] adapta-se perfeitamente ao equacionamento do modelo, e o algoritmo modificado como propomos no capítulo IV fornece uma grande vantagem por considerar todas as variáveis do problema no critério de parada.

Todavia recomendamos cautela na escolha da solução inicial e uma cuidadosa avaliação na solução produzida pelo algoritmo, pois como vimos, estes aspectos são de extrema importância em qualquer procedimento para Programação Não Linear.

Mas, acreditamos que esses cuidados não serão problemáticos para a Empresa uma vez que possuem uma grande familiaridade com o modelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bodington, C.E. and Baker, T.E. (1990)
"A History of Mathematical Programming in the Petroleum Industry", Interfaces n^o 20 - pp: 117-127.
- [2] Baker, T.E. and Lasdon, L.S. (1985)
"Sucessive Linear Programming at Exxon", Management Science, Vol.31 - n^o 3 - pp: 264-274.
- [3] Haverly, C.A. (1978)
"Studies of the Behavior of Recursion for the Pooling Problem", Sigmap Bulletin, n^o 25 - pp: 19-28.
- [4] Lasdon, L.S., Waren, A.D., Sarker, S. and Palacios, F. (1979), "Solving the Pooling Problem using Generalized Reduced Gradient and Sucessive Linear Programming Algorithms", Sigmap Bulletin, n^o 27 - pp: 9-15.
- [5] Iachan, R. (1982)
"Resumo do Projeto 0291 - Estratégia de Compra de Petróleo", Pesop/Sesup - Petrobrás.
- [6] Rosen, J.B. (1960)
"The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming", Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 8, n^o 1 - pp: 181- 217.

- [7] Griffith, R.E. and Stewart, R.A. (1961)
"A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems", Management Science, Vol. 2 - pp: 379-392.
- [8] Bodington, C.E. and Randall, W.C. (1979)
"Nonlinear Programs for Product Blending", Joint National Tims/Orsa Meeting, New Orleans.
- [9] Gill, P.E., Murray, W. and Wright, M.H. (1981)
Practical Optimization", (Academic Press - U.S.A.).
- [10] Lang, S. (1968)
Analysis I", (Addison - Wesley - U.S.A.).
- [11] Luenberger, D.G. (1973)
"Introduction to Linear and Nonlinear Programming", (Addison - Wesley, U.S.A.).
- [12] Lasdon, L.S. and Waren, A.D. (1980)
"Survey of Nonlinear Programming Applications", Operation Research, Vol. 28, n^o 5 - pp: 34-50
- [13] Lasdon, L.S. (1970)
"Optimization Theory for Large Systems", (The Macmillan Company, U.S.A.).