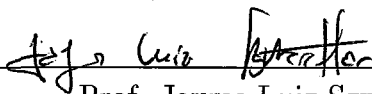


Problemas Separadores para Grafos de Caminho

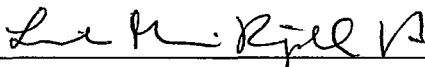
Márcia Rosana Cerioli

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por :



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.
(Presidente)



Prof^a Leila Maria Ripoll Eizirik, D.Sc.



Prof. Oscar Porto, D.Sc.



Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Outubro de 1992

CERIOLI, MÁRCIA ROSANA

Problemas Separadores para Grafos de Caminho [Rio de Janeiro] 1992.

VIII, 78 p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1992)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1 - Algoritmos

2 - Árvores

3 - Grafos de Caminho

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série).

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

Problemas Separadores para Grafos de Caminho

Márcia Rosana Cerioli

Outubro, 1992

Orientador : Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Grafos de interseção são os grafos obtidos de uma família de conjuntos, associando-se a cada conjunto um vértice e, definindo-se que dois vértices são adjacentes se e somente se os conjuntos correspondentes têm interseção não vazia.

De interesse particular são os *grafos cordais*, que são os grafos de interseção de subárvores de uma árvore e os *grafos de intervalo*, que são os grafos de interseção de intervalos na reta real.

Examinamos neste trabalho outras classes de grafos de interseção: as classes dos *grafos de caminho* que são os grafos de interseção de caminhos em uma árvore. Quando a árvore for não direcionada, diremos que se trata de um *grafo de caminho não direcionado*, ou UV. Quando a árvore for direcionada ou direcionada e enraizada dizemos que se trata de um grafo DV ou RDV, respectivamente.

É sabido que $\text{INTERVALO} \subset \text{RDV} \subset \text{DV} \subset \text{UV} \subset \text{CORDAL}$.

Um problema de decisão é dito *separador* para \mathcal{A} e \mathcal{B} , $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, se este problema é NP-Completo quando restrito a \mathcal{A} mas é polinomial quando restrito a \mathcal{B} .

Neste trabalho consideramos *problemas separadores para grafos de caminho*, isto é, problemas separadores em que pelo menos uma das classes envolvidas é de grafos de caminho. Estes problemas são: CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO, separador para UV e RDV; CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO, separador para cordais e UV e CIRCUITO HAMILTONIANO, separador para DV e de intervalo.

Consideramos também o problema ISOMORFISMO DE GRAFOS que é I-Completo para grafos UV mas polinomial para grafos RDV.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

Separation Problems for Path Graphs

Márcia Rosana Cerioli

October, 1992

Thesis Supervisor : Jayme Luiz Szwarcfiter

Department : Computing and Systems Engineering

Intersection graphs are those obtained from a family of sets, associating a vertex with each set of the family. Two vertices are adjacent if and only if the intersection of the corresponding sets is not empty.

Two classes of intersection graphs are of special interest: *chordal graphs* and *interval graphs*. The former are the intersection graphs of subtrees of a tree, while the latter are those for the intervals of a real line.

In this work we examine some other classes of intersection graphs: the classes of *path graphs*, which are the intersection graphs of paths of a tree. When the tree is undirected we obtain an *undirected path graph*, or UV. When the tree is directed or rooted directed then the corresponding graph is called DV or RDV, respectively.

It is known that $\text{INTERVAL} \subset \text{RDV} \subset \text{DV} \subset \text{UV} \subset \text{CHORDAL}$.

A decision problem is called *separating* for \mathcal{A} and \mathcal{B} , $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, if it is NP-Complete when restricted to \mathcal{A} , but polynomial for \mathcal{B} .

In this work we consider separating problems for path graphs, that is, separating problems in which at least one the classes involved is a path graph. The problems are: MINIMUM DOMINATING SET, separating for UV and RDV; MINIMUM DOMINATING CLIQUE, separating for chordal and UV; and HAMILTONIAN CYCLE, separating for DV and interval.

We also consider the GRAPH ISOMORPHISM problem. It is Isomorphism-Complete for UV graphs, but polynomial for RDV.

Índice Geral

1	Introdução	1
2	Definições e Background	5
2.1	Grafos	5
2.2	Digrafos	7
2.3	Grafos de Interseção	9
2.4	Hipergrafos	10
2.5	As Classes P, NP e NP-Completo	11
2.6	Problemas em Grafos	13
3	Grafos de Caminho	15
3.1	Definições e Exemplos	15
3.2	Grafos de Caminho Próprio	20
3.3	Propriedade Helly	21
3.4	Teoremas da Árvore Característica	22
3.5	Problema do Reconhecimento	25
4	O Problema do Conjunto Dominante Mínimo	29
4.1	O Problema do Conjunto Dominante	29
4.2	CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV	31
4.3	CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos RDV	35
4.4	CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos DV	38
5	O Problema do Clique Dominante Mínimo	41
5.1	O Problema do Clique Dominante	41
5.2	CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos cordais	46
5.3	CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV	47
5.4	CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos de intervalo	51
6	O Problema do Circuito Hamiltoniano	55
6.1	O Problema	55

6.2	CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos UV	56
6.3	CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos DV	59
6.4	CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos RDV, cordais e de intervalo	61
6.5	O Problema do Caminho Hamiltoniano	63
7	O Problema do Isomorfismo de Grafos	67
7.1	ISOMORFISMO para grafos UV	68
7.2	ISOMORFISMO para grafos RDV	70
7.3	ISOMORFISMO para grafos de intervalo	70
8	Conclusão	73

Lista de Figuras

2.1	Um grafo, seu grafo clique e seu hipergrafo clique	11
3.1	Grafo UV e uma representação UV	15
3.2	Grafo RDV e uma representação RDV	16
3.3	Grafo DV e uma representação DV	18
3.4	Grafo cordal e árvore de representação	19
3.5	Diagrama das classes dos grafos de caminho	19
3.6	Duas árvores características para um grafo de caminho	23
4.1	Grafo de intervalo	30
4.2	A subárvore correspondente a m_i	33
4.3	A árvore característica do grafo UV	34
4.4	A subárvore não pode ser direcionada.	39
4.5	$prof(C_i) = ?$	39
4.6	Complexidade do CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO	40
5.1	Grafo com cliques dominantes de tamanho 3 e 5 mas sem cliques dominantes de tamanho 4.	45
5.2	Complexidade do CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO	53
6.1	A árvore característica T , do grafo UV, G , obtida do grafo bipartido B	57
6.2	A árvore característica T , do grafo DV, G , obtida do grafo bipartido B	60
6.3	Complexidade do CIRCUITO HAMILTONIANO	62
6.4	A árvore característica T , do grafo UV, G , obtida do grafo bipartido B , para CAMINHO HAMILTONIANO.	64
6.5	A árvore característica T , para o grafo DV, G , obtida do grafo bipartido B , para CAMINHO HAMILTONIANO.	65
7.1	Exemplo da transformação US	69
7.2	Um grafo $US(G)$ degenerado	69

7.3	Complexidade do ISOMORFISMO	71
-----	---------------------------------------	----

Capítulo 1

Introdução

Muitos problemas em ciência da computação podem ser formulados como problemas em grafos. De maneira geral, muitos destes problemas são NP-Completo. A idéia, então é restringir a atenção a classes especiais de grafos para as quais o problema se torne tratável e um algoritmo polinomial que o resolva possa ser desenvolvido.

Um problema de decisão é dito *separador* para duas classes de grafos \mathcal{A} e \mathcal{B} , quando $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e o problema é polinomial quando restrito a \mathcal{B} mas é NP-Completo quando restrito a \mathcal{A} .

Uma maneira usual de obter classes de grafos é considerar grafos definidos pela interseção de elementos de uma família de conjuntos. Estes são os bem conhecidos grafos de interseção, que aparecem em várias aplicações, desde na recuperação de informações até em biologia molécula e arqueologia.

De interesse particular é a classe dos grafos cordais, a classe dos grafos de interseção de subávore de uma árvore. Existem algoritmos lineares, no tamanho do grafo, para encontrar um clique máximo, o número cromático, um conjunto independente máximo e uma cobertura por cliques mínima, em um grafo cordal.

Uma subclasse dos grafos cordais, também muito estudada, é a classe dos grafos de intervalo, os grafos de interseção de famílias de intervalos na reta real. Algoritmos eficientes para encontrar um conjunto dominante mínimo, um clique dominante mínimo, um circuito hamiltoniano e decidir se dois grafos são isomorfos existem para grafos de intervalo. Estes problemas são NP-Completo e Isomorfismo-Completo, respectivamente, para grafos cordais.

Este trabalho examina uma generalização de grafos de intervalo, ou, analogamente, uma restrição de grafos cordais, chamados *grafos de caminho*. Os grafos de caminho são os grafos de interseção de caminhos em uma árvore. Quando a árvore é não direcionada, os grafos são chamados de grafos de ca-

minhos não-direcionados ou UV (*undirected vertex path graphs*). Os grafos de interseção de caminhos em árvores direcionadas, ou enraizadas são os grafos de caminhos direcionados, chamados DV (*directed vertex path graph*) ou RDV (*rooted directed vertex path graph*), respectivamente.

Conclusão imediata das definições é que todo grafo de intervalo é RDV, todo grafo RDV é DV, todo grafo DV é UV e todo grafo UV é cordal.

Neste trabalho descrevemos três problemas separadores para estas classes de grafos, os únicos encontrados na literatura, em que pelo menos uma das classes envolvidas é de grafos de caminho. Descrevemos, ainda, o problema ISOMORFISMO DE GRAFOS que também tem um comportamento “separador” para a classe dos grafos de caminho, embora não tenho sido mostrado, sequer no caso geral, ser NP-Completo.

Esta tese apresenta em linguagem uniforme todos os resultados da literatura referentes a problemas separadores para grafos de caminho. O trabalho, mais completo, anterior a este, é o de Monma e Wei [37], que apresenta somente caracterizações.

Nosso trabalho está organizado em oito capítulos.

O capítulo 1 é esta introdução.

O capítulo 2 contém definições da teoria dos grafos e da teoria da complexidade, utilizadas nos capítulos seguintes e necessárias para o entendimento do texto. Interesse especial é destinado aos grafos de interseção.

O capítulo 3 é destinado a um estudo teórico das classes de grafos de caminho. Começa com as definições e exemplos de grafos de caminho, bem como um resumo histórico de seu surgimento. Segue com o resultado que não são criadas novas classes quando a interseção própria é considerada. A propriedade Helly é apresentada e segue a caracterização básica dos grafos de caminho, que é em termos de sua árvore característica. O capítulo é complementado com um resumo dos principais algoritmos para o problema do reconhecimento para estas classes de grafos.

Os capítulos 4 a 7 são destinados aos problemas separadores de complexidade para grafos de caminho.

O capítulo 4 é destinado ao problema CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO. Para grafos UV é NP-Completo, para grafos RDV é polinomial. Descrevemos nossa breve tentativa de solução para grafos DV, que continua em aberto.

O capítulo 5 é destinado ao problema CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO. Sendo um caso particular do problema anterior, é NP-Completo para grafos cordais mas polinomial para grafos UV. Encerramos o capítulo desenvolvendo um algoritmo linear para encontrar um clique dominante mínimo em um grafo

de intervalo.

O capítulo 6 é destinado ao problema de determinar se um grafo contém um circuito hamiltoniano. Este problema é NP-Completo para grafos UV ou DV estando em aberto para RDV. O capítulo segue com a consideração do problema CAMINHO HAMILTONIANO para estas classes de grafos.

O capítulo 7 considera o problema de isomorfismo de grafos. Inicia com uma breve revisão teórica do que significa um problema ser I-Completo. Reproduzimos a transformação que indica que esta problema é tão difícil quando restrito para grafo UV quanto para o caso geral e encerramos o capítulo citando as direções seguidas por Dietz em sua tese de doutorado, onde conclui que este problema é polinomial para grafos RDV.

Finalmente, o capítulo 8 conclui com uma coletânea dos problemas em aberto apresentados neste trabalho, como forma de sugerir direções para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Definições e Background

Começamos com uma lista das definições básicas de teoria dos grafos, utilizadas neste texto. As notações e definições são extraídas principalmente de [5] e [23].

A seguir, revisamos as definições de teoria da complexidade, em relação as classes P, NP e NP-Completo de problemas, necessárias para o entendimento do que segue. As notações e formalizações são extraídas principalmente de [17] e [29].

2.1 Grafos

Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e E é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*. Se G é um grafo, V_G e E_G denotarão seu conjunto de vértices e arestas, respectivamente. Se $|V_G| = 1$, G é chamado *trivial*. Um vértice u é *adjacente* a um vértice v em G se $\{u, v\}$ é uma aresta de G . Neste caso também dizemos que u e v são *vizinhos* em G . Na maioria dos casos, denotaremos uma aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv .

O conjunto dos vértices adjacentes a u é denotado $Adj_G(u)$. Um vértice u de G é *isolado* quando $Adj_G(u) = \emptyset$ e é *universal* quando $Adj_G(u) = V_G - \{u\}$. Uma aresta $e = uv$ é *incidente* aos vértices u e v , que são os *extremos* de e . O *grau* de v , $g_G(v)$, é o número de vizinhos de v , isto é, $g_G(v) = |Adj_G(v)|$. Em geral, quando o grafo a que estamos nos referindo for claro no contexto, os subscritos serão omitidos.

A *ordem* de um grafo G é o número de vértices de G . O *tamanho* de G é a soma do número de arestas de G com o número de vértices de G .

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existe uma bijeção ϕ de V_G em V_H tal que a aresta $uv \in E_G$ se e somente se $\phi(u)\phi(v) \in E_H$. A função ϕ é um

isomorfismo de G em H .

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$. Se G é um grafo e $\emptyset \neq X \subseteq V_G$ então o *subgrafo induzido* por X é o subgrafo H de G , tal que $V_H = X$ e E_H é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X . O subgrafo induzido por X é denotado $G[X]$.

Dados H_1 e H_2 dois subgrafos de um grafo G , a *interseção* de H_1 com H_2 , denotada $H_1 \cap H_2$, é o subgrafo H de G tal que $V_H = V_{H_1} \cap V_{H_2}$ e $E_H = E_{H_1} \cap E_{H_2}$.

Um *passaio*, $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, em um grafo é uma seqüência finita e não vazia, cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas e_j , tal que para todo i , $1 \leq i \leq k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que P é um *passaio de v_0 a v_k* , que os vértices v_0 e v_k são os *extremos* de P e que P *passa* por seus vértices e arestas. O inteiro k é o *comprimento* de P . Uma *seção* de P é um passeio que é uma subsequência de termos consecutivos de P . Um *caminho* é um passeio sem vértices repetidos. Se $P = (v_0, a_1, \dots, v_k)$ e $Q = (u_0, b_1, \dots, u_m)$ são passeios e $v_k = u_0$, então a *concatenação* de P com Q , denotada por PQ , é o passeio $(v_0, a_1, \dots, v_k, b_1, \dots, u_m)$. P^{-1} denota o *reverso* de P , e é o passeio $(v_k, a_k, \dots, a_1, v_0)$. Um passeio $P = (v_0, a_1, \dots, v_k)$ fica determinado pela seqüência (v_0, v_1, \dots, v_k) de seus vértices.

Um passeio é *fechado* se tem comprimento diferente de zero e seus extremos coincidem. Um passeio fechado (v_0, v_1, \dots, v_k) , $k > 2$, é um *circuito* se $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ é um caminho.

A *distância* $d(u, v)$ entre dois vértices $u, v \in V_G$ é o comprimento de um menor caminho de u a v em G . Se não existe um caminho de u a v , então $d(u, v)$ é considerada infinita. O *diâmetro* de G é o valor $diam(G) = \max\{d(u, v) / u, v \in V_G\}$.

Por convenção, a palavra ‘passaio’ (‘caminho’, ‘circuito’) também será usada para denotar um grafo (ou subgrafo) cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (caminho, circuito).

Um grafo G é *conexo* se, para todo par de vértices distintos u, v em G , existe um caminho de u a v . Um *componente conexo* de G é um subgrafo conexo maximal de G . Um grafo G é *desconexo*, se não for conexo.

Uma *árvore* é um grafo conexo sem circuitos. Um subgrafo de uma árvore que também é uma árvore é chamado *subárvore*. Um vértice de grau 1 em uma árvore é chamado *folha*.

Sejam u e v vértices de uma árvore T , de forma que u e v sejam vizinhos. A operação de *identificação* de u e v consiste em retirar de T a aresta uv e substituir os vértices u e v por um novo vértice x de forma que $Adj(x) =$

$Adj(u) \cup Adj(v) - \{u, v\}$.

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com n vértices, tal grafo é denotado K_n .

Dados $A, B \subseteq V_G$, dizemos que A *domina* B se todo vértice de $B - A$ é adjacente a algum vértice de A . Um conjunto $V' \subseteq V_G$ é *dominante* em G se V' domina V_G .

Um grafo é *bipartido* se V_G pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V_G$ e $X \cap Y = \emptyset$), tais que cada aresta tem um extremo em X e outro em Y . Uma tal partição (X, Y) é chamada uma *bipartição* do grafo.

Se G é um grafo, o *complemento* de G , denotado \bar{G} é o grafo onde $V_{\bar{G}} = V_G$ e para todos $u, v \in V_G$, tais que $u \neq v$, $uv \in E_{\bar{G}}$ se e somente se $uv \notin E_G$.

Um conjunto de vértices $X \subseteq V_G$ é um *clique* se $G[X]$ é um grafo completo. X é um *conjunto estável* se X em \bar{G} é um clique.

Uma *k-estrela* é uma árvore com $k + 1$ vértices onde um vértice u é universal. O vértice u acima é chamado *central*.

Um grafo é *split* se V_G pode ser particionado em dois conjuntos X e Y , tais que X é um clique e Y é um conjunto estável.

Se $C = (v_0, e_1, \dots, v_k)$ é um circuito em G e $e = uv \in E_G$, então e é uma *corda* em C se u e v são vértices de C e $e \neq e_i$, para todo $i = 1, \dots, k$. Um grafo G é *cordal* se para todo circuito C em G com pelo menos quatro vértices, existe uma corda em C . Grafos cordais também são chamados de grafos *triangularizados*, *circuito rígidos* ou *de eliminação perfeita*. É fácil verificar que todo grafo split é cordal.

Uma *coloração* de V_G é uma partição de V_G em conjuntos estáveis. Um grafo G é *perfeito* quando todo subgrafo induzido de G admite uma coloração e um clique de mesma cardinalidade. Neste caso, a coloração é mínima e o clique é máximo. Berge, em 1960, provou que todo grafo cordal é perfeito.

Um conjunto $M \subseteq E_G$ é um *emparelhamento* em G se cada vértice de V_G é extremo de no máximo uma aresta de M . Um conjunto $M \subseteq E_G$ é uma *cobertura de vértices por arestas* se todo vértice de V é incidente a pelo menos uma aresta de M .

2.2 Digrafos

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* é um par ordenado $D = (V, E)$, onde V é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e E é um conjunto de pares ordenados de vértices distintos, chamados *arestas* ou *arcos*. Se D é um digrafo,

V_D e E_D denotarão seu conjunto de vértices e arestas, respectivamente. Se $|V_D| = 1$, D é chamado *trivial*. Em muitos textos sobre teoria dos grafos, os grafos apresentados na seção anterior são também chamados *grafos não direcionados*, aqui usaremos exclusivamente a palavra *grafo*.

Um arco $a = (u, v)$ é *incidente* aos vértices u e v , que são os *extremos* de a . Além disso, dizemos que a aresta a *sai* de u e *entra* em v . O *grau de entrada* de v é o número de arestas que entram em v . O *grau de saída* de v é o número de arestas que saem de v . Se o grau de entrada de um vértice v é nulo, v é chamado *fonte*. Se o grau de saída de um vértice v é nulo, v é chamado *sumidouro*.

Dois digrafos D e D' são *isomorfos* se existe uma bijeção ϕ de V_D em $V_{D'}$, tal que o arco $(u, v) \in E_D$ se, e somente se, $(\phi(u), \phi(v)) \in E_{D'}$. A função ϕ é um *isomorfismo* de D em D' .

As definições de *subgrafo*, *subgrafo induzido* por um conjunto de vértices e de *interseção* de subgrafos são as mesmas que para grafos, resguardadas as direções das arestas.

Um *passeio direcionado* em um digrafo D é um seqüência finita e não vazia, $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, de forma que $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E_D$, $1 \leq i \leq k$. Um passeio direcionado cujo primeiro vértice é u e o último vértice é v é chamado um (u, v) -*passeio*. O inteiro k é o *comprimento* de P . Uma *seção* de P é um passeio direcionado que é uma subseqüência de termos consecutivos de P . Um *caminho direcionado* é um passeio direcionado sem vértices repetidos. Um passeio direcionado é *fechado* se tem comprimento diferente de zero e seus extremos coincidem. Um caminho direcionado fechado é um *circuito direcionado*. Por convenção, a palavra ‘passeio’ (‘caminho’, ‘circuito’) direcionado também será usada para denotar um grafo (ou subgrafo) direcionado cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (caminho, circuito) direcionado.

Um *grafo direcionado acíclico* é um digrafo D sem circuitos. Em um digrafo acíclico D , um vértice u é *ancestral* de v (e v é *descendente* de u) se existe um (u, v) -caminho direcionado em D , caso contrário, u e v são *não relacionados*. Se u é ancestral de v e $(u, v) \in E_D$ então u é *pai* de v e v é *filho* de u .

Seja D um digrafo acíclico. Se forem desconsideradas as direções das arestas de D , obtém-se um grafo, chamado *grafo subjacente* a D .

Quando o grafo subjacente a um digrafo D for uma árvore, D será uma *árvore direcionada*.

