

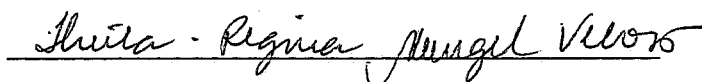
GRAFOS DE INTERVALO:

CARACTERIZAÇÕES, PROBLEMAS E ALGORITMOS

Fábio Protti

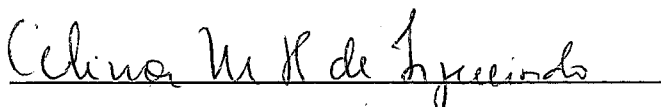
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



Sheila Regina Murgel Veloso, D.Sc.

(Presidente)



Celina Herrera de Figueiredo, D.Sc.



Oscar Porto, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Abril de 1993

PROTTI, FÁBIO

Grafos de Intervalo: Caracterizações, Problemas e Algoritmos  
[Rio de Janeiro] 1993

xi, 208 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e  
Computação, 1993)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Grafos 2. Algoritmos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A meus pais,  
com carinho

## Agradecimentos

Ao Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, pela sua competência em orientar-me no discernimento daquilo que era realmente relevante na confecção desta dissertação.

À Prof. Celina H. de Figueiredo, pelas suas importantes observações e pelo encorajamento que me deu na parte final do trabalho.

À Prof. Sheila Regina Murgel Veloso, pela constante atenção a mim dispensada desde meu ingresso como aluno na COPPE.

Às secretárias do Programa de Sistemas, pelo seu trabalho sempre eficiente e pela "quebra dos galhos" nas minhas necessidades.

Ao CNPq e à FAPERJ, pelo apoio financeiro concedido.

Aos meus pais, familiares e amigos, que embora não tenham colaborado diretamente na confecção deste trabalho, fizeram mais do que isso.



Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências ( M.Sc. )

## Grafos de Intervalo: Caracterizações, Problemas e Algoritmos

Fábio Protti

Orientador: Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O estudo dos grafos perfeitos, grafos cujos subgrafos induzidos possuem número cromático e tamanho de clique máxima iguais, necessariamente deve incluir estudos sobre muitas subclasses importantes : grafos de comparabilidade, grafos triangularizados, grafos de permutação, "threshold graphs" e grafos de intervalo, para citar apenas algumas.

O objetivo desta dissertação é fazer uma resenha, tão completa quanto possível, de uma destas subclasses, os chamados grafos de intervalo, grafos isomorfos a um conjunto de intervalos.

Este trabalho se divide essencialmente em três partes. A primeira parte se dedica a coletar as caracterizações mais importantes e úteis ( de um ponto de vista algorítmico ) dos grafos de intervalo ( Capítulo 2 ) e dos grafos de indiferença ( Capítulo 3 ), uma conhecida subclasse dos grafos de intervalo na qual os grafos podem ser representados por modelos onde todos os intervalos têm

o mesmo comprimento.

A segunda parte trata de problemas em teoria dos grafos restritos ao caso dos grafos de intervalo: Reconhecimento e Isomorfismo ( Capítulo 4 ), Conjunto Independente Máximo, Cobertura Mínima por Cliques, Coloração Mínima, Caminho Hamiltoniano, Circuito Hamiltoniano, Conjunto Dominante Mínimo, entre outros ( Capítulo 5 ). Os algoritmos propostos para a solução destes e de outros problemas, como é lógico, fazem largo uso das caracterizações previamente descritas e de propriedades matemáticas afins satisfeitas pela estrutura dos grafos de intervalo. Estas caracterizações e propriedades permitem-nos reduzir a complexidade de tempo requerida para a solução de problemas que, para grafos em geral, exigem complexidades maiores - muitos deles NP-completos.

Finalmente, a terceira parte contém alguns tópicos relacionados com o estudo dos grafos perfeitos: o número de intervalo, o "interval count", hipergrafos de intervalo, grafos de intersecção e digrafos de intervalo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science ( M.Sc.)

## Interval Graphs: Characterizations, Problems and Algorithms

Fábio Protti

Thesis Supervisor: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Computer Systems Engineering

The study of interval graphs, graphs whose induced subgraphs have chromatic number equal to the size of a maximum clique, includes necessarily studies on many important subclasses of them : comparability graphs, triangulated graphs, permutation graphs, threshold graphs, and interval graphs, to name just a few.

The purpose of this dissertation is to present a survey, as complete as possible, on one of these classes, the so called interval graphs, graphs that are isomorphic to a set of intervals.

This work is essentially divided in three parts. The first is devoted to collecting the most important and useful ( from an algorithmic point of view ) characterizations of interval graphs ( Chapter 2 ) and indifference graphs ( Chapter 3 ), a well-known subclass of interval graphs in which graphs can be represented by models where all the intervals have the same length.

The second part deals with problems in graph theory

restricted to the case of interval graphs: Recognition and Isomorphism ( Chapter 4 ), Maximum Independent Set, Minimum Clique Cover, Minimum Coloring, Hamiltonian Path, Hamiltonian Circuit, Minimum Dominating Set, and others ( Chapter 5 ). The algorithms that have been proposed for the solution of these and other problems, of course, make heavy use of the characterizations previously described and related mathematical properties satisfied by the structure of interval graphs. These characterizations and properties allow us to reduce the time complexity required to solve problems that for graphs in general require larger time complexities - many of them NP-complete.

Finally, the third part includes some topics related to the study of interval graphs: the "interval number", the "interval count", interval hypergraphs, intersection graphs, and interval digraphs.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 1. DEFINIÇÕES. APLICAÇÕES DE GRAFOS DE INTERVALO. ....	5
1.1. Conjuntos, Relações Binárias .....	5
1.2. O Conceito de Grafo .....	6
1.3. Grafo não Direcionado, Grafo Orientado, Orientação, Caminhos, Ciclos .....	8
1.4. Grafo Triangularizado, Grafo de Intervalo, Modelo de Intervalo .....	11
1.5. Algumas Aplicações dos Grafos de Intervalo .....	14
1.5.1. Psicologia .....	14
1.5.2. Associação de Frequências de Rádio .....	15
1.5.3. Sincronização de Sinais de Trânsito .....	16
1.5.4. Ecologia .....	16
1.5.5. Química .....	17
1.5.6. Otimização de Armazenamento em Memória .....	18
1.5.7. Arqueologia .....	18
1.5.8. Genética .....	19
CAPÍTULO 2. CARACTERIZAÇÕES DOS GRAFOS DE INTERVALO .....	21
2.1. Triplas Asteroideais e Subgrafos Proibidos .....	21
2.2. Co-comparabilidade e Ordenação das Cliques Maximais ...	39
2.3. Ordens de Intervalo .....	47

2.4. Ordenação para Coloração .....	51
2.5. Circuitos .....	53
CAPÍTULO 3. GRAFOS DE INDIFERENÇA .....	56
3.1. Preferência e Indiferença, Semi-ordens .....	56
3.2. Vértices Extremos, Grafos de Indiferença Estruturados .	64
3.3. Grafos de Intervalo Unitário e de Intervalo Próprio ...	76
3.4. Caracterização por Grafos de Comparabilidade Local ....	78
CAPÍTULO 4. RECONHECIMENTO E ISOMORFISMO .....	82
4.1. Introdução .....	82
4.2. Algoritmo de Reconhecimento de Grafos de Intervalo ....	83
4.2.1. PQ-árvores .....	83
4.2.2. Redução de PQ-árvores .....	90
4.2.3. Implementação do Algoritmo de Redução .....	97
4.2.4. Aplicação do Algoritmo de Redução aos Grafos de Intervalo .....	105
4.3. Algoritmo para Verificar Isomorfismo entre Grafos de Intervalo .....	109
CAPÍTULO 5. OS GRAFOS DE INTERVALO COMO GRAFOS PERFEITOS. ALGUNS ALGORITMOS EM GRAFOS DE INTERVALO .....	124
5.1. Introdução .....	124
5.2. Grafos Perfeitos .....	124
5.3. Algoritmos em Grafos de Intervalo .....	134

5.3.1. Conjunto Estável Máximo .....	135
5.3.2. Cobertura Mínima por Cliques Maximais .....	137
5.3.3. Coloração Mínima, Clique Máxima .....	139
5.3.4. Caminho/Circuito Hamiltoniano .....	144
5.3.5. Conjunto Dominante Mínimo .....	157
5.3.6. Outros Algoritmos .....	160
CAPÍTULO 6. TÓPICOS VARIADOS. ....	163
6.1. O Número de Intervalo .....	163
6.2. O "Interval Count" .....	179
6.3. Hipergrafos de Intervalo .....	183
6.4. Os Grafos de Intervalo como Grafos de Intersecção .....	191
6.5. Digrafos de Intervalo .....	195
CAPÍTULO 7. CONCLUSÕES .....	197
BIBLIOGRAFIA .....	201

## INTRODUÇÃO

Claude Berge, no início da década de 60, definiu a classe dos "grafos perfeitos", grafos cujos subgrafos induzidos têm número cromático e tamanho de clique máxima iguais. Após seu surgimento, se multiplicaram os trabalhos sobre eles, e hoje se conhece muitas classes e sub-classes de grafos incluídas na dos perfeitos, tais como os de comparabilidade, os triangularizados, os de permutação e os de intervalo.

Uma linha de pesquisa no estudo dos grafos perfeitos tem sido a de procurar propriedades matemáticas e algorítmicas de tais classes, resultando daí extensa literatura. As pesquisas não raro são motivadas pela sua aplicabilidade em problemas reais: sincronização de processos paralelos, otimização de espaço de memória, seqüenciamento de tarefas, "sorting" e análise de estruturas genéticas, para citar alguns.

Uma preocupação constante nas investigações é a de reduzir a complexidade de certos problemas, pois alguns deles - NP-completos no caso geral - tornam-se tratáveis quando restritos aos grafos perfeitos ou a algumas de suas sub-classes. O cálculo do número cromático, p.ex., pode ser feito em tempo polinomial para grafos perfeitos ; o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano, embora permaneça NP-completo restrito aos grafos perfeitos, pode ser resolvido em tempo polinomial para os grafos de intervalo.



Nesta dissertação trataremos de uma dessas sub-classes dos grafos perfeitos, os GRAFOS DE INTERVALO. Hajós estudou-os pela primeira vez em 1957, considerando o problema de, dado um grafo, saber se é possível associar a cada vértice um intervalo sobre uma reta de modo que dois vértices estão conectados por aresta se e somente se os correspondentes intervalos associados se interceptam. Os grafos de intervalo estão, assim, inseridos no contexto mais geral dos grafos de intersecção, constituindo-se num dentre os exemplos mais clássicos deste amplo paradigma.

Mais tarde, Gilmore e Hoffman mostraram que os grafos de intervalo são os grafos triangularizados cujos complementos são grafos de comparabilidade, o que é uma caracterização bastante forte e que proporcionou a descoberta de muitas propriedades interessantes, tal como a "propriedade dos 1's consecutivos para colunas", proveniente de uma formulação matricial dos resultados de Gilmore e Hoffman. Outro fruto é um algoritmo linear de reconhecimento de grafos de intervalo por Booth e Lueker.

Grande parte dos problemas clássicos conhecidos em grafos podem ser resolvidos em tempo polinomial para grafos de intervalo, tais como CONJUNTO ESTÁVEL MÁXIMO, CLIQUE MÁXIMA, NÚMERO CROMÁTICO e CIRCUITO HAMILTONIANO, entre outros. Alguns ainda estão aparentemente em aberto, como CORTE PONDERADO DE ARESTAS MÁXIMO e ÍNDICE CROMÁTICO. Não se conhece nenhum problema NP-completo para grafos de intervalo; resta uma possibilidade para os dois últimos citados, embora pareça mais provável que eles também não o sejam.

O objetivo desta dissertação é procurar coletar e organizar o material existente sobre os grafos de intervalo, classificando-o de maneira a facilitar a consulta sobre o tema. Houve um esforço de sistematização e uniformização de diferentes notações, especialmente no tocante à formulação das caracterizações e sua conseqüente aplicação nos algoritmos que delas se servem. Quando julgamos oportuno para uma maior clareza e fluência da exposição, fornecemos demonstrações alternativas dos resultados e comentários que procurassem relacionar estes diversos resultados com as idéias geométricas subjacentes e as propostas algorítmicas futuras. Procuramos também relacionar os problemas ainda abertos e, na medida do possível, subsídios para um início de investigação dos mesmos.

Este trabalho se encontra assim estruturado : no primeiro capítulo tratamos das definições que serão utilizadas ao longo da exposição; fornecemos também uma introdução aos grafos de intervalo, definindo-os e descrevendo algumas de suas aplicações.

No Capítulo 2 tratamos das diversas caracterizações dos grafos de intervalo.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de uma sub-classe muito importante dos grafos de intervalo, os GRAFOS DE INDIFERENÇA. Seguindo o método do Capítulo 2, procuramos enfocar sobretudo as diversas caracterizações existentes para esta sub-classe.

No Capítulo 4 descrevemos minuciosamente algoritmos lineares

de reconhecimento e verificação de isomorfismo para grafos de intervalo. Os algoritmos são da autoria de Booth e Lueker.

No capítulo 5 procuramos localizar os grafos de intervalo no universo dos grafos perfeitos e estudar como se comportam alguns problemas conhecidos em teoria dos grafos quando restritos à classe dos grafos de intervalo; tratamos dos "quatro problemas clássicos" em grafos perfeitos ( CLIQUE MÁXIMA, CONJUNTO ESTÁVEL MÁXIMO, COLORAÇÃO MÍNIMA e COBERTURA POR CLIQUES MÍNIMA ) e de outros problemas ( CAMINHO/CIRCUITO HAMILTONIANO, CONJUNTO DOMINANTE ).

O Capítulo 6 inclui vários tópicos relacionados com o estudo dos grafos de intervalo. Podemos citar o INTERVAL COUNT  $c(G)$  - o número mínimo possível de comprimentos diferentes de intervalos em representações por intervalos de um grafo de intervalo  $G$  dado - e o NÚMERO DE INTERVALO  $i(G)$ , que assim se define: representando cada vértice  $v$  de um grafo  $G$  por uma coleção de  $t$  intervalos fechados finitos  $I_{v,1}, \dots, I_{v,t}$  de tal modo que dois vértices  $v$  e  $w$  são adjacentes se e somente se algum intervalo  $I_{v,i}$  intercepta algum intervalo  $I_{w,j}$ ,  $i(G)$  é o menor inteiro  $t \geq 0$  para o qual tal representação de  $G$  é possível.

No último capítulo apresentamos nossas conclusões.

## CAPÍTULO 1

### DEFINIÇÕES

#### APLICAÇÕES DE GRAFOS DE INTERVALO

##### 1.1. CONJUNTOS, RELAÇÕES BINÁRIAS

Seguindo a notação usual da matemática,  $x \in X$  indica que  $x$  é um elemento do conjunto  $X$  e  $A \subseteq X$  que  $A$  é um subconjunto de  $X$  ( não necessariamente próprio ). A cardinalidade ou tamanho de  $X$  é denotada por  $|X|$ . Para subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ , as notações  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  e  $A - B$  denotam as operações usuais de intersecção, união e subtração de conjuntos. Quando  $A$  e  $B$  são subconjuntos disjuntos, freqüentemente se denota a união entre eles com um sinal de adição :  $C = A + B$  indica que  $A \cap B = \emptyset$  e  $C = A \cup B$ , onde  $\emptyset$  é o conjunto vazio.

Uma coleção  $\langle X_i \rangle_{i \in I}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é uma partição de  $X$  se  $\bigcup_{i \in I} X_i = X$  e  $X_i \cap X_j = \emptyset$  para  $i, j \in I$  (  $i \neq j$  ).

Uma relação binária  $R$  sobre um conjunto  $X$  é um subconjunto de  $X \times X$ , e pode satisfazer uma ou mais das seguintes propriedades:

- . simétrica :  $(x, x') \in R \rightarrow (x', x) \in R$ ;
- . anti-simétrica :  $(x, x') \in R \rightarrow (x', x) \notin R$ , para  $x \neq x'$ ;
- . reflexiva :  $(x, x) \in R$ ,  $\forall x \in X$ ;
- . irreflexiva :  $(x, x) \notin R$ ,  $\forall x \in X$ ;
- . transitiva:  $(x, y) \in R$ ,  $(y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$ ;

. anti-transitiva:  $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \notin R$ .

$R$  é dita relação de equivalência se é reflexiva, simétrica e transitiva; é uma ordem parcial se é transitiva; é uma ordem parcial estrita se é transitiva e irreflexiva ( e, portanto, anti-simétrica ); é uma ordem linear se é transitiva e, dados  $x,y \in R$  distintos, ou  $(x,y) \in R$  ou  $(y,x) \in R$  ( exclusivamente ). Definimos a relação  $R^{-1}$  como a relação  $\{ (x,y) \mid (y,x) \in R \}$ .

## 1.2. O CONCEITO DE GRAFO

Um grafo  $G = (V,E)$  consiste num conjunto finito  $V$  e numa relação binária  $E \subseteq V \times V$ . Podemos nos referir a um grafo também como digrafo ou grafo direcionado.  $V$  é chamado conjunto de vértices e  $E$  conjunto de arestas ou arestas orientadas ou arestas direcionadas. Frequentemente utilizaremos a notação  $V_G$  e  $E_G$  para denotarmos os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente, de um grafo  $G$ .

Ao longo do texto, a relação binária  $E$  será usualmente considerada irreflexiva. Quando se indicar qualquer variação, uma aresta da forma  $(v,v)$  será chamada "loop".

Usaremos a notação  $vw$  para indicar a aresta  $(v,w)$ ; diremos que a aresta  $vw$  incide sobre o vértice  $w$  e que  $vw$  conecta os vértices  $v$  e  $w$ . Diremos também que  $v$  e  $w$  são vértices (ou pontos) extremos de  $vw$ , e que  $v$  é o início e  $w$  é o término da aresta  $vw$ . Algumas vezes, utilizaremos uma letra minúscula para designar uma aresta ( p.ex.,  $e = vw$  ).

Diremos que um grafo  $G$  é vazio se  $VG = \emptyset$ . Denotaremos o grafo vazio por  $\emptyset$ , como para conjuntos.

Diremos que um grafo  $G$  está contido em um grafo  $H$ , fato que denotaremos por  $G \subseteq H$ , se  $VG \subseteq VH$  e  $EG \subseteq EH$ . Alternativamente, diremos que  $H$  contém  $G$  ( $H \supseteq G$ ).

Um grafo  $G$  será um subgrafo de  $H$  se  $G \subseteq H$ ; nesse caso, diremos alternativamente que  $H$  é um supergrafo de  $G$ . O grafo  $G$  será um subgrafo induzido de  $H$  se, além disso, vale:  $vw \in EH$  e  $v, w \in VG \Rightarrow vw \in EG$ .

Diremos por simplificação que um vértice  $v$  pertence ( ou está contido em  $G$  ) se  $v \in VG$ , e que  $G$  contém  $v$ . De maneira semelhante:

(i) diremos que uma aresta  $vw$  pertence a  $G$  ( ou está contida em  $G$  ) se  $vw \in EG$ , e que  $G$  contém  $vw$ ;

(ii) diremos que um conjunto  $Y$  de vértices ( ou arestas ) está contido em  $G$  se  $Y \subseteq VG$  (  $Y \subseteq EG$  ), e que  $G$  contém  $Y$ .

Definimos o tamanho de um grafo  $G$  como a soma  $|VG| + |EG|$ .

Diremos que os vértices  $v$  e  $w$  são adjacentes ou vizinhos se  $vw \in EG$ . Denotaremos por  $Adj(v)$  ( ou conjunto de adjacência do vértice  $v$  ) o conjunto  $\{ w \in VG \mid vw \in EG \}$ , e por  $N(v) = Adj(v) \cup \{v\}$  a vizinhança do vértice  $v$ .

Seja  $X \subseteq VG$ . Definimos  $Adj(X) = \bigcup_{u \in X} Adj(u)$ , e  $N(X) = \bigcup_{u \in X} N(u)$ .

Seja  $H$  subgrafo de  $G$ . Algumas vezes, para evitar ambigüidades, denotaremos por  $Adj_H(X)$  como o conjunto de vértices adjacentes a  $X$  em  $H$ :  $Adj_H(X) = Adj(X) \cap VH$ ; podemos nos referir também ao conjunto  $Adj_Y(X)$ , onde  $Y$  é um conjunto qualquer de vértices.

Assim como definimos vértices adjacentes, definimos arestas adjacentes: duas arestas que compartilham um mesmo ponto extremo.

Dois grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos ( $G \cong H$ ) se existe uma bijeção  $f: VG \rightarrow VH$  que satisfaz:

$$xy \in EG \Leftrightarrow f(x)f(y) \in EH, \quad \forall x, y \in VG.$$

Em particular,  $G$  e  $H$  são iguais se  $VG = VH$  e  $EG = EH$ .

Dado um subconjunto  $X \subseteq VG$ , definimos o subgrafo induzido por  $X$ :  $G_X = (X, E_X)$ , onde  $E_X = \{vw \in EG \mid v \in X \text{ e } w \in X\}$ .

Sejam  $G$  e  $H$  grafos,  $X \subseteq VG$ ,  $W \subseteq EG$ . Definimos:

■  $G - H$  como o grafo  $G_{VG-VH}$ ;

■  $G - X$  como o grafo  $G_{VG-X}$ ;

■  $G - W$  como o grafo com conjunto de vértices  $VG$  e conjunto de arestas  $EG - W$ .

Sejam  $G'$  e  $G''$  subgrafos de um grafo  $G$  e  $X \subseteq VG$ . Definimos:

■  $G' \cup G''$  como o grafo  $G_{VG' \cup VG''}$ ;

■  $X \cup G'$  como o grafo  $G_X \cup VG'$ .

### 1.3. GRAFO NÃO DIRECIONADO, GRAFO ORIENTADO, ORIENTAÇÃO, CAMINHOS, CICLOS.

Seja  $G$  um grafo. O grafo  $G^{-1}$  é o grafo com conjunto de vértices  $VG$  e conjunto de arestas  $(EG)^{-1}$ , e é chamado reverso de  $G$ .

Definimos fecho simétrico de  $G$  como o grafo  $\bar{G} = (VG, \bar{E})$ , onde  $\bar{E} = E \cup E^{-1}$ .

Um grafo  $G$  é dito transitivo se  $EG$  é uma relação transitiva, e anti-transitivo se  $EG$  é uma relação anti-transitiva.

Dado um grafo  $G$  qualquer, o fecho transitivo de  $G$  é o grafo

com conjunto de vértices  $VG$  e conjunto de arestas  $E$  tal que

$$EG \subseteq E,$$

$$vw \in EG \text{ e } wv \in EG \Rightarrow vu \in E \text{ e}$$

$|E|$  é a menor possível.

Um grafo  $G$  é chamado não direcionado se  $EG = (EG)^{-1}$ , isto é, se  $EG = \overline{EG}$ ; ou ainda, se  $EG$  é uma relação simétrica. Utilizaremos a nomenclatura aresta não direcionada para indicar um conjunto  $\langle vw, wv \rangle \subseteq EG$ , que será denotado por  $\overline{vw}$  ( ou  $\overline{wv}$  ). Escreveremos  $\overline{vw} \in EG$  para indicarmos que  $\langle vw, wv \rangle \subseteq EG$ .

Um grafo  $G=(V,T)$  é chamado orientado se  $T \cap T^{-1} = \emptyset$  ( isto é, se  $T = EG$  é anti-simétrica ).

Sejam  $G = (V,E)$  grafo não direcionado e  $H = (V,T)$  grafo orientado. Se  $T + T^{-1} = E$ , dizemos que  $G$  é grafo subjacente de  $H$  e  $T$  uma orientação de  $G$  ( ou  $E$  ). O grafo  $H$  algumas vezes será denotado por  $G^T$ .  $T$  será uma orientação (anti-)transitiva se  $G^T$  é grafo (anti-)transitivo; nesse caso,  $G$  é chamado grafo de (anti-)comparabilidade.

Seja  $G$  um grafo não direcionado. Definimos o complemento  $G^c$  de  $G$  como o grafo com conjunto de vértices  $VG$  e conjunto de arestas  $E$  tal que  $E = \{ \langle v,w \rangle \in VG \times VG \mid v \neq w \text{ e } vw \notin EG \}$ . O complemento de um grafo de comparabilidade é chamado grafo de co-comparabilidade.

Uma definição importante é a definição de grau. Dado um grafo  $G$  qualquer, o grau de saída  $\delta^+(v)$  de um vértice  $v$  de  $G$  é igual a  $|\text{Adj}(v)|$ , e o grau de entrada  $\delta^-(v)$  é igual a  $|\{ w \in VG \mid v \in \text{Adj}(w) \}|$ . Para um grafo não direcionado, definimos  $\delta(v) = \delta^+(v) = \delta^-(v)$  simplesmente como o grau do vértice  $v$ .

Um grafo não direcionado  $G$  é completo se todos os seus



vértices são dois a dois adjacentes. O grafo completo com  $n$  vértices será denotado por  $K_n$ .

Seja  $X$  um subconjunto dos vértices de um grafo  $G$ .  $X$  é um conjunto completo de vértices ou uma clique se  $G_X$  é completo. Uma clique  $X$  é dita maximal se não há no grafo nenhuma outra clique que contenha propriamente a  $X$ . Alguns autores fazem uso forte do termo clique, designando por ele sempre uma clique maximal.

Sendo  $X \subseteq VG$ ,  $G$  grafo, diremos que  $X$  é um conjunto estável ou independente se  $EG_X = \emptyset$ .

Dado um grafo  $G$ , uma cadeia em  $G$  ( ou de  $G$  ) é um subgrafo de  $G$  composto por  $l+1 \leq |VG|$  vértices  $v_0, \dots, v_l$  e  $l$  arestas  $e_0, \dots, e_{l-1}$  de  $G$  tais que  $e_i = v_i v_{i+1}$  ou  $e_i = v_{i+1} v_i$  para  $0 \leq i \leq l-1$ . Dizemos que o comprimento da cadeia é  $l$ ; o caso degenerado,  $l = -1$ , caracteriza uma cadeia vazia, e o caso  $l = 0$  uma cadeia trivial.

Um passeio  $P$  em  $G$  é uma cadeia onde cada aresta  $e_i$  é da forma  $v_i v_{i+1}$ . Escrevemos  $P = v_0 v_1 \dots v_l$ . Dizemos que  $P$  conecta  $v_0$  e  $v_l$  (ou que  $v_0$  e  $v_l$  estão conectados por  $P$ ), e que os vértices  $v_1, \dots, v_{l-1}$  ( se existirem ) são interiores.

Um caminho  $C$  é um passeio onde os vértices não se repetem.

Um circuito é um passeio onde  $v_0 = v_l$ .

Um ciclo é um circuito onde os vértices não se repetem ( à exceção, é claro, de  $v_0 = v_l$  ).

Uma corda é uma aresta que une dois vértices não consecutivos de um passeio.

Um ciclo ou circuito é par ou ímpar se o seu comprimento é par ou ímpar.

Um ciclo induzido ( ou sem cordas ) com  $n$  vértices é um ciclo

$v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$  para o qual não existem cordas, e será denotado por  $C_n$ . Analogamente, denotaremos por  $P_n$  o caminho induzido com  $n$  vértices.

Um grafo  $G$  é conexo se dados dois vértices quaisquer  $v, w$  de  $G$ , existe uma cadeia da forma  $v \dots w$  em  $G$ . Uma componente de  $G$  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ .

Um grafo  $G$  é acíclico se não contém nenhum ciclo como subgrafo. Uma orientação  $T$  de um grafo não direcionado é acíclica se  $G^T$  é acíclico.

Quando não houver margem a dúvidas, nos referiremos a um grafo não direcionado simplesmente como grafo, e a uma aresta não direcionada simplesmente como aresta. Os termos passeio e caminho, algumas vezes, poderão também ser utilizados de maneira indistinta.

Um subgrafo de um grafo não direcionado será usualmente considerado como um grafo não direcionado.

#### 1.4. GRAFO TRIANGULARIZADO, GRAFO DE INTERVALO, MODELO DE INTERVALO.

Um vértice  $v$  de um grafo não direcionado  $G$  é simplicial se  $\text{Adj}(v)$  é uma clique. Se, além do mais,  $G - V(v)$  é conexo, então  $v$  é fortemente simplicial.

Um grafo não direcionado  $G$  é triangularizado se todo ciclo de  $G$  de comprimento estritamente maior do que três possui uma corda, ou, equivalentemente, se  $G$  não contém um subgrafo induzido isomorfo a  $C_n$  para  $n > 3$ . Os grafos triangularizados estão estudados com profundidade em Ilufi [1989].

Fornecemos sem demonstração um lema que nos será útil adiante:

**Lema 1.1** Seja  $G$  um grafo triangularizado não completo. Então,  $G$  possui dois vértices simpliciais não adjacentes.

Um modelo de intervalo  $M$  de (para) um grafo não direcionado  $G$  é um conjunto de intervalos fechados  $\{ I_v \}_{v \in VG}$  sobre um conjunto linearmente ordenado ( p. ex., a reta real ) tal que existe uma bijeção  $M: VG \rightarrow \{ I_v \}_{v \in VG}$  com a seguinte propriedade:

$$vw \in EG \Leftrightarrow M(v) \cap M(w) \neq \emptyset$$

( isto é, os intervalos  $I_v = M(v)$  e  $I_w = M(w)$  se interceptam ).

A exigência de intervalos fechados na definição de modelo existe apenas por motivo de simplificação. Pode-se mostrar com facilidade que existe um modelo de intervalos fechados para  $G$  se e somente se existe um modelo de intervalos quaisquer para  $G$ .

Dizemos que o intervalo  $I_v$  é a imagem do vértice  $v$  no modelo  $M$ , ou que  $v$  é representado por  $I_v$  no modelo  $M$ . Alguns autores se referem a modelos de intervalo como "representações por intervalo(s) do grafo  $G$ ".

É claro que nem todo grafo não direcionado admite um modelo de intervalo para si. Os grafos que admitirem modelos de intervalo serão chamados **GRAFOS DE INTERVALO**. Um grafo de intervalo, como é lógico, admite inúmeros modelos de intervalo.

Dois intervalos  $I$  e  $J$  de um modelo  $M$  são chamados disjuntos se  $I \cap J = \emptyset$ . Se  $I = [a,b]$ , então  $a$  e  $b$  são os pontos extremos de  $I$ :  $a$  é o ponto extremo esquerdo e é denotado por  $e(I)$ , e  $b$  é o ponto extremo

direito e é denotado por  $d(I)$ .

Um intervalo  $I$  de um modelo  $M$  é extremo do modelo se ou  $e(I) \leq e(J)$ ,  $\forall J \in M \subset e$ , nesse caso,  $I$  é o intervalo extremo esquerdo de  $M$ ), ou  $d(I) \geq d(J)$ ,  $\forall J \in M \subset e$ , nesse caso,  $I$  é intervalo extremo direito de  $M$ ).

Seja  $G$  um grafo de intervalo,  $M$  um modelo de intervalo de  $G$  e  $H$  um subgrafo induzido de  $G$ . O conjunto de intervalos  $M(H) = \langle M(v) \mid v \in V(H) \rangle$  é um submodelo do modelo  $M$ . Podemos nos referir também ao conjunto  $M(X)$ , onde  $X \subseteq V(G)$ :  $M(X) = M(G_X)$ . Dessa forma, de maneira natural, podemos dizer "imagem em  $M$  de um subgrafo de  $G$ ", "imagem em  $M$  de um caminho de  $G$ " etc.

Apresentaremos sem demonstração mais alguns resultados simples que nos serão úteis:

**Lema 1.2** Seja  $G$  um grafo de intervalo,  $M$  um modelo de intervalo de  $G$  e  $v$  vértice fortemente simplicial de  $G$ . Então,  $M(v)$  é um intervalo extremo de  $M$ .

**Teorema 1.3** Seja  $G$  um grafo triangularizado e  $H$  subgrafo conexo de  $G$  tal que  $G - V(H) \neq \emptyset$ . Então,  $G - V(H)$  contém um vértice  $v$  que é vértice simplicial de  $G$ .

**Lema 1.4** Se  $G$  é um grafo triangularizado e  $v_1 v_2 \dots v_k v_1$  é um circuito em  $G$  com  $k \geq 4$ , então alguma das opções abaixo é verdadeira:

(i)  $v_1 = v_3$  ou  $v_1$  e  $v_3$  são vizinhos;

(ii)  $v_2 = v_i$  ou  $v_2$  e  $v_i$  são vizinhos para algum  $i \in \{4, \dots, k\}$ .

Antes de passarmos ao t3pico seguinte, remetemos o leitor a Garey e Johnson [1978] para familiariza33o com a nomenclatura da Teoria de Complexidade de Algoritmos. Cremos n3o ser necess3rio para esta disserta33o recolocar aqui as defini33es de "algoritmo", "inst3ncia", "classe  $\mathcal{P}$ ", "problema NP-completo", "tempo ( espa3o ) linear", " $O(f(n))$ " etc.

## 1.5. ALGUMAS APLICA33ES DOS GRAFOS DE INTERVALO

Muitos problemas que envolvem arranjo dos dados numa certa ordem particular ( p. ex., cronol3gica ) podem ser resolvidos com aux3lio dos chamados grafos de compatibilidade, dos quais os grafos de intervalo s3o um caso particular. Num grafo de compatibilidade, os v3rtices correspondem aos objetos que ser3o arranjados, e as arestas correspondem 3queles pares de objetos que s3o compat3veis de algum modo. Embora nem todo grafo de compatibilidade seja um grafo de intervalo ( pois intervalos que n3o se interceptam podem algumas vezes corresponder a v3rtices adjacentes num grafo de compatibilidade ), apresentamos a seguir algumas aplica33es interessantes tanto dos grafos de compatibilidade como dos grafos de intervalo, pela estreita rela33o que existe entre eles. Remetemos o leitor a Wilson e Watkins [1990], pp. 61 a 69, e Golumbic [1980], pp. 181 a 184.

### 1.5.1. Psicologia

No estudo de características ou atitudes comportamentais de crianças, cada uma destas características/atitudes pode existir durante um certo período de tempo e depois desaparecer. A questão é construir uma escala de tempo na qual as diversas características ocorram em ordem cronológica. Podemos investigar o problema estudando várias características presentes num certo número de crianças e observando quando duas características diferentes estão presentes na mesma criança. Analisando as diversas formas nas quais o grafo de compatibilidade características (vértices) / crianças (arestas) pode ser representado como um grafo de intervalo, podemos ser capazes de colocar as várias características em ordem cronológica.

#### 1.5.2. Associação de frequências de rádio

Consideremos um sistema de rádio móvel, como por exemplo o utilizado pela polícia. Cada um dos carros de polícia mantém contato por meio de um rádio que usa um canal a partir de bandas de frequências pré-determinadas alocadas à localidade onde os carros circulam. A menos que se possa garantir que as bandas não se interceptam em localidades vizinhas, podem ocorrer interferências. Como devem, pois, ser alocadas as frequências, de modo que a cada localidade seja associada uma banda de frequência relativamente larga ?

Podemos representar este problema por um grafo de compatibilidade no qual os vértices correspondem às localidades e as arestas a pares de localidades não vizinhas, e analisar as cliques que contêm um determinado vértice. Associamos uma banda de frequência a cada uma destas cliques e representamo-la como um intervalo aberto de

frequências sobre a reta.

### 1.5.3. Sincronização de sinais de trânsito

Numa intersecção de ruas ou avenidas, dizemos que dois fluxos de tráfego de carros são compatíveis se ambos podem fluir ao mesmo tempo sem colisão. Representamos esta situação por um grafo de compatibilidade no qual os vértices correspondem aos fluxos de tráfego e as arestas unem pares de vértices que correspondem a fluxos compatíveis. A questão é sincronizar os sinais de trânsito de tal modo que fluxos não compatíveis não estejam liberados simultaneamente. Evidentemente, procuramos maximizar o número de fluxos compatíveis em cada instante.

A solução, novamente, é encontrar, para cada vértice, as cliques (maximais) do grafo de compatibilidade, que correspondem a fluxos mutuamente compatíveis. Depois, basta dividir o período de tempo disponível pelo número de cliques maximais e alocar a cada uma o período resultante da divisão.

### 1.5.4. Ecologia

Para o estudo das relações entre animais, plantas e seus meios, os ecólogos utilizam um grafo direcionado conhecido como cadeia alimentar, onde os vértices correspondem às espécies, e existe uma aresta orientada de uma espécie A para uma espécie B sempre que A seja predadora de B. Além do mais, introduzem um grafo não direcionado que indica quais espécies competem por certo alimento, conhecido como grafo

de competição, cujas arestas unem pares de espécies que compartilham uma presa comum.

A maior parte dos grafos de competição que ocorrem na prática são grafos de intervalo. A representação por intervalos tem significância ecológica no sentido de que intervalos que se interceptam geralmente correspondem a espécies que reagem do mesmo modo a fatores ambientais particulares, tais como temperatura, umidade e altitude.

### 1.5.5. Química

Suponhamos que  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são compostos químicos que devem ser refrigerados sob condições cuidadosamente monitoradas. Se o composto  $c_i$  deve ser mantido a uma temperatura entre  $t_i$  e  $t'_i$  graus, quantos refrigeradores serão necessários para armazenar todos os compostos ?

Definimos um grafo de intervalo  $G$  com vértices  $c_1, \dots, c_n$  e conectamos dois vértices sempre que os intervalos de temperatura correspondentes se interceptem. Pela propriedade de Helly (Golumbic [1980], p. 92), que é satisfeita pelo conjunto de cliques maximais de um grafo triangularizado, se  $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_k}\}$  é uma clique de  $G$ , então os intervalos do conjunto  $\{[t_{i_j}, t'_{i_j}] \mid j = 1, \dots, k\}$  terão um ponto de intersecção comum  $t$ . Um refrigerador à temperatura  $t$  poderá conter os compostos  $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ . Portanto, uma cobertura mínima de  $G$  por cliques maximais soluciona o problema.



### 1.5.6. Otimização de armazenamento em memória

Seja  $X$  um conjunto de itens de dados distintos ( registros ) e seja  $\mathcal{S}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  chamados consultas. A questão é saber se  $X$  pode ser armazenado seqüencialmente de modo que os membros de cada  $I \in \mathcal{S}$  sejam armazenados em locações consecutivas. Quando este tipo de configuração de armazenamento é possível, os registros pertencentes a qualquer consulta podem ser acessados com dois parâmetros apenas: um ponteiro-base e um deslocamento. Esta possibilidade define a "Propriedade de Recuperação Consecutiva", que é um desdobramento do "Problema Geral de Arranjo Consecutivo" ( Capítulo 4 ). Portanto, a questão pode ser resolvida eficientemente com o uso de "PQ-árvores" ( Capítulo 4 ).

### 1.5.7. Arqueologia

Utiliza-se em arqueologia o termo "seriação" para a classificação de um conjunto de itens em sua ordem cronológica própria. Este problema tem muito de comum com os grafos de intervalo e com a "propriedade dos 1's consecutivos" ( Capítulo 2 ).

Seja  $A$  um conjunto de artefatos que foram descobertos em várias tumbas. A cada artefato deve corresponder um intervalo de tempo, a priori desconhecido, durante o qual o artefato estava em uso. A cada tumba se associa um ponto no tempo ( também desconhecido ), que corresponde ao momento em que o conteúdo da tumba foi nela depositado. O problema é esquematizar os relacionamentos temporais entre os artefatos e os locais onde foram depositados.

Consideremos a matriz de incidência  $M$  cujas linhas representam as tumbas e cujas colunas os artefatos que estão ou não presentes em determinada tumba. Supondo que uma tumba contém todos os membros de  $A$  em uso no momento da deposição, a matriz  $M$  possuirá a propriedade dos 1's consecutivos para colunas. Cada permutação das linhas que produz 1's consecutivos corresponde a uma seriação aceitável das tumbas e define uma possível associação de intervalos de tempo para  $A$ .

Consideremos agora o grafo  $G$  cujos vértices representam os artefatos e cujas arestas conectam artefatos encontrados em alguma tumba comum. Supondo que cada par de artefatos cujos intervalos de utilização se interceptam devem ser encontrados juntos na mesma tumba, temos que  $G$  é um grafo de intervalo e que qualquer modelo para  $G$  é um candidato para os intervalos de utilização dos artefatos de  $A$ .

#### 1.5.8. Genética

Os geneticistas têm considerado o cromossomo como um arranjo linear de genes, e é natural questionar se a estrutura fina dentro do gene também é arranjada de maneira linear. Este problema é conhecido como o "problema de Benzer". Infelizmente, esta estrutura é detalhada demais para ser observada diretamente, e somos obrigados a estudar alterações nas estruturas dos genes ( "mutações" ).

Ao analisar a estrutura genética de um vírus bacterial chamado "phage T4", Seymour Benzer considerou as mutações que se produzem quando parte do gene é perdida. Em particular, estudou mutações nas quais os segmentos perdidos se interceptam, e expressou

suas conclusões na forma de uma "matriz de intersecção"  $M$ . Esta matriz é a matriz de adjacência de um grafo de compatibilidade  $G$  cujos vértices correspondem a mutações e cujas arestas a pares de mutações cujos segmentos perdidos se interceptam. Nestes termos, o problema de Benzer consiste em determinar se  $M$  representa o conjunto de intersecções de uma coleção de intervalos, ou (equivalentemente) se  $G$  é um grafo de intervalo. De fato, existem modelos de intervalo para  $G$ .

Embora o fato de  $G$  ser um grafo de intervalo não provar que a estrutura fina dentro do gene é arranjada linearmente, esta hipótese fica bastante fortalecida. Benzer estendeu sua análise a mais de 145 mutações representadas por um grafo de intervalo; deste modo, mostrou que, pelo menos para o vírus "phage T4", há fortíssima evidência do arranjo linear. Além do mais, Cohen, Komlós e Muller mostraram que a probabilidade de que Benzer tenha observado um grafo de intervalo "por acaso" é praticamente zero.

## CAPÍTULO 2

### CARACTERIZAÇÕES DOS GRAFOS DE INTERVALO

#### 2.1. TRIPLAS ASTEROIDAIS E SUBGRAFOS PROIBIDOS

Um dos primeiros trabalhos conhecidos de investigação sobre grafos de intervalo - de autoria de C.G.Lekkerkerker e J.C.Boland, publicado em 1962 - traz duas caracterizações da família. A primeira delas é bastante natural e reflete a disposição geométrica de um conjunto de intervalos traçados sobre uma reta, que sem perda de generalidade supomos fechados:

(I) por um lado, numa sequência de pelo menos 4 intervalos onde cada um que não seja extremo da sequência só intercepta o anterior e o seguinte, é claro que o último intervalo da sequência não pode interceptar o primeiro;

(II) por outro lado, dados três intervalos que mutuamente não se interceptam, qualquer outro intervalo que intercepte os intervalos extremos esquerdo e direito necessariamente intercepta o intervalo remanescente.

Fornecemos, pois, a primeira caracterização da família dos grafos de intervalo:

**Teorema 2.1** ( Lekkerkerker e Boland [1962] ) Um grafo não direcionado  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se satisfaz as condições :

- (i)  $G$  não contém ciclo induzido com mais de quatro vértices ( isto é,  $G$  é triangularizado );
- (ii) quaisquer três vértices de  $G$  podem ser ordenados de modo que todo caminho do primeiro vértice para o terceiro vértice passa pela vizinhança do segundo.

Três vértices que não satisfaçam a condição (ii) constituem uma **TRIPLA ASTEROIDAL**: dois a dois, são não adjacentes e conectados por um caminho que não atravessa a vizinhança do vértice remanescente.

Dizemos que um grafo  $G$  é **ASTEROIDAL** se contém três vértices que constituem uma tripla asteroidal. Dessa forma, o Teorema 2.1 pode ser reescrito do seguinte modo: um grafo não direcionado  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se é triangularizado e não asteroidal.

As condições (i) e (ii) do Teorema 2.1 podem ser visualizadas geometricamente, respectivamente, pelas observações (I) e (II) feitas anteriormente. Veja-se as Figuras 2.1 e 2.2.

A condição (ii) do Teorema 2.1 pode ser substituída pela seguinte forma mais fraca:

- (ii') quaisquer três vértices simpliciais de  $G$  podem ser ordenados de modo que todo caminho do primeiro vértice para o terceiro vértice passa pela vizinhança do segundo.

Uma outra caracterização que Lekkerkerker e Boland fornecem

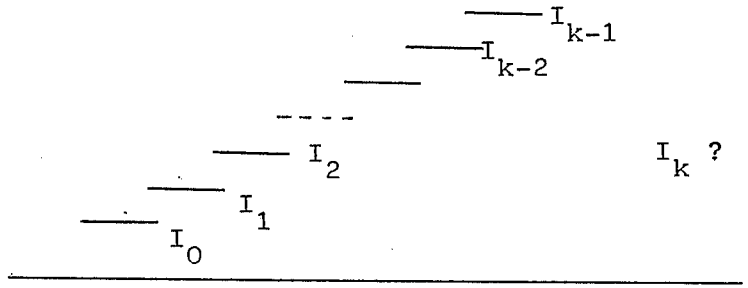
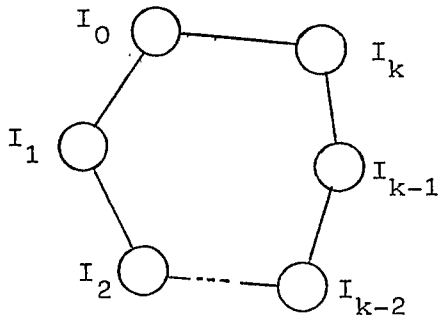


Figura 2.1. Os grafos de intervalo não podem conter ciclos induzidos com mais de 4 vértices.

