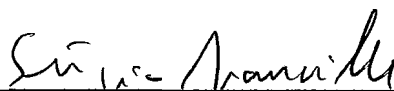


O PROBLEMA DE ACOPLAMENTO ATIVO-REATIVO NO DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA: UMA SOLUÇÃO VIA CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DE KARUSH-KUHN-TUCKER

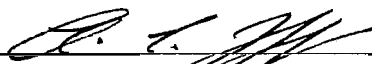
FLÁVIO RODRIGO DE MIRANDA ALVES

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

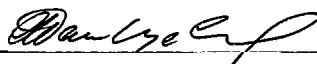
Aprovada por:



Sérgio Granville, Ph.D.
(Presidente)



Clóvis Caesar Gonzaga, Ph.D.



Mário Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 1992

ALVES, FLÁVIO RODRIGO DE MIRANDA

O Problema de Acoplamento Ativo–Reativo no Despacho Ótimo de Potência Reativa: Uma Solução Via Condições de Otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker [Rio de Janeiro] 1992

X, 103 p., 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1992)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE 1. Despacho Ótimo de Potência Reativa 2. Fluxo de Potência Ótimo 3. Multiplicadores de Lagrange 4. Condições de Otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A meus pais
José **Augusto** e Maria

À minha tia
Maria da Conceição

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Dr. Sérgio Granville por sua valiosa orientação e persistente estímulo, sem os quais dificilmente teria concluído este trabalho.

Agradeço a todos os colegas do Departamento de Sistemas do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (DPST/CEPEL) que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial, gostaria de agradecer ao engenheiro Luiz Maurício da Silva Thomé pelo privilégio de trabalhar sob sua orientação, o que me permitiu colecionar experiências extremamente valiosas e que foram de grande utilidade na implementação computacional do método apresentado.

Às engenheiras Maria Cândida Abib Lima e Simone Prado agradeço o auxílio prestado durante a fase de comparação de métodos e de integração com os programas de planejamento de reativos PLANVAR e SVSPP, desenvolvidos pelo Departamento de Sistemas do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica para a ELETROBRÁS e para a Boneville Power Administration, respectivamente.

Ao engenheiro Ricardo Diniz Rangel agradeço o auxílio na confecção das ilustrações.

A Regina Helena Faceira agradeço a colaboração no trabalho de datilografia.

Agradeço à Diretoria do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica por proporcionar condições e prover todos os recursos necessários ao desenvolvimento deste trabalho através da cessão de seus equipamentos e instalações.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

**O PROBLEMA DE ACOPLAMENTO ATIVO–REATIVO NO DESPACHO
ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA: UMA SOLUÇÃO VIA
CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DE KARUSH–KUHN–TUCHER**

Flávio Rodrigo de Miranda Alves

Fevereiro, 1992

Orientador: Sérgio Granville
Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema de despacho ótimo de potência reativa é um caso particular do problema de fluxo de potência ótimo em que as injeções de potência ativa são mantidas fixas. Dentre os métodos mais utilizados para resolver este problema destacam-se os métodos baseados em linearizações e quadratizações sucessivas. Nestes métodos normalmente são linearizadas apenas as restrições correspondentes às equações de balanço de potência reativa com o objetivo de reduzir os requisitos de memória e os tempos de computação. A utilização destes modelos desacoplados acarreta problemas de convergência e dificulta o tratamento de funções-objetivo não-separáveis quando a hipótese de desacoplamento ($P-\theta, Q-V$) não é válida. Numa primeira abordagem foi investigado o método CRIC proposto por Carpentier e a correspondente hipótese de desacoplamento alternativa. Devido aos problemas de convergência verificados durante a utilização do método CRIC foi desenvolvido um algoritmo para solução do problema de despacho ótimo de potência reativa baseado na estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições de potência ativa a partir das condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker. Este método se revelou eficiente e possibilitou o tratamento adequado de funções-objetivo não-separáveis.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

THE **ACTIVE–REACTIVE** COUPLING PROBLEM IN
OPTIMAL REACTIVE DISPATCH: A SOLUTION VIA
KARUSH–KUHN–TUCKER OPTIMALITY CONDITIONS

Flávio Rodrigo de Miranda Alves

February, 1992

Thesis Supervisor: Sérgio Granville
Department: Systems and Computation Engineering

The optimal reactive dispatch is a particular case of the optimal power flow problem in which active injections are assumed constant. Among several methods used to solve this problem those based on sequences of linear or quadratic programming problems proved to be very efficient and have been intensively used. These methods usually linearize only the reactive power balance equations in order to reduce memory requirements and computation time. Using these decoupled models implies in an inadequate treatment of nonseparable objective functions and the possibility of difficult convergence if the (**P–O, Q–V**) decoupling assumption does not keep valid. Carpentier's CRIC method and its corresponding alternative decoupling assumption were first investigated. Convergence difficulties verified with the CRIC method led to the development of an algorithm based on the estimation of Lagrange multipliers associated with active power balance equations and the Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions. This method exhibited good performance and made possible the adequate treatment of nonseparable objective functions.

ÍNDICE

Capítulo I	INTRODUÇÃO	1
Capítulo II	CONCEITOS BÁSICOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	4
II.1	INTRODUÇÃO	4
II.2	SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	5
II.2.1	Representação de Grandezas Alternadas	6
II.2.2	Representação da Rede Elétrica	8
II.2.3	Qualidade, Confiabilidade e Economicidade	9
II.3	POTÊNCIA ELÉTRICA EM CORRENTE ALTERNADA	9
II.3.1	Potência Complexa	13
II.3.2	Potência Ativa x Frequência	15
II.3.3	Potência Reativa x Tensão	15
II.3.4	Equipamentos de Compensação Reativa	18
II.3.4.1	Equipamentos de Compensação Fixos	18
II.3.4.2	Equipamentos de Compensação Controláveis	19
II.4	REPRESENTAÇÃO POR UNIDADE DE GRANDEZAS ELÉTRICAS	20
II.5	MODELAGEM ESTÁTICA DE COMPONENTES DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	21
II.5.1	Linha de Transmissão	22
II.5.2	Transformador Em-Fase	24

II.6	O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA	26
II.6.1	Formulação Básica	27
II.6.2	Equações Algébricas Não—Lineares	29
II.6.3	Inequações Algébricas Não—Lineares	31
II.6.4	Sistema de Equações e Inequações Algébricas Não—Lineares	31
II.6.5	Métodos de Solução	32
II.6.5.1	Solução do Problema Básico	32
II.6.5.2	Método de Newton	34
II.6.5.3	Método de Newton Desacoplado	37
II.6.5.4	Método Desacoplado Rápido	38
Capítulo III	O PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA _ FORMULAÇÃO BÁSICA E MÉTODOS DE SOLUÇÃO	39
III.1	INTRODUÇÃO	39
III.2	O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO	39
III.3	O PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA	42
III.3.1	Construção do Modelo Linear ou Quadrático	45
III.4	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA DE ACOPLAMENTO ATIVO—REATIVO NO DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA	48

Capítulo IV	O MÉTODO CRIC APLICADO AO PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA	50
IV.i	INTRODUÇÃO	50
IV.2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	50
IV.3	O AMBIENTE DE IMPLEMENTAÇÃO	53
IV.4	RESULTADOS	54
Capítulo V	ESTIMATIVA DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE ACOPLAMENTO NO DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA	59
V.1	INTRODUÇÃO	59
v.2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	59
V.2.1	Resultados	64
V.3	TRATAMENTO DA FUNÇÃO–OBJETIVO MINIMIZAÇÃO DE PERDAS ATIVAS – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	65
V.3.1	Resultados	69
Capítulo VI	CONCLUSÕES	71
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73
APÊNDICE A	OPERAÇÕES COM FASORES	77
APÊNDICE B	EQUAÇÕES DO FLUXO DE POTÊNCIA CONVENCIONAL	78

APÊNDICE C	MÉTODO DE NEWTON APLICADO A SISTEMAS N-DIMENSIONAIS	84
APÊNDICE D	EQUAÇÕES DO MÉTODO CRIC	87
APÊNDICE E	CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DE KARUSH-KUHN-TUCKER	103

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O problema de despacho ótimo de potência reativa é um caso particular do problema de fluxo de potência ótimo e pode ser definido como sendo a determinação do estado de um sistema elétrico de potência que otimiza uma função—objetivo e satisfaz um conjunto de restrições físicas e de operação ao mesmo tempo que mantém fixas as injeções de potência ativa. Programas de despacho ótimo de potência reativa têm grande aplicação tanto no planejamento quanto na operação de sistemas elétricos de potência.

Todos os métodos utilizados para resolver o problema de fluxo de potência ótimo poderiam, em princípio, ser utilizados para resolver o problema de despacho ótimo de potência reativa. Neste trabalho nos concentraremos nos métodos baseados em linearizações e quadratizações sucessivas. Estes métodos normalmente linearizam apenas as restrições correspondentes às equações de balanço de potência reativa. A utilização destes modelos desacoplados permite grande redução dos requisitos de memória e dos tempos de computação, não influenciando no resultado quando: a) a hipótese de desacoplamento ($P-\theta$, $Q-V$) é válida, e/ou, b:) a função—objetivo é separável, isto é, depende apenas das variáveis de controle de potência reativa.

No entanto, quando a hipótese de desacoplamento ($P-\theta$, $Q-V$) não é válida e/ou a função—objetivo a ser tratada é não-separável, como, por exemplo, minimização de perdas ativas, a utilização de modelos desacoplados pode acarretar graves problemas de convergência e a possibilidade de obter soluções que não são necessariamente ótimos globais.

A alternativa óbvia seria utilizar modelos completos linearizando também as restrições correspondentes às equações de balanço de potência ativa, mas isto dobraria os requisitos de memória e aumentaria significativamente os tempos de computação.

Este trabalho teve como objetivo pesquisar formas de passar para o problema de otimização informações que permitissem considerar o acoplamento ativo—reativo sem, no entanto, representar explicitamente a parte ativa.

Foram investigados o método CRIC, proposto por Carpentier, e um método de estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes às equações de balanço de potência ativa baseado nas condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker. Também foi estudado o tratamento adequado de funções-objetivo não–separáveis.

O problema de despacho ótimo de potência reativa é formulado como um problema de programação não–linear de grande porte. Para a solução deste problema são empregados métodos de linearizações e quadratizações sucessivas.

Na implementação dos métodos pesquisados foi utilizado o pacote computacional MINOS para solução do problema de otimização e o programa ANAREDE para solução do problema de fluxo de potência.

No Capítulo II são introduzidos conceitos básicos sobre sistemas elétricos de potência. Ainda no Capítulo II é definido o problema de fluxo de potência convencional e apresentados os métodos mais utilizados na sua solução.

No Capítulo III é definido o problema de despacho ótimo de potência reativa a partir do problema mais geral de fluxo de potência ótimo e discutidas as diversas alternativas para construção do problema de otimização.

No Capítulo IV são descritos o método CRIC e sua hipótese de desacoplamento alternativa e apresentada a aplicação deste método como tentativa de solução do problema de acoplamento ativo–reativo no despacho ótimo de potência reativa. Ainda neste capítulo são discutidos resultados obtidos com métodos de linearizações e quadratizações sucessivas baseados na hipótese de desacoplamento tradicional.

No Capítulo V é desenvolvido um algoritmo para solução do problema de despacho ótimo de potência reativa a partir das condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker e da estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes às equações de balanço de potência ativa. Ainda no Capítulo V são discutidos resultados obtidos com este algoritmo utilizando métodos de linearizações e quadratizações sucessivas e feitas comparações destes resultados com os obtidos por métodos de linearizações e quadratizações sucessivas baseados em modelos desacoplados tradicionais. Em função do bom desempenho do método no tratamento

do acoplamento ativo–reativo foi desenvolvido um algoritmo de quadratizações sucessivas com o objetivo de tratar adequadamente a função–objetivo não-separável minimização de perdas ativas. A fundamentação teórica do algoritmo desenvolvido é válida para qualquer função–objetivo não-separável.

O Capítulo VI apresenta as conclusões resultantes deste trabalho.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

II.1 INTRODUÇÃO

O objetivo de um sistema elétrico de potência é converter formas primárias de energia disponíveis na natureza em energia elétrica e transmitir esta energia aos centros de consumo, atendendo a critérios de qualidade, confiabilidade e economicidade.

Neste capítulo serão descritos de forma sucinta os processos de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica, enumerando-se os equipamentos utilizados em cada etapa.

Para um perfeito entendimento da importância da potência reativa nos sistemas elétricos de potência serão analisadas a potência elétrica e suas componentes ativa e reativa, bem como a influência de cada uma destas sobre os parâmetros do sistema.

Os componentes básicos de um sistema elétrico de potência são geradores, linhas de transmissão, transformadores, reatores e capacitores. Neste capítulo será apresentada a modelagem clássica em regime permanente destes equipamentos.

A principal ferramenta computacional utilizada em Engenharia Elétrica é o fluxo de potência ou fluxo de carga, como também é conhecido. Seu objetivo é determinar o estado do sistema, a distribuição dos fluxos de potência ativa e reativa ao longo das linhas de transmissão e algumas outras grandezas de interesse. Será feita uma descrição do problema de fluxo de potência, apresentando-se sua formulação matemática e seus métodos de solução.

II.2 SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Os sistemas elétricos de potência têm por objetivo a geração de energia elétrica, a transmissão desta energia aos centros de consumo e a distribuição aos consumidores individuais, observando—se, em todas as etapas do processo, critérios de qualidade, confiabilidade e economicidade.

Na etapa de geração, através da utilização de equipamentos de conversão eletromecânica de energia denominados geradores, ocorre a transformação da energia mecânica em energia elétrica. As instalações que abrigam os geradores são denominadas usinas geradoras e podem ser hidrelétricas ou térmicas.

Nas usinas hidrelétricas a energia mecânica resultante do escoamento controlado da água armazenada nos reservatórios (represas) aciona turbinas que, por estarem rigidamente acopladas aos geradores, transmitem a estes últimos o movimento de rotação necessário à geração da energia elétrica,

Nas usinas térmicas a energia mecânica é obtida pela cessão do calor resultante da fissão nuclear ou da queima de carvão mineral ou óleo combustível à água, que muda de fase, transformando—se em vapor que, por sua vez, passa pelas turbinas, onde parte de sua energia térmica é convertida em energia mecânica utilizada para imprimir movimento de rotação aos geradores.

Na etapa de transmissão a energia é conduzida pelas linhas de transmissão desde as subestações elevadoras, situadas próximas às usinas, até as subestações abaixadoras, situadas próximas às cargas.

As subestações elevadoras são necessárias para elevar a tensão de geração (da ordem de 18.000 volts, ou seja, 18.0 kV) a níveis adequados para a transmissão (alta tensão, acima de 138 kV). Nas subestações abaixadoras a tensão de transmissão é convertida para níveis de distribuição (média tensão, em torno de 13.8 kV). A partir das subestações abaixadoras a energia é conduzida em média tensão através das linhas de distribuição até os pontos de consumo onde a tensão é novamente reduzida para níveis adequados (de 127 a 440 V). Os equipamentos utilizados para elevar ou abaixar a tensão são denominados transformadores.

A energia elétrica pode ser transmitida e consumida em corrente contínua (CC) ou corrente alternada (CA). No caso de corrente alternada o sistema pode ser monofásico ou trifásico.

Por razões de ordem econômica os sistemas elétricos de potência funcionam em corrente alternada e são trifásicos.

II.2.1 Representação de Grandezas Alternadas [1]

As grandezas alternadas são representadas por variáveis senoidais em função do tempo. Estas variáveis são normalmente representadas por fasores, utilizando-se a notação adequada, denominada notação fasorial.

Seja a variável senoidal

$$v = v_{\max} \text{sen}(wt + \alpha)$$

onde

- v é o valor da variável em um instante t
- v_{\max} é o valor máximo admissível para v
- w é a frequência angular de variação de v , em rad/s
- a é a defasagem em relação a uma dada referência angular, em rad

Podemos dizer que v é a parte imaginária da grandeza complexa

$$\mathcal{V} = v_{\max} e^{j(wt + \alpha)} = v_{\max} \cos(wt + \alpha) + j v_{\max} \text{sen}(wt + \alpha)$$

isto é

$$\begin{aligned} v &= \text{Im} \left[v_{\max} e^{j(wt + \alpha)} \right] = \\ &= \sqrt{2} \text{Im} \left[v_{\max} e^{j\omega t} e^{ja} / \sqrt{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Definimos o fasor V como sendo o número complexo

$$V = (v_{\max} e^{j\alpha}) / \sqrt{2} \quad (\text{II.2})$$

De (11.1) e (11.2) concluimos que:

$$v = \sqrt{2} \operatorname{Im} [V e^{j\omega t}]$$

Definimos o valor eficaz de V como

$$|V| = v_{\max} / \sqrt{2} \quad (\text{II.3})$$

A utilização do operador j ao invés do operador i precedendo a parte imaginária de uma grandeza complexa é usual em textos de Engenharia Elétrica, uma vez que nestes é comum a utilização da letra i para representar a corrente elétrica.

Os fasores podem ser representados em notação polar ou notação retangular, as quais definimos a seguir.

Seja o fasor

$$\mathcal{X} = X e^{j\varphi}$$

$$X \cos \varphi + j X \sin \varphi$$

é a representação do fasor \mathcal{X} em notação retangular

$$X \angle \varphi$$

é a representação do fasor \mathcal{X} em notação polar

Quando utilizamos fasores em notação polar para representar grandezas complexas de uma rede elétrica o ângulo de cada fasor reflete a defasagem em relação a uma referência angular arbitrada para a rede em questão. A referência angular é, normalmente, o ângulo do fasor de tensão de uma barra.

No Apêndice A são definidas as operações básicas com fasores nas formas polar e retangular com o objetivo de permitir o acompanhamento das deduções existentes ao longo do texto.

Uma grandeza alternada $v = v_m \sin wt$ varia no tempo em ciclos durante os quais passa por valores positivos e negativos. O número de ciclos por unidade de tempo é expresso por

$$f = w / 2\pi$$

onde

f	frequência da rede, em Hz
w	frequência angular da rede, em rad/s

II.2.2 Representação da Rede Elétrica [2,3]

A rede elétrica pode ser representada por um grafo no qual cada nó corresponde a uma barra e cada aresta corresponde a um circuito.

Por barra entende-se um ponto da rede normalmente associado a um gerador, uma carga ou uma subestação (ou parte dela). A cada barra estão associados um fasor de tensão (representado por módulo e defasagem angular), cargas ativa e reativa e gerações ativa e reativa.

Por circuito entende-se um linha de transmissão ou um transformador. Um circuito interliga duas barras da rede elétrica.

O grafo representativo da rede elétrica pode ser dividido em subgrafos denominados áreas, as quais podem aglutinar barras com um mesmo nível de tensão, barras de uma mesma companhia, etc.

II.2.3 Qualidade, Confiabilidade e Economicidade [1]

Neste ponto estamos em condições de definir adequadamente os conceitos de qualidade, confiabilidade e economicidade citados anteriormente.

Por qualidade do fornecimento de energia elétrica entende-se a manutenção da frequência e do módulo da tensão numa estreita faixa de valores. As variações admissíveis situam-se na faixa de $\pm 10\%$ para tensão e de $\pm 3\%$ para frequência.

Por confiabilidade do sistema elétrico entende-se a capacidade de atender à demanda ininterrupta e instantaneamente, mantendo este atendimento mesmo que ocorra falha em algum equipamento e/ou modificação topológica da rede decorrente de manutenção ou de manobra provocada por falha.

O conceito de economicidade obviamente refere-se ao fornecimento de energia elétrica atendendo a padrões pré-definidos de qualidade e confiabilidade minimizando-se os investimentos necessários para a manutenção destes padrões.

II.3 POTÊNCIA ELÉTRICA EM CORRENTE ALTERNADA [1]

Para melhor compreensão dos conceitos acerca da potência elétrica analisaremos as grandezas de um sistema CA monofásico.

A potência elétrica é dada pela expressão

$$p = vi \tag{II.4}$$

onde

P	potência elétrica
v	tensão
i	corrente elétrica

são grandezas senoidais, sendo tensão e corrente expressas por:

$$v = v_{\max} \text{sen } \omega t \quad (\text{II.5})$$

$$i = i_{\max} \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (\text{II.6})$$

onde

v_{\max} valor máximo da tensão

i_{\max} valor máximo da corrente

ω frequência angular da rede

ϕ ângulo de defasagem entre tensão e corrente

Substituindo (11.5) e (11.6) em (II.4), vem:

$$\begin{aligned} p &= v_{\max} i_{\max} \text{sen } \omega t \text{sen} (\omega t - \phi) \\ p &= v_{\max} i_{\max} (\text{sen } \omega t \text{sen } \omega t \cos \phi - \text{sen } \omega t \cos \omega t \text{sen } \phi) \\ p &= v_{\max} i_{\max} (\cos \phi \text{sen}^2 \omega t - \text{sen } \phi \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega t) \\ p &= v_{\max} i_{\max} \left[\cos \phi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) - \frac{1}{2} \text{sen } 2\omega t \text{sen } \phi \right] \\ p &= \frac{v_{\max} i_{\max}}{2} \left[\cos \phi - (\cos 2\omega t \cos \phi + \text{sen } 2\omega t \text{sen } \phi) \right] \\ p &= \frac{v_{\max} i_{\max}}{2} [\cos \phi - \cos(2\omega t - \phi)] \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Os valores eficazes de tensão e corrente são dados por:

$$|V| = v_{\max} / \sqrt{2} \quad (\text{II.8})$$

$$|I| = i_{\max} / \sqrt{2} \quad (\text{II.9})$$

Substituindo (11.8) e (11.9) em (II.7), vem

$$p = |V| |I| \cos \phi - |V| |I| \cos(2\omega t - \phi) \quad (\text{II.10})$$

A potência elétrica oscila em torno do valor médio $|V||I| \cos\phi$ com frequência 2ω . A alternância entre valores positivos e negativos indica que a potência flui ora no sentido positivo (arbitrário) ora no sentido negativo.