Uma *árvore enraizada* é um árvore direcionada na qual todos os vértices

têm grau de entrada 1, exceto um, a *raiz*, que é fonte. Um vértice de uma árvore enraizada é chamado *folha* se for um sumidouro.

A operação de *identificação* de dois vértices vizinhos em uma árvore direcionada é análoga ao caso de árvore.

2.3 Grafos de Interseção

Uma *família* $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ é uma coleção de elementos indexados, não necessariamente distintos. I é chamado o *conjunto de índices* de \mathcal{F} e é denotado $I(\mathcal{F})$. No presente texto consideraremos somente famílias finitas em que nenhum de seus elementos é o conjunto vazio.

Uma família \mathcal{F} é uma *representação da interseção* de um grafo G ou, simplesmente, uma *representação* de G , se $I(\mathcal{F}) = V_G$ e para todo par de vértices distintos x e y em V_G , $F_x \cap F_y \neq \emptyset$ se e somente se x e y são adjacentes em G . Neste caso, G é o *grafo de interseção* da família \mathcal{F} .

Uma família \mathcal{F} é *própria* se, para todo par de elementos distintos de \mathcal{F} , nenhum é subconjunto próprio de outro.

Quando \mathcal{F} é uma família de conjuntos arbitrários, a classe de grafos obtida como grafos de interseção é, simplesmente, a classe de todos os grafos (Marczewski, 1945).

Dada uma classe de grafos, \mathcal{C} , Scheinerman [42] fornece condições necessárias e suficientes sobre \mathcal{C} , para a existência, para todo grafo G de \mathcal{C} , de uma família \mathcal{F} , tal que \mathcal{F} é uma representação de G .

O problema de caracterizar os grafos de interseção de famílias de conjuntos tendo alguma topologia específica é interessante do ponto de vista teórico e, freqüentemente, tem aplicações no mundo real.

Um *grafo de intervalo* é o grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real. Um *grafo de intervalo próprio* é o grafo de interseção de uma família própria de intervalos da reta real. Um *grafo de intervalo unitário* é o grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real, de forma que todo intervalo tenha comprimento unitário. Roberts, em 1969, mostrou que as classes de grafos de intervalo próprio e de intervalo unitário coincidem. Estes grafos também são chamados *indiferença*.

Um grafo é *arco-circular* se é o grafo de interseção de uma família de arcos de um círculo. Um grafo é *arco-circular próprio* se é o grafo de interseção de uma família própria de arcos de um círculo.

Um grafo é *círculo* se é o grafo de interseção de uma família de cordas de um círculo.

Um grafo é *clique* se é o grafo de interseção dos cliques maximais de um grafo.

Mais especificamente, dado um grafo G (direcionado ou não) que possui um determinado padrão, é interessante caracterizar os grafos de interseção de famílias de subgrafos de G que possuem uma estrutura específica. Neste caso, uma *representação* de G é dada pelo par (G, \mathcal{F}) onde os elementos da família \mathcal{F} são subgrafos de G . Por exemplo, os grafos de interseção de famílias de subárvores de uma árvore, são chamados de *grafos de subárvore*. Gavril, Walter e Buneman [20,23] mostraram, independentemente, que um grafo é cordal se e somente se é grafo de subárvore.

Os grafos de intervalo podem ser considerados como os grafos de interseção de seções de um caminho. E os grafos indiferença como os grafos de interseção de seções de um caminho, todas de um comprimento fixo, k .

Renz [40], foi o primeiro a considerar os grafos de interseção de caminhos em uma árvore. Atualmente, esta classe é chamada UV e, em conjunto com as classes DV e RDV, a serem definidas, são chamadas de *grafos de caminho*. Estas classes são o objeto de estudo do presente trabalho.

2.4 Hipergrafos

Um *hipergrafo* é um par ordenado $H = (V, E)$ onde V é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e E é uma família de conjuntos de vértices, chamados *arestas*.

Quando cada um dos conjuntos de E tem exatamente dois elementos, H é um grafo.

O *hipergrafo clique* de um grafo $G = (V, E)$ é o hipergrafo $H(G) = (V, \mathbf{C})$, onde \mathbf{C} é o conjunto dos cliques maximais de G .

Observe que, claramente, o hipergrafo clique $H(G)$ e o grafo clique $K(G)$ de um grafo G não coincidem. A figura 2.1 ilustra ambos os hipergrafos.

O *dual* de um hipergrafo $H = (V, E)$ é o hipergrafo $H^* = (I(E), E')$ onde $I(E)$ é o conjunto de índices de E e $E' = \{\{E/v_i \in E\}, v_i \in V\}$.

Por exemplo, para o grafo G , dado por

$$V_G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_G = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\},$$

temos que seu hipergrafo clique $H(G)$ é dado por:

$$V_{H(G)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

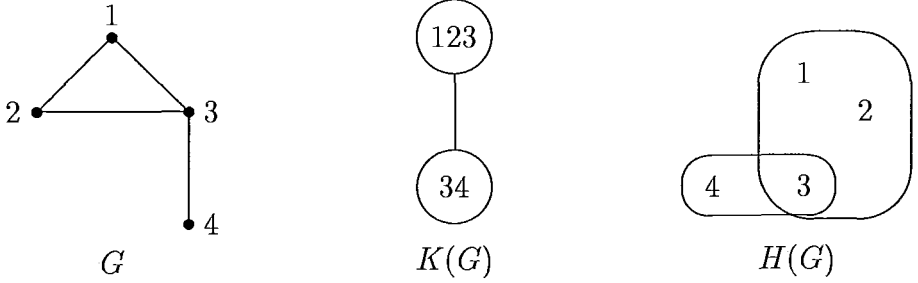


Figura 2.1: Um grafo, seu grafo clique e seu hipergrafo clique

$$E_{H(G)} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}\}.$$

Considerando $a = \{1, 2, 3\}$, $b = \{2, 4, 5\}$, $c = \{3, 5, 6\}$, $d = \{2, 3, 5\}$, temos que o dual de $H(G)$, é o hipergrafo H^* , dado por:

$$V_{H^*} = \{a, b, c, d\}$$

$$E_{H^*} = \{\{a\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b\}, \{b, c, d\}, \{c\}\}.$$

Um hipergrafo $H = (V, E)$ é *RDV*, se existe uma árvore enraizada T com vértices V_H , na qual cada aresta em E_H induz um caminho direcionado.

É claro que nem todo hipergrafo é RDV. Por exemplo, para o hipergrafo $H = (V, E)$ onde $V_H = \{a, b, c, d\}$ e $E_H = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ não existe árvore enraizada com a propriedade descrita acima pois, no máximo um dos vértices b , c , ou d pode ser pai do vértice a , restando aos outros dois serem filhos. Logo, pelo menos dois vértices devem ser filhos de a e $\{a, b, c, d\}$ não pode induzir um caminho direcionado.

Um trabalho inteiramente destinado ao estudo de hipergrafos é [3]. Nesta seção, apresentamos apenas algumas definições úteis para a compreensão do trabalho de Dietz [15] sobre grafos RDV, uma das classes de grafos de caminho.

2.5 As Classes P, NP e NP-Completo

De um modo geral, um problema (algorítmico) pode ser caracterizado como um conjunto de todos os possíveis dados do problema, denominado *conjunto de instâncias* e uma questão solicitada, denominada *objetivo do problema*. Resolver este tipo de problema consiste em desenvolver um algoritmo, cuja entrada sejam dados específicos do conjunto de instâncias e cuja saída

responda ao objetivo do problema. Sempre que necessário $\pi(D, Q)$ denotará o problema π com conjunto de instâncias D e questão Q . Seja $I \in D$, $\pi(I)$ denotará a questão Q aplicada a I .

Por exemplo, o problema de verificar se um grafo é ou não um grafo cordal, pode ser esquematizado como segue:

Problema: RECONHECIMENTO DE GRAFOS CORDAIS

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Questão: O grafo G é cordal?

Um problema é de *decisão* quando o objetivo consiste em decidir a resposta SIM ou NÃO a uma questão.

Um algoritmo é *eficiente* ou *polinomial* quando sua complexidade de tempo é uma função polinomial nos tamanhos dos dados de entrada. A classe de problemas de decisão para os quais existem algoritmos eficientes que o resolvam é chamada de *polinomial*, e é denotada P.

Seja π um problema de decisão. Se é dada uma justificativa J para a resposta SIM do problema e existe um algoritmo eficiente para reconhecer que J está correta e a entrada deste algoritmo é formada pelo par J e a entrada de π , então π pertence a classe de problemas NP.

É imediata a conclusão que $P \subseteq NP$ e conjectura-se que $P \neq NP$.

Dados $\pi_1(D_1, Q_1)$ e $\pi_2(D_2, Q_2)$ dois problemas de decisão, uma *transformação polinomial* de π_1 em π_2 é uma função $f : D_1 \rightarrow D_2$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. f pode ser computada em tempo polinomial, e
2. para toda instância $I \in D_1$ do problema π_1 , tem-se que $\pi_1(I)$ possui resposta SIM se e somente se $\pi_2(f(I))$ possui resposta SIM.

A definição acima nos diz que se existe uma transformação polinomial de um problema de decisão π_1 em um problema de decisão π_2 , então a existência de um algoritmo eficiente que resolva π_2 implicará na existência de um algoritmo eficiente que resolva π_1 . De fato, dada uma instância $I \in D_1$, aplicando a transformação f a I , teremos $f(I)$ uma instância de π_2 . Agora, a solução encontrada aplicando-se o algoritmo dado a $f(I)$ é a solução de π_1 para a instância I .

Um problema de decisão π pertence a classe NP-Completo quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\pi \in \text{NP}$,
2. para todo problema $\pi' \in \text{NP}$ existe uma transformação polinomial de π' em π .

Observamos que esta definição indica que se algum problema em NP-Completo puder ser resolvido em tempo polinomial, então todo problema em NP também admitirá um algoritmo polinomial e, conseqüentemente, $P = \text{NP}$. A classe NP-Completo é, então, a classe dos problemas mais “difíceis” entre todos os problemas em NP.

Sejam $\pi_1(D_1, Q)$ e $\pi_2(D_2, Q)$ dois problemas em NP, tais que $D_2 \subset D_1$. Decorrem das definições acima as seguintes relações:

1. Se $\pi_1 \in P$, então $\pi_2 \in P$.
2. Se $\pi_2 \in \text{NP-Completo}$, então $\pi_1 \in \text{NP-Completo}$.

Como é usual, um problema em P será chamado *polinomial* e um problema em NP-Completo será chamado *NP-Completo*.

Um livro dedicado a este assunto é [17], o qual contém também uma lista com centenas de problemas NP-Completo. Informações atualizadas sobre novidades na área da complexidade de problemas podem ser obtidas na Coluna do Johnson, no *Journal of Algorithms*, a partir de 1981. A 16ª edição desta coluna, em especial, é dedicada exclusivamente a problemas em grafos [29]. Já [30] apresenta atualizações na coluna [29].

2.6 Problemas em Grafos

Uma tarefa importante na investigação de problemas (algorítmicos) em grafos é encontrar classes tão grandes quanto possível, de grafos, tais que problemas NP-Completo quando considerados para grafos gerais, sejam polinomiais quando restritos a estas classes. Por outro lado, também é de interesse encontrar classes tão pequenas quanto possível, para as quais o problema permaneça NP-Completo.

A noção de “separação em complexidade” de classes de grafos, introduzida por Johnson em [29] tem exatamente o intuito de “medir” o quanto duas classes de grafos \mathcal{A} e \mathcal{B} , $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, são “separáveis em complexidade”, isto é, quantos problemas são NP-Completos quando restritos a classe \mathcal{A} mas são polinomiais quando restritos a classe \mathcal{B} . A estes problemas, Johnson chamou *problemas separadores para \mathcal{A} e \mathcal{B}* .

Neste trabalho apresentamos em detalhes os únicos exemplos, encontrados na literatura, de problemas separadores em que pelo menos uma das classes envolvidas é um grafo de caminho. Estes problemas são: CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO, separador para UV e RDV; CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO, separador para cordal e UV e CIRCUITO HAMILTONIANO, separador para DV e de intervalo.

Em último lugar, consideramos o problema de ISOMORFISMO de grafos de caminho, onde verificamos que avaliar se dois grafos UV são isomorfos é tão difícil quanto no caso geral enquanto que, para grafos RDV, existe um algoritmo polinomial.

Capítulo 3

Grafos de Caminho

Neste capítulo apresentamos detalhadamente os grafos de caminho, bem como os resultados teóricos e caracterizações necessários para o desenvolvimento dos algoritmos dos capítulos que seguem.

3.1 Definições e Exemplos

Um grafo $G = (V, E)$ é dito *UV* se é o grafo de interseção de uma família de caminhos em uma árvore. A sigla UV vem do inglês, *undirected vertex*, deixando claro que a interseção dos caminhos é não vazia somente quando os caminhos contém pelo menos um vértice em comum e que tanto a árvore quanto os caminhos são não direcionados.

A figura 3.1 mostra um grafo G , uma árvore T e uma família de caminhos $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ em T , de forma que o grafo de caminho obtido de (T, \mathcal{P}) é G . Logo, G é um grafo UV.

Peter Renz [40], em 1970, foi o primeiro a considerar a classe dos grafos

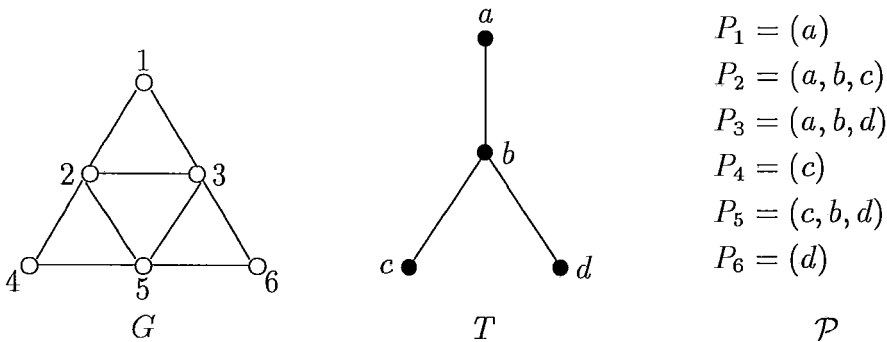


Figura 3.1: Grafo UV e uma representação UV

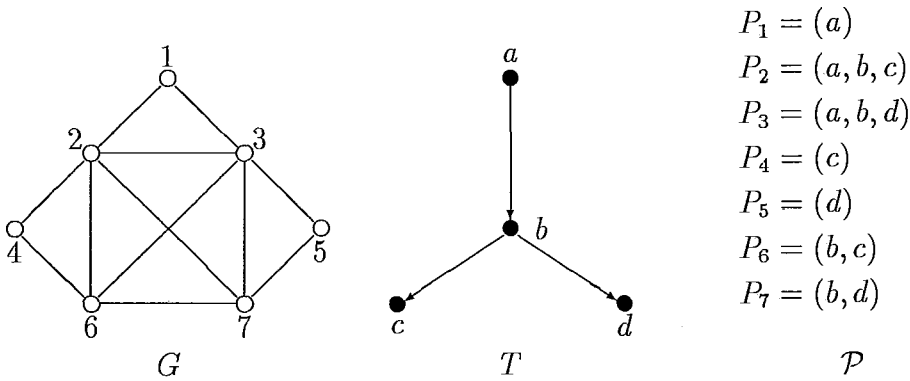


Figura 3.2: Grafo RDV e uma representação RDV

de interseção de caminhos em árvores. Ele chamou esta classe de *grafos de caminho* e deu uma caracterização não algorítmica para estes grafos. No mesmo artigo, Renz propôs o problema de encontrar um algoritmo eficiente para o reconhecimento de grafos UV.

Como um grafo cordal é um grafo de interseção de subárvores em uma árvore, no caso particular em que toda subárvore é um caminho, temos um grafo UV. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Todo grafo UV é um grafo cordal.*

Dada uma árvore T e \mathcal{P} uma família de caminhos em T , o par (T, \mathcal{P}) , que representa G é chamado uma *representação UV* de G .

Um grafo $G = (V, E)$ é dito *RDV* se é o grafo de interseção de uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada. A sigla RDV vem do inglês, *rooted directed vertex*, deixando claro a que tipo de interseção e a que tipo de caminhos se refere.

Na figura 3.2 temos um grafo G , uma árvore enraizada T e uma família de caminhos direcionados $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ em T , de forma a mostrar que G é um grafo RDV.

Tal par (T, \mathcal{P}) para um grafo RDV é chamado de *representação RDV* de G .

É claro que desconsiderando-se as direções das arestas de T e dos caminhos em \mathcal{P} , uma representação RDV é também uma representação UV para o mesmo grafo, o que conclui o seguinte:

Teorema 3.2 *Todo grafo RDV é um grafo UV.*

A recíproca, no entanto, não é verdadeira. O grafo da figura 3.1 é um grafo UV mas não é RDV pois, a menos de isomorfismo, o par (T, \mathcal{P}) é a única representação UV para G e não há como escolher uma raiz para T de modo a todos os caminhos em \mathcal{P} serem direcionados.

F. Gavril [21], em 1974, foi o primeiro a considerar esta classe de grafos, já apresentando uma caracterização de modo a obter um algoritmo eficiente para o problema do reconhecimento.

Também foi Gavril [22], em 1978, quem resolveu o problema proposto por Renz, apresentando uma caracterização para grafos UV que conduz a um algoritmo eficiente para seu reconhecimento.

Tanto as caracterizações quanto os algoritmos propostos por Gavril são muito parecidos e serão detalhados nas seções seguintes deste capítulo.

Um grafo de intervalo pode ser visto como um grafo de interseção de caminhos em um caminho, bastando, para isto, associar um vértice a cada ponto da reta real que é o início ou fim de algum intervalo. Como é fácil direcionar as arestas de um caminho de forma que todos seus subcaminhos também sejam direcionados, podemos concluir o seguinte:

Teorema 3.3 *Todo grafo de intervalo é um grafo RDV.*

A figura 3.2 mostra que nem todo grafo RDV é de intervalo.

Finalmente, os grafos DV , são os grafos de interseção de caminhos em uma árvore direcionada. Seu nome vem do inglês *directed vertex*, deixando claro que a interseção é considerada em caminhos direcionados, em uma árvore direcionada, que têm pelo menos um vértice em comum.

A figura 3.3 mostra um grafo G , uma árvore direcionada T e uma família de caminhos $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$, de forma que (T, \mathcal{P}) representa G .

Para um grafo DV , um par (T, \mathcal{P}) que o representa é chamado de *representação DV* de G .

Os grafos DV foram considerados pela primeira vez por Monma e Wei [37], em 1986, e foram eles que introduziram a terminologia UV, DV e RDV. Antes deles, os grafos UV eram chamados de *grafos de caminhos não direcionados* e os grafos RDV eram chamados de *grafos de caminhos direcionados*. Neste mesmo artigo, outras três classes de grafos foram consideradas: UE, DE, RDE, onde a interseção de dois caminhos é não vazia se e somente se eles têm pelo menos uma aresta em comum. A consideração de arestas ao invés de vértices na interseção dos caminhos gera três classes de grafos com comportamento completamente diferenciado dos similares UV, DV e RDV,

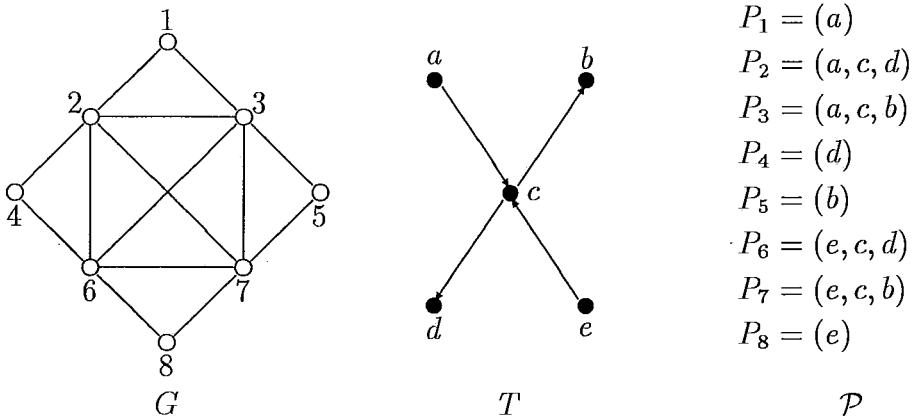


Figura 3.3: Grafo DV e uma representação DV

e só foram citadas neste texto como justificativa da necessidade do “V” nas siglas UV, DV e RDV.

Como toda representação RDV é uma representação DV, temos:

Teorema 3.4 *Todo grafo RDV é um grafo DV.*

O grafo da figura 3.3 mostra que a recíproca não é verdadeira, pois a direção das arestas de T não podem ser modificadas para transformar T em uma árvore enraizada e T é única, a menos de isomorfismo.

Como para grafos RDV, é fácil ver que uma representação DV pode ser transformada em uma representação UV apenas desconsiderando-se as direções. Isto leva a seguinte conclusão:

Teorema 3.5 *Todo grafo DV é um grafo UV.*

Mas a inclusão das duas classes é própria pois o grafo UV da figura 3.1 não é DV pois, nenhuma escolha para as direções das arestas de T produziria caminhos direcionados e T é única, a menos de isomorfismo.

Finalmente, o grafo cordal da figura 3.4 não é um grafo UV. Uma representação cordal para tal grafo pode ser obtida da representação UV da figura 3.1 acrescentando-se a própria subárvore T a família \mathcal{P} .

A figura 3.5 resume os resultados desta seção.