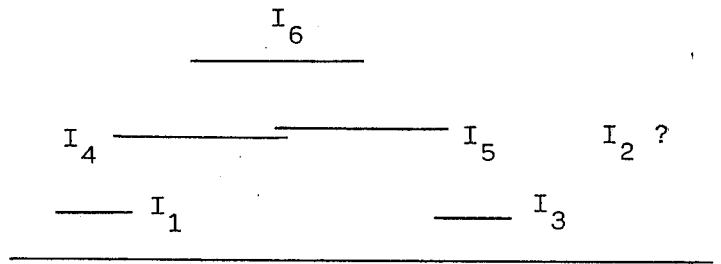
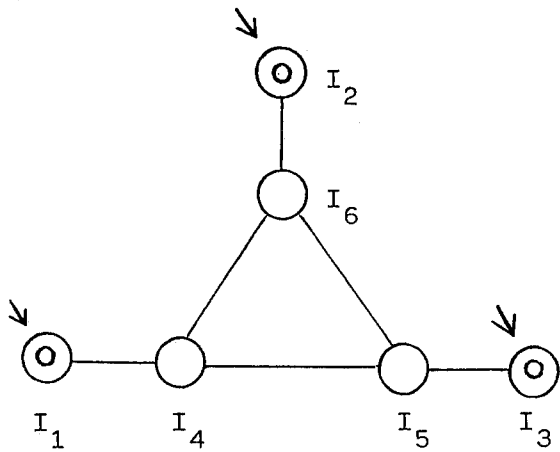


Figura 2.2. Os grafos de intervalo não podem conter triplas asteroidais.

no seu trabalho é por "subgrafos proibidos". Esta maneira de caracterizar uma família  $\mathcal{F}$  qualquer de grafos consiste em encontrar um conjunto minimal  $X$  de grafos tal que um grafo  $G$  qualquer pertence a  $\mathcal{F}$  se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum elemento pertencente a  $X$ . Evidentemente, os grafos de  $X$  são críticos, isto é, minimais com relação à propriedade "não ser membro de  $\mathcal{F}$ ". Quando uma família  $\mathcal{F}$  de grafos possui a propriedade de herança ( todo subgrafo induzido de um membro de  $\mathcal{F}$  também pertence a  $\mathcal{F}$  ), então ela pode ser caracterizada por configurações proibidas.

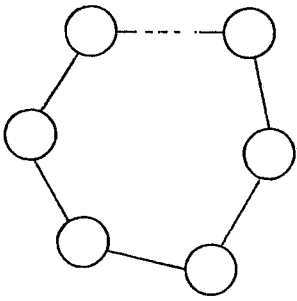
**Teorema 2.2** ( Lekkerkerker e Boland [1962] ) Um grafo não direcionado  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se:

(iii)  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum dentre os grafos  $C_n$ ,  $A_2$ ,  $A_1$ ,  $D_m$  e  $E_k$  (  $n \geq 4$ ,  $m \geq 2$ ,  $k \geq 1$  ) [Veja-se a Figura 2.3].

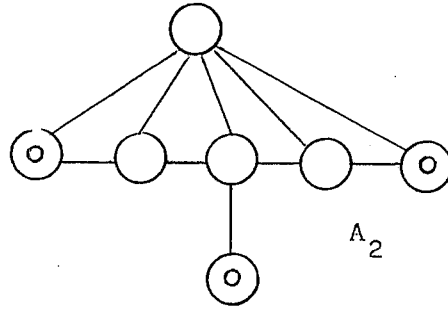
A demonstração deste teorema está baseada na caracterização fornecida pelo teorema anterior: os grafos  $A_1, A_2, D_m$  e  $E_k$  são grafos minimais com relação à propriedade de conter triplas asteroidais. Os ciclos  $C_n$  para  $n \geq 6$  também contém triplas asteroidais.

Fornecemos a seguir a demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2. Podemos supor nesta e nas outras demonstrações deste capítulo que os grafos são conexos, pois é fácil verificar que um grafo  $G$  é de intervalo se e somente se cada componente de  $G$  é um grafo de intervalo; isto se depreende, aliás, pelo fato de a família dos grafos de intervalo possuir a supra-citada propriedade de herança.

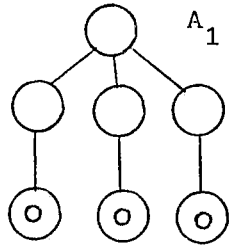
É claro que as condições (i) e (ii') em conjunto implicam (iii). Isto é, bastaria demonstrar a suficiência da condição (iii). Preferiremos, contudo, apresentar as demonstrações separadamente.



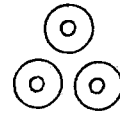
$C_n, n=4,5,6,\dots$



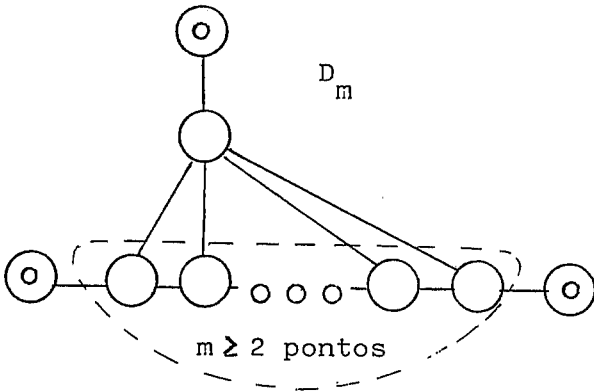
$A_2$



$A_1$

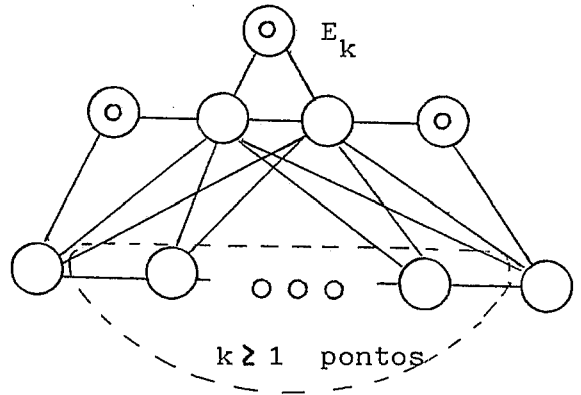


Tripla asteroidal



$D_m$

$m \geq 2$  pontos



$E_k$

$k \geq 1$  pontos

Figura 2.3. Os grafos de intervalo não contêm como subgrafo induzido nenhum destes grafos.



## Demonstração do Teorema 2.1

( $\Rightarrow$ ) A necessidade das condições (i) e (ii) para que  $G$  seja grafo de intervalo é de verificação simples. Seja  $M$  um modelo de intervalo de  $G$ . Suponhamos primeiramente que  $G$  contenha um ciclo induzido com mais de 4 vértices  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0$ , com  $k \geq 4$ . Em  $M$ , escolha um ponto  $p_i \in I_{i-1} \cap I_i$  para  $i=1, \dots, k-1$ , onde  $I_i$  é a imagem de  $v_i$  em  $M$ . Desde que  $I_{i-1}$  e  $I_{i+1}$  não se interceptam,  $(p_1, \dots, p_{k-1})$  é uma sequência estritamente crescente ( ou decrescente ); logo, é impossível que  $v_0$  e  $v_{k-1}$  se interceptem, o que contradiz a existência da aresta que os conecta em  $G$ .

Suponhamos agora que  $G$  contenha uma tripla asteroidal  $(v_1, v_2, v_3)$ . Em  $M$ , os intervalos  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , imagens de  $v_1, v_2$  e  $v_3$ , dois a dois não se interceptam. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que  $I_2$  está compreendido entre  $I_1$  e  $I_3$  ( $d(I_1) < e(I_2)$  e  $d(I_2) < e(I_3)$ ), isto é, que  $I_2$  intercepta algum intervalo da imagem em  $M$  de cada caminho  $C$  de  $v_1$  a  $v_3$ . Logo qualquer caminho de  $v_1$  a  $v_3$  atravessa a vizinhança de  $v_2$ , o que contradiz a hipótese de  $(v_1, v_2, v_3)$  ser uma tripla asteroidal.

Com estas considerações concluímos a primeira parte da demonstração.

( $\Leftarrow$ ) Passemos agora à comprovação da suficiência das condições (i) e (ii), isto é, de que se  $G$  é um grafo triangularizado e não asteroidal, então  $G$  é de intervalo. Suponhamos  $G$  não completo ( o caso contrário é trivial ).

Em seu trabalho, Lekkerkerker e Boland dividem a demonstração

da suficiência em dois casos, conforme  $G$  seja "extremo" ou não. Um grafo  $G$  é extremo quando todo vértice simplicial  $v$  de  $G$  é fortemente simplicial (recorde-se a seção 1.4).

Caso 1.  $G$  é extremo.

É claro que  $G$  não pode conter 3 vértices simpliciais dois a dois não adjacentes; caso contrário, por serem fortemente simpliciais, dois a dois seriam conectados por um caminho que não atravessa a vizinhança do vértice remanescente - isto é, constituiriam uma tripla asteroidal. Basta pois provar que se  $G$  não contém 3 vértices tais, então  $G$  é de intervalo.

Suponhamos  $|VG| > 1$  e que o resultado vale para grafos com menos do que  $|VG|$  vértices.

Sejam  $v$  vértice fortemente simplicial de  $G$  e  $S$  o subgrafo completo constituído pelos vértices simpliciais de  $G$  contidos em  $V(v)$ .

Seja  $G' = G - S$ . Será útil para a demonstração notar que  $VG'$  pode ser escrito como  $VG' = (VG - V(v)) \cup (V(v) - S)$ .

O grafo  $G'$  é triangularizado. Para aplicar a hipótese de indução a  $G'$ , é necessário demonstrar que  $G'$  é extremo e que não contém 3 vértices simpliciais dois a dois não adjacentes. É o que passaremos a fazer agora.

(a)  $G'$  é extremo.

Seja  $u$  vértice simplicial de  $G'$ . Vamos mostrar que  $u$  é fortemente simplicial. Temos que ou  $u \in G - V(v)$  ou  $u \in V(v) - S$ .

Suponhamos que  $u \in G - V(v)$ . Como  $u \notin V(S)$ ,  $V_G(u) = V_{G'}(u)$ , isto

é,  $u$  é vértice (fortemente) simplicial de  $G$ . Assim, se  $u_1$  e  $u_2$  são vértices em  $G - V(u)$ , existe um caminho  $C$  em  $G - V(u)$  que conecta  $u_1$  e  $u_2$ . Tomando  $C$  de comprimento mínimo, é claro que não pode conter nenhum vértice de  $S$ . Logo,  $C$  está contido em  $G' - V(u)$ , donde  $u$  é vértice fortemente simplicial de  $G'$ .

Suponhamos agora que  $u \in V(v) - S$ . Suponhamos também que  $G' - V_{G'}(u)$  tenha uma componente não vazia  $C$ . Então, o grafo  $C \cup V_{G'}(u)$  não é completo, donde possui um vértice simplicial  $w_c \in V_{G'}(u)$  pelo Lema 1.1. Assim,  $w_c \in V(v) - S$ , e

$$V_{G \cup V(v)}(w_c) = V_{G'}(w_c) = V_G(w_c).$$

Logo,  $w_c \in VC$  é vértice simplicial de  $G$ , não adjacente a  $v$ . Se supusermos que  $G' - V_{G'}(u)$  possui uma outra componente  $C'$  não vazia e distinta de  $C$ , fazendo o mesmo raciocínio chegaríamos à existência de  $w_{c'} \in VC'$  vértice simplicial de  $G$ , não adjacente a  $v$  nem a  $w_c$ . Como por hipótese  $G$  não contém 3 vértices simpliciais dois a dois não adjacentes, segue que  $G' - V_{G'}(u)$  possui no máximo uma componente não vazia (é conexo). Isto é,  $u$  é vértice fortemente simplicial de  $G'$ .

A demonstração da parte (a) está completa.

(b)  $G'$  não contém 3 vértices simpliciais dois a dois não adjacentes.

Como para qualquer  $w \in G - V(v)$ ,  $w$  é vértice simplicial de  $G$  se e somente se  $w$  é vértice simplicial de  $G'$ , segue que os vértices simpliciais de  $G'$  em  $G - V(v)$  formam uma clique (pois  $G$  por hipótese é tal que  $G - V(v)$  não pode conter dois vértices simpliciais não adjacentes).

Além disso, como os vértices simpliciais de  $G'$  que pertencem a  $V(v) - S$  também formam uma clique, segue que  $G'$  contém no máximo dois

vértices simpliciais não adjacentes. Isso conclui a demonstração da parte (b).

Podemos agora aplicar a hipótese de indução: existe  $M'$  modelo de intervalo de  $G'$ . Como  $G'$  não é completo, pelo Lema 1.1 possui um vértice simplicial  $u \in V(v)-S$ . Pelo Lema 1.2,  $u$  é representado em  $M'$  por um intervalo extremo, p. ex. esquerdo. Como  $V(v)-S \subseteq V_G(u)$ , pode-se representar à esquerda, em  $M'$ , os intervalos correspondentes a  $V(v)-S$ . Representando cada vértice de  $S$  por um intervalo que intercepta exatamente os intervalos correspondentes a  $V(v)-S$ , obtém-se um modelo de intervalo de  $G$ .

A demonstração para o Caso 1 está completa.

Caso 2.  $G$  não é extremo.

Suponhamos por indução que cada subgrafo próprio de  $G$  é de intervalo.

Sejam:  $v$  vértice simplicial de  $G$ , mas não fortemente simplicial;

$C_1, \dots, C_k$  ( $k \geq 2$ ) as componentes de  $G-V(v)$ ;

$M$  um modelo de intervalo de  $G-\langle v \rangle$ ;

$I$  a intersecção dos intervalos em  $M$  que são imagem dos vértices de  $\text{Adj}(v)$ .

Dado um grafo  $H$ ,  $u \in V_H$  e  $U \subseteq V_H$ , denotaremos por  $u \mid U$  o fato de  $u$  ser adjacente a todo vértice que pertence a  $U$ , e por  $u \nmid U$  o fato de existir em  $U$  um vértice não adjacente a  $u$ .

A demonstração será dividida em alguns casos.

Caso 2.1. Nenhuma componente  $C_i$  contém um vértice  $u$  tal que  $u \in \text{Adj}(v)$

Nesse caso,  $I$  não intercepta nenhum outro intervalo, donde obtém-se  $M_G$  modelo de  $G$  adicionando-se a  $M$  o intervalo  $I$ , escolhido para imagem de  $v$ .

Caso 2.2. Existe um índice  $i$  tal que para todo vértice  $u$  de  $C_i$ ,  $u \in \text{Adj}(v)$

Em  $M$ , todos os intervalos que são imagens dos vértices de  $C_i$  interceptam  $I$ , constituem modelo de um conjunto conexo de vértices e não interceptam outros intervalos imagens de vértices de  $G - V(v)$ . Podemos reduzir arbitrariamente as dimensões do submodelo de  $C_i$  em  $M$  e adicionar a  $M$  um intervalo  $J \subseteq I$ , imagem de  $v$ , a fim de obter um modelo de  $G$ .

Caso 2.3. Existe um índice  $i$  para o qual  $C_i$  contém dois vértices  $u$  e  $w$  tais que  $u \in \text{Adj}(v)$  e  $w \notin \text{Adj}(v)$

Por indução existe um modelo  $N$  do grafo  $V(v) \cup C_i$ .

Como  $v$  é vértice fortemente simplicial de  $V(v) \cup C_i$ , é representado em  $N$  por um intervalo extremo  $J$ , p. ex. direito.

Tomemos um intervalo  $K$  em  $N$  que não intercepta  $I$  para o qual  $d(K)$  é mínimo. Seja  $M_K$  o submodelo constituído por intervalos que representam vértices de  $\text{Adj}(v)$  e que interceptam  $K$ , e seja  $M_v$  o submodelo de  $V(v)$  em  $N$  ( $M_v = N(V(v))$ ).

Notemos que cada conjunto de intervalos  $N^*$  obtido de  $N$  colocando-se à esquerda um ou mais intervalos de  $M_K$  e à direita um ou

mais intervalos de  $M_v$  é ainda um modelo de  $V(v) \cup C_i$ .

Consideremos agora  $M$ , que contém algum modelo de  $(V(v) \cup C_i) - \langle v \rangle = \text{Adj}(v) \cup C_i$ . Sejam  $K'$  e  $I'$  intervalos em  $M$  correspondentes aos intervalos  $K$  e  $I$  em  $N$ , respectivamente; então  $K$  e  $I$  não se interceptam, donde sem perda de generalidade podemos supor  $d(K') < e(I')$ .

Tomemos um intervalo  $L$  tal que cada intervalo de  $M(C_i)$  está contido propriamente em  $L$  e cada intervalo de  $M(C_j)$  (para  $j \neq i$ ) não intercepta  $L$ . Então os pontos  $d(L)$  e  $e(L)$  só pertencem a intervalos de  $M(V(v))$ , e cada intervalo de  $M(\text{Adj}(v))$  intercepta  $L$  (pois existe  $u$  tal que  $u \mid \text{Adj}(v)$ ).

Seja  $V_K$  o conjunto dos vértices correspondentes aos intervalos em  $M_K$ , isto é, tal que  $M_K = N(V_K)$ . Seja  $x \in V(v) - V_K$  e sejam  $R = M(\langle x \rangle)$  e  $R' = M(\langle x \rangle)$ . Temos que  $R \cap K = \emptyset$ ; logo,  $R' \cap K' = \emptyset$ . Mas  $R'$  intercepta  $I'$ ; logo,  $e(R') \geq d(K')$ , donde  $e(L) \notin R'$ . Isto é,  $e(L)$  só pode pertencer a intervalos em  $M_K$ .

Pode-se agora construir um modelo de  $G$ : toma-se  $M$ , remove-se os intervalos de  $M$  que interceptam  $L$  e insere-se o modelo  $N$ . Adicionam-se à esquerda intervalos de  $M_K$  que em  $M$  contém  $e(L)$ , e à direita intervalos de  $M_v$  que em  $M$  contém  $d(L)$ . Conclui-se assim a demonstração para o Caso 2 e do Teorema 2.1. ■

Antes de passarmos à demonstração do Teorema 2.2, provaremos a equivalência entre as condições (ii) e (ii') do Teorema 2.1.

**Demonstração da equivalência entre as condições (ii) e (ii') do Teorema 2.1**

(ii)  $\Rightarrow$  (ii') Trivial.

(ii')  $\Rightarrow$  (ii) Suponhamos por absurdo que  $G$  contenha uma tripla asteroidal  $(v_1, v_2, v_3)$ . Seja  $D$  um caminho em  $G - V(v_3)$  que conecta  $v_1$  e  $v_2$ ; temos então que  $v_3 \notin V(D)$ , isto é,  $G - V(D) \neq \emptyset$ .

Seja  $C$  a componente de  $G - V(D)$  que contém  $v_3$ .

Aplicando o Teorema 1.3 ( com  $H = D$  ),  $C$  contém um vértice  $v_3'$  que é vértice simplicial de  $C \cup V(D)$  e de  $G$ . Logo,  $v_3' \notin V(D)$ , donde existe um caminho que conecta  $v_3$  e  $v_3'$  e não intercepta nem  $V(v_1)$  nem  $V(v_2)$ .

Assim,  $(v_1, v_2, v_3')$  é uma tripla asteroidal, e repetindo o raciocínio para  $v_1$  e  $v_2$ , obter-se-á no final uma tripla asteroidal  $(v_1', v_2', v_3')$  de vértices simpliciais de  $G$ , um absurdo. ■

### Demonstração do Teorema 2.2

( $\Rightarrow$ ) Pela condição (i) do Teorema 2.1,  $G$  não pode conter  $C_n$  como subgrafo induzido, e pela condição (ii), não pode conter  $A_1, A_2, D_m$  e  $E_k$ , porque cada um deles contém uma tripla asteroidal.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos  $G$  triangularizado, asteroidal e minimal ( isto é, nenhum subgrafo próprio de  $G$  é asteroidal ). Vamos mostrar que  $G$  é algum dentre os grafos  $A_1, A_2, D_m$  e  $E_k$ .

Sejam  $C_1, C_2$  e  $C_3$  três caminhos minimais tais que, para  $i \in \{1, 2, 3\}$ :

a)  $C_i$  conecta os dois vértices  $v_j$  ( para  $j \neq i$  );

b)  $v_i \notin V(C_i)$ .

Como  $G$  é minimal,  $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = G$ ; e para  $j \neq i$ , como  $C_i$

é minimal, contém apenas um vértice de  $\text{Adj}(v_j)$ . Logo,  $\text{Adj}(v_j)$  contém no máximo 2 vértices (pois de  $v_j$  partem dois caminhos). Notemos também que se  $v_j$  tem exatamente dois vizinhos  $u_j$  e  $w_j$ , então eles são adjacentes, já que  $G$  é triangularizado e nele existe um ciclo onde  $u_j, v_j$  e  $w_j$  comparecem nessa ordem.

Dividamos a demonstração em alguns casos.

Caso 1.  $|\text{Adj}(v_j)| = 2$ , para  $j \in \{1, 2, 3\}$

Teremos nesse caso a situação da Figura 2.4, onde:

$$\text{Adj}(v_j) = \{u_j, w_j\}, \text{ para } j \in \{1, 2, 3\};$$

$$C_1 = v_2 u_2 \dots w_3 v_3;$$

$$C_2 = v_3 u_3 \dots w_1 v_1;$$

$$C_3 = v_1 u_1 \dots w_2 v_2.$$

Os caminhos  $C_i$  podem ter vértices interiores em comum.

Vamos mostrar que dois deles têm comprimento dois.

Suponhamos por absurdo que  $C_2$  e  $C_3$  tenham comprimentos maiores que 2 (isto é,  $u_3 \neq w_1$  e  $u_1 \neq w_2$ ).

Pelas minimalidades de  $G$  e dos caminhos  $C_i$ , é fácil verificar que  $w_2$  não é adjacente a nenhum vértice interior dos caminhos  $C_i$ , à exceção de  $u_2$ ; caso contrário, existiriam alternativas para os caminhos, contrariando a minimalidade. Algo análogo se pode dizer de  $u_2$ ,  $u_3$  e  $w_3$ .

O ciclo  $w_2 u_2 \dots w_3 u_3 \dots w_1 u_1 \dots w_2$ , dessa forma, estará em contradição com a triangularidade de  $G$  (Lema 1.4).

Podemos supor então que  $C_2$  e  $C_3$  têm comprimentos iguais a dois (veja-se a Figura 2.5).

Devemos ter  $u_1$  adjacente a  $w_3$ ; caso contrário, teríamos



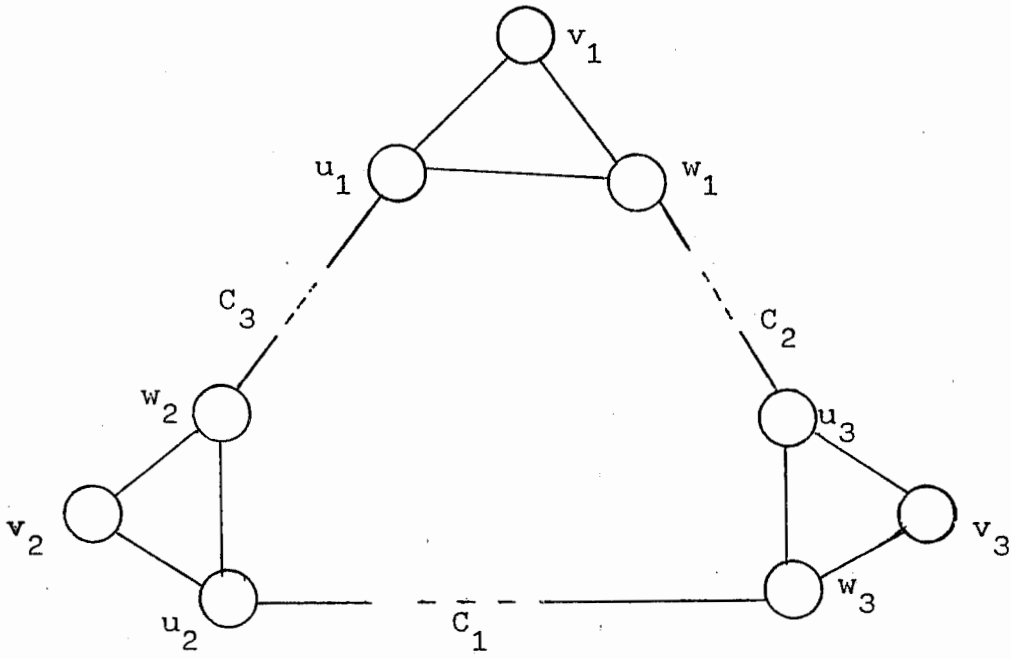


Figura 2.4

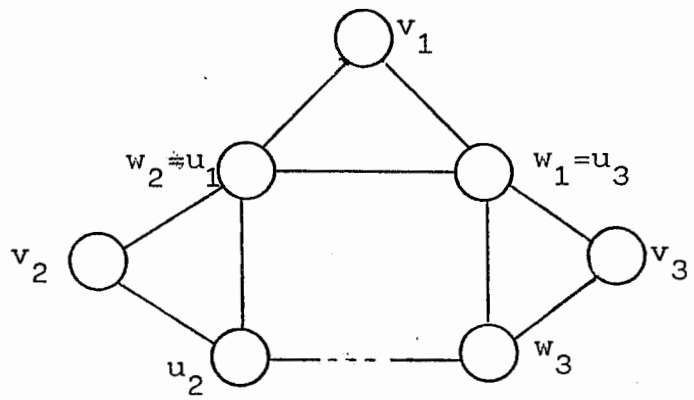


Figura 2.5

$u_2 \neq w_3$  e  $(v_1, v_2, w_3)$  tripla asteroidal em  $G - \langle v_3 \rangle$ , o que contradiria a minimalidade de  $G$ .

Assim, pela triangularidade de  $G$  e pela minimalidade do caminho  $u_2 \dots w_3$ , devemos ter  $u_1$  adjacente a  $w$  para cada vértice  $w$  do caminho  $u_2 \dots w_3$ . Do mesmo modo, devemos ter  $u_3$  adjacente a  $w$  para cada tal vértice  $w$ .

Concluimos que  $G$  é o grafo  $E_k$ . O caso  $k = 1$  ocorre quando  $u_2 = w_3$ .

Caso 2. Existe um índice  $j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) para o qual  $| \text{Adj}(v_j) | = 1$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $| \text{Adj}(v_1) | = 1$ .

Seja  $u$  o único vizinho de  $v_1$ ; então  $u \in VC_2$  e  $u \in VC_3$ . Devemos ter também  $u \in VC(C_1)$ ; caso contrário,  $(u, v_2, v_3)$  é tripla asteroidal de  $G - \langle v_1 \rangle$ , contradizendo a minimalidade de  $G$ .

Aqui distinguimos alguns sub-casos.

Caso 2.1.  $| \text{Adj}(u) \cap VC_1 | > 2$

Sejam  $w$  e  $w'$  o primeiro e o último vértices de  $C_1$  que são vizinhos de  $u$  (isto é, se  $C_1 = q_0 q_1 \dots q_r$ , então  $w = q_a$  e  $w' = q_b$  com  $a, b \in \langle 0, \dots, r \rangle$ ,  $a < b$ ,  $u$  não adjacente a  $q_{a'}$  para  $0 \leq a' < a$  e  $u$  não adjacente a  $q_{b'}$  para  $b < b' \leq r$ ).

Aplicando o Lema 1.4 a  $u$  e ao trecho  $w \dots w'$  do caminho  $C_1$ , e observando que  $v_2$  e  $v_3$  não são vizinhos de  $u$ , segue que  $G$  contém o grafo  $D_m$ . Mais propriamente, pela sua minimalidade,  $G$  é o próprio grafo  $D_m$ .

Caso 2.2.  $| \text{Adj}(u) \cap VC_1 | = 1$ , e  $u$  não tem vizinhos que não pertençam a  $VC_1 \cup \{v_1\}$

Seja  $w$  o vizinho de  $u$  que pertence a  $VC_1$ . Necessariamente,  $w \in VC_2$  e  $w \in VC_3$ ; logo,  $w$  não é vizinho nem de  $v_2$  nem de  $v_3$ . Segue que  $G$  é o grafo  $A_1$ .

Caso 2.3.  $| \text{Adj}(u) \cap VC_1 | = 1$ , e  $u$  tem pelo menos um vizinho que não pertence a  $VC_1 \cup \{v_1\}$

Sejam  $w$  e  $t$  os vizinhos de  $u$  tais que:  $w \in VC_1$  e

$$t \notin VC_1 \cup \{v_1\}.$$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $t \in VC_2$ .

Escrevamos  $C_1 = q_{-p} \dots q_0 \dots q_r$ , onde  $p \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $q_{-p} = v_2$ ,  $q_r = v_3$  e  $q_0 = w$ .

Notemos que  $C_3$  é da forma  $v_1 u t \dots q_{-s} q_{-s-1} \dots q_{-p}$  ( $s \geq 0$ ), onde os vértices que precedem  $q_{-s}$  em  $C_3$  não pertencem a  $C_1$ . Logo,  $s > 0$  pela minimalidade de  $C_3$ . Isto é,  $q_0 = w \notin C_3$  (veja-se a Figura 2.6).

Vamos mostrar agora que  $C_3$  não contém um vértice  $x$  tal que  $x$  é vizinho de  $q_l$  para algum  $l > 0$  ( donde  $C_3$  não contém também nenhum vértice  $q_l$  para  $l > 0$  ).

Supondo por absurdo que existe um tal índice  $l$ , temos  $x \neq u$ ; então poderíamos substituir  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente por

$$C_1' = q_{-p} \dots x q_l q_{l+1} \dots q_r \text{ e}$$

$$C_2' = v_1 u \dots x q_l q_{l+1} \dots q_r$$

(caminhos que não contém  $q_0 = w$ ),

donde  $(v_1, v_2, v_3)$  seria tripla asteroidal em  $G - \langle w = q_0 \rangle$ , contradizendo a minimalidade de  $G$ .

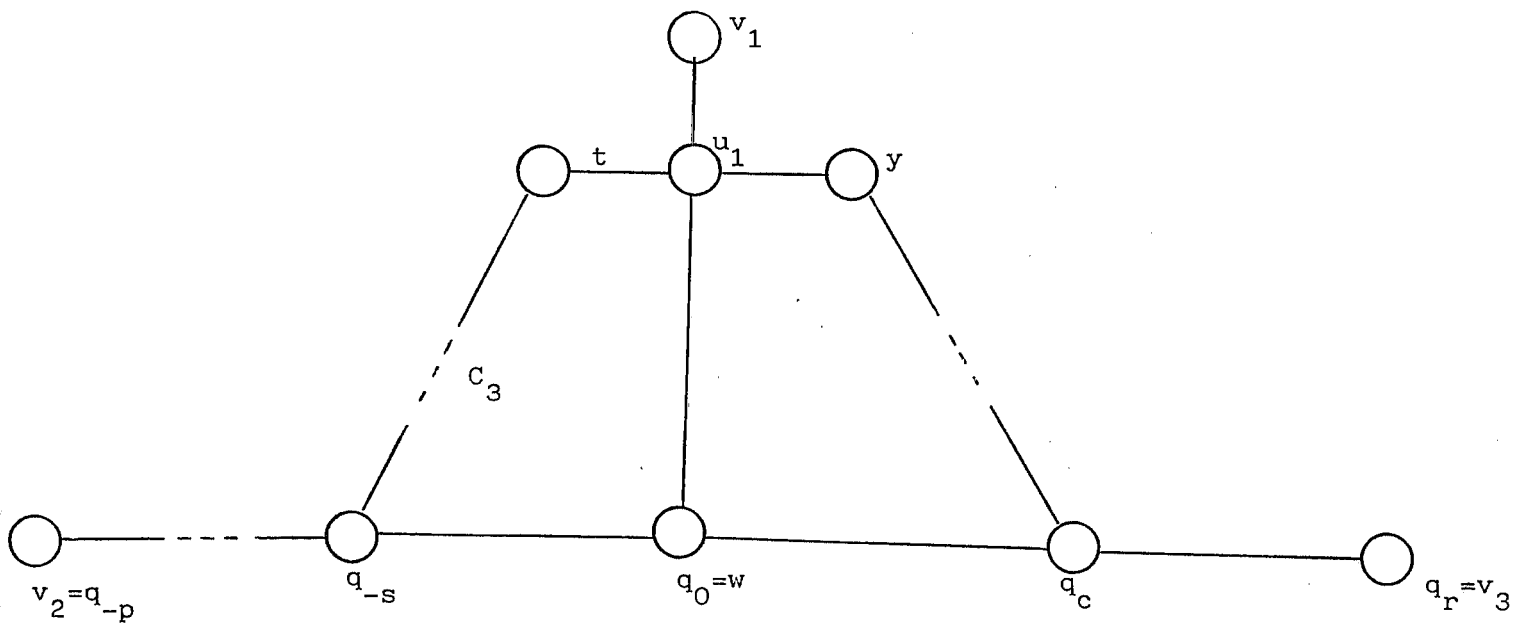


Figura 2.6

Consideremos agora o caso em que nenhum vértice  $z \in VC_1$  pertence à vizinhança do trecho  $q_1 \dots q_r$  de  $C_1$ . Se  $r \geq 2$ , temos o Caso 2.2, com  $v_1$  no papel de  $v_3$ . Se  $r=1$ , aplicando o Lema 1.4 ao ciclo  $q_0 u t \dots q_{-s} \dots q_0$  e observando que  $t \neq q_{-1}$ ,

$t$  não é vizinho de  $q_{-i}$  (para  $i > 0$ ) e

$q_0$  não é vizinho de  $q_j$  (para  $j < -1$ ),

concluimos que  $q_0$  tem no máximo 2 vizinhos ( $u$  e  $t$ ) que pertencem a  $C_3$ ; isto é, configura-se o Caso 2.1, com  $v_1$  no papel de  $v_3$ .

Podemos então finalmente supor que algum  $q_l$ , para  $l > 0$ , possui um vizinho  $z \in VC_1$ . Então  $z \in VC_3$  e  $z \in VC_2$ , donde  $q_0 \in VC_2$  (caso contrário  $G - \langle z \rangle$  seria asteroidal). Assim,  $C_2$  é da forma  $v_1 u q_1 \dots q_l q_{l+1} \dots q_r$ , e não contém nenhum vértice  $q_i$  (para  $i < 0$ ) nem algum vizinho de um vértice tal. Além disso, não podemos ter  $x' = z'$  ou  $x'$  adjacente a  $z'$  para  $x' \in VC_3$ ,  $z' \in VC_2$  e  $x', z' \in \langle v_1, u \rangle$ ; caso contrário,  $G - \langle w = q_0 \rangle$  seria asteroidal.

Aplicando agora o Lema 1.4 aos ciclos  $q_0 u t \dots q_{-s} \dots q_0$  e  $q_0 u y \dots q_c \dots q_r$  (veja-se novamente a Figura 2.6), vem que  $q_0$  é adjacente a  $t$  e a  $y$ , donde, pela minimalidade de  $G$ ,  $G$  é o grafo  $A_2$ . Isto completa a demonstração do Teorema 2.2. Como corolário, qualquer grafo triangularizado com menos de cinco vértices é de intervalo. ■

O Teorema 2.1 é base para um algoritmo de reconhecimento de grafos de intervalo que Lekkerkerker e Boland fornecem no final de seu trabalho: o algoritmo consiste simplesmente em procurar detectar aciclicidade e triplas asteroidais. O processo descrito, baseado no tratamento de vértices simpliciais, requer  $O(n^4)$  passos para verificação de aciclicidade e  $O(n^3)$  passos para verificação de existência de triplas asteroidais, onde  $n$  é o número de vértices do

grafo. Mais adiante descreveremos um algoritmo bem mais eficiente ( linear ) de reconhecimento de grafos de intervalo, de autoria de Booth e Lueker, o que torna desinteressante a análise do algoritmo proposto por Lekkerkerker e Boland. De qualquer forma, fica já assentado o fato de que

## RECONHECIMENTO DE GRAFOS DE INTERVALO $\in \mathcal{P}$



### 2.2. CO-COMPARABILIDADE E ORDENAÇÃO DAS CLIQUES MAXIMAIS

Mais tarde, em 1964, Gilmore e Hoffmann provaram o teorema seguinte, que se constituiu na caracterização mais conhecida da família dos grafos de intervalo:

**Teorema 2.3** ( Gilmore e Hoffmann [1964] ) Seja  $G$  um grafo não direcionado. São equivalentes as seguintes afirmações:

- (i)  $G$  é um grafo de intervalo;
- (ii)  $G$  não contém nenhum 4-ciclo induzido ( sem cordas ) e é de co-comparabilidade;
- (iii) As cliques maximais de  $G$  podem ser linearmente ordenadas de modo que, para cada vértice  $v$  de  $G$ , as cliques maximais que contém  $v$  ocorrem consecutivamente na ordem linear.

### Demonstração do Teorema 2.3

(i)  $\rightarrow$  (ii) Na demonstração do Teorema 2.1, parte ( $\Rightarrow$ ), já vimos a necessidade de  $G$  ser grafo triangularizado, donde é claro que não pode conter nenhum 4-ciclo induzido. Mostraremos agora também a necessidade de ser grafo de co-comparabilidade.

Seja  $M = \langle I_0, \dots, I_{n-1} \rangle$  um modelo de intervalo de  $G$  ( $I_i$  é a imagem de  $v_i \in VG$  para  $0 \leq i \leq n-1$ ). Seja  $T$  uma orientação para o complemento  $G^c$  de  $G$ , definida da seguinte forma:

$$v_i v_j \in T \Leftrightarrow I_i < I_j \quad ( \forall \overline{v_i v_j} \in EG^c ),$$

onde " $I_i < I_j$ " significa  $d(I_i) < e(I_j)$ .

Notemos que se  $v_i v_j \in T$  então  $I_i$  e  $I_j$  não se interceptam; assim sendo, é claro que se  $I_i < I_j < I_k$ , então  $I_i < I_k$ . Logo,  $T$  é de fato orientação transitiva de  $G^c$ ; isto é,  $G^c$  é grafo de comparabilidade.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Seja  $T$  uma orientação transitiva de  $G^c$  e seja  $\mathcal{C} = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$  a coleção de cliques maximais de  $G$ . Definamos uma relação sobre  $\mathcal{C}$  do seguinte modo:  $A_i < A_j$  se e somente se existe uma aresta orientada de  $T$  que parte de um vértice de  $A_i$  e chega a um vértice de  $A_j$  (tal aresta sempre existe, caso contrário  $A_i \cup A_j$  é clique de  $G$ , o que contradiz a maximalidade).

Afirmamos que todas as arestas de  $EG^c$  que conectam  $A_i$  e  $A_j$  têm a mesma orientação em  $T$ . Caso contrário, se existem arestas distintas  $ab$  e  $dc$  em  $T$  tais que  $a, c \in A_i$  e  $b, d \in A_j$ :

a) se  $a = c$  ( donde  $b \neq d$  ), temos uma contradição, devido a que  $T$  é transitiva e  $\overline{bd} \notin EG^c$  ( veja-se a Figura 2.7.a );

b) se  $b = d$ , analogamente temos uma contradição ( veja-se a Figura 2.7.b );

c) se os quatro vértices são distintos ( veja-se a Figura 2.7.c ), então, sem perda de generalidade, podemos supor que  $\overline{ad} \in EG^c$  ( já que  $G$  não contém 4-ciclo induzido ). Logo, ou  $ad \in T$  ou  $da \in T$ . Se  $ad \in T$  (  $da \in T$  ), então  $ac \in T$  (  $db \in T$  ); em qualquer caso, temos uma contradição.

Assim,  $(\mathcal{C}, < )$  é uma orientação completa. Mostraremos agora que é transitiva, e portanto ordena linearmente  $\mathcal{C}$ . Suponhamos que  $A_i < A_j$  e  $A_j < A_k$ ; então existem arestas  $ab \in T$  e  $cd \in T$  tais que  $a \in A_i$ ,  $b, c \in A_j$  e  $d \in A_k$  ( veja-se a Figura 2.8 ). Consideremos dois casos:

a)  $\overline{ac} \in EG^c$  ou  $\overline{bd} \in EG^c$  : nesse caso, pela transitividade de  $T$ ,  $ad \in T$ , donde  $A_i < A_k$ ;

b)  $\overline{ac} \notin EG^c$  e  $\overline{bd} \notin EG^c$ : nesse caso, como  $\overline{ac}, \overline{cb}, \overline{bd} \in EG$  e  $G$  não contém 4-ciclo induzido,  $\overline{ad} \in EG^c$ ; e, pela transitividade de  $T$ ,  $ad \in T$ , donde  $A_i < A_k$ .

Resta mostrar que as cliques maximais que contém um dado vértice ocorrem consecutivamente na ordem linear.

Suponhamos que a coleção  $\mathcal{C} = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$  está linearmente ordenada de acordo com a ordem crescente dos índices ( isto é,  $i < j$  se e somente se  $A_i < A_j$  ).

Sejam  $A_i, A_j$  e  $A_k$  tais que  $A_i < A_j < A_k$ . Suponha por absurdo que exista  $v \in VG$  tal que  $v \in A_i$ ,  $v \notin A_j$  e  $v \in A_k$ . Como  $v \notin A_j$ , existe um vértice  $w \in A_j$  tal que  $\overline{vw} \notin EG$  ( pois se para todo  $w \in A_j$  tivéssemos  $\overline{vw} \in EG$ ,  $A_j \cup \{v\}$  seria clique - o que contradiria a



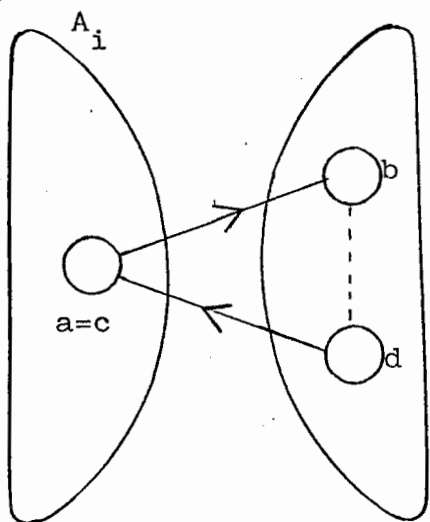


Figura 2.7.a

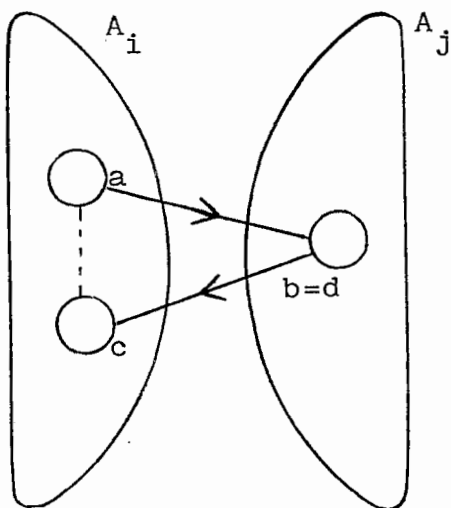


Figura 2.7.b

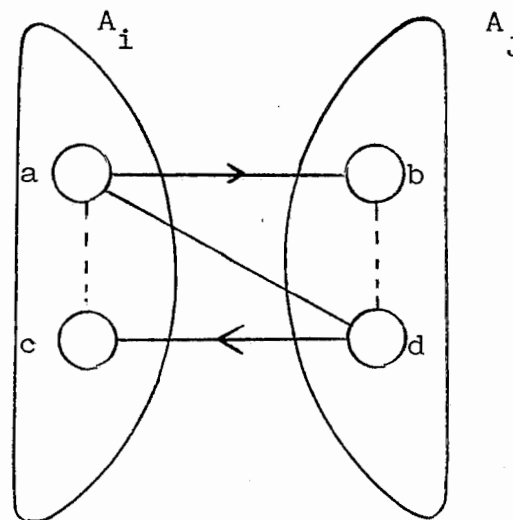


Figura 2.7.c

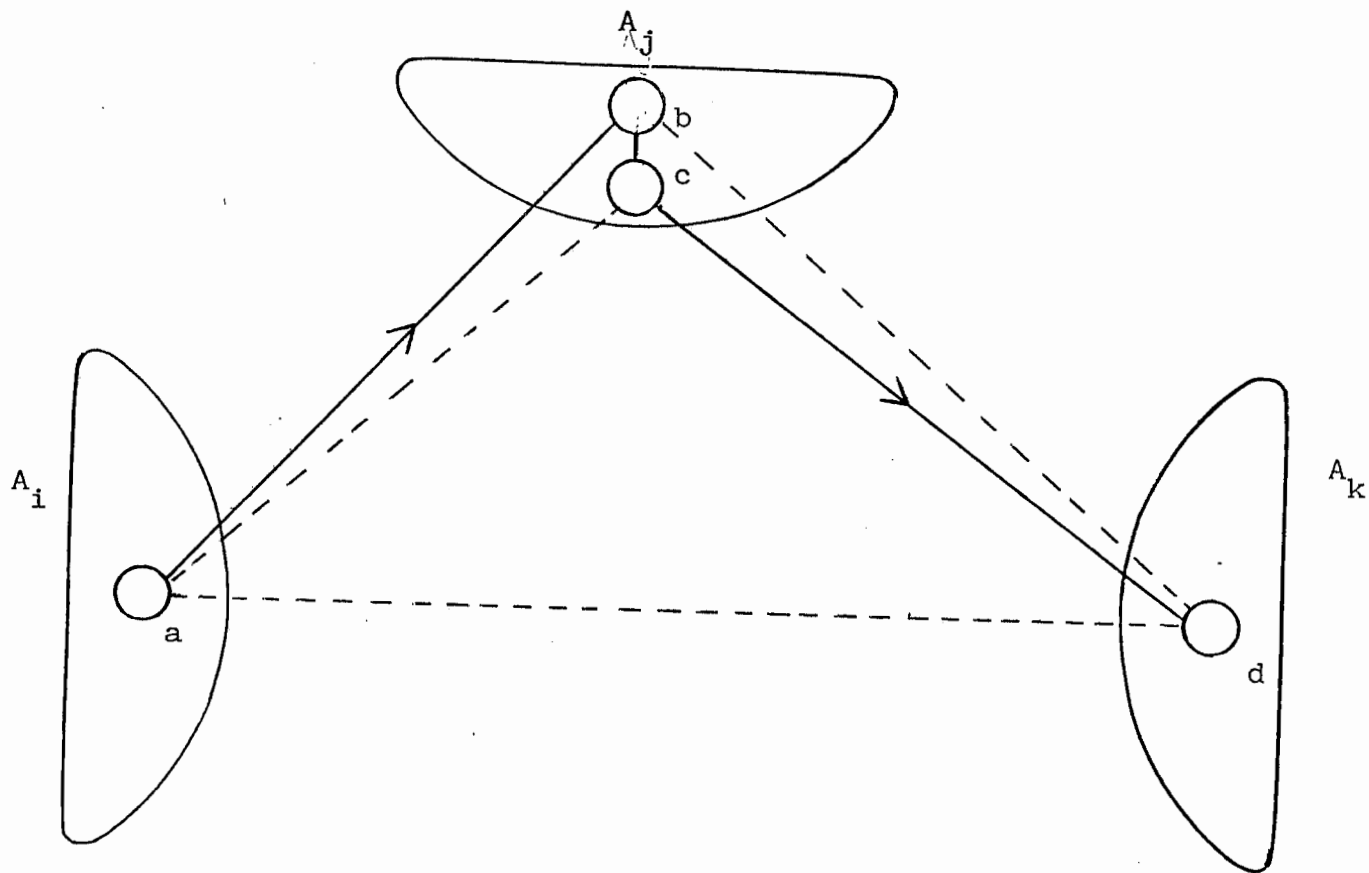


Figura 2.8

maximalidade de  $A_j$  ).