Expandindo (II.10), vem:

$$p = |V||I| \cos\phi - |V||I| (\cos 2\omega t \cos\phi + \sin 2\omega t \sin\phi)$$

ou

$$p = |V||I| \cos\phi (1 - \cos 2\omega t) - |V||I| \sin\phi \sin 2\omega t \quad (11.11)$$

O primeiro termo de (11.11) nunca fica negativo e pulsa em torno do valor médio $|V||I| \cos\phi$. O segundo termo é ora positivo ora negativo e seu valor médio é nulo.

Definindo

$$P = |V||I| \cos\phi \quad \text{Potência Ativa}$$

e

$$Q = |V||I| \sin\phi \quad \text{Potência Reativa}$$

podemos reescrever (11.11) como:

$$p = P(1 - \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t \quad (11.12)$$

O ângulo ϕ é denominado ângulo de fase e representa a defasagem entre tensão e corrente. Em um sistema elétrico típico, com predominância de cargas indutivas, a corrente é dita atrasada em relação à tensão (ϕ negativo). O cosseno do ângulo de fase ($\cos\phi$) é denominado fator de potência.

A potência ativa (P) é definida como sendo o valor médio de p e representa fisicamente a parcela da potência elétrica capaz de realizar trabalho. Seu valor está estreitamente ligado ao fator de potência.

A potência ativa é expressa em watts (W) e seus múltiplos kW, MW e GW, relacionados por

$$1 \text{ GW} = 10^3 \text{ MW} = 10^6 \text{ kW} = 10^9 \text{ W}$$

A potência reativa (Q) é definida como o valor máximo do segundo termo da equação (II.12), cujo valor médio é nulo, sendo, portanto, incapaz de realizar trabalho.

A potência reativa também tem a mesma dimensão da potência ativa e a unidade natural para sua representação seria o watt. Porém, para enfatizar o fato de que é incapaz de realizar trabalho, ou seja, é uma potência "não-ativa", é medida em voltampères reativos (VAr) e seus múltiplos kVAr, MVar e GVar, relacionados por:

$$1 \text{ GVar} = 10^3 \text{ MVar} = 10^6 \text{ kVar} = 10^9 \text{ VAr}$$

Capacitores e reatores são equipamentos cuja interação com a rede elétrica se dá exclusivamente em termos de potência reativa. Um reator absorve Q positivo, isto é, consome potência reativa. Um capacitor consome Q negativo ou, em outras palavras, gera potência reativa.

A figura (11.1) mostra os gráficos de p , P e Q em função do tempo.

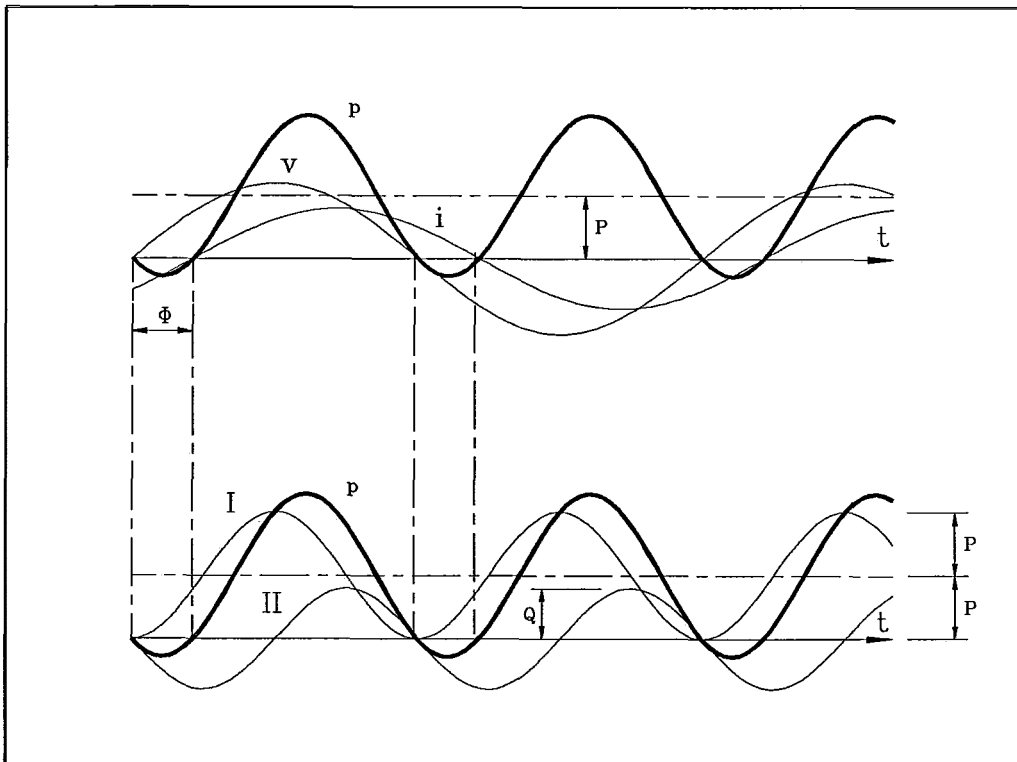


Figura II.1

II.3.1 Potência Complexa [1]

Seja o circuito elétrico elementar representado na figura (II.2), onde

V	tensão
I	corrente
Z	impedância

A impedância (Z) representa a oposição à circulação da corrente I em um circuito elétrico e, sendo também uma grandeza complexa, possui partes real e imaginária denominadas resistência (R) e reatância (X), respectivamente.

Sejam

$$V = |V| e^{j\theta_v} \quad I = |I| e^{j\theta_i}$$

A potência complexa é definida pelo produto

$$S = VI^* \tag{II.13}$$

*

onde I^* é definido como sendo a corrente conjugada e é tal que

$$I^* = |I| e^{-j\theta_i}$$

Expandindo (II.13), vem:

$$S = VI^* = |V| e^{j\theta_v} |I| e^{-j\theta_i}$$

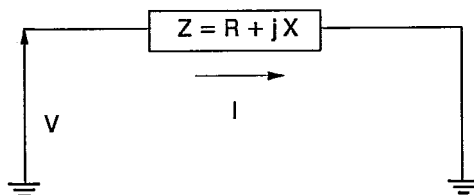


Figura 11.2

O ângulo $\theta_v - \theta_i$, representado na figura (II.3), é o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (ϕ), já citado anteriormente. Temos então:

$$S = VI^* = |V||I| e^{j\phi} = |V||I| \cos \phi + j|V||I| \sen \phi = P + jQ$$

Da figura (11.2) temos que

$$V = ZI \quad I = YV$$

onde

$Y=1/Z$ é denominada admitância

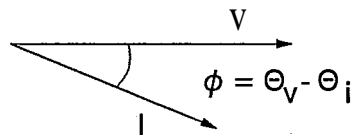


Figura 11.3

A admitância também é uma grandeza complexa, sendo sua parte real denominada condutância ($G = R / |Z|$) e sua parte imaginária denominada susceptância ($B = -X / |Z|$).

Finalmente, temos as seguintes formas alternativas para a expressão da potência complexa:

$$S = VY^* V^* = Y^* |V|^2 = ZII^* = Z|I|^2 = P + jQ$$

O módulo da potência complexa, $|S|$, é denominado potência aparente e é expresso por:

$$|S| = |VI^*| = |V||I| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

A unidade de $|S|$ é o volt-ampère (VA). A potência aparente é utilizada para especificar valores nominais de equipamentos como geradores e transformadores.

II.3.2 Potência Ativa x Frequência

O perfil de frequência de um sistema de potência é consequência direta do balanço de potência ativa da rede. Como a energia é transmitida com a velocidade da luz e não é armazenada em qualquer ponto do sistema, concluímos que a produção instantânea de energia deve ser exatamente igual ao consumo instantâneo acrescido das perdas envolvidas no processo de geração, transmissão e distribuição, se quisermos manter a frequência constante (60 Hz, normalmente). Como a variação da carga é aleatória e o despacho das máquinas não pode ser controlado com a mesma instantaneidade desta variação, concluímos que sempre haverá excesso ou deficiência de geração de potência ativa e este constante desequilíbrio causará flutuações de frequência que não devem ultrapassar 2 Hz, ou seja, em torno de 3% do valor nominal.

II.3.3 Potência Reativa x Tensão

De maneira análoga o perfil de tensão de um sistema de potência está intimamente ligado ao balanço de potência reativa da rede. Se o módulo da tensão de uma barra sofrer variações, o balanço de potência reativa não será mantido nesta barra.

Para melhor compreensão da influência das variações de potência ativa e reativa sobre o módulo da tensão de uma barra, consideremos o sistema de duas barras e um gerador representado na figura (11.4).

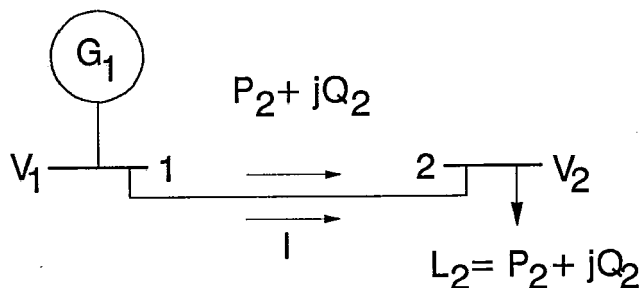


Figura 11.4

Como não existe gerador conectado à barra 2 o suprimento da carga $L_2 = P_2 + jQ_2$ deve ser feito pela geração existente na barra 1 através da linha de transmissão que liga a barra 1 à barra 2.

Para efeito de simplificação, assumiremos que:

1. A tensão na barra 1 é mantida constante através do controle da tensão de campo do gerador G_1
2. A impedância da linha de transmissão é puramente indutiva, isto é, $Z = jX$
3. A potência transmitida pela linha é igual a $P_2 + jQ_2$. Como a resistência da linha foi considerada nula não existe qualquer aproximação no que diz respeito à potência ativa. No entanto, devido às perdas reativas na reatância de linha, a potência reativa é ligeiramente superior na barra 1.

Da análise do sistema da figura (II.4), temos que:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 - IZ \\ V_1 I^* &\simeq P_2 + jQ_2 \end{aligned} \tag{II.14}$$

Então:

$$I \simeq \frac{P_2 - jQ_2}{V_1^*}$$

Escolhendo a referência angular do sistema como o ângulo de defasagem da tensão V_1 e tornando-o nulo, podemos escrever

$$I = \frac{P_2 - jQ_2}{|V_1|} \tag{II.15}$$

Substituindo (11.15) em (II.14), vem:

$$V_2 = V_1 - \frac{P_2 - jQ_2}{|V_1|} jX = V_1 - \frac{X}{|V_1|} Q_2 - j \frac{X}{|V_1|} P_2$$

O diagrama fasorial da figura (11.5) mostra os valores originais de V_1 e V_2 e o comportamento do módulo de V_2 para variações de P_2 e Q_2 .

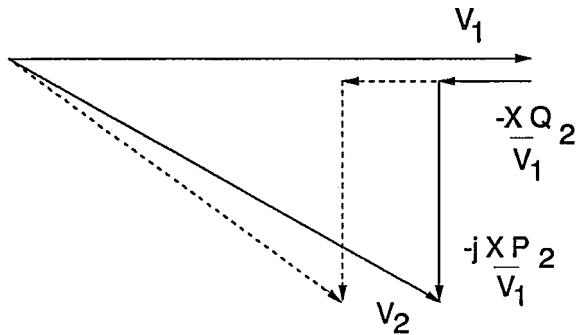


Figura 11.5

Da figura (11.5) concluímos que:

1. Variações da potência ativa P_2 afetam o fasor queda de tensão que é perpendicular a V_1 , não acarretando, portanto, variações apreciáveis do módulo de V_2 .
2. Variações da potência reativa Q_2 afetam o fasor queda de tensão que está defasado de 180° em relação a V_1 , acarretando variações significativas do módulo de V_2 .

Isto mostra que o módulo de V_2 varia quase diretamente com Q_2 . Logo, se o módulo de V_2 deve ser mantido constante, as variações de Q_2 devem ser compensadas localmente na barra 2. O objetivo da compensação local é evitar o transporte de reativos pela linha, pois isto implicaria em elevar excessivamente a tensão da barra 1.

Fica assim entendido porque a potência reativa, apesar de não ser capaz de realizar trabalho, exerce tanta influência no comportamento do sistema elétrico

como um todo e sobre o perfil de tensão em particular. Uma das formas de controlar a tensão é efetuar injeções de potência reativa em algumas barras do sistema.

II.3.4 Equipamentos de Compensação Reativa [4]

As cargas típicas de um sistema elétrico possuem componentes ativa e reativa, sendo normalmente esta última de caráter indutivo. Conseqüentemente um aumento da carga ativa implica em aumento da carga reativa indutiva do sistema, o que, por sua vez, implica na tendência de queda de tensão (subtensão) observada nos períodos de pico de carga, criando uma situação de deficiência de reativos.

Por outro lado, durante os períodos de carga baixa, a capacitância em paralelo das linhas de transmissão pode implicar em excesso de potência reativa na rede, gerando uma tendência de elevação excessiva do perfil de tensão do sistema (sobretensão).

As tendências a subtensão e sobretensão resultantes da variação do carregamento do sistema podem ser revertidas através da utilização de equipamentos de compensação reativa, cujo objetivo é injetar ou drenar a potência reativa necessária à manutenção da tensão dentro dos limites especificados. Além do controle de tensão, a compensação reativa proporciona outros benefícios, tais como aumento da capacidade de transmissão, aumento do nível de curto-circuito e melhor performance transitória e dinâmica do sistema em termos de estabilidade.

Os equipamentos de compensação reativa podem ser fixos ou controláveis, sendo esta opção baseada em critérios técnicos e econômicos.

II.3.4.1 Equipamentos de Compensação Fixos

Os equipamentos fixos de compensação reativa apresentam como vantagem os baixos custos específicos. Por outro lado, geram potência reativa proporcional ao quadrado da tensão da barra a que estão conectados, restringindo as opções do operador do sistema a mantê-los ou não em funcionamento. São eles:

a) Capacitor – Muito utilizado para correção de subtensões e compensação do fator de potência. É normalmente instalado em pontos de suprimento, próximo ao consumidor. Em alguns casos são chaveáveis, o que permite desligá-lo em períodos de carga leve. Possui baixo custo específico e a característica inconveniente da potência reativa gerada ser substancialmente reduzida no caso de queda de tensão, ou seja, no momento em que o suporte de reativos é mais necessário a contribuição do capacitor é menor.

b) Reator – Muito utilizado para correção de sobretensões, pode ser instalado no terciário de transformadores, em barramentos ou diretamente ligados à linha de transmissão. Frequentemente são utilizados em linhas longas para compensar a alta susceptância capacitiva das mesmas ("charging"). Apresentam como característica bastante conveniente o aumento da potência reativa absorvida quando ocorre um aumento da tensão no ponto de instalação. No caso do reator a variação da potência reativa absorvida com o quadrado da tensão ajuda a reconduzir a tensão ao nível desejado.

c) **Capacitor Série** – A conexão deste equipamento em série a uma linha de transmissão tem como objetivo aumentar a capacidade de transferência de potência através da compensação da elevada reatância série indutiva da linha.

II.3.4.2 Equipamentos de Compensação Controláveis

Ao contrário dos equipamentos fixos de compensação reativa, os equipamentos controláveis permitem absorver ou gerar potência reativa de acordo com as variações de tensão. Devido à sua maior complexidade, decorrente da existência de malhas de controle e da necessidade de manutenção, possuem custos específicos mais elevados que os dos equipamentos fixos. São eles:

a) Compensador **Síncrono**: É uma máquina rotativa que tanto pode gerar como absorver potência reativa. Isto é possível devido à atuação do regulador automático de tensão, que aumenta ou diminui a tensão de campo da máquina para atender às necessidades de reativo do sistema. Seu custo específico é alto, pois necessita de transformador para conexão à rede e de sistema de refrigeração especial, além de necessitar de manutenção frequente. É indicado

sempre que for necessário ajustar a tensão provendo reativos em uma faixa contínua e extensa, como, por exemplo, em situações de emergência.

b) **Compensador Estático:** Os compensadores estáticos surgiram como sucessores dos compensadores síncronos. Seu custo específico é maior que o dos equipamentos fixos de compensação reativas, mas bem menor que o dos compensadores síncronos devido ao fato de não possuírem partes móveis. Constituídos por dispositivos eletrônicos, também são utilizados quando é necessário um ajuste contínuo da tensão.

II.4 REPRESENTAÇÃO POR UNIDADE DE GRANDEZAS ELÉTRICAS [i]

Utilizaremos ao longo do texto e na apresentação de resultados a representação por unidade das grandezas elétricas. Esta representação consiste basicamente na substituição de ohms, ampères, quilovolts, megawatts e megavars por valores por unidade de impedância, corrente, tensão, potência ativa e potência reativa, respectivamente. Esta representação apresenta como vantagem a normalização das grandezas, tornando-as mais facilmente correlacionáveis.

Para expressar uma grandeza no sistema por unidade, ou, no jargão de Engenharia Elétrica, "em pu", devemos escolher um valor base para uma grandeza fundamental, normalmente a potência.

Para exemplificar esta representação suponhamos a existência de um sistema que opere com tensão em torno de **13.8 kV**. Dizemos que **13.8 kV** é a tensão-base (V_b) do sistema. A tensão em pu é obtida dividindo-se a tensão pela tensão-base. Assim, se o sistema estiver operando em **13.6 kV** ao invés de **13.8 kV**, dizemos que a tensão de operação é de

$$\frac{13.6}{13.8} = 0.9855 \text{ pu (de tensão)}$$

Se escolhermos 100 MVA como a potência-base (S_b), podemos dizer que o valor da corrente-base (I_b) será

$$I_b = \frac{S_b}{V_b} = \frac{100 \text{ MVA}}{13.8 \text{ kV}} = \frac{100000 \text{ kVA}}{13.8 \text{ kV}} = 7.246,38 \text{ A}$$

De forma análoga são deduzidas as grandezas restantes.

II.5 **MODELAGEM ESTÁTICA DE COMPONENTES DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA [5]**

Apresentaremos nesta seção a modelagem estática dos principais componentes de um sistema elétrico de potência. A modelagem é dita estática porque pressupõe variações extremamente lentas das grandezas do sistema elétrico (tensão, frequência, corrente, etc). Assim sendo, podemos prescindir das equações diferenciais necessárias para levar em conta os efeitos destas variações, sendo suficiente representar a rede por um conjunto de equações e inequações algébricas. Este conjunto de equações e inequações constitui o problema de fluxo de potência, descrito na seção II.6.

Podemos dividir os componentes do sistema elétrico em dois grupos: os que estão ligados entre um nó qualquer e o nó de referência ou "terra" (geradores, cargas, reatores e capacitores) e aqueles que estão ligados entre dois nós quaisquer (linhas de transmissão, transformadores e transformadores defasadores). Os componentes do primeiro grupo são modelados como injeções de potência nos nós da rede. Do segundo grupo descreveremos apenas a modelagem de linhas de transmissão e de transformadores em-fase. Isto se deve ao fato de que os transformadores defasadores exercem forte influência sobre os fluxos de potência ativa, não sendo relevantes, portanto, dentro do escopo deste trabalho.

Para obtermos as equações que descrevem o comportamento estático de cada componente da rede devemos impor a Primeira Lei de Kirchhoff, isto é, a potência líquida injetada em cada nó deve ser igual à soma das potências que fluem pelos componentes conectados ao nó em questão. As injeções de potência serão consideradas positivas quando "entrarem" na barra e negativas quando "saírem" da barra. Os fluxos de potência serão considerados positivos "saíndo" da barra e negativos "entrando" na barra. A convenção de sinais positivos está representada na figura (11.6).

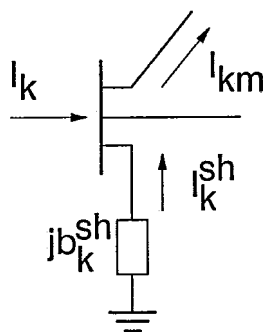


Figura 11.6

II.5.1 Linha de Transmissão

O modelo de uma linha de transmissão, representado na figura (II.7), é definido por três parâmetros, a saber:

r_{km}	resistência
x_{km}	reatância
b_{km}^{sh}	susceptância shunt

A impedância série da linha é dada por

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km} \quad (\text{II.16})$$

e a admitância série dada por

$$y_{km} = g_{km} + jb_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + jx_{km}^2} - j \frac{x_{km}}{r_{km}^2 + jx_{km}^2} \quad (\text{II.17})$$

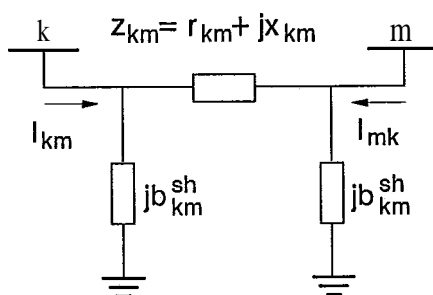


Figura 11.7

De (11.16) e (11.17) concluimos que:

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + jx_{km}^2}$$

e

$$b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + jx_{km}^2}$$

Numa linha de transmissão real r_{km} e x_{km} são positivos e, conseqüentemente, g_{km} é positivo e b_{km} negativo (indutivo). O elemento b_{km}^{sh} representa a capacitância em paralelo ("shunt") da linha de transmissão, sendo, portanto, positivo.

