"UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO PARA MODELOS ECONOMICOS DE PRODUÇÃO"

José Antonio Ortega

Outubro 1974 Nº 11.74

"UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO PARA MODELOS ECONOMICOS DE PRODUÇÃO"

José Antonio Ortega

Outubro 1974 Nº 11.74

"UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO PARA MODELOS ECONOMICOS DE PRODUÇÃO"

José Antonio Ortega

Outubro 1974 Nº 11.74

"UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO PARA MODELOS ECONOMICOS DE PRODUÇÃO"

José Antonio Ortega

Outubro 1974 Nº 11.74

"UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO DISCRETO

PARA MODELOS ECONÔMICOS DE PRODUÇÃO"

José Antônio Ortega

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIA (D.Sc.).

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

AGOSTO DE 1973

À Vera,

Mauricio e **Bernardo.**

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Richard Jeffrey Leake, pela paciência e dedicação com que me acompanhou na elaboração desta tese.

Aos professores Jack Schechtman e Ronaldo Cesar Marinho Persiano e demais colegas pelas discussões e sugestões.

À Yeda Carvalho Dias, pela sua dedicação no trabalho de datilografia.

BIOGRAFIA DO AUTOR

JOSÉ ANTONIO ORTEGA nasceu a 8 de outubro de 1944 na capital do Estado de São Paulo, filho de José Ortega Filho e Carolina L.C.Ortega. Vive no Rio de Janeiro desde 1951, onde teve sua educação escolar. Casou-se em 1968 com Vera Lucia Carvalho Ortega e é pai de dois filhos. Formou-se em 1969 na Pontifícia Universidade Católica em Engenharia Elétrica, ingressando na COPPE/UFRJ no ano seguinte como aluno de pós-graduação. Em 1971, obteve o grau de Mestre em Ciência pelo Programa de Engenharia de Sistemas, a cujo corpo docente pertence desde janeiro daquele mesmo ano, sendo atualmente Professor Assistente.

RESUMO

Problemas de otimização em economia, quando caracterizados como problemas de controle Ótimo referidos a sistemas, apresentam a particularidade de as decisões ou controles estarem restringidos pelo estado do sistema. A contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de um novo princípio do máximo discreto para essa classe de problemas. É introduzido o conceito de Configuração de Produção, como um modelo para sistemas econômicos de produção. Este modelo é uma generalização de outros modelos, tais como Conjuntos de Tecnologia e são apresentados resultados, que demonstram serem Configurações de Produção modelos naturais para o estudo da relação entre as descrições por sistemas de controle e por conjuntos de tecnologia. São analisadas também condições em que se pode garantir a existência de preços de equilíbrio na determinação de processos econômicos Ótimos e a utilização do princípio do máximo na determinação de soluções ótimas.

ABSTRACT

Optimization problems in economy, when described as optimal control problems related to systems, have the characteristic that the control constraint set depends on the system state. The contribution of this work is the development of a new discrete maximum principle for this class of problems. The notion of a Production Configuration is introduced as a model for production economic systems. This model is a generalization of other models such as Technology Sets and results are given to demonstrate that Production Configurations are natural models for the study of the relation between control systems and technology set descriptions. Also, conditions for existence of equilibrium prices and utilization of the maximum principle in determining optimal solutions are analysed.

INDICE

INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentada uma abordagem de sistemas para problemas de otimização em economia.

Na Economia Matemática, um grande número de problemas, não muito raramente já vêm caracterizados como problemas de otimização de desempenho de sistemas, por exemplo, quando relativos a modelos neo-clássicos de crescimento econômico.

Outras vezes, não partindo da definição de uma função de produção, aqueles problemas têm sua formulação vinculada a relações de produção, como é o caso em que se referem a conjuntos de tecnologia, conceito introduzido por Gale em 1956 [14].

Com o intuito de se dar um tratamento unificado a esses problemas, é introduzido no primeiro capítulo o conceito de configuração de produção, conceito esse equivalente ao de um certo tipo de sistema. Assim, dada uma função utilidade, a busca de um processo Ótimo para uma configuração de produção se torna equivalente à determinação da solução de um problema de controle Ótimo relativo a um sistema.

Os sistemas equivalentes a configurações de produção, têm como característica o fato de as decisões (ou controles) estarem restringidas pelo estado do sistema. Para uma classe de problemas de controle ótimo referidos a sistemas desse tipo, é apresentado no segundo capítulo um princípio do máximo, que dá condições necessárias para a existência de soluções.

No terceiro capítulo são estudadas condições em que fica garantida a existência de preços de equilíbrio para configurações de produção e funções critério a elas associadas.

Finalmente, a utilização do princípio do máximo na determinação de um processo Ótimo para uma configuração de produção e um critério dados, é vista no quarto capítulo, onde um problema formulado a partir de um modelo neo-clássico de crescimento econômico é resolvido em detalhe.

C A P Í T U L O I

CONFIGURAÇÕES DE PRODUÇÃO E SISTEMAS; PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO. DEFINIÇÕES E EXEMPLOS.

DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Denominaremos configuração de produção P de horizonte k, $k \in E$ a qualquer sequência (P_i) $i=0,\dots,k-1$ de conjuntos:

$$P_i \subset E^n x E^m x E^n \quad , i=0,\dots,k-1.$$

A uma sequência $((x_i,u_i))$ $i=0,\dots,k$, tal que:

$$x_o = \theta$$

$$(x_i,u_i,x_{i+1}) \in P_i \qquad i=0,\dots, k-1$$

chamaremos um processo viável de P começando em θ. Abreviadamente: um processo viável de P.

Na circunstância de $P_o = P_1 = \dots = P_{k-1}$, nos permitiremos a um abuso de linguagem, identificando P com P_i, $i=0,\dots, k-1$.

Quando nos referirmos a um sistema, estaremos falando de um sistema de equações:

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i,u_i) \qquad i=0,\dots, k-1$$

onde

$$(x_i,u_i) \in X_i \subset E^n \times E^m \ , \ 0 \ , \dots,k-1 \ , X_i \text{ arbitrário}$$

$$x_o = \theta \ , \ \theta \text{ fixo mas arbitrário} \qquad \text{e}$$

$$f_i : E^n \times E^m \to E^n \qquad i=0,\dots,k-1$$

ou equivalentemente:

$$x_{i+1} = W1(x_i, u_i) \qquad i=0,\dots,k-1$$

onde

$$(x_i, u_i) \in X_i \qquad i=0,\dots,k-1$$

$$x_o = \theta$$

$$w_i(x_i, u_i) = x_i + f_i(x_i, u_i) \qquad i=0,\dots,k-1$$

(1) TEOREMA :

configuração de produção e sistema são conceitos equivalentes, no sentido de que dada uma configuração de produção P, é possível definir um sistema tal que a todo processo viável de P corresponda uma solução do sistema, e a toda solução do sistema, corresponda um processo viável de P, e inversamente, dado um sistema é possível definir uma configuração de produção, tal que a toda solução do sistema corresponda um processo viável de P e a todo processo viável de P corresponda uma solução do sistema.

Prova :

Dado um sistema, definimos:

$$P_i = \{(x,v,y) : (x,v) \in X_i \ , \ y=w_i(x,v)\}$$

Dada uma configuração de produção, definimos:

$$u_i \triangleq (v,y) \quad \forall (x,v,y) \in P_i \qquad \text{e}$$

$$X_i = \{(x,u = (v,y)) : (x,v,y) \in P_i\} \text{ , então}$$

$$w_i(x,u) \triangleq \left[\, 0_m \,\middle|\, I_n \,\right] u_i$$

e o resto das afirmações são verificadas trivialmente . $\square$

observação : Evidentemente, no teorema (1) é proposta uma realização trivial e pouco informativa de uma configuração de produção. Isso se dá pela generalidade desta. Na medida em que se tem maior informação sobre uma configuração de produção, pode-se definir um sistema mais elaborado. Tendo em vista o teorema acima, trataremos no que se segue sempre de configurações de produção dadas explicitamente como uma sequência de gráficos de restrições de funções:

$$P_i = \mathrm{Gr}\, w_i(.,.) \,/\, X_i \triangleq \{(x_i,u_i,y_i) : (x_i,u_i) \in X_i \quad \text{e}$$

$$y_i = f_i(x_i,u_i)\}$$

Abreviadamente:

$$P_i = \mathrm{Gr}\, w_i\,(.,.)$$

(2) TEOREMA

Se o conjunto X_i é convexo e $(0,0) \in X_i$, então:

P_i é convexo $\Longleftrightarrow w_i\,(.,.)$ é afim (*)

Prova :

(*) - Vide apêndice , (1).