Mas:  $A_i < A_j \rightarrow vw \in T$

e

$A_j < A_k \rightarrow wv \in T,$

contradição. Logo,  $v \in A_j$ , e as cliques maximais que contêm  $v$  ocorrem consecutivamente. Isto prova (iii).

(iii)  $\rightarrow$  (i) Esta implicação é de demonstração bastante simples. Seja  $I(v)$  o conjunto de todas as cliques maximais que contêm  $v$ . Notemos que os conjuntos  $I(v)$ , para  $v \in VG$ , são intervalos sobre  $(\mathcal{E}, <)$ . E, uma vez que dois vértices são adjacentes se e somente se estão contidos numa mesma clique maximal, é claro que

$$\overline{vw} \in EG \Leftrightarrow I(v) \cap I(w) \neq \emptyset \quad (v, w \in VG),$$

o que mostra que  $M = \langle I(v) \rangle_{v \in VG}$  é um modelo de intervalo de  $G$ .

■

A formulação mais usual da condição (ii) do Teorema 2.3 é:

(ii')  $G$  é triangularizado e de co-comparabilidade.

A equivalência entre as condições (ii) e (ii') do Teorema 2.3 reside em que  $C_n^o$  não é grafo de comparabilidade para  $n \geq 5$ .

A condição (ii) no trabalho de Gilmore e Hoffman é apresentada numa outra formulação, baseada numa caracterização de grafo de comparabilidade que trazem no mesmo trabalho :

(ii'')  $G$  não contém nenhum 4-ciclo sem cordas e  $G^c$  não contém nenhum circuito ímpar sem corda triangular.

Por "corda triangular" entendemos qualquer aresta que una dois vértices  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  de um circuito  $v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0$  ( $i-1$  e  $i+1$  tomados módulo  $k$ ); lembramos que num circuito pode haver repetição de vértices.

Esta caracterização por corda triangular caiu em desuso por ser pouco "prática", no sentido de ser pouco tratável algoritmicamente. No entanto, a caracterização mais usual ( condição (ii') ), por deixar explícita a localização da classe dos grafos de intervalo no universo dos grafos perfeitos - a intersecção de duas outras classes, os triangularizados e os de co-comparabilidade - rapidamente tornou-se a mais conhecida. Um pouco depois de vir à tona, Fulkerson e Gross já apresentariam uma interessante formulação matricial desta caracterização, que passamos a descrever a seguir.

Dizemos que uma matriz cujas entradas são constituídas apenas por 1's e 0's possui a propriedade dos 1's consecutivos para colunas se suas linhas podem ser permutadas de modo que na matriz resultante da permutação os 1's em cada coluna ocorrem consecutivamente. Na Figura 2.9 a matriz  $M_1$  possui a propriedade dos 1's consecutivos para colunas porque suas linhas podem ser permutadas de modo a se obter  $M_2$ ; já a matriz  $M_3$  não possui a propriedade.

Dado um grafo não vazio  $G$ , definamos a matriz de clique  $M$  de  $G$  como a matriz de incidência de cliques maximais-versus-vértices; isto é, para  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ ,

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } A_i \text{ contém } v_j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $A_1, \dots, A_m$  são as cliques maximais de  $G$  e  $v_1, \dots, v_n$  são os vértices de  $G$ .

**Teorema 2.4** ( Fulkerson e Gross [1965] ) Um grafo não direcionado  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se a matriz de clique  $M$  de  $G$  possui a propriedade dos 1's consecutivos para colunas.

A demonstração do Teorema 2.4 decorre imediatamente da equivalência entre as condições (i) e (ii) do Teorema 2.3 : uma ordenação das cliques maximais de  $G$  corresponde a uma permutação das linhas de  $M$ . ■

Podemos utilizar a caracterização do Teorema 2.4 para construir um algoritmo de reconhecimento de grafos de intervalo. Dado um grafo  $G$  não direcionado, num primeiro passo verificamos se  $G$  é triangularizado, e em caso afirmativo enumeramos suas cliques maximais; isto pode ser executado em tempo  $|VG| + |EG|$  ( veja-se Golumbic [1980], pp. 91 e 99 ), produzindo-se no máximo  $|VG|$  cliques maximais. Depois, testamos se as cliques podem ser ordenadas de modo que aquelas que contêm um mesmo vértice  $v$  ocorrem consecutivamente na ordenação, para todo  $v \in VG$ . Booth e Lueker [1976] mostraram que também este passo pode ser executado em tempo linear, o que veremos no Capítulo 4.

L <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0
L <sub>2</sub>	1	0	1	1	1	0
L <sub>3</sub>	0	0	0	0	1	1
L <sub>4</sub>	0	1	0	0	0	0
L <sub>5</sub>	1	0	1	0	1	1
L <sub>6</sub>	1	0	1	1	0	0
L <sub>7</sub>	0	1	0	0	0	0

M<sub>1</sub>

L <sub>7</sub>	0	1	0	0	0	0
L <sub>4</sub>	0	1	0	0	0	0
L <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0
L <sub>6</sub>	1	0	1	1	0	0
L <sub>2</sub>	1	0	1	1	1	0
L <sub>5</sub>	1	0	1	0	1	1
L <sub>3</sub>	0	0	0	0	1	1

M<sub>2</sub>

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

M<sub>3</sub>

Figura 2.9

### 2.3. ORDENS DE INTERVALO

Na demonstração do Teorema 2.3, implicação (i)  $\Rightarrow$  (ii), havíamos definido uma orientação  $T$  para o complemento de um grafo de intervalo  $G$ : sendo  $M = \langle I_v \rangle_{v \in VG}$  um modelo de intervalo de  $G$ ,

$$vw \in T \Leftrightarrow I_v < I_w \quad (v, w \in VG)$$

onde  $I_v < I_w$  se e somente se  $d(I_v) < e(I_w)$ .

A ordem parcial " $<$ " é denominada uma ordem de intervalo. Tais ordens foram caracterizadas por Fishburn [1971] como ordens parciais que satisfazem

$$v < w \text{ e } z < u \Rightarrow v < u \text{ ou } z < w \quad \forall v, w, z, u.$$

Mais formalmente, dado um conjunto  $V \neq \emptyset$ , uma ordem de intervalo é uma relação binária  $(V, T)$  que satisfaz os seguintes axiomas: Para quaisquer  $v, w, z, u \in V$ ,

(S1)  $T$  é irreflexiva;

(S2)  $vw \in T$  e  $zu \in T$  implica  $vu \in T$  ou  $zw \in T$ .

Pode-se pois caracterizar os grafos de intervalo como os grafos cujos complementos possuem orientações que satisfazem os axiomas acima. Notemos que (S1) e (S2) juntos garantem transitividade. Notemos também que, pela definição de conjunto de arestas, (S1) é sempre

satisfeito por qualquer orientação, motivo pelo qual omitiremos a referência a este axioma no Teorema a seguir.

**Teorema 2.5** ( Fishburn [1971] ) Seja  $G$  um grafo não direcionado. São equivalentes as seguintes condições:

- (i)  $G$  é um grafo de intervalo;
- (ii)  $G^c$  possui uma orientação  $T$  que satisfaz o axioma (S2);
- (iii) Toda orientação transitiva  $T'$  de  $G^c$  satisfaz (S2).

#### Demonstração

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Sendo  $M = \langle I_v \rangle_{v \in VG}$  um modelo de intervalo de  $G$  e definindo

$$vw \in T \Leftrightarrow d(I_v) < e(I_w) \quad (v, w \in VG),$$

uma visualização geométrica dos intervalos em  $M$  permite concluir facilmente que  $T$  satisfaz (S2). Isto é:  $vw \in T$  e  $zu \in T \Rightarrow d(I_v) < e(I_w)$  e  $d(I_z) < e(I_u) \Rightarrow d(I_v) < e(I_u)$  ou  $d(I_z) < e(I_w) \Rightarrow vu \in T$  ou  $zw \in T$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Seja  $T'$  uma orientação transitiva de  $G^c$  e sejam  $v, w, z, u \in VG$  tais que  $vw \in T'$  e  $zu \in T'$ . É claro que  $\overline{vw} \in EG^c$  e  $\overline{zu} \in EG^c$ , donde  $vw$  (ou  $wv$ )  $\in T$  e  $zu$  (ou  $uz$ )  $\in T$ . Podemos pois dividir a demonstração em 4 casos:

Caso 1.  $vw \in T$  e  $zu \in T$

Nesse caso, como  $T$  satisfaz (S2) por hipótese, temos que  $vu \in T$  ou  $zw \in T$ , donde  $\overline{vu} \in EG^c$  ou  $\overline{zw} \in EG^c$ . Isto é, considerando a

orientação  $T'$ , podemos ter 4 sub-casos:

1.a)  $vu \in T'$ ;

1.b)  $uv \in T'$ ; nesse caso:  $uv \in T' \Rightarrow uw \in T' \Rightarrow zw \in T'$   
 $\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$   
 $vw \in T' \text{ e} \qquad \qquad \qquad zu \in T' \text{ e}$   
 $T' \text{ é trans.} \qquad \qquad \qquad T' \text{ é trans.}$

1.c)  $zw \in T'$ ;

1.d)  $wz \in T'$ ; nesse caso:  $wz \in T' \Rightarrow wu \in T' \Rightarrow vu \in T'$   
 $\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$   
 $zu \in T' \text{ e} \qquad \qquad \qquad vw \in T' \text{ e}$   
 $T' \text{ é trans.} \qquad \qquad \qquad T' \text{ é trans.}$

Em qualquer dos 4 sub-casos,  $vu \in T'$  ou  $zw \in T'$ .

Caso 2.  $vw \in T$  e  $uz \in T$ .

Temos então  $vz \in T$  ou  $uw \in T$ , donde  $\overline{vz} \in EG^c$  ou  $\overline{uw} \in EG^c$ . E novamente considerando a orientação  $T'$ , temos 4 sub-casos:

2.a)  $vz \in T'$ ; então, como  $zu \in T'$  e  $T'$  é transitiva,  $vu \in T'$ .

2.b)  $zv \in T'$ ; então, como  $vw \in T'$  e  $T'$  é transitiva,  $zw \in T'$ .

2.c)  $uw \in T'$ ; então, como  $zu \in T'$  e  $T'$  é transitiva,  $zw \in T'$ .



2.d)  $wu \in T'$ ; então, como  $vw \in T'$  e  $T'$  é transitiva,  $vu \in T'$ .

Em qualquer dos 4 sub-casos,  $vu \in T'$  ou  $zw \in T'$ .

Caso 3.  $wv \in T$  e  $zu \in T$ .

Temos então  $wu \in T$  ou  $zv \in T$ . Raciocinando analogamente, chegaremos facilmente à conclusão de que este caso se reduz ao Caso 2.

Caso 4.  $wv \in T$  e  $uz \in T$ .

Este caso se reduz ao Caso 1.

Em qualquer dos casos de 1 a 4, temos no final  $vu \in T'$  ou  $zw \in T'$ , donde concluímos que  $T'$  satisfaz o axioma (S2).

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Seja  $T$  uma orientação de  $G^c$  que satisfaz o axioma (S2). Isto significa que o complemento de  $G$  é de comparabilidade. Pelo Teorema 2.3, resta mostrar que  $G$  não contém 4-ciclos sem cordas.

Supondo por absurdo que  $vzwuv$  seja um 4-ciclo sem cordas, temos que  $\overline{vw} \notin EG$  e  $\overline{zu} \notin EG$ , donde  $vw$  (ou  $wv$ )  $\in T$  e  $zu$  (ou  $uz$ )  $\in T$ . Logo, um dos 4 casos abaixo ocorre:

Caso 1.  $vu \in T$  ou  $zw \in T$ . Então  $\overline{vu} \notin EG$  ou  $\overline{zw} \notin EG$ , absurdo.

Caso 2.  $vz \in T$  ou  $uw \in T$ . Então  $\overline{vz} \notin EG$  ou  $\overline{uw} \notin EG$ , absurdo.

Caso 3.  $wu \in T$  ou  $zv \in T$ . Como no Caso 2, absurdo.

Caso 4.  $wz \in T$  ou  $uv \in T$ . Como no Caso 1, absurdo.

Logo,  $G$  não contém 4-ciclo sem cordas, donde é grafo de intervalo. Concluimos assim a demonstração do Teorema 2.5. ■

Um caso particular de ordem de intervalo é a chamada semi-ordem. Uma semi-ordem  $(V, T)$ , além de satisfazer os axiomas (S1) e (S2) de uma ordem de intervalo, satisfaz o seguinte axioma: para quaisquer  $v, w, z, u \in V$ ,

(S3)  $vw \in T$  e  $wz \in T$  implica  $vu \in T$  ou  $uz \in T$ .

Grafos cujos complementos possuem orientações que satisfazem os axiomas de uma semi-ordem são denominados grafos de indiferença, uma sub-classe muito importante dos grafos de intervalo. Veremos mais tarde, no Capítulo 3, que tais grafos podem ser caracterizados como aqueles para os quais existem modelos de intervalo onde todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

#### 2.4. ORDENAÇÃO PARA COLORAÇÃO

Olariu [1991] também apresenta uma caracterização da família dos grafos de intervalo em termos de uma certa ordem imposta aos vértices. Esta ordem é linear e possui uma propriedade bastante interessante: a conhecida heurística "sempre use a menor cor disponível" - o algoritmo guloso para coloração de vértices -, aplicada a esta ordem, produz sempre uma coloração exata. Além disso, Olariu

exibe um algoritmo de tempo linear para encontrar tal ordem; é o que veremos com mais detalhe no Capítulo 5.

**Teorema 2.6** ( Olariu [1991] ) Um grafo não direcionado  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se existe uma ordem linear " $<$ " sobre  $VG$  tal que para quaisquer vértices  $u, v, w$  com  $u < v$  e  $v < w$ ,  $\overline{uw} \in EG$  implica  $\overline{uv} \in EG$ .

### Demonstração do Teorema 2.6

(  $\Rightarrow$  ) Seja  $\langle I_v \rangle_{v \in VG}$  um modelo de intervalo de  $G$ . Escolhamos  $<$  de modo que

$$u < v \Leftrightarrow e(I_u) < e(I_v) \text{ ou } ( e(I_u) = e(I_v) \text{ e } d(I_u) < d(I_v) ).$$

Trivialmente,  $<$  é uma ordem linear sobre  $VG$ .

Sejam agora  $u, v, w \in VG$  tais que  $u < v$ ,  $v < w$  e  $\overline{uw} \in EG$ .

De acordo com a escolha de  $<$ , é fácil verificar que  $e(I_u) \leq e(I_v) \leq e(I_w)$ ; e sendo  $G$  grafo de intervalo,  $\overline{uw} \in EG$  implica  $I_u \cap I_w \neq \emptyset$ . Combinando estes dois resultados, vem que  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ , donde  $\overline{uv} \in EG$ .

(  $\Leftarrow$  ) Seja  $<$  uma ordem linear sobre  $VG$  satisfazendo o enunciado do Teorema. Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  uma enumeração dos vértices de  $G$  de modo que  $v_i < v_j \Leftrightarrow i < j$ . Utilizando o Teorema 2.3, vamos mostrar que  $G$  é triangularizado e que  $G^c$  é de comparabilidade.

Para mostrar que  $G$  é triangularizado, basta mostrar que  $v_n$  é vértice simplicial, já que isto se estende trivialmente a subgrafos

induzidos de  $G$ . Sejam  $v_i$  e  $v_j$  ( $i < j$ ) vértices arbitrários em  $V_G(v_n)$ . Se  $\overline{v_i v_j} \notin EG$ , temos:  $v_i < v_j$ ,  $v_j < v_n$ ,  $\overline{v_i v_n} \in EG$  e  $\overline{v_i v_j} \notin EG$ . Absurdo. Logo,  $V_G(v_n)$  induz um subgrafo completo.

Para mostrar que  $G^c$  é de comparabilidade, basta mostrar que dados três índices  $i < j < k$ ,

$$\overline{v_i v_j} \notin EG \text{ e } \overline{v_j v_k} \notin EG \text{ implica } \overline{v_i v_k} \notin EG.$$

É fácil verificar que se  $\overline{v_i v_k} \in EG$  incorre-se num absurdo, pois  $v_i < v_j$ ,  $v_j < v_k$  e  $\overline{v_i v_j} \notin EG$ . ■

## 2.5. CIRCUITOS

Uma outra caracterização dos grafos de intervalo, pouco conhecida, nos é fornecida por Duchet. Também aqui, como no Teorema 2.1, podemos ver refletida a disposição geométrica de um conjunto de intervalos traçados sobre uma reta: sempre é possível dividi-los em dois conjuntos de modo que todo intervalo de qualquer dos conjuntos sempre intercepte pelo menos um intervalo do outro conjunto.

**Teorema 2.7** ( Duchet [1979] ) Um grafo não direcionado  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se  $G$  não contém 4-ciclo sem cordas e para todo circuito  $C = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$  ( $n \geq 5$ ) existem sub-caminhos  $A = v_i \dots v_j$  e  $B = v_{j+1} \dots v_{i-1}$  de  $C$  ( os índices são módulo  $n$  ) tais que:

- I) Todo vértice em  $A$  tem pelo menos um vizinho em  $B$ ;
- II) Todo vértice em  $B$  tem pelo menos um vizinho em  $A$ .

**Demonstração**

(  $\Leftarrow$  ) Esta implicação é de demonstração trivial. Supondo por absurdo que  $G$  não seja grafo de intervalo,  $G$  contém como subgrafo induzido algum dentre os grafos listados na Figura 2.3 ( Teorema 2.2 ). Com exceção do 4-ciclo, em cada um deles existe um circuito de comprimento pelo menos 5 para o qual não existem sub-caminhos  $A$  e  $B$  que satisfaçam as condições I e II do enunciado.

(  $\Rightarrow$  ) Seja  $M = \langle I_v \rangle_{v \in VG}$  um modelo de intervalos de  $G$ .

Suponhamos por absurdo que exista em  $G$  um circuito  $C = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_0$  (  $n \geq 5$  ) para o qual não existem sub-caminhos  $A$  e  $B$  nas condições do enunciado.

Tomemos então em  $C$  sub-caminhos quaisquer  $A$  e  $B$  tais que  $A = v_i \dots v_j$  e  $B = v_{j+1} \dots v_{i-1}$  ( índices módulo  $n$  ).

Seja  $I_i$  a imagem de  $v_i$  em  $M$  para  $0 \leq i \leq n-1$ .

Em  $M$ , sejam  $I_A = \bigcup_{k=i}^j I_k$  e  $I_B = \bigcup_{k=j+1}^{i-1} I_k$ .

É claro que as uniões  $I_A$  e  $I_B$  se constituem cada uma por um único intervalo; podemos pois escrever  $I_A = [a_1, a_2]$  e  $I_B = [b_1, b_2]$  (lembrando que nossos intervalos são sempre fechados).

Por hipótese existe em  $A$  um vértice  $v_r$  (  $r$  pertencente ao conjunto dos índices  $i, \dots, j$  tomados módulo  $n$  ) que não possui nenhum vizinho no sub-caminho  $B$ . Logo,  $I_r \cap I_B = \emptyset$ . Supondo sem perda de generalidade que  $d(I_r) < e(I_B) = b_1$ , e tomando  $v_r$  de modo que  $I_r$  seja o intervalo mais à esquerda para o qual  $I_r \cap I_B = \emptyset$ , concluímos que  $I_r$  é intervalo extremo esquerdo do modelo  $M$ .

Construamos agora 2 outros sub-caminhos,  $A' = v_i \dots v_{r-1}$  e  $B' = v_r \dots v_j v_{j+1} \dots v_{i-1}$  ( índices módulo  $n$  ). É claro que  $A' \neq \emptyset$ , caso contrário teríamos  $A = v_r$ , donde  $G$  não seria conexo ( lembrando que a

conexidade é suposição subentendida em todos os teoremas ). Novamente, podemos tomar em  $A'$  (ou  $B'$ ) um vértice  $v_s$  (  $s$  entre 0 e  $n-1$  ) que não tem nenhum vizinho em  $B'$  (ou  $A'$ ), de modo que  $I_s$  é intervalo extremo do modelo  $M$ , e evidentemente extremo direito ( já que  $I_s \neq I_r$  devido ao fato de  $I_r \in MCB'$  ) interceptar  $I_{r-1} \in MCA'$  ).

Finalmente, supondo sem perda de generalidade que  $I_s \in MCB'$ , construíamos 2 outros sub-caminhos de  $C$ ,  $A''$  e  $B''$ , da seguinte forma:

$$A'' = v_{s+1} \dots v_{i-1} v_i \dots v_{r-1},$$

$$B'' = v_r \dots v_s$$

( índices módulo  $n$  ).

Da mesma forma que para  $A'$ ,  $B'' \neq \emptyset$ .

Por hipótese, encontraremos novamente um intervalo  $I_t$  (  $t$  entre 0 e  $n-1$  ), intervalo extremo do modelo  $M$ , tal que  $I_t \neq I_r$  e  $I_t \neq I_s$ .

Absurdo. Concluímos assim a demonstração do Teorema 2.7. ■

## CAPÍTULO 3

### GRAFOS DE INDIFERENÇA

#### 3.1. PREFERÊNCIA E INDIFERENÇA, SEMI-ORDENS

No capítulo 2 havíamos nos referido aos grafos cujos complementos possuem orientações que satisfazem os axiomas de uma semi-ordem, os grafos de indiferença. Discutiremos neste capítulo o contexto em que surgem e as caracterizações da família. Antes, porém, cabe deixar assentado que os grafos de indiferença são conhecidos principalmente como os grafos de intersecção de intervalos de mesmo comprimento.

Uma vertente importante da psicologia matemática e da teoria da decisão é a teoria da preferência e indiferença. Uma série de modelos foram propostos como tentativas de quantificar a preferência; a análise dos mecanismos em que ela se processa nos permite compreender melhor, e até de certo modo prever, o comportamento de grupos e indivíduos.

Antes de discutirmos algum dos modelos propostos, coloquemos o problema da preferência em termos de uma estrutura combinatória.

Seja  $V$  um conjunto finito de elementos sobre os quais um determinado emissor de decisões  $D$ , comparando-os dois a dois, inequivocamente ou prefere um ao outro ou é indiferente a seu respeito.

Construamos dois grafos  $H = (V, D)$  e  $G = (V, E)$  da seguinte maneira: dados dois elementos distintos  $u$  e  $v$  de  $V$ ,

$uv \in T \Leftrightarrow D$  prefere  $u$  a  $v$ , e

$uv \in E \Leftrightarrow D$  é indiferente a respeito de  $u$  e  $v$ .

É claro que  $uv \in E$  se e somente se  $vu \in E$ , donde  $G$  é grafo não direcionado; por outro lado,  $H$  é um grafo orientado. Além disso,  $K = (V, T + T^{-1} + E)$  é um grafo completo, e os grafos  $K_1 = (V, T + T^{-1})$  e  $G$  são complementares.

A estrutura do grafo  $H$  reflete as preferências de  $D$ . Supondo que  $D$  emite suas decisões de maneira coerente, é de se esperar que o grafo orientado  $H$  seja acíclico e mesmo transitivo, pois é razoável admitir que certo elemento  $x$  seja preferido a outro elemento  $z$  toda vez que exista um terceiro elemento  $y$  tal que  $x$  seja preferido a  $y$  e este, por sua vez, seja preferido a  $z$ .

Isto é, é razoável admitir que  $T$  se constitua numa ordem parcial, embora haja autores que apresentem argumentos contra a transitividade da preferência (p.ex., veja-se Krantz, Luce, Suppes e Tversky [1971, pg 17]).

Discutamos agora o desenvolvimento de um modelo teórico para a quantificação da preferência. Scott e Suppes [1958] centraram sua atenção sobre o seguinte problema: dado um conjunto finito  $V$  de elementos e uma relação binária  $T$  sobre  $V$ , sob quais circunstâncias existe uma função  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$vw \in T \Leftrightarrow f(v) \geq f(w) + \varepsilon, \quad \forall v, w \in V \text{ e para certo } \varepsilon > 0 \quad (I)$$

A idéia embutida na definição da função  $f$  é associar a cada elemento  $v$  de  $V$  um valor  $f(v)$  de modo que, para quaisquer  $v, w$  em  $V$ ,  $v$  é preferido a  $w$  se e somente se  $f(v)$  é maior o suficiente com relação ao valor  $f(w)$ . O número  $\varepsilon > 0$  fixa uma quantidade que representa a



"indiferença", isto é, que nos permite estar indiferentes entre dois elementos cujas avaliações diferem no máximo de  $\varepsilon$ .

Mais formalmente, dada uma relação binária  $(V, T)$ , uma função  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz a condição (I) é denominada uma função de utilidade de semi-ordem para a relação  $(V, T)$ . O termo "semi-ordem" é empregado justamente pelo fato de Scott e Suppes terem mostrado que tais relações  $(V, T)$  correspondem precisamente às semi-ordens introduzidas por Luce ( veja-se Luce [1956] ). Como vimos, as semi-ordens ( já definidas no capítulo anterior ) são ordens parciais.

**Teorema 3.1** ( Scott e Suppes [1958] ) Dada uma relação binária  $(V, T)$ ,  $V$  finito, existe uma função de utilidade de semi-ordem para  $(V, T)$  se e somente se  $(V, T)$  é uma semi-ordem.

A demonstração do Teorema 3.1 afasta-se um pouco do escopo do nosso trabalho. De qualquer forma, apresentaremos a demonstração da necessidade de  $(V, T)$  ser uma semi-ordem para que exista a função de utilidade  $f$  - fato que nos será necessário logo adiante. Para a demonstração da suficiência, veja-se Rabinovitch [1977], Scott [1964] ou Suppes e Zinnes [1963].

**Demonstração (  $\Rightarrow$  )**

Recordemos inicialmente a definição de uma semi-ordem. Uma relação binária  $(V, T)$  é uma semi-ordem se e somente se satisfaz os seguintes axiomas: para quaisquer  $v, w, z, u \in V$ ,

(S1)  $T$  é irreflexiva;

(S2)  $vw \in T$  e  $zu \in T$  implica  $vu \in T$  ou  $zw \in T$ ;

(S3)  $vw \in T$  e  $wz \in T$  implica  $vu \in T$  ou  $uz \in T$ .

Dada pois uma relação binária  $(V, T)$  para a qual existe  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  função de utilidade de semi-ordem, vamos mostrar que  $T$  satisfaz (S1), (S2) e (S3).

(a)  $T$  satisfaz (S1)

Claro, pois se  $vv \in T$ , temos  $f(v) \geq f(v) + \varepsilon$  com  $\varepsilon > 0$ , absurdo.

(b)  $T$  satisfaz (S2)

Sejam  $v, w, z, u$ , em  $V$  tais que  $vw \in T$  e  $zu \in T$ ; então,  $f(v) \geq f(w) + \varepsilon$  e  $f(z) \geq f(u) + \varepsilon$ , donde  $f(v) + f(z) \geq f(w) + f(u) + 2\varepsilon$ . Suponhamos por absurdo que  $vu \notin T$  e  $zw \notin T$ ; então,  $f(v) < f(u) + \varepsilon$  e  $f(z) < f(w) + \varepsilon$ , donde  $f(v) + f(z) < f(u) + f(w) + 2\varepsilon$ , absurdo.

Logo,  $vu \in T$  ou  $zw \in T$ .

(c)  $T$  satisfaz (S3)

Sejam  $v, w, z, u$  em  $V$  tais que  $vw \in T$  e  $wz \in T$ ; então,  $f(v) \geq f(z) + 2\varepsilon$ . Suponhamos por absurdo que  $vu \notin T$  e  $uz \notin T$ ; então,  $f(v) < f(u) + \varepsilon$  e  $f(u) < f(z) + \varepsilon$ , donde somando estas desigualdades vem  $f(v) < f(z) + 2\varepsilon$ , absurdo.

Logo,  $vu \in T$  ou  $uz \in T$ . ■

Retornemos agora a nossa atenção aos grafos  $H = (V, T)$  e  $G = (V, E)$  definidos anteriormente. Supondo que a relação binária  $(V, T)$  é

uma semi-ordem, existe  $f:V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para quaisquer  $v, w \in V$ ,  $vw \in T$  se e somente se  $f(v) \geq f(w) + \epsilon$ , para certo  $\epsilon > 0$ .

O grafo  $G$  é claramente um grafo de intervalo, pois, de acordo com o Teorema 2.5,  $G^C = (V, T+T^{-1})$  possui uma orientação  $C$  (a orientação  $T$ ) que satisfaz o axioma (S2). Além disso, é fácil verificar que

$$\overline{vw} \in E \Leftrightarrow |f(v) - f(w)| < \epsilon, \forall v, w \in V \text{ e para certo } \epsilon > 0 \quad (\text{II})$$

O grafo  $G$  é um tipo especial de grafo de intervalo denominado grafo de indiferença. Assim como a estrutura de  $H$  reflete as preferências do emissor de decisões  $D$ , a estrutura de  $G$  reflete, a juízo de  $D$ , as "indiferenças" existentes entre pares de elementos de  $V$ .

Podemos, pois, oferecer uma primeira definição da classe dos grafos de indiferença.

**Definição I.** Um grafo não direcionado  $G = (V, E)$  é um grafo de indiferença quando, para certo  $\epsilon > 0$ , existe  $f:V \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz (II).

Lembrando que a orientação  $T$  também satisfaz o axioma (S3), imediatamente podemos fornecer a primeira caracterização da classe dos grafos de indiferença: a classe dos grafos de co-comparabilidade de semi-ordens.

**Teorema 3.2** ( Roberts [1969] ) Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $G$  é um grafo de indiferença;
- (ii)  $G^C$  admite uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas de uma semi-ordem;

(iii) Toda orientação transitiva  $T'$  de  $G^c$  satisfaz os axiomas de uma semi-ordem.

### Demonstração do Teorema 3.2

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Esta implicação decorre imediatamente da demonstração da necessidade do Teorema 3.1.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Suponhamos que  $G^c$  admita uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas (S1), (S2) e (S3) de uma semi-ordem.

Seja  $T'$  uma orientação transitiva de  $G^c$ . Então  $T'$  satisfaz (S1) e (S2) ( veja-se o Teorema 2.5 ). Vamos agora mostrar que  $T'$  satisfaz também o axioma (S3).

Sejam  $v, w, z, u \in V$  tais que  $vw \in T'$  e  $wz \in T'$ . É claro que  $\overline{vw} \in EG^c$  e  $\overline{wz} \in EG^c$ , donde  $vw$  ( ou  $wv$  )  $\in T$  e  $wz$  ( ou  $zw$  )  $\in T$ . Como na demonstração do Teorema 2.5, implicação (i) $\Rightarrow$ (ii), podemos dividir a demonstração em 4 casos:

Caso 1.  $vw \in T$  e  $wz \in T$ .

Então, por hipótese,  $vu \in T$  ou  $uz \in T$ , donde  $\overline{vu} \in EG^c$  ou  $\overline{uz} \in EG^c$ . Considerando a orientação  $T'$ , podemos ter 4 sub-casos:

1. a)  $vu \in T'$ ;

1. b)  $uv \in T'$ ; nesse caso:  $uv \in T' \Rightarrow uw \in T' \Rightarrow uz \in T'$

$\uparrow$	$\uparrow$
$vw \in T' \text{ e}$	$wz \in T' \text{ e}$
$T' \text{ é trans.}$	$T' \text{ é trans.}$



2.b.2)  $uz \in T'$ ;

2.b.3)  $uw \in T'$ ; recaímos no sub-caso (2.a.3);

2.b.4)  $wu \in T'$ ; recaímos no sub-caso (2.a.4).

De qualquer maneira, no final sempre teremos  $vu \in T'$  ou  $uz \in T'$ .

Caso 3.  $wv \in T$  e  $wz \in T$ .

Este caso é semelhante ao Caso 2.

Caso 4.  $wv \in T$  e  $zw \in T$ .

Este caso é semelhante ao Caso 1.

Concluimos a demonstração desta implicação.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii). Implicação imediata.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Se  $G^c$  admite uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas de uma semi-ordem, então, pelo Teorema 3.1, existe uma função  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  e um número  $\varepsilon > 0$  tais que

$$vw \in T \Leftrightarrow f(v) - f(w) \geq \varepsilon.$$

Como  $T+T^{-1} = EG^c$ , claramente temos que  $\overline{vw} \in E$  se e somente se  $|f(v) - f(w)| < \varepsilon, \forall v, w \in V$ . ■

Como as semi-ordens são ordens de intervalo, temos o

seguinte Corolário:

**Corolário 3.3** Todo grafo de indiferença é um grafo de intervalo.

### 3.2. VÉRTICES EXTREMOS, GRAFOS DE INDIFERENÇA ESTRUTURADOS

Roberts [1969] define a classe dos grafos de indiferença em termos do conceito de "vértice extremo". Para isso, utiliza uma relação de equivalência introduzida por Scott e Suppes [1958]: dado  $G = (V, E)$ , dizemos que os vértices  $v, w \in V$  são equivalentes ( $v \equiv w$ ) se e somente se  $\overline{vw} \in E$  e  $\forall u \in V ( \overline{vu} \in E \Leftrightarrow \overline{wu} \in E )$ ; isto é,  $v \equiv w$  se e somente se  $V(v) = V(w)$  (dois vértices são equivalentes se e somente se têm a mesma vizinhança).

Definida esta equivalência, dizemos que  $v$  é "vértice extremo" se  $V(v)$  é um conjunto completo de vértices e  $[ w, u \in V(v), wzv, uzv ]$  implica  $[ \exists z \in V(w) \cap V(u)$  tal que  $z \notin V(v) ]$  (veja-se a Figura 3.1).

Definamos também o grafo  $G^* = (V^*, E^*)$  do seguinte modo:  $V^*$  é o conjunto das classes de  $\equiv$  - equivalência, e uma aresta  $\overline{v^*w^*} \in E^*$  se e somente se existem  $v, w \in V$  tais que  $\overline{vw} \in E$  e  $v, w$  estão em classes de  $\equiv$  - equivalência distintas. Informalmente,  $G^*$  é o grafo obtido pela "contração" das classes de  $\equiv$  - equivalência.

Finalmente, dizemos que  $G$  é reduzido se  $G$  é isomorfo a  $G^*$ .

Já temos agora elementos suficientes para introduzir uma outra definição da classe dos grafos de indiferença.

**Definição II.** ( Roberts [1969] ) Um grafo não direcionado  $G = (V, E)$  é

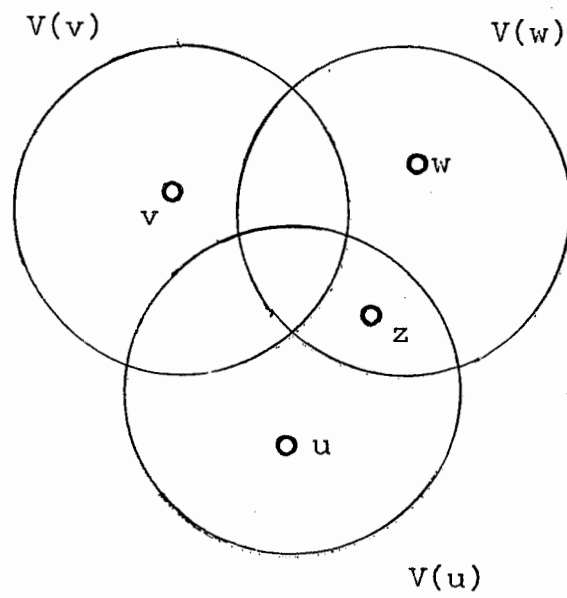


Figura 3.1



um grafo de indiferença se para todo subgrafo induzido e conexo  $H$  de  $G$ ,  $H^*$  tem exatamente um vértice (isto é,  $H$  é completo) ou tem exatamente dois vértices extremos não adjacentes.

Cabe frizar que os conceitos de vértice extremo e vértice simplicial forte coincidem quando os restringimos aos grafos de indiferença.

Mais adiante, no Teorema 3.9, demonstraremos a equivalência da Definição II com a Definição I anteriormente fornecida. É interessante agora tecer alguns comentários sobre esta nova definição.

Uma propriedade da operação "\*" é a de preservar "indistinguibilidade": dado  $G = (V, E)$  não direcionado,  $G$  é representável sob a forma (II) se e somente se  $G^*$  o é - basta associar pontos equivalentes ao mesmo valor real. Dessa forma, podemos nos limitar a tratar grafos reduzidos. Podemos também nos limitar a grafos conexos, uma vez que um grafo é representável sob a forma (II) se e somente se cada uma de suas componentes também é representável sob esta forma.

Interpretando os grafos de indiferença como conjuntos de pontos  $f(v)$  sobre a reta, onde dois pontos são "indistinguíveis" se e somente se a distância entre eles é menor que o valor fixo  $\epsilon > 0$ , torna-se mais clara a definição de vértice extremo - que fica naturalmente associado a um ponto extremo da reta. Se  $a$  é um ponto extremo da reta, para quaisquer  $x, y$  temos

$$( |a-x| < \epsilon \text{ e } |a-y| < \epsilon ) \Rightarrow |x-y| < \epsilon.$$

Isto está de acordo com termos definido um vértice extremo de

modo que sua vizinhança seja um conjunto completo. Além do mais, supondo redutividade e conectividade, é fácil mostrar que

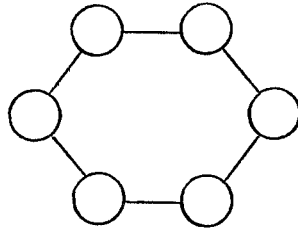
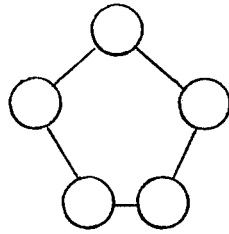
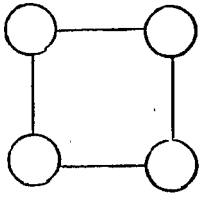
$$(|a-x| < \epsilon \text{ e } |a-y| < \epsilon) \Rightarrow (\exists z) (|x-z| < \epsilon \text{ e } |y-z| < \epsilon \text{ e } |a-z| \geq \epsilon);$$

isto leva a concluir que se dois vértices são vizinhos de um vértice extremo, então existe um outro vértice vizinho dos primeiros mas não do vértice extremo.

Esta interpretação dos grafos de indiferença torna mais clara, além do mais, a definição de Roberts: um conjunto finito de pontos sobre a reta contendo pelo menos dois pontos tem precisamente dois pontos extremos. Com esta interpretação poder-se-á compreender melhor também uma caracterização bem conhecida dos grafos de indiferença que forneceremos adiante: aqueles grafos para os quais existem modelos de intervalo onde todos os intervalos têm um comprimento fixo  $\epsilon$ .

A figura 3.2 exhibe quatro classes de grafos que não são de indiferença. Todos eles são reduzidos e conexos. Os de Tipo I não possuem pontos extremos, e os de Tipos II a IV possuem três pontos extremos cada um ( assinalados na figura ). O grafo de Tipo II é freqüentemente denotado por  $K_{13}$ .

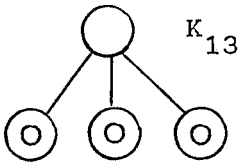
Como se verá adiante ( Teorema 3.9 ), estes grafos são essencialmente os únicos grafos que não são de indiferença, no sentido de que um grafo é de indiferença se e somente se não contém nenhum destes subgrafos como subgrafo induzido. Denominaremos os grafos que não contém subgrafos induzidos de Tipos I-IV como grafos de indiferença estruturados.



• • •

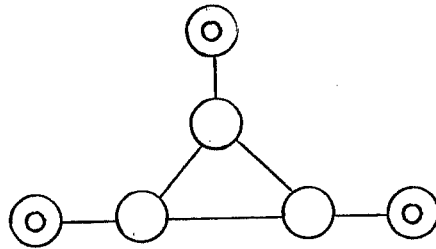
$C_n, n=4,5,\dots$

TIPO I

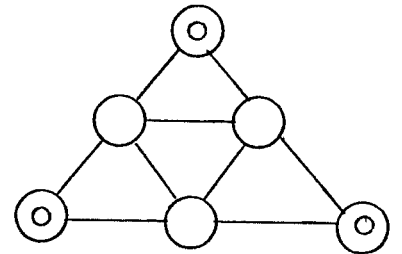


$K_{1,3}$

TIPO II



TIPO III



TIPO IV

Figura 3.2

De acordo com a Definição II, todo subgrafo induzido de um grafo de indiferença é um grafo de indiferença. Assim, podemos enunciar o Teorema a seguir, de demonstração imediata.

**Teorema 3.4** Todo grafo de indiferença de acordo com a Definição II é um grafo de indiferença estruturado.

Analisando o teorema estrutural de Lekkerkerker e Boland para grafos de intervalo ( Teorema 2.2 ), pode-se também demonstrar facilmente os dois Teoremas a seguir.

**Teorema 3.5** Todo grafo de indiferença estruturado é um grafo de intervalo e não contém  $K_{13}$  como subgrafo induzido.

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo de indiferença estruturado; por definição,  $G$  não contém  $K_{13}$  como subgrafo induzido. O Teorema 2.2 nos permite concluir que se  $G$  não é um grafo de intervalo e não contém  $K_{13}$  induzido, então  $G$  é algum grafo de Tipo I, II ou IV ( Figura 3.2 ); isto contradiz a suposição de  $G$  ser um grafo de indiferença estruturado. ■

**Teorema 3.6 ( Marley )** Suponhamos que  $G = (V, E)$  é um grafo de intervalo e não contém  $K_{13}$  como subgrafo induzido. Então,  $G^c$  admite uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas de uma semi-ordem.

**Demonstração.** Pelo Teorema 2.5,  $G^c$  admite uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas de uma ordem de intervalo. Basta então mostrar que  $T$  satisfaz o axioma (S3).

Dados  $v, w, z, u \in V$ , suponhamos que  $vw \in T$ ,  $wz \in T$ ,  $vu \notin T$  e  $uz \notin T$ . Pela transitividade de  $T$  e pela relação  $EG^c = T + T^{-1}$ , verifica-se que o subgrafo de  $G$  gerado por  $\{v, w, z, u\}$  é isomorfo a  $K_{13}$  ( Figura 3.3 ). Contradição. ■

**Corolário 3.7** Se  $G$  é um grafo de indiferença estruturado, então  $G^c$  admite uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas de uma semi-ordem.

A demonstração deste Corolário é imediata.

**Corolário 3.8** Seja  $T$  uma orientação para o complemento de um grafo não direcionado  $G = (V, E)$ . Então  $T$  é uma semi-ordem se e somente se  $T$  é uma ordem parcial e  $G$  não contém  $K_{13}$  ou  $K_{22}$  ( $K_{22} \cong C_4$ ) como subgrafo induzido.

### Demonstração

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $T$  seja uma semi-ordem; então é claro que  $T$  é uma ordem parcial.

a) Suponhamos que  $G$  contenha  $K_{13}$  induzido, de acordo com a Figura 3.3. Então,  $\{\overline{vw}, \overline{wz}, \overline{vz}\} \subseteq EG^c$ , donde  $vw$  (ou  $wv$ ),  $wz$  (ou  $zw$ ),  $vz$  (ou  $zv$ )  $\in T$ . Em cada uma das possibilidades para a estrutura de  $T$  ( $\{vw, wz, vz\} \subseteq T$ ,  $\{vw, zw, vz\} \subseteq T$  etc. ), invariavelmente existem duas arestas tais que o término de uma é o início da outra. Podemos pois supor sem perda de generalidade que  $vw \in T$  e  $wz \in T$ . Mas, pela Figura 3.3,  $vu \notin T$  e  $uz \notin T$ . Absurdo, pois  $T$  satisfaz (S3).

b) Suponhamos que  $G$  contenha  $K_{22}$  induzido, de acordo com a Figura 3.4.