Na figura (11.7) podemos observar que a corrente I_{km} é formada por uma componente série e uma componente shunt, sendo expressa por

$$I_{km} = y_{km}(E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k \quad (II.18)$$

onde

$$E_k = V_k e^{j\theta_k} \text{ e } E_m = V_m e^{j\theta_m}$$

De forma análoga

$$I_{mk} = y_{km}(E_m - E_k) + j b_{km}^{sh} E_m \quad (II.19)$$

A linha de transmissão pode gerar ou absorver potência reativa conforme esteja muito ou pouco carregada, respectivamente. Isto se deve ao fato de que a potência reativa consumida na indutância da linha varia com o quadrado da corrente que a percorre, a qual varia muito em função da carga, enquanto a potência reativa fornecida pela capacitância em paralelo varia com o quadrado das tensões das barras terminais, as quais variam muito pouco em função da carga, sendo praticamente constantes se comparadas com a corrente.

II.5.2 Transformador Em-Fase

O modelo de transformador em-fase é composto por uma admitância série y_{km} e um auto-transformador ideal com relação de transformação $1:t$.

Na figura (11.8) podemos observar o modelo de transformador em-fase e o nó fictício p. A relação de transformação entre as magnitudes das tensões dos nós k e p é dada por

$$\frac{V_p}{V_k} = a = \frac{1}{t}$$

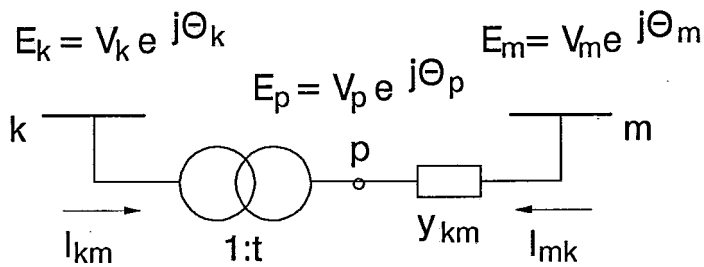


Figura 11.8

Como $\theta_k = \theta_p$, temos

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{V_p e^{j\theta_p}}{V_k e^{j\theta_k}} = \frac{V_p}{V_k} = a = \frac{1}{t} \quad (\text{II.20})$$

Como não existe dissipação de energia no transformador ideal, temos

$$E_k I_{km}^* + E_p I_{mk}^* = 0 \quad (\text{II.21})$$

De (11.20) e (II.21), vem

$$E_k I_{km}^* = -E_p I_{mk}^*$$

$$\frac{I_{km}^*}{I_{mk}^*} = \frac{E_p}{E_k} = -a = \frac{I_{km}}{I_{mk}} \quad (\text{II.22})$$

o que mostra que I_{km} e I_{mk} estão defasadas de 180° .

Sabendo-se que $\theta_k = \theta_p$, considerando (11.20) e expressando as tensões em forma polar obtemos a figura (11.9).

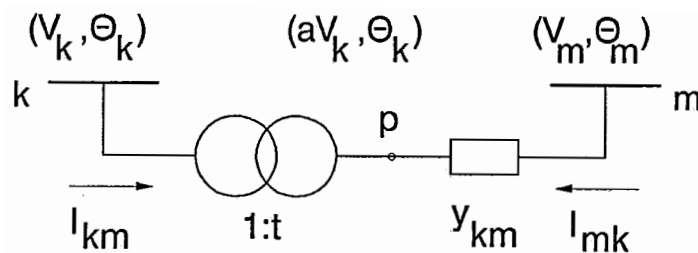


Figura 11.9

Da figura (11.9) vem

$$I_{mk} = (E_m - E_p) y_{km} \quad (\text{II.23})$$

Aplicando (11.22) em (II.23), vem

$$I_{km} = -a(E_m - E_p) y_{km} \quad (\text{II.24})$$

Mas $E_p = aE_k$. Logo

$$I_{km} = -a E_m y_{km} + a^2 E_k y_{km} \quad (\text{II.25})$$

Aplicando (11.22) em (11.25) vem

$$I_{mk} = E_m y_{km} - a E_k y_{km} \quad (\text{II.26})$$

Assim, o transformador em-fase pode ser representado pelo circuito a da figura (11.10).

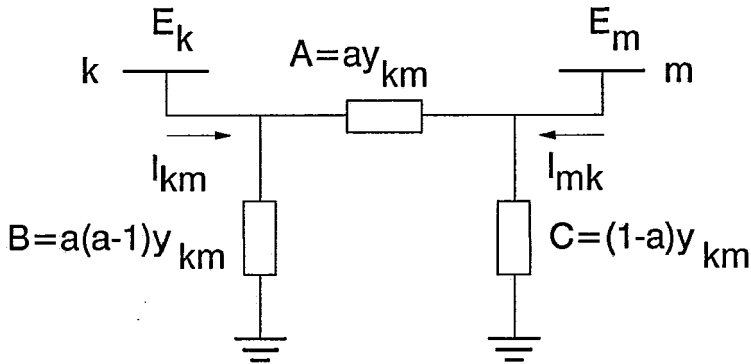


Figura 11.10

Quando $a=1$ as admitâncias shunt são nulas e o transformador reduz-se à admitância série y_{km} .

Se $a < 1$ B será negativo (capacitivo) enquanto C será positivo (indutivo). Se $a > 1$ ocorre o inverso. Concluímos, então, que os transformadores contribuem para a geração de reativos e que esta contribuição varia de acordo com a relação de transformação.

Transformadores do tipo OLTC ("On Load Tap Changer") podem alterar sua relação de transformação sob carga, contribuindo desta forma para o fornecimento de reativos à rede. É importante notar que modificações na relação de transformação de transformadores OLTC podem evitar o investimento em equipamentos de suporte de reativos.

II.6 O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA [2,5]

O problema de fluxo de potência consiste basicamente na determinação do estado da rede (tensão e defasagem angular para todas as barras) e dos fluxos de potência ativa e reativa nas linhas de transmissão sob determinadas condições de carga e geração além de algumas outras grandezas de interesse para a operação e planejamento do sistema.

Nos estudos de fluxo de potência a modelagem da rede é estática, isto é, assume-se que as variações das grandezas com o tempo são suficientemente lentas para que se possa ignorar os efeitos transitórios das mesmas, os quais só poderiam ser levados em consideração se fosse incluído na formulação matemática do problema um conjunto de equações diferenciais.

Os estudos de fluxo de potência são importantes tanto na operação do sistema, quando é analisado o comportamento normal e em emergência da rede existente, quanto no planejamento da expansão, quando são analisadas as alternativas existentes para atendimento da demanda projetada a curto, médio e longo prazo, em condições normais e em emergência.

O problema de fluxo de potência já foi exaustivamente estudado e na sua solução são utilizados métodos computacionais que exploram as peculiaridades do sistema de equações e inequações algébricas não-lineares que representa o modelo estático da rede.

As equações representam a imposição da Primeira Lei de Kirchhoff a cada barra do sistema, levando-se em conta, separadamente, as injeções de potência ativa e de potência reativa.

As inequações representam as restrições operacionais da rede (limites de geração ativa e reativa, limites de tensão, etc...).

II.6.1 Formulação Básica

A cada barra k do sistema elétrico são associadas quatro variáveis, a saber:

V_k	módulo da tensão
θ_k	ângulo da tensão
P_k	geração líquida (geração menos carga) de potência ativa
Q_k	injeção líquida de potência reativa.

As equações do sistema devem expressar o fato de que as injeções de potência ativa e reativa em cada barra são iguais à soma dos fluxos correspondentes que

"entram" ou "saem" da barra através dos elementos a ela conectados. Assim, teremos

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \quad (\text{II.27})$$

$$Q_k + Q_k^{\text{sh}}(V_k) = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) \quad (\text{II.28})$$

$$k = 1, \dots, \text{NB}$$

onde

NB	número de barras do sistema
Ω_k	conjunto das barras vizinhas à barra k
V_k, V_m	tensões das barras terminais do ramo $k-m$ (pode ser uma linha de transmissão ou um transformador)
θ_k, θ_m	ângulos das tensões das barras terminais do ramo $k-m$
P_{km}	fluxo de potência ativa no ramo $k-m$
Q_{km}	fluxo de potência reativa no ramo $k-m$
Q_k^{sh}	injeção de potência reativa devida ao elemento shunt da barra k

É importante notar que o sistema possui 2NB equações (2 equações por barra) e é preciso determinar o valor de 4NB variáveis. Assim, é necessário que duas das quatro variáveis de cada barra sejam especificadas como dados, permanecendo as duas restantes como incógnitas.

Nas equações (11.27) e (11.28) os ângulos θ_k e θ_m sempre aparecem na forma $\theta_k - \theta_m$ (Apêndice B) indicando que a mesma distribuição de fluxos pode ser obtida se for somada uma constante a todos os ângulos do sistema. Isto significa que o problema de fluxo de potência é indeterminado em relação a θ , exigindo a adoção de uma referência angular.

As perdas ocorridas na transmissão só podem ser quantificadas após a resolução do sistema, o que exige que as potências ativa e reativa de pelo menos uma das barras sejam determinadas pela solução. Em todas as outras barras são especificadas a potência ativa e uma das seguintes grandezas: potência reativa ou

módulo da tensão. Assim, dependendo de quais variáveis são especificadas, podemos ter três tipos de barras:

Barra PQ – Para estas barras são especificadas P_k e Q_k , sendo V_k e θ_k calculadas pela solução. Utilizadas para representar barras de carga.

Barra PV – Para estas barras são especificadas P_k e V_k , sendo Q_k e θ_k calculadas pela solução. Utilizadas para representar geradores e compensadores síncronos.

Barra V9 – Também conhecida como barra de referência ou barra "slack", é utilizada para fechar o balanço de potência do sistema. Além disso o ângulo da tensão desta barra é utilizado como referência angular.

II.6.2 Equações Algébricas Não-Lineares

Aplicando-se a Primeira Lei de Kirchhoff aos nós da rede obtemos as seguintes expressões para as potências ativa e reativa:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$

$$Q_k = -b_k^{\text{sh}} V_k^2 + \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m)$$

$$k = 1, \dots, \text{NB}$$

onde

P_k	injeção líquida de potência ativa na barra k
Q_k	injeção líquida de potência reativa na barra k
Ω_k	conjunto das barras vizinhas à barra k
V_k	magnitudedatensãoodabarrak
V_m	magnitude da tensão da barra m
θ_k	ângulo da tensão da barra k
θ_m	ângulo da tensão da barra m

- P_{km} fluxo de potência ativa no ramo k-m
 Q_{km} fluxo de potência reativa no ramo k-m
 b_k^{sh} susceptância que representa os elementos shunt ligados à barra k

O termo $b_k^{sh} V_k^2$ representa a injeção de potência reativa devida aos elementos shunt conectados à barra k (reatores, capacitores, etc).

Os fluxos de potência ativa e reativa no ramo k-m são expressos, respectivamente, por

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (II.29)$$

$$Q_{km} = - (a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) \quad (II.30)$$

onde

- | | |
|------------------------|--|
| $k = 1, NB$ | Número de barras |
| $m = 1, NB_{\Omega_k}$ | Número de barras conectadas à barra k por um ramo k-m |
| V_k, V_m | Magnitudes das tensões nas barras terminais do ramo k-m |
| θ_{km} | defasagem angular entre as tensões das barras terminais do ramo k-m |
| φ_{km} | defasagem angular devida à utilização de transformador defasador no ramo k-m |
| b_{km}^{sh} | susceptância shunt do ramo k-m |
| g_{km} | condutância série do ramo k-m |
| b_{km} | susceptância série do ramo k-m |
| a_{km} | relação de transformação |

Estas expressões [5] estão deduzidas no Apêndice B. É importante ressaltar que para linhas de transmissão $a_{km}=1$ e $\varphi_{km}=0$ e para transformadores em fase $b_{km}^{sh}=0$ e $\varphi_{km}=0$.

II.6.3 Inequações Algébricas Não—Lineares

A representação matemática das restrições operacionais da rede elétrica consiste em um conjunto de inequações algébricas não—lineares. São elas

$V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max}$ representa os limites de tensão em uma barra PQ

$Q_k^{\min} \leq Q_k \leq Q_k^{\max}$ representa os limites de geração de potência reativa em uma barra PV

$|S_{km}| = (P_{km}^2 + Q_{km}^2)^{1/2} \leq S_{km}^{\max}$ representa o limite de transmissão de potência aparente através do ramo k—m

$t_{km}^{\min} \leq t_{km} \leq t_{km}^{\max}$ representa os limites de tap em um transformador do tipo OLTC

II.6.4 Sistema de Equações e Inequações Algébricas Não—Lineares

Do que foi exposto nos ítems II.6.2 e II.6.3, obtemos o problema de fluxo de potência na sua forma mais geral

$$\begin{aligned}
 P_k &= \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) & k=1, \dots, NB \\
 Q_k &= -b_k^{\text{sh}} V_k^2 + \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(V_k, V_m, \theta_k, \theta_m) & k=1, \dots, NB \\
 V_k^{\min} &\leq V_k \leq V_k^{\max} & k=1, \dots, NB_{pq} \\
 Q_k^{\min} &\leq Q_k \leq Q_k^{\max} & k=1, \dots, NB_{pv} \\
 |S_j| &= (P_j^2 + Q_j^2)^{1/2} \leq S_j^{\max} & j=1, \dots, NC \\
 t_j^{\min} &\leq t_j \leq t_j^{\max} & j=1, \dots, NT_{oltc}
 \end{aligned}$$

II.6.5 Métodos de Solução

Os métodos de solução do problema de fluxo de potência são, em geral, iterativos e constituídos de duas partes. A primeira destina-se à solução do sistema de equações, e a segunda às inequações algébricas não-lineares descritas no item II.6.4. As duas partes do problema são, normalmente, resolvidas de forma alternada. Uma alternativa é alterar o sistema de equações para incluir a representação dos controles e limites de operação.

Existe uma grande variedade de métodos de solução do problema de fluxo de potência. Descreveremos o método de Newton e os métodos desacoplados por serem os mais utilizados e por apresentarem os melhores resultados numéricos.

II.6.5.1 Solução do Problema Básico

Seja uma rede elétrica com NB barras, sendo NB_{pv} de geração (barras PV), NB_{pq} de carga (barras PQ) e, por questão de simplicidade, uma barra de referência (barra VO), de forma que

$$NB = NB_{pq} + NB_{pv} + 1$$

O problema básico expresso pelas equações (11.27) e (11.28) pode ser decomposto em dois subsistemas de equações algébricas não-lineares.

Subsistema 1

Neste subsistema são especificadas P_k e Q_k para as barras PQ e P_k e V_k para as barras PV com o objetivo de calcular V_k e θ_k nas barras PQ e θ_k nas barras PV.

Considerando-se as barras PQ temos duas equações para cada barra ($2 NB_{pq}$ equações) e desejamos calcular duas variáveis para cada barra ($2 NB_{pq}$ variáveis).

Considerando-se as barras PV temos uma equação para cada barra (NB_{pv} equações) e desejamos calcular uma variável para cada barra (NB_{pv} variáveis).

Temos, então, um sistema com $2NB_{pq}+NB_{pv}$ equações algébricas não-lineares e com o mesmo número de incógnitas.

$$P_k^{esp} - P_k(V, \theta) = 0 \quad \text{para as barras PQ e PV} \quad (\text{II.31})$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(V, \theta) = 0 \quad \text{para as barras PQ} \quad (\text{II.32})$$

Subsistema 2

Depois de resolver o subsistema 1 e, portanto, já sendo conhecidos V_k e θ_k para todas as barras, devemos calcular P_k e Q_k para a barra de referência e Q_k nas barras PV. Este sistema possui $NB_{pv}+2$ equações e o mesmo número de incógnitas, as quais aparecem de forma explícita, tornando trivial o processo de solução.

$$P_k = P_k(V, \theta) \quad \text{para a barra } V\theta \quad (\text{II.33})$$

$$Q_k = Q_k(V, \theta) \quad \text{para as barras PV} \quad (\text{II.34})$$

e para a barra de referência

Neste processo de solução não foram consideradas as restrições de operação e a atuação dos dispositivos de controle. Um exemplo dessas restrições de operação seria a transformação de uma barra PV em barra PQ devido à violação de limite máximo ou mínimo de geração de potência reativa com a consequente fixação de Q no limite violado. Neste caso a equação correspondente do subsistema 2 passaria para o subsistema 1.

Podemos agrupar as incógnitas do subsistema 1 em um vetor x , de forma que

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ V \end{array} \right\} \begin{array}{l} \} NB_{pv}+NB_{pq} \\ \} NB_{pq} \end{array}$$

As expressões (11.33) e (11.34) podem ser reescritas como

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k(V, \theta) = 0 \quad \text{para as barra PQ e PV}$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k(V, \theta) = 0 \quad \text{para as barra PQ}$$

Colocando as expressões de ΔP_k e ΔQ_k na forma vetorial, temos

$$\Delta P = P^{\text{esp}} - P(V, \theta) \quad (\text{II.35})$$

$$\Delta Q = Q^{\text{esp}} - Q(V, \theta) \quad (\text{II.36})$$

onde

P vetor de injeções de potência ativa nas barras **PQ** e **PV**

Q vetor de injeções de potência reativa nas barra **PQ**

As expressões (11.35) e (11.36) (subsistema 1) podem ser colocadas na forma

$$g(x) = 0 \quad (\text{II.37})$$

onde

$$g(x) = \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \Delta P \\ \Delta Q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \text{NB}_{pv} \\ \text{NB}_{pq} \end{array} \end{array}$$

Os métodos mais utilizados para a solução do sistema (11.37) são o Método de Newton e o Método Desacoplado Rápido.

II.6.5.2 Método de Newton

Neste item descreveremos a aplicação do Método de Newton para a solução do sistema (11.37). No Apêndice C é descrita a aplicação do Método de Newton a sistemas n-dimensionais. A solução do sistema (11.37) consiste em determinar o vetor **Ax**, solução do sistema

$$g(x^i) = -J(x^i) \Delta x^i \quad (\text{II.38})$$

sendo

$$g(x^i) = \left. \begin{array}{l} \Delta P^i \\ \Delta Q^i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \text{NB}_{pv} \\ \text{NB}_{pq} \end{array}$$

$$\Delta x^i = \left. \begin{array}{l} \Delta Q^i \\ \Delta V^i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \text{NB}_{pv} \\ \text{NB}_{pq} \end{array}$$

$$J(x^i) = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial(\Delta P)}{\partial \theta} \quad \frac{\partial(\Delta P)}{\partial V} \\ \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial \theta} \quad \frac{\partial(\Delta Q)}{\partial V} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \text{NB}_{pv} \\ \text{NB}_{pq} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \\ \text{NB}_{pv} \end{array} \quad \text{NB}_{pq}$$

Como P_k^{esp} e Q_k^{esp} são constantes, temos:

$$J(x^i) = - \left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \frac{\partial Q}{\partial V} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \text{NB}_{pv} \\ \text{NB}_{pq} \end{array} = \begin{array}{l} \text{H} \quad \text{N} \\ \text{M} \quad \text{L} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{NB}_{pq} + \\ \text{NB}_{pv} \end{array} \quad \text{NB}_{pq}$$

Assim, as submatrizes H, N, M e L são representadas por

$$H = \partial P / \partial \theta$$

$$N = \partial P / \partial V$$

$$M = \partial Q / \partial \theta$$

$$L = \partial Q / \partial V$$

e expressam a sensibilidade das potências ativa e reativa em relação aos ângulos de fase e às tensões.

Podemos, então, expressar (II.35–36) na forma

$$\begin{vmatrix} \Delta P^i \\ \Delta Q^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H & N \\ M & L \end{vmatrix}^{(i)} \cdot \begin{vmatrix} \Delta \theta^i \\ \Delta V^i \end{vmatrix}$$

A solução do subsistema 1 pelo método de Newton segue os passos abaixo:

- 1 $i = 0$
 $0 = \theta^0$ nas barras PQ e PV
 $V = V^0$ nas barras PQ
- 2 Calcular $P_k(V^i, \theta^i)$ para as barras PQ e PV
 Calcular $Q_k(V^i, \theta^i)$ para as barras PQ
 Determinar os resíduos ΔP_k^i e ΔQ_k^i
- 3 Testar convergência
 Se $\text{Max}\{ |\Delta P_k^i| \} \leq \xi_p$ e $\text{Max}\{ |\Delta Q_k^i| \} \leq \xi_q$ então o processo convergiu para a solução (V^i, θ^i) ; caso contrário, vá para o passo 4
- 4 Calcular a matriz Jacobiana $J(V^i, \theta^i)$
- 5 Determinar a nova solução (V^{i+1}, θ^{i+1})
 $\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i$
 $V^{i+1} = V^i + \Delta V^i$
 sendo $\Delta \theta^i$ e ΔV^i determinados pela solução do sistema linear

$$\begin{vmatrix} AP(V^i, \theta^i) \\ AQ(V^i, \theta^i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H(V^i, \theta^i) & N(V^i, \theta^i) \\ M(V^i, \theta^i) & L(V^i, \theta^i) \end{vmatrix}^{(i)} \begin{vmatrix} \Delta \theta^i \\ \Delta V^i \end{vmatrix}$$

- 6 Fazer $i=i+1$ e voltar ao passo 2

Este algoritmo pode ser colocado na forma

$$\Delta P(V^i, \theta^i) = H(V^i, \theta^i) \Delta \theta^i + N(V^i, \theta^i) \Delta V^i \quad (\text{II.38})$$

$$\Delta Q(V^i, \theta^i) = M(V^i, \theta^i) \Delta \theta^i + L(V^i, \theta^i) \Delta V^i \quad (\text{II.39})$$

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i \quad (\text{II.40})$$

$$V^{i+1} = V^i + \Delta V^i \quad (\text{II.41})$$

II.6.5.3 Método de Newton Desacoplado

Os métodos desacoplados baseiam-se no desacoplamento $P\theta-QV$ e são obtidos levando-se em conta o fato de as sensibilidades $\partial P/\partial \theta$ e $\partial Q/\partial V$ serem significativamente maiores que $\partial P/\partial V$ e $\partial Q/\partial \theta$, sendo possível desconsiderar estas últimas sem alterar a solução do problema. Quanto maior o nível de tensão do sistema em estudo menor a influência de $\partial P/\partial V$ e $\partial Q/\partial \theta$ sobre a solução final.