Considere um grafo desconexo G e sejam G_1, \dots, G_k seus componentes conexos. Vamos assumir que para todo G_i , $1 \leq i \leq k$, existe (T_i, \mathcal{P}_i) , uma representação RDV de G_i . Então, obtemos (T, \mathcal{P}) , uma representação RDV

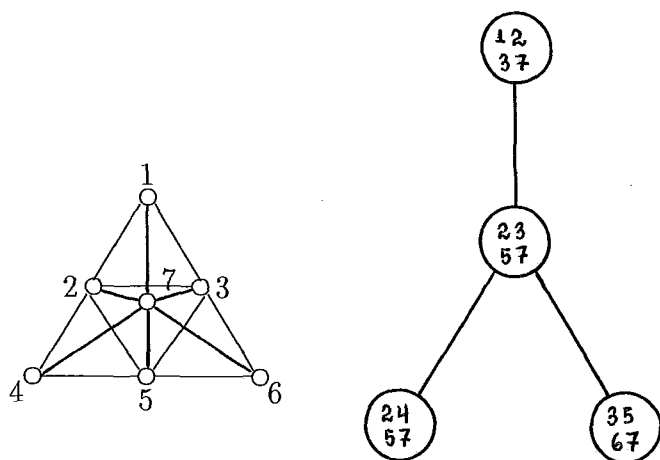


Figura 3.4: Grafo cordal e árvore de representação

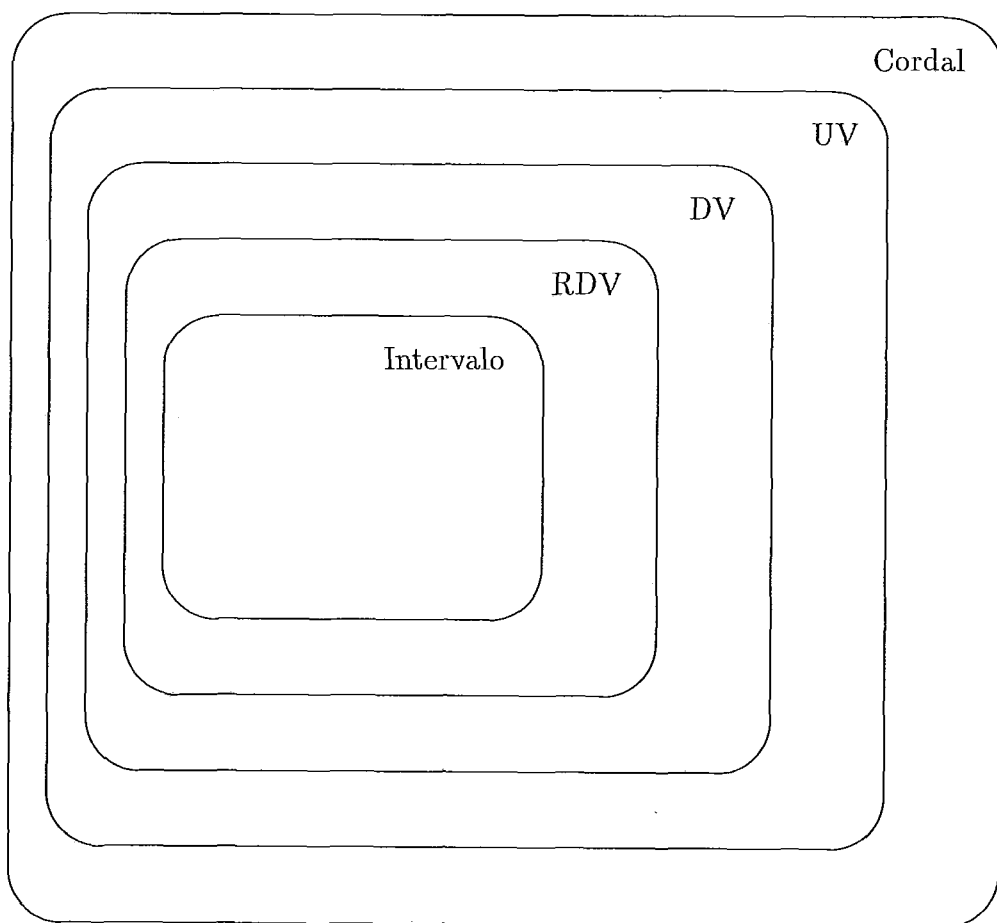


Figura 3.5: Diagrama das classes dos grafos de caminho

de G , do seguinte modo: acrescentamos para todo i , $1 \leq i < k$, uma aresta de uma folha de T_i para a raiz de T_{i+1} , obtendo T e consideramos $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$. Portanto, para fins de representação, podemos nos restringir somente a grafos conexos.

É claro que esta observação também é válida para representações DV e UV pois, nestes casos, basta acrescentar uma aresta de um vértice qualquer de T_i para um vértice qualquer de T_{i+1} , $1 \leq i < k$.

Portanto, a menos de menção explícita em contrário, todos os grafos de caminho considerados no texto são conexos.

3.2 Grafos de Caminho Próprio

Por analogia a grafos de intervalo próprio ou grafos arco-circulares próprio, é interessante considerar grafos de caminho próprio, isto é, grafos de interseção de famílias próprias de caminhos (direcionados) em uma árvore (direcionada ou enraizada).

Gavril considerou grafos RDV e UV próprios, já em seus artigos de caracterização de grafos RDV e UV. Os próximos teoremas mostram que não são criadas novas classes de grafos, ao serem consideradas somente as famílias de caminhos (direcionados ou não) próprias e portanto, não é necessário considerá-las separadamente.

Teorema 3.6 (Gavril, 1975) *Um grafo G é RDV se e somente se G é RDV próprio.*

Prova:

(\Leftarrow) É claro que uma representação RDV própria é também uma representação RDV.

(\Rightarrow) Seja (T, \mathcal{P}) uma representação RDV de G e $|V_G| = n$. Para cada caminho direcionado $P_i \in \mathcal{P}$, $1 \leq i \leq n$, seja u_i seu último vértice. Seja T' a árvore enraizada obtida de T da seguinte maneira: acrescente n vértices diferentes w_1, \dots, w_n , com as n arestas (u_i, w_i) , $1 \leq i \leq n$. Para todo i , seja P'_i o caminho direcionado obtido pela concatenação de P_i com o caminho, de uma só aresta, $(u_i, (u_i, w_i), w_i)$.

Claramente, G é o grafo de interseção da família $\mathcal{P}' = \cup_{i=1}^n P'_i$. Mas \mathcal{P}' é uma família própria. Logo, G é também um grafo RDV próprio. ■

Teorema 3.7 *Um grafo G é DV se e somente se G é DV próprio.*

Prova:

Mesma prova do teorema 3.6, bastando substituir a ocorrência das palavras ‘RDV’ por ‘DV’ e ‘enraizada’ por ‘direcionada’.

Teorema 3.8 (Gavril, 1978) *Um grafo G é UV se e somente se G é UV próprio.*

Prova:

Mesma prova do teorema 3.6, bastando substituir a ocorrência das palavras ‘RDV’ por ‘UV’ e suprimir todas as ocorrências das palavras ‘enraizada’ e ‘direcionado’.

3.3 Propriedade Helly

Dada uma família $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$, dizemos que \mathcal{F} *satisfaz a propriedade Helly* quando para todos $J \subseteq I$, $i, j \in J$, se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, então $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$.

Gavril [20], em 1974, mostrou que se \mathcal{F} é uma família de subárvores de uma árvore, então \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly. Vamos mostrar que as famílias que representam grafos UV, DV e RDV também satisfazem a propriedade Helly. Estes resultados aparecem em [21] e [22].

Lema 3.1 (Gavril, 1975) *Uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada satisfaz a propriedade Helly.*

Prova:

Sejam $\mathcal{F} = \{T_i : i \in I\}$ uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada T e $J \subseteq I$.

A prova é por indução em $|J|$.

Base: Se $|J| = 1$ ou $|J| = 2$ é claro que $[\forall i, j \in J, T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j \in J} T_j \neq \emptyset]$.

Hipótese: Se $|J| \leq k$ então $[\forall i, j \in J, T_i \cap T_j \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{j \in J} T_j \neq \emptyset]$.

Passo: Seja $J = \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subseteq I$, $k \geq 2$, de forma que $\forall i, j \in J, T_i \cap T_j \neq \emptyset$.

Então, pela hipótese de indução, existem caminhos direcionados s_1, s_2 e s_3 em T tais que:

$$s_1 = \bigcap_{j=1}^k T_{i_j} \neq \emptyset, \quad s_2 = \bigcap_{j=2}^{k+1} T_{i_j} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad s_3 = T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}} \neq \emptyset.$$

Além disso, $s_1 \cap s_2 \cap s_3 \neq \emptyset$ pois, caso contrário, a árvore subjacente a T conteria um circuito. Como $s_1 \cap s_2 \cap s_3 \subseteq \bigcap_{j=1}^{k+1} T_{i_j}$, temos que $\bigcap_{j=1}^{k+1} T_{i_j} \neq \emptyset$.

Lema 3.2 *Uma família de caminhos direcionados em uma árvore direcionada satisfaz a propriedade Helly.*

Prova:

Mesma prova do lema 3.1, bastando substituir a ocorrência da palavra ‘enraizada’ por ‘direcionada’.

Lema 3.3 (Gavril, 1978) *Uma família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly.*

Prova:

Mesma prova do lema 3.1, bastando suprimir todas as ocorrências das palavras ‘direcionado’, ‘enraizada’ e ‘subjacente a’.

A caracterização de Renz para grafos UV pode ser finalmente enunciada: *Um grafo G é UV se e somente se G é cordal e G é o grafo de interseção de uma família \mathcal{F} de caminhos em um grafo tal que \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly.*

3.4 Teoremas da Árvore Característica

Nesta seção vamos considerar uma caracterização para os grafos de caminho, e também para grafos de intervalo e cordais que vai produzir um método eficiente de resolver alguns problemas em grafos de caminho.

Dado um grafo $G = (V, E)$, denotamos por \mathbf{C} o conjunto de todos os cliques maximais de G e, para todo $v \in V$, denotamos por \mathbf{C}_v o conjunto de todos os cliques maximais de G que contém o vértice v .

É bem conhecido que um grafo cordal $G = (V, E)$ tem no máximo $|V|$ cliques maximais [16,19].

Teorema 3.9 (Gavril, 1975) *Um grafo $G = (V, E)$ é RDV se e somente se existe uma árvore enraizada T , chamada árvore característica de G , tal que $V_T = \mathbf{C}$ e para todo $v \in V_G$, $T[\mathbf{C}_v]$ é um caminho direcionado em T .*

Prova:

(\Leftarrow) Dada T , uma árvore característica de G , tomando $I = V_G = \{1, \dots, n\}$, podemos considerar \mathcal{P} , a família de caminhos direcionados em T , $\mathcal{P} = \{P_i : P_i = T[\mathbf{C}_i], i \in I\}$. (T, \mathcal{P}) será uma representação RDV de G .

(\Rightarrow) Seja (T, \mathcal{P}) uma representação RDV de G , onde T tem o menor número possível de vértices. Observe que todo vértice de T corresponde a um clique

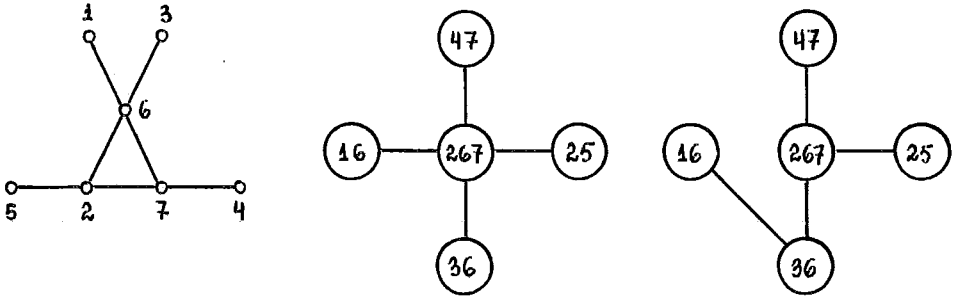


Figura 3.6: Duas árvores características para um grafo de caminho

em G . Vamos mostrar que existe uma bijeção dos vértices de T nos cliques maximais em G .

(*sobrejetividade:*) Dado C , um clique maximal em G , como uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada satisfaz a propriedade Helly (lema 3.1), existe um vértice de T associado a C .

(*injetividade:*) Sejam n_1 e n_2 dois vértices distintos de T e suponha que eles correspondam a dois cliques S_1 e S_2 de G tal que $S_1 \subseteq S_2$. Então, todo caminho direcionado de \mathcal{P} que passa por n_1 passa também por n_2 . Como T é enraizada, vamos supor, spg, que exista um (n_1, n_2) -caminho em T .

Sejam n_3 o vértice adjacente a n_1 no caminho de n_1 a n_2 em T e S_3 o clique associado a n_3 . É fácil ver que $S_1 \subseteq S_3$ (pois os caminhos associados aos vértices de S_1 passam por todos os vértices do (n_1, n_2) -caminho).

Obtenha uma nova árvore T' a partir de T , identificando n_1 e n_3 . Todo caminho direcionado em \mathcal{P} que passa por n_1 também passa por n_3 (pois passa por n_2). Considere \mathcal{P}' a família de caminhos direcionados obtida de \mathcal{P} somente identificando n_1 e n_3 . Então (T', \mathcal{P}') também é uma representação RDV de G só que $|V_{T'}| < |V_T|$, uma contradição. Portanto, os vértices distintos de T correspondem a cliques maximais distintos em G .

Assim, temos $V_T = \mathcal{C}$ e $T[\mathcal{C}_i] = P_i \in \mathcal{P}$ isto é, T é uma árvore característica de G . ■

O teorema acima não caracteriza de maneira única uma árvore característica, pois como pode ser visto na figura 3.6, dado um grafo RDV, $G = (V, E)$, podem existir árvores características de G , não isomorfas.

Teorema 3.10 (Monma e Wei, 1986) *Um grafo $G = (V, E)$ é DV se e*

somente se existe uma árvore direcionada T , chamada árvore característica de G , tal que $V_T = C$ e para todo $v \in V_G$, $T[C_v]$ é um caminho direcionado em T .

Prova:

Mesma prova do teorema 3.9, bastando substituir a ocorrência da palavra ‘enraizada’ por ‘direcionada’ e ‘RDV’ por ‘DV’. ■

Teorema 3.11 (Gavril, 1978) *Um grafo $G = (V, E)$ é UV se e somente se existe uma árvore T , chamada árvore característica de G , tal que $V_T = C$ e para todo $v \in V_G$, $T[C_v]$ é um caminho em T .*

Prova:

Mesma prova do teorema 3.9, bastando suprimir todas as ocorrências das palavras ‘direcionados’, ‘enraizada’ e substituir ‘RDV’ por ‘UV’. ■

As figuras 3.1, 3.2 e 3.3 mostram exemplos de árvores características para os grafos dados. No grafo da figura 3.1 por exemplo, temos que seus cliques maximais são: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 6\}$ bastando considerar, $a = \{1, 2, 3\}$, $b = \{2, 3, 5\}$, $c = \{2, 4, 5\}$ e $d = \{3, 5, 6\}$ para verificar que $T[C_1] = (a)$, $T[C_2] = (a, b, c)$, $T[C_3] = (a, b, d)$, $T[C_4] = (c)$, $T[C_5] = (c, b, d)$ e $T[C_6] = (d)$ são todos caminhos em T .

Note que, pela demonstração dos teoremas da árvore característica, o número de vértices e portanto, das arestas é o menor possível, isto é, dentre todas as árvores que representam G , uma árvore característica é mínima, com relação ao número de vértices.

Uma outra propriedade importante de uma árvore característica T , é que toda folha F de T , contém um vértice v , tal que v não pertence a nenhum outro vértice de T . Isto acontece pois caso contrário, F seria subconjunto de C , o único vértice adjacente a F em T . Mas isto contradiz o fato de todo vértice de T ser um clique maximal.

Note também que devido ao fato de um grafo cordal ter no máximo $|V_G|$ cliques maximais, as árvores características de um grafo de caminho G têm, no máximo $|V_G|$ vértices. Além disso é possível listar todos os vértices dos cliques maximais pois, em um grafo cordal, a soma das cardinalidades dos cliques maximais é, no máximo, $|V_G| + |E_G|$ [19]. Este fato é importante para o desenvolvimento de algoritmos eficientes para a construção e manipulação das árvores características de grafos de caminho.

Não vamos demonstrar aqui mas, os teoremas da árvore característica também são válidos para grafos cordais e de intervalo [20,23].

Teorema 3.12 (Gavril, 1972) *Um grafo $G = (V, E)$ é cordal se e somente se existe uma árvore T , chamada árvore característica de G , tal que $V_T = C$ e para todo $v \in V_G$, $T[C_v]$ é uma subárvore de T .*

Teorema 3.13 (Gillmore e Hoffman, 1964) *Um grafo $G = (V, E)$ é de intervalo se e somente se existe um caminho T , chamado caminho característico de G , tal que $V_T = C$ e para todo $v \in V_G$, $T[C_v]$ é um caminho em T .*

O teorema de Gilmore-Hoffman foi originalmente descrito em forma de matrizes. Uma matriz cujas entradas são zeros e uns é dita ter a *propriedade dos 1's consecutivos para colunas* se suas linhas podem ser permutadas de maneira que os 1's em cada coluna ocorrem consecutivamente. A *matriz de cliques* de um grafo G é a matriz de incidência onde a cada linha corresponde um vértice e cada coluna corresponde a um clique maximal. O teorema de Gilmore-Hoffman tem originalmente o seguinte enunciado: *Um grafo G é de intervalo se e somente se sua matriz de cliques possui a propriedade dos 1's consecutivos.*

3.5 Problema do Reconhecimento

Nesta seção, vamos fazer um resumo de como se comporta o problema do reconhecimento para a classe dos grafos de caminho.

O problema do reconhecimento, para uma determinada classe de grafos \mathcal{C} consiste em, dado um grafo G , decidir se $G \in \mathcal{C}$.

Problema: RECONHECIMENTO CLASSE \mathcal{C}

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Pergunta: $G \in \mathcal{C}$?

Para este problema, nem sempre se conhece uma solução polinomial. É o caso dos grafos perfeitos, por exemplo, que é um famoso problema em aberto. Ou para os grafos *thickness- k* ($k > 1$), onde o problema do reconhecimento é NP-Completo. Um grafo $G = (V, E)$ é *thickness- k* quando seu conjunto de arestas E pode ser particionado em E_1, \dots, E_k de forma que $G = (V, E_i)$, $1 \leq i \leq k$ é planar [29,36].

Para os grafos cordais, no entanto, o problema do reconhecimento foi resolvido em 1976, por Rose, Tarjan e Leuker [23,41] que, fizeram um algoritmo que verifica se um grafo é cordal, com complexidade linear no tamanho do grafo.

Para grafos de intervalo, baseados na caracterização de que suas matrizes de cliques possuem a propriedade dos 1's consecutivos (teorema 3.13), Booth e Leuker, em 1976, desenvolveram um algoritmo que reconhece se um grafo é de intervalo também em tempo linear no tamanho do grafo. A estrutura de dados necessária para testar a propriedade dos 1's consecutivos é a árvore PQ, que foi definida por Booth e Leuker, exatamente para este propósito.

Uma *árvore PQ* é uma árvore enraizada onde os nós internos são de dois tipos: P ou Q. Os filhos de um nó do tipo P não ocorrem em nenhuma ordem particular, enquanto que os filhos de um nó do tipo Q aparecem em ordem, que deve ser preservada. As folhas da árvore PQ estão em bijeção com os cliques maximais do grafo.

A idéia do algoritmo é, dado a família de cliques $\mathcal{F} = \{\{C_{v_i}\}, 1 \leq i \leq n\}$ construir uma árvore PQ de forma que, no final da execução, as folhas da árvore PQ estão na mesma ordem que os vértices de um caminho característico para o grafo. O artigo de Booth e Leuker [8] deve ser consultado para maiores detalhes.

O reconhecimento dos grafos RDV foi resolvido por F. Gavril, em 1975 [21]. Este algoritmo tem complexidade $O(n^4)$ e dá, como resultado, uma árvore característica, no caso afirmativo.

Também foi F. Gavril quem resolveu o problema do reconhecimento para grafos UV [22]. Em 1978, ele apresentou um algoritmo $O(n^4)$ para construir uma árvore característica ou responder que o grafo não é UV.

Ambos os algoritmos de Gavril, têm a seguinte idéia: Primeiro, verifica-se se G é cordal. Se não for, então G não é um grafo de caminho. No caso de G ser cordal, começa-se com uma árvore T_1 , sem vértices. E no estágio m do algoritmo, tem-se a árvore T_m e deseja-se construir a árvore T_{m+1} , como segue. Considera-se um vértice $v \in V_G$ tal que $V_{T_m} \cap C_v \neq \emptyset$ e $C_v \not\subseteq V_{T_m}$. Tenta-se construir um caminho característico com vértices C_v , satisfazendo algumas condições. Se tal caminho não pode ser construído, então G não é um grafo de caminho. Se p é o tal caminho, então obtém-se T_{m+1} , identificando-se vértices apropriados de T_m e p . Continua-se até obter, em algum estágio k , a árvore T_k tal que $V_{T_k} = C$, isto é, ao conjunto dos cliques maximais de G . Então T_k é uma árvore característica de G , e G é um grafo de caminho.

O algoritmo requer $O(n^4)$ passos pois, a construção adequada de p requer $O(n^3)$ passos.

O reconhecimento de grafos DV foi considerado por Monma e Wei, em 1986, no mesmo artigo em que eles consideraram a definição desta classe de grafos [37]. O algoritmo de reconhecimento exibido por eles nesta ocasião

é polinomial mas não constrói uma árvore característica, pois é baseado em outra propriedade estrutural dos grafos de caminho.