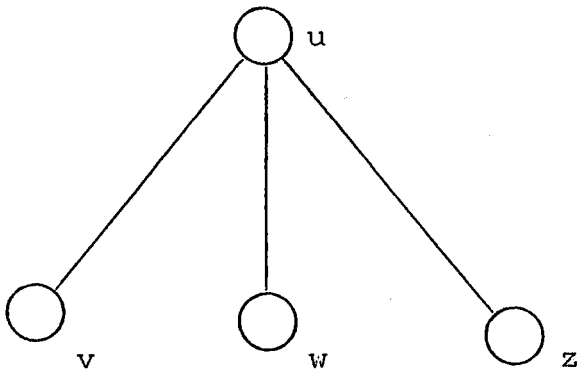


Figura 3.3

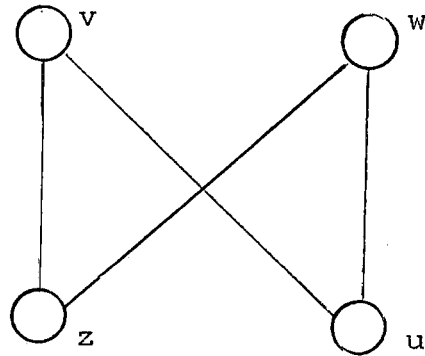


Figura 3.4

Temos então  $\langle \overline{vw}, \overline{zu} \rangle \subseteq EG^c$ , donde  $vw$  (ou  $wv$ ),  $zu$  (ou  $uz$ )  $\in T$ .

Suponhamos que  $vw \in T$  e  $zu \in T$ . Pela Figura 3.4,  $wu \notin T$  e  $zw \notin T$ ; isto é uma contradição, pois  $T$  satisfaz (S2). O mesmo raciocínio se aplica às outras possibilidades para  $T$  ( $\langle vw, uz \rangle \subseteq T$ ,  $\langle wv, zu \rangle \subseteq T$ ,  $\langle wv, uz \rangle \subseteq T$ ). Com isto concluímos a demonstração desta implicação.

( $\Rightarrow$ ) Se  $T$  é uma ordem parcial,  $G$  é grafo de co-comparabilidade; e como não contém  $K_{22}$  induzido, pelo Teorema 2.3 é grafo de intervalo. Como  $G$  também não contém  $K_{13}$  induzido, pelo Teorema 3.6  $T$  é uma semi-ordem. ■

O Teorema a seguir unifica toda a discussão apresentada até o momento, selando a equivalência entre as Definições I e II da classe dos grafos de indiferença.

**Teorema 3.9** ( Roberts [1969] ) Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $G$  é um grafo de indiferença de acordo com a Definição II;
- (ii)  $G$  é um grafo de indiferença estruturado;
- (iii)  $G$  é um grafo de indiferença de acordo com a Definição I;
- (iv)  $G^c$  admite uma orientação  $T$  que satisfaz os axiomas de uma semi-ordem.

### Demonstração

O método consistirá em demonstrar o ciclo de implicações

(iv)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iv).

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) Veja-se o Teorema 3.2.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Se  $G$  é um grafo de indiferença de acordo com a Definição I, então  $G$  é representável sob a forma (II), e é claro que todo subgrafo induzido e conexo  $H$  de  $G$  também é representável sob a forma (II). Como a operação "\*" preserva "indistinguibilidade", temos que para todo subgrafo induzido e conexo  $H$  de  $G$ ,  $H^*$  é representável sob a forma (II), donde é fácil concluir que o conjunto  $\langle f(v) \rangle_{v \in VH^*}$  ou é unitário ou tem um valor mínimo e um valor máximo diferentes.

Caso 1.  $\langle f(v) \rangle_{v \in VH^*}$  é unitário

Nesse caso, pela redutividade,  $H^*$  tem exatamente um vértice.

Caso 2.  $\langle f(v) \rangle_{v \in VH^*}$  tem um valor mínimo e um valor máximo diferentes.

Sejam  $v, w \in VH^*$  tais que o valor  $f(v)$  é mínimo e o valor  $f(w)$  é máximo. Como  $H^*$  é reduzido, é simples verificar que  $v$  e  $w$  são os dois vértices extremos, não adjacentes, de  $H^*$ .

Assim, para todo subgrafo induzido e conexo  $H$  de  $G$ ,  $H^*$  tem exatamente um vértice ou tem exatamente dois vértices extremos não adjacentes, donde  $G$  é grafo de indiferença de acordo com a Definição II.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Veja-se o Teorema 3.4.

(ii)  $\Rightarrow$  (iv) Veja-se o Corolário 3.7.





Uma outra caracterização da classe dos grafos de indiferença provém diretamente da equivalência entre as condições (ii) e (iii) do Teorema 3.9:

**Teorema 3.10** Um grafo  $G$  não direcionado é um grafo de indiferença se e somente se é triangularizado ( não contém nenhum grafo de Tipo I na Figura 3.2 ) e para todo subgrafo conexo  $H$  de  $G$ ,  $H^*$  tem no máximo dois pontos extremos.

A Definição II e sua versão equivalente fornecida no Teorema 3.10 são pouco práticas do ponto de vista algorítmico: verificar a existência de triplas de pontos extremos em todos os subgrafos conexos para reconhecer grafos de indiferença não é tarefa simples; melhor seria verificar somente em componentes conexas. Contudo, o grafo da Figura 3.5 é conexo, reduzido, tem apenas dois pontos extremos (a e b) e não é um grafo de indiferença, pois contém  $K_{13}$  como subgrafo induzido. Porém, pode-se mostrar que seria possível checar pontos extremos somente em componentes conexas, desde que se checasse também a ocorrência de  $K_{13}$  induzido. Veja-se o teorema a seguir.

**Teorema 3.11** Um grafo  $G$  não direcionado é um grafo de indiferença se e somente se é triangularizado, não contém  $K_{13}$  induzido e para toda componente conexa  $H$  de  $G$ ,  $H^*$  tem no máximo dois pontos extremos.

Omitiremos a demonstração deste Teorema.

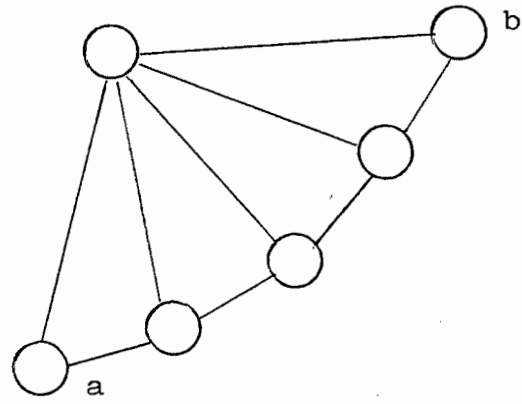


Figura 3.5

### 3.3 GRAFOS DE INTERVALO UNITÁRIO E DE INTERVALO PRÓPRIO

A fim de aprofundarmos na relação existente entre grafos de indiferença e grafos de intervalo, notemos que para representar  $K_{13}$  por intervalos sobre a reta é necessário que um dos intervalos esteja contido propriamente no outro. Veja-se a Figura 3.6.

Esta observação sugere definir um grafo não direcionado  $G$  como um grafo de intervalo próprio se  $G$  pode ser representado por um modelo onde nenhum dos intervalos está contido propriamente em outro. Definimos também grafo de intervalo unitário como aquele para o qual existe um modelo onde todos os intervalos têm o mesmo comprimento. Wegner [1967] mostrou que os grafos de intervalo unitário se equivalem aos grafos de indiferença estruturados, fato que se pode demonstrar com o Teorema 3.5 em conjunto com o teorema que apresentaremos a seguir.

É claro que  $K_{13}$  é um grafo de intervalo mas não um grafo de intervalo próprio, donde não é um grafo de intervalo unitário.

**Teorema 3.12** Seja  $G$  um grafo não direcionado. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $G$  é um grafo de indiferença;
- (ii)  $G$  é um grafo de intervalo unitário;
- (iii)  $G$  é um grafo de intervalo próprio;
- (iv)  $G$  é um grafo de intervalo e não contém  $K_{13}$  como subgrafo induzido.

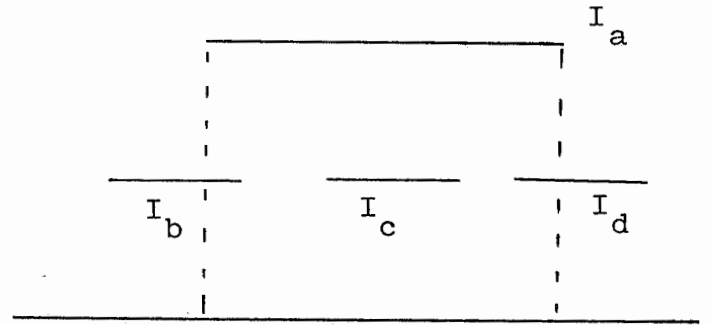
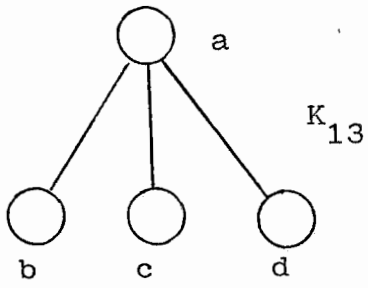


Figura 3.6 O intervalo  $I_c$  está contido propriamente no intervalo  $I_a$ .

### Demonstração do Teorema 3.12.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Temos que  $G$  pode ser representado sob a forma (II). O conjunto  $\langle I_v \rangle_{v \in VG}$ , onde  $I_v = [f(v) - \epsilon/2, f(v) + \epsilon/2]$ , é um modelo de intervalo para  $G$  onde todos os intervalos têm o mesmo comprimento fixo  $\epsilon$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Implicação imediata, pois é claro que num modelo em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento não pode haver um intervalo contido propriamente em outro.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Se  $G$  é um grafo de intervalo próprio, então é um grafo de intervalo. Além do mais, como todo subgrafo induzido de um grafo de intervalo próprio é um grafo de intervalo próprio, é claro que  $G$  não pode conter  $K_{13}$  induzido.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Veja-se os Teoremas 3.6 e 3.9. ■

### 3.4. CARACTERIZAÇÃO POR GRAFOS DE COMPARABILIDADE LOCAL

Szwarcfiter [1990] descreve uma caracterização dos grafos de indiferença em termos dos "grafos de comparabilidade local", que analisaremos agora.

Seja  $T$  uma orientação acíclica de um grafo não direcionado  $G$ , e  $v_i, v_j \in VG$ . Se  $G^T$  contém um caminho de  $v_i$  a  $v_j$  então denominaremos  $v_i$  ancestral de  $v_j$ , e  $v_j$  descendente de  $v_i$ . Denotemos por  $\langle v_i, v_j \rangle_{G^T}$ , ou

simplesmente por  $\langle v_i, v_j \rangle$ , o subconjunto de vértices simultaneamente descendentes de  $v_i$  e ancestrais de  $v_j$  em  $G^T$ .

O diagrama de Hasse de  $G^T$  é o subgrafo anti-transitivo de  $G^T$  que preserva o fecho transitivo.

Seja  $D$  um grafo direcionado (digrafo) transitivo. Uma extensão linear de  $D$  é um supergrafo transitivo espalhado máximo de  $D$ . Sejam  $L_1, L_2, \dots, L_k$  extensões lineares de  $D$ . A dimensão de  $D$  ( $\dim D$ ) é o menor inteiro  $k$  para o qual  $EL_1 \cap EL_2 \cap \dots \cap EL_k = ED$ . A dimensão do grafo de comparabilidade subjacente  $G$  de  $D$  é definida como a própria dimensão de  $D$  (pode-se mostrar que esta definição não é ambígua).

Seja  $G$  um grafo não direcionado e  $R$  uma ordenação linear  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dos vértices de  $G$ . Uma orientação  $T$  de  $G$  é induzida por  $R$  quando  $v_i v_j \in T$  implica  $i < j$ .

Seja  $M$  um modelo de intervalo para  $G$  e  $R$  uma ordenação linear  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dos vértices de  $G$  tal que  $i < j$  se e somente se  $e(I_i) < e(I_j)$ , onde  $I_i$  e  $I_j$  são as imagens de  $v_i$  e  $v_j$  em  $M$ . Então,  $R$  é chamada uma ordenação canônica, e uma orientação  $T$  induzida por  $R$  é uma orientação canônica para  $G$  (para  $M$ ).

Seja  $T$  uma orientação acíclica para um grafo não direcionado  $G$ .  $G^T$  é localmente transitivo quando o subgrafo induzido em  $G^T$  pelo subconjunto de vértices  $\langle v, w \rangle$  é transitivo para todas as arestas  $vw \in T$ . Nesse caso,  $G$  é um grafo de comparabilidade local, e  $T$  uma orientação localmente transitiva de  $G$ .

Seja  $D$  o fecho transitivo de  $G^T$ . Definimos  $\dim T = \dim G^T = \dim D$ , e  $\dim G$  como a mínima dimensão entre todas as orientações localmente transitivas de  $G$ .

O teorema a seguir estabelece que os grafos de indiferença são precisamente os grafos de comparabilidade local de dimensão um.

**Teorema 3.13** Seja  $G$  um grafo não direcionado.  $G$  é um grafo de comparabilidade local de dimensão um se e somente se  $G$  é um grafo de intervalo próprio conexo.

**Demonstração** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  um grafo de comparabilidade local de dimensão um. Então,  $G$  admite uma orientação localmente transitiva  $T$  de dimensão um. Seja  $D$  o fecho transitivo de  $G^T$ ;  $D$  possui um caminho hamiltoniano (veja-se seção 5.3.4)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ( $n = |VG|$ ). Isto é, o diagrama de Hasse de  $D$  é  $v_1 v_2 \dots v_n$  e tal caminho também está presente em  $G^T$ . Logo,  $G$  é conexo.

Construamos agora um modelo de intervalo para  $G$  da seguinte forma: cada  $v_i \in VG$  corresponderá a um intervalo  $I_i$  de tal modo que  $e(I_i) = i$ ,  $d(I_i) = i+1$ , e, para cada  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $e(I_j) = j$  e  $d(I_j) = k + j/n$ , onde  $k$  é escolhido de modo a satisfazer  $v_j v_k \in EG^T$  e  $v_j v_{k+1} \notin EG^T$ .

Consideremos a posição relativa de dois intervalos  $I_i$  e  $I_j$ ,  $i < j$ . Temos que  $e(I_i) < e(I_j)$ . Se  $d(I_i) \geq d(I_j)$ , deve existir uma aresta  $v_i v_k \in EG^T$  tal que  $v_j v_k \notin EG^T$ ,  $j < k$ . Contudo,  $v_j \in \langle v_i, v_k \rangle$ , e portanto o subgrafo induzido em  $G^T$  por  $\langle v_i, v_k \rangle$  é transitivo, o que implica  $v_j v_k \in EG^T$ , uma contradição. Logo, nenhum intervalo contém propriamente a outro.

Resta mostrar que  $I_i$  e  $I_j$  se interceptam se e somente se  $v_i v_j \in EG$ . Se  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ , então  $e(I_i) < e(I_j) < d(I_i)$ . Isto é, existe uma aresta  $v_i v_k \in EG^T$  tal que  $i < j < k$ . Novamente, uma vez que  $v_j \in \langle v_i, v_k \rangle$  e  $G^T$  é localmente transitivo,  $v_i v_j \in EG$ . Inversamente, se  $v_i v_j \in EG^T$ , então  $i < j$  e  $d(I_i) \geq j + i/n$ . Como  $e(I_i) = i$  e  $e(I_j) = j$ , vem que  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo de intervalo próprio conexo e  $M$  um modelo de intervalo de  $G$ .

Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  uma ordenação canônica dos vértices de  $G$  e  $T$  uma orientação canônica para  $M$ .

Seja  $I_i$  a imagem de  $v_i$  em  $M$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Como  $G$  é conexo,  $v_i v_j \in EG$  para certos  $i, j$  tais que  $i < j \leq n$ . Isto é,  $e(I_i) < e(I_j) < d(I_i) < d(I_j)$ . Como  $e(I_i) < e(I_{i+1}) \leq e(I_j)$  e  $d(I_i) < d(I_{i+1}) \leq d(I_j)$ , concluímos que  $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$ , e portanto  $v_1, v_2, \dots, v_n$  é um caminho hamiltoniano para  $G^T$ .

Mostraremos agora que  $G^T$  é localmente transitivo. Seja  $v_i v_j \in G^T$  com  $i < k \leq j$ . Então  $e(I_i) < e(I_k) \leq e(I_j)$ . Como nenhum intervalo contém propriamente a nenhum outro,  $e(I_j) < d(I_i) < d(I_k) \leq d(I_j)$ . Portanto  $v_i v_k \in EG^T$  e para  $j \neq k$  temos que  $v_j v_k \in EG^T$ . Como  $v_k \in \langle v_i, v_j \rangle$ , o subgrafo induzido em  $G^T$  por  $\langle v_i, v_j \rangle$  é transitivo. Isto é,  $G^T$  é localmente transitivo; e sua dimensão é um porque contém um caminho hamiltoniano. ■

É interessante frizar que as caracterizações dos Teoremas 3.2 e 3.13 são, em certo sentido, duais: a existência de uma orientação localmente transitiva para as arestas de um grafo implica a existência de uma orientação que satisfaz os axiomas de uma semi-ordem para as arestas do complemento deste grafo, e vice-versa.



## CAPÍTULO 4

### RECONHECIMENTO E ISOMORFISMO

#### 4.1. INTRODUÇÃO

O reconhecimento de grafos perfeitos é um famoso problema ainda por resolver; não se sabe ainda se é um problema NP-completo. No entanto, praticamente todas as sub-classes conhecidas de grafos perfeitos ( apresentaremos algumas no Capítulo 5 ) possuem algoritmos polinomiais de reconhecimento. No caso concreto dos grafos de intervalo, descreveremos neste capítulo um algoritmo linear desenvolvido por Booth e Lueker [1976].

O problema de verificação de isomorfismo entre grafos, no caso geral, também é um famoso problema que há muito se encontra aberto. E isto não muda de figura se o restringimos a isomorfismo entre grafos de uma mesma classe, pelo menos no caso dos grafos perfeitos e algumas de suas sub-classes - triangularizados, split, de comparabilidade, bipartites e de caminho não direcionado : o problema restrito a estas classes é equivalente em complexidade ao problema no caso geral. No entanto, novamente Booth e Lueker [1979] aportam um algoritmo polinomial - linear - para decidir isomorfismo entre grafos de intervalo. Passamos agora, pois, a analisar os algoritmos de reconhecimento e isomorfismo para grafos de intervalo.

## 4.2. ALGORITMO DE RECONHECIMENTO DE GRAFOS DE INTERVALO

( Booth e Lueker [1976] )

Iniciamos o estudo do algoritmo de reconhecimento enunciando o chamado "Problema Geral de Arranjo Consecutivo": dado um conjunto finito  $X$  e uma coleção  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$ , existe uma permutação  $\pi$  de  $X$  na qual os membros de cada subconjunto  $C \in \mathcal{C}$  ocorrem como uma subsequência consecutiva de  $\pi$  ?

No caso do reconhecimento dos grafos de intervalo,  $X$  é o conjunto das cliques maximais e  $\mathcal{C} = \{ I(v) \}_{v \in VG}$ , onde  $I(v)$  é o conjunto das cliques maximais que contém o vértice  $v$  ( veja-se o Teorema 2.3 ). Veremos como o algoritmo implementa esta idéia através do uso de uma estrutura de dados chamada PQ-árvore, que passamos a definir.

### 4.2.1. PQ-árvores

Dado um conjunto universal de elementos  $U = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , a classe das PQ-árvores sobre  $U$  é definida como sendo o conjunto de todas as árvores ordenadas e enraizadas ( Aho, Hopcroft e Ullman [1974] ) cujas folhas são elementos de  $U$  e cujos nós internos se dividem em P-nós e Q-nós.

Cada uma das seguintes operações constrói uma PQ-árvore válida:

1. Todo elemento  $a_i \in U$  é uma PQ-árvore cuja raiz é o próprio elemento, o qual é também a única folha;
2. Se  $T_1, T_2, \dots, T_k$  são PQ-árvores, então a estrutura da Figura 4.1 é uma PQ-árvore cuja raiz é um P-nó e cujos filhos da raiz são  $T_1, T_2, \dots, T_k$ ;
3. Se  $T_1, T_2, \dots, T_k$  são PQ-árvores, então a estrutura da Figura 4.2 é uma PQ-árvore cuja raiz é um Q-nó e cujos filhos da raiz são  $T_1, T_2, \dots, T_k$ .

Uma PQ-árvore é própria quando satisfaz cada uma das três convenções abaixo:

1. Cada elemento  $a_i \in U$  ocorre precisamente uma vez como folha;
2. Cada P-nó tem no mínimo dois filhos;
3. Cada Q-nó tem no mínimo três filhos.

De agora em diante sempre que nos referirmos a uma PQ-árvore, fica subentendido que se trata de uma PQ-árvore própria. Estas convenções assumidas garantem representações únicas de PQ-árvores para o problema que estudaremos. Os algoritmos que serão descritos produzirão ao final sempre PQ-árvores próprias.

A Figura 4.3 exibe uma PQ-árvore própria para o conjunto  $U = \langle A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K \rangle$ .

A leitura das folhas de uma árvore  $T$ , da esquerda para a direita, produz sua fronteira, denotada por  $FRONTIER(T)$ . Para o exemplo da Figura 4.3, a fronteira é ABCDEFGHIJK.

Duas árvores são equivalentes se e somente se podem se transformar uma na outra pela aplicação de zero ou mais transformações de equivalência. Cada transformação especifica uma reordenação válida dos nós de uma árvore. Existem somente dois tipos de transformações de

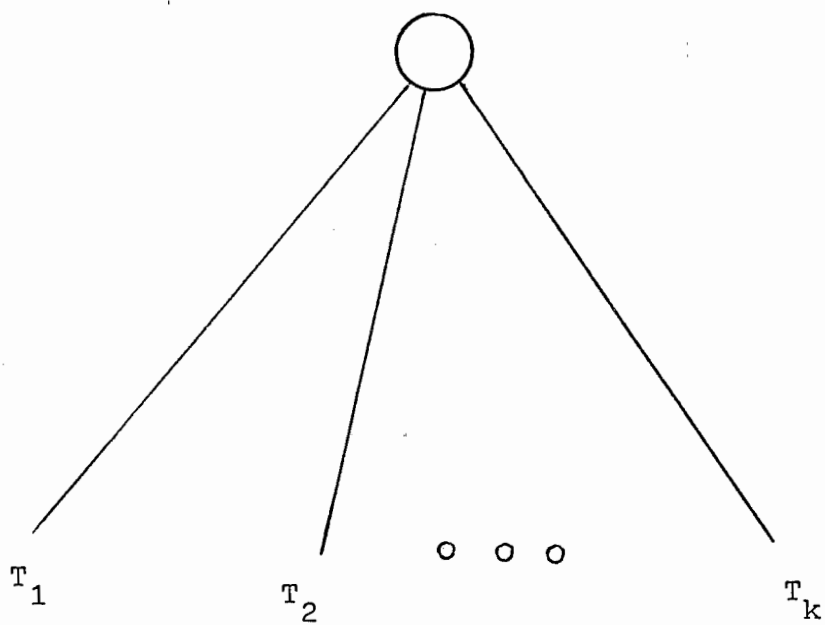


Figura 4.1. Um P-nó.

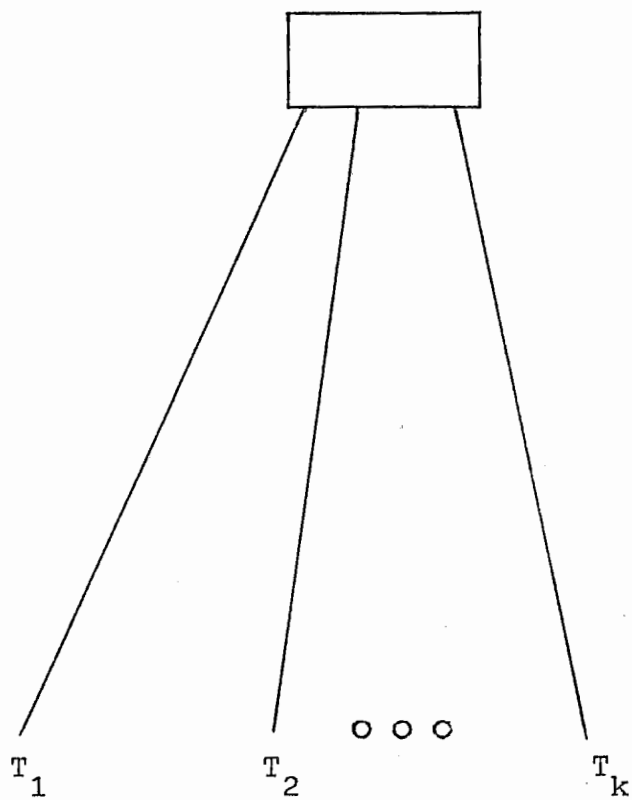


Figura 4.2. Um Q-nó.

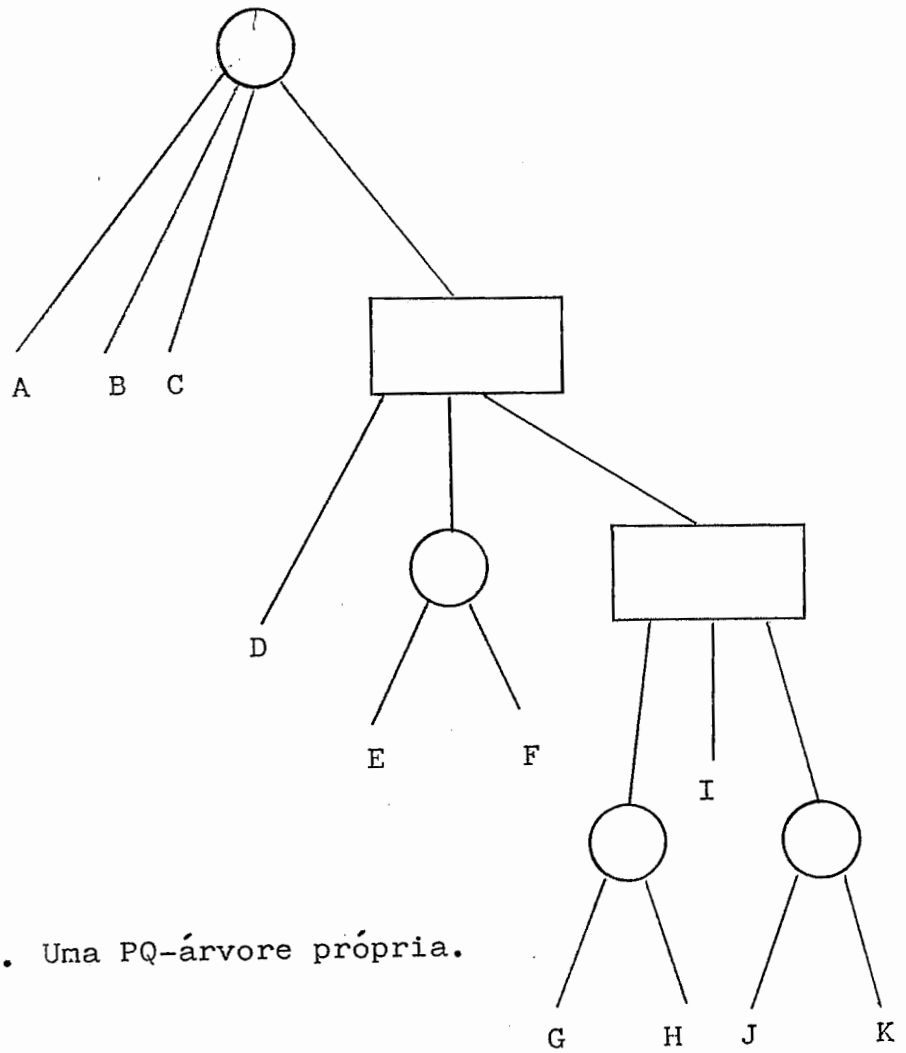


Figura 4.3. Uma PQ-árvore própria.

equivalência:

1. permutar arbitrariamente os filhos de um P-nó;
2. reverter a ordem dos filhos de um Q-nó.

Escrevemos  $T \equiv T'$  quando as árvores  $T$  e  $T'$  são equivalentes. A Figura 4.4 exibe uma PQ-árvore equivalente à árvore da Figura 4.3. A nova fronteira é BHGIJKEFDCA.

O conjunto de todas as fronteiras que podem ser obtidas por transformações de equivalência sobre uma árvore  $T$  é chamado conjunto de permutações consistentes para  $T$  e denotado por  $\text{CONSISTENT}(T)$ :

$$\text{CONSISTENT}(T) = \{ \text{FRONTIER}(T') \mid T' \equiv T \}.$$

Definimos mais dois tipos especiais de árvores: a árvore universal sobre  $U$ , que é constituída por um único P-nó como raiz e uma folha para cada elemento de  $U$ , e a árvore nula, que não possui absolutamente nenhum nó; na verdade, a árvore nula não é nem mesmo uma PQ-árvore válida, mas será admitida excepcionalmente porque eventualmente pode ser o resultado da aplicação a alguma instância particular dos algoritmos que apresentaremos. Veja-se a Figura 4.5.

Notemos que o conjunto de permutações consistentes de uma árvore universal corresponde ao conjunto de todas as permutações de  $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ .

A completa liberdade para permutar os filhos de um P-nó significa que não há nenhuma ordem necessária entre eles. Com os filhos de um Q-nó isto já não ocorre: a restrição de se poder apenas revertê-los significa que os mesmos dois filhos serão sempre extremos, e todos os demais interiores; além disso, cada filho interior de um Q-nó sempre mantém os mesmos vizinhos imediatos ( nós "irmãos" adjacentes ).

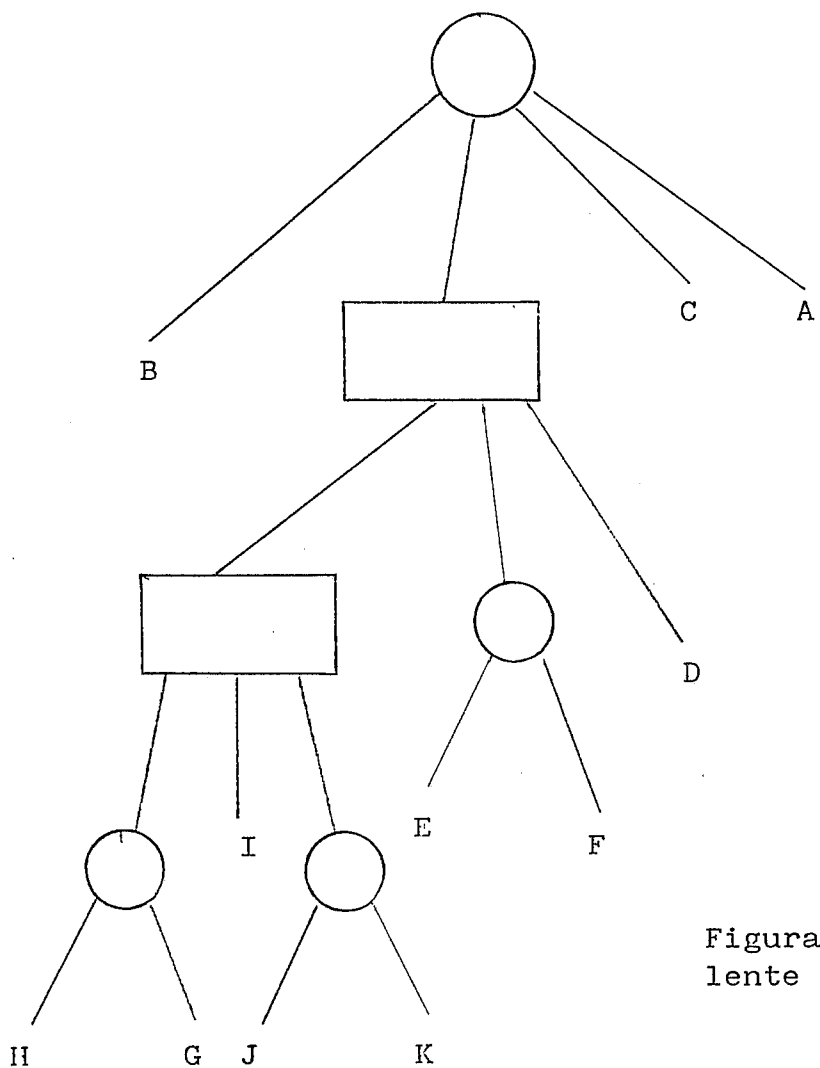
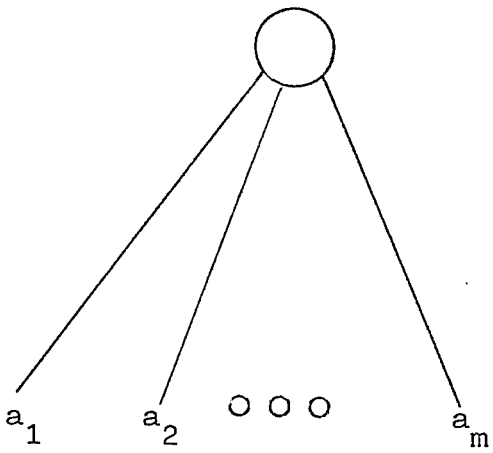


Figura 4.4. Uma PQ-árvore equivalente à da Figura 5.7.



Árvore Universal

Árvore Nula

Figura 4.5.



#### 4.2.2. Redução de PQ-árvores

Existe apenas uma operação sobre PQ-árvores, e aqui chegamos ao ponto central da questão de como utilizamos estas estruturas para resolver o problema de reconhecimento de grafos de intervalo.

Dado um subconjunto  $S \subseteq U$  e uma árvore  $T$ , constrói-se uma nova árvore cujas permutações consistentes são exatamente as permutações originais de  $T$  nas quais as folhas selecionadas por  $S$  ocorrem em alguma ordem como uma seqüência consecutiva. Esta operação é chamada  $S$ -redução de  $T$  e denotada por  $\text{REDUCECT}(S)$ . Eventualmente, a árvore resultante dessa redução pode ser uma árvore nula. O conjunto  $S$  ocorre, no final do procedimento, como uma sub-sequência consecutiva dentro de  $\text{FRONTIER}(\text{REDUCECT}(S))$  e da fronteira de qualquer árvore que esteja na classe de equivalência de  $\text{REDUCECT}(S)$ . As PQ - árvores foram projetadas de modo que esta propriedade seja válida.

Para comprovar se um grafo  $G$  dado é um grafo de intervalo, consideramos  $U$  como sendo o conjunto de todas as cliques maximais de  $G$ , e  $T$ , no início, como sendo a árvore universal sobre  $U$ . Depois, para cada  $v \in VG$ , consideramos  $S_v$  como sendo o conjunto das cliques maximais que contêm  $v$  e efetuamos uma  $S_v$ -redução da árvore. Se no final dessas sucessivas reduções a árvore resultante não é a árvore nula, então existe uma permutação das cliques maximais de  $G$  onde para cada  $v \in VG$  as cliques que contêm  $v$  ocorrem consecutivamente na permutação; de acordo com o Teorema 2.3,  $G$  é um grafo de intervalo. Veremos agora detalhes mais concretos de manipulação de PQ-árvores de modo que

possamos concluir que o reconhecimento de grafos de intervalo de fato pode ser feito em tempo linear.

O procedimento de redução aplica uma sequência de gabaritos ("templates") aos nós de uma PQ-árvore. Cada gabarito tem um padrão de reconhecimento ("pattern") e um padrão de substituição ("replacement"). Se um nó satisfaz o padrão de reconhecimento de certo gabarito, este padrão é substituído na árvore ( somente o nó e seus filhos ) pelo padrão de substituição do gabarito. O resultado deste procedimento é uma nova PQ-árvore.

Os gabaritos são aplicados segundo uma estratégia "bottom-up": um nó só é examinado se todos os seus filhos já tiverem sido.

Um nó  $X$  é chamado cheio se todos os seus descendentes estão em  $S$ , vazio se nenhum de seus descendentes está em  $S$  e parcial se alguns (mas não todos) descendentes estão em  $S$ . Um nó é pertinente se é cheio ou parcial. A sub-árvore pertinente de  $T$  em relação a  $S$ , denotada por  $PERTINENT(T,S)$ , é a menor sub-árvore de  $T$  cuja fronteira contém todos os elementos de  $S$ . A raiz da sub-árvore pertinente é denotada por  $ROOT(T,S)$ . A Figura 4.6 mostra a sub-árvore pertinente da árvore da Figura 4.3 em relação a  $S = \{E,I,J,K\}$ .

Descrevemos na Figura 4.7 todos os gabaritos. A convenção utilizada é a seguinte:

- Todos os filhos de um nó ( sejam P-nós, Q-nós ou folhas ) são indistintamente representados como triângulos;
- Um nó totalmente hachurado é cheio;
- Um nó não hachurado é vazio;
- Um nó parcialmente hachurado é parcial.

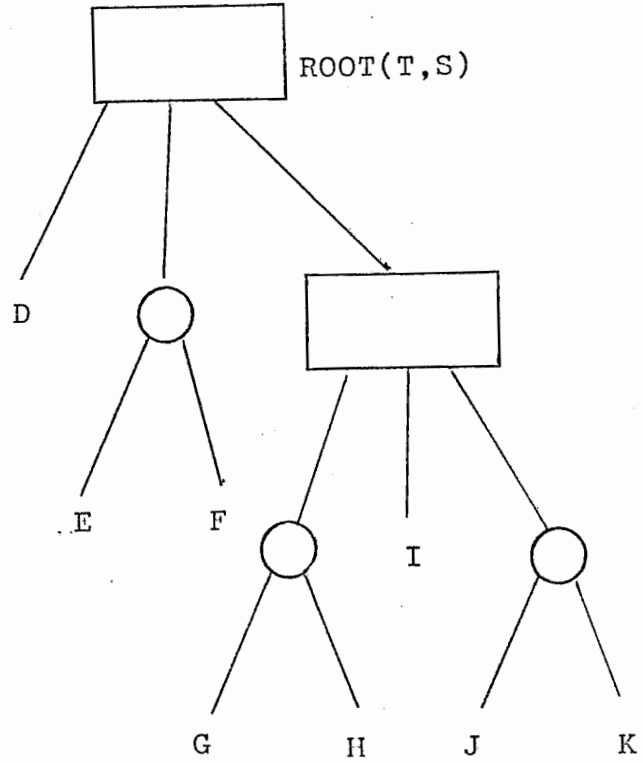
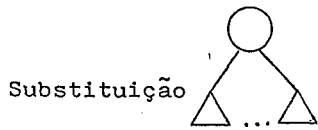
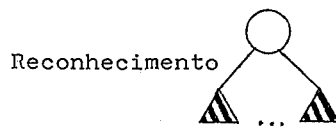
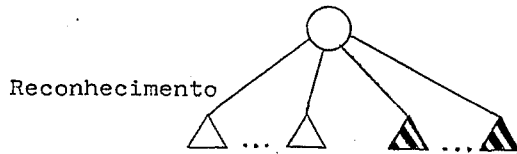


Figura 4.6.



GABARITO P0

GABARITO P1



GABARITO P2 para  $ROOT(T,S)$   
quando é um P-nó

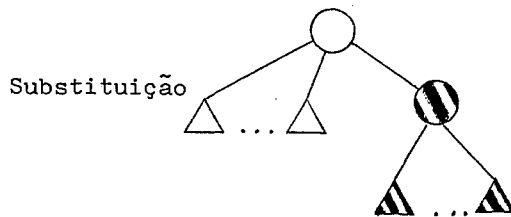
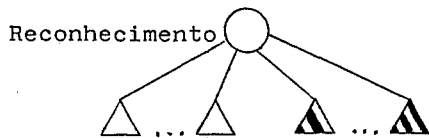
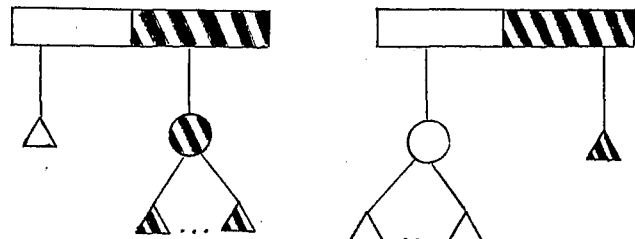
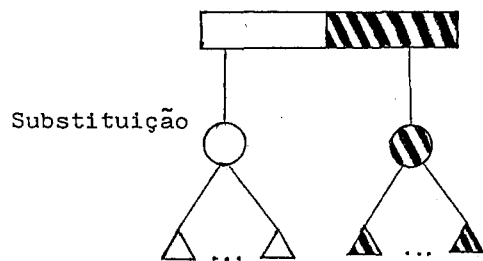


Figura 4.7



GABARITO P3 para um P-nó parcial que  
não é  $ROOT(T,S)$



Substituições  
alternativas  
para P3

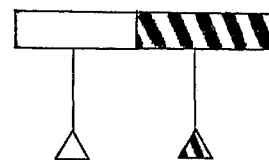
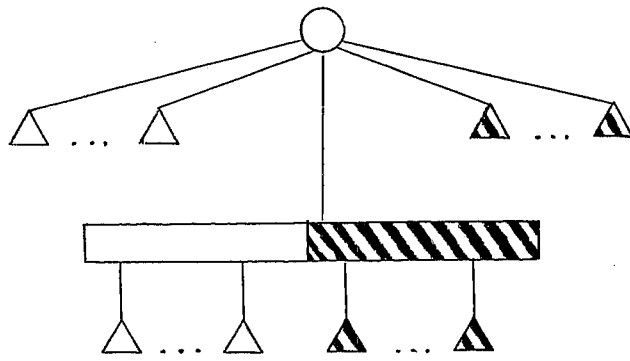


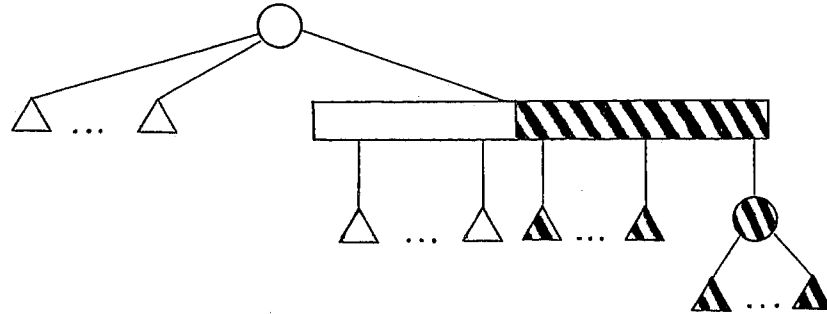
Figura 4.7 ( cont. )

Reconhecimento

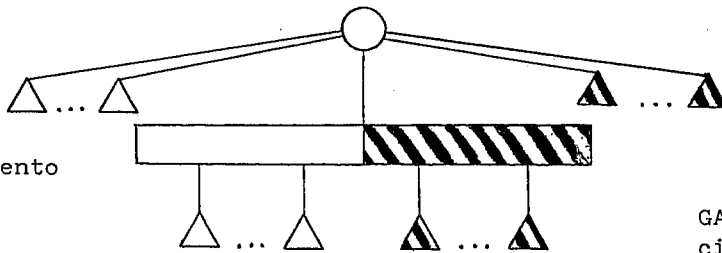


GABARITO P4 para  $ROOT(T,S)$   
quando é um P-nó com um  
filho parcial

Substituição

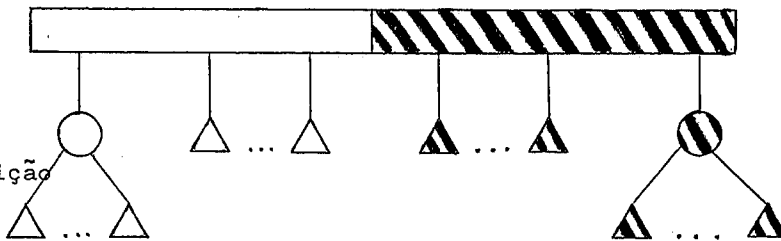


Reconhecimento

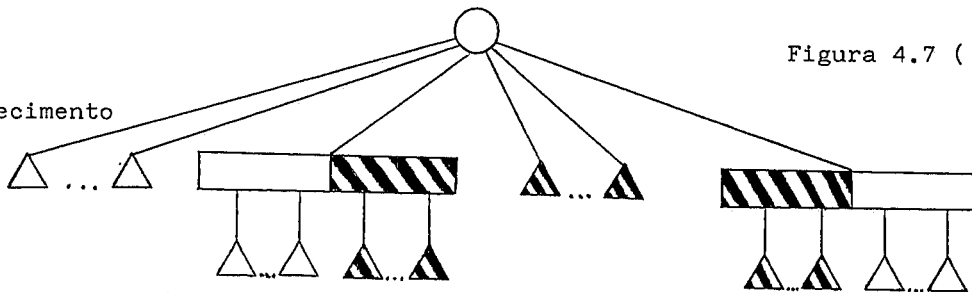


GABARITO P5 para um P-nó par-  
cial que não é  $ROOT(T,S)$  com  
um filho parcial

Substituição

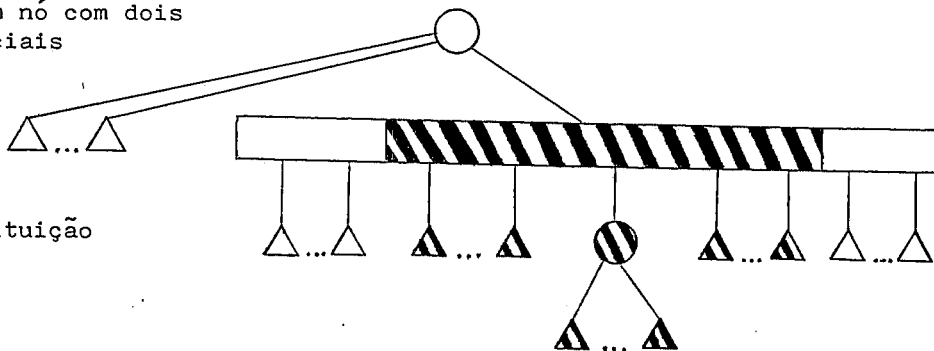


Reconhecimento

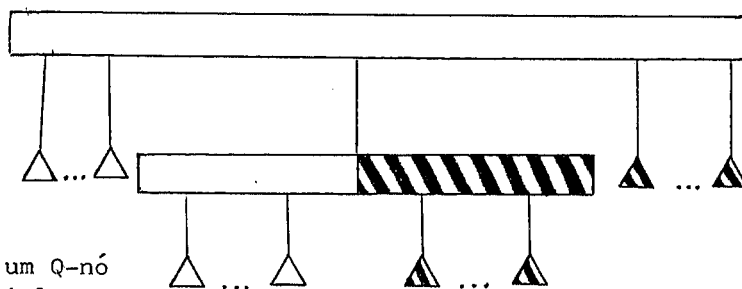


GABARITO P6 para ROOT(T,S)  
quando é um nó com dois  
filhos parciais

Substituição



Reconhecimento

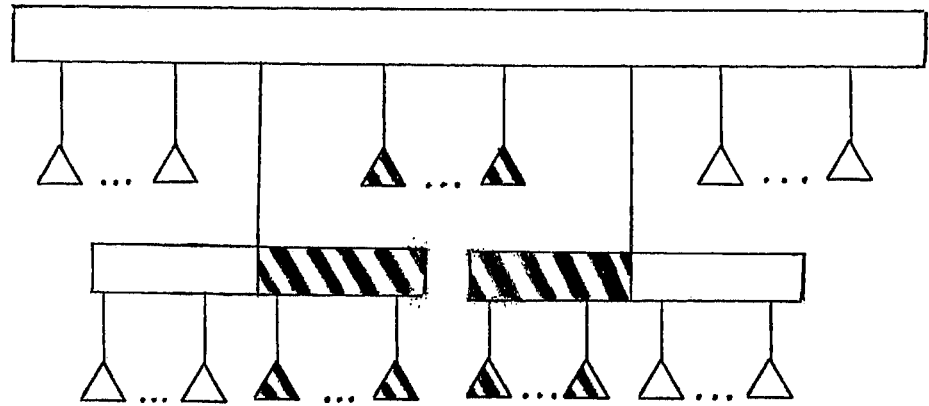


GABARITO Q2 para um Q-nó  
com um filho parcial

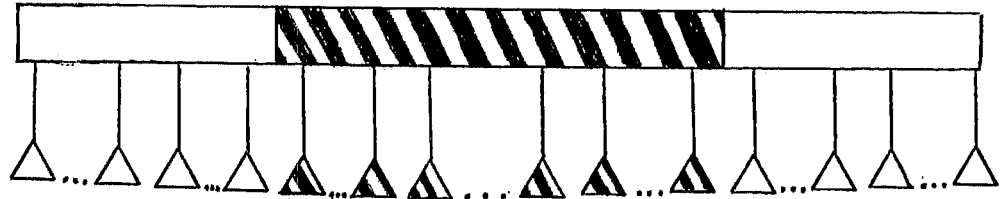
Substituição



Reconhecimento



Substituição



GABARITO Q3 para um Q-nó com dois filhos parciais

Figura 4.7 ( cont. )

### 4.2.3. Implementação do algoritmo de redução

Antes de passarmos aos detalhes da implementação do algoritmo de redução, definamos a sub-árvore pertinente reduzida de T em relação a S (denotada por  $PRUNEDCT, S$ ) como o menor subgrafo conexo que contém todas as folhas pertinentes. A sub-árvore pertinente reduzida para a sub-árvore pertinente da Figura 4.6 está representada na Figura 4.8. A raiz de  $PRUNEDCT, S$  é  $ROOTCT, S$ .