$(\Leftarrow)$

Suponhamos que $w_i(.,.)$ seja afim. Sejam (x',u',y'), $(x^2,u^2,y^2) \in Gr\, w_i(.,.)$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Então, $y' = w_i(x',u')$ e $y^2 = w_i(x^2,u^2)$ e deve ser provado que

$$\lambda w_i(x',u')+(1-\lambda)w_i(x^2,u^2) = w_i(\lambda x'+(1-\lambda)x^2,\lambda u'+(1-\lambda)u^2)$$

Mas, por definição de função afim:

$$w_i(\lambda x'+(1-\lambda)x^2, \lambda u'+(1-\lambda)u^2) = w_i(\lambda x',\lambda u')+w_i((1-\lambda)x^2,(1-\lambda)u^2)-$$

$$- w_i(0,0) = \lambda w_i(x',u')+(1-\lambda)w_i(0,0)+(1-\lambda)w_i(x^2,u^2) +$$

$$+(1-1+\lambda)w_i(0,0)-w_i(0,0) = \lambda w_i(x',u')+(1-\lambda)w_i(x^2,u^2)$$

$(\Rightarrow)$

Suponhamos agora que $Gr\, w_i(.,.)$ seja convexo. Isto significa que:

$$(x',u'),\ (x^2,u^2) \in X_i \quad e \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad :$$

$$\lambda w_i(x',u')+(1-\lambda)w_i(x^2,u^2) = w_i(\lambda x'+(1-\lambda)x^2,\ \lambda u'+(1-\lambda)u^2)$$

isto é,

$$(\lambda x'+(1-\lambda)x^2,\ \lambda u'+(1-\lambda)u^2,\ \lambda w_i(x',u')+(1-\lambda)w_i(x^2,u^2)) \in$$

$$\in Gr\, w_i(.,.) .$$

Seja $0 \leq \theta \leq 1$ e $(x',u') \in X_i$. Então ,

(3) $$w_i(\theta x',\theta u') = w_i(\theta x'+(1-\theta)0,\ \theta u'+(1-\theta)0) =$$

$$= \theta w_i(x',u')+(1-\theta)w_i(0,0)$$

Também, se $\theta \leq 0$, $\theta(x',u') \in X_i$, seja

$$\lambda = \frac{8}{\theta-1} \text{ (logo, } 1-\lambda = \frac{1}{1-\theta}\text{ , } \frac{-\lambda}{1-h} = \theta\text{ , } 0 \leq \lambda \leq 1\text{), então:}$$

$$w_i(0,0) = w_i(\lambda x'+(1-\lambda)\theta x',\ \lambda u'+(1-\lambda)\theta u') = \lambda w_i(x',u') +$$

$$+ (1-\lambda)w_i(\theta x',\theta u') \quad , \qquad \text{e}$$

(4) $$w_i(\theta x',\theta u') = -\frac{\lambda}{a-A} w_i(x',u') + \frac{1}{1-\lambda} w_i(0,0) \ \square$$

$$= \theta w_i(x',u') + (1-\theta)w_i(0,0)$$

Ainda, se $\theta > 1$, $(x',u') \in X_i$, $\theta(x',u') \in X_i$, seja $\lambda = \frac{1}{8}$ (logo, $0 \leq A \leq 1$). Então:

$$w_i(x',u') = w_i(\lambda(\theta x')+(1-\lambda)0,\ \lambda(\theta u')+(1-\lambda)0) = \lambda w_i(\theta x',\theta u')+$$

$$+(1-\lambda)w_i(0,0) = \frac{1}{\theta} w_i(\theta x',\theta u')+\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)w_i(0,0) \quad \text{e}$$

(5) $$w_i(\theta x',\theta u') = \theta w_i(x',u')+(1-\theta)w_i(0,0)$$

Finalmente, dados $(x',u'),(x^2,u^2) \in X_i$ tais que $(x',u')+(x^2,u^2) \in X_i$, seja $\lambda = \frac{1}{2}$. Então:

$$w_i\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u^2\right) = \frac{1}{2}w_i(x',u') + \frac{1}{2}w_i(x^2,u^2), \text{ ou}$$

$$w_i(x',u') + w_i(x^2,u^2) = 2w_i\left(\frac{1}{2}(x'+x^2), \frac{1}{2}(u'+u^2)\right) .$$

Mas, por (3):

$$w_i\left(\frac{1}{2}(x'+x^2), \frac{1}{2}(u'+u^2)\right) = \frac{1}{2}w_i(x'+x^2, u'+u^2) + \frac{1}{2}w_i(0,0)$$

logo,

$$w_i(x',u') + w_i(x^2,u^2) = w_i(x'+x^2, u'+u^2) + w_i(0,0) \quad , \quad \text{ou}$$

(6) $$w_i(x'+x^2, u'+u^2) = w_i(x',u') + w_i(x^2,u^2) - w_i(0,0)$$

Assim, (3) a (6) implicam por definição, que $w(.,.)$ seja afim. $\square$

Dada uma coleção de funções

$$\rho_i : E^n \times E^m \to E \qquad i=0,\ldots,k-1$$

estamos em condições de comparar processos viáveis de uma configuração de produção P, começando em θ, e diremos que um determinado processo $((\hat{x}_i,\hat{u}_i))_{i=0,\ldots,k}$ viável para P começando em θ é ótimo, se:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \geq \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i(x_i,u_i) \quad \text{para todo processo}$$

$((x_i,u_i))_{i=0,\ldots,k}$ viável para P começando em θ.

Assim, dada uma configuração de produção e uma função critério, a procura de um processo ótimo pode ser transformado em um problema de controle ótimo referido a um sistema equivalente à configuração de produção dada.

OBSERVAÇÕES E EXEMPLOS

Uma configuração de produção associada a uma função critério como acima definidas, apresentam uma generalidade que permite tratar de um grande número de problemas de otimização estudados pela Ecanomia Matemática.

Algumas vezes, estes já vêm caracterizados como problemas de otimização da performance de sistemas. Nesse caso, a configuração de produção pode ser imediatamente definida. Em outras ocasiões, aqueles problemas tem sua formulação vinculada a relações de produção. A seguir apresentaremos configurações de produção associadas a esse tipo de representação [15] .

1) Seja $S \subset E^n$ um conjunto de estados possíveis de uma economia.

Um subconjunto $T \subset SxS$, cujos elementos representem transições possíveis do estado da economia é denominado um conjunto tecnologia.

Para conjuntos tecnologia, podemos definir a configuração de produção:

$$P = \{(x,u,y) : (x,u) \in T \ , \ y=u\}$$

2) Uma outra representação, esta levando em conta uma possível mudança tecnológica [16], é dada por intermédio de conjuntos

$$Q_i \subset S \times E \times S \quad , \; i=0,\ldots,k-1$$

cujos elementos (x,α,y) representam transições de estado da economia, que além de possíveis tecnologicamente, têm associados ganhos admissíveis no instante i. Nesse caso, a configuração de produção pode ser definida como:

$$P = (P_i)_{i=1,\ldots,k-1}$$

$$P_i = \{(x,u,y) : (x,u) \in \tilde{Q}_i, \; y=Au\} \quad , \text{ onde}$$

$$\tilde{Q}_i = \{(x,u = (\alpha,y)) : (x,\alpha,y) \in Q_i\} \quad \text{e}$$

$$A = \left[\, 0 \,\vdots\, I_n \,\right]$$

Como já observado anteriormente, a respeito de sistemas que sejam realizações de configurações de produções, o grau de informação de uma configuração de produção se preserva quando estas são definidas a partir de outras representações. Para efeito de ilustração, apresentamos um conjunto tecnologia eficiente proveniente de um modelo dinâmico de Leontief [17] e uma configuração de produção equivalente:

$$T = \{(x,y) : x \geq Bz \,, \quad y = (I-A+B)z \quad \text{para algum} \quad z \in E^m \,, \; z \geq 0\} \,.$$

Nesse caso, o estado do sistema é um vetor cujas componentes representam a produção líquida disponível em um período de produção. As componentes do vetor z representam a produção bruta de um determinado bem em um período.

A matriz B representa os fatores que entram em um processo de produção, e a matriz A o consumo de bens na produção durante um período. A diferença entre essas duas matrizes está no fato de alguns bens (ou fatores) entrarem no processo de produção sem serem consumidos.

configuração de produção associada:

$$P = \{(x,u,y) : (x,u) \in X_i , \quad y = (I-A+B)u\}$$

$$\text{sendo} \quad X_i = \left\{ (x,u) : \left[\begin{array}{c|c} -I_n & B \\ \hline 0_n & -I_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ u \end{array} \right] \leqq 0 \right\}$$

Gostaríamos de ressaltar o fato de que em todos esses exemplos as configurações de produção são dadas explicitamente como sequências de gráficos de funções.

No próximo capítulo, apresentaremos resultados válidos para uma classe de sistemas, cujas configurações de produção equivalentes, em particular englobam as dos exemplos dados acima.

CAPÍTULO II

UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO, ONDE AS DECISÕES SÃO RESTRINGIDAS PELO ESTADO DO SISTEMA.

A classe de problemas para as quais é válido o resultado apresentado neste capítulo é equivalente à dos problemas de otimização em configurações de produção

$$P = (P_i)_{i=0,\dots,k-1} \quad ,$$

$$P_i = \mathrm{Gr}\ w_i(.,.) \ / \ X_i$$

onde

$\forall x \in X_i$, $i=0,\dots,k-1$, os conjuntos

$$W_i(x,X_i) = \begin{bmatrix} w_i(x,X_i) \\ -\rho_i(x,X_i) \end{bmatrix}$$

são convexos na direção $b_o = (-1,0,\dots,0)^*$, as funções $w_i(.,.)$ e $\rho_i(.,.)$ são continuamente diferenciáveis e os conjuntos X_i são convexos.

(*) Vide Apêndice

INTRODUÇÃO

Embora o princípio do máximo para sistemas contínuos tenha sido demonstrado por Pontryagin et. al. [2] há mais de 12 anos, os detalhes matemáticos da prova do princípio do máximo discreto foram classificados apenas recentemente.

A primeira referência a um princípio do máximo para sistemas discretos no tempo pode ser atribuida a Rozenoer [3]. A afirmação deste de que "a extensão do princípio do máximo para sistema discretos é possível, em geral, apenas no caso linear", juntamente com provas falhas feitas por pesquisadores mais recentes, causou confusão considerável no assunto.