Um algoritmo de reconhecimento de grafos RDV, também foi estudado por P. Dietz, em 1984. O algoritmo de Dietz é linear no tamanho do grafo mas tem uma implementação muito complicada pois é baseado em uma estrutura intermediária chamada *árvore de caminhos parciais*. Ele dá procedimentos para construir uma árvore de caminhos parciais com uma determinada raiz, que constrói uma árvore de caminhos parciais com qualquer raiz e que converte uma árvore de caminhos parciais para uma árvore direcionada e enraizada, que é característica para um grafo RDV. Todos estes algoritmos podem ser executados em tempo linear, e usam como subrotina, a construção de árvores PQ para os subgrafos de intervalo.

O método de Dietz é todo escrito em termos do dual do hipergrafo clique do grafo considerado, o que, como foi visto no capítulo 2, nada mais é do que considerar a família $\{C_v, v \in V\}$, isto é, os cliques maximais de G , que contém v , para cada vértice v do grafo.

Capítulo 4

O Problema do Conjunto Dominante Mínimo

Neste capítulo, vamos considerar um exemplo de problema separador para as classes de grafos UV e RDV, que é o problema CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO.

Na primeira seção definimos o problema em si, apresentamos alguns exemplos e um sumário dos resultados básicos.

Na seção seguinte, reproduzimos uma transformação polinomial devida a Booth e Johnson [7] e concluímos que CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO é NP-Completo, mesmo quando restrito a grafos UV.

Na terceira seção, apresentamos um algoritmo polinomial, também encontrado em [7], que determina um conjunto dominante mínimo em um grafo RDV.

Concluimos o capítulo, mostrando que nenhum destes resultados pode ser trivialmente adaptado para decidirmos a que classe de complexidade CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO pertence, quando restrito a grafos DV. Na verdade, este problema continua em aberto.

4.1 O Problema do Conjunto Dominante

Dado um grafo $G = (V, E)$, vamos considerar o problema de encontrar um conjunto $V' \subseteq V$ tal que todo vértice de G que não pertence a V' é adjacente a algum vértice que pertence a V' .

No grafo da figura 4.1, por exemplo, o conjunto $D = \{1, 4, 6\}$ é dominante enquanto que o conjunto $\{1, 3, 6\}$ não é pois, o vértice 4 não é adjacente a nenhum de seus elementos.

É claro que o próprio conjunto V , contendo todos os vértices do grafo,

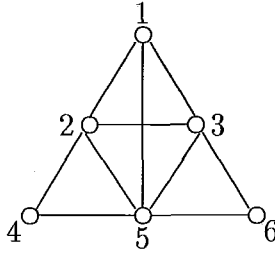


Figura 4.1: Grafo de intervalo

é dominante, e o problema assim, sem restrições, torna-se trivial. Para tornar o problema interessante, podemos restringir o conjunto V' de forma que satisfaça alguma propriedade adicional, por exemplo, ser independente, ser clique ou $G[V']$ ser um circuito sem cordas.

Neste capítulo, vamos considerar o problema com a restrição de que V' seja um conjunto dominante de menor tamanho, entre todos os possíveis conjuntos dominantes. A versão decisão deste problema é:

Problema: CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO

Instância: Um grafo $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Questão: G tem um conjunto dominante V' , tal que $|V'| \leq k$?

Novamente, no grafo da figura 4.1, observamos que $\{1, 4, 6\}$ não é mínimo pois, por exemplo, $\{2, 6\}$ também é um conjunto dominante. Observamos ainda que apesar de $\{2, 6\}$ ser minimal não é mínimo pois $\{5\}$ também é um conjunto dominante sendo 5 um vértice universal.

Claramente, temos que quando um conjunto V' é dominante, todo conjunto que contém V' também é dominante.

O problema CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO é NP-Completo no caso geral, pois é NP-completo para grafos planares com grau máximo 4 [17]. Johnson também dedicou uma seção de sua coluna no *Journal of Algorithms* [28] exclusivamente para CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO. Nesta coluna, de 1984, já era conhecido que o problema é NP-Completo tanto quando restrito a grafos bipartidos quanto para grafos UV e que pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos RDV, fortemente cordais, arco-circulares, série-paralelos e árvores. Em sua coluna de 1985 [29], Johnson acrescentou dois novos resultados, a saber, CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO é NP-Completo para grafos split e polinomial para grafos de permutação.

4.2 CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV

Para mostrar que CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO é NP-Completo para grafos UV, vamos apresentar uma transformação polinomial a partir do problema emparelhamento 3-dimensional, que é reconhecidamente NP-Completo [17].

Esta transformação é devida a K. Booth e H. Johnson, e aparece em [7].

O problema do emparelhamento 3-dimensional, consiste em, dados três conjuntos disjuntos X, Y, Z , com mesma cardinalidade q e M um subconjunto de $X \times Y \times Z$, de cardinalidade p , encontrar M' , um subconjunto de M , tal que $|M'| = q$ e que cada elemento de X, Y ou Z ocorre exatamente em uma tripla de M' . Para ilustrar o conceito, vamos considerar o seguinte exemplo, onde $q = 2$ e $p = 5$:

$$X = \{x_1, x_2\}, \quad Y = \{y_1, y_2\} \quad \text{e} \quad Z = \{z_1, z_2\}$$

$$M = \{(x_1, y_1, z_2), (x_1, y_2, z_1), (x_2, y_2, z_1), (x_2, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$$

Um conjunto M' que satisfaz este problema é:

$$M' = \{(x_1, y_1, z_2), (x_2, y_2, z_1)\}$$

Obviamente, a existência de um conjunto M' satisfazendo as condições do problema, depende do conjunto M considerado. A versão decisão deste problema pode ser enunciada do seguinte modo:

Problema: EMPARELHAMENTO 3-DIMENSIONAL

Instância: X, Y, Z disjuntos, $|X| = |Y| = |Z| = q$, $M \subset X \times Y \times Z$, $|M| = p$.

Questão: Existe $M' \subseteq M$ tal que, para todo $a \in X \cup Y \cup Z$, existe um único $m \in M'$ tal que a é termo de m ?

Podemos assumir que cada elemento de X, Y ou Z ocorre em pelo menos duas triplas de M pois, caso contrário, a única tripla que conteria o elemento deveria estar na solução e poderíamos reduzir o problema a um problema menor.

A idéia da transformação é construir uma árvore característica de um grafo UV, G , a partir dos conjuntos X, Y, Z e M dados, de forma que dado M' , um emparelhamento 3-dimensional, sabemos determinar em tempo

polinomial um conjunto dominante que responde afirmativamente a questão do problema CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO e, reciprocamente.

Temos então, o seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Booth e Johnson, 1982) CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV é NP -Completo.

Prova:

É dada uma transformação polinomial a partir do problema EMPARELHAMENTO 3-DIMENSIONAL, que é NP -Completo [17].

Parte 1: A transformação:

Sejam $X = \{x_1, \dots, x_q\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_q\}$ e $M \subset X \times Y \times Z$, $M = \{m_1, \dots, m_p\}$. O grafo UV , G , será dado através de sua árvore característica T , de acordo com o teorema 3.11.

Tal árvore terá $6p + 3q + 1$ vértices, obtidos da seguinte forma:

Para cada $m_i \in M$, existem seis cliques cujos vértices dependem somente de m_i e não dos elementos que formam m_i . Estes seis cliques formam a subárvore correspondente a m_i , que é ilustrada na figura 4.2. Para $1 \leq i \leq p$, os cliques são:

$$\{A_i, B_i, C_i, D_i\}$$

$$\{A_i, B_i, D_i, F_i\}$$

$$\{C_i, D_i, G_i\}$$

$$\{A_i, B_i, E_i\}$$

$$\{A_i, E_i, H_i\}$$

$$\{B_i, E_i, H_i\}.$$

Para cada elemento de X , Y ou Z , existe um clique que depende de quais triplas de M o elemento pertence:

$$\{J_j\} \cup \{A_i/x_j \in m_i\} \text{ para } 1 \leq j \leq q,$$

$$\{K_k\} \cup \{B_i/y_j \in m_i\} \text{ para } 1 \leq k \leq q,$$

$$\{L_l\} \cup \{C_i/z_j \in m_i\} \text{ para } 1 \leq l \leq q.$$

E, finalmente, há o clique

$$\{A_i, B_i, C_i, 1 \leq i \leq p\}.$$

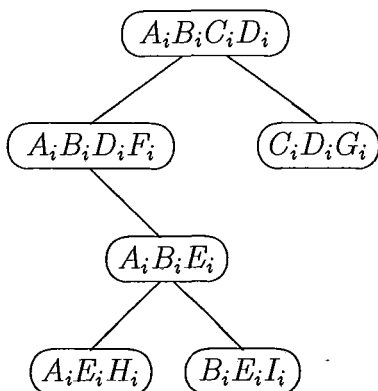


Figura 4.2: A subárvore correspondente a m_i .

A descrição da árvore característica é completada considerando as adjacências dos vértices acima: Os vértices $\{A_i, B_i, C_i, D_i\}$ das subárvores correspondentes a m_i , $1 \leq i \leq p$, são adjacentes ao vértice $\{A_i, B_i, C_i, 1 \leq i \leq p\}$, assim como os vértices que contém J_j, K_k, L_l , $1 \leq j, k, l \leq q$.

Considerando $m_1 = (x_1, y_1, z_2)$, $m_2 = (x_1, y_2, z_1)$, $m_3 = (x_2, y_2, z_1)$, $m_4 = (x_2, y_1, z_1)$ e $m_5 = (x_2, y_2, z_2)$, no exemplo anterior, a figura 4.3 ilustra esta relação de adjacências.

Notamos que os vértices de T , são cliques de G que não estão contidos em nenhum outro vértice de T . Logo, são cliques maximais de G . Notamos também que os grafos induzidos pelos cliques que contém $J_1, \dots, J_q, K_1, \dots, K_q, L_1, \dots, L_q, F_1, \dots, F_q, G_1, \dots, G_p, H_1, \dots, H_p, I_1, \dots, I_p$ são todos triviais, isto é, cada um é formado por um único vértice. Os grafos induzidos pelos cliques que contém $D_1, \dots, D_p, E_1, \dots, E_p$ são caminhos de três vértices. Estes caminhos estão inteiramente contidos nas subárvores correspondentes a m_1, \dots, m_p , respectivamente. Como uma tripla m_i contém um único elemento de X , digamos x_j , o vértice A_i só aparece no clique maximal que contém J_j , entre todos os possíveis cliques maximais que contém algum J . Assim, como na subárvore correspondente a m_i , A_i também induz um caminho, os grafos induzidos em T pelos cliques maximais que contém A_i , $1 \leq i \leq p$, são caminhos. Como uma análise análoga vale para os cliques que contém B_i e C_i , $1 \leq i \leq p$, podemos concluir que a árvore T é, realmente, uma árvore característica de um grafo UV.

É claro que T pode ser construída em tempo polinomial.

Parte 2: Resta mostrar que o problema do emparelhamento 3-dimensional

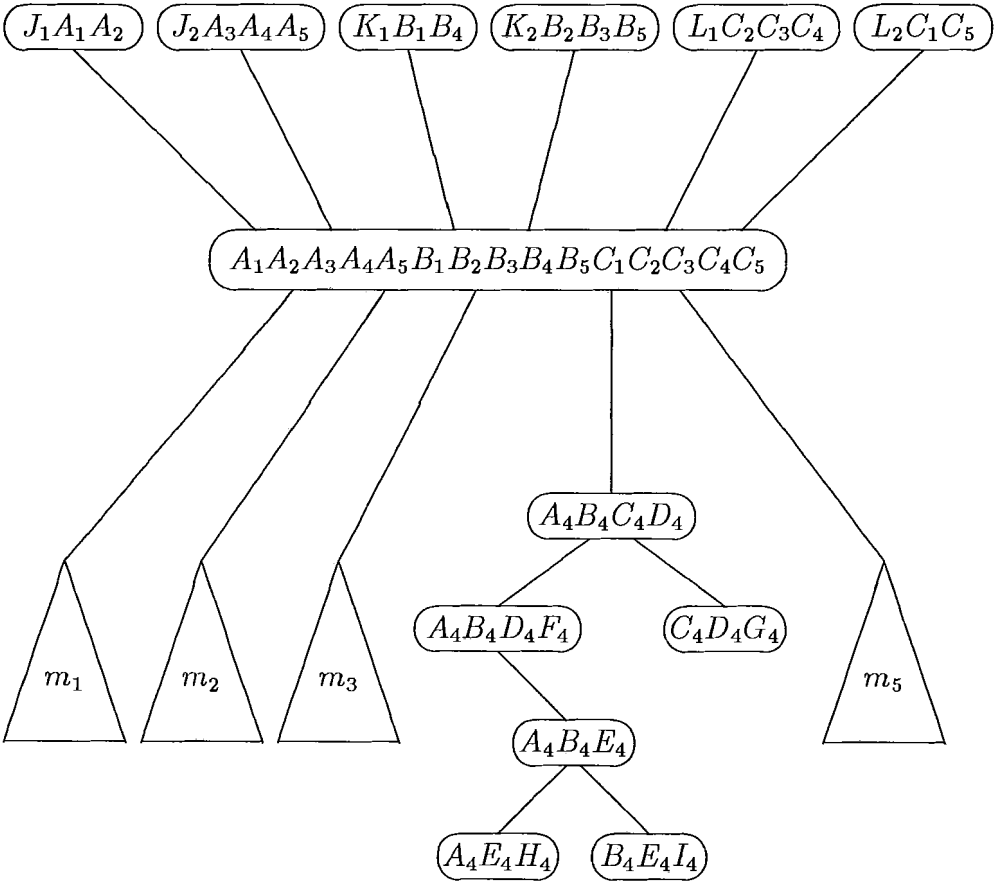


Figura 4.3: A árvore característica do grafo UV

dado tem solução se e somente se o grafo UV, G , tem conjunto dominante de tamanho $2p + q$.

(\Rightarrow) Se M' é um emparelhamento 3-dimensional para o problema dado, basta construir D , um conjunto dominante em G , escolhendo, para cada $m_i \in M'$, os vértices A_i , B_i e C_i e para cada $m_i \in M - M'$, os vértices D_i e E_i . Escolhemos então $3q + 2(p - q) = 2p + q$ vértices. Logo, $|D| = 2p + q$. É fácil verificar que D é, realmente, um conjunto dominante.

No exemplo dado, $D = \{A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3, D_2, E_2, D_4, E_4, D_5, E_5\}$.

(\Leftarrow) Seja D um conjunto dominante em G , de cardinalidade $2p + q$.

Observamos que $\{D_i, E_i\}$ é o único conjunto de cardinalidade 2, que domina os vértices envolvidos na construção da subárvore correspondente a m_i . Por outro lado, existem várias possibilidades de conjuntos de cardinalidade 3 dominarem os vértices envolvidos na formação da subárvore correspondente a m_i . Entre estes, $\{A_i, B_i, C_i\}$ é o mais interessante, pois domina também os vértices fora das subárvores. Logo, para cada i , $1 \leq i \leq p$, ou $\{D_i, E_i\} \subset D$ ou $\{A_i, B_i, C_i\} \subset D$.

Notando que se existem t triplas m_i para os quais A_i, B_i, C_i foram escolhidos em um conjunto dominante de tamanho $2p + q$, e $p - t$ duplas de D_i, E_i escolhidas, temos que $3t + 2(p - t) = 2p + q \Leftrightarrow t = q$.

Logo, escolhendo as q triplas m_i para os quais $A_i, B_i, C_i \in D$, temos uma solução para o problema emparelhamento 3-dimensional. ■

4.3 CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos RDV

No mesmo artigo em que mostraram que CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV é NP-Completo, Booth e Johnson exibiram um algoritmo linear, no tamanho do grafo, para determinar um conjunto dominante mínimo em um grafo RDV [7]. Este algoritmo é baseado na árvore característica do grafo que, como já foi mencionado na seção 3.5, pode ser computada em tempo polinomial. A idéia central é percorrer a árvore, que neste caso é enraizada, de modo a garantir que cada vértice seja visitado uma única vez, que quando um vértice é visitado todos os seus filhos já foram visitados e que a escolha de um vértice do grafo para pertencer ao conjunto dominante, é feita de modo a maximizar o número de cliques maximais dominados. Desta forma, o número de vértices escolhidos é mínimo.

O algoritmo é detalhado a seguir, onde $|V_G| = n$ e $|E_G| = m$.

Algoritmo 4.1 CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, RDV.

Saída: D , um conjunto dominante mínimo em G .

1. Encontrar T , uma árvore característica de G .
2. Para cada $C \in V_T$, calcular o inteiro $prof(C)$ que é o comprimento do caminho da raiz de T a C .

Gerar também a lista dos vértices no clique.

3. Para cada $v \in V_G$, encontrar o inteiro $alt(v)$ que é a profundidade do clique mais alto (isto é, de menor profundidade) a que v pertence.
4. $D \leftarrow \emptyset$.

Marcar todo vértice de G como “não dominado”.

5. Percorrer T em pós-ordem efetuando a seguinte operação:

Se existe um vértice v no clique corrente C marcado “não dominado” e $alt(v) = prof(C)$, então escolha $x \in C$, o vértice que tem o menor valor para $alt(x)$ entre todos os vértices em C . Acrescente x a D e marque todos os vértices em $Adj(x) \cup \{x\}$ como “dominados”.

Teorema 4.2 (Booth e Johnson, 1982) *O algoritmo 4.1 encontra corretamente um conjunto dominante mínimo em um grafo RDV.*

Prova:

Seja T uma árvore característica, enraizada, para G .

Se G é um grafo completo, T terá um único vértice e qualquer vértice de G , sendo universal, formará um conjunto dominante mínimo em G . Neste caso, na execução do passo 5 do algoritmo, todos os vértices estão marcados “não dominado” e $alt(v) = prof(C) = 0$ para todo $v \in V_G$. Assim, escolhendo um vértice x qualquer, teremos que $D = \{x\}$ é o conjunto determinado pelo algoritmo que é um conjunto dominante mínimo em G .

Se G não é completo, tomemos C_1, C_2, \dots, C_k , $k > 1$, os cliques de T na ordem em que são visitados pelo algoritmo. Devemos salientar que como os vértices da árvore são visitados em pré-ordem, a seqüência acima tem a propriedade que se C_j é descendente de C_i em T , então $j \leq i$.

Vamos mostrar, por indução no número de iterações do passo 5 que, imediatamente antes da interação i ser executada, D domina os vértices de

$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{i-1}$ e existe D' , um conjunto dominante mínimo em G tal que $D \subseteq D'$.

Base: Temos que imediatamente antes do passo 5 do algoritmo ser executado, $D = \emptyset$, e como nenhum vértice de T foi considerado ainda, D é dominante por vacuidade e todo conjunto dominante mínimo em G , contém D .

Passo: Seja C_i , $1 \leq i < k$ o vértice de T , a ser examinado. Pela hipótese de indução, D domina $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ e existe D' , conjunto dominante mínimo em G tal que $D \subseteq D'$.

Se todos os vértices de C_i são marcados “dominados”, então D também domina C_i e, portanto domina $C_1 \cup \dots \cup C_i$. Claramente $D \subseteq D'$.

Se algum vértice de C_i está marcado “não dominado” mas $alt(v) \neq prof(v)$ para todos os vértices não dominados de C_i , então C_i não é folha (pois toda folha F tem um vértice v tal que $alt(v) = prof(F)$, e estes vértices não são marcados “dominados” antes da folha F ser visitada). Neste caso, quando os descendentes de C_i foram examinados, algum vértice de C_i foi escolhido para entrar em D , pois, caso contrário G seria desconexo. Então $C_i \cap D \neq \emptyset$ e D domina C_i . Logo D domina $C_1 \cup \dots \cup C_i$ e, claramente $D \subseteq D'$.

Se existe $v \in C_i$ tal que v está marcado “não dominado” e $alt(v) = prof(C_i)$. Seja x o vértice escolhido. Como $x \in C_i$, $D \cup \{x\}$ domina C_i e, pela hipótese de indução D domina $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$, logo $D \cup \{x\}$ domina $C_1 \cup \dots \cup C_i$. Resta mostrar que existe um conjunto dominante mínimo em G que contém $D \cup \{x\}$.

Seja D' o conjunto dominante mínimo que contém D . Se $x \in D'$, nada resta a demonstrar. Se $x \notin D'$, seja y um vértice de D' que domina v . Considere $D'' = D' - \{y\} \cup \{x\}$. Vamos mostrar que D'' também é dominante em G .

Suponha, por absurdo, que existe $z \in V_G$ tal que z não é dominado por D'' . Note que $z \notin C_1 \cup \dots \cup C_i$ pois, caso contrário, z seria dominado por $D \cup \{x\}$ e, portanto, por D'' . Além disso, $yz \in E_G$ pois $D' \cup \{x\}$ domina z mas $D' \cup \{x\} - \{y\}$ não domina. Temos então que existe um clique maximal K tal que $y, z \in K$ e $x \notin K$. Além disso, $y \in C_1 \cup \dots \cup C_i$, pois y domina v . Como o grafo induzido em T pelos cliques que contém y é um caminho direcionado, $y \in C_i$. Mas da existência de K e do fato de T ser enraizada, temos que $alt(y) > alt(x)$, uma contradição com a escolha de x .

Logo, D'' também é um conjunto dominante em G , $|D''| = |D|$ e, $D \cup \{x\}$ está contido em um conjunto dominante mínimo em G .