Dois passos são utilizados na implementação do algoritmo de redução. O primeiro identifica os nós que serão processados (os nós de  $PRUNEDCT, S$ ) e o segundo aplica os gabaritos. O algoritmo combinado é chamado redução reduzida porque examina apenas a sub-árvore pertinente reduzida. Os dois passos utilizam a estratégia "bottom-up".

O primeiro passo, chamado "bubbling-up", à medida que marca os nós de  $PRUNEDCT, S$  a partir das folhas pertinentes em direção a  $ROOTCT, S$ , atualiza um contador para cada nó que informa exatamente quantos filhos deste nó serão processados. Estes contadores permitirão, no segundo passo, determinar quando é que o último filho pertinente de um nó X foi reconhecido, de modo que se possa colocar X em fila corretamente.

Este processo de marcação pode ser sucintamente descrito do seguinte modo: no início, são colocadas em fila todas as folhas pertinentes; posteriormente, cada iteração consiste em retirar o primeiro elemento da fila e procurar marcá-lo como "processado", dando-lhe se necessário um apontador para seu pai na árvore e eventualmente colocando o pai em fila, caso isto ainda não tenha



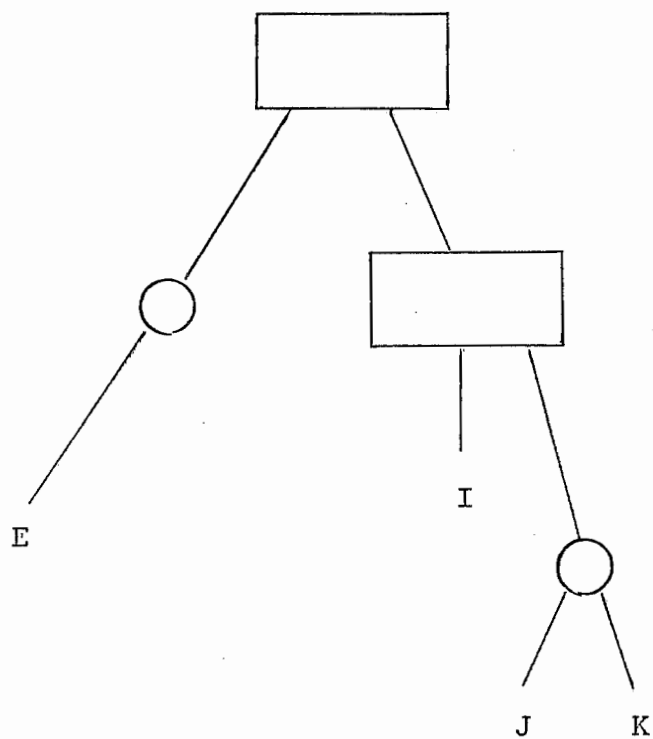


Figura 4.8.

acontecido.

A razão pela qual é necessário algumas vezes dar a um nó um apontador para seu pai é que, no início do processo, nem todos os nós possuem apontadores para seus pais na árvore. Isto é assim para evitar uma excessiva atualização de apontadores, o que influiria na complexidade final do algoritmo. Apontadores para nós-pai são mantidos apenas para filhos de P-nós e filhos extremos de Q-nós. Filhos interiores de Q-nós não necessitam manter apontadores para seus pais todo o tempo: tomá-los-ão de seus irmãos que os possuem no momento apropriado, conforme explicaremos agora.

O processo de marcação pode ficar temporariamente bloqueado em algum filho interior de um Q-nó: não havendo apontador para o pai deste nó, é impossível colocar o pai em fila. Cada nó interior momentaneamente sem apontador para o pai é chamado bloqueado.

Uma cadeia maximal de irmãos consecutivos bloqueados recebe o nome de bloco. Quando um bloco, à medida que cresce com a incorporação de novos nós, encontra um nó Y não bloqueado, todos os filhos pertencentes ao bloco recebem o apontador de Y e deixam de estar bloqueados: o bloco passa assim a não mais existir. Esta transmissão de apontadores pode ser executada em tempo diretamente proporcional ao tamanho do bloco. É mantido um contador instantâneo de blocos que informa quantos blocos existem em cada momento.

Se é impossível reduzir a árvore, pode se dar o caso de alguns nós interiores permanecerem bloqueados no final do processo de marcação. Se o contador de blocos é estritamente maior do que um, por exemplo, não há esperança alguma de que a árvore possa ser reduzida, e nesse caso nem se executa o segundo passo, abortando-se a redução. Se, no entanto,  $ROOTCT, S$  é um Q-nó e todos os seus filhos pertinentes são

interiores, um contador de blocos igual a um no final do "bubbling up" é válido.

O "bubbling up", teoricamente, deveria terminar a execução na raiz de  $PRUNED(T, S)$ , mas como não é simples detectá-la, é mais produtivo continuar a execução até que:

- a) o contador de blocos é zero e a fila de nós a serem processados contém somente um nó;
- b) o contador de blocos é um e a fila de nós está vazia.

Se o passo de "bubbling up" processa a raiz, deve reter essa informação. Não há nós acima da raiz a serem processados, mas o "bubbling up" deve "fingir" que ainda os adiciona à fila até atingir alguma das condições de término da execução. Conceitualmente, pode-se imaginar uma "hierarquia infinita de nós virtuais", ancestrais da raiz da árvore, sendo processados até o término da execução. Se a raiz da árvore é encontrada e a fila fica vazia com o contador de blocos não nulo, a árvore não é redutível.

**Lema 4.3** A fase de "bubbling up" do algoritmo de redução requer para sua execução  $O(|PRUNED(T, S)|)$  passos, onde  $|T|$  é o número de nós que aparecem na árvore  $T$ .

### Demonstração

A cada iteração o trabalho realizado é da ordem de um (o nó retirado da fila) mais o número de nós que se tornam desbloqueados durante esta iteração. Além do mais, cada nó é adicionado à fila no máximo uma vez, e torna-se desbloqueado também no máximo uma vez. Portanto, o trabalho realizado é limitado pelo número de nós

processados.

Os nós processados são os de  $PRUNED(T,S)$  mais alguns ancestrais virtuais de  $ROOT(T,S)$ . Não pode haver muitos destes nós extras. A estratégia "bottom up" garante que se o nó  $X$  é processado antes do nó  $X'$ , então o pai de  $X$  deve ser processado antes do pai de  $X'$  (a menos que o pai de  $X'$  já tenha sido colocado na fila por causa de algum outro filho sendo processado). Cada ancestral de  $ROOT(T,S)$  tem somente um filho pertinente. Isto implica que o número total de ancestrais de  $ROOT(T,S)$  que são realmente processados não excede a maior distância das folhas à raiz em  $PRUNED(T,S)$ ; esta distância é certamente menor ou igual a  $|PRUNED(T,S)|$ . ■

Supondo que a árvore é redutível, após o "bubbling up" todos os nós a serem processados no segundo passo possuem apontadores válidos para seus pais, exceto aqueles que eventualmente estejam bloqueados por serem filhos interiores do nó  $ROOT(T,S)$  (quando ele é um Q-nó). Nesse caso, cria-se um "pseudo-nó" de tipo Q-nó que faz de "pai adotivo" para estes nós, que se tornam desbloqueados.

Passa-se então ao segundo passo do algoritmo de redução, a aplicação dos gabaritos. Como no primeiro passo, no início as folhas pertinentes são colocadas em fila. Cada iteração consiste em:

- a) retirar o primeiro elemento  $X$  da fila;
- b) colocar o pai de  $X$  no final da fila ( caso  $X$  não seja  $ROOT(T,S)$  );
- c) tentar aplicar algum padrão de reconhecimento à "família" formada por  $X$  mais os seus filhos ( se existirem ) e substituir este padrão pelo padrão de substituição correspondente.

As iterações se repetem até que ou a fila fique vazia ou nenhum padrão de reconhecimento possa ser aplicado ( caso em que o

algoritmo de redução é abortado ).

**Lema 4.4** A fase de aplicação de gabaritos do algoritmo de redução requer para sua execução  $O(|PRUNEDCT, S|)$  passos.

#### **Demonstração**

O algoritmo pode ser facilmente implementado de modo que o trabalho realizado em cada iteração tenha complexidade da ordem do número de filhos pertinentes do nó  $X$  que foi retirado da fila. Somando-se as complexidades parciais, obtemos que a complexidade final do segundo passo é  $O(|PRUNEDCT, S|)$ . ■

Descrevemos a seguir um algoritmo genérico de utilização de PQ-árvores, que efetua sucessivas reduções e combina os dois passos anteriormente mencionados para cada redução.

REDUCTION ( U, \$ );

início

T := árvore universal sobre U;

para cada S  $\in$  \$ faça

início

T := BUBBLECT, S);

T := REDUCECT, S);

fim;

devolva T

fim;

O conjunto  $U$  é o conjunto universal de elementos, sobre o qual são definidas as PQ-árvores. O conjunto  $\mathcal{S}$  é um subconjunto de  $\mathcal{P}U$  ( $\mathcal{P}U = \langle X \mid X \subseteq U \rangle$ ), e determina a seqüência de reduções a serem executadas.  $BUBBLECT, \mathcal{S}$  é a função que, tendo como entradas uma PQ-árvore  $T$  e um conjunto  $S$ , devolve uma árvore onde todos os nós de  $PRUNEDCT, \mathcal{S}$  estão marcados; eventualmente, conforme vimos, o resultado pode ser uma PQ-árvore nula.  $REDUCECT, \mathcal{S}$  executa a  $S$ -redução de  $T$ , e também pode eventualmente produzir como resultado uma árvore nula, caso  $T$  não seja redutível.

O resultado da execução de  $REDUCTION(U, \mathcal{S})$  é uma PQ-árvore  $T$  tal que em cada seqüência  $P$  do conjunto  $CONSISTENTCTD$ , os elementos de cada  $S \in \mathcal{S}$  comparecem consecutivamente em alguma ordem em  $P$ , isto é, constituindo uma sub-seqüência de  $P$ . Se  $T$  é a árvore nula, não existe nenhuma permutação  $P$  dos elementos de  $U$  tal que para todo  $S \in \mathcal{S}$  os elementos de  $S$  ocorram consecutivamente em  $P$ .

O Lema 4.5 fornece a complexidade da combinação dos passos  $BUBBLE$  e  $REDUCE$ , e o Teorema 4.6 de  $REDUCTION(U, \mathcal{S})$ . Definimos:

- a) nó unário como aquele nó na sub-árvore pertinente que possui apenas um filho pertinente;
- b)  $UNARYCT, \mathcal{S}$  como o conjunto de todos os nós unários em  $T$  com relação ao conjunto  $S$ ;
- c)  $SIZE(\mathcal{S})$  como a soma dos tamanhos de todos os conjuntos na família  $\mathcal{S}$ .

**Lema 4.5** A combinação dos passos  $BUBBLE$  e  $REDUCE$  requer somente  $O(|\mathcal{S}| + |UNARYCT, \mathcal{S}|)$  passos para efetuar a  $S$ -redução da PQ-árvore  $T$ .

**Demonstração**

Existem apenas  $|S|$  folhas; logo, existem no máximo  $O(|S|)$  nós não unários que não são folhas em  $\text{PRUNEDCT}(S)$ . Assim,

$$|\text{PRUNEDCT}(S)| = |S| + O(|S|) + |\text{UNARYCT}(S)| = O(|S|) + |\text{UNARYCT}(S)|.$$

Pelos Lemas 4.3 e 4.4, segue que a combinação de BUBBLE e REDUCE tem complexidade  $O(|S| + |\text{UNARYCT}(S)|)$ . ■

**Teorema 4.6** A classe de permutações sobre um conjunto  $U$  nas quais cada conjunto de uma família  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}U$  ocorre como uma sub-sequência consecutiva pode ser computada em  $O(m + n + \text{SIZE}(\mathcal{S}))$  passos se  $U$  tem  $m$  objetos e  $\mathcal{S}$  tem  $n$  conjuntos.

#### Demonstração

Calcularemos a complexidade de  $\text{REDUCTION}(U, \mathcal{S})$ .

Inicialmente, é fácil concluir que o trabalho externo às chamadas de BUBBLE e REDUCE usa tempo  $O(m + n)$  somente.

Pelo Lema 4.5, o trabalho total em todas as chamadas de BUBBLE e REDUCE pode ser calculado como a soma de duas parcelas: uma é a contribuição total devida aos tamanhos dos conjuntos, portanto igual a  $\text{SIZE}(\mathcal{S})$ ; outra é a soma das parcelas  $|\text{UNARYCT}(S)|$ , que passamos a estimar agora.

Notemos que os únicos gabaritos que podem ser aplicados a nós unários são  $P_3$ ,  $P_5$  e  $Q_2$ , já que um nó unário não pode ser  $\text{ROOTCT}(S)$  nem pode ter os seus filhos todos vazios ou todos cheios.

O gabarito  $P_3$  não pode ser aplicado mais de duas vezes em cada redução, caso contrário força-se a existência de três nós parciais tais que nenhum deles é ancestral de qualquer outro - o que impede que os elementos de  $S$  sejam consecutivos. Concluimos assim que o número

total de aplicações de P3 é  $O(m + n)$ .

O gabarito Q2 tem duas formas; seja Q2' o gabarito Q2 quando não há filhos parciais, e Q2'' o gabarito Q2 quando um filho parcial está presente. Com um argumento similar ao usado para P3, pode-se concluir que Q2' é aplicado  $O(m + n)$  vezes.

Seja agora NORMCTD o número de Q-nós em T mais o número de nós em T cujos pais são P-nós. Não é difícil verificar as seguintes afirmações:

(i) Inicialmente, NORMCTD é no máximo m;

(ii) Qualquer padrão de substituição incrementa NORMCTD no máximo de um;

(iii) Os gabaritos P5 e Q2'' decrementam NORMCTD no mínimo de um.

Já vimos que o número de aplicações de todos os gabaritos (excetuando-se P5 e Q2'') é  $O(m + n + \text{SIZE}(S))$ . Como  $\text{NORMCTD} \geq 0$ , as afirmações acima implicam que o número de aplicações de P5 e Q2'' é  $O(m + n + \text{SIZE}(S))$ . ■

#### 4.2.4. Aplicação do algoritmo de redução aos grafos de intervalo

Dedicar-nos-emos agora a aplicar REDUCTION ao caso concreto do reconhecimento dos grafos de intervalo.

O Teorema 2.4 estabelece que um grafo não direcionado G é um grafo de intervalo se e somente se a matriz de clique M de G possui a propriedade dos 1's consecutivos para colunas. Vejamos inicialmente como podemos aplicar REDUCTION para testar esta propriedade.

A função booleana descrita a seguir, baseada em REDUCTION,



toma como entrada uma matriz  $M_{n \times m}$  e devolve verdadeiro ou falso conforme  $M$  tenha ou não a propriedade dos 1's consecutivos para colunas.

CONSECUTIVECD;

inicio

U := conjunto das colunas de M;

T := árvore universal sobre U;

para i:=1 passo 1 até n faça

inicio

S := conjunto das colunas de M que têm '1' na linha i;

T := BUBBLECT, S;

T := REDUCECT, S;

se T é a árvore nula então devolva falso

fim;

devolva verdadeiro;

fim;

**Teorema 4.7** Se  $M$  é uma matriz de 0's e 1's com  $n$  linhas e  $m$  colunas, especificada por suas  $f$  entradas não nulas, o teste da propriedade dos 1's consecutivos para colunas pode ser realizado em  $O(m + n + f)$  passos.

**Demonstração**

A função CONSECUTIVE realiza o teste desejado. O número de elementos no conjunto universal  $U$  é  $m$ , o número de conjuntos na família

$S$  é  $n$  e  $SIZE(S)$  é claramente  $f$ . Todo o trabalho externo à redução é claramente linear. Pelo Teorema 4.6, é fácil mostrar que as reduções exigem  $O(m + n + f)$  passos. O teste pode ser feito, portanto, em tempo linear. ■

Para construir agora um algoritmo para reconhecimento de grafos de intervalo, o primeiro passo, dado  $G$  não direcionado, é computar as cliques maximais de  $G$ , construindo uma lista de entradas não nulas para a matriz de clique  $M$  de  $G$ . Esta tarefa se torna consideravelmente mais simples pelo fato de todo grafo de intervalo ser um grafo triangularizado; a matriz de cliques maximais - versus - vértices de um grafo triangularizado pode ser construída em  $O(n + e)$  passos ( onde  $n = |VG|$  e  $e = |EG|$  ) utilizando a técnica "lexicographic breadth first search" ( veja-se Lueker [1975] e Rose, Tarjan e Lueker [1976] ). Uma propriedade útil dos grafos triangularizados é a de terem matrizes de cliques maximais - versus - vértices tais que o número de entradas não nulas de cada uma dessas matrizes nunca é superior a  $O(n + e)$  ( Fulkerson e Gross [1965] ).

Feitas estas considerações, apresentamos o seguinte algoritmo de reconhecimento de grafos de intervalo. Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado.

INTERVAL( $V, E$ );

início

se  $G$  não é triangularizado então devolva falso;

$U$  := cliques maximais de  $G$ ;

$T$  := árvore universal sobre  $U$ ;

para cada  $v \in V$  faça

início

S := cliques maximais que contém v;

T := BUBBLECT, S;

T := REDUCECT, S;

se T é a árvore nula então devolva falso

fim;

devolva verdadeiro;

fim;

**Teorema 4.8** Dado  $G = (V, E)$  grafo não direcionado, pode-se testar se  $G$  é um grafo de intervalo em  $O(n + e)$  passos, onde  $n = |V|$  e  $e = |E|$ .

**Demonstração**

A função INTERVAL realiza o teste desejado.

No início testa-se a triangularidade como condição prévia para  $G$ . Este teste pode ser feito em  $O(n + e)$  passos (veja-se Rose, Tarjan e Lueker [1976]), e portanto não altera a complexidade final desejada; além do mais, fornece uma lista de cliques maximais como "subproduto" de sua execução.

A saída do teste de triangularidade pode, pois, ser usada como entrada para o teste dos 1's consecutivos. O número máximo de cliques maximais é  $O(n)$  e o número total de entradas não nulas é  $O(n + e)$ , donde a etapa das reduções tem complexidade  $O(n + e)$ .

A complexidade final de INTERVAL é  $O(n + e)$ . ■

Um resíduo interessante deste teste de grafos de intervalo é

uma PQ-árvore reduzida cujas folhas são as cliques maximais.

**Teorema 4.9** Dado  $G=(V,E)$  grafo não direcionado, pode-se testar se  $G$  é um grafo de intervalo em tempo  $O(n + e)$ , onde  $n = |V|$  e  $e = |E|$ . Além do mais, se  $G$  é um grafo de intervalo, então existe um algoritmo para construir uma PQ-árvore própria  $T(G)$  tal que  $\text{CONSISTENT}(T(G))$  é precisamente o conjunto de ordenações das cliques maximais de  $G$  nas quais as cliques de  $I(v)$  ocorrem consecutivamente para todo  $v \in V$ , onde  $I(v)$  é o conjunto das cliques maximais que contém  $v$ . ■

É possível usar esta árvore garantida pelo Teorema 4.9 como base para uma representação canônica para grafos de intervalo, e obtemos assim um modo de construir modelos de intervalo em tempo linear. Além do mais, pode-se por esse meio testar isomorfismo entre grafos da família, também em tempo linear. É o que mostraremos a seguir na seção 4.3.

Antes, importa citar que Korte e Möhring [1989] melhoraram ligeiramente o algoritmo de Booth e Lueker utilizando uma versão mais adaptada das PQ-árvores ao problema do reconhecimento, as chamadas "MPQ-árvores". Estas novas estruturas de dados utilizam busca em largura lexicográfica para simplificar suas atualizações.

#### 4.3. ALGORITMO PARA VERIFICAR ISOMORFISMO ENTRE GRAFOS DE INTERVALO ( Booth e Lueker [1979] )

Iniciamos o estudo da verificação de isomorfismo entre dois grafos de intervalo  $G$  e  $G'$  pela comparação entre  $T(G)$  e  $T(G')$ . O Teorema 4.10 permitirá concluir que grafos isomorfos têm PQ-árvores equivalentes. Omitiremos sua demonstração.

**Teorema 4.10** Se  $T_1$  e  $T_2$  são PQ-árvores com o mesmo conjunto de folhas e tais que  $\text{CONSISTENT}(T_1) = \text{CONSISTENT}(T_2)$ , então  $T_1 \equiv T_2$ . ■

Tendo concluído que se  $G$  e  $G'$  são isomorfos então  $T(G)$  e  $T(G')$  são equivalentes, devemos agora tratar do problema inverso, isto é, garantir que se  $T(G)$  e  $T(G')$  são equivalentes, então  $G$  e  $G'$  são isomorfos. A Figura 4.9 mostra que a recíproca nem sempre é verdadeira.

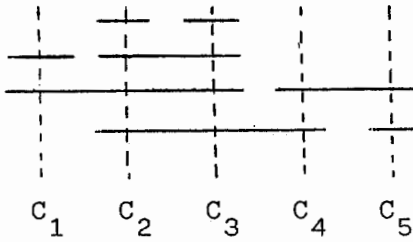
Para solucionar este problema, devemos modificar as PQ-árvores de modo que forneçam mais informação sobre a estrutura dos grafos que representam.

Dado um nó  $X$  de uma PQ-árvore  $T$ , definimos  $F(X)$  como a fronteira da sub-árvore de  $T$  cuja raiz é  $X$ . Dado  $v$  vértice do grafo não direcionado  $G$  que originou  $T$ , definimos também o nó característico de  $v$ , denotado por  $\text{CHAR}(v)$ , como o nó  $X$  em  $T$  tal que  $I(v) \subseteq F(X)$  e a distância de  $X$  às folhas de  $T$  é a menor possível ( lembrando que  $I(v)$  é o conjunto das cliques maximais que contém  $v$  ). Algumas vezes, utilizaremos a imagem inversa desta função: se  $X$  é um nó em  $T$ ,

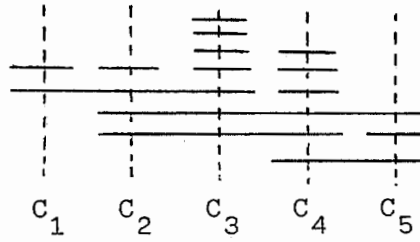
$$\text{CHAR}^{-1}(X) = \langle v \in VG \mid X = \text{CHAR}(v) \rangle.$$

Dado um subconjunto  $S$  de folhas de  $T$ , classificamos um nó  $X$  como pertinente com relação a  $S$  se  $F(X)$  contém alguns elementos de  $S$ , vazio com relação a  $S$  se  $F(X)$  não contém nenhum elemento de  $S$ , cheio com relação a  $S$  se  $F(X)$  é inteiramente composto por elementos de

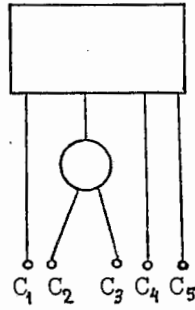
Um modelo para G:



Um modelo para G' :



T



Uma PQ-árvore para G ou G'

Figura 4.9. G e G' não são isomorfos, mas T é PQ-árvore própria para ambos. Os grafos estão representados na figura por modelos de intervalo. As cliques estão representadas pelas linhas verticais pontilhadas.

S e parcial com relação a S se  $F(X)$  contém alguns elementos que são de S e alguns que não o são.

A modificação que introduziremos nas PQ-árvores consiste em associar rótulos aos nós. Estes rótulos são 'strings' de inteiros que indicam como os conjuntos  $I(v)$  estão distribuídos na fronteira de uma árvore. Definimo-os da seguinte maneira:

(a) se  $X$  é um P-nó ou uma folha,  $LABEL[X]$  é  $|CHAR^{-1}(X)|$ , isto é, o número de vértices de  $G$  que possuem  $X$  como nó característico;

(b) se  $X$  é um Q-nó, inicialmente formamos uma seqüência  $X_1, X_2, \dots, X_k$  numerando os filhos de  $X$  da esquerda para a direita; depois, para cada  $v \in CHAR^{-1}(X)$ , seja  $(i, j)$  um par tal que  $X_i$  é o filho de  $X$  pertinente com relação a  $I(v)$  que se situa na extremidade esquerda, e  $X_j$  o filho pertinente que se situa na extremidade direita; ordenamos todos os pares em ordem lexicográfica não decrescente e os concatenamos para formar  $LABEL[X]$ .

A árvore rotulada é denotada por  $T_L(G)$ . Um exemplo de rotulação é ilustrado na Figura 4.10.

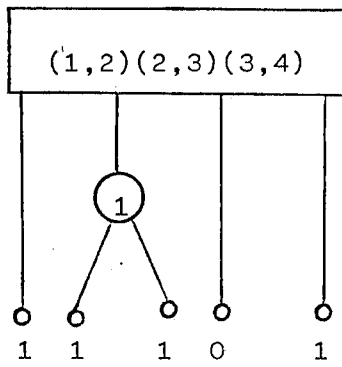
**Teorema 4.11** Uma PQ-árvore rotulada contém informação suficiente para reconstituir um grafo isomorfo ao grafo  $G=(V,E)$  que a originou.

#### Demonstração

Dada uma PQ-árvore rotulada  $T$ , construímos um grafo  $G'$  sobre um conjunto  $V'$  de vértices que contém os seguintes elementos:

(a) para cada folha ou P-nó  $X$  com rótulo 'm', existem m vértices: os vértices  $(X,r)$  para  $1 \leq r \leq m$ , correspondentes aos m elementos de  $CHAR^{-1}(X)$ ;

T



T'

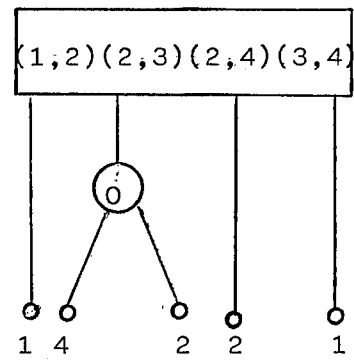


Figura 4.10. PQ-árvores rotuladas T e T' para os grafos G e G', respectivamente, da Figura 4.9.



(b) para cada Q-nó  $Y$  com rótulo  $\text{LABEL}[Y] = \langle (i_1, j_1) \langle (i_2, j_2) \dots \langle (i_m, j_m) \rangle \rangle \rangle$  existem  $m$  vértices: as quádruplas  $\langle Y, r, i_r, j_r \rangle$  para  $1 \leq r \leq m$ , correspondentes de modo natural -de acordo com a definição dos rótulos- a elementos de  $\text{CHAR}^{-1}(Y)$ .

Associemos a cada vértice  $v' \in V'$  um conjunto  $I'(v')$  da seguinte maneira: se  $v'$  é da forma  $\langle X, r \rangle$ , seja  $I'(v')$  o conjunto de elementos de  $F(X)$ ; se  $v'$  é da forma  $\langle Y, r, i, j \rangle$ , seja  $I'(v')$  o conjunto de todos os elementos que comparecem nas fronteiras dos nós  $Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_j$ , filhos de  $Y$ .

O Lema a seguir, em conjunto com a definição dos rótulos, permite concluir facilmente que se  $v$  e  $v'$  são elementos correspondentes de  $V$  e  $V'$ , respectivamente, então  $I(v) = I'(v')$ . A demonstração é simples e será omitida.

**Lema 4.12** Dada uma PQ-árvore  $T$ , seja  $S$  um conjunto não vazio cujos elementos ocorrem consecutivamente em cada uma das fronteiras de  $\text{CONSISTENT}(T)$ . Então, alguma das afirmações abaixo é verdadeira:

- (a) existe um P-nó (ou uma folha)  $X$  tal que  $F(X)$  é precisamente  $S$ ;
- (b) existe uma seqüência  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  de filhos consecutivos de um Q-nó  $Y$  tal que o conjunto de todos os elementos que comparecem em  $F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_k)$  é precisamente  $S$ .

Finalizamos a construção de  $G'$  estabelecendo que  $v'$  e  $w'$  são adjacentes se e somente se  $I'(v')$  e  $I'(w')$  se interceptam. Como dois vértices de um grafo são adjacentes se e somente se estão contidos numa mesma clique,  $G$  e  $G'$  são isomorfos.

■

Para descrever o teste de isomorfismo, definimos ainda as relações seguintes. Duas PQ-árvores rotuladas  $T$  e  $T'$  são L-idênticas ( $T =_L T'$ ) se são isomorfas e têm nós correspondentes com rótulos iguais, e L-equivalentes ( $T \equiv_L T'$ ) se  $T$  pode se tornar L-idêntica a  $T'$  pela aplicação de transformações de equivalência, tomando o cuidado de sempre modificar apropriadamente rótulos de Q-nós cujos filhos são revertidos. Não é difícil verificar que tal modificação, para um Q-nó com  $k$  filhos, pode ser feita executando-se os dois passos seguintes:

(a) substitua-se cada par  $(i, j)$  em LABEL[Y] pelo par  $(k+1-j, k+1-i)$ ;

(b) reordene-se os pares em ordem lexicográfica não decrescente.

**Teorema 4.13** Dois grafos de intervalo  $G$  e  $G'$  são isomorfos se e somente se  $T_L(G) \equiv_L T_L(G')$ .

A demonstração é imediata a partir dos Teoremas 4.10 e 4.11.

■

Apresentaremos agora um algoritmo para a rotulação de PQ-árvores. Dada uma PQ-árvore  $T$  com  $N$  nós, originária de um grafo de intervalo  $G$  com  $n$  vértices, o algoritmo rotula os nós de acordo com a definição fornecida dos rótulos. Como os grafos de intervalo são triangularizados, têm no máximo  $n$  cliques maximais; portanto, a PQ-árvore tem no máximo  $n$  folhas. Como a árvore é própria, cada nó interno ( não folha ) tem no máximo 2 filhos, e então podemos concluir que  $N = O(n)$ .

No algoritmo, cada nó possui um campo CCOUNT, que informa o número de filhos do nó, e um campo NUMBER, que assim se descreve: se a seqüência de filhos de um nó da esquerda para a direita é  $X_1, X_2, \dots, X_k$ ,

então  $NUMBER[X_i]$  é  $i$ .

### Algoritmo de rotulação de uma PQ-árvore

LABELCD;

início

para cada nó  $X$  em  $T$  faça

início

se  $X$  é um Q-nó então LABEL[X] := 'string' nula

senão LABEL[X] := 0;

FCOUNT[X] := 0; <FCOUNT conterá o  $n^o$  de filhos cheios de  $X$ >

fim;

VLOOP: para cada  $v \in VG$  faça

início

FILA := lista de todos os elementos de  $I(v)$ ;

<nós cheios serão adicionados a FILA>

FLIST := lista de todos os elementos de  $I(v)$ ;

FLOOP: enquanto FILA não está vazia faça

início

remova um elemento  $X$  do início de FILA;

$X' := PAI(X)$ ;

FCOUNT[X'] := FCOUNT[X'] + 1;

se FCOUNT[X'] = CCOUNT[X'] então

início <  $X'$  é cheio >

adicione  $X'$  ao fim de FILA;

adicione  $X'$  a FLIST;

remova todos os filhos de  $X'$  de FLIST;

fim;

fim; < de FLOOP >

< FLIST agora contém todos os nós que são cheios mas cujos pais não são cheios >

$X :=$  elemento qualquer de FLIST;

se FLIST contém um único elemento

então se  $X$  não é um Q-nó

então LABEL[X] := LABEL[X] + 1

senão adicione o par (1,CCOUNT[X])  
a LABEL[X]

senão início

Y: =PAI(X);

ESQ: =min( NUMBER[X] | X está em FLIST );

DIR: =max( NUMBER[X] | X está em FLIST );

adicione o par (ESQ,DIR) a LABEL[Y];

fim;

RESET: para cada campo FCOUNT[X] modificado faça

FCOUNT[X]: =0;

fim; ( de VLOOP )

SORT: para cada Q-nó Y faça

ordene os pares em LABEL[Y] em ordem lexicográfica  
não decrescente;

fim; ( de LABEL )

■

**Lema 4.14** O algoritmo de rotulação é correto e pode ser implementado de modo que sua execução tome tempo  $O(n + e)$ , onde  $n$  e  $e$  são, respectivamente, os números de vértices e arestas do grafo que originou a árvore sendo rotulada.

#### Demonstração

Por indução sobre o nível dos nós, concluímos que os nós adicionados a FLIST ( veja-se o algoritmo ) são os nós cheios na árvore. Contudo, um nó é removido quando seu pai é adicionado, e assim concluímos que ao final de FLOOP, FLIST contém um nó X se e somente se X é cheio mas seu pai não o é. Pelo Lema 4.12 e pela definição dos rótulos, é fácil ver que o algoritmo rotula corretamente a árvore.

Passemos à complexidade do algoritmo.

(a) tempo gasto em VLOOP

Como  $T$  é própria, cada nó tem pelo menos dois filhos. Logo, o número de nós cheios com relação a  $S$  é linear em  $|S|$ , donde o número de passos em FLOOP para qualquer vértice é  $O(|I(v)|)$ . Somando estas parcelas sobre todos os vértices, obtemos  $O(n + e)$ .

O passo RESET, se mantemos uma lista de nós cujos campos são alterados, pode ser feita em tempo  $O(|I(v)|)$ . O restante do processamento para um vértice é  $O(|I(v)|)$ , donde o tempo gasto em VLOOP é linear.

(b) tempo gasto em SORT

Utilizando o algoritmo de ordenação 3.1 de Aho, Hopcroft e Ullman [1974], o tempo gasto para cada ordenação é limitado pelo comprimento de LABEL[Y] mais a faixa de valores dos elementos de LABEL[Y]. Pela definição dos rótulos, um limite é

$$O(|\text{CHAR}^{-1}(Y)| + \text{CCOUNT}(Y)).$$

Somando este limite sobre todos os  $Q$ -nós obtemos  $O(n + N) = O(n)$ . ■

Passamos ao teste de L-equivalência das árvores. O algoritmo transforma uma árvore rotulada  $T$  numa forma que é canônica para L-equivalência. Isto é,  $T$  e  $T'$  são equivalentes se e somente se o algoritmo mapeia ambas para a mesma árvore.

LABEL<sup>r</sup>[Y] significará o rótulo que o nó  $Y$  teria se seus filhos fossem revertidos. A[X] será uma seqüência associada a um nó  $X$  durante a execução do algoritmo; consiste numa 'string' composta por

inteiros positivos e os símbolos 'C', 'P' e 'Q'.

Dada uma família de seqüências  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ordenadas em ordem lexicográfica não decrescente, eliminadas as seqüências duplicadas, diremos que  $i$  é o índice de  $A$  na família se a seqüência  $A$  é a  $i$ -ésima na ordenação ( $C$  na ordenação, adotamos as precedências 'C' < 'P' < 'Q' < 0 < 1 < 2... ).

Duas barras verticais consecutivas ( || ) serão usadas para indicar concatenação de seqüências.

### Algoritmo para transformação de uma PQ-árvore rotulada numa Forma Canônica para L-Equivalência

CANONICALCTD;

início

LOOP: para  $m := 0$  até profundidade de  $T$  menos um faça  
( profundidade é o número de níveis )

início

CLOOP: para cada folha  $C$  no nível  $m$  faça  
 $A[C] := LABEL[C] || 'C';$

PLOOP: para cada P-nó  $X$  no nível  $m$  faça  
início

re-arranje os filhos de  $P$  numa ordem  $X_1, X_2, \dots, X_k$  de modo que a seqüência  $A[X_1], A[X_2], \dots, A[X_k]$  seja não decrescente;  
 $A[X] := LABEL[X] || 'P' || A[X_1],$   
 $A[X_2], \dots, A[X_k];$

fim; < de PLOOP >

QLOOP: para cada Q-nó  $Y$  no nível  $m$  faça  
início

sejam  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  os filhos de  $Y$ , da esquerda para a direita;  
 $L1 := LABEL[Y];$

```

L2: =LABELr[Y];
A1: =L1 || 'Q' || A[Y1], ..., A[Yk];
A2: =L2 || 'Q' || A[Yk], ..., A[Y1];
se A1 ≤ A2
    então A[Y] := A2
    senão início
        reverta a ordem dos
        dos filhos de Y;
        A[Y] := A2;
        LABEL[Y] := L2;
    fim;
fim; ( de QLOOP )
INDICES:  $\mathcal{A}_m := \langle A[X] \mid X \text{ está no nível } m \rangle$ ;
para cada X no nível m faça
    a[X] := índice de A[X] em  $\mathcal{A}_m$ ;
fim; ( de LOOP )
fim; ( de CANONICAL )

```

■

O Lema a seguir não é de demonstração difícil. Omiti-la-emos.

**Lema 4.15** O algoritmo CANONICAL transforma corretamente uma PQ-árvore rotulada para forma canônica. Isto é, se  $T_1$  e  $T_2$  são L-equivalentes, e o algoritmo as transforma em  $T_1'$  e  $T_2'$  respectivamente, então  $T_1'$  e  $T_2'$  são L-idênticas.

**Lema 4.16** O algoritmo CANONICAL pode ser implementado de modo que sua execução tome tempo  $O(n)$ .

**Demonstração do Lema 4.16**

Seja  $p_m$  o número de nós no  $m$ -ésimo nível de  $T$  e  $q_m$  o número de vértices cujo nó característico está no  $m$ -ésimo nível. Não é difícil concluir que para cada nível  $m$ , um limite para o comprimento total das seqüências  $A[X]$  no  $m$ -ésimo nível, e também para sua faixa de valores, é

$$O(p_{m-1} + p_m + q_m) \quad (I).$$

Mostraremos que o tempo usado no  $m$ -ésimo passo em LOOP é limitado por (I).

(a) tempo gasto em CLOOP

Este trecho do algoritmo é claramente linear.

(b) tempo gasto em PLOOP

Seja  $CHILDLIST[X]$  uma lista de filhos, no início vazia, para cada  $p$ -nó  $X$  do  $m$ -ésimo nível de  $T$ .

Notemos que, no  $m$ -ésimo passo, há uma lista disponível de todos os nós  $Y$  do  $(m-1)$ -ésimo passo em ordem não decrescente de acordo com as seqüências  $A[Y]$ . Varrendo esta lista em ordem, para cada nó  $Y$  com um pai  $X$  do tipo  $P$ -nó, adiciona-se  $Y$  ao fim de  $CHILDLIST[X]$ . Após a varredura, cada  $CHILDLIST$  está em ordem não decrescente; portanto, o trecho PLOOP pode ser executado claramente em tempo  $O(p_{m-1} + p_m)$ .

(c) tempo gasto em QLOOP

Recordemos que se  $Y$  é um nó com  $k$  filhos, então um limite para o número de pares em  $LABEL[Y]$  é  $O(|CHAR^{-1}(Y)| + k)$ , e um limite para a faixa de valores em  $LABEL[Y]$  é  $O(k)$ . Assim, o cálculo de  $LABEL^f[Y]$  pode ser executado em tempo  $O(|CHAR^{-1}[Y]| + k)$ , utilizando o algoritmo 3.1 de Aho, Hopcroft e Ullman [1974].



Somando-se este limite sobre todos os Q-nós no m-ésimo nível, obtemos o limite de (I). Os passos restantes de QLOOP podem ser executados facilmente, para todos os nós de m-ésimo nível, em tempo limitado por (I).

#### (d) tempo gasto em INDICES

Recordemos que para calcular os índices devemos ordenar as seqüências A para os nós do m-ésimo nível. Utilizando o algoritmo 3.2 de Aho, Hopcroft e Ullman [1974], o tempo gasto pela ordenação é da ordem do comprimento total das seqüências mais o máximo valor de um elemento da seqüência. Portanto, (I) fornece um limite para o cálculo dos índices.

Podemos implementar a ordenação de tal modo que, à medida que as seqüências  $A[X]$  são ordenadas, os nós correspondentes são também rearranjados. A tarefa seguinte de numerar a seqüência em ordem lexicográfica não decrescente, associar o mesmo número às duplicatas e encontrar o índice a ser associado a  $A[X]$  para cada nó X pode ser executado em tempo limitado por (I). ■

**Teorema 4.17** Isomorfismo entre grafos de intervalo pode ser decidido em tempo linear.

#### Demonstração

Dados G e G' grafos de intervalo, construímos inicialmente as árvores T(G) e T(G'). Isto pode ser feito em tempo da ordem do número de vértices somado ao número de arestas ( Teorema 4.9 ). Utilizando os algoritmos de rotulação e transformação para forma canônica, obtemos

PQ-árvores rotuladas, canônicas e próprias  $T$  e  $T'$ , respectivamente correspondentes a  $T(G)$  e  $T(G')$ . Basta depois determinar se  $T$  e  $T'$  são L-idênticas. Isto pode ser feito em tempo linear através de uma varredura em pré-ordem destas árvores. Pelo Teorema 4.13,  $T$  e  $T'$  são L-idênticas se e somente se  $G$  e  $G'$  são isomorfos. ■

É interessante notar que, além de decidir isomorfismo eficientemente, obtivemos uma representação canônica compacta para grafos de intervalo, isto é, que usa espaço da ordem do número de vértices.

## CAPÍTULO 5

### OS GRAFOS DE INTERVALO COMO GRAFOS PERFEITOS

#### ALGUNS ALGORITMOS EM GRAFOS DE INTERVALO

##### 5.1. INTRODUÇÃO

Em 1960, Claude Berge introduziu a classe dos "grafos perfeitos", que definiremos à continuação. Desde a sua aparição, tem-se mostrado que muitas classes particulares de grafos, relacionadas com o estudo de problemas específicos, estão incluídas na classe dos perfeitos; tal é o caso da classe dos grafos triangularizados ( que o próprio Berge mostrou serem perfeitos em 1960 ), na qual está contida a classe dos grafos de intervalo.

Como corolário do Teorema 2.1 pode-se concluir que os grafos de intervalo são grafos perfeitos. O objetivo deste capítulo é inserir os grafos de intervalo no universo dos grafos perfeitos e apresentar alguns algoritmos em grafos de intervalo, vendo que aparência tomam alguns problemas clássicos quando restritos à classe. Inicialmente faremos uma breve introdução aos grafos perfeitos.