Começando em 1964 e mais tarde em 1966, Halkin [4,5] apresentou uma prova matemática cuidadosa do princípio do máximo discreto. Quase ao mesmo tempo, Propoi [6] chegou à mesma conclusão, de que é requerida uma hipótese relativamente forte de convexidade. Bruckner e Wu [7] fizeram um estudo do caso em que os controles são restringidos pelos estados. Introduzindo o conceito de convexidade direcional, Holtzman e Halkin [8-10] extenderam bastante a aplicabilidade dos resultados de Halkin.

Mais tarde, Cannon, Cullum e Polak [11] e Da Cunha e Polak [12] apresentaram um método para tratar de tais problemas, usando um teorema básico de otimização e uma abordagem sistemática por aproximações cônicas. Usando este método eles simplificaram enormemente a prova do princípio do máximo discreto e apresentaram exten sões que incluem restrições do espaço de estados e funções objetivos vetoriais. Seu trabalho é resumido no livro de Cannon, Cullum e Polak [1].

Neste capítulo é provado um princípio do máximo discreto válido para uma classe de problemas na qual os conjuntos de restrição dos controles dependem do estado do sistema, usando o formalismo e o teorema básico de otimização de Cannon, Cullum e Polak [1].

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Consideremos o sistema descrito pelas equações:

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i,u_i) \qquad i = 0,\dots,k-1$$

onde $x_i \in E^n$, $u_i \in E^m$, $f_i\colon E^n \times E^m \to E^n$

Achar uma sequência $(\hat{u}_0,\dots,\hat{u}_{k-1})$ e uma correspondente trajetória $(\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_k)$ que minimize

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^o(x_i,u_i) \ , \ f_i^o : E^n \times E^m \to E$$

sujeitas a

$$u_i \in U_i(x_i) \subset E^m \qquad i = 0,\ldots,k-1$$

$$x_i \in S_i = S_i' \cap S_i'' \qquad i = 0,\ldots,k$$

onde

$$S_i' = \{x \in E^n : U_i(x) \neq \emptyset\} \qquad i = 0,\ldots,k$$

$$S_i'' = \{x \in E^n : g_i(x) = 0\} \qquad i = 0,k$$

onde $g_i : E^n \to E^{l_i}$ tem jacobiano de posto máximo onde calculadc

$$S_i'' = E^n \qquad i = 1,\ldots,k-1$$

HIPÓTESES

Definindo $X_i \triangleq \{(x,u) \in E^n \times E^m : u \in U_i(x)\}$ $i = 0,\ldots,k$

onde $U_k(x) = E^m \ \forall\ x \in E^n$, vamos considerar que:

(1) $\forall\ i = 0,\ldots,k-1$, $\forall\ (x_i,u_i) \in X_i$ as funções $f_i(.,.), f_i^o(.,.)$ são continuamente diferenciáveis

Seja $b_0 = (-1,0,\ldots,0) \in E^{n+1}$

Definamos:

$$F_i : E^n \times E^m \to En+1 \qquad i = 0,\ldots,k-1$$

$$(x,u) \to (f_i^o(x,u) \ , \ f_i(x,u))$$

Então suporemos que

(2) $\forall \ i = 0,\ldots,k-1 \ , \ \forall \ x \in E^n$ os conjuntos

$F_i(x,U_i(x)) \subset En+1$ são b_0 - convexos

Isto significa que dados u' e u" em $U_i(x)$ e $0 \leq h \leq 1$,

$$\exists \ u(\lambda) \in U_i(x) \ \ni$$

$$f_i(x,u(\lambda)) = A \ f_i(x,u') + (1-\lambda) \ f_i(x,u")$$

$$f_i^o(x,u(\lambda)) \leqq \lambda \ f_i^o(x,u') + (1-\lambda) \ f_i^o(x,u")$$

Se $U_i(x)$ é vasio, então $F_i(x,U_i(x))$ é também vasio, logo direcionalmente convexo. No que se segue entretanto, a existência de controles Ótimos garante que $U_i(\hat{x}_i)$ não sejam vasios.

(3) Finalmente, suporemos que $\forall \ i = 0,\ldots,k-1$ os conjuntos X_i são convexos.

PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Em relação ao problema definido e às hipóteses apresentadas acima, podemos enunciar o seguinte:

(4) TEOREMA:

Se $(\hat{u}_0,\dots,\hat{u}_{k-1})$ é uma sequência de controles Ótimos e $(\hat{x}_0,\dots,\hat{x}_k)$ uma trajetória correspondente para o problema, então existem vetores $p_0,\dots,p_k \in E^n$; $\mu_0 \in E^{\ell_0}$; $\mu_k \in E^{\ell_k}$ e um escalar $p^o \leq 0$ nem todos nulos, tais que:

$$\left\langle p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)} \right]^T, (\delta x_i, \delta u_i) \right\rangle + \left\langle p_{i+1}, \frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)} (\delta x_i,\delta u_i) \right\rangle +$$

(5) $$+ \left\langle p_{i+1},\delta x_i \right\rangle - \left\langle p_i,\delta x_i \right\rangle \leq 0$$

$$\forall\ (\delta x_i,\delta u_i) \in \overline{RC}\ ((\hat{x}_i,\hat{u}_i), X_i)^* \ , \ i = 0,\dots,k - i$$

(6) $$p_k = - \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x} \right]^T \mu_k$$

(7) $$p_0 = - \left[\frac{\partial g_0(\hat{x}_0)}{\partial x} \right]^T \mu_0$$

(*) Vide Apêndice

Finalmente, para $i = 0,\ldots,k-1$ o Hamiltoneano

$$H : E^n \times E^m \times E^n \times E \times \{0,\ldots,k-1\} \to E$$

$$(x,u,p,p^o,i) \longmapsto p^o f_i^o(x,u) + \langle p, f_i(x,u)\rangle$$

satisfaz a condição de máximo:

$$H(\hat{x}_i,\hat{u}_i,p_{i+1},p^o,i) \geq H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^o,i) \ \forall\ u_i \in U_i(\hat{x}_i)$$

Para demonstrar o Teorema, transformaremos o problema em um problema de programação matemática da forma:

(8) Encontrar um vetor $\hat{z} \in E^n$ satisfazendo

(9) $\hat{z} \in \Omega$

(10) $r(\hat{z}) = 0$ tal que

$f(\hat{z}) \leq f(z)$ $\forall\ z \in E^n$ satisfazendo (9) e (10) onde

$f : E^n \to E$, $r : E^n \to E^m$ são funções continuamente diferenciáveis e Ω é um subconjunto de E^n.

Definiremos conjuntos Ω' e $C(\hat{z},\Omega')$ e mostraremos que satisfazem as hipóteses do:

(11) <u>TEOREMA</u>:

Seja $\Omega' \subset E^m$ um conjunto com a propriedade que $\forall\ z' \in \Omega'\ \exists\ z \in \Omega$ satisfazendo $r(z) = r(z')$ e $f(z) \leq f(z')$. Se $\hat{z}$ é uma solução ótima para o problema de programação matemática definido acima, $\hat{z} \in \Omega'$ e $C(\hat{z},\Omega')$ é uma aproximação cônica de segunda espécie (Apêndice, (13)) de Ω' em $\hat{z}$, então existe um vetor não nulo $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^m) \in E^{m+1}$ com $\phi^0 \leq 0$ tal que $\forall\ \delta z \in C(\hat{z}, \Omega')$

$$\left\langle \phi\ ,\ \frac{\partial F(\hat{z})}{\partial z}\,\delta z \right\rangle \leqq 0$$

<u>prova</u>: [1], pg. 85

A aplicação desse Teorema nos conduzirá ao resultado almejado.

TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA EM UM DA FORMA (8):

$\forall\ i = 0, \ldots, k-1$ seja $V_i = (v_i^o, v_i) \in E^{n+1}$

onde $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n) \in E^n$

Então a equação:

$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i)$ $\quad i = 0, \ldots, k$ é equivalente a

$x_{i+1} - x_i = v_i$ com $v_i \in f_i(x_i, U_i(x_i))$ $\quad i = 0, \ldots, k-1$

Seja

$z = ((x_0, u_0), \ldots, (x_k, u_k), V_0, \ldots, V_{k-1}) \in E^{2n(k+1) + k(n+1)}$

podemos então definir:

(12) $$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i^o$$

$$(13) \qquad r(z) = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 - v_0 \\ \vdots \\ x_k - x_{k-1} - v_{k-1} \\ g_0(x_0) \\ g_k(x_k) \end{bmatrix} = 0$$

$$(14) \qquad \Omega = \{z = ((x_0,u_0),\ldots,(x_k,u_k),V_0,\ldots,V_{k-1}) : (x_i,u_i) \in X_i \text{ e } V_i \in F_i(x_i,U_i(x_i)) \ , \ i = 0,\ldots,k-1\}$$

<u>OBSERVAÇÃO</u>: $\forall\ i = 0,\ldots,k-1$,

$z \in \Omega \Longrightarrow v_i^o = f_i^o(x_i,u_i)$ para algum $(x_i,u_i) \in X_i$

Então $f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i^o = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^o(x_i,u_i)$ se $z \in \Omega$

$$(15) \qquad \Omega' = \{z = ((x_0,u_0),\ldots,(x_k,u_k),V_0,\ldots,V_{k-1}) : (x_i,u_i) \in X_i \text{ e } V_i \in \text{co } F_i(x_i,U_i(x_i)) \ , \ i = 0,\ldots,k-1\}$$

Seja $(\hat{u}_0,\ldots,\hat{u}_{k-1}$ uma sequência de controles ótimos para o problema original e $(\hat{x}_0,\ldots,\hat{x}_k)$ a trajetória correspondente. Também, seja $\hat{V}_i \overset{\Delta}{=} F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)$, $i = 0,\ldots,k-1$. Isto posto, definamos:

(16) $\hat{z} = ((\hat{x}_0,\hat{u}_0),\ldots,(\hat{x}_k,\hat{u}_k),\hat{V}_0,\ldots,\hat{V}_{k-1})$

(17) $C(\hat{z},\Omega') = \{\delta z = ((\delta x_0,\delta u_0),\ldots,(\delta x_k,\delta u_k),V_0,\ldots,V_{k-1}) :$

$$(\delta x_i,\delta u_i) \in RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i),X_i) \quad e$$

$$\delta V_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\,\delta x_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\,\delta u_i \in$$

$$\in RC\,(\hat{V}_i, \mathrm{co}\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))\} \quad ^{*}$$

VERIFICAÇÃO DE QUE OS CONJUNTOS Ω' e $C\ (z,\Omega')$ SATISFAZEM AS HIPÓTESES DO TEOREMA (11):

(18) LEMA:

O conjunto Ω' satisfaz as hipóteses do TEOREMA (11).

prova: Seja $z^* = ((x_0^*,u_0^*),\ldots,(x_k^*,u_k^*),V_0^*,\ldots,V_{k-1}^*) \in \Omega'$

Como os conjuntos $F_i(x_i^*,U_i(x_i^*))$ são b_0 - convexos e

$V_i^* \in \mathrm{co}\ F_i(x_i^*,U_i(x_i^*)) \subset E^{n+1}$ $i = 0,\ldots,k-1$, então

$\exists\ \tilde{V} \in F_i(x_i^*,U_i(x_i^*))$, $i = 0,\ldots,k-1 \ni$

$\tilde{V}_i = V_i^* + \beta_i\, b_0$ para algum $\beta_i \geq 0$

logo $\bar{v}_i = v_i^*$ e $\tilde{v}_i^0 \leq v_i^0$ $i = 0,\ldots,k-1$

(*) Vide Apêndice, (11), para a definição de $RC(\hat{z},\Omega)$

mas $\tilde{V}_i \in F_i(x_i^*, U_i(x_i^*)) \Longrightarrow \exists \tilde{u}_i \in U_i(x_i^3) \ni$

$\tilde{V}_i = F_i(x_i^*, \tilde{u}_i)$, Portanto para

$\tilde{z} = ((x_0^*, \tilde{u}_i), \ldots, (x_k^*, \tilde{u}_k), \tilde{V}_1, \ldots \tilde{V}_{k-1})$ temos:

$$r(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} x_1^* - x_0^* - \tilde{v}_0 \\ \vdots \\ x_k^* - x_{k-1}^* - \tilde{v}_{k-1} \\ g_0(x_0^*) \\ g_k(x_k^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* - x_0^* - v_0^* \\ \vdots \\ x_k^* - x_{k-1}^* - v_{k-1}^* \\ g_0(x_0^*) \\ g_k(x_k^*) \end{bmatrix} = r(z^*)$$

e

$$f(\tilde{z}) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{v}_i^o \leq \sum_{i=0}^{k-1} v_i^* = f(z^*)$$

(19) **LEMA**:

O conjunto $C(\hat{z}, \Omega')$ **é um cone.**

prova: **Seja** $\delta z \in C(\hat{z}, \Omega')$, $\delta z \neq 0$ e $\lambda \in E$, $h \geq 0$

Então, **evidentemente**

$$\lambda(\delta x_i, \delta u_i) \in RC((\hat{x}_i, \hat{u}_i), X_i)$$

também,

$$(20) \qquad \left[\lambda \; \delta V_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \lambda \; \delta x_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u} \lambda \; \delta u_i \right] \in$$

$$\in \; RC(\hat{V}_i, \; co \; F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$$

pois se

$$\left[\delta \; V_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \delta x_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u} \delta u_i \right] \in$$

$$\in \; RC(\hat{V}_i, \; co \; F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$$

Então $\exists \, \varepsilon > 0 \ni$

$$\hat{V}_i + \alpha \left[\delta V_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \delta x_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u} \delta u_i \right] \in$$

$$\in \; co \; F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)) \qquad \forall \; \alpha \in [0,\varepsilon]$$

Então, se tomarmos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, temos que

$$\hat{V}_i + \alpha \left[\lambda \; \delta V_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \lambda \; \delta x_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u} \lambda \; \delta u_i \right] \in$$

$$\in \; co \; F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)) \qquad \forall \; \alpha \in [0,\varepsilon'],$$

logo (20) vale.

Assim, se $\delta z \in C(\hat{z},\Omega')$, então

$A\ \delta z \in C(\hat{z},\Omega')$ para $A \geq 0$ Π

(21) LEMA:

O Conjunto $C(\hat{z},\Omega')$ é convexo.

prova:

Se $\delta z', \delta z'' \in C(\hat{z},\Omega')$, então

$(\delta x_i', \delta u_i')$, $(\delta x_i'', \delta u_i'') \in RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i), X_i)$

Como $RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i), X_i)$ é um cone convexo:

(22) $(\delta x_i', \delta u_i') + (\delta x_i'', \delta u_i'') \in RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i), X_i)$

Por outro lado, se

$\delta V_i', \delta V_i''$ E $RC(\hat{V}_i$, co $F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$,

Como co $F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$ é um conjunto convexo,

$RC(\hat{V}_i$, co $F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$ é um cone convexo. Então

(23) $$\delta V_i' + \delta V_i'' \in RC(\hat{V}_i, \text{co } F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$$

Assim, (22) e (23) $\Longrightarrow \delta z' + \delta z'' \in C(\hat{z},\Omega')$, o que, pelo fato de $C(\hat{z},\Omega')$ ser um cone garante que seja convexo.

(24) LEMA:

O conjunto $C(\hat{z},\Omega')$ é uma aproximação cônica de segunda espécie do conjunto Ω', no ponto $\hat{z}$.

prova:

Uma vez que já foi provado que $C(\hat{z},\Omega')$ é um cone convexo, resta provar que para toda coleção finita $\{\delta z_1,\dots,\delta z_p\}$ de vetores linearmente independentes em $C(\hat{z},\Omega')$, existem um escalar $\varepsilon > 0$ e uma função contínua

$$\xi : \text{Co } \{\hat{z}, \hat{z}+\varepsilon\delta z_1, \dots, \hat{z}+\varepsilon\delta z_p\} \longrightarrow \Omega'$$

tal que $\xi(\hat{z}+\delta z) = \hat{z}+\delta z+0(\delta z)$

onde
$$\lim_{\|\delta z\| \to 0} \frac{\|0(\delta z)\|}{\|\delta z\|} = 0$$

Então, seja $\{\delta z_1,\dots,\delta z_p\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em $C(\hat{z},\Omega')$ com

$$\delta z_j = ((\delta x_{0j},\delta u_{0j}),\dots,(\delta x_{kj},\delta u_{kj}),\delta V_{0j},\dots,\delta V_{(k-1)j})$$

Logo, pela definição de $C(\hat{z},\Omega')$ temos:

$$(\delta x_{ij},\delta u_{ij}) \in RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i),X_i) \qquad i=0,\dots,k; \quad j=1,\dots,p$$

e

$$\delta V_{ij} = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\,\delta x_{ij} + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\,\delta u_{ij} + (V_{ij}-\hat{V}_i)$$

para $i=0,\dots,k-1$; $\quad j=1,\dots,p$

onde

$$(V_{ij} - \hat{V}_i) \in RC(\hat{V}_i,\ \mathrm{co}\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$$

É importante notar que com isso estamos definindo V_{ij} que só depende de δz_j e $\hat{z}$.

Como os cones $RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i),X_i)$ e $RC(\hat{V}_i,\ \mathrm{co}\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$ são aproximações cônicas de primeira espécie (Apêndice, (12)), então para o conjunto $\{(\delta x_{i1},\delta u_{i1}),\dots,(\delta x_{ip},\delta u_{ip})\}$ de vetores linearmente independentes em $RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i),X_i)$ e para o conjunto $\{V_{i1}-\hat{V}_i,\dots,V_{ip}-\hat{V}_i\}$ de vetores linearmente independentes em $RC(\hat{V}_i,\ \mathrm{co}\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que

$$(25)\quad \mathrm{Co}\ \{(\hat{x}_i,\hat{u}_i),(\hat{x}_i,\hat{u}_i)+\varepsilon(\delta x_{i1},\delta u_{i1}),\ldots,(\hat{x}_i,\hat{u}_i)+$$

$$+\varepsilon(\delta x_{ip},\delta u_{ip})\}\subset X_i$$

e

$$(26)\quad \mathrm{Co}\ \{\hat{V}_i,\hat{V}_i+\varepsilon(V_{i1}-\hat{V}_i),\ldots,\hat{V}_i+\varepsilon(V_{ip}-\hat{V}_i)\}\subset \mathrm{Co}\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$$

Consequentemente, pela proposição (5) do apêndice, para quaisquer escalares $\mu^1,\mu^2,\ldots,\mu^p \geq 0$ tais que $\sum_{j=1}^{p}\mu^j \leq 1$ temos:

$$(27)\quad (\hat{x}_i,\hat{u}_i)+\varepsilon\sum_{j=1}^{p}\mu^j(\delta x_{ij},\delta u_{ij})\in X_i \qquad i=0,\ldots,k$$

e

$$\hat{V}_i+\varepsilon\sum_{j=1}^{p}\mu^j(V_{ij}-\hat{V}_i)\ \in \mathrm{co}\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) \qquad i=0,\ldots,k-1$$

Afirmação: esse ε serve para o nosso propósito e portanto à construção da função $\xi(\cdot)$.