Para finalizar, basta observar que, o conjunto D , após o clique C_{k-1} ser

visitado, também domina C_k , a raiz de T . Mais ainda, $C_k \cap D \neq \emptyset$ pois, caso contrário, $C_k \cap C_i = \emptyset$, $1 \leq i < k$, uma contradição pois G é conexo e tem pelo menos dois cliques maximais. ■

Teorema 4.3 (Booth e Johnson, 1982) *O algoritmo 4.1 tem complexidade de tempo $O(n + m)$.*

Prova:

Basta observar que cada um dos passos pode ser executado em tempo linear no tamanho de G (passos 1 e 4) ou no tamanho da árvore característica de G isto é, na soma dos tamanhos dos cliques (passos 2, 3 e 5).

Logo, o algoritmo inteiro pode ser executado em tempo linear no tamanho de G , $O(m + n)$. ■

Com exceção da construção da árvore característica, que usa o algoritmo de Dietz [15], o algoritmo anteriormente descrito é formado inteiramente por algoritmos clássicos da teoria dos grafos, isto é, todos os passos nada mais são do que buscas em profundidade em grafos. O algoritmo de Dietz, no entanto, pode ser substituído pelo algoritmo $O(n^4)$ de Gavril [21], razoavelmente mais fácil de ser implementado e com provas de complexidade e correção bem mais claras, sem perder o limite polinomial do algoritmo de Booth e Johnson.

4.4 CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos DV

Os dois resultados das seções anteriores concluem que CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO é um problema separador para grafos UV e RDV. Como a classe de grafos DV é propriamente intermediária a estas duas, é interessante saber a qual classe de complexidade CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO pertence quando restrito a grafos DV. Este problema até o momento, não foi resolvido.

Observamos que a transformação polinomial apresentada para grafos UV não pode ser estendida para grafos DV simplesmente direcionando-se as arestas da árvore característica pois, por exemplo, na subárvore correspondente a m_i , os caminhos associados aos vértices A_i e B_i deveriam ser direcionados como mostra a figura 4.4 e, conseqüentemente, o caminho induzido por E_i não seria direcionado.

O algoritmo 4.1 também não pode ser utilizado para grafos DV. Isto, primeiramente, deve-se ao fato que as funções $prof(C)$ e portanto, $alt(v)$ não

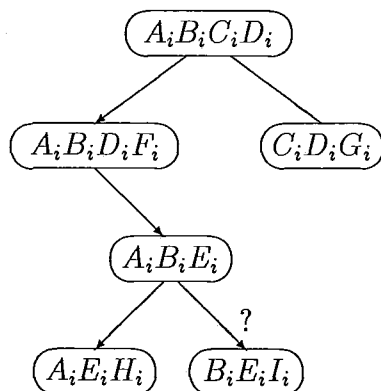


Figura 4.4: A subárvore não pode ser direcionada.

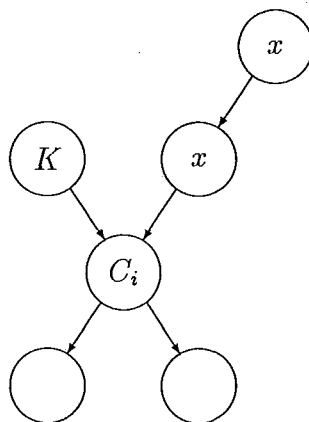


Figura 4.5: $prof(C_i) = ?$

estão bem definidas para árvores direcionadas que não são enraizadas. Veja esquema da figura 4.5.

Mesmo que fosse possível determinar, em tempo polinomial, uma função que representasse quantos cliques maximais anteriores a C , também contém o vértice v , em uma árvore direcionada não enraizada, o que substituiria o cálculo de $prof(C)$ e $alt(v)$, a demonstração da correção do algoritmo, apresentada aqui, não se aplicaria.

Isto pode ser visto claramente no momento em que se chega a uma contradição na escolha de x , do fato de supor que existe $z \in V_G$, não dominado por D'' . Em uma árvore direcionada e não enraizada, é possível que $y, z \in K$, $x \notin K$, $x \in C_I$ mas $alt(y) \leq alt(x)$, inviabilizando a estrutura da prova.

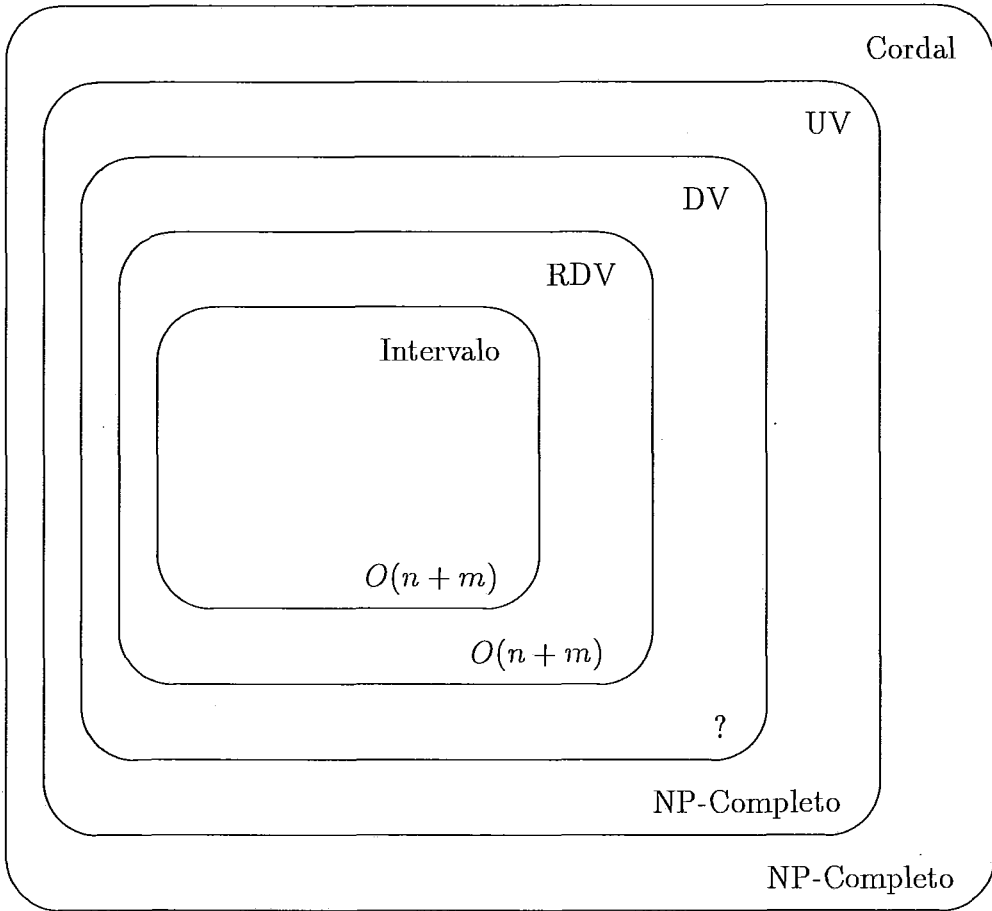


Figura 4.6: Complexidade do CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO

Logo, CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para grafos DV deverá ter uma solução independente dos detalhes dos resultados para grafos UV e RDV.

A figura 4.6 resume os resultados deste capítulo.

Capítulo 5

O Problema do Clique Dominante Mínimo

Neste capítulo, vamos considerar um exemplo de problema separador para as classes de grafos cordal e UV, que é o problema CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO.

Em oposição ao problema do capítulo anterior, nem todo grafo possui um clique dominante, então torna-se interessante analisar o comportamento deste problema para a classe de grafos de caminho. É o que fazemos na primeira seção deste capítulo, onde mostramos que CLIQUE DOMINANTE é polinomial quando restrito a grafos cordais.

Estabelecido o problema CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO, mostraremos uma transformação polinomial que conclui que este problema é NP-Completo para grafos cordais e exibimos um algoritmo eficiente, devido a Kratsch que conclui que este problema é polinomial para grafos UV.

Encerramos o capítulo mostrando uma caracterização de clique dominante em um grafo de intervalo o que conduz a um algoritmo linear, no tamanho do grafo, para encontrar um clique dominante mínimo em um grafo de intervalo.

5.1 O Problema do Clique Dominante

Dado um grafo $G = (V, E)$, vamos considerar o problema de determinar se G tem um conjunto dominante que é um clique, isto é, um conjunto $V' \subseteq V$ tal que

1. para todo $u \in V - V'$, existe $v \in V'$ tal que $uv \in E$,
2. para todo par de vértices distintos $u, v \in V'$, $uv \in E$.

Este problema, versão decisão, pode ser apresentado do seguinte modo:

Problema: CLIQUE DOMINANTE

Instância: Um grafo $G = (V, E)$.

Questão: Existe $V' \subseteq V$ tal que V' é clique dominante?

No caso geral, CLIQUE DOMINANTE é NP-Completo, pois o é para grafos perfeitos [9].

Este problema só é de interesse para grafos de diâmetro no máximo 3 pois, claramente, um grafo com diâmetro maior que 3 não terá um clique dominante.

A recíproca, no entanto, não é verdadeira no caso geral. Basta considerar um circuito sem cordas de comprimento 6, este circuito não tem clique dominante mas tem diâmetro 3. no grafo da figura 4.1, por exemplo, o conjunto $\{1, 4, 6\}$ é dominante mas não é um clique, mas $\{5\}$ é um clique dominante mínimo.

Para a classe dos grafos cordais, no entanto, CLIQUE DOMINANTE é polinomial. Foi Damaschke [33] quem caracterizou os grafos cordais que possuem um clique dominante. Esta caracterização é baseada na árvore característica de um grafo cordal, e no lema a seguir:

Lema 5.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo que possui uma árvore característica T . Um clique C de G é dominante se e somente se para cada folha F de T , $C \cap F \neq \emptyset$.*

Prova:

(\Rightarrow) Seja $C \subseteq V$ um clique dominante em G . Seja F uma folha de T e v um vértice que é apenas deste clique maximal. Como C é dominante, $v \in C$ ou existe um vértice u , adjacente a v , tal que $u \in C$. No primeiro caso, $v \in F \cap C$. No segundo caso, $u \in F$, pois caso contrário, v pertenceria a dois cliques maximais distintos, a saber, F e um que conteria u . Logo, $u \in F \cap C$. (\Leftarrow) Seja $C \subseteq V$ um clique em G e $u \in V - C$ (devemos mostrar que existe $v \in C$ tal que $uv \in E$). Sejam R e S cliques maximais que contêm C e u , respectivamente. Se $R = S$, u é adjacente a cada vértice de C . Se $R \neq S$, como T é árvore, existe um caminho de R a uma folha F de T , passando por S . Por hipótese, existe $v \in V$ tal que $v \in C \cap F$ e, como T é árvore característica, $v \in S$. Como S é clique e $u \in S$, temos que $uv \in E$. ■

Teorema 5.1 (Damaschke,1992) *Um grafo cordal G tem um clique dominante se e somente se $\text{diam}(G) \leq 3$.*

Prova:

Temos somente que mostrar que todo grafo cordal, com diâmetro menor que 4, tem um clique dominante. Isto será feito por indução em n , a ordem de G .

Base: Se $n = 1$, a afirmação é trivial.

Passo: Seja G um grafo cordal com n vértices e diâmetro no máximo 3. Seja T uma árvore característica de G e \mathcal{T} a família de subárvores de T , correspondente aos vértices de G .

Seja F uma folha de T . Considere F' o conjunto (não-vazio) dos vértices de G que ocorrem somente no clique F .

Seja G' o subgrafo de G induzido por $V - F'$. A árvore característica de G' é $T' = T - \{F\}$. Seja \mathcal{T}' a família de subárvores de T' correspondentes a vértices de G' . \mathcal{T}' é obtida a partir de \mathcal{T} removendo F das árvores de \mathcal{T} e suprimindo as árvores que se tornaram vazias.

Aplicaremos a hipótese da indução em G' .

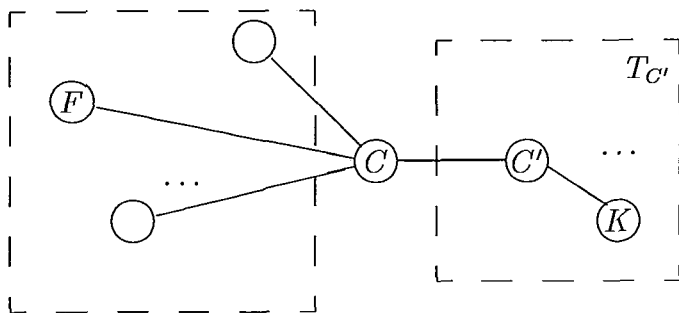
Claramente, G' também é um grafo cordal. Para verificar que $\text{diam}(G') \leq 3$, basta observar que todo caminho P em G com extremos em $V - F'$ e que passa por algum $f \in F'$, passa também por dois vértices distintos $u, v \in V - F'$. Logo, a (u, v) -seção de P pode ser substituída por (u, v) , gerando um caminho mais curto, sem vértices de F' , entre o mesmo par de vértices de P .

Pela hipótese da indução, G' tem um clique maximal dominante. Seja C' um tal clique. Como C' corresponde a um vértice de T , seja C o vértice de T mais próximo de C' , no caminho de F a C' , com a propriedade que existe uma árvore em \mathcal{T} que contém tanto F quanto C . Note que $C \neq F$, caso contrário, F seria um vértice isolado. Mostraremos que C é um conjunto dominante em G .

Se $C = C'$, então C é dominante em $V - F'$ e, por construção, todo vértice de F' é adjacente a um vértice em $C \cap F$. Logo, C é um conjunto dominante em G .

Suponha que $C \neq C'$. Considere uma folha K de T , $K \neq F$. Pelo lema 5.1, devemos mostrar que alguma subárvore de \mathcal{T} contém K e C . Removendo C de T , T será desconectada em pelo menos dois componentes. Seja $T_{C'}$ o componente que contém C' .

• Se $K \notin V_{T_{C'}}$, como C' é um conjunto dominante de G' , existe uma subárvore em \mathcal{T}' contendo tanto C' quanto K logo, contendo C . A árvore correspondente em \mathcal{T} contém K e C .



• Se $K \in V_{T_{C'}}$, seja k um vértice de G que ocorre somente em K . Seja f , um vértice de G que ocorre somente em F . Como o diâmetro de G é no máximo 3, $d(k, f) \leq 3$. Mas $d(k, f) \neq 1$ pois k e f não estão em um mesmo clique.

Se $d(k, f) = 2$, então (k, x, f) é um caminho em G e $x \in K$ e $x \in F$, logo $T[C_x]$ contém K e F e, portanto C .

Se $d(k, f) = 3$, então (k, x, y, f) é um caminho em G e $x \in K$ e $y \in F$. Logo $K \in V_{T[C_x]}$ e $F \in V_{T[C_y]}$ e como $xy \in E_G$ temos que $V_{T[C_x]} \cap V_{T[C_y]} \neq \emptyset$. Pela definição de C , nenhuma árvore de \mathcal{T} contém F e um vértice de $T_{C'}$. Logo, $T[C_y]$ contém K e C . ■

O teorema anterior fornece um algoritmo polinomial para resolver CLIQUE DOMINANTE em um grafo cordal. Basta calcular o comprimento do menor caminho entre todo par de vértices do grafo, e depois verificar se alguma destas distâncias é superior a 3. Isto pode ser feito, por exemplo, por n aplicações do algoritmo de Dijkstra [1], que determina o comprimento do menor caminho de um vértice fixo a cada um dos outros vértices do grafo. Como o algoritmo de Dijkstra admite uma implementação, usando filas de prioridade, com complexidade $O(m \log n)$, CONJUNTO DOMINANTE para grafos cordais pode ser resolvido em tempo $O(nm \log n)$.

Como consequência, temos que CLIQUE DOMINANTE para grafos UV, DV, RDV e de intervalo também é polinomial.

Uma variante natural de CLIQUE DOMINANTE a ser considerada é quando o clique dominante procurado é o de maior cardinalidade.

Problema: CLIQUE DOMINANTE MÁXIMO

Instância: Um grafo $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Questão: G tem um clique dominante V' tal que $|V'| \geq k$?

CLIQUE DOMINANTE MÁXIMO é NP-Completo para a classe dos grafos perfeitos [9] pois, caso contrário, CLIQUE DOMINANTE não seria NP-Completo para esta classe de grafos.

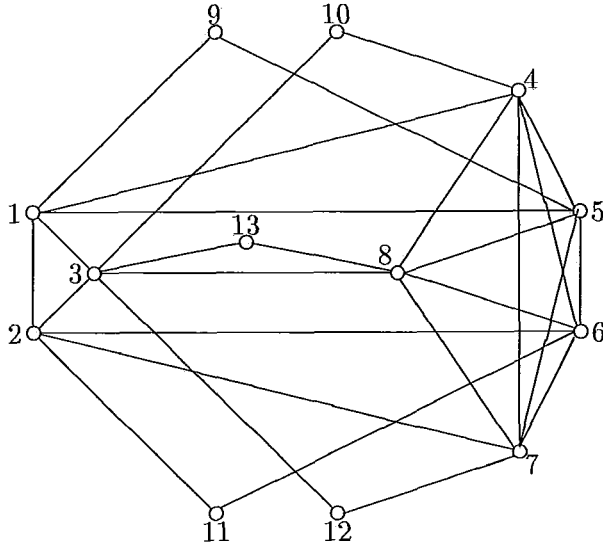


Figura 5.1: Grafo com cliques dominantes de tamanho 3 e 5 mas sem cliques dominantes de tamanho 4.

Vale observar que um clique maximal que contém um clique dominante também é dominante, logo para resolver CLIQUE DOMINANTE MÁXIMO, podemos nos restringir a verificar se os cliques maximais são dominantes.

Como um grafo cordal tem no máximo $|V_G|$ cliques maximais [19] e existe um algoritmo linear no tamanho do grafo para verificar se um dado clique é dominante (pois basta considerar cada uma das arestas do grafo e verificar se pelo menos um de seus extremos pertence ao clique dado), também existe um algoritmo polinomial para resolver CLIQUE DOMINANTE MÁXIMO para grafos cordais.

Uma variante mais interessante é o problema CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO, cuja versão decisão segue:

Problema: CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO

Instância: Um grafo $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Questão: G tem um clique dominante V' tal que $|V'| \leq k$?

A seguinte afirmação é verdadeira: Se G tem um clique dominante de tamanho k_1 e um clique dominante de tamanho k_3 , G não tem, necessariamente, um clique dominante de tamanho k_2 , $k_1 < k_2 < k_3$, $k_i \in \mathbb{Z}$. A figura 5.1, por exemplo, mostra um grafo onde $\{1, 2, 3\}$ é um clique dominante de tamanho 3, $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ é um clique dominante de tamanho 5, mas não existe nenhum clique dominante de tamanho 4.

Decorre da afirmação acima que para encontrar um clique dominante mínimo em um grafo não é suficiente encontrar um clique dominante de tamanho k e mostrar que não existe clique dominante com $k - 1$ vértices.

Neste caso, é interessante observar que se um clique maximal não é dominante, ele não contém um clique dominante. Logo, a procura por um clique dominante mínimo pode se restringir aos subconjuntos dos cliques maximais dominantes.

É claro que CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO é um problema em NP. Vamos mostrar que este problema é NP-Completo quando restrito a classe de grafos cordais e que CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO está em P para grafos UV e portanto para grafos DV, RDV e de intervalo. Para grafos de intervalo, vamos exibir um algoritmo linear no tamanho do grafo.

5.2 CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos cordais

Para mostrar que CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos cordais é NP-Completo vamos considerar a subclasse dos grafos split e mostrar que este problema é NP-Completo para esta subclasse.

Temos, inicialmente, o seguinte resultado:

Lema 5.2 *Em um grafo split, um conjunto dominante mínimo e um clique dominante mínimo têm a mesma cardinalidade.*

Prova:

Seja $G = (V, E)$ um grafo split. Se G não é conexo, a afirmação é trivialmente verdadeira. Suponha G conexo e $V = K \cup S$ onde K é um clique e S um conjunto estável. Sejam C e D , respectivamente, um clique e um conjunto dominante mínimo em G . É claro que $|D| \leq |C|$, pois todo clique dominante é um conjunto dominante.

Suponha que $|C| = k$ e que, por absurdo, $|D| < k$. Logo, D não é um clique em G e existe $v \in D$ tal que $v \in S$. Mas $Adj(v) \subset K$, pois S é conjunto estável, e $Adj(v) \neq \emptyset$ pois G é conexo. Além disso, v tem pelo menos um vizinho u tal que $u \notin D$, pois caso contrário, D não seria mínimo.

Sejam $D' = D - v + u$ e $w \in V - D'$. Se $w = v$, como u é adjacente a v , $wu \in E$. Se $w \neq v$ então, como D é conjunto dominante, w é adjacente a algum vértice de D . Se $wv \in E$, então $w \in K$ e como K é clique $uw \in E$. Se $wv \notin E$, w é adjacente a algum vértice de $D - v$ logo, w é adjacente a algum

vértice de $D' - u$. Em todos os casos, w é adjacente a algum vértice de D' . Então, D' é um conjunto dominante, $|D'| = |D|$ mas $|D' \cap S| < |D \cap S|$.

Prosseguindo desta maneira, é possível construir D'' um conjunto dominante tal que $D'' \subset K$ isto é, D'' seria um clique dominante e $|D''| = |D| < |C|$. Um absurdo. Logo, em um grafo split, $|C| = |D|$. ■

A demonstração do lema acima nos fornece uma transformação polinomial de CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO para CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO, ambos restritos a classe dos grafos split.

Como Corneil e Perl, [12] mostraram que CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO é NP-Completo para grafos split, temos que CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO também é NP-Completo quando restrito a esta classe de grafos.

Temos, como consequência, o seguinte resultado:

Teorema 5.2 CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos cordais é NP-Completo.