##### 5.2. GRAFOS PERFEITOS

A pesquisa em grafos perfeitos, grosso modo, tem tomado dois rumos. Um deles é a investigação da prova do Teorema dos Grafos Perfeitos ( Teorema 5.1 ), a demonstração da Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos e o estudo de outros aspectos gerais da classe. Outro rumo tem sido o de descobrir propriedades matemáticas e algorítmicas de classes especiais de grafos perfeitos, que ocorrem naturalmente em aplicações do mundo real: grafos de comparabilidade ( otimização de consultas em bases de dados com estruturas hierárquicas ), grafos de permutação ( controle de rotas aéreas ), grafos de intervalo ( otimização do armazenamento de dados em memória, pesquisa de estruturas genéticas e outras aplicações, conforme vimos no Capítulo 1) etc. Os aspectos matemáticos e algorítmicos se auxiliam mutuamente: explorar as propriedades matemáticas satisfeitas a priori por uma estrutura, com muita frequência, torna possível reduzir a complexidade de tempo ( ou espaço ) requerida para solucionar um problema; e, inversamente, uma abordagem algorítmica pode conduzir a resultados teóricos interessantes.

A redução da complexidade de certos problemas é de fato uma preocupação constante nas investigações, pois alguns deles - NP-completos no caso geral - tornam-se tratáveis quando restritos aos grafos perfeitos ou a algumas de suas sub-classes. O cálculo do número cromático, por exemplo, pode ser feito em tempo polinomial para grafos perfeitos; o problema de encontrar um ciclo hamiltoniano, embora permaneça NP-completo restrito aos grafos perfeitos, pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos de intervalo.

Passemos agora a tratar da classe dos grafos perfeitos.

Para um grafo não direcionado  $G$  definimos os seguintes parâmetros:

$\omega(G)$ , o tamanho de um subgrafo completo máximo ( clique máxima ) de  $G$ ;

$\chi(G)$  ou número cromático de  $G$ , o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de  $G$  de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas - em outras palavras, o menor número de conjuntos estáveis necessários para cobrir os vértices de  $G$ ;

$\alpha(G)$  ou número de estabilidade de  $G$ , o tamanho de um conjunto estável máximo de  $G$ ;

$\kappa(G)$ , o menor número de cliques necessárias para cobrir os vértices de  $G$ .

Veja-se a Figura 5.1, que ilustra o valor destes 4 parâmetros.

É fácil verificar que, para qualquer grafo não direcionado  $G$ ,

$$\omega(G) \leq \chi(G),$$

$$\alpha(G) \leq \kappa(G),$$

$$\alpha(G) = \omega(G^c) \text{ e}$$

$$\kappa(G) = \chi(G^c).$$

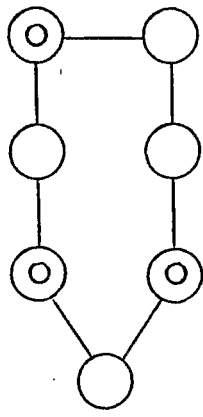
Um grafo não direcionado  $G$  é perfeito se satisfaz as seguintes propriedades:

$$(P1) \quad \omega(G_A) = \chi(G_A), \quad \forall A \subseteq VG;$$

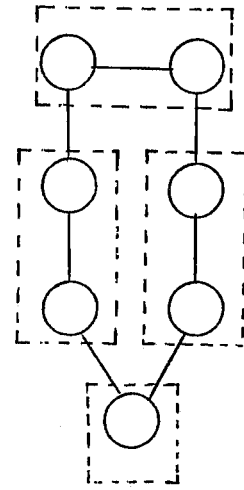
$$(P2) \quad \alpha(G_A) = \kappa(G_A), \quad \forall A \subseteq VG.$$

Pode -se concluir também facilmente que um grafo  $G$  satisfaz (P1) se e somente se  $G^c$  satisfaz (P2).

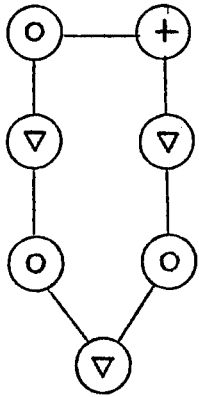
Apresentamos a seguir o Teorema dos Grafos Perfeitos, conjecturado por Berge [1961] e provado por Lovász [1972], que estabelece a equivalência entre as propriedades (P1), (P2) e uma terceira propriedade descoberta pelo próprio Lovász, após já ter demonstrado anteriormente a equivalência entre (P1) e (P2). Omitiremos



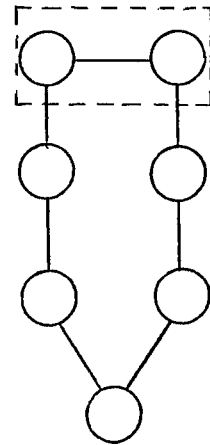
$$\alpha(C_7)=3$$



$$\kappa(C_7)=4$$



$$\chi(C_7)=3$$



$$\omega(C_7)=2$$

Figura 5.1. Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\chi$  e  $\omega$  para o grafo  $C_7$ .

a demonstração deste Teorema.

**Teorema 5.1** ( Teorema dos Grafos Perfeitos - Lovász [1972] ) Para um grafo não direcionado  $G$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

$$(P1) \quad \omega(G_A) = \chi(G_A), \quad \forall A \subseteq VG;$$

$$(P2) \quad \alpha(G_A) = \kappa(G_A), \quad \forall A \subseteq VG;$$

$$(P3) \quad \omega(G_A) \alpha(G_A) \geq |A|, \quad \forall A \subseteq VG.$$

**Corolário 5.2** Um grafo  $G$  é perfeito se e somente se seu complemento  $G^c$  é perfeito.

Costuma-se dizer que um grafo  $G$  é  $\chi$ -perfeito se  $G$  satisfaz (P1), e  $\alpha$ -perfeito se satisfaz (P2). O Teorema 5.1 estabelece que um grafo é  $\chi$ -perfeito se e somente se é  $\alpha$ -perfeito; além do mais, para concluirmos que um grafo é perfeito, é suficiente mostrar que satisfaz alguma das propriedades (Pi). Um grafo perfeito satisfaz todas as propriedades (Pi).

Passaremos agora a tratar da Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos. Para isso, é necessária a noção de grafo p-crítico.

Um grafo não direcionado  $G$  é chamado p-crítico se  $G$  é minimalmente imperfeito. Isto é,  $G$  não é perfeito, mas todo subgrafo induzido próprio de  $G$  é perfeito. Em particular, um grafo p-crítico satisfaz:

$$\alpha(G-v) = \kappa(G-v)$$

e

$$\omega(G-v) = \chi(G-v),$$

para qualquer vértice  $v \in VG$  ( lembrando que  $G-v = G_{VG-\{v\}}$  ).

O ciclo ímpar  $C_{2k+1}$  ( para  $k \geq 2$  ) é um exemplo de grafo p-crítico, pois:

- a) não é perfeito, já que  $\alpha(C_{2k+1}) = k$  e  $\kappa(C_{2k+1}) = k+1$ ; ou, alternativamente,  $\omega(C_{2k+1}) = 2$  e  $\chi(C_{2k+1}) = 3$ ;
- b) todo subgrafo próprio de  $C_{2k+1}$  é perfeito.

Pelo Teorema 5.1, o anti-ciclo ímpar  $C_{2k+1}^c$  também é um grafo p-crítico. Na realidade, estes grafos são os únicos grafos p-críticos conhecidos.

A Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos foi proposta por Berge em 1960 e possui várias formulações equivalentes:

- um grafo não direcionado é perfeito se e somente se não contém subgrafo induzido isomorfo a  $C_{2k+1}$  ou  $C_{2k+1}^c$  ( para  $k \geq 2$  );
- um grafo não direcionado é perfeito se e somente se em  $G$  e em  $G^c$  todo ciclo ímpar de comprimento maior ou igual a 5 possui uma corda;
- os únicos grafos p-críticos que existem são  $C_{2k+1}$  e  $C_{2k+1}^c$  ( para  $k \geq 2$  );
- não existe nenhum grafo p-crítico  $G$  tal que  $\alpha(G) > 2$  e  $\omega(G) > 2$ .

Feitas estas breves considerações gerais sobre os grafos perfeitos, ocupar-nos-emos agora de descrever algumas de suas sub-classes mais importantes. A Figura 5.2 ( Johnson [1985] ) ilustra as relações de continência entre tais classes. Fornecemos a seguir uma breve descrição de cada classe da Figura 5.2.

**Grafos Bipartites** - Também chamados bipartidos, são grafos cujos conjuntos de vértices podem ser particionados em dois conjuntos de modo que cada aresta possua uma extremidade em um conjunto e outra extremidade em outro. São perfeitos porque para todo subgrafo induzido



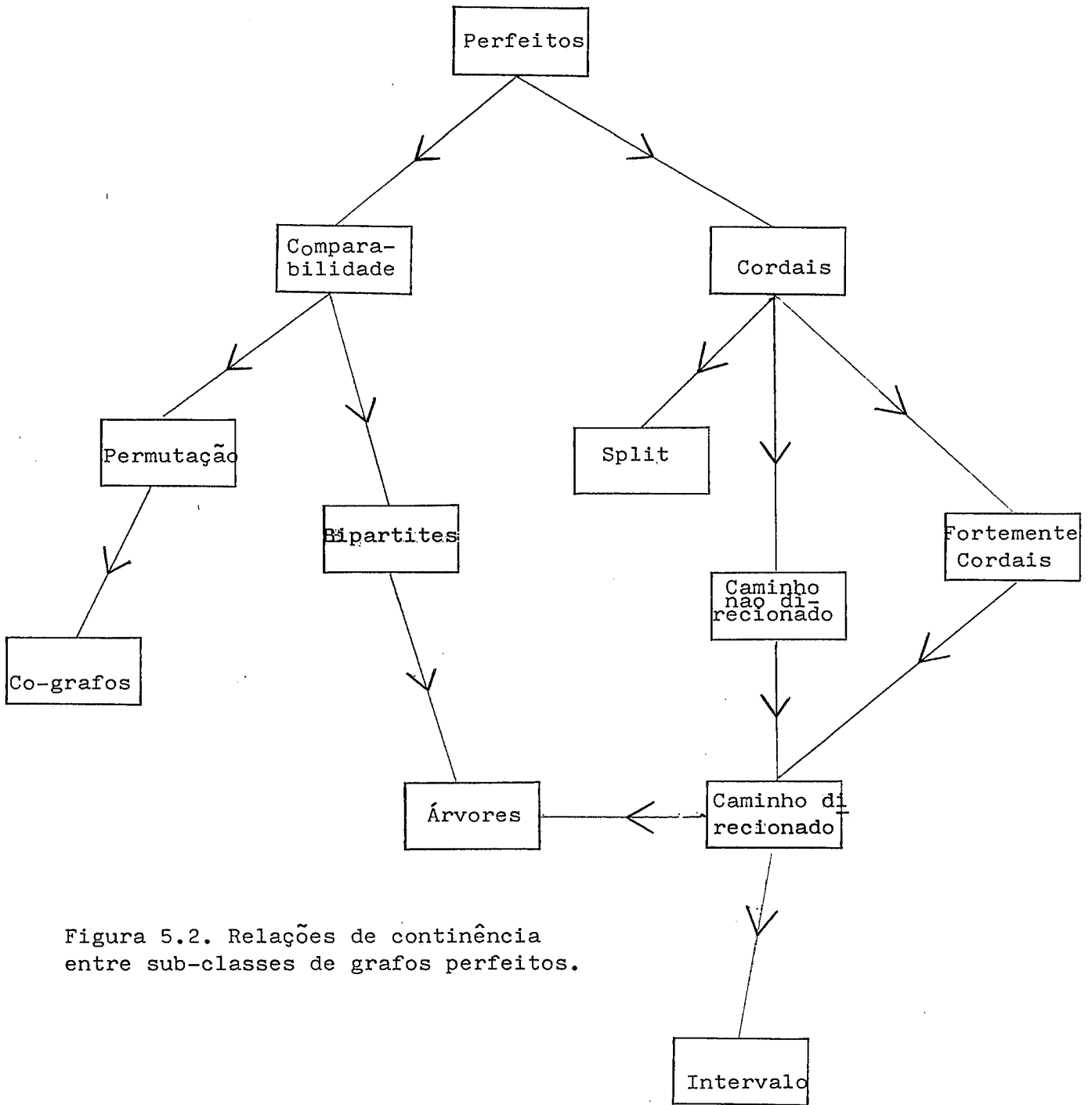


Figura 5.2. Relações de continência entre sub-classes de grafos perfeitos.

de um grafo bipartite o número cromático e o tamanho da clique máxima são ambos iguais a 2 ou ambos iguais a 1. Merecem menção especial os subgrafos bipartites completos, nos quais existe a aresta  $\overline{vw}$  para todo par de vértices  $v$  e  $w$  que pertencem a conjuntos distintos da partição do conjunto de vértices; utilizamos a notação  $K_{m,n}$  para significar um grafo bipartite completo  $G$  onde  $VG$  é particionado em conjuntos de tamanhos  $m$  e  $n$ .

**Grafos Triangularizados ou Cordais** - Grafos nos quais todo ciclo de comprimento maior que 3 possui uma corda, isto é, uma aresta que une dois vértice não consecutivos do ciclo.

**Grafos Split** - São grafos triangularizados cujos complementos são também triangularizados. Outras caracterizações são:

- a) Um grafo  $G$  é split se existe uma partição  $VG = S + K$  de seu conjunto de vértices tal que  $S$  é um conjunto estável e  $K$  é um conjunto completo;
- b) Um grafo  $G$  é split se não contém subgrafo induzido isomorfo a  $2K_2$ ,  $C_4$  ou  $C_5$  ( o grafo  $2K_2$  está representado na Figura 5.3 ).

**Grafos Fortemente Triangularizados** - São grafos triangularizados nos quais todo ciclo par de comprimento maior ou igual a 6 possui uma corda "ímpar" ( uma corda que une vértices separados por um número ímpar de arestas no ciclo ).

**Grafos de Comparabilidade** - São grafos não direcionados para os quais existem orientações transitivas. Isto é, através de uma apropriada associação de direções às arestas, tornam-se grafos direcionados transitivos ( grafos direcionados que possuem a aresta  $ac$  toda vez que

ab e bc forem arestas ).

**Grafos de Permutação** - São grafos de comparabilidade cujos complementos são também grafos de comparabilidade.

**Co-grafos** - São grafos que não contém  $P_4$  como ciclo induzido ( veja-se a Figura 5.4 ).

**Grafos de Caminho não Direcionado** - São grafos que podem ser modelados por um conjunto de caminhos numa árvore, de modo que cada vértice corresponda a um caminho e exista uma aresta entre 2 vértices se os caminhos correspondentes têm pelo menos um vértice em comum.

**Grafos de Caminho Direcionado** - São grafos de caminho não direcionado cuja representação é tal que para algum vértice "raiz" na árvore, todos os caminhos são sub-caminhos de caminhos que vão desde a raiz até alguma folha.

**Árvores** - São grafos que não contêm ciclos.

Pela Figura 5.2, os grafos de intervalo são grafos de caminho direcionado, grafos de caminho não direcionado e grafos fortemente triangularizados. Para verificar que são grafos de caminho direcionado, por exemplo, basta considerar que cada intervalo em um modelo de intervalo pode ser interpretado como um caminho na árvore formada por um único caminho  $v_1 v_2 \dots v_n$  tal que cada  $v_i$  corresponde a um ponto extremo ( esquerdo ou direito ) de um intervalo e  $i < j$  se e somente se o ponto extremo correspondente a  $v_i$  é menor que o ponto extremo

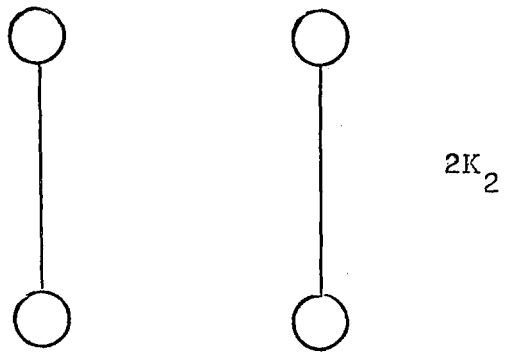


Figura 5.3

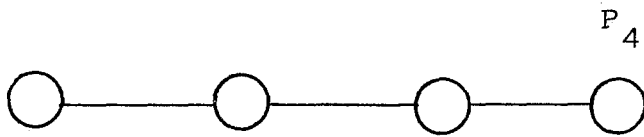


Figura 5.4

correspondente a  $v_j$  (supomos, sem perda de generalidade, que os pontos extremos são distintos entre si) ; o vértice  $v_1$  é a raiz da árvore, e  $v_n$  a única folha. As outras duas inclusões de classe também são de fácil verificação; aliás, os grafos de caminho direcionado estão incluídos nestas classes.

### 5.3. ALGORITMOS EM GRAFOS DE INTERVALO

Trataremos agora das complexidades de soluções de alguns problemas bem conhecidos em teoria dos grafos, restritos à classe dos grafos de intervalo.

Os "quatro problemas clássicos" para grafos perfeitos estão estritamente relacionados com os quatro parâmetros  $\omega$ ,  $\chi$ ,  $\alpha$  e  $\kappa$  :

- Dado  $G$  não direcionado, calcular  $\omega(G)$  [ exibir um subgrafo completo de  $G$  de tamanho máximo ];
- Dado  $G$  não direcionado, calcular o número cromático  $\chi(G)$  de  $G$  [ exibir uma coloração mínima de  $G$ , isto é, uma associação de cores aos vértices de  $G$  tal que vértices adjacentes recebam cores distintas, de modo que se utilize o menor número possível de cores ];
- Dado  $G$  não direcionado, calcular o número de estabilidade  $\alpha(G)$  de  $G$  [ exibir um conjunto estável de vértices de  $G$  de tamanho máximo ];
- Dado  $G$  não direcionado, calcular  $\kappa(G)$  [ exibir uma cobertura mínima dos vértices de  $G$  por conjuntos completos, isto é, um conjunto  $\langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle$  tal que cada  $V_i$  é um conjunto completo de vértices de  $VG$ ,  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = VG$  e  $k$  é o menor inteiro possível ].

Todos estes problemas podem ser resolvidos em tempo

polinomial para grafos perfeitos, existindo portanto algoritmos polinomiais para todas as sub-classes apresentadas em relação a estes problemas.

Poder-se-ia questionar a prestabilidade da existência de algoritmos polinomiais para a solução destes e de outros problemas em grafos perfeitos, uma vez que sequer existe algoritmo polinomial para o reconhecimento dos próprios grafos perfeitos. No entanto, em termos práticos, em grande parte das vezes sabemos que um grafo é perfeito porque conseguimos reconhecê-lo como pertencente a uma sub-classe dos perfeitos; e, para muitas destas sub-classes, sim existem algoritmos polinomiais de reconhecimento. É sob este prisma que devemos enfocar o que apresentamos no restante deste capítulo.

No caso dos grafos de intervalo, já citamos no capítulo anterior que o cálculo de  $\omega(G)$  pode ser feito em tempo  $O(|V_G| + |E_G|)$  (a construção da matriz de cliques maximais de um grafo triangularizado toma tempo linear, de acordo com Lueker [1975]). Gupta, Lee e Leung [1982] apresentam algoritmos de complexidade  $O(n \log n)$  para os quatro problemas, onde  $n$  é o número de vértices, tomando como entrada modelos de intervalo. Para o problema de coloração, Olariu [1991] aporta um algoritmo linear. Para grafos quaisquer, todos os "quatro problemas clássicos" são NP-completos.

Trataremos também de outros problemas, tais como Caminho Hamiltoniano, Circuito Hamiltoniano e Conjunto Dominante -entre outros- analisando como se comportam quando restritos a grafos de intervalo.

**5.3.1. Algoritmo para encontrar um conjunto estável máximo, de Gupta, Lee e Leung [1982]**

Neste algoritmo, que é bastante simples, o grafo de entrada é dado através de um modelo de intervalo.

O modelo é fornecido como uma lista de  $2n$  pontos extremos de intervalos ( onde  $n$  é o número de vértices ), sem perda de generalidade dois a dois distintos.

Inicialmente, o algoritmo ordena estes pontos em ordem crescente de seus valores. Depois, varre a lista da esquerda para a direita ( isto é, dos menores aos maiores valores ) até encontrar um ponto extremo direito. Então, imprime o intervalo que contém este ponto como um membro de um conjunto estável máximo, e remove todos os intervalos que contém este ponto. O processo é repetido até que não haja mais intervalos na lista.

É claro que todos os intervalos do conjunto final  $C$  não se interceptam. Se supusermos por absurdo que dois intervalos  $I$  e  $J$  pertencentes a  $C$  se interceptam ( com  $d(I) < d(J)$ , por exemplo ), na iteração em que  $I$  foi impresso,  $J$  deveria ter sido removido, pois é claro que  $d(I) \in J$ .

Além do mais, o conjunto  $C$  é máximo, já que os conjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_{|C|}$ , onde  $C_i$  é o conjunto dos intervalos removidos na  $i$ -ésima iteração, é uma cobertura por conjuntos completos disjuntos do grafo  $G$  ( recordando que, dado  $G$  grafo não direcionado,  $C$  conjunto estável de vértices de  $G$  e  $K$  cobertura dos vértices de  $G$  por conjuntos completos disjuntos, tem-se  $|C| \leq |K|$  ).

O passo de ordenação do algoritmo pode ser implementado de modo que sua execução tome tempo  $O(n \log n)$ . A varredura da lista pode ser executada em tempo  $O(n)$  mantendo uma lista duplamente ligada de

pontos extremos (isto é, onde cada elemento aponta para o anterior e o seguinte). A complexidade final é, pois,  $O(n \log n)$ .

Este algoritmo pode ser usado também para encontrar uma cobertura mínima de  $G$  por conjuntos completos disjuntos. Basta modificá-lo de modo que, quando o algoritmo encontra um ponto extremo direito (na etapa de varredura da lista), imprima todos os intervalos que contêm este ponto, como um conjunto completo. No final, o algoritmo terá produzido uma cobertura por conjuntos completos disjuntos. A cobertura será mínima porque sua cardinalidade iguala a de um conjunto estável máximo. ■

### 5.3.2. Algoritmo para encontrar uma cobertura mínima por cliques maximais, de Gupta, Lee e Leung [1982]

O algoritmo para conjunto estável pode ser modificado para encontrar uma cobertura mínima por cliques maximais. Como no algoritmo para conjunto estável, este algoritmo tenta identificar os membros de um conjunto independente máximo. Quando um ponto extremo direito  $y$  é encontrado, localiza à sua esquerda o ponto extremo esquerdo  $x$  mais próximo, e então imprime todos os intervalos que contêm  $x$ , como uma clique maximal.

Cada conjunto  $C$  impresso numa iteração é uma clique maximal, porque caso houvesse mais um intervalo  $I$  que interceptasse todos os intervalos de  $C$ , necessariamente teríamos  $x < e(I) < y$  - e então  $e(I)$  teria sido escolhido no lugar de  $x$ .

A cobertura é mínima porque - novamente - tem cardinalidade



igual à de um conjunto estável máximo.

Podemos verificar facilmente que a complexidade de tempo também é  $O(n \log n)$ . ■

Gupta, Lee e Leung [1979] desenvolveram também um algoritmo para encontrar uma coloração mínima em tempo  $O(n \log n)$ . Como para grafos de intervalo a cardinalidade de uma coloração mínima é igual à de uma clique máxima, este mesmo algoritmo - que também toma como entrada modelos de intervalo - pode ser usado para determinar o tamanho de uma clique máxima.

Olariu [1991] apresenta uma solução linear para o problema da coloração. A entrada do algoritmo que propõe é constituída pelo próprio grafo em conjunto com uma ordenação de suas cliques maximais, de acordo com a condição (iii) do Teorema 2.3. Recordando que, para grafos de intervalo, a computação das cliques maximais e sua posterior ordenação podem ser feitas em tempo linear, a complexidade final do algoritmo de Olariu - desde o grafo "em estado bruto" até a obtenção da coloração mínima - não se altera por causa desta computação inicial. Preferiremos apresentar este algoritmo ao invés do proposto por Gupta, Lee e Leung. Antes, porém, cabe recolher uma conclusão interessante destes três autores:

**Teorema 5.3**  $\Omega(n \log n)$  é um limite inferior para, tomando como entrada um modelo de intervalo, encontrar um conjunto estável máximo, uma cobertura mínima por conjuntos completos disjuntos, uma cobertura mínima por cliques maximais, uma coloração mínima e uma clique máxima em grafos de intervalo.

## Demonstração

Fredman e Weide [1978] mostraram que  $\Omega(n \log n)$  é um limite inferior para o tempo necessário para determinar se  $n$  intervalos sobre a reta real são mutuamente disjuntos. Os intervalos são mutuamente disjuntos se e somente se o tamanho de um conjunto estável máximo, de uma cobertura mínima por conjuntos completos disjuntos e de uma cobertura mínima por cliques maximais é  $n$ ; analogamente, os  $n$  intervalos são mutuamente disjuntos se o número de cores de uma coloração mínima e o tamanho de uma clique máxima são iguais a  $n$ . Portanto, se fôssemos capazes de resolver qualquer um dos cinco problemas em tempo inferior a  $\Omega(n \log n)$ , poderíamos também determinar se  $n$  intervalos sobre a reta real são mutuamente disjuntos em tempo inferior a  $\Omega(n \log n)$ , o que é impossível. ■

### 5.3.3 Algoritmo para encontrar uma coloração mínima, de Olariu [1991]

Este algoritmo faz uso da conhecida heurística de coloração de grafos baseada no "método guloso":

**Passo I.** Impõe-se uma certa ordem linear sobre o conjunto de vértices do grafo  $G$  de entrada;

**Passo II.** Percorre-se os vértices de  $G$  nesta ordem, associando a cada vértice  $w$  o menor inteiro positivo ( cor ) que não esteja associado a nenhum vizinho  $v$  de  $w$  que preceda  $w$  na ordem linear.

Inicialmente mostraremos que a ordem linear do Teorema 2.6 é tal que o "método guloso", aplicado a ela, produz sempre uma coloração exata, isto é, que utiliza o menor número de cores.

**Teorema 5.4** ( Olariu [1991] ) Seja  $G=(V,E)$  um grafo não direcionado de intervalo e " $<$ " uma ordem linear sobre  $V$  que satisfaz

$$u < v, v < w, \overline{uw} \in E \Rightarrow \overline{uv} \in E \quad \forall u, v, w \in V \quad (*).$$

Então, a coloração dos vértices de  $G$  obtida pela aplicação do Passo II é uma coloração exata ( que usa  $\chi(G)$  cores ).

#### Demonstração

Suponhamos que a maior cor associada pelo Passo II a um vértice é  $k \geq 1$ . Para mostrar que a heurística é exata, precisamos somente exibir uma clique de tamanho  $k$  em  $G$ .

Seja  $v$  um vértice em  $G$  que recebe a cor  $k$ .

Como nenhuma das cores  $1, 2, \dots, k-1$  estava disponível quando  $v$  foi colorido, podemos encontrar vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  tais que

$$v_i \in V(v),$$

$$v_i < v \text{ e}$$

$v_i$  recebe a cor  $i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ .

Logo,  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v\}$  é uma clique. ■

O próximo passo é descrever um algoritmo que produza a ordem linear do Teorema 2.6. O algoritmo toma como entrada um grafo não direcionado  $G$  de intervalo e uma ordenação  $C_1, C_2, \dots, C_m$  de suas cliques maximais de acordo com a condição (iii) do Teorema 2.3.

Como passo de pré-processamento, utilizamos o algoritmo de reconhecimento de grafos de intervalo de Booth e Lueker descrito no capítulo anterior, que toma tempo  $O(|VG|+|EG|)$  e produz a ordenação de cliques desejada.

Inicialmente, utilizando as informações de adjacência de  $G$  e a lista de cliques, o algoritmo constrói um modelo de intervalo para  $G$ . Este modelo é usado depois para construir a ordem linear do Teorema 2.6. As estruturas de dados utilizadas para representar o modelo consistem em dois vetores para cada vértice de  $G$ :  $e(v)$  contém o menor índice  $i$  para o qual  $v \in C_i$ , e  $d(v)$  contém o maior índice  $j$  para o qual  $v \in C_j$ . Isto é, para cada  $v \in VG$ ,  $[e(v), d(v)]$  é o intervalo que o representa no modelo.

As entradas do vetor  $e$  são inicializadas com zeros e os conjuntos  $B_i$  estão inicialmente vazios.

FIND\_ORDER (  $G, C_1, \dots, C_m$  );

início

CLOOP: para  $i := 1$  passo 1 até  $m$  faça  
           para cada vértice em  $C_i$  faça  
               se  $e(v) = 0$  então  $e(v) := d(v) := i$   
                           senão  $d(v) := i$ ;

BLOOP: para cada vértice  $v \in VG$  faça

$B_{e(v)} := B_{e(v)} \cup \{v\}$ ;

ORDER: ordene cada  $B_i$  em ordem crescente de acordo com  $d(v)$ ;

devolva (  $B_1, \dots, B_m$  );

fim;

■

**Teorema 5.5** O algoritmo FIND\_ORDER produz em tempo  $O(|VG| + |EG|)$  uma ordem linear que satisfaz (\*).

### Demonstração

Notemos que em virtude do Teorema 2.3, o passo CLOOP é executado corretamente.

O passo BLOOP garante que a ordem linear " $<$ " produzida satisfaz

$$e(u) < e(v)$$

ou

$$(e(u) = e(v)) \text{ e } (d(u) < d(v)),$$

sempre que  $u < v$ . Isto é, pela demonstração do Teorema 2.6, o passo BLOOP garante que a ordem produzida satisfaz (\*).

A respeito da complexidade, notemos que, como a soma dos tamanhos de todas as cliques maximais de um grafo de intervalo é linear no tamanho do grafo ( Fulkerson e Gross [1965] ), o passo CLOOP é executado em tempo linear. Além do mais, cada conjunto  $B_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) pode ser ordenado em tempo  $O(|B_i|)$ , donde o passo BLOOP também é executado em tempo linear.

Finalmente, observemos que, a propósito da construção da enumeração desejada dos vértices de  $G$ , devemos considerar, pela ordem, os vértices em  $B_1$ , seguidos pelos em  $B_2$ , e assim por diante. ■

Resta apresentar o algoritmo final de coloração baseado na heurística descrita ( Passo I / Passo II ). As estruturas de dados são as seguintes: o vetor  $C$ , inicializado com zeros, contém para cada vértice  $v \in VG$  a cor que  $v$  recebe no Passo II;  $DISP$  é um vetor booleano usado para significar que certa cor está disponível para ser utilizada de acordo com a associação de cores aos vértices feita pelo Passo II, e suas entradas são inicializadas com 1's.

$COR ( G, C_1, C_2, \dots, C_m );$

início

FLOOP:  $[v_1, v_2, \dots, v_n] := \text{FIND\_ORDER}( G, C_1, C_2, \dots, C_m );$

para  $i := 1$  passo 1 até  $n$  faça

início

DLOOP1: para cada vértice  $w \in V(v_i)$  faça  $DISP(C(w)) := 0;$

$j := 0;$

JLOOP: repita  $j := j + 1$  até que  $DISP(j) = 1;$

$C(v_i) := j;$

DLOOP2: para cada vértice  $w \in V(v_i)$  faça  $DISP(C(w)) := 1;$

fim;

fim;

■

**Teorema 5.6** O algoritmo  $COR$  colore um grafo de intervalo  $G$  com  $\chi(G)$  cores em tempo linear.

## Demonstração

A correção do algoritmo segue trivialmente do Teorema 5.4.

Quanto à complexidade, a linha FLOOP do algoritmo toma tempo  $O(|VG| + |EG|)$  ( Teorema 5.5 ); as linhas DLOOP1, JLOOP e DLOOP2, para cada vértice  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), tomam tempo  $O(\delta(v_i))$ . A complexidade final é, pois,  $O(|VG| + |EG|)$  ■

### 5.3.4. Algoritmo para encontrar um caminho hamiltoniano (HP - "Hamiltonian Path ") e um circuito hamiltoniano (HC - "Hamiltonian Circuit")

Dentre os problemas clássicos em teoria dos grafos, estão os de encontrar, em um grafo dado, um HP e um HC. Utilizaremos as siglas PHP e PHC, respectivamente, para denotarmos estes dois problemas.

PHP consiste em encontrar no grafo um caminho que passe por todos os vértices sem repeti-los. Quando se quer que o caminho seja fechado ( um circuito, onde o primeiro e o último vértices coincidem ), PHP se converte em PHC. Esquemáticamente:

#### Problema do Caminho Hamiltoniano (PHP)

Instância: grafo  $G$  não direcionado com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$

Questão: É possível encontrar uma orientação  $[v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}]$  de

$v_1, v_2, \dots, v_n$  de modo que  $v_{i_k}$  e  $v_{i_{k+1}}$  sejam adjacentes em  $G$  para  $k$

entre 1 e  $n-1$  ?

## Problema do Circuito Hamiltoniano (PHC)

Instância: grafo  $G$  não direcionado com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$

Questão: É possível encontrar uma orientação  $[v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}]$  de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de modo que  $v_{i_k}$  e  $v_{i_{k+1}}$  sejam adjacentes em  $G$  para  $k$  entre 1 e  $n-1$  e  $v_{i_n}$  seja adjacente a  $v_{i_1}$  ?

PHP e PHC são problemas reconhecidamente "intratáveis" computacionalmente; ambos são NP-completos para quase todas as classes de grafos, inclusive a dos perfeitos. Para os grafos de intervalo, contudo, pode-se resolvê-los em tempo polinomial. Vários autores propuseram algoritmos para tanto, e, recentemente, Manacher, Mankus e Smith [1990] mostraram que existem formas canônicas para um HP e um HC que podem ser produzidas por um algoritmo relativamente simples em tempo e espaço ótimos. Mais adiante analisaremos este algoritmo.

Historicamente, Bertossi [1983] foi o primeiro a apresentar resultados concretos sobre as complexidades do PHP e do PHC para grafos de intervalo. Restringindo-se a grafos de intervalo unitário, mostrou que:

(i) Um grafo de intervalo unitário  $G$  tem um HP se e somente se  $G$  é conexo;

(ii) PHC, para um grafo de intervalo unitário, pode ser resolvido em tempo  $O(n \log n)$ , tomando-se como entrada um modelo com  $n$  intervalos;

(iii) PHC, para um grafo de intervalo unitário, tem limite inferior



$\Omega(n \log n)$ , tomando-se como entrada um modelo com  $n$  intervalos.

A demonstração de (i) é trivial: por um lado, é claro que se  $G$  tem um HP, então  $G$  é conexo; por outro lado, construindo um modelo de intervalo para  $G$ , a ordenação dos pontos extremos esquerdos dos intervalos em ordem crescente fornece um HP.

Quanto a (ii), Bertossi apresenta um algoritmo baseado no fato de que, dados  $G$  grafo de intervalo unitário e  $M$  modelo de intervalo de  $G$ ,  $G$  possui um HC se e somente se existem dois caminhos alternativos unindo os intervalos  $ECM$  e  $DCM$ , onde

$$e(ECM) < e(DC), \forall I \in M, \text{ e}$$

$$d(DCM) > d(DI), \forall I \in M;$$

isto é,  $ECM$  e  $DCM$  são os intervalos de  $M$  "mais à esquerda" e "mais à direita", respectivamente. Omitiremos a descrição deste algoritmo, que pode-se demonstrar é ótimo (item (iii)), utilizando novamente o resultado de Fredman e Weide [1978]; como  $\Omega(n \log n)$  é um limite inferior do tempo necessário para determinar se  $n$  intervalos sobre a reta real são mutuamente disjuntos, se fôssemos capazes - de acordo com (ii) - de decidir para um grafo de intervalo unitário  $G$  com modelo de intervalo  $M$  se existem dois caminhos alternativos unindo os intervalos  $ECM$  e  $DCM$  em tempo inferior a  $\Omega(n \log n)$ , então poderíamos também determinar se  $n$  intervalos sobre a reta real são mutuamente disjuntos em tempo inferior a  $\Omega(n \log n)$ .

Depois de Bertossi, Keil [1985] mostrou que se pode construir um HC para um modelo de intervalo (sem a restrição de todos os intervalos terem o mesmo comprimento) em tempo e espaço  $O(n+e)$ , onde  $n, e$  são os números de vértices e arestas, respectivamente, do grafo ao qual se refere o modelo. O algoritmo de Keil tem a mesma complexidade

do algoritmo de reconhecimento de Booth e Lueker ( Capítulo 4 ), sendo portanto ótimo no tamanho do grafo subjacente.

Passaremos agora a descrever um algoritmo de tempo  $O(n \log n)$  de Manacher, Mankus e Smith [1990], que encontra um HP canônico num modelo de intervalo  $M$ . O algoritmo é simples e ótimo em tempo e espaço, tomando como entrada uma lista não ordenada de  $n$  intervalos dados como pares de números reais. Se a lista já estiver ordenada, a complexidade de tempo se reduz a  $O(n \log(\log n))$ .

### Algoritmo para HP

Inicialmente, ordenamos os  $n$  intervalos pelos seus extremos esquerdos e os numeramos de modo que o intervalo com o menor extremo esquerdo recebe o rótulo  $\underline{1}$  e o intervalo com maior extremo esquerdo o rótulo  $\underline{n}$ .

Precisaremos de algumas definições. Para o algoritmo, um caminho  $C$  será uma seqüência  $[ I_1, \dots, I_c ]$  de rótulos ( intervalos ), onde  $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$  (  $i = 1, \dots, c-1$  ) e  $c = |C|$  ( isto é,  $c$  é o comprimento da seqüência );  $I_1$  e  $I_c$  serão os intervalos extremos do caminho. Para  $j \leq i$ ,  $C [j \dots i]$  denota um sub-caminho de  $C$  (  $C [j \dots i] = [ I_j, \dots, I_i ]$  ).

Um caminho é um HP se é uma permutação de todos os rótulos  $\underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n}$ . Um HP é um HC se, além disso,  $I_c \cap I_1 \neq \emptyset$ .

O algoritmo constrói uma seqüência  $C$  e um conjunto  $S$  que satisfazem as seguintes condições:

■ Inicialmente,  $C$  e  $S$  constituem uma partição de  $M$  ( considerando  $C$  simplesmente como um conjunto, ignorando a ordenação dos intervalos ) :

$$C \cup S = M, C \cap S = \emptyset \quad (1).$$

■ O primeiro intervalo de C é o de maior extremo esquerdo:

$$e(I) < e(I_1), \forall I \in M \quad (I \neq I_1) \quad (2)..$$

■ Cada elemento de C intercepta seu predecessor:

$$\forall i \quad (1 < i \leq c) \quad I_i \cap I_{i-1} \neq \emptyset \quad (3).$$

■ Para  $1 < i \leq c$ ,  $I_i$  é o intervalo de  $M - C [1...i-1]$  com maior extremo esquerdo que intercepta  $I_{i-1}$ :

$$\forall I \quad (I \in S \text{ ou } I \in C [i+1...c]), 1 < i < c) \quad e(I) < e(I_i) \quad (4).$$

■ Nenhum elemento de S intercepta  $I_c$ :

$$\forall I \in S, I \cap I_c = \emptyset \quad (5).$$

Apresentamos pois o algoritmo. Dada uma seqüência de  $n$  intervalos  $\underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n}$ , ordenada pelos seus pontos extremos esquerdos, o algoritmo constrói uma seqüência  $C = [I_1, \dots, I_c]$  e um conjunto  $S$  de acordo com as fórmulas (1)-(5). Cada iteração move um elemento de  $S$  para  $C$ . No final, quando a condição do comando iterativo é falsa, (5) é verdadeira.

FIND\_PATH (1, 2, ..., n);

início

S: = (<1, 2, ..., n-1>);

$I_1$ : = n;

j: = 1;

enquanto  $( \exists I \in S \mid I \cap I_j \neq \emptyset )$  faça

início

$I :=$  elemento de  $S$  com maior extremo esquerdo

que intercepta  $I_j$ ;

$j := j+1$ ;

$I_j := I$ ;

$S := S - \{I\}$ ;

fim;

devolva  $C = [I_1, \dots, I_j]$ ;  $( j = c )$

fim;

■

É claro que se no final da execução  $S$  é vazio, então  $C$  é um HP. Provaremos que se  $S$  não é vazio, então  $M$  não tem HP. Para isso, precisaremos dos seguintes resultados, que apresentaremos sem demonstração porque são de simples verificação:

**Teorema 5.7** Seja  $C = [I_1, \dots, I_c]$  um caminho e  $I$  um intervalo de  $M$  não necessariamente em  $C$ . Suponhamos que  $e(I_j) < e(I) < e(I_i)$ , para  $1 \leq j < i \leq c$ . Então,  $I$  intercepta pelo menos um elemento de  $C [j..i]$ .

**Lema 5.8** Para  $1 < j < i$ , se  $e(I_j) < e(I_i)$ , então  $I_j \cap I_i \neq \emptyset$ .

**Lema 5.9** Para  $1 < j < i$ , se  $e(I_j) < e(I_i)$ , então  $d(I_j) < e(I_{j-1})$ .

**Lema 5.10** Suponhamos que (1)-(5) sejam verdadeiras. Então,  $d(I) < e(I_c)$ ,  $\forall I \in S$ .

Para completarmos a demonstração serão necessários mais alguns elementos. Para  $1 \leq j \leq i \leq c$ ,  $C^r[j\dots i]$  é o caminho  $[I_i, I_{i-1}, \dots, I_{j+1}, I_j]$ ;  $C^r = C^r[1\dots c]$ . Dizemos que  $C^r[j\dots i]$  é o reverso de  $C[j\dots i]$ .

Se  $j$  é o maior inteiro em  $\langle 1, \dots, i \rangle$  tal que  $e(I_j) < e(I_{j+1})$ , então  $C^r[j+1\dots i]$  é chamado uma ilha e  $I_j$  sua cobertura;  $I_i$  é chamado base da ilha.

Descreveremos um algoritmo auxiliar na demonstração que segmenta em ilhas e coberturas o reverso do caminho produzido por FIND\_PATH. Denotaremos a  $h$ -ésima ilha por  $A_h$ , sendo  $a_h$  sua base.

Por (2),  $\forall j > 1$ ,  $e(I_j) < e(I_{j+1})$ , de modo que  $I_1$  não pode ser uma cobertura e é membro de uma ilha. Portanto, a ilha que contém  $I_1$  não tem cobertura. A  $h$ -ésima cobertura, se existir, será denotada por  $C_h$ .

■ O processo de segmentação de  $C^r$  inicializa  $I_c$  como a base da ilha  $A_1$ :

$$\text{Inicialmente, } i = c \text{ e } h = 1 \quad (6).$$

■ Seja  $a_h$ , a base da ilha  $A_h$ , igual a  $I_i$ :

$$\begin{aligned} \exists j \in \langle 1, \dots, i \rangle \mid \forall k \in \langle j+1, \dots, i \rangle (e(I_j) < e(I_k) \text{ e } e(I_j) < e(I_i)) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_h = C^r[j+1\dots i], C_h = I_j \text{ e } a_{h+1} = I_{j-1} \quad (7). \end{aligned}$$

■ Condição de parada para o processo de segmentação:

$$\forall j \in \langle 1, \dots, i-1 \rangle (e(I_j) < e(I_{j+1})) \Rightarrow A_h = C^r[1\dots i] \text{ é a ilha final} \quad (8).$$

■ Caso degenerado ( não há coberturas ) de segmentação de  $C^r$ :

$$\forall j \in \langle 1, \dots, c-1 \rangle ( e(I_c) < e(I_j) ) \Rightarrow C^r = A_1 \quad (9).$$

■ Caso em que pelo menos uma cobertura existe:

$$\exists j \in \langle 1, \dots, c \rangle \mid e(I_j) < e(I_c) \rightarrow$$

$$C^r = A_1 C_1 A_2 C_2 \dots A_k C_k A_{k+1} \text{ para algum } k > 0 \quad (10).$$

Fornecemos a seguir uma descrição do algoritmo de segmentação. A inicialização corresponde a (6), a iteração básica a (7) e o estado final a (8). O resultado final é descrito por (9) ou (10).

FIND\_COVERS ( $I_1, \dots, I_c$ );

início

$i := c$ ;

$h := 1$ ;

enquanto ( $\exists j \in \langle 1, \dots, i \rangle \mid e(I_j) < e(I_i)$ ) faça

início

$j :=$  maior índice em  $\langle 1, \dots, i \rangle$  tal que  $e(I_j) < e(I_i)$ ;

$A_h := C^r[j+1 \dots i]$ ;

$C_h := I_j$ ;

$i := j-1$ ;

$h := h+1$ ;

fim;

devolva  $A_h = C^r[1 \dots i]$ ;

fim;

■

Supondo que, no final da execução de FIND\_PATH,  $S \neq \emptyset$  (isto

é,  $c < n$ ), então os lemas seguintes se aplicam à saída de FIND\_COVERS.

**Lema 5.11** Para todo  $h \in \langle 1, \dots, k+1 \rangle$ , cada ilha  $A_h$  é não vazia, uma vez que, por construção,  $a_h \in A_h$ .

**Lema 5.12** Para  $h \in \langle 1, \dots, k \rangle$  ( $k \geq 1$ ) e para todo  $I$  em  $A_h$ ,  $d(I) < e(a_{h+1})$ . (Consequência imediata do Lema 5.9 e de (7)).

**Lema 5.13** Para todos  $h, l$  tais que  $1 \leq l < h \leq k+1$  ( $k \geq 1$ ), para todo  $I \in A_l$  e para todo  $J \in A_h$ ,  $d(I) < e(J)$ . (Consequência dos Lemas 5.9 e 5.12).

**Lema 5.14** Para  $1 \leq l < h \leq k+1$  ( $k \geq 1$ ), se  $I \in A_l$  e  $J \in A_h$ , então  $I \cap J = \emptyset$ . (Consequência dos Lemas 5.9, 5.11, 5.12 e 5.13).

**Lema 5.15** Para todo  $h$  tal que  $1 \leq h \leq k+1$ , se  $I \in S$  e  $J \in A_h$ , então  $I \cap J = \emptyset$ . (Consequência dos Lemas 5.10 e 5.13).