Essa afirmação ficará justificada no processo de construção que será feito em três etapas:

<u>1ª etapa</u>: Obtenção de uma representação dos vetores $z=\hat{z}+\delta z\in \mathrm{co}\,\{\hat{z},\hat{z}+\varepsilon\delta z_1,\ldots,\hat{z}+\varepsilon\delta z_p\}$ em têrmos de vetores em X_i e em $F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$.

Seja C = co $\{\hat{z},\hat{z}+\varepsilon\delta z_1,\ldots,\hat{z}+\varepsilon\delta z_p\}$

Então, $\forall z \in C$ temos:

$$z = \hat{z} + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\ \delta z_j$$

onde $\mu^j(z) \geq 0,\quad j=1,\ldots,p \quad$ e $\quad \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \leq 1$

logo

(28) $\quad \delta z = z-\hat{z} = \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\ \delta z_j$

Também, como os vetores z_j são linearmente indepen - dentes, $\forall z \in C$ os escalares $\mu^j(z)$; $j=1,\ldots,p$ são univocamente de terminados por (28).

Agora, como

$$(V_{ij}-\hat{V}_i) \in RC(\hat{V}_i,\ co\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))); \qquad j=1,\ldots,p$$

temos:

$$\hat{V}_i + \varepsilon \sum_{k=1}^{p} \mu^k(V_{ik}-\hat{V}_i) \in co\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$$

para quaisquer escalares $\mu',\ldots,\mu^p \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{p} \mu^k \leq 1$

Logo, se tomarmos $\mu^j = 1$ e $\mu^k = 0$ se $k \neq j$ temos:

$\hat{V}_i + \varepsilon(V_{ij}-\hat{V}_i) \subset co\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$ para $i=0,\ldots,k-1$ e

$j=1,\ldots,p$

Mas, como

$$\hat{V}_i + \varepsilon(V_{ij}-\hat{V}_i) \in \text{co } F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$$

para cada $i=0,\ldots,k-1$ e para cada $j=1,\ldots,p$ existem vetores $\hat{u}_{ij}^{\alpha} \subset U_i(\hat{x}_i)$ com $\alpha=1,\ldots,s_{ij}$ tais que

$$(29) \quad \hat{V}_i + \varepsilon(V_{ij}-\hat{V}_i) = \sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(\hat{x}_i, \hat{u}_{ij}^{\alpha}) \quad i=0,\ldots,k-1;\ j=1,\ldots,p$$

onde $\lambda_{ij}^{a} \geq 0$, $\sum_{a=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} = 1$

É bom notar que os $\hat{u}_{ij}^{\alpha}$ só dependem dos V_{ij} e dos $\hat{V}_i$, portanto de δz_j e $\hat{z}$.

Consequentemente,

$$\forall\ \delta z = ((\delta x_0, \delta u_o), \ldots, (\delta x_k, \delta u_k),\ \delta V_0, \ldots, \delta V_{k-1}) = z-\hat{z}$$

onde $z \in C$, temos de (28):

$$(\delta x_i, \delta u_i) = \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)(\delta x_{ij}, \delta u_{ij}) \quad i=0,\ldots,k$$

Também,

$$\delta V_i = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i + (V_i-\hat{V}_i)$$

mas de (28):

$$(V_i-\hat{V}_i) = \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)(V_{ij}-\hat{V}_i)$$

então

$$\delta V_i = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i + \varepsilon\sum_{j=1}^{p}\mu^j(z)(V_{ij}-\hat{V}_i)$$

que, por (29) fica:

$$\delta V_i = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p}\mu^j(z)\left[\sum_{\alpha=1}^{s_{ij}}\lambda_{ij}^{\alpha}F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_{ij}^{\alpha}) - \hat{V}_i\right] \qquad i=0,\dots,k-1$$

ou:

$$\delta V_i = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i + \tag{30}$$

$$+ \sum_{j=1}^{P}\mu^j(z)\left[\sum_{\alpha=1}^{s_{ij}}\lambda_{ij}^{\alpha}F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_{ij}^{\alpha}) - F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right] \qquad i=0,\dots,k-1$$

<u>2ª etapa</u>: Definição de $\xi: C \to \Omega'$ e prova de que é contínua.

De (28) tinhamos: $\delta z = \varepsilon\sum_{j=1}^{P}\mu^j(z)\ \delta z_j$

Então:

$$\delta u_i = \varepsilon\sum_{j=1}^{p}\mu^j(z)\ \delta u_{ij}\ , \qquad \delta x_i = \varepsilon\sum_{j=1}^{p}\mu^j(z)\ \delta x_{ij}$$

DEFINIÇÃO:

$$u_{ij}^{\alpha}(z) \triangleq \hat{u}_{ij}^{\alpha} + \delta u_{ij}^{\alpha}(z)$$

onde

$$\delta u_{ij}^{\alpha}(z) \triangleq \sum_{j=1}^{p} \mu^{j}(z) \left[\varepsilon \delta u_{ij} + \hat{u}_i - \hat{u}_{ij}^{\alpha}\right]$$

PROPOSIÇÃO:

(i) $u_{ij}^{\alpha}(z) \in U_i(x_i) \quad \forall\, z \in C$

(ii) $u_{ij}^{\alpha}(\cdot)$ é contínua

(iii) $\lim_{z \to \hat{z}} u_{ij}^{\alpha}(z) = \hat{u}_{ij}^{\alpha}$

prova:

Observemos que:

$$(x_i, u_i) = (\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^{j}(z)(\delta x_{ij}, \delta u_{ij}) \in X_i \; \forall\, (x_i, u_i) \in C/_{(x_i, u_i)}$$

e que X_i é convexo.

Em particular,

$$(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \varepsilon(\delta x_{ij}, \delta u_{ij}) = (\hat{x}_i + \varepsilon\, \delta x_{ij}, \hat{u}_i + \varepsilon\, \delta u_{ij}) \in X_i$$

para $j=1,\ldots,p$

também, $(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \in X_i$

Então, qualquer combinação convexa dêsses pontos pertencerão também a X_i, isto é:

Se $\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_p = 1$, $\gamma_i \geq 0$, então

$$\gamma_0(\hat{x}_i, \hat{u}_{ij}^{\alpha}) + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j(\hat{x}_i + \varepsilon\ \delta x_{ij}, \hat{u}_i + \varepsilon\ \delta u_{ij}) \in X_i$$

$$\therefore\ (\gamma_0 \hat{x}_i + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j(\hat{x}_i + \varepsilon\ \delta x_{ij}),\ \gamma_0 \hat{u}_{ij}^{\alpha} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j(\hat{u}_i + \varepsilon\ \delta u_{ij})) \in X_i$$

$$\therefore\ (\hat{x}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \delta x_{ij}, \gamma_0 \hat{u}_i - \gamma_0 \hat{u}_i + \gamma_0 \hat{u}_{ij}^{\alpha} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j(\hat{u}_i + \varepsilon\ \delta u_{ij})) \in X_i$$

$$\therefore\ (\hat{x}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \delta x_{ij}, \gamma_0(\hat{u}_{ij}^{\alpha} - \hat{u}_i) + \hat{u}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \delta u_{ij}) \in X_i$$

Agora, como $\sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \leq 1$, $\mu^j(z) \geq 0 \quad \forall\, z \in C$, temos:

$$(\hat{x}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \delta x_{ij},\ \left[1 - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\right] (\hat{u}_{ij}^{\alpha} - \hat{u}_i) + \hat{u}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \delta u_{ij}) \in X_i$$

$$\forall\, z \in C$$

$$\therefore\ (x_i, u_i + \left[1 - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\right] (\hat{u}_{ij}^{\alpha} - \hat{u}_i)) \in X_i \quad \forall\, z \in C$$

Mas

$$u_i + \left[1-\sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\right](\hat{u}_{ij}^{\alpha}-\hat{u}_i) = u_i+\hat{u}_{ij}^{\alpha}-\sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\hat{u}_{ij}^{\alpha} - \hat{u}_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\hat{u}_i = \hat{u}_{ij}^{\alpha} + \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\delta u_{ij} - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\hat{u}_{ij}^{\alpha} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\hat{u}_i = \hat{u}_{ij}^{\alpha} + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\left[\varepsilon\delta u_{ij}-\hat{u}_{ij}^{\alpha}+\hat{u}_i\right] = u_{ij}^{\alpha}(z)$$

Então $(x_i, u_{ij}^{\alpha}(z)) \in X_i \quad \forall z \in C$ e (i) está verificada.

Além disso, como para $z \in C$

$$(31) \qquad \delta z = z-\hat{z} = \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\ \varepsilon\ \delta z_j$$

podemos escrever $\delta z = A\mu(z)$ onde

$$A = \left[\varepsilon\ \delta z_1 \ \dots \ \varepsilon\ \delta z_p\right] \quad \text{e} \quad \mu(z) = \left[\mu'(z)\dots\mu^p(z)\right]^T$$

Mostremos que A é injetiva , pois então fica **garantida** a existência de uma inversa à esquerda para A (apêndice, proposição (16)):

$$A\ a=s,\ Ab=s \Longrightarrow A(a-b) = 0, \text{ isto é:}$$

$$\varepsilon\ \delta z_1(a'-b')+\dots+\varepsilon\ \delta z_p(a^p-b^p) = 0$$

Mas os $\delta z_i, i=1,\ldots,p$ são linearmente independentes, logo $(a^i - b^i) = 0$, $i=1,\ldots,p$; isto é: $a=b$ e A é injetiva.