5.3 CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV

O problema CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO restrito a grafos UV foi considerado por Kratsch, em 1990 [32]. Neste artigo ele exibiu um algoritmo polinomial que encontra um clique dominante mínimo em um grafo UV. O algoritmo de Kratsch é baseado na estrutura da árvore característica do grafo.

A relação existente entre um clique dominante e uma árvore característica de um grafo UV é estabelecida pelo lema 5.1 que permite a elaboração do seguinte algoritmo para resolver CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos UV.

Algoritmo 5.1 CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, UV.

Saída: CDM, um clique dominante mínimo em G ou “ G não tem clique dominante”.

1. Encontrar T , uma árvore característica de G .
2. Para cada $C \in V_T$ que é dominante, determinar um menor subconjunto $S \subseteq C$ tal que $S \cap F \neq \emptyset$, para toda folha F de T .

3. Se não existe um tal S , então “ G não tem clique dominante”
 então CDM é um conjunto S que possui o menor número de vértices.

Para mostrar que o passo 2 deste algoritmo pode ser executado em tempo polinomial vamos considerar o seguinte problema de decisão:

Problema: CONJUNTO ESCOLHA MÍNIMO

Instância: Uma família \mathcal{F} de subconjuntos do conjunto C , $k \in \mathbb{N}^*$.

Questão: Existe $S \subseteq C$, $|S| \leq k$ tal que $S \cap F_i \neq \emptyset$, $\forall F_i \in \mathcal{F}$?

O problema CONJUNTO ESCOLHA MÍNIMO é equivalente ao passo 2 do algoritmo, de fato, basta considerar C , um clique maximal de G e a família \mathcal{F}_C formada por $C \cap F_i$, onde F_1, \dots, F_k são as folhas de T .

No caso geral, CONJUNTO ESCOLHA MÍNIMO é NP-Completo [17] mas, novamente, estamos considerando um caso especial. Note que, como G é um grafo UV, cada vértice $v \in V_G$ pertence a no máximo duas folhas de T logo, uma instância deste CONJUNTO ESCOLHA MÍNIMO especial, é formada por um conjunto C e uma família \mathcal{F} de subconjuntos de C , onde cada elemento de C pertence a, no máximo, dois elementos de \mathcal{F} .

Este caso especial do problema CONJUNTO ESCOLHA MÍNIMO, é polinomial. Vamos mostrar como resolvê-lo modelando-o numa cobertura de vértices por arestas em um grafo auxiliar H .

Seja C um clique maximal de G , considere $H_C = (\mathcal{F}_C, E_C)$, o grafo interseção da família \mathcal{F}_C .

Para cada aresta $B_1 B_2 \in E_C$, escolha um vértice arbitrário de $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ como rótulo desta aresta.

Observamos que cada vértice isolado de H_C corresponde a um clique $B \in \mathcal{F}_C$ com $B \cap (\cup(\mathcal{F}_C - \{B\})) = \emptyset$. Portanto, cada clique dominante mínimo $C' \subseteq C$ contém exatamente um vértice arbitrário de B . Logo, para encontrar um conjunto escolha mínimo de (C, \mathcal{F}_C) basta tomar um elemento em cada vértice isolado de H_C e considerar $H'_C = (\mathcal{F}'_C, E_C)$ o grafo obtido de H_C pela retirada dos vértices isolados. A restrição acima se deve ao fato de não podermos considerar cobertura de vértices por arestas em grafos com vértices isolados.

Como consequência óbvia da construção de H_C e H'_C , temos o seguinte lema, onde R é o conjunto que contém exatamente um vértice de cada $B \in \mathcal{F}_C - \mathcal{F}'_C$.

Lema 5.3 *Se $E'_C \subseteq E_C$ é uma cobertura de vértices mínima de H'_C , então o conjunto R' dos rótulos das arestas de E'_C é um conjunto escolha mínimo de (C, \mathcal{F}'_C) , e $R \cup R'$ é um conjunto escolha mínimo de (C, \mathcal{F}_C) .*

Sabemos que o problema de encontrar uma cobertura mínima de vértices por arestas está fortemente relacionado ao problema de encontrar um emparelhamento máximo, isto é, dado um grafo G sem vértices isolados e M um emparelhamento máximo em G , uma cobertura mínima é obtida acrescentando-se uma aresta incidente a v , para todo vértice v que não é extremo de uma aresta de M .

Podemos agora, reescrever o algoritmo 5.1, da seguinte maneira:

Algoritmo 5.2 CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, UV.

Saída: CDM, um clique dominante mínimo em G ou “ G não tem clique dominante”.

1. Encontre T , uma árvore característica de G .
2. Se nenhum vértice de T é clique dominante de G , pare, com saída “ G não tem clique dominante”.
3. $CDM \leftarrow$ Um clique maximal dominante de G .
4. Para todo clique dominante $C \in V_T$ faça:
 - Calcule \mathcal{F}_C ;
 - Construa H_C ;
 - Construa R e H'_C ;
 - Determine uma cobertura mínima em H'_C ;
 - Construa R' ;
 - Se $|R \cup R'| < |CDM|$ então $CDM \leftarrow R \cup R'$.
5. Pare, com saída CDM.

Teorema 5.3 (Kratsch, 1990) *O algoritmo 5.2 encontra corretamente um clique dominante mínimo em um grafo UV.*

Prova:

Conseqüência imediata dos lemas 5.1 e 5.3. ■

Teorema 5.4 (Kratsch, 1990) *Dado um grafo UV , G , $|V_G| = n$ e $|E_G| = m$, e uma árvore característica de G , o algoritmo 5.2 tem complexidade de tempo $O(n^{2,5} + nm)$. Se é dado apenas o grafo G , a complexidade do algoritmo é $O(n^4)$.*

Prova:

Vamos analisar a complexidade de cada um dos passos:

Passo 1: O algoritmo de Gavril [22] encontra uma árvore característica de G em tempo $O(n^4)$.

Passo 2: Verificar se um clique dado $X \subseteq V_G$ é, ou não, um conjunto dominante, tem complexidade $O(m)$, pois basta verificar se cada aresta de G tem pelo menos um de seus extremos em X .

Como são, no máximo n cliques a serem examinados, este passo pode ser executado em tempo $O(mn)$

Passo 3: É trivial.

Passo 4: O laço do passo 4 é executado no máximo n vezes.

A cada passo, \mathcal{F}_C é trivialmente calculado, o grafo H_C tem $|\mathcal{F}_C| < n$ vértices e, no máximo n arestas pois, cada vértice de G contribui para a existência de no máximo uma aresta em H_C . É possível construir H_C percorrendo a lista dos elementos das folhas, formando a lista de vértices e adjacências de H_C , junto com o rótulo das arestas, em tempo $O(n)$.

Uma busca no grafo H_C é suficiente para construir R e H'_C , o que tem complexidade $O(n)$.

Para encontrar uma cobertura de vértices por arestas mínima, pode-se, como já foi dito, acrescentar arestas incidentes aos vértices não incidentes a arestas de um emparelhamento máximo. Para encontrar um emparelhamento máximo, utiliza-se o algoritmo de Micali e Vazirani que tem complexidade $O(|V|^{1/2} \cdot |E|)$ em um grafo $G = (V, E)$. Logo, em H'_S , encontra-se um emparelhamento máximo em tempo $O(n^{3/2})$.

Como esta é a operação de maior complexidade no laço, o passo 4 é executado em tempo $O(n^{5/2})$.

Logo, a complexidade do algoritmo é $O(nm + n^{2,5})$ se for dada uma árvore característica e $O(n^4)$, caso contrário. ■

5.4 CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO para grafos de intervalo

Os grafos de intervalo, por possuírem árvores características mais simples, apresentam uma propriedade que dará origem a um algoritmo mais eficiente que o apresentando para grafos UV, para resolver CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO. A demonstração desta propriedade é baseada no seguinte teorema de caracterização de grafos de intervalo, onde três vértices distintos formam uma *tripla astroidal* se eles não podem ser ordenados de maneira que todo caminho do primeiro ao terceiro passa por um vizinho do segundo vértice.

Teorema 5.5 (Lekkerkerker e Boland, 1962) *Um grafo G é de intervalo se e somente se G é cordal e não contém uma tripla astroidal.*

Teorema 5.6 *Seja G um grafo de intervalo. Se G tem um clique dominante C então $|C| = 1$ ou $|C| = 2$.*

Prova:

Seja C um clique dominante minimal em G e suponha, por absurdo, que $|C| > 2$. Sejam u_1, u_2, u_3 três vértices distintos de C . Como C é dominante, e $C - u_i$ não é dominante, $i = 1, 2, 3$, existem vértices $v_1, v_2, v_3 \in V_G - C$, de forma que $u_i v_i \in E_G$, $i = 1, 2, 3$ e $u_i v_j \notin E_G$, $i \neq j$.

Como C é clique, v_1, v_2, v_3 formam uma tripla astroidal em G e portanto, pelo teorema 5.5, G não é grafo de intervalo, um absurdo. ■

O algoritmo seguinte, determina um clique dominante em um grafo de intervalo.

Algoritmo 5.3 CLIQUE DOMINANTE EM GRAFO DE INTERVALO

Entrada: Grafo de intervalo, $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$.

Saída: C , um clique dominante mínimo em G ou “ G não tem clique dominante”.

1. {Verifique se G tem um vértice universal}
Calcule $\text{grau}(v)$, para todo $v \in V_G$.
Se existe v tal que $\text{grau}(v) = n - 1$, $C \leftarrow \{v\}$, pare.
2. {Se nenhum vértice é dominante, verifique se G tem uma aresta dominante}

Calcule um caminho característico T , de G .

Sejam C_1 e C_k suas folhas.

Se $G[C_i \cup C_k]$ é conexo, seja $uv \in E_G$ tal que $u \in C_1$ e $v \in C_k$.

$C \leftarrow \{u, v\}$, pare.

3. {Se G também não tem aresta dominante} Pare, “ G não tem clique dominante”.

Teorema 5.7 *O algoritmo 5.3 encontra corretamente um clique dominante em um grafo de intervalo.*

Prova:

Conseqüência imediata do teorema 5.6 e dos seguintes fatos, válidos para um grafo de intervalo G , que não possui vértices universais, sendo C_1 e C_k as folhas de um caminho característico de G .

- 1) G tem uma aresta dominante $\{u, v\}$ se e somente se $u \in C_1$ e $v \in C_k$;
- 2) Uma aresta $\{u, v\}$ tem uma ponta em C_1 e outra em C_k se e somente se $G[C_1 \cup C_k]$ é conexo. ■

Teorema 5.8 *O algoritmo 5.3 tem complexidade de tempo $O(m + n)$.*

Prova:

No passo 1, devemos calcular o grau de cada vértice e verificar se existe algum vértice de grau $n - 1$. Para calcular os graus, é necessário considerar uma vez cada aresta, o que implica em $O(m)$ passos. Para verificar se algum dos graus é igual a $n - 1$, basta percorrer a lista dos graus, o que implica em $O(n)$ passos. Logo, o passo 1 tem complexidade $O(m + n)$.

No passo 2, a árvore característica pode ser determinada em $O(m + n)$. Construir o subgrafo $G[C_1 \cup C_k]$ e determinar se ele é conexo, tem complexidade $O(m + n)$ e, para encontrar uma aresta com um extremo em cada conjunto, basta percorrer o conjunto de arestas.

Logo, o algoritmo 5.3 tem complexidade $O(m + n)$. ■

A figura 5.2 resume os resultados deste capítulo:

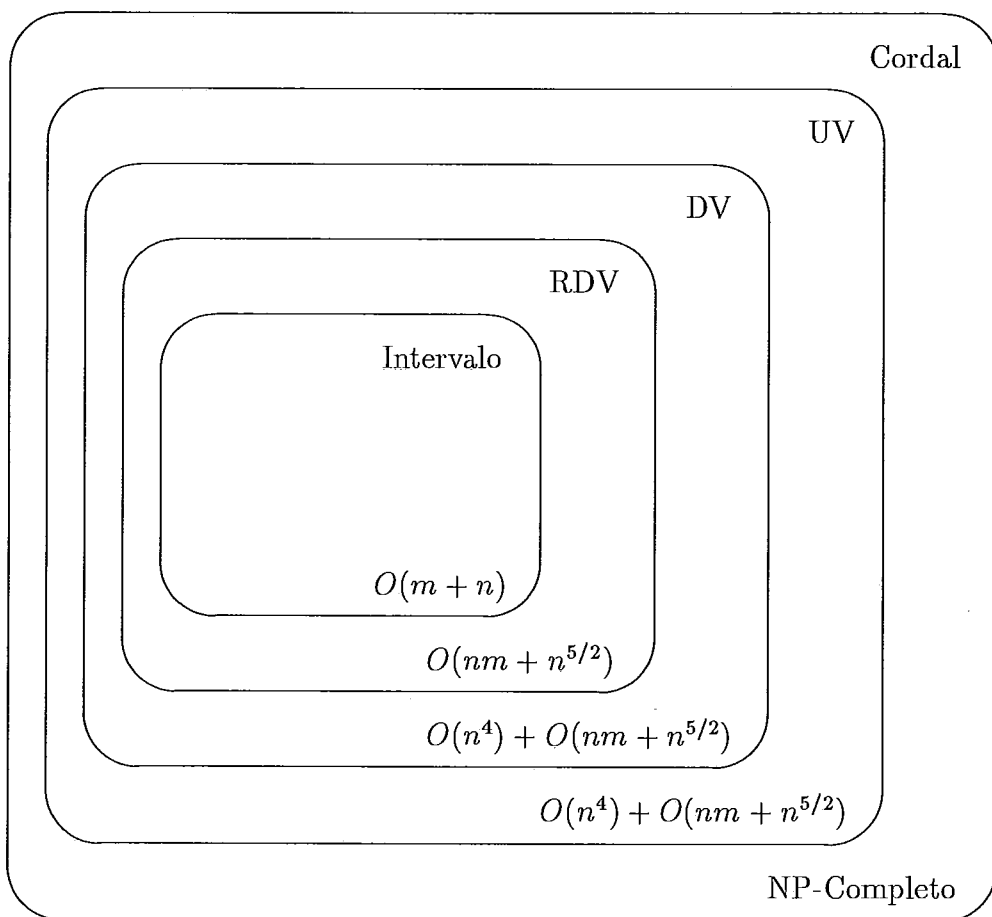


Figura 5.2: Complexidade do CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO

Capítulo 6

O Problema do Circuito Hamiltoniano

Neste capítulo, vamos considerar os problemas CIRCUITO HAMILTONIANO e CAMINHO HAMILTONIANO que são exemplos de problemas separadores para grafos DV e de intervalo, estando em aberto para grafos RDV.

Após a colocação do problema e de uma breve revisão de como CIRCUITO HAMILTONIANO está resolvido para várias classes de grafos, reproduzimos a demonstração, devida a Bertossi e Bonucelli que este problema é NP-Completo, mesmo quando restrito a grafos UV.

Na seção seguinte, demonstramos que CIRCUITO HAMILTONIANO também é NP-Completo quando restrito a grafos DV. Esta demonstração é independente a de Narasimham [38], que estabeleceu este resultado.

As demonstrações dos mesmos resultados para CAMINHO HAMILTONIANO seguem de uma idéia de Bertossi e Bonucelli [4].

6.1 O Problema

Um *circuito hamiltoniano* em um grafo $G = (V, E)$ é um circuito que passa por todos os vértices de G . Isto é, $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ é um circuito hamiltoniano em G quando $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $v_i v_{i+1} \in E_G$, $1 \leq i \leq n$ e $v_1 v_n \in E_G$. Dizemos que um grafo é *hamiltoniano* se ele contém um circuito hamiltoniano.

O problema do circuito hamiltoniano, versão decisão, é definido como segue:

Problema: CIRCUITO HAMILTONIANO

Instância: Um grafo $G = (V, E)$.

Questão: G contém um circuito hamiltoniano?

Este problema é um dos mais estudados em teoria dos grafos e, no caso da instância considerar grafos arbitrários, é NP-Completo [17]. Uma possível estratégia para resolver este problema é considerar classes especiais de grafos onde, a partir de características particulares da classe, possa-se construir um algoritmo de tempo polinomial, que decida se um grafo é ou não hamiltoniano ou, se CIRCUITO HAMILTONIANO continua NP-Completo.

Muitas são as classes de grafos para as quais já existe solução e, entre elas temos que CIRCUITO HAMILTONIANO permanece NP-Completo para a classe dos grafos grade [27], dos grafos cúbicos planares 3-conexos [18], dos grafos círculo [13], para os grafos bipartidos [27] e split [26]. Entre os casos para os quais existe um algoritmo de tempo polinomial estão: grafos de intervalo [31], grafos indiferença [3], grafos arco-circulares [3], grafos planares 4-conexos [26] e recentemente para grafos co-comparabilidade e de permutação [14], além de casos triviais, em que G possui pelo menos um vértice de grau menor que dois (a resposta é sempre NÃO) ou G é um grafo completo (a resposta é sempre SIM). Outro caso em que a resposta é sempre SIM é quando G é um grafo arco-circular próprio, que não é de intervalo [3].

6.2 CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos UV

O problema para grafos de caminhos não direcionados (UV) foi tratado por Bertossi e Bonuccelli, em 1986 [4]. Apresentamos a seguir, a demonstração deste resultado que segue, em linhas gerais, a demonstração original.

Teorema 6.1 (Bertossi e Bonuccelli, 1986) *CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos UV é NP-Completo.*

Prova:

É dada uma transformação polinomial a partir do mesmo problema, para grafos bipartidos com grau máximo 3 que é NP-Completo [27].

Parte 1: A transformação.

Seja $B = (M, N, E)$ um grafo bipartido com grau máximo 3. Podemos supor que B é conexo, $|M| = |N|$ e não há vértice de grau 1 em B pois, caso contrário, B não seria hamiltoniano.

O grafo UV, G , criado a partir de B , será dado através de sua árvore característica T , de acordo com o teorema 3.11.

Tal árvore T terá $p + 2q + 1$ vértices, onde $|M| = p$ e q é o número de vértices de N com grau 3. Cada vértice de T será um clique em G como segue:

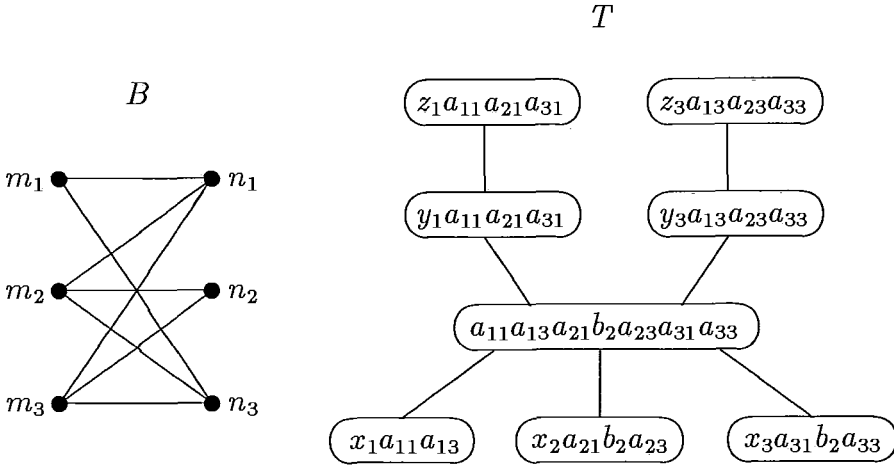


Figura 6.1: A árvore característica T , do grafo UV, G , obtida do grafo bipartido B .

Para cada vértice $m_i \in M$, existe um clique da forma:

$$K_i^x = \{x_i\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E \text{ e } g(n_j) = 3\} \cup \{b_j/m_i n_j \in E \text{ e } g(n_j) = 2\}$$

Para cada vértice $n_j \in N$ tal que $g(n_j) = 3$, existe um clique da forma:

$$K_j^y = \{y_j\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}$$

e um da forma:

$$K_j^z = \{z_j\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}.$$

É um clique, denotado por K , que contém todos os a_{ij} 's e b_j 's previamente definidos.

As arestas de T conectarão os vértices K_i^x com K para $1 \leq i \leq p$, K_j^y com K e K_j^z com K para $1 \leq j \leq p$ e $g(n_j) = 3$.

Notamos que os vértices de T são cliques de G que não estão contidos em nenhum outro vértice de T logo, são cliques maximais de G . Facilmente pode ser verificado que a família de tais cliques que contém um certo vértice de G (a_{ij} , b_j , x_i , y_i ou z_i) gera um caminho em T . Tais caminhos são da seguinte forma: Os x_i 's, y_i 's e z_i 's, $1 \leq i \leq p$, induzem caminhos triviais. Os b_j 's induzem caminhos com três vértices (K_i^x , K , K_i^x), onde m_i e m_l são os vértices adjacentes a n_j em B . E os a_{ij} 's induzem caminhos com quatro vértices, (K_i^x , K , K_j^y , K_j^z).

Também é claro que T pode ser construída em tempo polinomial em n , onde n é o número de vértices de B . Por construção $n = 2p$, $|V_T| = p + 2q + 1$

e como $q \leq p$, $|V_T| \leq n/2 + n + 1 = O(n)$ e $|A_T| = p + 2q = O(n)$.

Na figura 6.1 há um exemplo desta transformação onde $p = 3$ e $q = 2$.

Parte 2: Resta mostrar que:

B é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

(\Rightarrow) Seja C um circuito hamiltoniano em B . Neste caso C é uma concatenação de p caminhos da forma (m_i, n_j, m_k) . Podemos obter um circuito hamiltoniano em G , substituindo cada seção (m_i, n_j, m_k) de C pela seqüência $(x_i, a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj}, x_k)$ se $Adj(n_j) = \{m_i, m_k, m_h\}$ ou por (x_i, b_j, x_k) se $Adj(n_j) = \{m_i, m_k\}$. Note que todos os vértices de G que possuem j como índice estão nestas seqüências. Chamaremos $(a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj})$ ou (b_j) de j -bloco.