Ignorando-se os termos NAV e MAB, podemos colocar o algoritmo de Newton, representado pelas expressões (II.38–41), na forma:

$$\Delta P(V^i, \theta^i) = H(V^i, \theta^i) \Delta \theta^i$$

$$\Delta Q(V^i, \theta^i) = L(V^i, \theta^i) \Delta V^i$$

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i$$

$$V^{i+1} = V^i + \Delta V^i$$

Em função do desacoplamento é possível atualizar θ e V a cada meia iteração, colocando o algoritmo no esquema alternado abaixo:

$$\Delta P(V^i, \theta^i) = H(V^i, \theta^i) \Delta \theta^i$$

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i$$

$$\Delta Q(V^i, \theta^{i+1}) = L(V^i, \theta^i) \Delta V^i$$

$$V^{i+1} = V^i + \Delta V^i$$

É comum a utilização de uma variante do Método de Newton Desacoplado capaz de proporcionar uma convergência mais rápida em alguns casos. A

modificação consiste em alterar as matrizes H e L de forma que

$$H = VH'$$

$$L = VL'$$

onde V é uma matriz diagonal cujos elementos não-nulos são as magnitudes das tensões das barra PQ.

Com esta modificação o Método de Newton Desacoplado assume a seguinte forma:

$$\Delta P(V^i, \theta^i) / V^i = H'(V^i, \theta^i) \Delta \theta^i$$

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i$$

$$\Delta Q(V^i, \theta^{i+1}) / V^i = L'(V^i, \theta^i) \Delta V^i$$

$$V^{i+1} = V^i + \Delta V^i$$

II.6.5.4 Método Desacoplado Rápido

O Método Desacoplado Rápido é implementado utilizando o mesmo algoritmo básico do Método de Newton Desacoplado. A Única diferença é a utilização das equações

$$\Delta P/V = B' \Delta \theta$$

$$\Delta Q/V = B'' \Delta V$$

As matrizes B' e B'' só dependem dos parâmetros da rede devido a aproximações baseadas em características físicas do sistema elétrico, sendo, desta forma, constantes.

Assim, o algoritmo do Método Desacoplado Rápido podem ser expresso por:

$$\Delta P(V^i, \theta^i) / V^i = B' \Delta \theta^i$$

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \Delta \theta^i$$

$$\Delta Q(V^i, \theta^{i+1}) / V^i = B'' \Delta V^i$$

$$V^{i+1} = V^i + \Delta V^i$$

CAPÍTULO III

O PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA FORMULAÇÃO BÁSICA E MÉTODOS DE SOLUÇÃO

III.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a formulação básica do problema de despacho ótimo de potência reativa a partir do problema de fluxo de potência ótimo. São definidas a função-objetivo e as restrições do problema e discutidas brevemente características, peculiaridades e dificuldades dos métodos utilizados na solução do mesmo. Na discussão dos métodos de solução é dada ênfase especial à forma com que cada um deles aborda o acoplamento entre as partes ativa e reativa da rede elétrica.

III.2 O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

O problema de fluxo de potência ótimo pode ser definido como sendo a determinação do estado de um sistema elétrico de potência que otimiza uma função-objetivo ao mesmo tempo que satisfaz um conjunto de restrições físicas e operacionais. Este problema pode ser enunciado como um problema de programação não-linear [6,7], da forma:

$$\text{Min } f(z) \tag{III.1}$$

s.a.

$$g(z) \geq 0 \tag{III.2}$$

$$h(z) = 0 \tag{III.3}$$

As componentes de z podem ser divididas em dois grupos: variáveis independentes (ou variáveis de controle) e variáveis dependentes (ou variáveis de estado). Assim, podemos escrever [8]:

$$z = (u, x)$$

onde \mathbf{u} é o vetor das variáveis de controle e \mathbf{x} é o vetor das variáveis de estado.

Podemos reescrever (III.1–3) como:

$$\text{Min } f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \quad (\text{III.4})$$

s.a.

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad (\text{III.5})$$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0 \quad (\text{III.6})$$

O vetor das variáveis de controle (\mathbf{u}) inclui:

- . Gerações de Potência Ativa (P)
- . Gerações de Potência Reativa (Q)
- . Módulos de Fasores de Tensão em Barras de Geração (V)
- . Ângulos de Transformadores Defasadores (φ)
- . Taps de transformadores do tipo OLTC (t)

O vetor das variáveis de estado (\mathbf{x}) inclui:

- . Ângulos de Fasores de Tensão em todas as barras (θ)
- . Módulos de Fasores de Tensão em Barras de Carga (V)
- . Geração de Potência Reativa (Q) ou módulo da tensão (V) das barras de geração não—incluídas em \mathbf{u}

As restrições de igualdade (III.6) representam as equações de balanço de potência ativa e reativa do fluxo de potência convencional (Apêndice B).

As restrições de desigualdade (III.5) representam os limites operacionais da rede elétrica e constituem limites de:

- . Geração de Potência Ativa (P)
- . Geração de Potência Reativa (Q)
- . Intercâmbio de Potência Ativa entre áreas do sistema de potência
- . Fluxo de Potência Ativa em Linhas DC
- . Fluxos de Potência Ativa e Reativa em Linhas de Transmissão
- . Módulos das Tensões das barras (V)
- . Taps de transformadores do tipo OLTC (t)

As equações (111.6) e as inequações (111.5) do problema são algébricas, não-lineares e diferenciáveis.

Como explicado no capítulo anterior, através do desenvolvimento da expressão da potência elétrica em corrente alternada, existe forte relação entre os ângulos dos fasores de tensão (θ) e as potências ativas (P) e entre os módulos dos fasores de tensão (V) e as potências reativas (Q). Isto também poderia ser concluído a partir das características das componentes das equações (111.6) quando as expressamos sob a forma de "mismatches" de potência ativa e reativa (Apêndice B). Assim, sejam:

$$\Delta P_k = P_{gk} - P_{lk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\Delta Q_k = Q_{gk} - Q_{lk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) = 0 \quad (\text{III.8})$$

Os elementos B_{km} são normalmente muito maiores que G_{km} . As aberturas angulares das linhas são usualmente menores que 20° e os módulos das **tensões** situam-se normalmente numa estreita faixa que varia de 0.9 a 1.1 pu. Assim, concluímos que existe uma quase linearidade entre P e θ , e também, de certa forma, entre Q e V, muito embora esta relação seja mais não-linear que aquela existente entre P e θ .

Dentre os aspectos mais discutidos do problema de fluxo de potência ótimo está a definição da função-objetivo. É normalmente difícil descrever o "melhor" ponto de operação de um sistema de potência através de uma simples função.

Algumas funções-objetivo comumente utilizadas são [8,9]:

Mínimo Custo de Geração – Expressa por

$$f = \sum_{k=1}^{NG} c_k(P_{gk})$$

onde c é o vetor dos custos unitários de geração de potência ativa.

Mínimas Perdas Ativas **na** Transmissão – Normalmente tratada como um caso particular da função-objetivo anterior. As gerações de potência ativa são mantidas fixas, exceto para a barra "slack", cuja geração ativa representa as perdas e deve, portanto, ser minimizada. O problema é resolvido através do redespacho das gerações de potência reativa.

Mínimo Desvio do **Ponto** de Operação – Neste caso o objetivo é minimizar as alterações nos despachos de potência ativa e/ou reativa existentes. Isto é feito através da aplicação de fatores de penalidade. Também é comum a aplicação desta função-objetivo para minimizar as variações das tensões das barras. Para um determinado conjunto de grandezas s , teríamos:

$$f = \sum_k w_k (s_k - s_k^{sp})^2$$

onde s^{sp} é o vetor de valores especificados e w é o vetor de fatores de penalidade.

Outras funções-objetivo comumente utilizadas no problema de fluxo de potência ótimo são mínimo corte de carga, mínimo número de ações de controle e mínimas violações.

Vários métodos têm sido utilizados para resolver o problema de fluxo de potência ótimo. Podemos destacar dentre eles o método do gradiente reduzido [10], o método do gradiente reduzido generalizado [11], o método das injeções diferenciais [12], o método do Lagrangeano projetado [13], além dos métodos de programação quadrática sequencial [14–16] e métodos baseados em linearizações [19] e quadratizações sucessivas [17].

III.3 O PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA

O problema de despacho ótimo de potência reativa consiste em determinar o ponto de operação de um sistema de potência que otimiza um determinada função-objetivo e satisfaz um conjunto de restrições composto pelas equações de balanço do fluxo de potência convencional e pelas restrições operacionais do sistema

elétrico em questão. Este problema pode ser encarado como um caso particular do problema de fluxo de potência ótimo em que as gerações de potência ativa são mantidas fixas.

De maneira bastante simplificada, o problema poderia ser formulado como [18]:

$$\text{Min } \sum_{k \in I} c_k(u_k) \quad (\text{III.9})$$

s.a.

$$h(u, x) = 0 \quad (\text{III.10})$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (\text{III.11.a})$$

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (\text{III.11.b})$$

onde

I é denominado conjunto de barras candidatas, sendo composto por todas as barras do sistema capazes de gerar reativos e/ou consideradas como pontos adequados para instalação de fontes de potência reativa

c vetor de custos unitários de geração de potência reativa

x variáveis dependentes

u variáveis independentes

$h(u, x)$ equações de balanço de potência ativa e reativa do fluxo de potência convencional

x_{\min} limite inferior das variáveis dependentes

x_{\max} limite superior das variáveis dependentes

u_{\min} limite inferior das variáveis independentes

u_{\max} limite superior das variáveis independentes

O vetor de custos, c , aglutina custos de operação de equipamentos, custos de perdas ativas e custos de injeção de potência reativa, os quais podem refletir custos de investimentos em equipamentos de compensação reativa.

O problema de despacho ótimo de potência reativa é muito não-linear se comparado, por exemplo, com o problema de redespacho de potência ativa. Além disso, a função-objetivo minimização de perdas ativas é não-linear em relação às variáveis de controle da potência reativa e relaciona variáveis do subproblema ativo e do subproblema reativo, sendo por isto classificada como uma função-objetivo não-separável.

Todos os métodos utilizados para resolver o problema geral de fluxo de potência ótimo podem, em princípio, ser utilizados para resolver o problema de despacho ótimo de potência reativa. No entanto, neste trabalho, nos concentraremos nos métodos de linearizações/quadratisações sucessivas. O esquema iterativo básico utilizado por estes métodos consiste em:

1. Resolver o problema de fluxo de potência AC. Se as condições de convergência forem satisfeitas, encerrar o processo; caso contrário vá para o passo 2.
2. Construir um modelo linear incremental (ou quadrático) do problema de otimização em torno da solução do fluxo de potência AC obtida no passo 1.
3. Otimizar o modelo linear (ou quadrático).
4. Realimentar o modelo AC da rede elétrica com os novos valores das variáveis de controle obtidos no passo 3. Retornar ao passo 1.

Cabe ressaltar o processo iterativo fluxo de potência – otimização utilizado nesta classe de algoritmos (retorno ao passo 1 a partir do passo 4), o qual tem por finalidade garantir que a solução encontrada pelo problema de otimização satisfaça o problema de fluxo de potência, ou, em outras palavras, que a solução encontrada pelo problema de otimização seja uma solução fisicamente viável do problema de fluxo de potência.

A diferença básica entre estes algoritmos reside na forma de construção do modelo do problema de otimização utilizada por cada um deles, o que será objeto de análise da próxima seção.

III.3.1 Construção do Modelo Linear ou Quadrático

Na construção do modelo linear (ou quadrático) do problema de otimização a maioria dos métodos considera apenas a parte reativa da rede elétrica (subproblema Q–V) e o respectivo conjunto de restrições operacionais. Isto corresponde a não representar as equações de balanço de potência ativa e as restrições operacionais correspondentes à parte ativa da rede elétrica, desconsiderando, portanto, um subconjunto das equações (11.10) e um subconjunto das inequações (III.11), respectivamente. Esta simplificação, que se baseia no fato de que as sensibilidades da potência reativa em relação aos módulos dos fasores de tensão são normalmente muito maiores que em relação a quaisquer outras variáveis da rede elétrica, permite grande economia de memória e redução dos tempos de computação. Os modelos baseados nesta aproximação são genericamente denominados modelos desacoplados, por se basearem na hipótese de desacoplamento (P– θ , Q–V), utilizada nos métodos desacoplados de fluxo de potência descritos no Capítulo II e cujas justificativas físicas se encontram descritas nas seções II.3.2 e II.3.3.

STOTT et alii [19] utilizam um modelo incremental do tipo

$$AQ = [H] AV$$

cuja eficácia depende da escolha da matriz H. A função-objetivo tratada é linear e os autores admitem que a escolha da matriz H é heurística. O problema de otimização resultante é um problema de programação linear. Os métodos de programação linear são considerados rápidos, confiáveis e razoavelmente precisos quando discutido o problema de redespacho de potência ativa. No entanto, ao abordar o problema de despacho ótimo de potência reativa, os autores reconhecem que a função minimização de perdas ativas não foi adequadamente tratada.

HOBSON [9] resolve o problema de redespacho de reativos através da aplicação das técnicas de programação linear desenvolvidas para o problema de redespacho de potência ativa. O modelo linear da rede é derivado do conjunto de equações Q–V do Método Desacoplado Rápido de fluxo de potência. São consideradas quatro funções-objetivo, mas minimização de perdas ativas não está entre elas. O autor reconhece não ter resultados suficientes para garantir a eficácia do método sob condições de extrema deficiência de reativos. Além disso, o sistema teste de, apenas 268 barras, possui uma forte rede de alta-tensão (140 kV).

GARCIA [20] propõe a aplicação do método dual–simplex para solução do problema de despacho ótimo de potência reativa. A função-objetivo minimização de perdas ativas não é considerada. É efetuado um processo iterativo fluxo de potência – otimização com convergência controlada pela maior diferença entre ângulos de fasores de tensão. Os sistemas– teste utilizados foram o IEEE–30 e o IEEE–118.

Conforme dito anteriormente, o problema de despacho ótimo de potência reativa é muito não–linear em função da relação existente entre potências reativas (Q) e módulos dos fasores de tensão (V). Esta relação é mais não–linear que a existente entre potências ativas e ângulos dos fasores de tensão. Para contornar este problema alguns algoritmos utilizam a programação quadrática na tentativa de representar adequadamente as curvaturas da função-objetivo e das restrições do problema.

DENZEL et alii [21] resolvem o problema de redespacho de potência reativa através de programação quadrática. Apenas o subproblema Q–V é resolvido e os autores reportam resultados satisfatórios no tratamento da função–objetivo minimização de perdas. No entanto, o algoritmo implementado não considera os equipamentos de compensação como variáveis de controle, sendo considerados para este fim apenas geradores e taps de transformadores. O sistema–teste utilizado também é de pequenas dimensões.

GRANVILLE [22] utiliza métodos de programação quadrática sequencial para solução do problema de redespacho de potência reativa. As condições de convergência dos métodos do tipo linearizações sucessivas são consideradas problemáticas no caso de redespacho de potência reativa. Para contornar este problema é proposto um método de quadratizações sucessivas através do qual é adicionado à função–objetivo um termo quadrático correspondente à hessiana do Lagrangeano do problema (III.9–11) cujo objetivo é representar adequadamente a curvatura das equações de balanço de potência reativa. O sistema–teste utilizado foi uma rede equivalentada de 118 barras do sistema da CESP.

GRANVILLE et alii [17] resolvem o problema de planejamento de reativos através da decomposição hierárquica em dois subproblemas: subproblema de investimento e subproblema de operação, sendo este último, na verdade um problema de despacho ótimo de reativos, resolvido através da utilização de técnicas

de programação não-linear. Foi utilizado o pacote computacional MINOS [23] para a parte de otimização e o programa ANAREDE [27] para a parte de fluxo de potência. A função-objetivo minimização de perdas é considerada, muito embora não seja adequadamente tratada. É utilizado o termo quadrático descrito em [22].

Além da não-linearidade inerente ao problema de despacho ótimo de potência reativa, existem situações em que a hipótese de desacoplamento (P-O, Q-V) não é completamente válida, o que significa dizer que as sensibilidades $\partial P/\partial V$ e $\partial Q/\partial \theta$ não podem ser consideradas desprezíveis em relação a $\partial P/\partial \theta$ e $\partial Q/\partial V$ sem prejuízo da convergência e/ou da validade, ainda que em termos de engenharia, do valor encontrado para a função-objetivo. De acordo com STOTT et alii [19,24] a utilização de modelos desacoplados é claramente desaconselhável quando:

1. As restrições sobre os módulos dos fasores de tensão impõem limitações ao despacho de potência ativa. Este fenômeno pode ser verificado principalmente quando os bipolos do sistema já estão muito próximos de seu limite de carregamento.
2. As restrições sobre os ângulos dos fasores de tensão impõem limitações ao despacho de potência reativa.
3. As sobrecargas nos bipolos do sistema não podem ser aliviadas sem redespacho de potência reativa.

Além destas situações-limite devemos considerar o tratamento da função-objetivo minimização de perdas, a qual é não-separável, isto é, relaciona grandezas inerentes à parte ativa da rede elétrica (as perdas ativas propriamente ditas) com variáveis de controle do subproblema reativo (os módulos dos fasores de tensão). Também neste caso a utilização de modelos desacoplados não permite o tratamento adequado das restrições e/ou da função-objetivo.

STOTT et alii [19] consideram a formulação completa do problema de fluxo de potência ótimo quando o acoplamento entre os subproblemas P- θ e Q-V for significativo, exigindo sua representação. Obviamente a representação explícita das partes ativa e reativa do problema traz como consequência o aumento dos requisitos de memória e tempo de computação. Os autores concluem que o problema de despacho ótimo de potência reativa ainda carece de maior investigação.

ALSAC et alii [24] utilizam um modelo acoplado que emprega os fatores do Jacobiano do problema completo de fluxo de potência (equações II.38–41) com o objetivo de representar adequadamente o acoplamento entre as partes ativa e reativa de rede elétrica, permitindo, desta forma, o tratamento adequado da função-objetivo minimização de perdas ativas. Os autores também consideram indispensável a utilização de um modelo acoplado nas situações—limite citadas anteriormente nesta seção.

MANTOVANI [18] propõe a utilização do método dual-simplex para solução do problema de planejamento de reativos, utilizando como matriz de sensibilidades no problema de otimização a matriz [LCRIC] [25]. No método CRIC é utilizada uma hipótese de desacoplamento que considera as injeções de potência ativa, e não os ângulos dos fasores de tensão, como constantes durante os cálculos referentes à parte reativa. A partir desta hipótese é feita uma eliminação de variáveis que permite expressar as injeções de potência reativa como funções exclusivamente dos módulos dos fasores de tensão ($Q=F(V)$ ao invés de $Q=F(V, \theta)$). A influência dos taps dos transformadores não é considerada na construção da matriz de sensibilidades. A função-objetivo minimização de perdas ativas não é considerada. Os sistemas—teste utilizados são o IEEE–30 e o IEEE–118. A matriz [LCRIC] é utilizada com o objetivo de solucionar o problema de acoplamento sem representar explicitamente a parte ativa no problema de otimização.

III.4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA DE ACOPLAMENTO NO DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA

Do que foi exposto no item anterior, podemos depreender que para contornar o problema de acoplamento é necessário passar para o problema de redespacho de reativos alguma informação sobre a parte ativa da rede elétrica em estudo.

A primeira idéia seria representar explicitamente a parte ativa da rede elétrica no problema de otimização [19,24], isto é, incluir as restrições de igualdade ($\Delta P=0$), as restrições operacionais correspondentes à potência ativa e as sensibilidades entre potência ativa e tensão. O grande inconveniente desta abordagem é o aumento dos requisitos de memória e do tempo de computação com a

consequente redução do tamanho do maior problema passível de solução pelo programa computacional em questão.

Uma extensão natural da idéia descrita no parágrafo anterior seria tentar contornar o problema da representação explícita da parte ativa da rede elétrica embutindo esta informação implicitamente nas equações da parte reativa. Esta idéia foi desenvolvida parcialmente em [18] a partir do modelo implicitamente acoplado descrito em [25]. Neste trabalho, esta foi a idéia que norteou a primeira tentativa de solução do problema de acoplamento. A evolução em relação a [18] e [25] deve-se ao desenvolvimento das expressões que permitem considerar a influência dos taps dos transformadores no modelo implicitamente acoplado.

Por Último, poderíamos, de alguma forma, estimar a influência da parte ativa no problema de despacho ótimo de potência reativa. Esta idéia orientou a segunda fase deste trabalho e baseou-se na estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa da rede elétrica utilizando o princípio de relaxação lagrangeana [26] a partir das condições de otimalidade de Karush—Kuhn—Tucker [6,7].