Consequentemente $\exists$ Y, inversa à esquerda de A $\ni$

(32) $\quad Y\,\delta z = \mu(z)$

Agora, como

$$u^{\alpha}_{ij}(z) = \hat{u}^{\alpha}_{ij} + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\ \varepsilon\ \delta u_{ij} + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)(\hat{u}_i - \hat{u}^{\alpha}_{ij}) =$$

$$= \hat{u}^{\alpha}_{ij} + \delta u_i + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\hat{u}_i - \hat{u}^{\alpha}_{ij}\right]$$

Podemos escrever:

$$u^{a}_{ij}(z) = \hat{u}^{\alpha}_{ij} + \delta u_i + B^{\alpha}_i\ \mu(z) \quad \text{onde}$$

$$B^{\alpha}_i = \left[(\hat{u}_i - \hat{u}^{\alpha}_{i1}) \ \ldots\ (\hat{u}_i - \hat{u}^{\alpha}_{ip})\right]$$

Finalmente, temos por (31):

$u^{\mu}_{ij}(z) = \hat{u}^{\alpha}_{ij} + \delta u_i + B^{\alpha}_i\ Y\ \delta z$, o que garante a continuidade de $u^{\alpha}_{ij}(.)$ e que $\lim_{z \to \hat{z}} u''_{ij}(z) = \hat{u}^{\alpha}_{ij}$ ((ii) e (iii)). $\triangleleft$

DEFINIÇÃO (de $\xi(.)$):

Seja $z = ((x_0,u_0),\ldots,(x_k,u_k),\ V_0,\ldots,V_{k-1}) \in C$ arbitrário e $\delta z = z - \hat{z}$

Então, $\xi \triangleq (y_0,\ldots,y_k,\ W_0,\ldots,W_{k-1})$

onde

$$y_i(z) \triangleq (x_i,u_i) \qquad i=0,\ldots,K$$

e

$$W_i(z) \triangleq F_i(x_i,u_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(x_i,u_{ij}^{\alpha}(z)) - F_i(x_i,u_i) \right]$$

onde os $\mu^j(z)$, $j=1,\ldots,p$ são univocamente determinados por (28).

Em primeiro lugar, observemos que por construção, temos por (27) que $(x_i,u_i) \in X_i$ $i=0,\ldots,k$, logo $y_i \in X_i$ i-$0,\ldots,k$

Também,

$$W_i(z) = F_i(x_i u_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(x_i,u_{ij}^{\alpha}(z)) - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\, F_i(x_i,u_i) =$$

$$= (1 - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z))\, F_i(x_i u_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(x_i,u_{ij}^{\alpha}(z))$$

Mas $\sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} = 1$, logo

$(1 - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} = 1$ o que garante que

$W_i(z)$ é uma combinação convexa de elementos de $F_i(x_i,U(x_i))$, logo:

$$W_i(z) \in \text{co}\ F_i(x_i, U_i(x_i))$$

e então $\xi(z) \in \Omega'$

Como $z \in C$ foi tomado arbitrário, $\xi(\cdot)$ mapeia C em Ω'.

Também, como composição de funções contínuas, $\xi(.)$ é contínua.

$3^{\underline{a}}$ etapa: Verificação de que

$$\xi(\hat{z}+\delta z) = \hat{z}+\delta z+0(\delta z) \qquad \text{com}$$

$$\lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||0(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

Seja, para $i=1,\dots,k-1$, $Z_i(z)$ uma matriz com p colunas, onde a j-ésima coluna é dada por:

$$(33) \qquad Z_i^j(z) = \sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(x_i, u_{ij}^{\alpha}(z)) - F_i(x_i, u_i)$$

Então $Z_i(z) = \left[Z_i^1(z) \dots Z_i^p(z) \right]$

Mas da definição de $\xi(\cdot)$ temos:

$$W_i(z) = F_i(x_i, u_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(x_i, u_{ij}^{\alpha}(z)) - F_i(x_i, u_i) \right]$$

o que implica em:

$$W_i(z) = F_i(x_i,u_i) + Z_i(z)\,\mu(z)$$

Então:

$$W_i(\hat{z}+\delta z) = F_i(\hat{x}_i+\delta x_i,\hat{u}_i+\delta u_i) + Z_i(\hat{z}+\delta z)\,\mu(\hat{z}+\delta z)$$

e usando (32), obtemos:

$$W_i(\hat{z}+\delta z) = F_i(\hat{x}_i+\delta x_i,\hat{u}_i+\delta u_i) + Z_i(\hat{z}+\delta z)\,Y\delta z\,.$$

por outro lado, as funções $F_i(.,.)$, $i=1,...,k-1$ são contínuamente diferenciáveis, logo podemos escrever:

(34) $$F_i(\hat{x}_i+\delta x_i,\hat{u}_i+\delta u_i) = F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + {}$$

$$+ \frac{\partial F_i(x_i,u_i)}{\partial u}\delta u_i + \bar{0}_i(\delta x_i,\delta u_i)$$

onde $$\lim_{\|(\delta x_i,\delta u_i)\|\to 0} \frac{\|\bar{0}_i(\delta x_i,\delta u_i)\|}{\|(\delta x_i,\delta u_i)\|} = 0$$

Além disso, evidentemente, $i=1,...,k-1$:

$$Z_i(\hat{z}+\delta z)Y\delta z = Z_i(\hat{z})Y\delta z + \left[Z_i(\hat{z}+\delta z) - Z_i(\hat{z})\right] Y\delta z$$

Chamando $\left[Z_i(\hat{z}+\delta z) - Z_i(\hat{z})\right] Y\delta z = \bar{\bar{O}}_i(\delta z)$

temos

$$(35) \qquad Z_i(\hat{z}+\delta z)Y\delta z = Z_i(\hat{z})Y\delta z + \bar{\bar{O}}_i(\delta z)$$

Onde, como $Z_i(\cdot)$ é contínua (composição de funções contínuas):

$$\lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||\bar{\bar{O}}_i(\delta z)||}{||\delta z||} = \lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||(Z_i(\hat{z}+\delta z) - Z_i(\hat{z})Y\delta z||}{||\delta z||} \leq$$

$$\leq \lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||Z_i(\hat{z}+\delta z) - Z_i(\hat{z})|| \; ||Y|| \; ||\delta z||}{||\delta z||} = 0$$

Então, (34) e (35) implicam que

$$W_i(\hat{z}+\delta z) = F_i(\hat{x}_i+\delta x_i, \hat{u}_i+\delta u_i) + Z_i(\hat{z}+\delta z)Y\delta z =$$

$$= F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i +$$

$$+ \bar{O}_i(\delta x_i,\delta u_i) + Z_i(\hat{z})Y\delta z + \bar{\bar{O}}_i(\delta z) =$$

$$= F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i + Z_i(\hat{z})Y\delta z + O_i(\delta z)$$

onde $O_i(\delta z) \triangleq \tilde{O}_i(\delta x_i, \delta u_i) + \bar{\bar{O}}_i(\delta z)$

Assim, temos:

$$(36) \qquad W_i(\hat{z}+\delta z) = F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\delta x_i + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\delta u_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_{ij}} \lambda_{ij}^{\alpha} F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_{ij}^{\alpha}) - F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \right] + O_i(\delta z)$$

com $$\lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||O_i(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

Logo, para qualquer $z=\hat{z}+\delta z \in C$, temos:

$$\xi(\hat{z}+\delta z) = (y_0(\hat{z}+\delta z),\ldots,y_K(\hat{z}+\delta z),\ W_0(\hat{z}+\delta z),\ldots,W_{K-1}(\hat{z}+\delta z))$$

Mas,

$$(37) \qquad y_i(\hat{z}+\delta z) = (\hat{x}_i,\hat{u}_i) + (\delta x_i,\delta u_i) \qquad i=0,\ldots,k$$

e de (36) e (30) temos:

$$(38) \qquad W_i(\hat{z}+\delta z) = \hat{V}_i + \delta V_i + O_i(\delta z) \qquad i=0,\ldots,k-1$$

logo de (37) e (38) temos que

$$\xi(\hat{z}+\delta z) = \hat{z} + \delta z + O(\delta z)$$

com $$\lim_{\|\delta z\| \to 0} \frac{\|O(\delta z)\|}{\|\delta z\|} = 0$$

onde $O(\delta z) = (O_1(\delta z),\ldots,O_{k-1}(\delta z))$

e consequentemente $C(z,\Omega')$ é uma aproximação cônica de segunda espécie do conjunto Ω' no ponto $\hat{z}$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA (4)

Como os conjuntos Ω' e $C(z',\Omega')$ satisfazem as hipoteses do teorema (11), aplicando este concluimos que:

$\exists$ um vetor não nulo $\phi = (p^o, \P)$, com $p^o \leq 0$ e

$\P = (-p_1,\ldots,-p_k,\mu_0,\mu_k)$ onde $p^o \in E$, $p_i \in E^n$ para $i=1,\ldots,k$ $\ni$

$$\left\langle \phi \, , \, \frac{\partial F(\hat{z})}{\partial z}\delta z \right\rangle \leq 0 \qquad \forall \delta z \in C(\hat{z},\Omega')$$

e onde

$$F(z) = \begin{bmatrix} f(z) \\ r(z) \end{bmatrix}$$

Então:

$$(39) \qquad p^o \left\langle \nabla f(\hat{z}), \delta z \right\rangle + \left\langle \P, \frac{\partial r(\hat{z})}{\partial z} z \right\rangle \leq 0 \quad \forall \delta z \in C(\hat{z}, \Omega')$$