É fácil verificar que tal substituição gera um passeio fechado D , em G , pois como C é um circuito e todas as seções assim geradas de D têm seus extremos em x_i e x_k ao invés de m_i e m_k . Também é fácil verificar que em D não há vértices repetidos, dado que todos os vértices internos das seções têm j como índice, e que uma repetição em D implicaria em uma repetição de vértices em C . Além disso, D passa por todos os vértices de G pois como são p seções, cada uma começando com um x_i , seguida de um j -bloco distinto e todos os outros vértices, diferentes de x_i 's têm j como índice.

Logo, D é um circuito hamiltoniano em G .

(\Leftarrow) Seja D um circuito hamiltoniano em G . Primeiramente, observamos que para cada j correspondente a um vértice n_j de grau 3, uma seção do tipo $(a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj})$ deve aparecer em D pois, caso contrário, y_j e z_j não estariam em D . E no caso de n_j ter grau 2, b_j é o único vértice de G a ter j como índice. A seção $(a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj})$ ou um único b_j será denominado j -bloco. Observamos também que D deve ser uma seqüência em que cada x_i é sempre precedido por exatamente um j -bloco e portanto também seguido por exatamente um j' -bloco. Isto segue do fato de existirem exatamente p x_i 's distintos dois a dois não adjacentes e exatamente p j -blocos.

Finalmente, obtemos um circuito hamiltoniano C em B , a partir de D , substituindo a seqüência $(x_i, j\text{-bloco}, x_k)$ pela seqüência (m_i, n_j, m_k) . O que termina a prova, isto é, o problema CIRCUITO HAMILTONIANO é NP-Completo para grafos UV. ■

6.3 CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos DV

A transformação polinomial utilizada por Bertossi e Bonuccelli para grafos UV não pode ser diretamente utilizada para grafos DV isto é, não podemos simplesmente orientar as arestas de T a fim de encontrar uma árvore característica direcionada com caminhos direcionados.

Veja, por exemplo na árvore característica da figura 6.1, os caminhos induzidos por b_2 , a_{21} e a_{31} . Se o caminho induzido por a_{21} for orientado de K_1^z para K_2^x , o caminho induzido por a_{31} deverá ser orientado de K_1^z para K_3^x e, como consequência, o caminho induzido por b_2 não será direcionado. Se o caminho induzido por a_{21} for orientado de K_2^x para K_1^z , novamente chega-se a uma impossibilidade para a orientação do caminho induzido por b_2 .

Observamos que a impossibilidade de obtermos uma orientação para a árvore característica, deve-se ao fato de existirem vértices b_j , do grafo, repetidos nos vértices K_i^x da árvore. O único caso em que não existem b_j 's na árvore característica é quando todos os vértices do grafo bipartido têm grau 3.

A seguir, mostramos uma transformação polinomial, baseada na transformação de Bertossi e Bonuccelli, que nos permitirá orientar a árvore característica e os caminhos, isto é, provamos que o problema CIRCUITO HAMILTONIANO também é NP-Completo quando restrito a classe de grafos DV. Esta transformação também aparece em [38] embora sejam trabalhos independentes.

Teorema 6.2 CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos DV é NP-Completo.

Prova:

Apresentaremos uma transformação polinomial análoga a apresentada no teorema 6.1 a partir do mesmo problema, restrito a grafos bipartidos com grau máximo 3, que é NP-Completo [27].

Parte 1: A transformação.

Seja $B = (M, N, E)$ um grafo bipartido com grau máximo 3. Vamos supor que B é conexo, $|M| = |N|$ e não há vértice de grau 1 em B pois, caso contrário, B não seria hamiltoniano. Seja q o número de vértices de N com grau 3, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ e $N = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$.

Mostraremos como construir uma instância $G = (V, A)$ do problema CIRCUITO HAMILTONIANO restrito a grafos DV, tal que B é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

G será dado através de sua árvore característica T , isto é, descreveremos todos os seus cliques maximais, o que de acordo com o teorema 3.10,

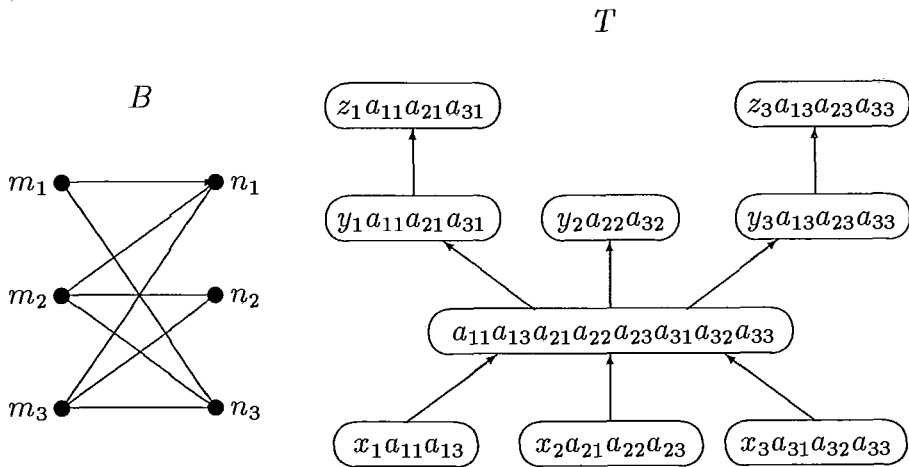


Figura 6.2: A árvore característica T , do grafo DV, G , obtida do grafo bipartido B .

determina G . Tais cliques são os seguintes:

Para cada vértice $m_i \in M$, existe um clique da forma:

$$K_i^x = \{x_i\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}.$$

Para cada vértice $n_j \in N$, existe um clique da forma:

$$K_j^y = \{y_j\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}.$$

Correspondente a cada $n_j \in N$ tal que $g(n_j) = 3$, existe um clique da forma

$$K_j^z = \{z_j\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}.$$

E o clique $K = \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}$.

Logo,

$$\mathcal{K} = \{K\} \cup \{K_i^x/i = 1, \dots, p\} \cup \{K_j^y/i = 1, \dots, p\} \cup \{K_j^z/g(n_j) = 3, 1 \leq j \leq p\}$$

é o conjunto de todos os cliques maximais de G , sendo

$$V = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{z_j/g(n_j) = 3\} \cup \{a_{ij}/m_i n_j \in E\}.$$

Seja T a árvore direcionada com conjunto de vértices \mathcal{K} , e arestas orientadas da seguinte forma: (K_i^x, K) , $1 \leq i \leq p$, (K, K_j^y) , $1 \leq j \leq p$, (K_j^y, K_j^z) , $1 \leq j \leq p$ e $g(n_j) = 3$.

Os vértices de V induzem em T caminhos direcionados. Tais caminhos são da seguinte forma: Os x_i 's, y_i 's e z_i 's, $1 \leq i \leq p$, induzem caminhos

triviais. Os a_{ij} 's induzem caminhos com quatro vértices ou três vértices, a saber: (K_i^z, K_j^y, K, K_i^x) se $g(n_j) = 3$ ou (K_i^y, K, K_i^x) se $g(n_j) = 2$. Portanto, T é uma árvore característica para G , o que prova que G , assim construído, é um grafo DV.

Como $|\mathcal{K}| = 1 + 2p + q$ temos que T , e portanto G , podem ser construídos em tempo polinomial na ordem de B .

Na figura 6.2 há um exemplo desta transformação para o mesmo grafo bipartido da figura 6.1.

Parte 2: Resta mostrar que:

B é hamiltoniano se e somente se G é hamiltoniano.

(\Rightarrow) Seja C um circuito hamiltoniano em B . Obtemos a partir de C um circuito hamiltoniano D , em G , substituindo cada seção (m_i, n_j, m_k) de C por $(x_i, a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj}, x_k)$ se $Adj(n_j) = \{m_i, m_k, m_h\}$ ou por $(x_i, a_{ij}, y_j, a_{kj}, x_k)$ se $Adj(n_j) = \{m_i, m_k\}$. D é um circuito hamiltoniano pois todo vértice de G é coberto exatamente um vez, pela mesma razão que no teorema 6.1.

(\Leftarrow) Seja D um circuito hamiltoniano em G . Primeiramente, observamos que para cada j correspondente a um vértice n_j de grau 3, uma seção do tipo $(a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj})$ deve aparecer em D pois, caso contrário, y_j e z_j não estariam em D . E no caso de n_j ter grau 2, a seção (a_{ij}, y_j, a_{kj}) é obrigatória em D , pois caso contrário, y_j não estaria em D : Denominaremos j -bloco uma seção $(a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj})$ ou um único b_j .

Como existem exatamente p x_i 's e p y_i 's em G . A cada j -bloco, está associado um x_i . Logo, D será formado por concatenações de seções da forma $(x_i, a_{ij}, y_j, a_{hj}, z_j, a_{kj}, x_k)$ se $g(n_j) = 3$ ou $(x_i, a_{ij}, y_j, a_{kj}, x_k)$ se $g(n_j) = 2$.

Basta então, substituir cada uma destas seções pela seção (m_i, n_j, m_k) para obter, com a concatenação destas, um circuito hamiltoniano em B . ■

Como a classe dos grafos DV está contida na classe UV, o resultado acima também permite concluir que CIRCUITO HAMILTONIANO restrito a grafos UV é NP-Completo.

6.4 CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos RDV, cordais e de intervalo

Infelizmente, a árvore característica obtida na demonstração do teorema 6.2 não é enraizada e, aparentemente, não é fácil transformá-la de modo a obter uma solução para CIRCUITO HAMILTONIANO, restrito a grafos RDV, análoga as anteriores. Na verdade, este problema encontra-se até o momento,

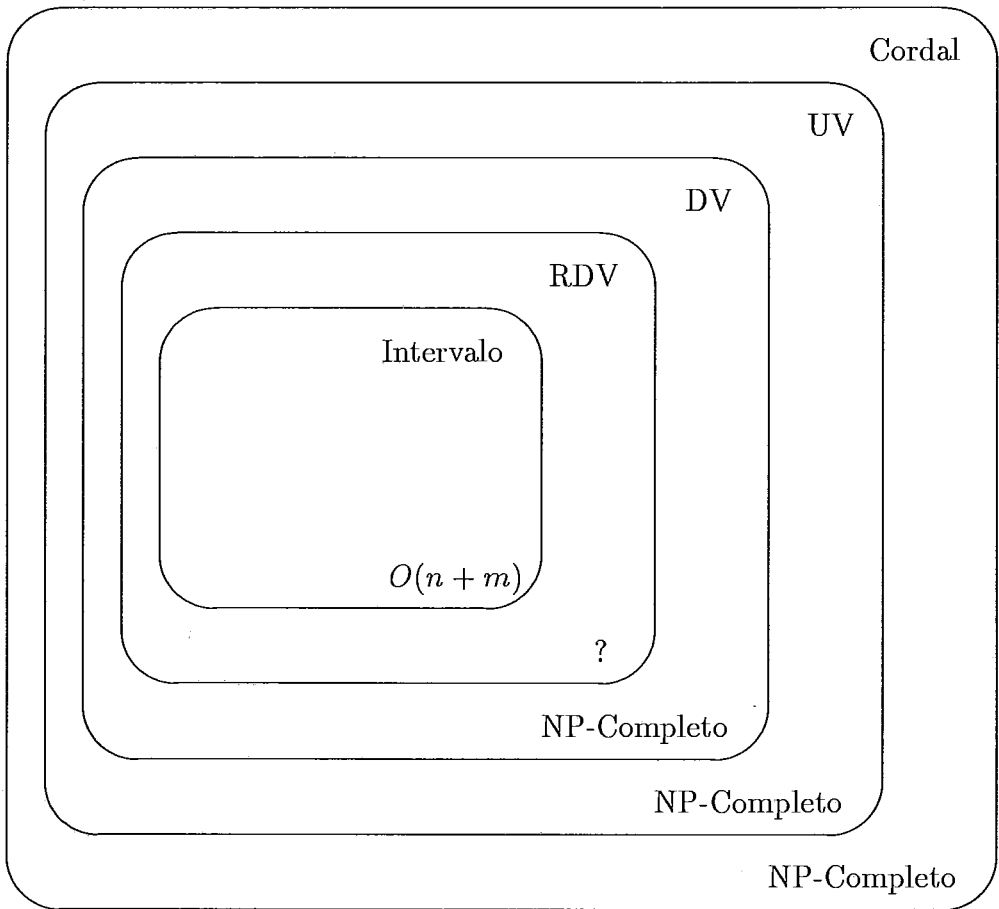


Figura 6.3: Complexidade do CIRCUITO HAMILTONIANO

em aberto, isto é, ainda não se conhece um algoritmo de tempo polinomial que encontre um circuito hamiltoniano em um grafo RDV, ou decida que ele não é hamiltoniano e nem se conhece uma demonstração que CIRCUITO HAMILTONIANO restrito a grafos RDV é NP-Completo.

O fato de que CIRCUITO HAMILTONIANO para grafos cordais é NP-Completo pode ser concluído a partir do fato de que todo grafo UV é cordal, mas já havia sido observado independentemente por Colborn e Stewart [11] e [26] como conclusão de ser NP-Completo para grafos split.

O problema de encontrar um caminho hamiltoniano ou um circuito hamiltoniano em tempo polinomial para grafos de intervalo ou seu modelo (um conjunto explícito de intervalos) foi primeiramente considerado por Bertossi [3] que examinou o caso de intervalos próprios. Neste caso o problema CAMINHO HAMILTONIANO é trivial pois um caminho hamiltoniano existe se e somente se o grafo é conexo. Então, uma ordenação da esquerda para a direita dos extremos da esquerda dos intervalos fornece um caminho hamiltoniano.

Keil [31] mostrou que um circuito hamiltoniano pode ser construído para um modelo geral de intervalos (não necessariamente próprios)

A figura 6.3 resume estes resultados.

6.5 O Problema do Caminho Hamiltoniano

Um *caminho hamiltoniano* em um grafo $G = (V, E)$ é um caminho entre dois vértices de G que passa por todos os outros vértices de G . O problema CAMINHO HAMILTONIANO é o mesmo que CIRCUITO HAMILTONIANO a menos da necessidade da existência de uma aresta entre o primeiro e o último vértice do caminho. A versão decisão, deste problema, é definida como segue:

Problema: CAMINHO HAMILTONIANO

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Questão: G contém um caminho hamiltoniano?

Assim como CIRCUITO HAMILTONIANO, este problema foi amplamente estudado e também é NP-Completo para o caso de G ser um grafo arbitrário [17]. Em geral, o problema CAMINHO HAMILTONIANO é respectivamente NP-Completo e polinomial, para as mesmas classes de grafos que CIRCUITO HAMILTONIANO o é. Este fato é devido a que na maioria das vezes as transformações polinomiais para CAMINHO HAMILTONIANO são basicamente as mesmas encontradas para CIRCUITO HAMILTONIANO, acrescidas de modificações triviais.

Bertossi e Bonuccelli também trataram deste problema quando restrito a classe UV e apresentamos a seguir as modificações sugeridas por eles em [4].

Teorema 6.3 (Bertossi e Bonuccelli, 1986) CAMINHO HAMILTONIANO para grafos UV é NP-Completo.

Prova:

A transformação, como no caso do CIRCUITO HAMILTONIANO (teorema 6.1), é feita a partir do problema CIRCUITO HAMILTONIANO restrito a um grafo bipartido com grau máximo 3. A construção da árvore característica T , é feita como no teorema 6.1, com as seguintes modificações: T terá dois vértices a mais: $S_1 = \{w, s_1\}$ e $S_2 = \{x_1, s_2\}$. O novo elemento, w , também estará no clique a que x_1 pertence, isto é, K_1^x . Os dois novos cliques são adjacentes a K_1^x .

Obviamente S_1 e S_2 também são cliques maximais em G e os novos caminhos são obtidos do seguinte modo: os vértices s_1 e s_2 induzem caminhos

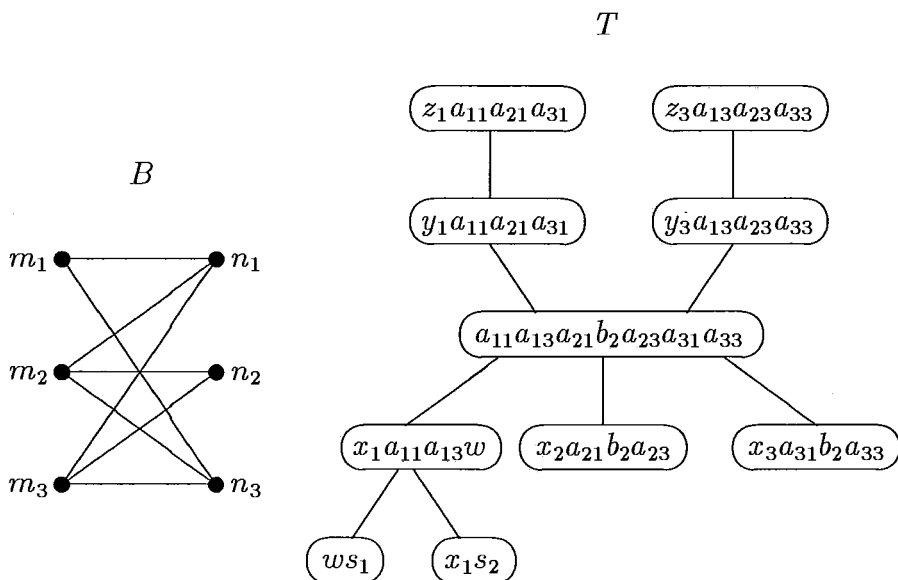


Figura 6.4: A árvore característica T , do grafo UV, G , obtida do grafo bipartido B , para CAMINHO HAMILTONIANO.

triviais e os vértices w e x_1 induzem os caminhos (K_1^x, S_1) e (K_1^x, S_2) , respectivamente.

É claro que esta árvore pode ser construída em tempo polinomial.

Devido ao fato de s_1 e s_2 terem grau 1 em G , é fácil ver que em qualquer caminho hamiltoniano em G , o primeiro vértice deve ser s_1 , seguido por w , e o último vértice deve ser s_2 , precedido por x_1 .

Seja G' o grafo obtido de G retirando-se os vértices s_1, s_2 e w . Observe que G' é o grafo obtido na transformação do teorema 6.1.

Seja D um caminho hamiltoniano em G , então $D = (s_1, w, a_{1j})D'(x_1, s_2)$, onde D' é um caminho hamiltoniano em G' . Como x_1a_{1j} é uma aresta de G' , $D'(x_1, a_{1j})$ é um circuito hamiltoniano em G' e, como foi demonstrado no teorema 6.1, existe um circuito hamiltoniano em B .

Seja C um circuito hamiltoniano em B . Pela demonstração do teorema 6.1, existe um circuito hamiltoniano D em G' . Seja x_1a_{1j} uma aresta de D . O caminho $D - x_1a_{1j}$ é um caminho hamiltoniano em G' . Logo, $(s_2, x_1)D(a_{1j}, w, s_1)$ é um caminho hamiltoniano em G . ■

Teorema 6.4 CAMINHO HAMILTONIANO para grafos DV é NP-Completo.

Prova:

Considerando a árvore orientada T , obtida na demonstração do teorema 6.2, a demonstração é a mesma do teorema anterior, bastando orientar as

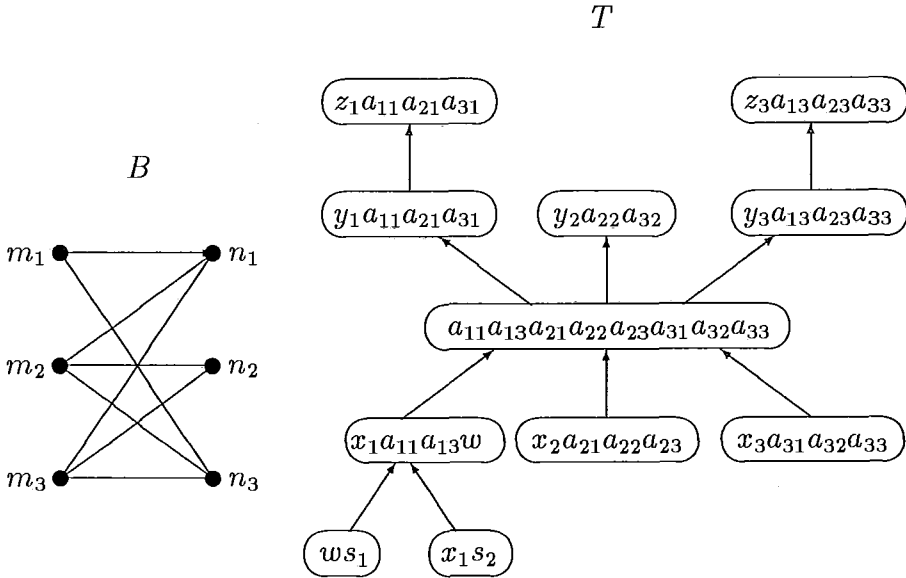


Figura 6.5: A árvore característica T , para o grafo DV, G , obtida do grafo bipartido B , para CAMINHO HAMILTONIANO.

novas arestas de S_1 para K_1^x e de S_2 para K_1^x . ■

Uma variante para o problema CAMINHO HAMILTONIANO é a seguinte:

Problema: CAMINHO HAMILTONIANO ENTRE DOIS VÉRTICES

Instância: Grafo $G = (V, E)$ e dois vértices $u, v \in V$.

Questão: G contém um caminho hamiltoniano com início em u e término em v ?