A aplicação bem-sucedida deste método teve como desdobramento natural, apesar de não incluído entre os objetivos iniciais do trabalho, o tratamento adequado da função-objetivo minimização das perdas ativas.

Os próximos capítulos descrevem detalhadamente as tentativas de solução do problema de acoplamento, primeiramente com a utilização de um modelo implicitamente acoplado e, em seguida, utilizando a estimativa dos multiplicadores de Lagrange a partir das condições de otimalidade de Karush—Kuhn—Tucker.

CAPÍTULO IV

O MÉTODO CRIC APLICADO AO PROBLEMA DE DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA REATIVA

IV.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é descrito o método CRIC ("Constrained Reactive Implicit Coupling") desenvolvido por CARPENTIER [25] e sua aplicação na tentativa de solucionar o problema de acoplamento no despacho ótimo de potência reativa. Este método tem por objetivo implementar uma hipótese de desacoplamento que difere da tradicional hipótese (P–8, Q–V) por manter as injeções de potência ativa e não os ângulos dos fasores de tensão como constantes durante os cálculos relativos ao subproblema reativo. Desta forma as alterações nas injeções de potência reativa e nos módulos dos fasores de tensão não alteram o balanço de potência ativa. Para os cálculos relativos ao subproblema ativo os módulos dos fasores de tensão são mantidos constantes como nos métodos desacoplados tradicionais.

IV.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O método CRIC, descrito por Carpentier em [25], introduz uma hipótese de desacoplamento diferente da tradicional hipótese (P–8, Q–V) utilizada nos métodos desacoplados tradicionais. Naqueles os módulos dos fasores de tensão são mantidos constantes durante a solução do subproblema ativo enquanto os ângulos dos fasores de tensão são mantidos constantes durante a solução do subproblema reativo. Esta aproximação se baseia no fato de que

$$\Delta \theta \simeq H^{-1} \Delta P \tag{IV.1}$$

$$\Delta V \simeq L^{-1} \Delta Q \tag{IV.2}$$

onde H e L são submatrizes jacobianas do método de Newton correspondentes, respectivamente, a $\partial P / \partial \theta$ e $\partial Q / \partial V$ (Equações II.38–39).

Esta hipótese de desacoplamento e a aproximação que dela resulta não se mantêm válidas para sistemas em carga pesada ou sistemas de baixa tensão (θ_{km} elevado e δ_{km} reduzido, respectivamente. Vide figuras D.1–3.), ou seja, exatamente as situações—limite expostas no capítulo anterior.

A hipótese de desacoplamento proposta por Carpentier sugere a manutenção dos módulos dos fasores de tensão como constantes durante a solução do subproblema ativo, tal como ocorre nos métodos desacoplados tradicionais. Para o subproblema reativo, no entanto, é sugerida a manutenção das injeções de potência ativa como constantes alternativamente à fixação dos ângulos dos fasores de tensão. Estes ângulos, ao contrário, têm seus valores liberados com o objetivo de fechar o balanço de potência ativa. Desta forma é possível alterar os valores dos módulos dos fasores de tensão e das injeções de potência reativa sem perturbar o despacho de potência ativa.

Apesar de simples do ponto de vista teórico, a fixação das injeções de potência ativa não é viável do ponto de vista computacional. Isto se deve ao fato de que o desenvolvimento do Jacobiano reativo a partir desta hipótese gera uma matriz não-esparsa, inviabilizando a aplicação prática do método. Para contornar este problema Carpentier sugere o desenvolvimento das expressões dos elementos do Jacobiano reativo a partir da hipótese de que os fluxos de potência ativa nos bipolos do sistema são constantes. Os erros gerados por esta aproximação são aceitáveis [25], física e matematicamente, e o Jacobiano reativo gerado, denominado matriz [LCRIC], é idêntico em estrutura à submatriz jacobiana L do método de Newton [18,25].

Para melhor compreensão, consideremos o bipolo $k-m$ da figura D.1. Ao fixarmos o fluxo de potência ativa P_{km} passa a existir uma relação direta (vide equação B.7) entre as tensões (V_k e V_m) e a abertura angular do bipolo (θ_{km}), o que nos permite expressar a potência reativa, originariamente função destas três grandezas, como função exclusivamente das tensões.

Assim, sejam as expressões dos fluxos de potência ativa e reativa em um bipolo $k-m$ qualquer (Apêndice B)

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \delta_{km}) - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \delta_{km}) \quad (\text{IV.3})$$

$$Q_{km} = - (a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \delta_{km}) - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \sin(\theta_{km} + \delta_{km}) \quad (\text{IV.4})$$

As variáveis de ambas as expressões são as tensões (V_k e V_m) e a abertura angular do bipolo (θ_{km}). Desta forma, podemos expressar os fluxos de potência ativa e reativa como

$$P_{km} = \phi_{km}(V_k, V_m, \theta_{km}) \quad (\text{IV.5})$$

$$Q_{km} = \beta_{km}(V_k, V_m, \theta_{km}) \quad (\text{IV.6})$$

Fixando P_{km} em (IV.3), podemos expressar a abertura angular do bipolo como uma função das tensões das barras terminais

$$\theta_{km} = \sigma_{km}(V_k, V_m) \quad (\text{IV.7})$$

Substituindo (IV.7) em (IV.6) obtemos uma expressão para o fluxo de potência reativa no bipolo $k \rightarrow m$ que é função apenas das tensões terminais

$$Q_{km} = \beta_{km}(V_k, V_m, \sigma_{km}(V_k, V_m)) \quad (\text{IV.8})$$

Lembrando que a injeção líquida de potência reativa em uma barra é o somatório dos fluxos de potência reativa que chegam a esta barra, podemos escrever

$$Q_k = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} = \sum_{m \in \Omega_k} \beta_{km}(V_k, V_m, \sigma_{km}(V_k, V_m)) \quad (\text{IV.9})$$

o que significa que também podemos expressar a potência reativa líquida em todas as barras como função de V . Assim, temos

$$Q = \Psi(V, \gamma(V))$$

onde

$$\theta = \gamma(V) \quad (\text{IV.11})$$

Lembrando que a submatriz jacobiana L corresponde às derivadas das potências reativas em relação aos módulos das tensões, podemos reescrever (IV.2) como:

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial V} \Delta V \quad (\text{IV.12})$$

Assim, de (IV.10–12), vem:

$$\Delta Q = \frac{\partial \Psi}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial V} \Delta V = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial V} + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial V} \right) \Delta V \quad (\text{IV.13})$$

Na equação (IV.13) ainda não foi incluído o termo relativo à contribuição resultante das variações nos taps dos transformadores. Este termo constitui uma extensão do trabalho original de Carpentier e foi deduzido a partir das mesmas premissas básicas utilizadas na dedução dos elementos da matriz [LCRIC]. Denominando [TCRIC] a matriz correspondente à sensibilidades das potências reativas em relação aos taps dos transformadores encontrada a partir das hipóteses do método CRIC, podemos escrever

$$\Delta Q = [\text{LCRIC}] \Delta V + [\text{TCRIC}] \Delta T \quad (\text{IV.14})$$

A dedução dos termos destas duas matrizes encontra-se no Apêndice D. Os elementos da matriz [LCRIC] são expressos por (D.27) e (D.28) enquanto os elementos da matriz [TCRIC] são expressos por (D.36) e (D.38).

IV.3 O AMBIENTE DE IMPLEMENTAÇÃO

O CEPEL vem desenvolvendo nos últimos anos um extenso trabalho na área de planejamento ótimo de fontes de potência reativa, bem como uma família de programas computacionais para este fim (AMVAR [29], PLANVAR [30] e SVSPP [31]).

Durante a fase de desenvolvimento do programa PLANVAR (desenvolvido pelo CEPEL para a ELETROBRÁS) surgiram situações em que a convergência do processo iterativo fluxo de potência—otimização se tornava bastante problemática, sendo que alguns casos apresentavam comportamento não-convergente (alocação crescente de reativos sem melhoria do nível de tensão do sistema).

Situações semelhantes ocorreram durante o desenvolvimento do programa SVSPP (desenvolvido pelo CEPEL para a Boneville Power Administration) sendo que, em alguns casos, os níveis de perdas ativas do ponto de operação encontrado pelo programa de planejamento de reativos eram superiores aos níveis de perdas do sistema original, apesar de utilizada a função-objetivo minimização de perdas ativas.

O método CRIC, primeira tentativa de solucionar estes problemas, foi implementado em um programa—protótipo utilizado durante o desenvolvimento do programa PLANVAR e os resultados obtidos foram comparados com os fornecidos pela versão original deste programa, a qual implementava o modelo incremental $\Delta \underline{Q} = [\underline{L}] \Delta \underline{V} + [\underline{T}] \Delta \underline{T}$. Este programa também implementava o algoritmo de quadratizações sucessivas descrito em [22], sendo facultada ao usuário a escolha entre o método de linearizações sucessivas e o de quadratizações sucessivas. Ambas as versões estavam instaladas em um computador VAX 11/780.

Como o objetivo era verificar o comportamento do método CRIC em presença de acoplamento ativo—reativo não desprezível também foi utilizado nas comparações o programa AMVAR [29]. Este programa utiliza um algoritmo de programação quadrática sequencial e lineariza tanto a parte ativa quanto a parte reativa do problema, não estando, portanto, sujeito às distorções resultantes do acoplamento ativo—reativo. Cabe, no entanto, ressaltar que a utilização deste programa com redes de grande porte (aproximadamente 3000 barras) é, na prática, inviável, devido ao elevado tempo de computação necessário para a solução do problema (da ordem de várias horas de CPU em um IBM 4381). A próxima seção apresenta os resultados obtidos nesta fase do trabalho.

IV.4 RESULTADOS

Numa primeira etapa foi utilizado um sistema–teste de 17 barras com forte deficiência de reativos, doravante denominado **SNPTEE017**, e um sistema de 329 barras, doravante denominado **SNPTEE329**. Nesta fase ainda não havia sido implementado o cálculo da matriz [TCRIC] e os sistemas–teste utilizados não possuíam transformadores do tipo OLTC.

O método CRIC foi aplicado ao sistema **SNPTEE017**, obtendo–se como resultado uma necessidade de suporte de reativos de 13.39 MVar concentrados na barra 4. O programa–protótipo original com o método de linearizações sucessivas foi aplicado ao mesmo sistema resultando numa necessidade de suporte de reativos da ordem de 58.66 MVar distribuídos entre as barras 5 e 9, ou seja, 338% maior que a indicada pelo método CRIC. O mesmo resultado foi obtido com a aplicação do método de quadratizações sucessivas.

Para validar o resultado obtido pelo método CRIC foram tomadas as seguintes providências: a) submeter o ponto de operação encontrado a um programa de fluxo de potência convencional; b) submeter o ponto de operação encontrado ao programa de linearizações sucessivas, e; c) executar o programa AMVAR com o sistema **SNPTEE017**.

A execução do programa de fluxo de potência resultou numa convergência normal, o que significa que o suporte de reativos indicado pelo método CRIC era realmente suficiente para corrigir o perfil de tensão do sistema.

O programa–protótipo original com o método de linearizações sucessivas alimentado com o mesmo ponto de operação não acusou necessidade de suporte de reativos, corroborando o resultado anterior.

Finalmente, a execução do programa AMVAR alimentado com o sistema **SNPTEE017** indicou a necessidade de um suporte de reativos de 13.49 MVar localizados na barra 4, coincidindo com o resultado encontrado pelo método CRIC.

Destes resultados podemos depreender que:

1. O sistema **SNPTEE017** é sensível ao acoplamento ativo–reativo. A não incorporação das informações sobre a parte ativa no problema de otimização implicou na obtenção de uma solução de maior custo quando foi utilizado o programa–protótipo. Também podemos dizer que existe pouca ou nenhuma influência da não–linearidade inerente ao subproblema reativo. Prova disto é que o mesmo resultado foi obtido pelos métodos de linearizações e quadratizações sucessivas. Se houvesse influência significativa da não–linearidade estes métodos convergiriam para soluções distintas.
2. O método **CRIC** efetivamente passou para o problema de otimização as informações sobre a parte ativa necessárias para evitar a influência do acoplamento ativo–reativo no resultado sem que fosse necessário representar explicitamente a parte ativa do problema. Tanto isto é verdade que o resultado obtido coincidiu com o do programa **AMVAR**, o qual lineariza tanto a parte ativa quanto a parte reativa do problema.

A etapa seguinte consistiu na aplicação do método **CRIC** ao sistema **SNPTEE329**. Os resultados indicaram a necessidade de um suporte de reativo da ordem de 65.11 MVar. Os métodos de linearizações e quadratizações sucessivas também foram aplicados ao mesmo sistema, obtendo–se resultados que indicavam necessidades de suporte de reativos de 65.80 e 65.08 MVar, respectivamente. Estes resultados indicam que o sistema **SNPTEE329** não apresenta problemas de acoplamento ativo–reativo.

O passo seguinte foi a implementação da matriz **[TCRIC]**, permitindo levar em conta os efeitos das alterações dos taps de transformadores do tipo **OLTC** no suporte de reativos. Os mesmos sistemas–teste foram utilizados, convertendo–se todos os transformadores de tap fixo em transformadores de tap variável.

O método **CRIC**, modificado para levar em conta o efeito dos taps dos transformadores, quando aplicado aos sistemas **SNPTEE017** e **SNPTEE329** não foi capaz de alcançar a convergência do processo iterativo fluxo de potência–otimização dentro do limite de 15 ciclos, indicando necessidades de suporte de reativos de 0.00 MVar e 8.96 MVar, respectivamente. O mesmo ocorreu com o método de linearizações sucessivas, com alocações de 49.30 MVar para o sistema **SNPTEE017** e 8.66 MVar para o sistema **SNPTEE329**. Apenas o método de

quadraturações sucessivas alcançou a convergência, indicando necessidades de suporte de reativos de 132.17 e 9.2 MVar para os sistemas **SNPTEE017** e **SNPTEE329**, respectivamente.

Estes resultados evidenciam uma forte influência dos transformadores OLTC no processo de convergência. Se no sistema **SNPTEE329** o resultado foi coerente, ocorrendo redução das necessidades de reativo em função da alteração dos taps, no sistema **SNPTEE017** a utilização dos taps para suprir a potência reativa necessária à correção do perfil de tensão do sistema acarretou uma necessidade de suporte de reativos de 132.17 MVar, ou seja, 103.09% superior à indicada sem o uso de OLTCs. Evidentemente este resultado é incoerente e provavelmente trata-se de um ótimo local.

Apesar de não ter alcançado a convergência o método CRIC modificado não chegou a resultados absurdos, pelo contrário, as necessidades de suporte de reativos encontradas como solução foram sempre menores que aquelas indicadas pelo programa-protótipo original com os métodos de linearizações e quadraturações sucessivas. Baseado nestes resultados decidiu-se testar o desempenho do método CRIC em um sistema de 447 barras, doravante denominado EQV2000. Este sistema consiste numa rede equivalentada da área do Rio de Janeiro e Espírito Santo utilizada pela ELETROBRÁS nos estudos de expansão ótima de fontes de potência reativa para o ano 2000. O programa-protótipo original com o método de quadraturações sucessivas foi utilizado com o sistema EQV2000, não sendo possível alcançar a convergência dentro do limite de 40 ciclos fluxo de potência-otimização. A função-objetivo apresentou um comportamento oscilatório, com a necessidade de suporte de reativos em torno de 980 MVar.

O desempenho do método CRIC modificado foi pior que o do programa-protótipo original. A convergência não foi alcançada e a função-objetivo apresentou o mesmo comportamento oscilatório, mas com a necessidade de suporte de reativos em torno de 1958 MVar. Com base nestes resultados decidiu-se abandonar o método CRIC, optando-se por tentar resolver o problema de acoplamento através da estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa. A fundamentação teórica e os resultados obtidos nesta segunda fase do trabalho estão descritos no próximo capítulo. Os resultados obtidos com o método CRIC e com os métodos de linearizações e quadraturações sucessivas encontram-se na tabela IV.1.

	CRIC	Linearizações Sucessivas	Quadratizações Sucessivas
SNPTEE017 s/ OLIC	Ciclos Alocação Barra(s) 3 13.39 MVA 4	Ciclos Alocação Barra(s) 8 58.66 MA 5 e 9	Ciclos Alocação Barra(s) 8 58.66 MVA 5 e 9
SNPTEE329 s/ OLIC	Ciclos Alocação Barra(s) 5 65.11 MVA Diversas	Ciclos Alocação Barra(s) 5 65.80 MVA Diversas	Ciclos Alocação Barra(s) 8 65.08 MVA Diversas
SNPTEE017 c/ OLIC	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 0.00 MVA —	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 49.30 MVA 5	Ciclos Alocação Barra(s) 7 132.17 MVA Diversas
SNPTEE329 c/ OLIC	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 8.96 MVA 227	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 8.96 MVA 227	Ciclos Alocação Barra(s) 7 9.20 MVA 227
EQV2000	Ciclos Alocação Barra(s) 40 (*) 1958.00 MVA Diversas	-- -- -- -- --	Ciclos Alocação Barra(s) 40 (*) 980.00 MVA Diversas

(*) Caso não convergido

Tabela IV.1

CAPÍTULO V

ESTIMATIVA DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE: UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE ACOPLAMENTO NO DESPACHO ÓTIMO DE POTENCIA REATIVA

V.1 INTRODUÇÃO

A utilização do método CRIC como tentativa de solucionar o problema de acoplamento no despacho ótimo de potência reativa consistiu na aplicação de princípios físicos na construção do problema de otimização. Não houve, no entanto, qualquer alteração do algoritmo do ponto de vista de seu esquema de solução, permanecendo o mesmo com todas as características dos métodos de linearizações sucessivas. Assim, apesar dos animadores resultados iniciais, o método apresentou as mesmas dificuldades de convergência dos métodos de linearizações e quadratizações sucessivas para casos com forte acoplamento ativo–reativo e/ou dotados de OLTCs, destacando–se o comportamento oscilatório da função–objetivo no caso EQV2000. A solução, descrita neste capítulo, consistiu no desenvolvimento de um processo de estimativa dos multiplicadores de Lagrange associados à parte ativa do problema, os quais eram implicitamente considerados nulos em todos os métodos utilizados no Capítulo III. O algoritmo resultante se revelou bastante eficiente, sendo utilizado com sucesso no tratamento da função—bjetivo minimização de perdas ativas.

V.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Seja o problema de despacho ótimo de potência reativo formulado como

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) \tag{V.1}$$

s.a.

$$p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{V.2}$$

$$q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{V.3}$$

$$r_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \tag{V.4}$$

onde

\mathbf{x}	variáveis de controle de potência reativa
\mathbf{y}	variáveis de controle de potência ativa
$\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	equações de balanço de potência ativa
$\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	equações de balanço de potência reativa
$\mathbf{r}(\mathbf{x})$	restrições operacionais lineares relativas à potência reativa

Seja o Lagrangeano associado ao problema (V.14)

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{j=1}^m \gamma_j r_j(\mathbf{x}) \quad (\text{V.5})$$

Sabemos que se $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ é solução de (V.1–4), então as condições de Karush–Kuhn–Tucker devem ser satisfeitas, de forma que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^n \mu_i^* \nabla p_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \nabla q_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) - \sum_{j=1}^m \gamma_j^* \nabla r_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{V.6})$$

$$\gamma_j^* r_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j=1, \dots, m \quad (\text{V.7})$$

$$\boldsymbol{\gamma}^* \geq 0 \quad (\text{V.8})$$

Todos os métodos discutidos no Capítulo III assumem implicitamente que $\boldsymbol{\mu} = 0$, ou seja, que os multiplicadores de Lagrange correspondentes às equações de balanço de potência ativa são nulos. Isto pode ser razoável quando a parte ativa tiver pouca influência sobre a parte reativa pois, neste caso, estes multiplicadores serão pequenos e as hipóteses de desacoplamento válidas. No entanto, em presença de acoplamento ativo–reativo não desprezível, considerar os multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa do problema como sendo nulos pode implicar em: a) oscilação do algoritmo com alternância entre os pontos de operação encontrados pelo fluxo de potência e pela otimização, ou; b) convergência para uma solução que não é necessariamente um ótimo global.

Através das condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker (Apêndice E) e da aplicação do princípio de relaxação lagrangeana [26] é possível estimar os multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa sem que seja necessário representá-la explicitamente.

Seja o Lagrangeano do problema (V.14). De acordo com as condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker sabemos que

$$\nabla L(x^*, y^*, \mu^*, \lambda^*, \gamma^*) = 0$$

O gradiente do Lagrangeano é dado por

$$\nabla L(x^*, y^*, \mu^*, \lambda^*, \gamma^*) = \left(\frac{\partial}{\partial x} L(x^*, y^*, \mu^*, \lambda^*, \gamma^*), \frac{\partial}{\partial y} L(x^*, y^*, \mu^*, \lambda^*, \gamma^*) \right) = (0, 0)$$

Derivando o Lagrangeano em relação a x e a y , obtemos o seguinte sistema de equações a partir da equação acima

$$\nabla_x f(x) - \mu^t \nabla_x p(x, y) - \lambda^t \nabla_x q(x, y) - \gamma^t \nabla_x r(x) = 0 \quad (\text{V.9})$$

$$- \mu^t \nabla_y p(x, y) - \lambda \nabla_y q(x, y) = 0 \quad (\text{V.10})$$

Ainda das condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker, sabemos que em $(x^*, y^*, \mu^*, \lambda^*, \gamma^*)$ teremos $\gamma_j^* r_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, m$. A partir deste fato, das equações (V.9–10) e das equações do fluxo de potência convencional foi desenvolvido o seguinte algoritmo de solução do problema de despacho ótimo de potência reativa:

Passo 0 Inicializar

$$\mu_i = 0, i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i = 0, i = 1, \dots, n$$

Passo 1 Resolver as equações do fluxo de potência convencional.

$$p_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$q_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, n$$

Passo 2 Resolver o problema de otimização

$$\text{Min } \left\{ f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{L}(p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right\}$$

s.a.

$$\mathcal{L}(q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$r_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, m$$

onde

$\mathcal{L}(p(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ representa a linearização das equações de balanço de potência ativa no ponto (\mathbf{x}, \mathbf{y})

$\mathcal{L}(q(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ representa a linearização das equações de balanço de potência ativa no ponto (\mathbf{x}, \mathbf{y})

As variáveis duais deste problema representam os multiplicadores de Lagrange correspondentes às equações de balanço de potência reativa do problema original $(\lambda_i, i = 1, \dots, n)$.