Substituindo f e r em (39), temos $\forall \delta z \in C(\hat{z},\Omega')$:

$$(40) \qquad p^o \sum_{i=0}^{K-1} v_i^o + \sum_{i=0}^{K-1} \left\langle -p_{i+1}, (\delta x_{i+1} - \delta x_i - \delta v_i) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \mu_0, \frac{\partial g_o(x_o)}{\partial x} \delta x_0 \right\rangle + \left\langle \mu_k, \frac{\partial g_K(x_K)}{\partial x} \delta x_k \right\rangle \leq 0$$

Suponhamos que

$$\delta_z = (0,\ldots,0,\delta V_i,0,\ldots,0) \in C(z,\Omega')$$

Então, de (40) temos:

$$(41) \qquad p^o \, \delta v_i^o + \left\langle p_{i+1}, \delta V_i \right\rangle \leq 0$$

$$\forall \delta V_i \in RC(\hat{V}_i, \, co \; F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$$

Mas, como co $F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$ é convexo,

$$RC(\hat{V}_i, \, co \; F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) =$$

$$= \{\delta V : \delta V = \lambda(V-\hat{V}_i), \; \lambda \geq 0, \; V \in co \; F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))\}.$$

Em particular, se h = 1

$$\{\delta V : \delta V = V-\hat{V}_i,\ V \in \text{co } F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))\} \subset$$

$$\subset \text{RC } (\hat{V}_i,\ \text{co } F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$$

Isto é:

$$\text{co } F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) \subset \{\hat{V}_i\} + \text{RC}(\hat{V}_i,\ \text{co } F_i(\hat{x}_i,U_i(x_i)))$$

Mas

$$F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) \subset \text{co } F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)$$

Então

$$\delta V_i = F_i(\hat{x}_i,u_i) - F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \in$$

$$\in \text{RC}(\hat{V}_i,\ \text{co } F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))) \qquad \forall\, u_i \in U_i(\hat{x}_i)$$

Logo de (41) temos:

$$p^o \delta v_i^o + \left\langle p_{i+1},\ F_i(\hat{x}_i,u_i) - F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right\rangle \leq 0$$

ou seja:

$$p^o f_i^o(\hat{x}_i,u_i) + \left\langle p_{i+1},\ F_i(\hat{x}_i,u_i)\right\rangle \leq$$

$$\leq p^o f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \left\langle p_{i+1},\ F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right\rangle$$

$$\forall\, u_i \in U_i(\hat{x}_i)$$

Seja agora

$$\delta z = (0,\ldots,0,(\delta x_k,\delta u_k),0,\ldots,0)$$

com $(\delta x_k,\delta u_k) \in RC((\hat{x}_k,\hat{u}_k),\ X_k)$

Então (40) nos dá:

$$(42) \qquad \left\langle -p_k + \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k,\ \delta x_k \right\rangle \leqq 0$$

$$\forall\ (\delta x_k,\delta u_p) \in RC((\hat{x}_k,\hat{u}_k),\ X_k)$$

mas como $X_k = E^n \times E^m$

$$RC((x_k,u_k),\ X_k) = E^n \times E^m$$

então de (42) obtemos:

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k$$

Finalmente, definamos:

$$p_0 = -\left[\frac{\partial g_0(\hat{x}_0)}{\partial x}\right]^T \mu_0 \ ,$$

e seja

$$\delta z = (0,\ldots,0,(\delta x_i,\delta u_i),0,\ldots,0,\delta V_i,0,\ldots,0) \in C(\hat{z},\Omega')$$

para $i \neq k$ com:

$$\delta V_i = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)}\ (\delta x_i,\delta u_i)$$

Então, de (40) temos:

$$(43) \qquad \left\langle p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)}\right], (\delta x_i,\delta u_i) \right\rangle +$$

$$\left\langle p_{i+1}, \frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)} (\delta x_i,\delta u_i)\right\rangle + \left\langle p_{i+1},\delta x_i \right\rangle -$$

$$- \left\langle p_i,\delta x_i\right\rangle \leq 0$$

$$\forall (\delta x_i,\delta u_i) \in \overline{RC}((\hat{x}_i,\hat{u}_i), X_i) \qquad \square$$

(44) TEOREMA:

Suponhamos que todas as hipóteses do teorema (4) são satisfeitas, com

$$X_i = \{(x_i,u_i) : R_i(x_i,u_i) \leqq 0\}$$

$$U_i(x_i) = \{u_i : R_i(x_i,u_i) \leqq 0\}$$

para $i=0,\dots,k-1$

onde cada função $R_i : E^n \times E^m \rightarrow E^{q_i}$ é continuamente diferenciavel e os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes, isto é:

$$\{\nabla R_i^j(\hat{x}_i,\hat{u}_i) : j \in I_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\} \qquad i=0,\dots,k-1$$

é um conjunto linearmente independente, onde:

$$I_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) = \{j : R_i^j(\hat{x}_i,\hat{u}_i) = 0,\ 1 \leq j \leq q_i\} \qquad i=0,\dots,k-1$$

Então existem vetores $p_0,\dots,p_k \in E^n; \mu_0 \in E\ ; \mu_k \in E^{\ell_k}$; $\lambda_o \in E^{q_o},\dots,\lambda_{k-1} \in E^{q_{k-1}}$ e um escalar $p^o \leq 0$ nem todos nulos tais que:

$$\lambda_i \leq 0 \qquad i=0,\dots,k-1$$

(45) $$p_i - p_{i+1} = p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i$$

(46) $$p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T \lambda_i = 0$$

(47) $$\left\langle \lambda_i, R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \right\rangle = 0$$

para $i=0,\dots,k-1$

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k \qquad p_0 = -\left[\frac{\partial g_0(\hat{x}_0)}{\partial x}\right]^T \mu_0$$

e finalmente, para $i=0,\dots,k-1$

Hamiltoneano

$$H : E^n \times E^m \times E^n \times E \times \{0,\ldots, -1\} \to E$$

$$(x,u,p,p^o,i) \longmapsto p^o f_i^o(x,u) + \left\langle p, f_i(x,u) \right\rangle$$

satisfaz a condição de máximo:

$$H(\hat{x}_i,\hat{u}_i,p_{i+1},p^o,i) \geq H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^o,i)$$

$$\forall\, u_i \in U_i(\hat{x}_i)$$

<u>prova:</u> A independência linear dos vetores gradientes implica que o conjunto:

$$\{(\delta x_i,\delta u_i) : \left\langle \left[\frac{\partial R_i^j(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)}\right]^T, (\delta x_i,\delta u_i)\right\rangle \leq 0$$

para $j \subset I_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\}$

esteja contido em $RC((\hat{x}_i,\hat{u}_i), X_i)$

Então, **da expressão (43) obtemos:**

$$\left\langle p^o \left[\frac{f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{(x,u)}\right]^T + \left[\frac{f_i(x_i,u_i)}{(x,u)}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{I_n}{0_m}\right] p_{i+1} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{I_n}{0_m}\right] p_i , (\delta x_i,\delta u_i) \right\rangle \leq 0$$

para todo $(\delta x_i, \delta u_i)$ satisfazendo:

$$\left\langle \left[\frac{\partial R_i^j(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)}\right]^T, (\delta x_i, \delta u_i)\right\rangle \leq 0 \quad \text{para } j \in I_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)$$

Aplicando o lema de Farkas (Apêndice, Q.7)), temos que

$\exists \lambda_i \in E^{q_i}$, $\lambda_i \leq 0$ i = - tais que as expressões (459, (46) e (47) sejam satisfeitas. Evidentemente, como as hipóteses do teorema (4) são todas satisfeitas, as outras condições, análogas as do teorema (4), são também satisfeitas. $\square$

(48) <u>COROLÁRIO</u>

Se as funções $R_i^j(.,.)$, $i=0,\ldots,k-1$; $j=1,\ldots,q_i$ são convexas vale o teorema (44).

C A P Í T U L O III

PREÇOS DE EQUILÍBRIO . CONDIÇÕES DE NORMALIDADE

Os resultados do capítulo anterior, quando referidos diretamente a configurações de produção e funções critério a elas associadas, dão margem a várias interpretações de interesse econômico. Assim, são vistas aqui condições para a existência de preços de equilíbrio forte e fraco e normalidade.

No que se segue, configurações de produção P são consideradas dadas explicitamente por sequências de gráficos de restrições de funções $(P_i)_{i=1,\dots,k-1}$.

$$P_i = \text{Gr}\, w_i(.,.) \,/\, X_i \;,$$

e funções critério como aplicações :

$$\rho : V \longrightarrow E$$

$$((x_i,u_i))_{i=o,\dots,k} \longmapsto \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i(x_i,u_i)$$

onde V é o conjunto dos processos viáveis para P e as ρ_i são funções:

$$\rho_i : E^n \times E^m \longrightarrow E \qquad i=0,\dots,k-1$$

PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA CONFIGURAÇÕES DE PRODUÇÃO

Se supusermos que $g_k(.) = 0$ e $g_o(x_o) = x_o - \theta = 0$, no teorema (44) do segundo capitulo, verificamos que uma condição necessária para que uma sequência $(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ de controles correspondendo à trajetória $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)$ seja uma solução Ótima do problema lá definido, é que $\exists\ p^o, p_o, \ldots, p_k, \mu_o, \mu_k$; $p^o \in E$, $p^o \leq 0$, $p_o, \ldots, p_k \in E^n$, $\mu_o \in E^{l_o}$, $\mu_k \in E^{l_k}$ nem todos nulos, tais que:

(1)
$$\left\langle p^o \frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}^T + \frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}^T p_{i+1}, \delta x_i \right\rangle + \left\langle p^o \frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}^T + \frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}^T p_{i+1}, \delta u_i \right\rangle + \left\langle p_{i+1} - p_i, \delta x_i \right\rangle \leq 0 \qquad i=0,\ldots,k-1 \quad \text{, para}$$

$$(\delta x_i, \delta u_i) = \lambda(x_i - \hat{x}_i, u_i - \hat{u}_i) \ , \ (x_i, u_i) \in X_i, \quad \lambda \geq 0$$

(2)
$$p_o = -\mu_o \quad , \quad p_k = 0$$

(3)
$$p^o f_i^o(\hat{x}_i, u_i) + \left\langle p_{i+1}, f_i(\hat{x}_i, u_i) \right\rangle \leq p^o f_i^o(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \left\langle p_{i+1}, f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \right\rangle \quad \text{se } u_i \in U_i(\hat{x}_i) \quad i=0,\ldots,k-1$$

Essa Última relação expressando o princípio do máximo, propriamente dito.