Os Lemas 5.14 e 5.15 colocam intuitivamente que todas as ilhas são duas a duas espacialmente disjuntas e que cada ilha é espacialmente disjunta de  $S$ ; faz sentido, pois, considerar  $S$  como uma ilha na seqüência.

Podemos finalmente provar o resultado principal.

**Teorema 5.16** FIND\_PATH produz um HP para  $M$  se e somente se  $M$  tem um HP.

**Demonstração** ( $\Rightarrow$ ) Trivial. Quando FIND\_PATH termina e  $S = \emptyset$ , então

$c = n$ . Por (3),  $C$  é um HP.

( $\Leftarrow$ ) Se ao final da execução de FIND\_PATH temos  $S \neq \emptyset$ , então  $c < n$ , e para algum  $k \geq 0$ ,  $C^r = A_{1_1} C_1 A_{2_2} C_2 \dots A_{k_k} C_k A_{k+1}$ .

Pelo Lema 5.16 em conjunto com (9) e (10),  $M$  consiste em  $k+2$  ilhas espacialmente desconectadas e somente  $k$  intervalos que podem conectá-las num HP. No máximo  $k+1$  ilhas podem se juntar com  $k$  coberturas, deixando uma ilha desconectada. Isto é,  $M$  não possui HP.

■

### Algoritmo para HC

Se após a execução de FIND\_PATH não se produziu um HP, então  $M$  não tem HC. Caso contrário, a partir do HP produzido, tentaremos exibir um HC.

Associaremos a cada elemento de  $C$  um rótulo ("R" ou "G"), e provaremos que se  $I_c$  e  $I_{c-1}$  possuem o mesmo rótulo, então  $M$  não tem HC; caso contrário, exibiremos um HC. Assumiremos que  $c > 2$ . Lembremos que  $c = n$ .

Fornecemos inicialmente uma descrição informal do algoritmo de rotulação.

■ Sejam  $K(i)$  o rótulo associado a  $I_i$  e  $L(i)$  o maior índice em  $1 \dots i-1$  tal que  $K(L(i)) \neq K(i)$ . É claro que  $\forall j \in \langle L(i)+1 \dots i \rangle$ ,  $K(j) = K(i)$ . Inicialmente, associaremos a  $I_1$  o rótulo R e a  $I_2$  o rótulo G; como  $K(1) \neq K(2)$ ,  $L(2)$  recebe o valor 1 :

$$K(1)=R, K(2)=G, L(2)=1 \quad (11);$$

$$\forall i \in \langle 2, \dots, c-1 \rangle \quad (L(i) < i \text{ e } K(L(i)) \neq K(i)) \quad (12).$$



■ Sendo  $I_{i+1}$  o próximo intervalo a ser rotulado, para  $j \in \langle L(i)+1, \dots, i \rangle$ ,  $K(j) = K(i)$  e  $K(L(i)) \neq K(i)$ . A regra para rotulação é a seguinte: se  $I_{i+1} \cap I_i \neq \emptyset$ , então  $K(i+1)$  recebe  $K(L(i))$ ; caso contrário,  $K(i+1)$  recebe  $K(i)$ :

$\forall i \in \langle 2, \dots, n \rangle (\forall j \in \langle L(i)+1, \dots, i \rangle (K(i) = K(j) \text{ e } K(j) \neq K(L(i))))$  (13);

$\forall i \in \langle 2, \dots, n-1 \rangle (I_{i+1} \cap I_i \neq \emptyset \Leftrightarrow K(i+1) = K(L(i)))$  (14).

■ Se  $K(i+1)$  recebeu  $K(i)$ , então  $L(i)$  é ainda o maior índice tal que  $K(i+1) \neq K(L(i))$ . Portanto,  $L(i+1)$  recebe o índice  $L(i)$ ; caso contrário,  $K(i+1)$  e  $K(i)$  são de rótulos diferentes, e então  $L(i+1)$  recebe o índice  $i$ :

$\forall i \in \langle 1, \dots, n-1 \rangle (I_{i+1} \cap I_i \neq \emptyset \Leftrightarrow L(i+1) = L(i))$  (15).

O seguinte algoritmo rotula os elementos de  $C$  de acordo com as condições (11)-(15).

FIND\_CIRCUIT ( $[I_1, \dots, I_n]$ );

início

$K(1) := R;$

$K(2) := G;$

$L(2) := 1;$

para  $i := 2$  até  $n-1$  faça

se  $I_{i+1} \cap I_i \neq \emptyset$  então início

$K(i+1) := K(L(i));$

$L(i+1) := i;$

fim

senão início

$K(i+1) := K(i);$

$L(i+1) := L(i);$

fim;

devolva  $K(1), K(2), \dots, K(n);$

fim;

■

O lema a seguir é de demonstração simples.

**Lema 5.17** Para qualquer  $i \in \langle 2, \dots, n \rangle$ , denotemos o índice  $L(i)$  por  $q$ . Se  $q+1 > 1$ , então para todo  $j \in \langle q+2, \dots, i \rangle$ ,  $d(I_j) < e(I_q)$ .

**Demonstração.** É claro que para todo  $j \in \langle q+2, \dots, i \rangle$ ,  $K(j) = K(j-1)$ ; isto é,  $L(j) = q$ . Logo, por (15),  $I_j \cap I_q = \emptyset$ , e, pelo Lema 5.8,  $e(I_j) < e(I_q)$ . Portanto,  $d(I_j) < e(I_q)$  para todo  $j \in \langle q+2, \dots, i \rangle$ . ■

**Teorema 5.18** FIND\_CIRCUIT produz um HC para  $M$  se e somente se  $M$  tem um HC.

**Demonstração** ( $\Rightarrow$ ) Se  $K(n) \neq K(n-1)$ , o seguinte algoritmo exhibe um HC:

EXHIBIT\_HC;  $\langle "||" \text{ denota concatenação (construção de listas)} \rangle$

início

$H_C := I_1 || I_2;$

para  $i := 3$  até  $n$  faça

se  $K(i) = R$

então  $H_C := I_i \parallel H_C$

senão  $H_C := H_C \parallel I_i$ ;

devolva  $H_C$ ;

fim;

Em  $H_C$ , quaisquer dois elementos contíguos de mesmo rótulo se interceptam, por (13), (14) e (15). Por (3),  $I_1$  intercepta  $I_2$  e  $I_n$  intercepta  $I_{n-1}$ , e  $I_n$  e  $I_{n-1}$  são os extremos opostos de  $H_C$ . Logo,  $H_C$  é de fato um Circuito Hamiltoniano de  $M$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $K(n) = K(n-1)$ . Denotemos  $L(n)$  por  $q$ . Para todo  $j \in \langle q+2, \dots, n \rangle$ ,  $K(j) = K(n)$ ,  $K(j) \neq K(q)$  e, pelo Lema 5.17, cada  $I_j$  se situa completamente à esquerda de  $I_q$ .  $A_0$  então denota  $C^r[q+2..n]$ , e  $C_0$  denota  $I_{q+1}$ .

Se aplicarmos  $\text{FIND\_COVERS}$  ao caminho  $C^r[1..q]$  (chamando  $\text{FIND\_COVERS}(I_1, \dots, I_q)$ ) com  $I_q$  como base da ilha  $A_1$ , verificaremos que  $C^r = A_0 C_0 \dots A_k C_k A_{k+1}$ , para algum  $k \geq 0$ . Pelos Lemas 5.15 e 5.17, cada ilha  $A_k$ , para  $k \geq 0$ , é disjunta de todas as outras ilhas que  $\text{FIND\_COVERS}$  identifica. Assim,  $M$  consiste em  $k+2$  ilhas disjuntas e apenas  $k+1$  intervalos que podem conectá-las; isto é,  $M$  não possui HC. ■

Para mostrar que o algoritmo  $\text{FIND\_PATH}$  tem complexidade de tempo  $O(n \log n)$ , basta recordarmos que a ordenação e a rotulação requerem tempo  $O(n \log n)$ ; e, além disso, mostrar que as operações "seja  $I$  o elemento de  $S$  com maior extremo esquerdo que intercepta  $I_c$ " e " $S := S - \langle I \rangle$ " podem ser feitas em tempo  $O(\log n)$ .

É bem sabido que se pode construir um "heap" ordenado em

tempo linear sobre um conjunto já previamente ordenado ( Aho, Hopcroft e Ullman [1974] ).

Seja  $H$  um heap cujas folhas são intervalos ordenados pelos seus pontos extremos direitos. Cada nó interior  $X$  contém o maior ponto extremo esquerdo dentre os intervalos da sub-árvore da qual  $X$  é raiz. É claro que isto requer espaço linear.

A busca em  $S$  do intervalo  $I$  com maior extremo esquerdo que intercepta os demais é realizável devido ao fato de que ao procurar  $I$ , nenhum intervalo em  $S$  pode se situar completamente à esquerda de  $I_c$ .

Para encontrar  $I$ , utilizamos  $I_c$  como uma "faixa" em  $H$ , isto é, localizamos o bloco de todos os intervalos cujos pontos extremos direitos se situam dentro ou à direita de  $I_c$  ( se houver algum ). Entre eles, localizamos o intervalo com maior ponto extremo esquerdo, que se torna  $I$ , utilizando técnicas 'standard'.

Para remover um intervalo de  $H$ , utilizamos novamente técnicas 'standard', consumindo tempo  $O(\log n)$  para substituí-lo por uma entrada fictícia.

Os algoritmos `FIND_CIRCUIT` e `EXHIBIT_HC` são claramente lineares. ■

### 5.3.5. Algoritmo para encontrar um conjunto dominante mínimo

Um conjunto de vértices  $D$  é um conjunto dominante para um grafo  $G$  se todo vértice de  $G$  está contido em  $D$  ou é adjacente a um vértice contido em  $D$ .

Booth e Johnson [1982] apresentam um algoritmo de tempo

linear para solucionar o problema de encontrar um conjunto dominante mínimo em grafos de intervalo. Na verdade, o algoritmo foi projetado para a classe dos grafos de caminho direcionado, que contém a classe dos grafos de intervalo, e o algoritmo que apresentaremos aqui é uma adaptação do original para o caso particular dos grafos de intervalo.

O algoritmo é simples e consiste em três passos.

Passo I. Executar o teste de reconhecimento de grafos de intervalo de Booth e Lueker ( Capítulo 4 ) a fim de obter uma ordenação  $C_1, \dots, C_m$  das cliques maximais de  $G$  de acordo com o Teorema 2.3. Inicializamos o conjunto dominante  $D$  como vazio, marcamos cada vértice de  $G$  como "não dominado" e definimos um vetor HIGH para os vértices de  $G$ , inicializado com zeros.

Passo II. Varrendo as cliques do menor para o maior índice, realizar a seguinte operação: para cada vértice  $v$  na clique maximal  $C_i$ ,

$$\text{HIGH}(v) := \text{HIGH}(v) + 1.$$

No final do Passo II,  $\text{HIGH}(v)$  conterà o maior índice  $j \in \{1, \dots, m\}$  para o qual  $v \in VC_j$ .

Passo III. Varrendo novamente as cliques do menor para o maior índice, realizar a seguinte operação: se existe um vértice  $v$  na clique corrente  $C_i$  marcado como "não dominado" e  $\text{HIGH}(v) = i$ , então escolher em  $C_i$  um vértice  $x$  possuindo o maior valor  $\text{HIGH}(x)$  entre todos os vértices de  $C_i$ . Adicionar  $x$  a  $D$ , marcar  $x$  como "dominado", e marcar cada um dos vértices adjacentes a  $x$  como "dominado".

**Teorema 5.19** ( Correção do algoritmo ) No final da execução do

algoritmo para conjunto dominante,  $\text{DOM}(D) = V$  e  $|D| = \min \{ |D'| \mid D' \text{ é conjunto dominante para } G \}$ , onde  $\text{DOM}(X)$  denota o conjunto de vértices dominados por um conjunto  $X$  de vértices.

**Demonstração.** Por indução no número de cliques visitadas, mostraremos que existe um conjunto dominante mínimo  $D'$  que contém  $D$  e que  $\text{DOM}(D)$  contém pelo menos os vértices que ocorrem somente nas cliques visitadas.

A base é trivial: após zero iterações,  $D$  está vazio e portanto claramente contido em algum conjunto dominante mínimo. Não existem vértices dominados por  $D$ .

Para o passo da indução, se não existe nenhum vértice  $v$  que satisfaz a condição do Passo III, a hipótese continua válida. Caso contrário, suponhamos que  $x$  é adicionado a  $D$  durante a visita da clique  $C_i$ . Pela hipótese de indução,  $D - \{x\}$  está contido em algum conjunto dominante mínimo  $D'$ . Se  $x$  está contido em  $D'$ , nada a demonstrar. Caso contrário, seja  $v$  o vértice de  $C_i$  que não é dominado por  $D - \{x\}$ . Seja  $y$  vértice qualquer de  $D'$  que domina  $v$ . Seja  $D'' = D' - \{y\} \cup \{x\}$ . Provaremos que  $D''$  é um conjunto dominante para  $G$ .

Suponhamos por absurdo que há um vértice  $z$  não dominado por  $D''$ . Notemos que  $z$  não ocorre em nenhuma clique  $C_k$  tal que  $k < i$ , caso contrário estaria contido em  $\text{DOM}(D)$ , e portanto em  $\text{DOM}(D'')$ ; da mesma forma,  $z$  não ocorre em  $C_i$ , caso contrário estaria contido em  $\text{Dom}(\{x\})$  e portanto em  $\text{DOM}(D'')$ ;  $z$  só ocorre, pois, em cliques de índice maior do que  $i$ .

Concluimos que  $y$  deve ocorrer numa clique de índice  $j_1 \leq i$ , porque  $y$  domina  $v$ ; mas também deve ocorrer numa clique de índice  $j_2 \geq i$ , porque  $y$  domina  $z$ . Isto é, pelo Teorema 2.3,  $y$  realmente ocorre na

clique  $C_i$ . Isto gera a contradição desejada, porque a escolha de  $x$  exige  $HIGH(x) \geq HIGH(y)$ , o que por sua vez implica que para vértices que ocorrem em  $C_i$  ou em cliques de índice maior do que  $i$  ( por exemplo,  $z$  ),  $x$  pode substituir  $y$  como dominante.

A indução está, pois, completa:  $D''$  é um conjunto dominante para  $G$ ,  $|D| = |D''|$  (  $D''$  é mínimo ) e  $D$  domina todo vértice que ocorre somente em cliques visitadas. ■

O algoritmo é claramente linear no tamanho do grafo  $G$ . O Passo I toma tempo  $O(|V_G| + |E_G|)$  ( veja-se Teoremas 4.8 e 4.9 ), o Passo II toma tempo  $O(|V_G| + |E_G|)$  ( pois a somatória dos tamanhos das cliques é  $O(|V_G| + |E_G|)$  - veja-se Fulkerson e Gross [1965] ) e o Passo III também toma tempo  $O(|V_G| + |E_G|)$ .

Cite-se que vários problemas em variantes de conjunto dominante ( conjunto dominante total, conjunto dominante independente, conjunto dominante conexo e outras ) apresentam algoritmos polinomiais quando restritos a grafos de intervalo ( veja-se Ramalingam e Pandu [1988] ).

### 5.3.6. OUTROS ALGORITMOS

Lu, Ho e Chang [1990] exibem, para grafos de intervalo, um algoritmo linear para o problema do "domatic number"  $d(G)$  de um grafo  $G$ , que assim se define :  $d(G)$  é o máximo inteiro  $k$  para o qual  $V_G$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos dominantes disjuntos  $D_1, D_2, \dots, D_k$ . Mostram também que  $d(G) = \delta(G) + 1$  para qualquer grafo de intervalo  $G$ ,

onde  $\delta(G) = \min \{ \delta(v) \mid v \in VG \}$ .

Marathe, Ravi e Rangam [1992] consideram uma generalização do conceito de dominação de vértices em grafos de intervalo. Dados um inteiro  $i$  e um grafo não direcionado  $G$ , o "Problema Generalizado de  $i$ -Cobertura de Vértices" (PGiCV) consiste em encontrar um conjunto mínimo de vértices tal que todas as cliques de  $G$  de tamanho  $i$  contenham pelo menos um vértice deste conjunto. Para  $i=2$ , este problema se reduz ao do conjunto dominante mínimo.

O PGiCV é NP-completo para grafos triangularizados quando  $i$  é parte da entrada. No caso dos grafos de intervalo, Marathe, Ravi e Rangam apresentam um algoritmo guloso de tempo linear para o problema.

White, Farber e Pulleyblank [1985] apresentam um algoritmo de tempo polinomial para resolver o problema de encontrar uma árvore de Steiner num grafo de intervalo. Dado um grafo não direcionado  $G$  com pesos inteiros não negativos nas arestas, um subconjunto  $R \subseteq VG$  e um inteiro positivo  $k$ , este problema, no caso geral, consiste em encontrar uma sub-árvore de  $G$  que inclua todos os vértices de  $R$  e tal que a soma dos pesos das arestas na sub-árvore não ultrapasse  $k$ .

Cabe ainda citar outros dois problemas conhecidos que ainda não possuem solução de tempo polinomial para grafos de intervalo:

### Corte máximo

**Instância:** grafo não direcionado  $G$  com pesos inteiros positivos nas arestas e um inteiro positivo  $k$ ;

**Questão:** existe uma partição de  $V$  em conjuntos disjuntos  $V'$  e  $V''$  tais que a soma dos pesos das arestas de  $EG$  que possuem um extremo em  $V'$  e outro em  $V''$  é no mínimo  $k$  ?



Índice cromático ( ou coloração mínima de arestas )

Instância: grafo  $G$  não direcionado com  $EG \neq \emptyset$ ;

Questão: encontrar o menor inteiro positivo  $k$  tal que as arestas de  $G$  possam ser coloridas com  $k$  cores de modo que duas arestas que incidem sobre o mesmo vértice recebam cores distintas ( em outras palavras, encontrar o índice cromático  $k$  de  $G$  ou exibir uma  $k$ -coloração de arestas de  $G$  ).

Johnson [1985] faz notar que estes dois problemas possivelmente possuem soluções de tempo polinomial simples.

CAPÍTULO 6  
TÓPICOS VARIADOS

6.1. O NÚMERO DE INTERVALO

Trotter e Harary [1979] e, independentemente, Griggs e West [1980], propuseram uma generalização para grafos de intervalo que modela naturalmente alguns problemas de alocação e seqüenciamento (restrições sobre interações entre componentes de um sistema em grande escala). Para um grafo  $G$  não direcionado, definimos o número de intervalo ("interval number") de  $G$ ,  $i(G)$ , como o menor inteiro positivo  $t$  para o qual existe uma função  $f$  que associa a cada vértice  $v$  de  $G$  um conjunto  $f(v) \subseteq \mathbb{R}$  que é a união de (no máximo)  $t$  intervalos fechados sobre a reta real (não necessariamente disjuntos) tal que  $u, v \in VG$  são adjacentes se e somente se  $f(u) \cap f(v) \neq \emptyset$ . Dado  $u \in VG$ , os elementos de  $f(u)$  são denominados  $u$ -intervalos.

A função  $f$  é chamada uma  $t$ -representação de  $G$ . A representação será exposta se para todo vértice  $v \in VG$  existe um intervalo aberto  $I_v \subseteq f(v)$  tal que  $I_v \cap f(u) = \emptyset$  para todo vértice  $u \in VG$  com  $u \neq v$ .

Um número  $m$  é chamado um limite superior para uma representação  $f$  de um grafo  $G$  quando, para  $\forall r \in \bigcup_{v \in VG} f(v)$ ,  $r < m$ .

O número  $i(G)$  está bem definido para qualquer grafo  $G$ :

obtém-se uma representação de  $G$  tomando, para cada aresta  $\overline{vw} \in EG$ , um par de intervalos que se interceptam ( que se tornam um  $v$ -intervalo e um  $w$ -intervalo ); os pares devem estar espacialmente separados entre si. É claro que esta construção nem sempre permite obter o valor de  $i(G)$ .

A definição de  $i(G)$  sugere definir os grafos de intervalo múltiplo como aqueles que exigem representações onde cada vértice corresponde a vários intervalos.

Os teoremas a seguir são de demonstração imediata:

**Teorema 6.1.** Dado  $G$  não direcionado,  $G$  é de intervalo se e somente se  $i(G) \leq 1$ .

Somente grafos sem arestas têm número de intervalo zero.

**Teorema 6.2.** Dado  $G$  grafo não direcionado tal que  $|VG|=p$ ,  $i(G) \leq p-1$ .

A Figura 6.1 exhibe uma 2-representação para  $C_4$ , que não é um grafo de intervalo (  $i(C_4) = 2$  ). A representação é exposta porque  $I_i \cap I_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  com  $i \neq j$ .

Um conceito semelhante ao de número de intervalo é o de "boxicity" ( Roberts [1969] ), que se define do seguinte modo: dado  $G$  grafo não direcionado, a boxicity de  $G$  é o menor inteiro  $t$  para o qual  $G$  pode ser representado por intersecções de conjuntos  $t$ -dimensionais ( contidos em  $\mathbb{R}^t$  ) cujas bordas são paralelas aos eixos ortogonais. Isto é, a cada vértice  $v \in VG$  é associado um conjunto  $X_v \subseteq \mathbb{R}^t$  tal que

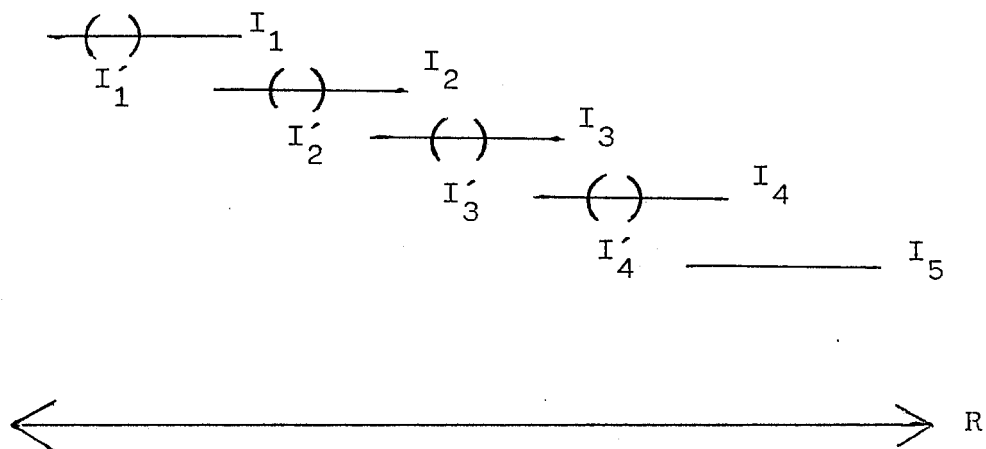
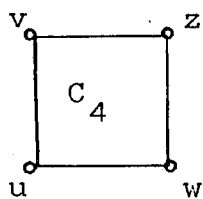


Figura 6.1.  $f(v)=I_2$ ,  $f(u)=I_3$ ,  $f(w)=I_4$ ,  $f(z)= I_1 \cup I_5$

$$X_v = \{ (x_{v,1}, x_{v,2}, \dots, x_{v,t}) \in \mathbb{R}^t \mid a_{v,1} \leq x_{v,1} \leq b_{v,1}, \dots, \\ a_{v,t} \leq x_{v,t} \leq b_{v,t} \},$$

e dois vértices  $v$  e  $w$  se interceptam se e somente se

$$[a_{v,i}, b_{v,i}] \cap [a_{w,i}, b_{w,i}] \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, t\}.$$

Dessa forma, os grafos de intervalo são precisamente os grafos com boxicity no máximo 1.

Passaremos agora a apresentar alguns resultados sobre  $i(G)$ .

**Teorema 6.3** ( Griggs e West [1980] ) Seja  $G$  grafo não direcionado com  $n$  vértices e  $e > 0$  arestas tal que  $G$  não contém  $K_3$  como subgrafo induzido. Então,  $i(G) \geq \lceil (e+1)/n \rceil$ .

**Demonstração.** Suponhamos uma representação  $I$  de  $G$  na qual não há mais do que  $i(G)$  intervalos por vértice. Como  $G$  não contém  $K_3$ , não pode haver em  $I$  três intervalos que contenham o mesmo ponto. Para cada aresta  $\overline{vw} \in EG$ , existe uma extensão de pontos na reta onde um  $v$ -intervalo intercepta um  $w$ -intervalo; a extremidade direita desta extensão coincide com a extremidade de um dos intervalos. Logo, há no mínimo  $e+1$  intervalos em  $I$ . Isto é, algum vértice deve ser representado por no máximo  $\lceil (e+1)/n \rceil$  intervalos. ■

**Corolário 6.4**  $i(K_{m,n}) \geq \lceil (mn + 1) / (m + n) \rceil$  ■

Trotter e Harary [1979] construíram, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , representações de  $K_{m,n}$  que utilizam no máximo  $\lceil (mn + 1) / (m + n) \rceil$  intervalos por vértice, provando que o limite inferior do Corolário 6.4 é precisamente o número de intervalo dos grafos bipartites completos:

**Teorema 6.5** ( Trotter e Harary [1979] )

$$i(K_{m,n}) = \lceil (mn + 1) / (m + n) \rceil \quad \blacksquare$$

O próximo teorema estabelece um limite superior ( o melhor possível ) para  $i(G)$  em função do grau máximo  $d$  entre os vértices de  $G$  ( o limite inferior em função de  $d$  é 1 para todo  $d \geq 0$ , pois  $i(K_{d+1})=1$ ).

**Teorema 6.6** ( Griggs e West [1980] ) Se  $G$  é um grafo não direcionado com  $d = \max \{ \delta(v) \mid v \in VG \}$ , então  $i(G) \leq \lceil (d+1)/2 \rceil$ .

**Demonstração.** Dado um grafo não direcionado  $G$  qualquer, devemos exibir uma representação de  $G$  que associe no máximo  $\lceil (d+1)/2 \rceil$  intervalos a cada vértice. Faremos isso por indução sobre  $n = |VG|$ , através da seguinte hipótese de indução: para qualquer  $v \in VG$ ,

"existe uma representação de  $G$  na qual o intervalo extremo esquerdo é um  $v$ -intervalo e, para cada  $w \in VG$ , existem no máximo  $\lceil (\delta(w)+1) / 2 \rceil$   $w$ -intervalos." (\*)

A hipótese vale trivialmente para  $n = 1$ . Suponhamos que  $n > 1$  e que (\*) vale para grafos com menos do que  $n$  vértices. Seja  $v \in VG$ .

Construiremos uma representação que satisfaz (\*).

Inicialmente, suponhamos que existe em  $G$  um ciclo  $C_1 = vw_1 \dots w_k v$  que passe por  $v$  ( $k \geq 2$ ). A Figura 6.2 exibe uma representação  $I_1$  de intervalos das arestas de  $C_1$ .

Removamos as arestas de  $C_1$  de  $G$  (sem remover os vértices), e suponhamos que ainda exista no grafo remanescente um circuito  $C_2$  que passe por  $v$ . Construamos uma representação  $I_2$  de  $C_2$  utilizando o intervalo extremo direito de  $I_1$  como intervalo extremo esquerdo de  $I_2$ .

Removamos as arestas de  $C_2$  de  $G$ , e continuemos repetindo o processo até que mais nenhum circuito passe por  $v$ . Seja  $G'$  o grafo resultante das sucessivas remoções.

No caso de  $C_1$  não existir, definamos  $I_1$  como um único  $v$ -intervalo. Dessa forma, em geral, se removemos  $m$  circuitos que passam por  $v$ , o número de  $v$ -intervalos utilizados na representação  $I$  constituída por  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m$  é  $m+1$ , sendo que os intervalos extremos de  $I_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) são  $v$ -intervalos. Na remoção dos circuitos, o grau de cada vértice  $w \neq v$  é reduzido em duas vezes o número de  $w$ -intervalos utilizados na representação  $I$ .

Se após a remoção  $v$  não pertence a mais nenhuma aresta, aplicamos (\*) a  $G'$  a fim de obter uma representação que satisfaça o limite de (\*) para cada vértice. Caso contrário, suponhamos que existem  $p > 0$  vértices  $v_1, v_2, \dots, v_p$  adjacentes a  $v$  em  $G'$ . É claro que os vértices  $v_i$  pertencem a componentes distintas de  $G' - \{v\}$ , já que em  $G'$  nenhum circuito passa por  $v$ . Seja  $G_i$  a componente de  $G' - \{v\}$  que contém  $v_i$ . Por indução existe uma representação  $J_i$  de  $G_i$  na qual  $v_i$  é extremo esquerdo e o número de intervalos para cada vértice é limitado de acordo com (\*).

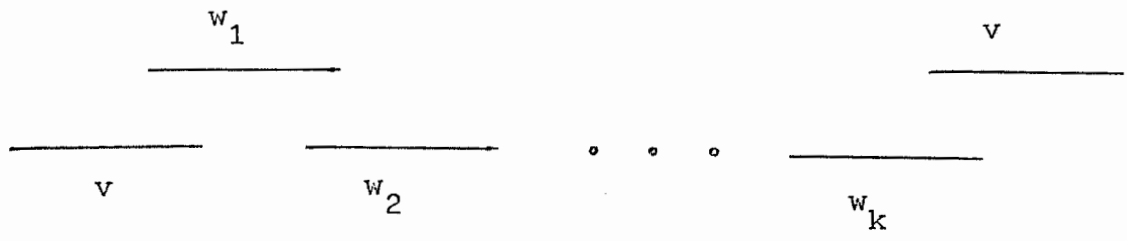


Figura 6.2



Coloquemos  $J_1$  à direita de  $I$ , de modo que o extremo esquerdo de  $J_1$  intercepte o extremo direito de  $I$ . Isto representa a aresta  $\overline{v_1}$  e todas as arestas em  $G_1$ . Para  $p > 1$ , agreguemos  $\lceil p/2 \rceil$   $v$ -intervalos adicionais à direita dos intervalos já utilizados. Revertamos a ordem das representações  $J_2, J_4, J_6, \dots$  de modo que haja intervalos para  $v_2, v_4, v_6, \dots$  que sejam extremos direitos das representações a que pertencem. Insiram os  $J_i$  de modo que  $J_2$  esteja à esquerda do novo  $v$ -intervalo,  $I_3$  à sua direita,  $I_4$  à esquerda do segundo novo  $v$ -intervalo, e assim por diante. O  $v_i$ -intervalo extremo em  $J_i$  deve interceptar um  $v$ -intervalo. A Figura 6.3 mostra a construção.

Para finalizar a construção, representemos quaisquer arestas restantes, por indução, com intervalos à esquerda de todos os outros. Dessa forma, todas as arestas de  $G$  ficam representadas. O intervalo extremo esquerdo é um  $v$ -intervalo, e no máximo  $\lceil (d(w)+1) / 2 \rceil$  intervalos são utilizados para representar qualquer  $w \in VG$ . Isto é, (\*) está satisfeita, o que encerra a demonstração do Teorema 6.6. ■

Para mostrar que o limite do Teorema 6.6 é o melhor possível, basta exibir um grafo  $G$  para o qual  $i(G) = \lceil (d+1) / 2 \rceil$  :

**Corolário 6.7** Para qualquer grafo regular  $G$  não triangularizado com  $d = \max \{ \delta(v) \mid v \in VG \}$  e  $n = |VG|$ ,  $i(G) = \lceil (d+1) / 2 \rceil$ .

**Demonstração.** Imediata:  $G$  possui exatamente  $nd/2$  arestas, e, pelo Teorema 6.3,

$$i(G) \geq \lceil (nd/2 + 1) / n \rceil = \lceil (d+1) / 2 \rceil \quad \blacksquare$$

Assim como procuramos encontrar um limite superior para  $i(G)$

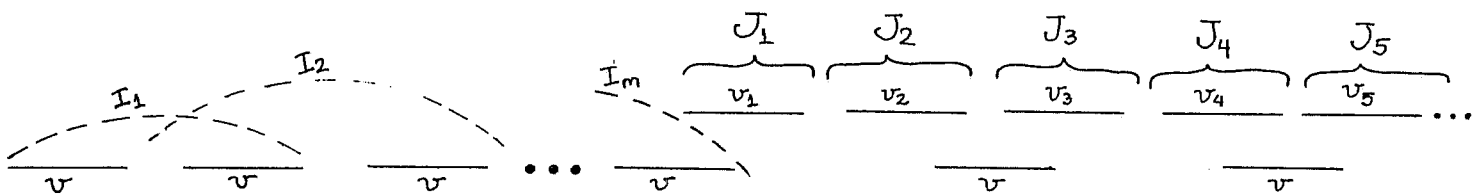


Figura 6.3

em função do grau máximo  $d$ , podemos estudar outros problemas extremos, tais como relacionar  $i(G)$  com o número de arestas, o número de vértices e o número de estabilidade. É o que faremos nos teoremas a seguir.

**Teorema 6.8** ( Griggs e West [1980] ) Se  $|EG| = e$ , então  $i(G) \leq \lceil e^{1/2} \rceil$ .

**Demonstração.** Suponhamos que  $G$  possua  $e > 1$  arestas e que o resultado vale para qualquer grafo com menos do que  $e$  arestas.

Seja  $k = \lceil e^{1/2} \rceil$ .

Se o grau máximo  $d$  de  $G$  é estritamente menor do que  $2k$ , então, pelo Teorema 6.6,  $i(G) \leq k$ . Suponhamos então que  $d \geq 2k$ , e seja  $v \in VG$  tal que  $\delta(v) = d$ . Representemos todas as arestas que contêm  $v$  por um  $v$ -intervalo que intercepta um  $w$ -intervalo para cada vizinho  $w$  de  $v$ .

Esta construção exige no máximo um intervalo para cada vértice de  $G$ . As  $e - d < (k - 1)^2$  arestas remanescentes de  $G$  podem ser representadas por no máximo  $k - 1$  intervalos por vértice, por indução. ■

Na verdade, o limite superior de  $\lceil e^{1/2} \rceil$  não é o melhor possível ( para  $e = 9$ , pode-se mostrar que  $i(G) \leq 2$  ). Conjectura-se que  $1 + \lfloor e^{1/2} / 2 \rfloor$  é o melhor resultado possível.

**Teorema 6.9** ( Griggs [1979] ) Se  $|VG| = n$ , então  $i(G) \leq \lceil (n+1)/4 \rceil$ , e este limite é o melhor possível.

**Demonstração.** Inicialmente deixemos assentado o fato de que o limite  $l = \lceil (n+1)/4 \rceil$  é alcançado pelos grafos  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ , para todo  $n$ ;

isto é, 1 é de fato o melhor limite possível.

A demonstração que Griggs apresenta de que 1 é um limite superior é dividida em dois casos. O primeiro considera grafos bipartites, e é de simples verificação. Já o segundo, que considera grafos que contém circuitos ímpares, é longo e trabalhoso, e por isso preferiremos fornecer apenas um esboço de sua demonstração.

**Caso 1.**  $G$  é bipartite ( não contém circuitos de comprimento ímpar )

A demonstração, nesse caso, é consequência do Teorema 6.5. Podemos adicionar arestas a  $G$  para construir um grafo bipartite completo  $H$ ; supondo que  $VH$  é particionado em conjuntos de tamanhos  $j$  e  $n-j$ , pelo Teorema 6.5,

$$i(CH) = \left\lceil \frac{j(n-j)+1}{j+(n-j)} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\lfloor n/2 \rfloor \lfloor n/2 \rfloor + 1}{n} \right\rceil,$$

donde  $i(CH) \leq \left\lceil \frac{(n+1)}{4} \right\rceil$ .

Basta pois provar que  $i(G) \leq i(CH)$ . Não é difícil mostrar que, dada uma representação  $I$  de  $H$  que utiliza no máximo  $i(CH)$  intervalos por vértice, podemos obter uma representação de  $G$  que também utiliza  $i(CH)$  intervalos por vértice removendo ou deslocando intervalos de  $I$  que representam arestas de  $H$  não pertencentes a  $G$ . É o que passamos a fazer agora.

Suponhamos  $e = \overline{vw} \in EH$  tal que  $e \notin EG$ . Podemos representar esta aresta por intervalos de duas maneiras:

- (a) um  $v$ -intervalo contido em um  $w$ -intervalo ( ou o contrário );
- (b) um  $v$ -intervalo que intercepta um  $w$ -intervalo, sem que nenhum dos dois esteja contido no outro.

Sempre que (a) ocorrer, basta remover o intervalo de menor

comprimento; sempre que (b) ocorrer, basta reduzir o comprimento dos intervalos para eliminar as intersecções.

Como  $H$  não contém triângulos, não há três intervalos que contenham o mesmo ponto, de modo que estas operações não afetam as representações de outras arestas.

Fazendo isto para toda aresta  $e \in EH$  tal que  $e \notin EG$ , obteremos uma representação de  $G$  que usa no máximo  $i(CH)$  intervalos por vértice. Isto é,  $i(G) \leq i(CH)$ .

**Caso 2.**  $G$  contém circuitos de comprimento ímpar

A demonstração, nesse caso, é por indução sobre  $n$ . O teorema vale para  $n \leq 3$ , e portanto podemos supor que  $|VG| > 3$  e que o teorema vale para qualquer grafo com menos do que  $n$  vértices.

Podemos supor também que  $n$  é da forma  $4k-1$  ( $k \geq 2$ ). Se  $n = 4k-2$ ,  $4k-3$  ou  $4k-4$ , podemos adicionar, respectivamente, 1, 2 ou 3 vértices isolados a  $G$ , criando um grafo  $G^*$  com  $4k-1$  vértices tal que  $i(G) = i(G^*)$ . Utilizando a indução sobre  $n$ , demonstra-se que  $i(G^*) \leq k$ , donde  $i(G) \leq k = \lceil (n+1)/4 \rceil$ ; isto é, a argumentação para  $n = 4k-1$  é suficiente para provar o Teorema 6.9, e requer somente que o resultado valha para grafos com  $4k-5$  ou menos vértices.

A argumentação é exposta a seguir. Seja  $S \subseteq VG$  um conjunto com pelo menos 4 vértices e sejam  $S' = VG - S$  e  $G' = G_{S'}$ . Seja  $m$  tal que podemos representar por intersecções de intervalos todas as arestas em  $G$  que contêm pelo menos um vértice em  $S$ , usando no máximo  $k$   $v$ -intervalos para cada vértice  $v \in S$  e  $m$   $v$ -intervalos para cada vértice  $v \in S'$ . As arestas de  $G'$  podem ser representadas utilizando  $i(G')$

v-intervalos adicionais para cada  $v \in S'$ . Estes intervalos em conjunto representam todas as arestas de  $G$ . Logo,

$$i(G) \leq \max \{ k, m + i(G') \}.$$

A conclusão desejada,  $i(G) \leq k$ , segue se  $m \leq |S|/4$  : por indução sobre  $n$ ,

$$i(G') \leq \lceil |S'|/4 \rceil = \lceil (4k-1-|S|)/4 \rceil \leq k-m,$$

supondo que  $|S| \geq 4m$ .

Feita esta consideração, a demonstração é dividida em casos onde são selecionados conjuntos  $S$  apropriados e são representadas de maneira eficiente as arestas que possuem um vértice em  $S$ , de modo que  $m \leq |S|/4$ . Estes casos levam em consideração o comprimento do menor circuito ímpar em  $G$ :

Caso 2.1.  $j \geq 9$ ,  $|S| = j$ ,  $m = 2$ ;

Caso 2.2.  $j = 7$ ,  $|S| = 8$ ,  $m = 2$ ;

Caso 2.3.  $j = 5$ ,  $|S| = 4$ ,  $m = 1$ ;

Caso 2.4.  $j = 3$ ,  $|S| = 4$ ,  $m = 1$ .

Apresentaremos apenas a demonstração do Caso 2.1. À medida que o valor de  $j$  diminui, os casos vão se tornando progressivamente mais intrincados.

Caso 2.1.  $G$  contém um circuito ímpar  $C$  com  $j \geq 9$  vértices e nenhum circuito com menos do que 9 vértices.

Escrevamos  $C = v_1 v_2 \dots v_j v_1$  e representemos o ciclo  $C$  de acordo com a Figura 6.4.

Não existem cordas em  $C$  porque  $G$  não contém circuitos ímpares menores. Representemos cada aresta  $\overline{v_i v}$   $\in EG$  ( com  $v \notin C$  ) por um

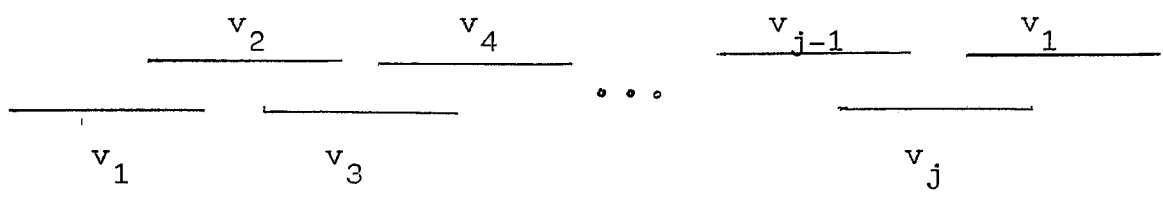


Figura 6.4

$v$ -intervalo  $J$  contido em algum  $v_i$ -intervalo tal que  $J$  não intercepta nenhum outro intervalo. Nenhum vértice  $v \notin C$  é adjacente a mais do que dois vértices em  $C$ , caso contrário  $G$  conteria um circuito ímpar de comprimento menor do que o de  $C$ . Dessa forma, representamos todas as arestas que possuem um vértice em  $S = C$  utilizando no máximo dois intervalos por vértice, com  $m = 2$ ,  $k \geq 2$  e  $|S| = j \geq 8 = 4m$ . ■

Para a demonstração do Teorema 6.10 necessitamos de algumas definições. Dada uma  $t$ -representação  $\mathcal{I}$  de um grafo  $G$ , uma clique  $K$  em  $G$  é chamada exposta se existe um intervalo aberto  $J$  sobre a reta real que está contido simultaneamente em todos os intervalos que representam os vértices de  $K$  e não intercepta nenhum outro intervalo de  $\mathcal{I}$ ;  $J$  é chamado a porção exposta de  $K$ . Uma clique  $K$  é chamada super-exposta se todos os seus subconjuntos são expostos.

**Teorema 6.10** (Scheinerman [1988]) Se  $G$  é um grafo triangularizado com  $\omega(G) = m$ , então  $i(G) \leq (1 + O(1)) m / \log m$ .

**Demonstração.** Sejam  $k = \log m - 2 \log(\log m)$  e  $t = \lceil m/k \rceil + 2^k$ .

Como  $2^k \leq m / \log^2 m$ ,  $t = (1 + O(1)) m / \log m$ .

A demonstração é feita sobre  $n = |VG|$ , utilizando a seguinte afirmação:

"Todo grafo triangularizado  $G$  com  $\omega(G) \leq m$  tem uma  $t$ -representação com a propriedade de que toda clique maximal de  $G$  é a união de  $\lceil m/k \rceil$  conjuntos super-expostos de tamanho máximo  $k$ ." (\*\*)

A afirmação é óbvia se  $n = 1$ . Suponhamos que ela vale para



todos os grafos triangularizados com menos do que  $n$  vértices.

Seja  $G$  grafo triangularizado com  $n$  vértices tal que  $\omega(G) \leq m$ .  
 Seja  $v \in VG$  vértice simplicial. Sejam  $G' = G - v$  e  $S = \text{Adj}(v)$ .  $S$  está  
 contido em alguma clique maximal  $K$  de  $G'$ .

Fixemos uma  $t$ -representação  $f$  de  $G$  que satisfaça (\*\*).

Por indução,  $K$  pode ser escrita como a união de subconjuntos  
 super-expostos  $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r$  tal que  $r = \lceil m/k \rceil$  e  $|K_i| \leq k$ . Para  
 $i = 1, \dots, r$ , seja  $K'_i = K_i \cup S$ . Como  $|S| \leq m$ , podemos supor que  $|K'_i| < k$ .

Definamos um  $v$ -intervalo contido na porção exposta de  $K'_i$  para  
 cada  $i$  entre 1 e  $r$ . Seja  $\hat{K}'_i = K'_i \cup \{v\}$ . Pela hipótese de indução, todas  
 as cliques maximais de  $G$ , a menos de  $S \cup \{v\}$ , satisfazem (\*\*). Sabemos  
 que  $S \cup \{v\} = \hat{K}'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_r$ , onde  $K'_2, \dots, K'_r$  são super-expostas.  
 Basta agora tornar  $\hat{K}'_1$  super-exposta definindo um  $v$ -intervalo contido em  
 cada uma das (no máximo)  $2^k$  porções expostas dos subconjuntos de  $K'_1$ .  
 Notemos que a representação expandida satisfaz (\*\*). ■

Scheinerman mostra também que o limite do Teorema 6.10 é o  
 melhor possível construindo um grafo  $G$  onde  $VG$  é a união de dois  
 conjuntos  $X$  e  $Y$  tais que

$$X = \{1, \dots, m\} \text{ e}$$

$$Y = \{Y_A^j \mid A \subseteq X \text{ e } 1 \leq j \leq 2m^2+1\},$$

e  $EG$  assim se define: os vértices de  $X$  formam uma clique, os vértices  
 de  $Y$  formam um conjunto estável e existe uma aresta entre  $i \in X$  e  
 $Y_A^j \in Y$  se e somente se  $i \in A$ . Isto é,  $G$  é um grafo split tal que  $i(G) \geq$   
 $(1 - o(1)) m / \log m$ .

Entre outros resultados obtidos para  $i(G)$ , Scheinerman e

West [1983] mostraram que se  $G$  é um grafo planar, então  $i(G) \leq 3$ ; Trotter e Harary [1979], por sua vez, mostraram que se  $G$  é uma árvore, então  $i(G) = 1$  se e somente se  $G$  é um "caterpillar"; um "caterpillar" é uma árvore tal que a remoção de seus vértices de grau um resulta num caminho.