Passo 3 Calcular o incremento nos multiplicadores de Lagrange correspondentes à potência ativa através da solução da equação

$$B' \Delta \mu = - \sum_{i=1}^n \mu_i \nabla_{\mathbf{y}} p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla_{\mathbf{y}} q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

onde B' é a matriz do método desacoplado rápido de fluxo de potência correspondente a $\partial P / \partial \theta$.

Passo 4 Atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa através de

$$\mu^{* k+1} = \mu^{* k} + \Delta \mu$$

Atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte reativa através de

$$\lambda^{* k+1} = \lambda$$

Passo 5 Se a solução do problema de fluxo de potência (Passo 1) e a solução do problema de otimização (Passo 3) diferem por $(\Delta x, \Delta y) \leq \xi$, então a convergência foi alcançada. Caso contrário retornar ao Passo 1.

Este algoritmo corresponde à introdução da estimativa dos multiplicadores de Lagrange relativos à parte ativa no algoritmo de linearizações sucessivas. Em se tratando do algoritmo de quadratizações sucessivas o problema a ser resolvido no Passo 2 seria

$$\text{Min} \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{L}p_i(x,y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i W_{ij} x_j \right\}$$

s.a.

$$\mathcal{L}(q_i(x,y)) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$r_j(x) = 0, j = 1, \dots, m$$

onde $W=(W_{ij})$ é a hessiana do Lagrangeano

$$L(x,y,\lambda,\gamma) = f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i(x,y) - \sum_{j=1}^m \gamma_j r_j(x)$$

correspondente ao problema relaxado

$$\text{Min } f(x)$$

s.a.

$$q_i(x,y) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$r_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m$$

O objetivo da adição deste termo quadrático à função—objetivo é, como já foi dito, representar adequadamente a não—linearidade inerente às equações de balanço de potência reativa.

Note—se que a atualização dos multiplicadores de potência reativa efetuada no Passo 4 se reflete na matriz W .

V.2.1 Resultados

Numa primeira etapa o método de estimativa dos multiplicadores foi implementado no mesmo programa—protótipo utilizado para implementação do método CRIC, mantendo—se a possibilidade de seleção entre os métodos de linearizações e quadratizações sucessivas. Foram submetidos ao programa os mesmos casos—teste utilizados para o método CRIC (SNPTEE017 sem OLTCs, SNPTEE017 com OLTCs, SNPTEE329 sem OLTCs e SNPTEE329 com OLTCs). Para os casos—teste dotados de OLTCs foi sempre necessário utilizar o método de quadratizações sucessivas para alcançar a convergência.

Para o sistema SNPTEE017 sem OLTCs o método indicou uma necessidade de suporte de reativos de 13.59 MVar localizados nas barras 5 e 9. Com a introdução dos transformadores de tap variável houve necessidade de utilizar o método de quadratizações sucessivas mas o algoritmo não acusou necessidade de suporte de reativos, bastando atuar nos taps dos transformadores para corrigir o perfil de tensão do sistema. Cabe lembrar que para o mesmo sistema o programa—protótipo original com o método de quadratizações sucessivas indicou uma necessidade de suporte de reativos de 132.17 MVar. O mesmo caso foi submetido ao programa AMVAR e os resultados foram confirmados.

Para o sistema SNPTEE329 os resultados confirmaram a necessidade de suporte de reativos de 65.95 e 9.2 MVar, respectivamente, sem OLTCs (linearizações sucessivas) e com OLTCs (quadratizações sucessivas).

Validados os resultados e confirmada a eficácia do algoritmo, iniciou—se uma terceira fase cujo objetivo foi testar o desempenho do método com o sistema EQV2000 numa tentativa de solucionar os problemas de convergência anteriormente verificados (seção IV.3).

Como dito anteriormente, utilizando a versão original do programa—protótipo com o método de quadratizações sucessivas não era possível alcançar a convergência para o sistema EQV2000 dentro do limite de 40 ciclos fluxo de potência—otimização e a função—objetivo apresentava um comportamento oscilatório, com a necessidade de suporte de reativos em torno de 980 MVar. Com a introdução do algoritmo baseado na estimativa dos multiplicadores correspondentes à potência ativa a

convergência foi alcançada em 10 ciclos fluxo de potência-otimização com uma necessidade de suporte de reativos de 647 MVar.

Em função do bom desempenho demonstrado pelo algoritmo, decidiu-se investigar a aplicação do mesmo ao tratamento da função-objetivo minimização de perdas ativas. A fundamentação teórica do tratamento desta função-objetivo, aplicável a qualquer função-objetivo não-separável, e os resultados numéricos obtidos encontram-se nas próximas seções.

Um resumo dos resultados obtidos com os sistemas SNPTEE07, SNPTEE329 e EQV2000 encontra-se na tabela V.1

V.3 TRATAMENTO DA FUNÇÃO-OBJETIVO MINIMIZAÇÃO DE PERDAS ATIVAS – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Seja o bipolo k-m da figura B.1. As perdas ativas no bipolo correspondem [5] a

$$\rho_{km}(V, \theta) = P_{km} + P_{mk} = g_{km} (a_{km}^2 V_k^2 + V_m^2 - 2 a_{km} V_k V_m \cos \theta_{km})$$

O total das perdas ativas da rede elétrica é expresso por

$$\rho(V, \theta) = \sum_{\substack{k=1 \\ m=1}}^n \rho_{km}(V, \theta) / 2$$

Para tratar adequadamente a função-objetivo minimização de perdas ativas é necessário notar que esta função é não-separável, ou seja, depende tanto das variáveis de controle de potência reativa (x) quanto das variáveis de controle de potência ativa (y). Assim, o problema (V.14) deve ser reescrito como

$$\text{Min } f(x, y) \tag{V.11}$$

s.a.

$$p_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, n \tag{V.12}$$

$$q_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, n \tag{V.13}$$

$$r_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m \tag{V.14}$$

onde $f(x,y)$ corresponde à expressão das perdas ativas.

O Lagrangeano associado ao problema (V.11–14) é expresso por

$$L(x,y,\mu,\lambda,\gamma) = f(x,y) - \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(x,y) - \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i(x,y) - \sum_{j=1}^m \gamma_j r_j(x)$$

Se $(x^*,y^*,\mu^*,\lambda^*,\gamma^*)$ é solução de (V.11–14) então, para satisfazer as condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker é necessário que

$$\nabla f(x^*,y^*) - \sum_{i=1}^n \mu_i^* \nabla p_i(x^*,y^*) - \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \nabla q_i(x^*,y^*) - \sum_{j=1}^m \gamma_j^* \nabla r_j(x^*) = 0 \quad (\text{V.15})$$

$$\gamma_j^* r_j(x^*) = 0, \quad j=1,\dots,m \quad (\text{V.16})$$

$$\gamma^* \geq 0 \quad (\text{V.17})$$

De (V.15), vem

$$\nabla L(x^*,y^*,\mu^*,\lambda^*,\gamma^*) = \left(\frac{\partial}{\partial x} L(x^*,y^*,\mu^*,\lambda^*,\gamma^*), \frac{\partial}{\partial y} L(x^*,y^*,\mu^*,\lambda^*,\gamma^*) \right) = (0,0)$$

Derivando o Lagrangeano em relação a x e a y , obtemos o seguinte sistema de equações

$$\nabla_x f(x,y) - \mu^t \nabla_x p(x,y) - \lambda^t \nabla_x q(x,y) - \gamma^t \nabla_x r(x) = 0 \quad (\text{V.18})$$

$$\nabla_y f(x,y) - \mu^t \nabla_y p(x,y) - \lambda^t \nabla_y q(x,y) = 0 \quad (\text{V.19})$$

Analogamente ao que foi feito para o caso de função–objetivo separável, o processo de estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa obedece os seguintes passos:

Passo 0 Inicializar

$$\mu_i = 0, \quad i = 1,\dots,n$$

$$\lambda_i = 0, \quad i = 1,\dots,n$$

Passo 1 Resolver as equações do fluxo de potência convencional.

$$p_i(x,y) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$q_i(x,y) = 0, i = 1, \dots, n$$

Passo 2 Resolver o problema de otimização

$$\text{Min} \left\{ f(x,y) - \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{L}(p_i(x,y)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i W_{ij} x_j \right\}$$

s.a.

$$\mathcal{L}(q_i(x,y)) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$r_j(x) = 0, j = 1, \dots, m$$

onde

$\mathcal{L}(p(x,y))$ representa a linearização das equações de balanço de potência ativa no ponto (x,y)

$\mathcal{L}(q(x,y))$ representa a linearização das equações de balanço de potência reativa no ponto (x,y)

As variáveis duais deste problema representam os multiplicadores de Lagrange correspondentes às equações de balanço de potência reativa do problema original $(\lambda_i, i = 1, \dots, n)$.

Passo 3 Calcular o incremento nos multiplicadores de Lagrange correspondentes à potência ativa através da solução da equação

$$B' \Delta \mu = \nabla_y f(x,y) - \sum_{i=1}^n \mu_i \nabla_y p_i(x,y) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla_y q_i(x,y)$$

onde B' é a matriz do método desacoplado rápido de fluxo de potência correspondente a $\partial P / \partial \theta$.

Passo 4 Atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte ativa através de

$$\mu^{*k+1} = \mu^{*k} + \Delta\mu$$

Atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange correspondentes à parte reativa através de

$$\lambda^{*k+1} = \lambda$$

Passo 5 Se a solução do problema de fluxo de potência (Passo 1) e a solução do problema de otimização (Passo 3) diferem por $(\Delta x, \Delta y) \leq \xi$, então a convergência foi alcançada. Caso contrário retornar ao Passo 1.

Cabe ressaltar que o problema de otimização resolvido no Passo 2 não pode, a rigor, ser considerado um problema quadrático devido à presença do termo $a_{km} V_k V_m$ na expressão da função-objetivo.

A matriz $W=(W_{ij})$ é a hessiana do Lagrangeano

$$L(x,y,\lambda,\gamma) = f(x,y) - \sum_{i=1}^n \lambda_i q_i(x,y) - \sum_{j=1}^m \gamma_j r_j(x)$$

correspondente ao problema relaxado

Min $f(x,y)$

s.a.

$$q_i(x,y) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$r_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m$$

Note-se que a atualização dos multiplicadores de potência reativa efetuada no Passo 4 se reflete na matriz W .

V.3.1 Resultados

Para avaliar o desempenho do método no tratamento da função-objetivo minimização de perdas ativas foi utilizado inicialmente o sistema **SNPTEE329**.

O programa-protótipo original com o método de quadratizações sucessivas convergiu para uma solução com 212.55 MW de perdas ativas em 5 ciclos fluxo de potência-otimização. O algoritmo de estimativa dos multiplicadores de Lagrange com o método de quadratizações sucessivas convergiu para uma solução com 166.05 MW de perdas ativas, ou seja, com 28.00% menos perdas ativas que a solução obtida pelo programa-protótipo original.

Um segundo teste foi efetuado com um sistema de 2894 barras, 3901 linhas e 148 transformadores OLTC, doravante denominado **S2894**. O nível de perdas ativas encontrado para este caso, quando selecionada a opção de minimização de perdas ativas, era maior que o verificado para o sistema original. O nível de perdas obtido com a versão original do programa-protótipo era de 1356 MW. Com a introdução do método de estimativa dos multiplicadores de Lagrange o nível de perdas passou para 1256 MW, ou seja 7% menor.

	CRIC	Linearizações Sucessivas	Quadratisações Sucessivas	Kuhn-Tucker s/ Quadratisação	Kuhn-Tucker c/ Quadratisação
Caso 1	Ciclos Alocação Barra (s) 3 13.39 MVAR 4	Ciclos Alocação Barra(s) 8 58.66 MVAR 5 e 9	Ciclos Alocação Barra(s) 8 58.66 MVAR 5 e 9	Ciclos Alocação Barra(s) 8 13.59 MVAR 5 e 9	Ciclos Alocação Barra(s) 6 13.55 MVAR 5 e 9
Caso 2	Ciclos Alocação Barra(s) 5 65.11 MVAR Diversas	Ciclos Alocação Barra(s) 5 65.80 MVAR Diversas	Ciclos Alocação Barra(s) 8 65.08 MVAR Diversas	Ciclos Alocação Barra(s) 7 65.95 MVAR Diversas	Ciclos Alocação Barra(s) 7 65.95 MVAR Diversas
Caso 3	Ciclos Alocação Barra (s) 15 (*) 0.00 MVAR —	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 49.30 MVAR 5	Ciclos Alocação Barra(s) 7 132.17 MVAR Diversas	Ciclos Alocação Barra (s) 15 (*) 0.00 MVAR —	Ciclos Alocação Barra(s) 9 0.00 MVAR —
Caso 4	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 8.96 MVAR 227	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 8.96 MVAR 227	Ciclos Alocação Barra(s) 7 9.20 MVAR 227	Ciclos Alocação Barra(s) 15 (*) 9.26 MVAR 227	Ciclos Alocação Barra(s) 9 9.2 MVAR 227
Caso 5	Ciclos Alocação Barra(s) 40 (*) 1958.00 MVAR Diversas	— — — — —	Ciclos Alocação Barra(s) 40 (*) 980.00 MVAR Diversas	— — — — —	Ciclos Alocação Barra(s) 10 64.00 MVAR Diversas

Caso 1 — SNPTEE017 s/ OLTC
 Caso 2 — SNPTEE329 s/ OLTC
 Caso 3 — SNPTEE017 c/ OLTC
 Caso 4 — SNPTEE329 c/ OLTC
 Caso 5 — EqV2000

(*) Caso não convergido.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estudado o problema de despacho ótimo de potência reativa e formas de considerar a influência do acoplamento ativo–reativo na solução quando são empregados métodos de linearizações e quadratizações sucessivas baseados em modelos desacoplados.

Esta pesquisa foi motivada pela constatação de graves problemas de convergência quando da utilização de modelos desacoplados na solução do problema de despacho ótimo de potência reativa em sistemas para os quais a hipótese de acoplamento ($P-Q$, $Q-V$) não se mantinha válida (sistemas próximos de seu limite de carregamento ou sistemas de baixa tensão).

É necessário ressaltar que a utilização de modelos acoplados, muito embora eliminasse o problema da influência do acoplamento ativo–reativo, implicaria em aumentos dos requisitos de memória e, principalmente, dos tempos de computação, o que, dependendo do tamanho da rede, tornaria inviável a utilização do programa computacional em questão.

A primeira alternativa investigada foi o método CRIC, proposto por Carpentier, o qual se baseia em uma hipótese de desacoplamento alternativa que considera os fluxos de potência ativa e não os ângulos dos fasores de tensão como constantes durante os cálculos relativos ao subproblema reativo. Os resultados obtidos com o método CRIC modificado não foram satisfatórios para sistemas de grande porte ou dotados de transformadores do tipo OLTC. Sugere-se investigações no sentido de delimitar as reais possibilidades do método, ressaltando-se a necessidade de avaliações com casos–teste de grande porte e de comparações com resultados obtidos por programas que implementem modelos acoplados.

Numa segunda etapa foi desenvolvido um algoritmo de solução do problema de despacho ótimo de potência reativa baseado na estimativa dos multiplicadores de Lagrange correspondentes às equações de balanço de potência ativa e nas condições de otimalidade de Karush–Kuhn–Tucker. Este algoritmo apresentou excelente desempenho, possibilitando a consideração do acoplamento ativo–reativo e

permitindo um tratamento adequado de funções-objetivo não—separáveis como, por exemplo, minimização de perdas ativas, podendo ser aplicado tanto no planejamento quanto na operação de sistemas elétricos de potência.

Nas aplicações de planejamento da expansão de fontes de potência reativa, onde normalmente trabalha—se com sistemas próximos do limite de carregamento, a habilidade do algoritmo em tratar o acoplamento ativo—reativo sem recorrer à representação explícita da parte ativa é de grande utilidade.

Em aplicações voltadas para a operação de sistemas elétricos de potência a possibilidade de tratar adequadamente funções-objetivo não—separáveis como minimização de perdas ativas sem recorrer a um modelo acoplado, evitando os consequentes aumentos de requisitos de memória e tempo de computação, credencia o método como uma alternativa viável para aplicações "on—line" em centros de controle.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ELGERD, O.I., Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica, Editora McGraw–Hill, 1976
- [2] MOROZOWSKI FILHO, M., Matrizes Esparsas em Redes de Potência – Técnicas de Operação, Livros Técnicos e Científicos, 1981
- [3] SWARCFITER, J.L., Grafos e Algoritmos Computacionais, Editora Campus, 1984
- [4] BERER, R., "Compensação Reativa em Sistemas de Transmissão", Moderna Eletricidade, no.150, 1986, pp. 8–18
- [5] MONTICELLI, A.J., Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica, Editora Edgard Blucher, 1983
- [6] AVRIEL, M., Nonlinear Programming – Analysis and Methods, Prentice–Hall, 1976
- [7] BAZARAA, M.S., SHETTY, C.M., Nonlinear Programming, John Wiley & Sons, 1979
- [8] STOTT, B., ALSAC, O., MARINHO, J.L., "The Optimal Power Flow Problem", International Conference on Electrical Power Problems, 1980
- [9] HOBSON, E., "Network Constrained Reactive Power Control Using Linear Programming", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS–99, no.3, May–June, 1980
- [10] DOMMEL, H.W., TINNEY, W.F., "Optimal Power Flow Solutions", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 87, 1968

- [11] ABADIE, J., CARPENTIER, J.L., "Generalization of the Wolfe Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints", Optimization, Academic Press, 1969
- [12] CARPENTIER, J.L., "Differential Injection Method: A General Method for Secure and Optimal Load Flows", Proceedings of IEEE Power Industry Computer Applications Conference, Minneapolis, 1973
- [13] MURTAGH, B.A., SAUNDERS, M.A., "A Projected Lagrangian Algorithm and its Implementation for Sparse Nonlinear Constraints", Mathematical Programming Study, 1962
- [14] BIGGS, M.C., LAUGHTON, M.A., "Optimal Electric Power Rescheduling: A Large Nonlinear Programming Test Problem Solved by Recursive Quadratic Programming", Mathematical Programming, 13, 1977
- [15] BURCHETT, R.C., HAPP, H.H., VIERATH, D.R., "Quadratically Convergent Optimal Power Flow", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 103, 1984
- [16] SUN, D.J., ASHLEY, B., BREWER, B., HUGHES, A., TINNEY, W.F., "Optimal Power Flow by Newton Approach", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 103, 1984
- [17] GRANVILLE, S., LIMA, M.C.A., LIMA, L.C., PRADO, S., "PLANVAR An Optimization Software for VAR Sources Planning", 14th Symposium in Mathematical Programming, Amsterdam, 1991
- [18] MANTOVANI, J.R.S., Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica: Uma Solução via Programação Linear Sucessiva utilizando um Modelo Implicitamente Acoplado, Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica, UNICAMP, 1987
- [19] STOTT, B., MARINHO, J.L., ALSAC, O., "Review of Linear Programming Applied to Power System Rescheduling", Power Industry Computer Applications Conference, 1979

- [20] GARCIA, A.V., Relatório Final do Convênio CEPEL/UNICAMP sobre Planejamento de Reativos, UNICAMP, 1987
- [21] DENZEL, D., EDWIN, K.W., GRAF, F.R., "Optimal Power Flow and its Real-Time Applications at the RWE Energy Control Centre", International Conference on Large High Voltage Electric Systems, August, 1988
- [22] GRANVILLE, S., Fluxo de Potência Ótimo: Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial e Métodos de Linearização/Quadratização Sucessivas, Relatório Técnico 066/89, CEPEL, 1989
- [23] MURTAGH, B.A., SAUNDERS, M.A., MINOS 5.0 User's Guide, Technical Report SOL 83-20, Stanford University, 1983
- [24] ALSAC, O., BRIGHT, J., PRAIS, M., STOTT, B., "Further Developments in LP-Based Optimal Power Flow", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 5, 1990
- [25] CARPENTIER, J.L., "CRIC, A new active reactive decoupling process in Load-Flows, Optimal Power Flows and System Control", Proc. IFAC Conference on Power Systems and Power Plant Control, Beijing, August 1986, pp. 65-70
- [26] MINOUX, M., Mathematical Programming - Theory and Algorithms, John Wiley and Sons, 1986
- [27] THOMÉ, L.M., GORENSTIN, B., ALVES, F.R.M., Programa de Análise de Redes - Manual do Usuário - V03-05/87, Relatório Técnico 530/87, CEPEL, 1987
- [28] STOTT, B., ALSAC, O., "Experience with Successive Linear Programming for Optimal Rescheduling of Active and Reactive Power", CIGRÉ/IFAC Symposium on Control Applications to Power System Security, Florença, 1983