Este problema também é NP-Completo no caso geral e, as demonstrações de que continua NP-Completo quando restrito a grafos UV ou DV são as mesmas apresentadas para CAMINHO HAMILTONIANO, considerando os vértices s_1 e s_2 da transformação como o início e o fim do caminho. Além disso, este problema é NP-Completo quando restrito a classes em que CIRCUITO HAMILTONIANO é NP-Completo pois, se existisse um algoritmo polinomial que resolvesse CAMINHO HAMILTONIANO ENTRE DOIS VÉRTICES para uma determinada classe de grafos, a aplicação deste algoritmo a cada aresta do grafo forneceria um algoritmo polinomial para resolver CIRCUITO HAMILTONIANO restrito a esta classe de grafos.

Capítulo 7

O Problema do Isomorfismo de Grafos

Dois grafos $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ são *isomorfos* se, e somente se, existe uma bijeção ϕ , de V em W , tal que vw é uma aresta de E se e somente se $\phi(v)\phi(w)$ for uma aresta de F . Tal bijeção é chamada um *isomorfismo* de G em H .

O Problema do isomorfismo de grafos, versão decisão, pode ser apresentado do seguinte modo:

Problema: ISOMORFISMO

Instância: Dois grafos $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$.

Questão: G e H são isomorfos?

Até hoje, nenhum algoritmo de tempo polinomial para resolver ISOMORFISMO foi encontrado e nem se sabe se o problema é NP-Completo. Há pelo menos alguma evidência teórica de que ISOMORFISMO não é NP-Completo pois, se fosse, a hierarquia polinomial de Meyer-Stockmeyer colapsaria a seu segundo nível [43].

Os estudos de restrições e generalizações de ISOMORFISMO resultaram em uma classe de problemas que são “tão difíceis de resolver” quanto o problema de isomorfismo para grafos arbitrários. Estes problemas, polinomialmente equivalentes a ISOMORFISMO, são chamados, por analogia a NP-Completo, de *Isomorfismo-Completo* ou simplesmente, *I-completo* [17].

Uma motivação para mostrar que um problema é I-Completo é que a descoberta de um algoritmo polinomial para algum problema nesta classe resulta na existência de um algoritmo polinomial para cada problema da classe. E, mostrar que um problema nesta classe é NP-Completo, resulta em todos os problemas I-Completo serem NP-Completo.

Seja \mathcal{G} a classe de todos os grafos e \mathcal{C} uma subclasse própria de \mathcal{G} . Para mostrarmos que decidir se existe um isomorfismo entre dois grafos de \mathcal{C} é tão difícil quanto decidir se existe um isomorfismo entre dois grafos arbitrários de \mathcal{G} , devemos mostrar que existe uma transformação T de \mathcal{G} em \mathcal{C} , que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $T(G) \in \mathcal{C}$, para todo $G \in \mathcal{G}$;
2. $T(G)$ e $T(H)$ são isomorfos se e somente se G e H o são;
3. $T(G)$ pode ser computada em tempo polinomial na ordem de G .

Tais transformações são conhecidas para muitas classes de grafos tais como: bipartidos, comparabilidade, regulares (todos os vértices têm o mesmo grau), eulerianos (todos os vértices têm grau par), hamiltonianos e muitas outras. Booth e Colbourn [6] apresentam mais de vinte classes de grafos para as quais existem tais transformações.

Para árvores, grafos planares, grade, permutação, RDV, de intervalo e outros, existem algoritmos polinomiais que constroem o isomorfismo, quando ele existir [17,29,30,34,15].

Vamos apresentar aqui a transformação para grafos UV, devida a Booth [6]. Reproduzimos ainda, em linhas gerais, o algoritmo polinomial apresentado por Paul Dietz [15] que encontra o isomorfismo, se existir, entre grafos RDV e o algoritmo de Booth e Lueker [34] para ISOMORFISMO restrito a grafos de intervalo.

Para grafos DV o problema ISOMORFISMO continua em aberto.

7.1 ISOMORFISMO para grafos UV

Seja $G = (V, E)$ um grafo, com $V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E_G = \{e_1, \dots, e_m\}$. O *grafo subdivisão* de G , denotado $S(G)$, é obtido pela subdivisão de cada aresta de G por um novo vértice. Então $V_{S(G)} = \{v_1, \dots, v_n, v_{e_1}, \dots, v_{e_m}\}$ e $E_{S(G)} = \{e'_1, e''_1, \dots, e'_m, e''_m\}$, onde e'_i e e''_i são as arestas obtidas pela subdivisão da aresta e_i pelo vértice v_{e_i} . Chamaremos os vértices $v_i, 1 \leq i \leq n$ de *originais* e os vértices $v_{e_j}, 1 \leq j \leq m$ de *novos*.

Conectando os vértices novos de $S(G)$, dois a dois, obtem-se o grafo $US(G)$.

Lema 7.1 *O grafo $US(G)$ é UV, para todo grafo G .*

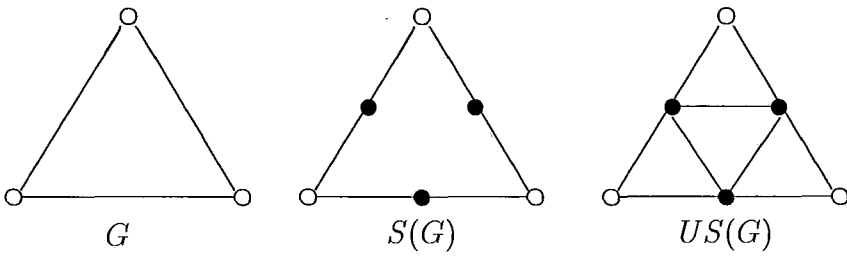


Figura 7.1: Exemplo da transformação US

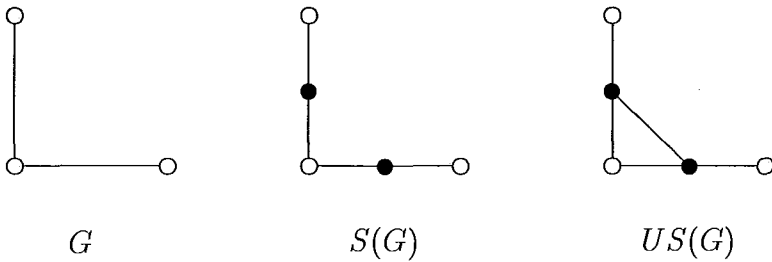


Figura 7.2: Um grafo $US(G)$ degenerado

Prova:

Observando os cliques maximais de $US(G)$, notamos que os vértices novos formam um clique maximal dominante, quando $m > 2$, e que cada vértice original, junto com os vértices novos adjacentes a ele, formam um clique maximal. A árvore característica T de $US(G)$ será uma n -estrela tendo no centro o clique formado pelos vértices novos e cujas folhas são os n cliques, cada um contendo um vértice original.

Cada vértice v_i está em um único clique maximal de $US(G)$, que é uma folha em T . Cada vértice v_{e_j} está em três cliques maximais de $US(G)$, a saber, no centro de T e nas folhas onde estão os extremos, em G , de e_j . Logo, cada vértice de $US(G)$ induz um caminho em T .

A figura 7.2 mostra um exemplo em que G tem duas arestas e o clique formado pelos vértices novos, não é maximal. Nos casos em que $m \leq 2$, a árvore T nem sempre se comporta como na descrição acima, mas é fácil verificar que $US(G)$ também é UV. ■

Teorema 7.1 (Booth, 1976) ISOMORFISMO para grafos UV é I-Completo.

Prova:

Dados dois grafos G e H , basta considerar a transformação US , que claramente pode ser computada em tempo polinomial, na ordem de G .

Resta mostrar que G e H são isomorfos se e somente se $US(G)$ e $US(H)$ o são.

(\Rightarrow) Seja $\phi : V_G \rightarrow V_H$ um isomorfismo. Um isomorfismo ψ de $US(G)$ em $US(H)$ é definido da seguinte maneira:

Se v é vértice original, $\psi(v) = \phi(v)$;

Se v é vértice novo, sejam v_i e v_j os dois vértices originais adjacentes a v em G , $\psi(v)$ será igual ao vértice novo, adjacente aos vértices originais $\phi(v_i)$ e $\phi(v_j)$ em H .

(\Leftarrow) Seja $\psi : V_{US(G)} \rightarrow V_{US(H)}$ um isomorfismo. A restrição de ψ aos vértices originais em $US(G)$ fornece um isomorfismo de G em H . ■

O fato de que ISOMORFISMO para grafos cordais também é I-Completo é uma conseqüência do Teorema 7.1 e do fato de todo grafo UV ser cordal. Uma transformação polinomial para este caso pode ser encontrada em [6] ou [34].

7.2 ISOMORFISMO para grafos RDV

Paul Dietz, em sua tese de doutorado, de 1984, deu um algoritmo polinomial (mas não linear) para decidir se dois hipergrafos RDV são isomorfos. Como dois grafos RDV são isomorfos se, e somente se, os duais de seus hipergrafos clique são isomorfos, o algoritmo permite decidir rapidamente se dois grafos RDV são isomorfos (usando o fato que o hipergrafo clique de um grafo cordal pode ser encontrado em tempo linear com o algoritmo de Rose-Tarjan-Lueker). Os algoritmos por ele apresentados usam uma variante do algoritmo para isomorfismo de árvores PQ de Lueker e Booth, que por sua vez é baseado no algoritmo clássico, de tempo polinomial, para isomorfismo de árvores.

7.3 ISOMORFISMO para grafos de intervalo

Lueker e Booth [34], em 1979, mostraram que para grafos de intervalo, ISOMORFISMO pode ser decidido em tempo $O(m + n)$. Primeiro, constrói-se uma árvore PQ para cada grafo, depois atribui-se rótulos para as árvores, de maneira que as árvores rotuladas representem os grafos a menos de isomorfismo e, então compara-se as árvores usando uma versão modificada do algoritmo de isomorfismo para árvores.

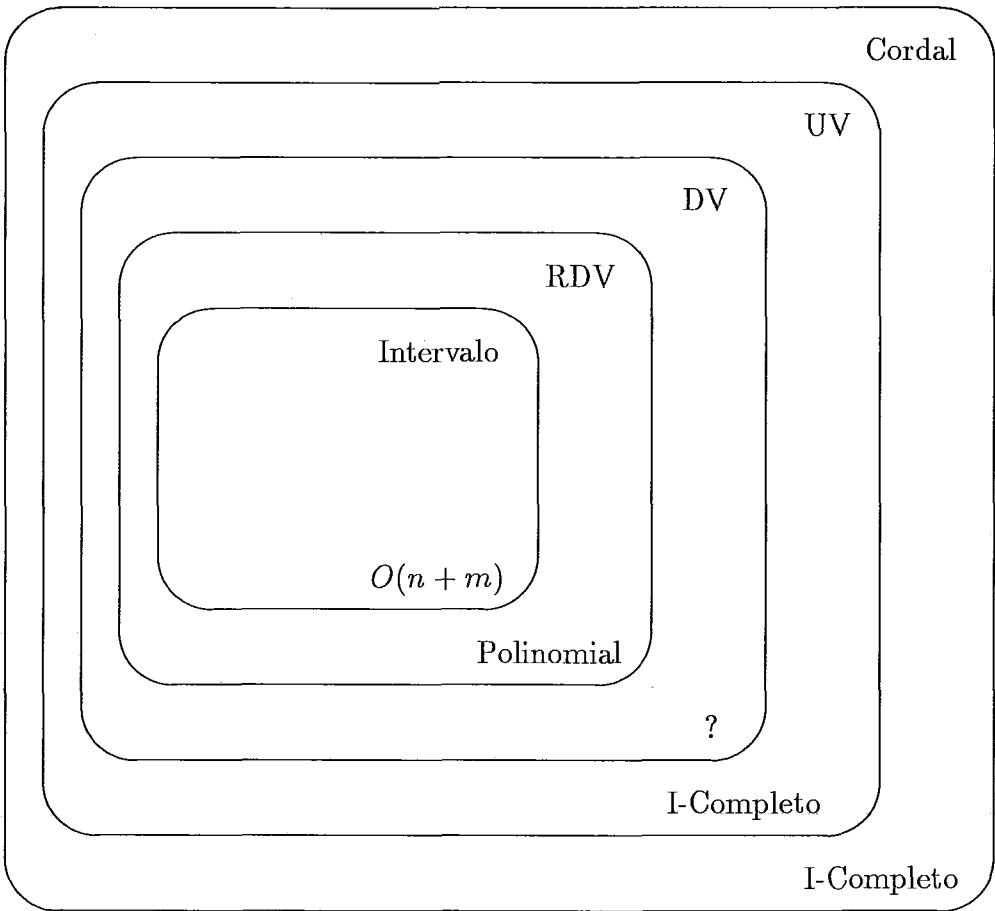


Figura 7.3: Complexidade do ISOMORFISMO

A figura 7.3 mostra o estado atual do problema.

Capítulo 8

Conclusão

Neste capítulo, revisamos os problemas em aberto citados no decorrer do texto como forma de sugerir direções para pesquisas futuras no assunto.

Em primeiro lugar, quanto a caracterizações de grafos de caminho, seria interessante determinar uma estrutura que acarretasse em um algoritmo para o reconhecimento destas classes de grafos, de complexidade linear no tamanho do grafo. Há necessidade também de encontrar um algoritmo de reconhecimento exclusivo para grafos DV que construísse uma árvore característica para o grafo. A existência deste algoritmo facilitaria o tratamento de problemas restritos a esta classe de grafos. Seria ainda interessante melhorar o algoritmo que constrói uma árvore característica para grafos UV ou RDV, de forma a diminuir sua complexidade.

Uma outra possibilidade, agora para o estudo teórico da classe dos grafos de caminho é determinar como estas classes se relacionam com outras classes de grafos tais como, grafos de comparabilidade, grafos split, grafos arco-circulares, grafos de permutação, etc.

Quanto aos problemas tratados neste trabalho, nem CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO nem ISOMORFISMO para grafos DV foram até o momento, resolvidos. Aliás, existe um único trabalho que trata de um problema exclusivo para grafos DV, que é o de Narasimhan sobre CIRCUITO HAMILTONIANO. O problema CIRCUITO HAMILTONIANO por sua vez, não está resolvido para grafos RDV. Não se conjectura para nenhum destes três problemas a que classe de complexidade cada um pertence.

A busca de problemas separadores para grafos cordais e UV teve seu fim com CLIQUE DOMINANTE MÍNIMO, mas continua em aberto para UV e DV, DV e RDV e também para RDV e de intervalo. CIRCUITO HAMILTONIANO é candidato para uma das duas últimas, enquanto que CONJUNTO DOMINANTE MÍNIMO o é para uma das duas primeiras.

Grafos de caminho são um tópico ainda pouco difundido da teoria dos grafos. Como observamos acima, existem várias possibilidades para complementação deste estudo. Esperamos que o leitor, após o estudo deste texto sintá-se motivado a prosseguir na investigação de resultados ainda não estabelecidos para estas classes de grafos.

Bibliografia

- [1] A.V. AHO, J.E. HOPCROFT E J.D. ULLMAN, “Data structures and algorithms”, Reading, Addison-Wesley, 1983.
- [2] C. BERGE, “Hypergraphs: Combinatorics of finite sets”, Amsterdam, Elsevier, 1989.
- [3] A.A. BERTOSSI, Finding hamiltonian circuits in proper interval graphs, *Information Processing Letters* **17** (1983), pp. 97–101.
- [4] A.A. BERTOSSI E M.A. BONUCCELLI, Hamiltonian circuits in interval graph generalizations, *Information Processing Letters* **23** (1986), pp. 195–200.
- [5] J.A. BONDY E U.S.R. MURTY, “Graph theory with applications”, London, MacMillan, 1976.
- [6] K.S. BOOTH E C.J. COLBOURN, “Problems polynomially equivalent to graph isomorphism”, Relatório Técnico CS-77-04, University of Waterloo, 1979.
- [7] K.S. BOOTH E J.H. JOHNSON, Dominating sets in chordal graphs, *SIAM Journal on Computing* **11** (1982), pp. 191–199.
- [8] K.S. BOOTH E G.S. LEUKER, Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms, *Journal of Computer System Sciences* **13** (1976), pp. 335–379.
- [9] A. BRANDSTÄDT E D. KRATSCH, On domination problems for permutation and other graphs, *Theoretical Computer Science* **54** (1987), pp. 181–198.
- [10] C.J. COLBOURN, “A bibliography of the graph isomorphism problem”, Relatório Técnico 123/78, University of Toronto, 1978.

- [11] C.J. COLBOURN E L.K. STEWART, Dominating cycles in series-parallel graphs, *ARS Combinatoria* **19A** (1985), pp. 107–112.
- [12] D.G. CORNEIL E Y. PERL, Clustering and domination in perfect graphs, *Discrete Applied Mathematics* **9** (1984), pp. 27–39.
- [13] P. DAMASCHKE, The hamiltonian circuit problem for circle graphs is NP-Complete, *Information Processing Letters* **32** (1989), pp. 1–2.
- [14] J.S. DEOGUN E G. STEINER, “Polynomial algorithms for hamiltonian cycle in co-comparability graphs”, Relatório Técnico 145, University of Nebraska, 1991.
- [15] P.F. DIETZ, “Intersection graph algorithms”, Tese de Doutorado, Cornell University, 1984.
- [16] D.R. FULKERSON E O.A. GROSS, Incidence matrices with the consecutive 1’s property, *Bulletin of the American Mathematical Society* **70** (1964), pp. 681–684.
- [17] M.R. GAREY E D.J. JOHNSON, “Computers and intractability: a guide to the theory of NP-Completeness”, New York, Freeman, 1979.
- [18] M.R. GAREY, D.S. JOHNSON E R.E. TARJAN, The planar hamiltonian circuit problem is NP-Complete, *SIAM Journal on Computing* **5** (1976), pp. 704–714.
- [19] F. GAVRIL, Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph, *SIAM Journal on Computing* **1** (1972), pp. 180–187.
- [20] F. GAVRIL, The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **16** (1974), pp. 47–56.
- [21] F. GAVRIL, A recognition algorithm for the intersection graphs of directed paths in directed trees, *Discrete Mathematics* **13** (1975), pp. 237–249.
- [22] F. GAVRIL, A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees, *Discrete Mathematics* **23** (1978), pp. 211–227.
- [23] M.C. GOLUMBIC, “Algorithmic graph theory and perfect graphs”, New York, Academic Press, 1980.

- [24] M.C. GOLUMBIC E J.A. JAMISON, Edge and vertex intersection of paths in a tree, *Discrete Mathematics* **55** (1985), pp. 151–159.
- [25] M.C. GOLUMBIC E J.A. JAMISON, The edge intersection graphs of paths in a tree, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **38** (1985), pp. 8–22.
- [26] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, The hamiltonian circuit problem is polynomial for 4-connected planar graphs, *SIAM Journal on Computing* **11** (1982), pp. 529–539.
- [27] A. ITAI, C.H. PAPADIMITRIOU E J.L. SZWARCFITER, Hamilton paths in grid graphs, *SIAM Journal on Computing* **11** (1982), pp. 676–686.
- [28] D.S. JOHNSON, The NP-Completeness column: an ongoing guide – tenth edition, *Journal of Algorithms* **5** (1984), pp. 147–160.
- [29] D.S. JOHNSON, The NP-Completeness column: an ongoing guide – sixteen edition, *Journal of Algorithms* **6** (1985), pp. 434–451.
- [30] D.S. JOHNSON, The NP-Completeness column: an ongoing guide – twentieth edition, *Journal of Algorithms* **8** (1987), pp. 438–448.
- [31] J.M. KEIL, Finding hamiltonian circuits in interval graphs, *Information Processing Letters* **20** (1985), pp. 201–206.
- [32] D. KRATSCH, Finding dominating cliques efficiently in strongly chordal graphs and undirected path graphs, *Discrete Mathematics* **86** (1990), pp. 225–238.
- [33] D. KRATSCH, P. DAMASCHKE E A. LUBIW, Dominating cliques in chordal graphs, *Discrete Mathematics*, aceito.
- [34] G.S. LUEKER E K.S. BOOTH, A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism, *Journal of the Association for Computing Machinery* **26** (1979), pp. 183–195.
- [35] G.K. MANACHER, T.A. MANKUS E C.J. SMITH, An optimum $\Theta(n \log n)$ algorithm for finding a canonical hamiltonian path and a canonical hamiltonian circuit in a set of intervals, *Information Processing Letters* **35** (1990), pp. 205–211.

- [36] A. MANSFIELD, Determining the thickness of graphs is NP-Hard, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **93** (1982), pp. 9–23.
- [37] C.L. MONMA E V.K. WEI, Intersection graphs of paths in a tree, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **41** (1986), pp. 141–181.
- [38] G. NARASIMHAN, A note on the hamiltonian circuit problem on directed path graphs, *Information Processing Letters* **32** (1989), pp. 167–170.
- [39] R.C. READ E D.G. CORNEIL, The graph isomorphism disease, *Journal of Graph Theory* **1** (1977), pp. 339–363.
- [40] P.L. RENZ, Intersection representations of graphs by arcs, *Pacific Journal of Mathematics* **34** (1970), pp. 501–510.
- [41] D. ROSE, R. TARJAN E G. LEUKER, Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, *SIAM Journal on Computing* **5** (1976), pp. 266–283.
- [42] R. SCHEINERMAN, Characterizing intersection classes of graphs, *Discrete Mathematics* **55** (1985), pp. 185–193.
- [43] U. SCHÖNING, Graph isomorphism is in the low hierarchy, *Journal of Computer and System Sciences* **37** (1988), pp. 312–323.
- [44] M.M. SYSLO, The Helly-type property of non-trivial intervals on a tree, *Discrete Mathematics* **37** (1981), pp. 297–298.
- [45] R.E. TARJAN, Decomposition by clique separators, *Discrete Mathematics* **55** (1985), pp. 221–232.