Uma questão muito interessante relacionada com o número de intervalo é fornecer uma caracterização por subgrafos proibidos da coleção  $\mathcal{I}_k = \{ G \mid i(G) \leq k \}$ , para  $k \geq 0$ . Em outras palavras, trata-se de listar os conjuntos  $\mathcal{E}_{k+1} = \{ G \mid i(G) = k+1 \text{ mas } i(H) \leq k \text{ para todo subgrafo induzido próprio } H \text{ de } G \}$ ; isto é, um grafo  $G$  pertence à coleção  $\mathcal{I}_k$  se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum dos grafos pertencentes ao conjunto  $\mathcal{E}_{k+1}$ .

A coleção  $\mathcal{I}_0$  é constituída pelos grafos sem arestas, e o conjunto  $\mathcal{E}_1$  é constituído por um grafo com apenas dois vértices conectados por uma aresta.

A coleção  $\mathcal{I}_1$  é a classe dos grafos de intervalo; o Teorema 2.2 lista os grafos do conjunto  $\mathcal{E}_2$ .

A coleção  $\mathcal{I}_2$  é constituída pelos chamados "grafos de intervalo duplo", grafos de intersecção ( veja-se seção 6.4 adiante ) de famílias de conjuntos que são a união de dois intervalos da reta real. O resultado do Teorema 6.5 mostra que  $K_{2n,2n} \in \mathcal{I}_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ , e que  $K_{2n-1,2n+2} \in \mathcal{I}_{n+1}$ , para todo  $n \geq 2$ . Trotter e Harary fazem notar que  $\mathcal{E}_3$  deve incluir necessariamente  $K_{4,4}$  e  $K_{3,6}$ .

## 6.2. O "INTERVAL COUNT"

Outra linha de pesquisa muito interessante em grafos de intervalo consiste em procurar minimizar o número de comprimentos diferentes de intervalo em modelos de intervalo.

Seja  $k_M$  o número de comprimentos diferentes de intervalo utilizados em um modelo de intervalo  $M$ . Dado  $G$  grafo de intervalo, definimos o "interval count"  $c(G)$  como

$$c(G) = \min \{ k_M \mid M \text{ é um modelo de intervalo de } G \}.$$

A questão a respeito do número  $c(G)$  é procurar caracterizar as famílias  $\mathcal{F}_k = \{ G \mid c(G) \leq k \}$  de grafos de intervalo.

Pelo Teorema 3.12,  $\mathcal{F}_1$  é a família dos grafos de indiferença. Sabemos também que  $K_{1,3} \in \mathcal{F}_2$ . Para  $k \geq 2$ , o problema permanece sem solução. Leibowitz [1978] identifica três famílias de grafos de intervalo em  $\mathcal{F}_2$ : árvores que são grafos de intervalo, grafos de intervalo com um vértice cuja remoção produz um grafo de indiferença e os chamados "threshold graphs", uma sub-classe dos grafos perfeitos constituída por grafos que admitem uma certa técnica de distinção entre conjuntos estáveis e não-estáveis de vértices, que envolve associação de "pesos" aos vértices. Leibowitz também apresenta grafos de "interval count"  $k$  para todo inteiro positivo  $k$ .

Fishburn [1971] mostra, de maneira indutiva com os dois Teoremas a seguir, que qualquer tentativa de caracterizar as famílias  $\mathcal{F}_k$  por subgrafos proibidos esbarra numa dificuldade de relevo:

**Teorema 6.11** Suponhamos que  $\mathcal{F}_0$  seja um conjunto de grafos de intervalo tal que, para todo grafo de intervalo  $G$ ,  $G \in \mathcal{F}_2$  se e somente se nenhum subgrafo induzido de  $G$  é isomorfo a algum grafo em  $\mathcal{F}_0$ . Então,  $\mathcal{F}_0$  é

infinito.

**Teorema 6.12** Seja  $n \geq 2$  e suponhamos que não existe um conjunto finito  $\mathcal{F}_0$  de grafos de intervalo tal que um grafo de intervalo  $G$  está em  $\mathcal{F}_n$  se e somente se nenhum subgrafo induzido de  $G$  é isomorfo a algum grafo em  $\mathcal{F}_0$ . Então, o mesmo resultado é válido para  $\mathcal{F}_{n+1}$  no lugar de  $\mathcal{F}_n$ .

A demonstração da base da indução (Teorema 6.11) que Fishburn apresenta é baseada na representação de ordens de intervalo por modelos de intervalo, conceitualmente um pouco diferente da representação para grafos. Apresentaremos apenas a demonstração do passo da indução ( Teorema 6.12 ).

#### Demonstração do Teorema 6.12

Suponha que a hipótese do Teorema 6.12 vale para  $n$ . Então, para todo inteiro positivo  $k$ , existe um grafo de intervalo  $G$  com  $|VG| > k$  que possui a propriedade de não pertencer a  $\mathcal{F}_n$  ao mesmo tempo que todos os seus subgrafos induzidos próprios pertencem a  $\mathcal{F}_n$ ; isto é, por hipótese, existem infinitos grafos com esta propriedade. E é claro que tais grafos pertencem a  $\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$ ; em particular,  $G \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$ .

Seja  $G'$  um grafo constituído por 3 cópias de  $G$  mais um vértice  $v$  que se conecta a todos os vértices das cópias ( veja-se a Figura 6.5 ). É fácil ver que qualquer representação de  $G'$  requer no mínimo  $n+2$  comprimentos diferentes de intervalo, já que  $G \in \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n$ .

Seja  $G''$  um subgrafo minimal de  $G'$  em  $\mathcal{F}_{n+2} - \mathcal{F}_{n+1}$  tal que todo subgrafo induzido próprio de  $G''$  pertença a  $\mathcal{F}_{n+1}$ . Então  $G''$  contém  $v$  e

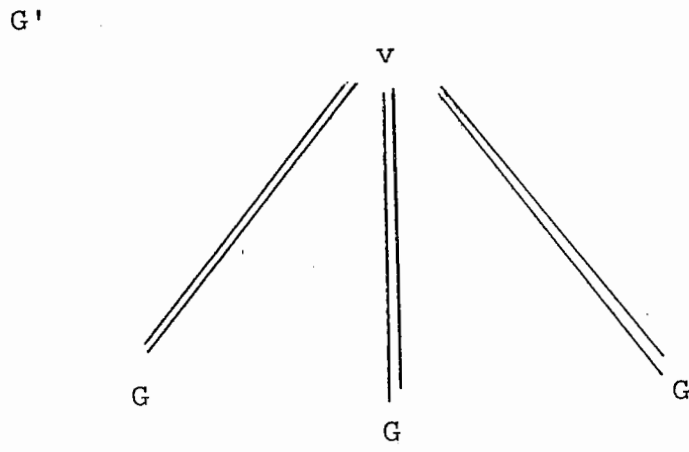


Figura 6.5

pelo menos uma das cópias de  $G$ , caso contrário  $G'$  estaria em  $\mathcal{F}_{n+1}$ .

Além do mais,  $|VG| \geq \frac{1}{3}(3k) + 1 = k + 1$ .

A conclusão da demonstração é que para qualquer inteiro positivo  $k$ , existe um grafo de intervalo  $G$  com mais do que  $k$  vértices tal que  $G \notin \mathcal{F}_{n+1}$  e todo subgrafo induzido próprio de  $G$  pertence a  $\mathcal{F}_{n+1}$ . ■

### 6.3. HIPERGRAFOS DE INTERVALO

Uma extensão do conceito de grafo é o conceito de hipergrafo.

Um hipergrafo  $H = (X, \mathcal{E})$  é composto de um conjunto  $X$  de vértices e uma família  $\mathcal{E}$  qualquer de subconjuntos de  $X$ . Um grafo é um hipergrafo onde a cardinalidade de todos os conjuntos em  $\mathcal{E}$  é (menor ou ) igual a dois. Utilizamos a notação  $E \in \mathcal{E}$  ou  $E \in H$  para representar que o conjunto  $E$  ocorre na família  $\mathcal{E}$ .

Um caminho num hipergrafo é uma seqüência  $x_1 E_1 \dots x_n E_n x_{n+1}$  que alterna vértices e arestas e satisfaz

$$x_i \in E_i \text{ e } x_{i+1} \in E_i \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

$$E_i \neq E_j \text{ para } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$x_i \neq x_j \text{ para } 1 \leq i < j \leq n,$$

$$x_{n+1} \neq x_i \text{ para } 2 \leq i \leq n.$$

O caminho se torna um ciclo quando  $x_{n+1} = x_1$ .

A imagem  $f(H)$  de um hipergrafo  $H = (X, \mathcal{E})$  é um hipergrafo sobre  $f(X)$  cujas arestas são  $f(E)$  para  $E \in \mathcal{E}$  ( $f$  é uma função qualquer de  $X$  em um conjunto  $Y$ ).

Uma contração de  $H = (X, \mathcal{E})$  por  $E \subseteq X$  é uma função  $c: X \rightarrow (X-E) \cup \{e\}$ , onde  $e$  é um novo elemento. A função  $c$  é assim definida:

$$c(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin E; \\ e & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

A imagem  $c(H)$  é também chamada hipergrafo contraído de  $H$  por  $E$  ou contração de  $H$  por  $E$ , e é denotada por  $E|H$ .

Sejam  $H=(X, \mathcal{E})$  e  $H'=(X', \mathcal{E}')$  hipergrafos. Se  $X' \subseteq X$  e  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ , dizemos que  $H'$  é um hipergrafo parcial de  $H$ . Se, além disso, toda aresta  $E \in H$  que conecta  $x', y' \in X'$  também pertence a  $H'$ , dizemos que  $H'$  é sub-hipergrafo induzido de  $H$ .

O grafo representativo ou grafo de intersecção de um hipergrafo  $H = ( \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, \langle E_1, E_2, \dots, E_m \rangle )$  é o grafo denotado por  $L(H)$  cujos vértices são os conjuntos  $E_i$  e dois vértices  $E_i$  e  $E_j$  são adjacentes se e somente se  $E_i$  e  $E_j$  têm um elemento em comum ( sobre os grafos de intersecção, veja-se a seção específica 6.4 mais adiante ).

Quando estamos tratando de uma classe  $\mathcal{E}$  qualquer de hipergrafos, qualquer hipergrafo isomorfo a um membro de  $\mathcal{E}$  será chamado de  $\mathcal{E}$ -hipergrafo. Os grafos representativos dos  $\mathcal{E}$ -hipergrafos serão os  $\mathcal{E}$ -grafos.

Os Helly-hipergrafos, nos quais toda família finita de arestas que não contém elementos comuns a todas contém duas arestas disjuntas, têm um papel relevante no domínio dos grafos representativos. Todo grafo  $G$  é representativo de um Helly-hipergrafo: o hipergrafo  $C^*(G)$  assim definido:

- os vértices de  $C^*(G)$  são as cliques maximais de  $G$ ;

- as arestas de  $C^*(G)$  são os conjuntos de cliques maximais de  $G$  que contém um dado vértice de  $G$ .

Uma retração de um hipergrafo  $H = (X, \mathcal{E})$  é uma função  $r: X \rightarrow X$  que satisfaz a seguinte propriedade:  $r(E) \subseteq E, \forall E \in \mathcal{E}$ .

Uma  $R$ -classe de hipergrafos é uma classe  $\mathcal{E}$  que satisfaz os seguintes axiomas:

(A1) Todo  $\mathcal{E}$ -hipergrafo é um Helly-hipergrafo;

(A2) Toda retração de um  $\mathcal{E}$ -hipergrafo é um  $\mathcal{E}$ -hipergrafo.

Um exemplo de  $R$ -classe é a classe dos hipergrafos de intervalo. A definição dessa classe e de outras é motivada pelo Lema 6.13, de demonstração simples e que omitiremos.

**Lema 6.13** ( Duchet [1979] ) Seja  $\mathcal{E}$  uma  $R$ -classe. Um grafo  $G$  é um  $\mathcal{E}$ -grafo se e somente se  $C^*(G)$  é um  $\mathcal{E}$ -hipergrafo.

Um hipergrafo de intervalo  $H$  é um hipergrafo isomorfo a uma família (finita) de intervalos sobre a reta. Em outras palavras, existe uma ordem linear sobre os vértices de  $H$  tal que toda aresta de  $H$  é um intervalo para esta ordem. Notemos que, embora todo grafo seja um hipergrafo, nem todo grafo de intervalo, pela definição que acabamos de fornecer, é um hipergrafo de intervalo; os grafos completos  $K_n$ , para  $n \geq 4$ , por exemplo, são grafos de intervalo mas não hipergrafos de intervalo.

Uma primeira caracterização dos hipergrafos de intervalo é fornecida no teorema a seguir.

**Teorema 6.14** ( Duchet [1979] ) Um hipergrafo  $H = (X, \mathcal{E})$  é um hipergrafo



de intervalo se e somente se a seguinte condição é satisfeita:

"dados três vértices quaisquer de  $H$ , um deles está situado entre os outros dois" (\*\*\*) .

Num hipergrafo, dizemos que um vértice  $a$  "está situado entre" os vértices  $b$  e  $c$  quando todo caminho que une  $b$  e  $c$  contém uma aresta que contém  $a$ .

Para a demonstração do Teorema 6.14 vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração omitiremos:

**Lema 6.15** Seja  $H$  um hipergrafo que satisfaz (\*\*\*) e sejam  $E, F$  duas arestas de  $H$  que se interceptam. Então, se adicionamos  $E \cup F$  (ou  $E \cap F$ ) como uma nova aresta de  $H$ , o hipergrafo resultante também satisfaz (\*\*\*) . Se  $E - F \neq \emptyset$  e  $F - E \neq \emptyset$ , a mesma propriedade vale para  $E - F$  (  $F - E$  ) .

#### Demonstração do Teorema 6.14

A demonstração da necessidade da condição (\*\*\*) para que um dado hipergrafo seja de intervalo é de demonstração simples. Passemos à demonstração da suficiência.

Seja  $H$  um hipergrafo que satisfaz (\*\*\*) .

Entre todos os hipergrafos  $(X, \mathcal{F})$  que satisfazem (\*\*\*) e contêm  $H$  como hipergrafo parcial, escolhamos  $H'$  com um número máximo de arestas. Seja  $T$  o hipergrafo cujas arestas são as arestas maximais de  $H'$  ( com relação à inclusão ) com pelo menos dois vértices. Mostraremos que  $T$  é um caminho e que  $H$  é uma família de intervalos deste caminho.

Seja  $E$  uma aresta de  $H'$ ,  $|E| \geq 2$ , e sejam  $a, b \in E$ .

Se  $\langle a, b \rangle \in H'$ , a maximalidade de  $H'$  implica que existem, em  $H'$  acrescido de  $\langle a, b \rangle$ , três vértices  $x, y, z$  e três caminhos  $x E_1 \dots E_p y$ ,  $y F_1 \dots F_q z$ ,  $z G_1 \dots G_r x$  que satisfazem

$$z \notin \bigcup_{i=1}^p E_i, \quad x \notin \bigcup_{j=1}^q F_j, \quad z \notin \bigcup_{k=1}^r G_k.$$

É claro que  $\langle a, b \rangle \in \langle E_1, \dots, E_p, F_1, \dots, F_q, G_1, \dots, G_r \rangle$ .

Além do mais, podemos supor que:

"A propriedade (\*\*\*) também vale quando substituimos qualquer ocorrência de  $\langle a, b \rangle$  na seqüência  $E_i \dots F_j \dots G_k$  por qualquer aresta de  $H'$  que contenha simultaneamente  $a$  e  $b$ ".

Portanto, substituindo  $\langle a, b \rangle$  por  $E$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que  $z$  está situado entre  $x$  e  $y$ , o que implica que  $a, b, z$  são distintos,  $\langle a, b \rangle = E_j$  para algum  $j$  e  $z \in E$ . Pelo Lema 6.15, existem arestas  $A$  e  $B$  de  $H'$  tais que

$a \in A$ ,  $z \notin A$  e  $A$  contém, por exemplo,  $x$ ;

$b \in B$ ,  $z \notin B$  e  $B$  contém  $y$ .

Além do mais,  $b \notin A$ , caso contrário  $A$  poderia substituir  $E_j = \langle a, b \rangle$  no caminho que une  $x$  e  $y$ , o que contradiria (\*\*\*). Da mesma forma,  $a \notin B$ .

Logo,  $E-B$  e  $E-A$  são arestas de  $H'$  que conectam  $a$  e  $b$ .

Concluimos a demonstração com as seguintes observações:

- (a) Se  $E$  é uma aresta de  $T$ ,  $E = \langle e, f \rangle$ ; isto é,  $T$  é um grafo;
- (b) Quaisquer dois vértices de uma aresta  $E$  em  $H'$  estão ligados por um caminho em  $H'$  cujas arestas estão incluídas em  $E$ .

Sendo  $X$  uma aresta de  $H'$ ,  $T$  é grafo conexo. Aplicando (\*\*\*) a  $T$ , podemos concluir que  $T$  é um caminho. Por indução sobre  $|E|$ , toda aresta de  $H'$  é um suconjunto conexo de  $T$ . ■

Existe também uma caracterização da classe dos hipergrafos de intervalo por sub-hipergrafos induzidos proibidos:

**Teorema 6.16** ( Tucker [1972] )  $H$  é um hipergrafo de intervalo se e somente se não contém como sub-hipergrafo induzido nenhum dentre os hipergrafos da Figura 6.6.

**Demonstração.** Os hipergrafos da Figura 6.6 não são hipergrafos de intervalo.

Por outro lado, suponhamos que  $H = (X, \mathcal{H})$  não é um hipergrafo de intervalo, e que todo sub-hipergrafo induzido próprio de  $H$  seja um hipergrafo de intervalo.

Seja  $x \in X$ . Como  $H$  não satisfaz (\*\*\*) , existem dois vértices  $y$  e  $z$  em  $X-x$  e três caminhos  $x E_1 \dots E_p y$ ,  $x F_1 \dots F_q z$ ,  $y G_1 \dots G_r z$  tais que

$$x \in \bigcup_{i=1}^r G_i, \quad y \in \bigcup_{j=1}^q F_j, \quad z \in \bigcup_{k=1}^p E_k.$$

Escolhamos  $p$  e  $q$  mínimos dentre todas as possibilidades para  $y, z$  e caminhos que conectam  $x, y$  e  $z$  ( $x$  fixo ).

Concluimos a demonstração com as seguintes observações:

- (a) Se  $E_1 \cap F_1 = \emptyset$ ,  $H$  contém algum ciclo  $C_n$  ;
- (b) Se  $E_1 \subseteq F_1$  ( o caso  $F_1 \subseteq E_1$  é simétrico ), pode-se encontrar facilmente  $O_1$ ,  $O_2$  ou  $N_n$  como sub-hipergrafo próprio induzido de  $H$  ;
- (c) Se  $E_1 \cap F_1 \neq \emptyset$ ,  $E_1 - F_1 \neq \emptyset$  e  $F_1 - E_1 \neq \emptyset$ , as minimalidades de  $H$ ,  $p$  e  $q$  implicam  $y \in E_1 - F_1$  e  $z \in F_1 - E_1$ . O sub-hipergrafo induzido por  $H$

sobre o conjunto  $\bigcup_{k=1}^r G_k \cup ( E_1 \cap F_1 )$  contém  $C_3$  ou  $M_n$  como

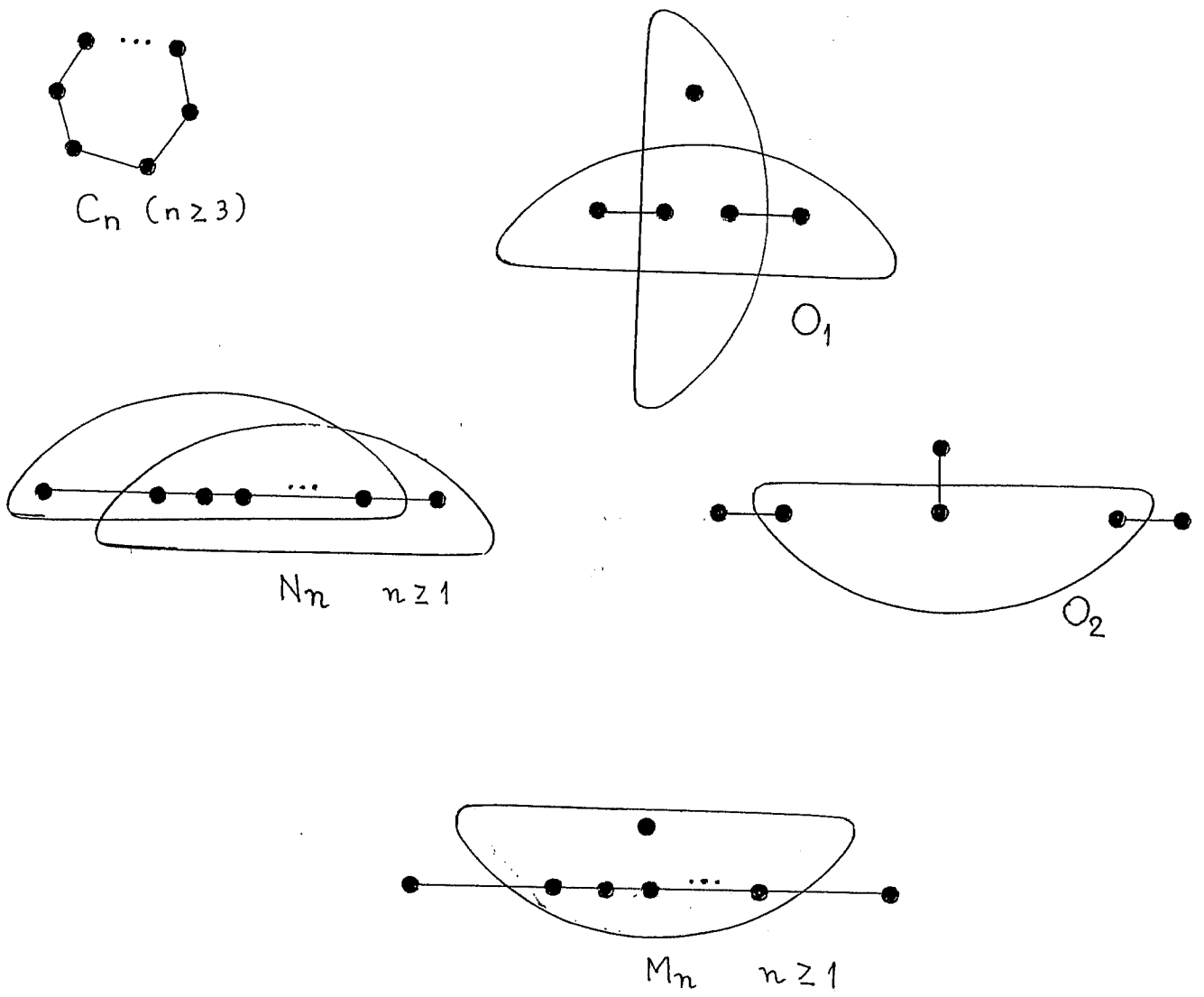


Figura 6.6

sub-hipergrafo parcial. ■

Um ponto muito interessante é que pode-se encontrar demonstrações mais simples para resultados em grafos a partir da manipulação de hipergrafos. Por exemplo, podemos demonstrar facilmente os Teoremas 2.1 e 2.2 via hipergrafos de intervalo. Oferecemos a seguir uma demonstração alternativa da suficiência da condição (iii) no Teorema 2.2.

Demonstração da suficiência da condição (iii) do Teorema 2.2. ( veja-se Duchet [1984] )

Suponhamos que  $G$  é um grafo triangularizado mas não um grafo de intervalo.

A classe dos hipergrafos de intervalo é claramente uma R-classe, de modo que o Lema 6.13 pode ser aplicado. Pelo Teorema anterior, o hipergrafo  $C^*(G)$  possui como sub-hipergrafo induzido algum dentre os grafos da Figura 6.6.

Para completar a demonstração, precisamos do seguinte Lema, de demonstração simples e que será omitida:

**Lema.** Suponhamos que  $V$  e  $C$  são subconjuntos disjuntos de vértices de um grafo  $G$ . Suponhamos que  $V$  é conexo e que  $C$  é uma clique maximal. Então,  $C$  contém um vértice não adjacente a  $V$ .

Aplicando o Lema, concluímos a demonstração com as seguintes observações ( veja-se as Figuras 2.3 e 6.6 ) :

- (a) se  $C^*(G)$  contém  $O_1$ ,  $G$  contém  $A_2$  ou  $D_2$  ;
- (b) se  $C^*(G)$  contém  $O_2$ ,  $G$  contém  $A_1$ ,  $D_2$  ou  $D_3$  ;
- (c) se  $C^*(G)$  contém  $M_n$ ,  $G$  contém algum  $D_m$  ;
- (d) se  $C^*(G)$  contém  $N_n$ ,  $G$  contém algum  $E_k$  ;
- (e) se  $C^*(G)$  contém  $C_n$ ,  $G$  contém  $E_1$  ou  $E_2$  . ■

#### 6.4. OS GRAFOS DE INTEVALO COMO GRAFOS DE INTERSECÇÃO

O estudo dos grafos de intervalo sugere um paradigma mais geral para o estudo de várias classes de grafos que podem ser descritas como classes de grafos de intersecção.

Seja  $\mathcal{F} = \{ S_1, S_2, \dots, S_n \}$  uma família de subconjuntos não vazia de um conjunto  $S$ . Os subconjuntos não são necessariamente disjuntos. Denominemos o conjunto  $S$  "universo" e os subconjuntos  $S_i$  "objetos". Além disso, definamos certas restrições sobre os objetos, como por exemplo não permitir que um subconjunto contenha propriamente a outro ou exigir que cada subconjunto satisfaça uma propriedade especial.

O grafo de intersecção  $G$  de  $\mathcal{F}$  tem vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  com  $v_i$  adjacente a  $v_j$  se e somente se  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ . Denominamos o par  $H = (S, \mathcal{F})$  um hipergrafo representativo de intersecção para  $G$  ou simplesmente uma representação.

Quando  $\mathcal{F}$  é uma família de intervalos sobre um conjunto linearmente ordenado,  $G$  é um grafo de intervalo e  $H$  é um hipergrafo de intervalo. Se adicionamos a restrição de que nenhum intervalo pode

conter propriamente a outro, obtemos a classe dos grafos de intervalo próprio.

Quando  $\mathcal{F}$  é uma família arbitrária de conjuntos, a classe obtida de grafos de intersecção é o conjunto de todos os grafos não direcionados.

A pesquisa em grafos de intersecção tem tomado dois rumos. Um deles é explorar intersecções de famílias que possuem alguma estrutura específica, topológica ou de outro tipo. Outro rumo é procurar caracterizar certas classes bem conhecidas de grafos em termos de grafos de intersecção; por exemplo, grafos triangularizados são os grafos de intersecção de sub-árvores de uma árvore ( Gavril [1974] ), e os grafos de co-comparabilidade são os grafos de intersecção de curvas de funções contínuas ( Golumbic, Rotem e Urrutia [1983] ).

A intersecção é apenas um dos tipos de interação entre os objetos que definem um grafo obtido a partir de uma representação  $H$ . Outros tipos de interação, como "overlap" (  $S_i$  e  $S_j$  se interceptam e nenhum deles contém o outro ), "continência" (  $S_i \subseteq S_j$  ou  $S_j \subseteq S_i$  ) ou "measured intersection" ( Golumbic, Monma e Trotter [1984] ) fornecem ainda outros tipos de grafos a partir de  $H$ . Veja-se a Figura 6.7.

Dentre os grafos listados na Figura 6.7, merecem particular atenção os grafos de arco circular, que se definem considerando uma extensão natural da noção de intervalos sobre uma linha. Se unirmos os dois extremos da linha, formando uma circunferência, os intervalos se tornam arcos sobre a circunferência. Permitindo aos arcos que contenham o ponto de conexão, obtemos a classe dos grafos de arco circular, extensivamente estudados por A.C. Tucker e outros.

Os grafos de intervalo estão, pois, contidos na classe dos

Figura 6.7. Tabela que descreve as classes de grafos de intersecção.

NOME DA CLASSE	INTERAÇÃO	OBJETOS	UNIVERSO	RESTRIÇÕES
Grafos de intervalo	Intersecção	Intervalos	Linha	-
Grafos de intervalo próprio	Intersecção	Intervalos	Linha	Não há continência própria
Grafos de continência de círculos	Continência	Círculos	Plano	-
Grafos de caminho	Intersecção	Caminhos	Árvore	-
"Edge path graphs"	Intersecção de arestas	Caminhos	Árvore	-
"Local edge path graphs"	Intersecção de arestas	Caminhos	Árvore	Todos os caminhos devem um vértice em comum
Grafos de arco circular	Intersecção	Arcos	Circunferência	-
Grafos de arco circular próprio	Intersecção	Arcos	Circunferência	Não há continência própria
Grafos de continência de intervalos	Continência	Intervalos	Linha	-
Grafos de intersecção de retângulos	Intersecção	Retângulos	Plano	-
"Circle graphs"	Intersecção	Cordas	Circunferência	-
Grafos clique	Intersecção	Cliques maximais	Grafo não direcionado	-
Grafos triangulados	Intersecção	Sub-árvores	Árvore	-
Grafos de comparabilidade	Intersecção	Curvas	Plano	Cada curva é o gráfico de uma função
Grafos de continência de retângulos	Continência	Retângulos	Plano	-



grafos de arco circular. Os grafos de caminho também contêm os grafos de intervalo.

## 6.5. DIGRAFOS DE INTERVALO

De maneira análoga à definição de grafos de intervalo, que são grafos não direcionados, podemos definir os digrafos de intervalo, grafos de intersecção de uma família de pares ordenados de intervalos sobre a reta ( Sen, Das, Roy e West [1989] ); assim sendo, não são grafos não direcionados. Analisaremos mais detidamente esta definição a seguir.

Consideremos uma família  $V$  de pares ordenados de conjuntos, associando a cada par um vértice  $v$ . Chamaremos o primeiro conjunto associado a  $v$  conjunto fonte  $S_v$  de  $v$ , e o segundo conjunto destino  $T_v$  de  $v$ . O digrafo de intersecção de uma família de pares ordenados de conjuntos é o digrafo  $D=(V,E)$  tal que  $uv \in E$  se e somente se  $S_u \cap T_v \neq \emptyset$ . Notemos que, pela definição, os "loops" são permitidos ( $uu \in E, \forall u \in V$ ).

Definimos pois um digrafo de intervalo como um digrafo de intersecção de uma família de pares ordenados sobre a reta; isto é, cada conjunto fonte e cada conjunto destino é um intervalo.

Existe uma caracterização dos digrafos de intervalo similar à caracterização do Teorema 2.4 para grafos de intervalo. Para compreendê-la, são necessárias algumas novas definições.

Definimos digrafo bipartite completo generalizado ( DBCG ) como um digrafo gerado por dois conjuntos de vértices  $X$  e  $Y$  onde  $xy$  é

aresta se e somente se  $x \in X$  e  $y \in Y$ ; dizemos "generalizado" porque não há necessidade de que  $X$  e  $Y$  sejam disjuntos, o que quer dizer que podem ocorrer "loops".

Seja  $B = \{ (X_k, Y_k) \}$  uma coleção de DBCG's cuja união é um digrafo  $D$ . Definimos matriz de incidência fonte para  $B$  (abreviadamente  $V, X$  - matriz) como a matriz de incidência entre os vértices de  $D$  e os conjuntos fonte  $\{ X_k \}$ , e matriz de incidência destino para  $B$  (abreviadamente  $V, Y$  - matriz) como a matriz de incidência entre os vértices e os conjuntos destino  $\{ Y_k \}$ . Já temos os elementos suficientes para fornecer uma caracterização dos digrafos de intervalo.

**Teorema 6.17**  $D$  é um digrafo de intervalo se e somente se existe uma numeração dos DBCG's em alguma cobertura  $B$  de  $D$  tal que os 1's aparecem consecutivamente nas linhas da  $V, X$ -matriz e da  $V, Y$ -matriz de  $D$ .

#### Demonstração

Para a suficiência, considere  $B$  cuja união é  $D$ , e seja  $(X_k, Y_k)$  uma numeração comum das colunas da  $V, X$ -matriz e da  $V, Y$ -matriz que exhibe a propriedade dos 1's consecutivos para ambas.

Sejam  $S_v = [a_v, b_v]$  e  $T_v = [c_v, d_v]$ , onde  $a_v, b_v, c_v, d_v$  são definidos do seguinte modo:

$$v \in X_k \Leftrightarrow a_v \leq k \leq b_v \text{ e}$$

$$v \in Y_k \Leftrightarrow c_v \leq k \leq d_v .$$

Então,  $S_u \cap T_v \neq \emptyset$  se e somente se  $u \in X_k$  e  $v \in Y_k$  para algum  $k$ .

Para a necessidade, consideremos uma representação de  $D$  por

uma família  $\{ (S_v, T_v) \}$  de pares ordenados de intervalos. Podemos assumir que os intervalos são fechados e que têm pontos extremos inteiros, com  $S_v = [a_v, b_v]$  e  $T_v = [c_v, d_v]$ . Para cada inteiro  $k$  pertencente a qualquer destes intervalos, definimos um DBCG  $B_k = (B_k, Y_k)$  a partir do digrafo de intersecção dos pares de intervalos, estabelecendo  $X_k = \{ v \mid k \in S_v \}$  e  $Y_k = \{ v \mid k \in T_v \}$ . Então  $S_u \cap T_v \neq \emptyset$  se e somente se  $u \in X_k$  e  $v \in Y_k$  para algum  $k$ , de modo que o digrafo de intersecção dos pares de intervalos é de fato a união dos DBCG's especificados. Por construção, a  $V, X$ -matriz e a  $V, Y$ -matriz resultantes têm simultaneamente a propriedade dos 1's consecutivos para linhas. ■

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Destacamos agora alguns aspectos que pudemos extrair ao longo da preparação desta dissertação, a modo de conclusão.

Em primeiro lugar, os grafos de intervalo possuem uma estrutura combinatória que conceitualmente é muito natural, e pode-se comprovar este fato pelo elevado número de aplicações existentes para a classe ( Capítulo 1 ); pode-se dizer que os grafos de intervalo estão entre as estruturas matemáticas mais úteis para a modelagem de problemas do mundo real. É interessante frizar também que surgiram motivados pelo estudo de um problema real concreto, do geneticista Seymour Benzer, e não como "subproduto" da resolução de problemas combinatórios puros ou como grafos "auxiliares" na demonstração de inclusões entre outras classes ou na caracterização dos grafos perfeitos.

Por outro lado, sua estrutura é fortemente determinada: basta verificar o grande número de caracterizações existentes para a classe ( Capítulo 2 ). Outro fato que corrobora isto é a constatação de que todos os algoritmos que estudamos para grafos de intervalo são de tempo polinomial - em geral, estruturas mais genéricas exigem maior complexidade de tempo dos algoritmos que as manipulam.

No Capítulo 3 procuramos fornecer também as caracterizações mais conhecidas de uma importante sub-classe dos grafos de intervalo,

os grafos de indiferença. Esperávamos encontrar na literatura mais exemplos de algoritmos para grafos de indiferença - até mesmo como fruto da imposição de uma restrição adicional ( comprimento fixo dos intervalos ) aos algoritmos projetados para grafos de intervalo -, mas constatamos que há pouca pesquisa neste sentido. Uma linha de investigação seria verificar em que medida as complexidades de tempo de problemas para grafos de intervalo se modificam quando os restringimos aos grafos de indiferença. Não temos conhecimento de um bom algoritmo para reconhecimento dos grafos de indiferença.

Há muitas pesquisas no sentido de resolver problemas conhecidos em teoria dos grafos restringindo-os à classe dos grafos de intervalo. Todos os problemas que apresentamos possuem soluções de tempo polinomial - a maioria delas de tempo linear no tamanho do grafo ( p. ex., reconhecimento e isomorfismo, Capítulo 4; coloração mínima e conjunto dominante mínimo, Capítulo 5 ). Muitos desses problemas permanecem NP-completos para a classe dos grafos perfeitos e algumas de suas sub-classes. Dentre os problemas mais conhecidos que permanecem ainda sem solução de tempo polinomial para grafos de intervalo, citamos no Capítulo 5 corte máximo ponderado de arestas e índice cromático. É claro que a pesquisa nesse campo pode se estender bastante, pois restam ainda muitos problemas menos conhecidos que poderiam ser resolvidos para grafos de intervalo à medida que despertassem interesse.

Sobre o algoritmo de reconhecimento, cabe fazer constar um avanço recente ( Simon [1992] ) do qual só tivemos conhecimento após esta dissertação já estar concluída. Conforme citamos, a primeira fase do algoritmo de Booth e Lueker, apresentado no Capítulo 4, utiliza um teste de triangularidade que determina todas as cliques maximais de um

grafo; este teste é baseado em uma busca em largura lexicográfica ("lexicographic breadth first search" ou "lexBFS"). Na segunda fase, as PQ-árvores são usadas para obter uma representação de todas as possíveis ordenações das cliques maximais. Simon [1992] exhibe uma nova solução de tempo linear para a segunda fase utilizando lexBFS novamente. O algoritmo de Simon, cuja técnica consiste em repetir lexBFS 4 vezes, produz ( se existir ) uma ordenação consecutiva das cliques maximais conforme o Teorema 2.3.

No Capítulo 6 há dois tópicos de pesquisa muito interessantes, para os quais efetivamente poucos resultados existem ainda : o número de intervalo e o "interval count". O objetivo é encontrar ( se possível ) algoritmos de tempo polinomial que os calculem, tomando grafos como entrada. Para o número de intervalo existem ao menos "bounds" em função de vários parâmetros de grafos ( número de vértices, número de arestas, grau máximo, clique máxima...), mas o problema de caracterizar grafos com número de intervalo  $\leq k$  para  $k \geq 2$  permanece aberto. Da mesma forma, caracterizar grafos de intervalo com "interval count"  $\leq k$  para  $k \geq 2$  é um problema aberto. Embora Fishburn tenha mostrado que um conjunto de subgrafos proibidos para os grafos de intervalo da família  $\langle G \mid c(G) \leq k \rangle$  é infinito, lembremo-nos de que na caracterização do Teorema 2.2 o conjunto de subgrafos proibidos também é infinito.

Finalmente, queremos fazer constar que o trabalho de coleta e classificação de caracterizações e algoritmos, com o correspondente esforço por rerepresentar os resultados de forma clara e numa notação uniforme, muito contribuiu para o aumento da compreensão das relações entre estruturas combinatórias de classes particulares de grafos e

propostas algorítmicas de manipulação das mesmas.

## BIBLIOGRAFIA

Aho, A.V., Hopcroft, J.E. e Ullman, J.D.

[1974] "The design and analysis of computer algorithms", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Berge, Claude

[1961] Farbung von graphen, deren sämtliche bzw, deren ungerade kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ., Halle-Wittenberg Math.-Natur, Reihe*, 114-115.

Bertossi, Alan A.

[1983] Finding hamiltonian circuits in proper interval graphs, *Inf. Proc. Letters* 20, 201-206.

Booth, K.S. e Johnson, J.H.

[1982] Dominating sets in chordal graphs, *SIAM J. Comput.* 11, 191-199.

Booth, Kellog S. e Lueker, George S.

[1976] Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms, *J. Comput Syst. Sci.* 13, 335-379.

[1979] A linear time algorithm for deciding interval graph isomorphism, *J. Assoc. Comput. Mach.* 26, 183-195.



Duchet, Pierre

[1979] "Representations, noyaux en théorie des graphes et hypergraphes", Tese de Doutorado, Universidade de Paris VI.

[1984] Classical perfect graphs: an introduction with emphasis on triangulated and interval graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 21, 67-96.

Fishburn, Peter C.

[1971] Betweenness, orders and interval graphs, *J. Pure Appl. Algebra* 1, 159-178.

[1985] "Interval orders and interval graphs", Wiley, New York.

Fredman, M.L. e Weide, B.

[1978] On the complexity of computing the measure of  $u$   $[a,b]$ , *Commun. Assoc. Comput. Mach.* 21, 540-544.

Fulkerson, D.R. e Gross, O.A.

[1965] Incidence matrices and interval graphs, *Pacific J. Math.* 15, 835-855.

Garey, Michael R. e Johnson, David S.

[1978] "Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness", Freeman, San Francisco, California.

Gavril, F.

[1974] The intersectionn graphs of subtrees of a tree are exactly the

chordal graphs, *J. Comb. Theory Ser. B* 16, 47-56.

Gilmore, Paul C. e Hoffman, Alan J.

[1964] A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Canad. J. Math.* 16, 539-548.

Golumbic, Martin Charles

[1980] "Algorithmic graph theory and perfect graphs", Academic Press, New York.

Golumbic, M.C., Monma, C.L. e Trotter Jr., W.T.

[1984] Tolerance graphs, *Discr. Appl. Math.* 9, 157-170.

Golumbic, M.C., Rotem, D. e Urrutia, J.

[1983] Comparability graphs and intersection graphs, *Discr. Math.* 43, 37-46.

Griggs, Jerrold R.

[1979] Extremal values of the interval number of a graph (IID), *Discr. Math.* 28, 37-47.

Griggs, Jerrold R. e West, Douglas B.

[1980] Extremal values of the interval number of a graph, *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 1, 1-7.

Gupta, U.I., Lee, D.T. e Leung, J.Y.T.

[1979] An optimal solution for the channel assignment problem, *IEEE*

*Trans. Computers* C-28, 807-810.

[1982] Efficient algorithms for interval graphs and circular-arc graphs, *Networks* 12, 459-467.

Ilufi, M. Villanueva

[1989] "Grafos Triangularizados: caracterizações e extensões", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Johnson, D.S.

[1985] "The NP-completeness column: an ongoing guide", *J. Algorithms* 6, 434-451.

Keil, J.M.

[1985] Finding hamiltonian circuits in proper interval graphs, *Inf. Proc. Letters* 20, 201-206.

Korte, N. e Möhring, R.H.

[1989] An incremental linear-time algorithm for recognizing interval graphs, *SIAM J. Comput.* 18, 68-81.

Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. e Tversky, A.

[1971] "Foundation of measurement", Vol.I, Academic Press, New York.

Leibowitz, Rochelle

[1978] "Interval counts and threshold graphs", Tese de Doutorado, Rutgers University.

Lekkerkerker, C.G. e Boland, J.Ch.

[1962] Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, *Fund. Math.* 51, 45-64.

Lovász, L.

[1972] Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discr. Math.* 2, 253-267.

Lu, T.-L., Ho, P.-H. e Chang, Gerard J.

[1990] The domatic number problem in interval graphs, *SIAM J. Discr. Math.* 3, 531-536.

Luce, R. Duncan

[1956] Semiorders and a theory of utility discrimination, *Econometrica* 24, 178-191.

Lueker, G.S.

[1975] "Efficient algorithms for chordal graphs and interval graphs", Tese de Doutorado, Princeton University.

Manacher, Glenn K., Mankus, Terrance A. e Smith, Carol J.

[1990] An optimum  $O(n \log n)$  algorithm for finding a canonical hamiltonian path and a canonical hamiltonian circuit in a set of intervals, *Inf. Proc. Letters* 35, 205-211.

Marathe, Madhav V., Ravi, R. e Rangan, C. Padu

[1992] Generalized vertex covering in interval graphs, *Discr. Appl.*

*Math.* 39, 87-93.

Olariu, S.

[1991] An optimal greedy heuristic to color interval graphs, *Inf. Proc. Letters* 37, 21-25.

Rabinovitch, Issie

[1977] The Scott-Suppes theorem on semiorders, *J. Math. Psych.* 15, 209-212.

Ramalingam, G. e Pandu, C.

[1988] A unified approach to domination problems on interval graphs, *Inf. Proc. Letters* 27, 271-274.

Roberts, Fred S.

[1969] Indifference graphs, in "Proof techniques in graph theory" (Harary, ed.), pp.139-146, Academic Press, New York.

[1969] On the boxicity and cubicity of a graph, in "Recent Progress in Combinatorics" (Tutte, ed.), pp.301-310, Academic Press, New York.

Rose, D.J., Tarjan, R.E. e Lueker, G.S.

[1976] Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, *SIAM J. Comput.* 5, 266-283.

Scheinerman, E. R.

[1988] On the interval number of a chordal graph, *J. Graph Theory* 12, 311-316.

Scheinerman, E.R. e West, D.B.

[1983] The interval number of a planar graph: three intervals suffice, *J. Comb. Theory Ser.B* 35, 224-239.

Scott, Dana S.

[1964] Measurement structures and linear inequalities, *J. Math. Psych.* 1, 233-247.

Scott, D.S. e Suppes, P.

[1958] Foundation aspects of theories of measurement, *J. Symbolic Logic* 23, 113-128.

Sen, M., Das, S., Roy, A.B. e West, D.B.

[1989] Interval digraphs: an analogue of interval graphs, *J. Comb. Theory* 13, 189-202.

Simon, Klaus

[1993] A new simple linear algorithm to recognize interval graphs, a ser publicado.

Suppes, P. e Zinnes, J.

[1963] Basic measurement theory, in "Handbook of mathematical psychology", Vol.I (Luce, Bush e Galanter, edits.), pp.1-76, Wiley, New York.

Szwarcfiter, Jayme L.

[1990] On edge transitivity of directed graphs, Relatório Técnico NCE-26/90, NCE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Trotter Jr., William T. e Harary, Frank.

[1979] On double and multiple interval graphs, *J. Graph Theory* 3, 205-211.

Tucker, A.

[1972] A structure theorem for the consecutive ones property, *J. Comb. Theory* 12, 153-162.

Wegner, G.

[1967] "Eigenschaften der nerven homologische-einfacher familien in  $R^n$ ", Tese de Doutorado, Göttingen.

White, K., Farber, M. e Pulleyblank, W.

[1985] Steiner trees, connected domination and strongly chordal graphs, *Networks* 15, 109-124.

Wilson, Robin J. e Watkins, John J.

[1990] "Graphs: an introductory approach", Wiley, New York.