- [29] PRADO, S., Planejamento Preliminar da Compensação Reativa em Derivação – Uma Metodologia para Expansão Ótima, Tese de Mestrado, COPPE, 1990
- [30] GRANVILLE, S., PRADO, S., "Planejamento da Expansão Ótima de Suporte Reativo – Manual do Usuário", 1989
- [31] GRANVILLE, S., Shunt–VAr Support Planning Program User's Guide, March 1991

APÊNDICE A

OPERAÇÕES COM FASORES

Sejam os fasores

$$a = A \underline{\theta} = A \cos \theta + j A \operatorname{sen} \theta = A e^{j\theta}$$

e

$$b = B \underline{\varphi} = B \cos \varphi + j B \operatorname{sen} \varphi = B e^{j\varphi}$$

Soma

$$a+b = A \cos \theta + j A \operatorname{sen} \theta + B \cos \varphi + j B \operatorname{sen} \varphi$$

Subtração

$$a-b = A \cos \theta + j A \operatorname{sen} \theta - B \cos \varphi - j B \operatorname{sen} \varphi$$

Multiplicação

$$\begin{aligned} a \cdot b &= A \underline{\theta} B \underline{\varphi} = A e^{j\theta} B e^{j\varphi} = AB e^{j\theta} e^{j\varphi} = AB e^{j(\theta+\varphi)} \\ &= AB \cos(\theta+\varphi) + j AB \operatorname{sen}(\theta+\varphi) = AB \underline{\theta+\varphi} \end{aligned}$$

Divisão

$$\begin{aligned} a/b &= A \underline{\theta} / B \underline{\varphi} = \frac{A e^{j\theta}}{B e^{j\varphi}} = \frac{A}{B} e^{j\theta} e^{-j\varphi} = \frac{A}{B} e^{j(\theta-\varphi)} = \\ &= \frac{A}{B} \cos(\theta-\varphi) + j \frac{A}{B} \operatorname{sen}(\theta-\varphi) = \frac{A}{B} \underline{\theta-\varphi} \end{aligned}$$

APÊNDICE B

EQUAÇÕES DO FLUXO DE POTÊNCIA CONVENCIONAL

Seja um ramo k-m da rede elétrica representado pelo modelo da figura (B.1)

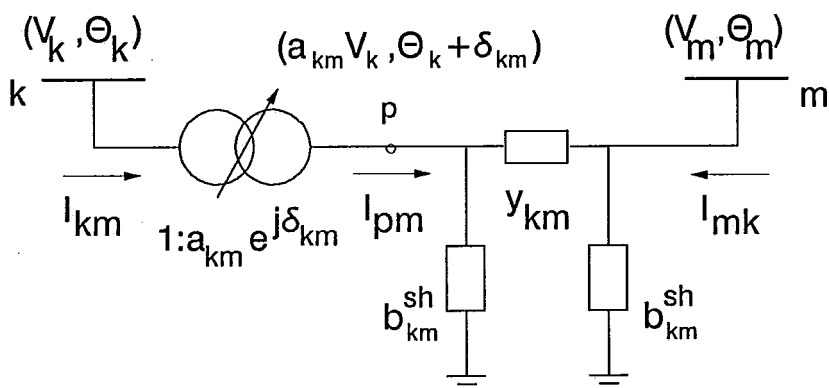


Figura B.1

onde δ_{km} é a defasagem angular introduzida por um transformador defasador.

$$E_k = V_k \angle \theta_k \quad (B.1)$$

$$E_p = a_{km} V_k \angle \theta_k + \delta_{km} \quad (B.2)$$

De (B.1) e (B.2) concluímos que

$$\frac{E_p}{E_k} = \frac{a_{km} V_k e^{j(\theta_k + \delta_{km})}}{V_k e^{j\theta_k}} = a_{km} e^{j\delta_{km}}$$

Logo

$$E_p = a_{km} e^{j\delta_{km}} E_k = a_{km} V_k e^{j\theta_k} e^{j\delta_{km}} = a_{km} V_k e^{j(\theta_k + \delta_{km})} \quad (\text{B.3})$$

Devemos deduzir a expressão de S_{pm} e separar as partes real e imaginária.

$$\text{De (II.18) sabemos que } I_{km} = y_{km} (E_k - E_m) + j b_{km}^{sh} E_k.$$

Analogamente,

$$I_{pm} = y_{km} (E_p - E_m) + j b_{km}^{sh} E_p.$$

Assim, temos:

$$S_{pm}^* = P_{pm} - jQ_{pm} = E_p^* I_{pm} = E_p^* [y_{km} (E_p - E_m) + j b_{km}^{sh} E_p] \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.3) em (B.4), temos:

$$S_{pm}^* = a_{km} V_k e^{-j(\theta_k + \delta_{km})} [y_{km} (a_{km} V_k e^{j(\theta_k + \delta_{km})} - V_m e^{j\theta_m}) + j b_{km}^{sh} a_{km} V_k e^{-j(\theta_k + \delta_{km})}]$$

$$S_{pm}^* = a_{km} [V_k \cos(\theta_k + \delta_{km}) - j V_k \sin(\theta_k + \delta_{km})] [(g_{km} + j b_{km}) \cdot (a_{km} V_k \cos(\theta_k + \delta_{km}) + j a_{km} V_k \sin(\theta_k + \delta_{km}) - V_m \cos \theta_m - j V_m \sin \theta_m) + j b_{km}^{sh} (a_{km} V_k \cos(\theta_k + \delta_{km}) + j a_{km} V_k \sin(\theta_k + \delta_{km}))]$$

$$S_{pm}^* = [a_{km} V_k \cos(\theta_k + \delta_{km}) - j a_{km} V_k \sin(\theta_k + \delta_{km})] [(a_{km} g_{km} V_k \cdot \cos(\theta_k + \delta_{km}) + j a_{km} g_{km} V_k \sin(\theta_k + \delta_{km}) - g_{km} V_m \cos \theta_m - j g_{km} V_m \sin \theta_m + j a_{km} b_{km} V_k \cos(\theta_k + \delta_{km}) - j a_{km} b_{km} V_k \cdot \sin(\theta_k + \delta_{km}) - j b_{km} V_m \cos \theta_m + b_{km} V_m \sin \theta_m] + j b_{km}^{sh} (a_{km} V_k)^2$$

$$\begin{aligned}
S_{pm}^* = & (a_{km} V_k)^2 g_{km} \cos^2(\theta_k + \delta_{km}) + j (a_{km} V_k)^2 g_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km}) \cdot \\
& \cdot \text{sen}(\theta_k + \delta_{km}) - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km}) \cos \theta_m - \\
& - j (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km}) \text{sen} \theta_m + j (a_{km} V_k)^2 b_{km} \cdot \\
& \cdot \cos^2(\theta_k + \delta_{km}) - j (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km}) \cos \theta_m + \\
& + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km}) \text{sen} \theta_m - j (a_{km} V_k)^2 g_{km} \cdot \\
& \cdot \text{sen}^2(\theta_k + \delta_{km}) + (a_{km} V_k)^2 g_{km} \text{sen}^2(\theta_k + \delta_{km}) + j (a_{km} V_k) V_m \cdot \\
& \cdot g_{km} \text{sen}(\theta_k + \delta_{km}) \cos \theta_m - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \text{sen}(\theta_k + \delta_{km}) \text{sen} \theta_m + \\
& + j (a_{km} V_k)^2 b_{km} \text{sen}^2(\theta_k + \delta_{km}) - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \text{sen}(\theta_k + \delta_{km}) \cdot \\
& \cdot \cos \theta_m - j (a_{km} V_k) V_m b_{km} \text{sen}(\theta_k + \delta_{km}) \text{sen} \theta_m + j b_{km}^{\text{sh}} (a_{km} V_k)^2
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Separando as partes real e imaginária de (B.5), vem:

$$\begin{aligned}
S_{pm}^* = & (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km} - \theta_m) - \\
& - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \text{sen}(\theta_k + \delta_{km} - \theta_m) - j [-(a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{\text{sh}}) + \\
& + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_k + \delta_{km} - \theta_m) - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cdot \\
& \cdot \text{sen}(\theta_k + \delta_{km} - \theta_m)]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Fazendo $\cos \theta_{km} = \cos(\theta_k - \theta_m)$ e $\text{sen}^* \theta_{km} = \text{sen}(\theta_k - \theta_m)$, substituindo estas expressões em (B.6), lembrando que $S_{pm} = S_{km}$ e separando as partes real e imaginária, vem:

$$\begin{aligned}
P_{km} = & (a_{km} V_k)^2 g_{km} - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \delta_{km}) - \\
& - (a_{km} V_k) V_m b_{km} \text{sen}(\theta_{km} + \delta_{km})
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
Q_{km} = & -(a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{\text{sh}}) + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \delta_{km}) - \\
& - (a_{km} V_k) V_m g_{km} \text{sen}(\theta_{km} + \delta_{km})
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Para linhas de transmissão $a_{km} = 1$ e $\delta_{km} = 0$.

Para transformadores em fase, $b_{km}^{\text{sh}} = 0$ e $\delta_{km} = 0$.

Para transformadores defasadores $b_{km}^{sh} = 0$.

Para defasadores puros $b_{km}^{sh} = 0$ e $a_{km} = 1$.

Para determinar a injeção líquida de corrente na barra k , fazemos:

$$I_k + I_k^{sh} = \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} + I_k^{sh} = \sum_{m \in K} y_{km} E_m \quad (\text{B.9})$$

onde

K é o conjunto de todas as barras da rede elétrica

De (B.4), vem a seguinte expressão geral:

$$I_{km} = (a_{km}^2 y_{km} + j b_{km}^{sh}) E_k + (-a_{km} e^{-j\delta_{km}} y_{km}) E_m \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.10) em (B.9), vem:

$$I_k = [j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km} + a_{km}^2 y_{km})] E_k + \sum_{m \in \Omega_k} (-a_{km} e^{-j\delta_{km}} y_{km}) E_m \quad (\text{B.11})$$

Expressando (B.11) em forma matricial, vem:

$$I = [Y]E$$

onde

I – vetor das injeções líquidas de corrente

E – vetor das tensões nodais

$[Y] = [G + jB]$ matriz admitância nodal.

Os elementos de $[Y]$ são dados por:

$$Y_{km} = -a_{km} e^{-j\delta_{km}} y_{km}$$

$$Y_{kk} = j b_k^{sh} + \sum_{m \in \Omega_k} (j b_{km}^{sh} + a_{km}^2 y_{km})$$

De (B.9), vem:

$$I_k = \sum_{m \in K} (G_{km} + j B_{km}) V_m e^{j\theta_m}$$

O conjugado da injeção líquida de potência complexa é dado por

$$\begin{aligned} S_k^* &= V_k e^{-j\theta_k} \sum_{m \in K} (G_{km} + j B_{km}) V_m e^{j\theta_m} \\ S_k^* &= (V_k \cos \theta_k - j V_k \sin \theta_k) \sum_{m \in K} (G_{km} + j B_{km}) (V_m \cos \theta_m + \\ &\quad + j V_m \sin \theta_m) \\ S_k^* &= \sum_{m \in K} (V_k V_m \cos \theta_k \cos \theta_m + j V_k V_m \cos \theta_k \sin \theta_m - \\ &\quad - j V_k V_m \sin \theta_k \cos \theta_m + V_k V_m \sin \theta_k \sin \theta_m) (G_{km} + j B_{km}) \\ S_k^* &= V_k \sum_{m \in K} (V_m \cos \theta_{km} - j V_m \sin \theta_{km}) (G_{km} + j B_{km}) \\ S_k^* &= V_k \sum_{m \in K} (V_m G_{km} \cos \theta_{km} - j V_m G_{km} \sin \theta_{km} + j V_m B_{km} \cos \theta_{km} + \\ &\quad + V_m B_{km} \sin \theta_{km}) \end{aligned} \tag{B.12}$$

Separando as partes real e imaginária de (B.12), vem:

$$P_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \tag{B.13}$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \tag{B.14}$$

O balanço de potência ativa na barra k é expresso por

$$\Delta P_k = P_{gk} - P_{lk} - P_k$$

$$\Delta P_k = P_{gk} - P_{lk} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \tag{B.15}$$

O balanço de potência reativa na barra k é expresso por

$$\Delta Q_k = Q_{gk} - Q_{lk} - Q_k$$

$$\Delta Q_k = Q_{gk} - Q_{lk} - V_k \sum_{m \in K} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{B.16})$$

Impondo a Primeira Lei de Kirchhoff a todas as barras, as equações de balanço de potência ativa e reativa podem ser expressas, respectivamente, por:

$$P_{gk} - P_{lk} - P_k = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$Q_{gk} - Q_{lk} - Q_k = 0 \quad (\text{B.18})$$

O que equivale a:

$$\Delta P = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\Delta Q = 0 \quad (\text{B.20})$$

APÊNDICE C

MÉTODO DE NEWTON–RAPHSON APLICADO A SISTEMAS N–DIMENSIONAIS

Seja a função $f(x)$ contínua e diferenciável, de forma que podemos desenvolver a expressão de $f(x+\Delta x)$ em série de Taylor.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{f''(x)(\Delta x)^2}{2!} + \dots \quad (\text{C.1})$$

Suponhamos agora que $x+\Delta x$ esteja muito próximo da raiz \bar{x} , de maneira que $f(x+\Delta x) \approx 0$. Suponhamos ainda que $x+\Delta x$ esteja tão próximo de \bar{x} ($\Delta x \rightarrow 0$) que possamos desprezar os termos de ordem igual ou superior a 2 da série de Taylor em (C.1). Após estas considerações podemos reescrever (C.1) como:

$$0 = f(x) + f'(x) \Delta x \quad (\text{C.2})$$

Explicitando o valor de Δx , vem:

$$\Delta x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Assim, sendo Δx o incremento da variável x em um processo iterativo que busca a raiz da equação $f(x)=0$, temos:

$$x^{i+1} - x^i = \frac{-f(x^i)}{f'(x^i)} \Rightarrow x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)} \quad (\text{C.3})$$

Estendendo esta idéia para um sistema de n equações, temos:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Expandindo as equações (C.4) em série de Taylor, vem:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\
 &+ \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \\
 &+ \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \\
 &+ \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n + \phi_1 = 0 \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
 f_n(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\
 &+ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \\
 &+ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \\
 &+ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n + \phi_n = 0
 \end{aligned}$$

onde ϕ_1, \dots, ϕ_n representam os somatórios dos termos de ordem igual ou superior a 2 das expressões em série de Taylor de cada uma das n equações.

Considerando

$$f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = 0$$

·

$$f_n(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = 0$$

e colocando as equações (C.5) em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

ou

$$[J] \Delta \underline{x} = -\underline{f} \Rightarrow \Delta \underline{x} = [J]^{-1}(-\underline{f})$$

onde $[J]$ é denominada matriz jacobiana ou jacobiano.

APÊNDICE D

MÉTODO CRIC

Seja um ramo genérico k-m representado pelo modelo da figura (D.1):

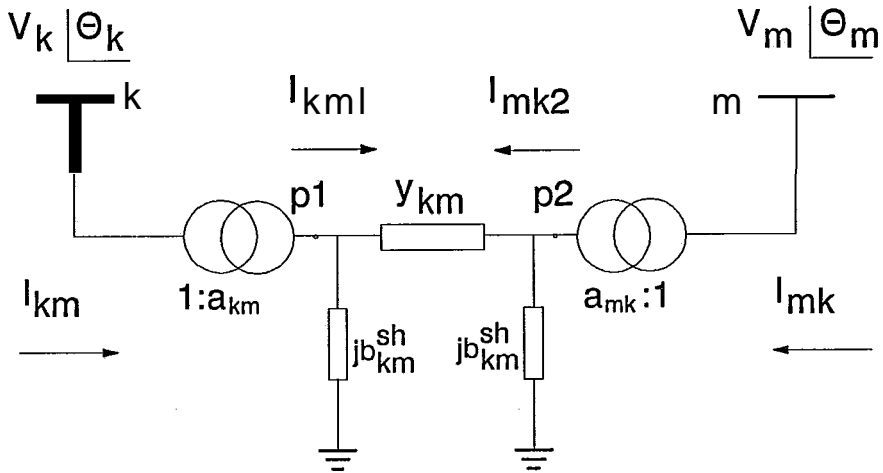


Figura D.1

Seja $z_{km} = r_{km} + j x_{km} = |z_{km}| \angle \delta_{km}$

Sendo $\alpha_{km} = \arctg \left[\frac{r_{km}}{x_{km}} \right]$, temos, graficamente

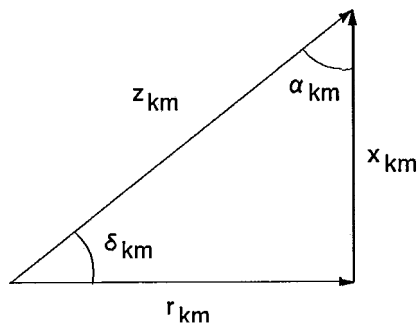


Figura D.2

$$y_{km} = z_{km}^{-1} = (|z_{km}| \angle \delta_{km})^{-1} = \frac{1}{|z_{km}|} \angle -\delta_{km}$$

$$y_{km} = \frac{1}{y_{km} + jx_{km}} \cdot \frac{\Gamma_{km} - jx_{km}}{y_{km} + jx_{km}} = \frac{\Gamma_{km}}{\Gamma_{km}^2 + x_{km}^2} - j \frac{x_{km}}{\Gamma_{km}^2 + x_{km}^2}$$

$$y_{km} = g_{km} + j b_{km} \tag{D.1}$$

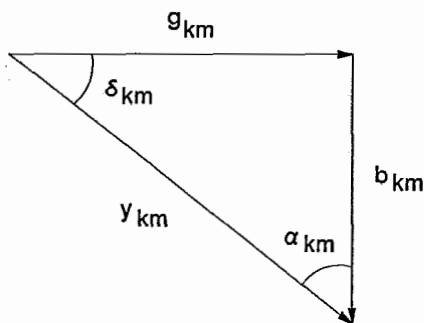


Figura D.3

Da Fig.(D.3) e de (D.1), vem:

$$\begin{aligned} g_{km} &= y_{km} \text{ sen } \alpha_{km} \\ b_{km} &= -y_{km} \text{ cos } \alpha_{km} \end{aligned} \tag{D.2}$$

Assumiremos

$$y_{km} = g_{km} - j b_{km}$$

e

$$\begin{aligned} g_{km} &= y_{km} \text{ sen } \alpha_{km} \\ b_{km} &= y_{km} \text{ cos } \alpha_{km} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Resolveremos as equações de fluxo para o modelo π da LT que liga as barras fictícias p_1 e p_2 , lembrando que:

$$\frac{E_{p1}}{E_k} = \frac{V_{p1} e^{j\theta_{p1}}}{V_k e^{j\theta_k}}, \text{ mas } \theta_{p1} = \theta_k \Rightarrow \frac{E_{p1}}{E_k} = \frac{V_{p1}}{V_k} = a_{km}$$

$$\frac{E_{p2}}{E_m} = \frac{V_{p2} e^{j\theta_{p2}}}{V_k e^{j\theta_m}}, \text{ mas } \theta_{p2} = \theta_m \Rightarrow \frac{E_{p2}}{E_m} = \frac{V_{p2}}{V_m} = a_{mk}$$

$$I_{p1p2} = y_{km} (E_{p1} - E_{p2}) + j b_{km}^{sh} E_{p1}$$

$$E_{p1} = V_{p1} \text{ cos } \theta_k + j V_{p1} \text{ sen } \theta_k$$

$$E_{p2} = V_{p2} \cos \theta_m + j V_{p2} \sin \theta_m$$

$$S_{p1p2} = E_{p1} I_{p1p2}^* = P_{p1p2} + j Q_{p1p2}$$

$$S_{p1p2}^* = E_{p1}^* I_{p1p2} = P_{p1p2} - j Q_{p1p2}$$

$$S_{p1p2}^* = (V_{p1} \cos \theta_k - j V_{p1} \sin \theta_k) [(g_{km} - j b_{km}) (V_{p1} \cos \theta_k + j V_{p1} \sin \theta_k - V_{p2} \cos \theta_m - j V_{p2} \sin \theta_m) + j b_{km}^{sh} (V_{p1} \cos \theta_k + j V_{p1} \sin \theta_k)]$$

$$S_{p1p2} = (g_{km} - j b_{km}) (V_{p1} \cos \theta_k - j V_{p1} \sin \theta_k) (V_{p1} \cos \theta_k + j V_{p1} \sin \theta_k - V_{p2} \cos \theta_m - j V_{p2} \sin \theta_m) + j b_{km}^{sh} (V_{p1} \cos \theta_k - j V_{p1} \sin \theta_k) \cdot (V_{p1} \cos \theta_k + j V_{p1} \sin \theta_k)$$

$$S_{p1p2}^* = (g_{km} - j b_{km}) (V_{p1}^2 \cos^2 \theta_k - V_{p1} V_{p2} \cos \theta_k \cos \theta_m - j V_{p1} V_{p2} \cos \theta_k \sin \theta_m + V_{p1}^2 \sin^2 \theta_k + j V_{p1} V_{p2} \sin \theta_k \cos \theta_m - V_{p1} V_{p2} \sin \theta_k \sin \theta_m) + j b_{km}^{sh} V_{p1}^2$$

$$S_{p1p2} = (g_{km} - j b_{km}) [V_{p1}^2 - V_{p1} V_{p2} (\cos \theta_k \cos \theta_m + \sin \theta_k \sin \theta_m) + j V_{p1} V_{p2} (\sin \theta_k \cos \theta_m - \sin \theta_m \cos \theta_k)] + j b_{km}^{sh} V_{p1}^2$$

Fazendo $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ podemos reescrever a expressão acima como:

$$S_{p1p2}^* = (g_{km} - j b_{km}) (V_{p1}^2 - V_{p1} V_{p2} \cos \theta_{km} + j V_{p1} V_{p2} \sin \theta_{km}) + j b_{km}^{sh} V_{p1}^2$$

$$S_{p1p2} = g_{km} V_{p1}^2 - g_{km} V_{p1} V_{p2} \cos \theta_{km} + j g_{km} V_{p1} V_{p2} \sin \theta_{km} - j b_{km} V_{p1}^2 + j b_{km} V_{p1} V_{p2} \cos \theta_{km} + b_{km} V_{p1} V_{p2} \sin \theta_{km} + j b_{km}^{sh} V_{p1}^2$$

(D.4)

Substituindo (D.3) em (D.4), vem:

$$\begin{aligned} S_{p_1 p_2}^* &= y_{km} \operatorname{sen} \alpha_{km} V_{p_1}^2 - y_{km} \operatorname{sen} \alpha_{km} V_{p_1} V_{p_2} \cos \theta_{km} + \\ &\quad + j y_{km} \operatorname{sen} \alpha_{km} V_{p_1} V_{p_2} \operatorname{sen} \theta_{km} - j y_{km} \cos \alpha_{km} V_{p_1}^2 + \\ &\quad + j y_{km} \cos \alpha_{km} V_{p_1} V_{p_2} \cos \theta_{km} + y_{km} \cos \alpha_{km} V_{p_1} V_{p_2} \operatorname{sen} \theta_{km} + \\ &\quad + j b_{km}^{\text{sh}} V_{p_1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{p_1 p_2}^* &= y_{km} V_{p_1}^2 \operatorname{sen} \alpha_{km} + y_{km} V_{p_1} V_{p_2} \operatorname{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) + \\ &\quad + j y_{km} V_{p_1} V_{p_2} \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) - j y_{km} V_{p_1}^2 \cos \alpha_{km} + \\ &\quad + j b_{km}^{\text{sh}} V_{p_1}^2 \end{aligned}$$

Separando as partes real e imaginária, vem:

$$P_{p_1 p_2} = y_{km} V_{p_1}^2 \operatorname{sen} \alpha_{km} + y_{km} V_{p_1} V_{p_2} \operatorname{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{D.5})$$

$$Q_{p_1 p_2} = y_{km} V_{p_1}^2 \cos \alpha_{km} + y_{km} V_{p_1} V_{p_2} \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) - b_{km}^{\text{sh}} V_{p_1}^2 \quad (\text{D.6})$$

Substituindo V_{p_1} por $a_{km} V_k$ e V_{p_2} por $a_{mk} V_m$ em (D.5) e (D.6), vem:

$$P_{km} = y_{km} (a_{km} V_k)^2 \operatorname{sen} \alpha_{km} + y_{km} a_{km} a_{mk} V_k V_m \operatorname{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} Q_{km} &= y_{km} (a_{km} V_k)^2 \cos \alpha_{km} - y_{km} a_{km} a_{mk} V_k V_m \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) - \\ &\quad - b_{km}^{\text{sh}} (a_{km} V_k)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

As expressões (D.7) e (D.8) representam, respectivamente, os fluxos de potência ativa e reativa entre os nós k e m .

Do Apêndice B, sabemos que:

$$P_k(\theta, V) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sen \theta_{km})$$

$$Q_k(\theta, V) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} (G_{km} \sen \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})$$

ou seja,

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} P_{km} \quad (D.9)$$

$$Q_k = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km} - b_k^{\text{sh}} V_k^2 \quad (D.10)$$

Rearranjando os termos de (D.7) e (D.8) e substituindo estas expressões em (D.9) e (D.10), vem:

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} [y_{km} (a_{km} V_k)^2 \sen \alpha_{km} + y_{km} a_{km} a_{mk} V_k V_m \sen (\theta_{km} - \alpha_{km})] \quad (D.11)$$

$$Q_k = \sum_{m \in \Omega_k} [(a_{km} V_k)^2 (y_{km} \cos \alpha_{km} - b_{km}^{\text{sh}}) - y_{km} a_{km} a_{mk} V_k V_m \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) - b_k^{\text{sh}} (\alpha_{km} V_k)^2] \quad (D.12)$$

Considerando P_{km} fixo e dividindo (D.7) por $y_{km} a_{km} a_{mk}$, vem:

$$\frac{P_{km}}{y_{km} a_{km} a_{mk}} = \frac{a_{km}}{a_{mk}} V_k^2 \sen \alpha_{km} + V_k V_m \sen (\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (D.13)$$

Sejam

$$A_{km} = \frac{P_{km}}{y_{km} a_{km} a_{mk}} \quad (D.14)$$

e

$$\beta_{km} = \frac{a_{km}}{a_{mk}} \sen \alpha_{km} \quad (D.15)$$

Substituindo (D.14) e (D.15) em (D.13), vem:

$$A_{km} = \beta_{km} V_k^2 + V_k V_m \text{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{D.16})$$

Explicitando $\text{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km})$ em (D.16), vem:

$$\text{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) = \frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \quad (\text{D.17})$$

Consideremos (D.12) e denominemos N_k o agrupamento dos termos multiplicados por V_k^2 .

$$N_k = \sum_{m \in \Omega_k} a_{km}^2 (y_{km} \cos \alpha_{km} - b_{km}^{\text{sh}}) - b_k^{\text{sh}} \quad (\text{D.18})$$

Seja

$$\xi_{km} = y_{km} a_{km} a_{mk} \quad (\text{D.19})$$

Substituindo (D.18) e (D.19) em (D.12), vem:

$$Q_k = N_k V_k^2 - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} V_k V_m \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{D.20})$$

Finalmente, podemos escrever a expressão da potência reativa em uma barra k como sendo:

$$Q_k = N_k V_k^2 - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} V_k V_m [1 - \text{sen}^2 (\theta_{km} - \alpha_{km})]^{1/2} \quad (\text{D.21})$$

A expressão (D.21) exprime Q_k em função de V_k e V_m , mantendo P constante. A derivação parcial de (D.21) nos permite determinar os elementos do Jacobiano [LCRIC].

Explicitando o valor de $\text{sen}(\theta_{km}-\alpha_{km})$ em (D.16), vem:

$$\text{sen}(\theta_{km}-\alpha_{km}) = \frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \quad (\text{D.22})$$

$$\text{cos}(\theta_{km}-\alpha_{km}) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_{km}-\alpha_{km})} \quad (\text{D.23})$$

Assim,

$$Q_k = V_k \left[N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \text{cos}(\theta_{km}-\alpha_{km}) V_m \right] \quad (\text{D.24})$$

Substituindo (D.23) em (D.24), vem:

$$Q_k = V_k \left[N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} (1 - \text{sen}^2(\theta_{km}-\alpha_{km}))^{1/2} V_m \right] \quad (\text{D.25})$$

Substituindo (D.22) em (D.25), vem:

$$Q_k = N_k V_k^2 - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} V_k \quad (\text{D.26})$$

Devemos derivar (D.26) parcialmente em relação a V_k e V , para encontrar as expressões de L_{kk} e L_{km} , respectivamente.

Derivando (D.26) parcialmente em relação a V_k , vem:

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \frac{\partial}{\partial V_k} \left\{ V_k V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k -$$

$$- \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + V_k V_m \frac{\partial}{\partial V_k} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k -$$

$$- \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right.$$

$$+ V_k V_m \frac{1}{2} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2}$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial V_k} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right] \left. \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k -$$

$$- \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right.$$

$$+ V_k V_m \frac{1}{2} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{-1/2}$$

$$\cdot (-2) \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right] \frac{\partial}{\partial V_k} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right] \left. \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k -$$

$$- \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \cos(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \frac{V_k V_m}{2 \cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right.$$

$$\left. \cdot (-2) \sin(\theta_{km} - \alpha_{km}) \frac{-2 \beta_{km} V_k V_k V_m (A_{km} - \beta_{km} V_k^2)}{(V_k V_m)^2} \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \cos(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \frac{2 \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})}{2 \cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} V_k V_m \cdot \left[\frac{2 \beta_{km} V_k V_k V_m}{(V_k V_m)^2} + V_m \frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{(V_k - V_m)^2} \right] \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \cos(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \frac{\operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \cdot 2 \beta_{km} V_k + \frac{\operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} V_m \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km}) \right\}$$

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left\{ V_m \frac{\cos^2(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \operatorname{sen}^2(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} + \frac{2 \beta_{km} V_k \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right\}$$

Finalmente,

$$L_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = 2N_k V_k - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} \left[\frac{V_m + 2 \beta_{km} V_k \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \right] \quad (D.27)$$

Derivando (D.26) parcialmente em relação a V_m , vem:

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = \frac{\partial}{\partial V_m} \left\{ N_k V_k^2 - \sum_{m \in \Omega_k} \xi_{km} V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} V_k \right\}$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -\xi_{km} \frac{\partial}{\partial V_m} \left\{ V_k V_m \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -\xi_{km} \left\{ V_k \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + V_k V_m \frac{\partial}{\partial V_m} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -\xi_{km} \left\{ V_k \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + V_k V_m \frac{1}{2} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{-1/2} \right\} \\ \cdot \frac{\partial}{\partial V_m} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -\xi_{km} \left\{ V_k \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + V_k V_m \frac{1}{2} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{-1/2} \right. \\ \left. \cdot (-2) \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right] \frac{\partial}{\partial V_m} \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right] \right\}$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -\xi_{km} \left\{ V_k \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + V_k V_m \frac{1}{2} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right]^2 \right]^{-1/2} \right. \\ \left. \cdot (-2) \left[\frac{A_{km} - \beta_{km} V_k^2}{V_k V_m} \right] \frac{-V_k (A_{km} - \beta_{km} V_k^2)}{(V_k V_m)^2} \right\}$$

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = -\xi_{km} \left\{ V_k \cos(\theta_{km} - \alpha_{km}) + \frac{V_k V_m}{2 \cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \cdot (-2) \cdot \sin(\theta_{km} - \alpha_{km}) \frac{-V_k}{V_k V_m} \cdot \sin(\theta_{km} - \alpha_{km}) \right\}^{-1/2}$$

Finalmente,

$$L_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = \frac{-\xi_{km} V_k}{\cos(\theta_{km} - \alpha_{km})} \quad (D.28)$$

Também devemos considerar as derivadas parciais de Q_k e Q_m em relação ao tap (a_{km}) do transformador próximo à barra k da figura D.1

Sejam

$$\begin{aligned} y_{km} &= g_{km}^2 + b_{km}^2 \\ g_{km} &= y_{km} \operatorname{sen} \alpha_{km} \\ b_{km} &= -y_{km} \operatorname{cos} \alpha_{km} \end{aligned} \quad (D.29)$$

De (D.7) e (D.8), vem...

$$P_{km} = y_{km} (a_{km} V_k)^2 \operatorname{sen} \alpha_{km} + y_{km} a_{km} a_{mk} V_k V_m \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})$$

$$Q_{km} = y_{km} (a_{km} V_k)^2 \operatorname{cos} \alpha_{km} - y_{km} a_{km} a_{mk} V_k V_m \operatorname{cos}(\theta_{km} - \alpha_{km}) - (a_{km} V_k)^2 b_{km}^{\text{sh}}$$

Substituindo (D.29) nas relações acima, vem:

$$P_{km} = (a_{km} V_k)^2 g_{km} + a_{km} V_k V_m y_{km} \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km})$$

$$Q_{km} = (a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{\text{sh}}) - y_{km} a_{km} V_k V_m \operatorname{cos}(\theta_{km} - \alpha_{km})$$

Fazendo $A_{km} = \frac{P_{km}}{y_{km}}$, vem:

$$A_{km} = a_{km}^2 V_k^2 \operatorname{sen} \alpha_{km} + a_{km} V_k V_m \operatorname{sen}(\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (D.30)$$

Fazendo $\beta_{km} = \text{sen } \alpha_{km}$, vem:

$$\beta_{km} = \text{sen } \alpha_{km} = \frac{g_{km}}{y_{km}} \quad (\text{D.31})$$

Substituindo (D.31) em (D.30), vem:

$$A_{km} = a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km} + a_{km} V_k V_m \text{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) \quad (\text{D.32})$$

De (D.32), vem:

$$\text{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km}) = \frac{A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km} V_k V_m}$$

$$\text{cos} (\theta_{km} - \alpha_{km}) = \sqrt{1 - \text{sen}^2 (\theta_{km} - \alpha_{km})}$$

Para efeito de simplificação da notação adotaremos

$$S_{km} = \text{sen} (\theta_{km} - \alpha_{km})$$

$$C_{km} = \text{cos} (\theta_{km} - \alpha_{km})$$

Calculemos, então, a derivada parcial de S_{km} em relação a a_{km}

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{km}}{\partial a_{km}} &= \frac{\partial}{\partial a_{km}} \left[\frac{A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km} V_k V_m} \right] = \\ &= \frac{-2 a_{km} V_k^2 \beta_{km} a_{km} V_k V_m - V_k V_m (A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km})}{a_{km}^2 V_k^2 V_m^2} = \\ &= \frac{-2 a_{km}^2 V_k^3 V_m \beta_{km} - A_{km} V_k V_m + a_{km}^2 V_k^3 V_m \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k^2 V_m^2} \\ &= - \frac{A_{km} V_k V_m}{a_{km}^2 V_k^2 V_m^2} - \frac{a_{km}^2 V_k^3 V_m \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k^2 V_m^2} = \\ &= - \left[\frac{A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k V_m} \right] \end{aligned}$$

Voltando à expressão de Q_k , temos:

$$\begin{aligned}
 Q_k &= \sum_{m \in \Omega_k} [-(a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - a_{km} y_{km} V_k V_m C_{km} - (a_{km} V_k)^2 b_k^{sh}] \\
 \frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}} &= \sum_{m \in \Omega_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_{km}} [-(a_{km} V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh})] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial a_{km}} [-a_{km} y_{km} V_k V_m C_{km}] + \frac{\partial}{\partial a_{km}} [-b_k^{sh} (a_{km} V_k)^2] \right\} \\
 \frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}} &= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - \\
 &\quad - \left\{ y_{km} V_k V_m C_{km} + \left[\frac{\partial}{\partial C_{km}} (a_{km} y_{km} V_k V_m C_{km}) \cdot \frac{\partial C_{km}}{\partial a_{km}} \right] \right\} - \\
 &\quad - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh} \tag{D.33}
 \end{aligned}$$

Para prosseguir na derivação de (D.33) devemos, primeiramente, determinar $\partial C_{km} / \partial a_{km}$.

$$\begin{aligned}
 C_{km} &= \sqrt{1 - S_{km}^2} = \left[1 - \left[\frac{A_{km} - a_{km}^2 \beta_{km} V_k^2}{a_{km} V_k V_m} \right]^2 \right]^{1/2} \\
 \frac{\partial C_{km}}{\partial a_{km}} &= \frac{1}{2} \left[1 - \left[\frac{A_{km} - a_{km}^2 \beta_{km} V_k^2}{a_{km} V_k V_m} \right]^2 \right]^{-1/2} \\
 &\quad \cdot \left[-2 \left[\frac{A_{km} - a_{km}^2 \beta_{km} V_k^2}{a_{km} V_k V_m} \right] \right] \\
 &\quad \cdot \frac{-2 a_{km} \beta_{km} V_k^2 a_{km} V_k V_m - V_k V_m A_{km} + a_{km}^2 \beta_{km} V_k^3 V_m}{a_{km}^2 V_k^2 V_m^2} \\
 &= \frac{S_{km}}{C_{km}} \cdot \frac{A_{km} V_k V_m + a_{km}^2 V_k^3 V_m \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k^2 V_m^2} \\
 &= \frac{S_{km}}{C_{km}} \cdot \frac{A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k V_m} \\
 \frac{\partial C_{km}}{\partial a_{km}} &= \frac{S_{km}}{C_{km}} \cdot \frac{A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k V_m} \tag{D.34}
 \end{aligned}$$

Substituindo (D.34) em (D.33), vem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}} &= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - y_{km} V_k V_m C_{km} - \\
&\quad - a_{km} y_{km} V_k V_m \frac{S_{km}}{C_{km}} \frac{A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k V_m} - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh} \\
&= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - y_{km} V_k V_m C_{km} - \\
&\quad - y_{km} \frac{S_{km}}{C_{km}} \frac{A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km}} - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh} \\
&= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - \frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \left[a_{km} V_k V_m C_{km}^2 + \right. \\
&\quad \left. + S_{km} (A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}) \right] - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh} \tag{D.35}
\end{aligned}$$

$$\text{Mas } C_{km}^2 = 1 - S_{km}^2 \text{ e } S_{km} = \frac{A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km} V_k V_m}$$

Substituindo C_{km}^2 por $1 - S_{km}^2$ em (D.35), vem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}} &= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - \frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \left[a_{km} V_k V_m \left[1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - S_{km} \left[\frac{A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km} V_k V_m} \right] \right] + S_{km} (A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}) \right] - \\
&\quad - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh} \\
&= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - \frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \left[a_{km} V_k V_m - \right. \\
&\quad \left. - S_{km} A_{km} + S_{km} a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km} + S_{km} A_{km} + S_{km} a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km} \right] - \\
&\quad - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_k}{\partial a_{km}} &= -2 a_{km} V_k^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - \frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} (V_k V_m + \\
&\quad + 2 S_{km} a_{km} V_k^2 \beta_{km}) - 2 a_{km} V_k^2 b_k^{sh} \tag{D.36}
\end{aligned}$$

Para deduzir a expressão de $\partial Q_m / \partial a_{km}$, devemos lembrar que o fluxo reativo da barra m para a barra k, considerada a relação de transformação a_{km} , é dado por:

$$Q_{mk} = -V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (a_{km} V_k) V_m b_{km} \cos \theta_{km} + (a_{km} V_k) V_m g_{km} \sin \theta_{km} \quad (D.37)$$

Lembrando que $g_{km} = y_{km} \sin \alpha_{km}$ e $b_{km} = -y_{km} \cos \alpha_{km}$ e substituindo estas relações em (D.37), vem:

$$Q_{mk} = -V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - (a_{km} V_k) V_m y_{km} \cos \alpha_{km} \cos \theta_{km} + (a_{km} V_k) V_m y_{km} \sin \theta_{km} \sin \alpha_{km}$$

$$Q_{mk} = -V_m^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) - y_{km} a_{km} V_k V_m \cos (\theta_{km} - \alpha_{km})$$

$$Q_m = \sum_{m \in \Omega_k} Q_{mk} = \sum_{m \in \Omega_k} y_{km} \cos \alpha_{km} V_m^2 - y_{km} a_{km} V_k V_m \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) - \sum_{m \in \Omega_k} V_m^2 b_{km}^{sh}$$

$$\frac{\partial Q_m}{\partial a_{km}} = \frac{\partial}{\partial a_{km}} \left[-a_{km} y_{km} V_k V_m \cos (\theta_{km} - \alpha_{km}) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_m}{\partial a_{km}} &= - \left[y_{km} V_k V_m C_{km} + \frac{\partial}{\partial C_{km}} (a_{km} y_{km} V_k V_m C_{km}) \frac{\partial C_{km}}{\partial a_{km}} \right] \\ &= - (y_{km} V_k V_m C_{km} + a_{km} y_{km} V_k V_m \frac{S_{km}}{C_{km}} \cdot \frac{A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km}^2 V_k V_m}) \\ &= - \frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \cdot (a_{km} V_k V_m C_{km}^2 + S_{km} (A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km})) \end{aligned}$$

$$\text{Mas } C_{km}^2 = 1 - S_{km}^2 \text{ e } S_{km} = \frac{A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km} V_k V_m}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_m}{\partial a_{km}} &= -\frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \left\{ a_{km} V_k V_m \left[1 - S_{km} \left[\frac{A_{km} - a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km}}{a_{km} V_k V_m} \right] \right] + \right. \\
&\quad \left. + S_{km} A_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km} S_{km} \right\} \\
&= -\frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \left[a_{km} V_k V_m - A_{km} S_{km} + S_{km} a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km} + \right. \\
&\quad \left. + A_{km} S_{km} + a_{km}^2 V_k^2 \beta_{km} S_{km} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial Q_m}{\partial a_{km}} = -\frac{y_{km}}{a_{km} C_{km}} \left[V_k V_m + 2 S_{km} a_{km} V_k^2 \beta_{km} \right] \quad (D.38)$$

APÊNDICE E

CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE DE KARUSH-KUHN-TUCKER

Seja o problema de programação não-linear [6,7]

$$(P) \quad \text{Min } f(x) \tag{E.1}$$

s.a.

$$g_i(x) \geq 0, \quad i=1, \dots, m \tag{E.2}$$

$$h_j(x) = 0, \quad j=1, \dots, p \tag{E.3}$$

$$x \in X$$

Sejam as funções $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p$ continuamente diferenciáveis em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $X \subset D$, isto é, X é o conjunto de todos os pontos $x \in D$ que satisfazem (E.2) e (E.3).

O Lagrangeano associado a (P) é definido como sendo

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x) \tag{E.4}$$

Seja x^* uma solução viável de (P). Se existem vetores $\lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ e $\mu^* = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, tais que

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) - \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \tag{E.5}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i=1, \dots, m \tag{E.6}$$

$$\lambda^* \geq 0 \tag{E.7}$$

então x^* é solução de (P).