Se adicionarmos $\langle p_{i+1}, \hat{x}_i \rangle$ a ambos os membros de (3), obtemos:

$$p^o f_i^o(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \langle p_{i+1}, \hat{x}_{i+1} \rangle \geq p^o f_i^o(\hat{x}_i, u_i) + \langle p_{i+1}, \hat{x}_i + f_i(\hat{x}_i, u_i) \rangle$$

e, subtraindo $\langle p_i, \hat{x}_i \rangle$ nos dois membros:

$$(4) \qquad -p^o \rho_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \langle p_{i+1}, \hat{x}_{i+1} \rangle - \langle p_i, \hat{x}_i \rangle \geq$$

$$-p^o \rho_i(\hat{x}_i, u_i) + \langle p_{i+1}, w_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \rangle - \langle p_i, \hat{x}_i \rangle$$

$$\forall u_i \ni (\hat{x}_i, u_i) \in X_i$$

onde

$$\rho_i(x,u) = -f_i^o(x,u) \qquad \text{e}$$

$$w_i(x,u) = x + f_i(x,u)$$

Por se tratar de uma condição necessária para a existência de um processo Ótimo para uma configuração de produção, chamaremos essa relação de princípio do máximo para configurações de produção.

PREÇOS DE EQUILÍBRIO FRACO

Dizemos que uma configuração de produção

$$P = (P_i)_{i=0,\dots,k-1}$$

onde

$$P_i = \mathrm{Gr}\ w(.,.)/X_i$$

goza de disponibilidade livre , se:

(5) $(x,u) \in X_i,\ x' \geqq x \Rightarrow (x',u) \in X_i$.

Nesse caso, uma variação:

$(\delta x_i, \delta u_i) = (\alpha, 0)$, $a \geq 0$ arbitrário

é válida para (1), de onde obtemos:

$$\left\langle p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p_{i+1} - p_i, \alpha \right\rangle \leq 0$$

$$\forall\ \alpha \geqq 0$$

$$p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p_{i+1} - p_i \leqq 0$$

ou seja:

(6) $$p_i \geqq \left[\frac{\partial w_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} - p^o \frac{\partial \rho_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}$$

Logo, se as condições:

$$(7) \qquad \frac{\partial w_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} \geqq 0$$

$$(8) \qquad \frac{\partial \rho_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} \geqq 0$$

são satisfeitas, e já que $p_k = 0$, então:

$$(9) \qquad p_i \geqq 0 \qquad i = 0, \ldots, k$$

Quando essa condição for satisfeita, esses vetores serão denominados preços associados aos vetores x_i, e a existência de vetores $p_o, \ldots, p_k$, que junto com um escalar $p^o \leq 0$ satisfazem (4), pode ser interpretada como a existência de preços de equilíbrio fraco para uma configuração de produção, em relação a uma função critério.

<u>Observação</u> :

As condições (7) e (8) são satisfeitas quando as componentes de $\rho_i(.,.)$ e $w_i(.,.)$ são monotônicas crescentes na primeira variável.

PREÇOS DE EQUILÍBRIO FORTE

Uma outra forma de escrever a relação (1) seria:

$$(10) \quad p^o \left[\frac{\partial f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)}\right] (\delta x_i,\delta u_i) + \left\langle p_{i+1}, \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial(x,u)}\right] (\delta x_i,\delta u_i)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle p_{i+1} - p_i, \delta x_i \right\rangle \leq 0 \qquad i=0,\ldots,k-1$$

para $(\delta x_i,\delta u_i) = \lambda(x_i-\hat{x}_i,u_i-\hat{u}_i)$, $(x_i,u_i) \in X_i$, $h \geq 0$

Portanto, se $p_i \geqq 0$ para $i=0,\ldots,k-1$ e:

(11) $f_i(.,.$ é côncova, $i=0,\ldots,k-1$

(12) $f_i^o(.,.)$ é convexa, $i=0,\ldots,k-1$;

Como $p^o \leq 0$, tomando $\lambda=1$ em (10), obteríamos:

$$p^o \left[f_i^o(x_i,u_i)-f_i^o(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right] + \left\langle p_{i+1}, f_i(x_i,u_i)-f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle p_{i+1} - p_i , x_i-\hat{x}_i \right\rangle \leq 0 \qquad i=0,\ldots,k-1$$

para $(x_i,u_i) \in X_i$

ou seja

$$-p^o \left[\rho_i(x_i,u_i)-\rho_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right] + \left\langle p_{i+1}, w_i(x_i,u_i)-w_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\right\rangle -$$

$$-\langle p_i, x_i - \hat{x}_1 \rangle \leq 0 \qquad i=0,\ldots,k-1 \quad \text{para} \quad (x_i,u_i) \in X_i \quad ,$$

ou ainda:

(13) $$-p^o \rho_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \langle p_{i+1}, w_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \rangle - \langle p_i, \hat{x}_i \rangle \geq$$

$$\geq -p^o \rho_i(x_i,u_i) + \langle p_{i+1}, w_i(x_i,u_i) \rangle - \langle p_i, x_i \rangle$$

$$i=0,\ldots,k-1 \qquad \text{para} \quad (x_i,u_i) \in X_i$$

Então, podemos concluir que satisfeitas as condições (9), (11) e (12), uma condição necessária para que um processo $((\hat{x}_i,\hat{u}_i))_{i=0,\ldots,k}$, viável para uma configuração de produção, seja ótimo em relação às funções ρ_i, $i=0,\ldots,k-1$ é que existam vetores $p_o,\ldots,p_k$ não negativos, e um escalar $p^o \leq 0$ nem todos nulos, tais que:

(14) $$-p^o \rho_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \langle p_{i+1}, \hat{x}_{i+1} \rangle - \langle p_i, \hat{x}_i \rangle \geq$$

$$\geq -p^o \rho_i(x_i,u_i) + \langle p_{i+1}, x_{i+1} \rangle - \langle p_i, x_i \rangle$$

para todo processo $((x_i,u_i))_{i=0,\ldots,k}$ viável para a configuração de produção.

Quando isso ocorrer, esses vetores serão chamados preços de equilíbrio forte.

<u>observação:</u>

As condições (11) e (12) são equivalentes a $w_i(.,.)$ e $\rho_i(.,.$ serem côncavas.

CONDIÇÕES PARA NORMALIDADE ($p^o=-1$)

Admitamos que na condição necessária de otimalidade (14), $p^o=0$. Então, nem todos os preços de equilíbrio forte $p_o,\dots,p_k$ podem ser nulos. Mas sabemos que $p_k=0$, e se:

(15) $(0,0) \in X_i \quad i=0,\dots,k-1$

(16) $w_i(0,0)=0 \quad 0 \;,\dots,k-1$, temos:

$$\langle p_{i+1},\hat{x}_{i+1}\rangle - \langle p_i,\hat{x}_i\rangle \geq 0 \qquad i=0,\dots,k-1$$

que implica em:

(17) $$0 = \langle p_k,\hat{x}_k\rangle \geq \langle p_{i+1},\hat{x}_{i+1}\rangle \geq \langle p_i,\hat{x}_i\rangle \qquad i=0,\dots,k-1$$

Suponhamos também que seja satisfeita a condição:

(18) $\forall\, s \in 0 \quad ..,k-1\}$ $\exists$ um processo viável $((x_i^s,u_i^s))_{i=0,\dots,k}$

$\ni\; x_s^s > 0$

Nesse caso, nós temos:

$$\langle p_s,\hat{x}_s\rangle - \langle p_{s-1},\hat{x}_{s-1}\rangle \geq \langle p_s,x_s^s\rangle - \langle p_{s-1},x_{s-1}^s\rangle$$

$$\langle p_{s-1},\hat{x}_{s-1}\rangle - \langle p_{s-2},\hat{x}_{s-2}\rangle \geq \langle p_{s-1},x_{s-1}^s\rangle - \langle p_{s-2},x_{s-2}^s\rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle p_1,\hat{x}_1\rangle - \langle p_o,\theta\rangle \geq \langle p_1,x_1^s\rangle - \langle p_o,\theta\rangle$$

que, somadas membro a membro, proporciona:

$$\langle p_s, \hat{x}_s \rangle \geq \langle p_s, x_s^s \rangle$$

Então, de (17) e de $p_s \geq 0$, $x_s^s > 0$:

$0 \geq \langle p_s, x_s^s \rangle \geq 0$, ou seja,

$p_s = 0 \; \forall \; s=1. \quad ,k-1$ e chegamos a uma contradição.

Logo, podemos concluir que:

(15), (16) e (17) $\quad p^o < 0$, e redefinindo os

p_i, $i=0,\ldots,k$ (dividindo-os por $-p^o$), reescrever a relação (14) na forma:

(19) $$\rho_i(\hat{x}_i, u_i) + \langle p_{i+1}, \hat{x}_{i+1} \rangle - \langle p_i, \hat{x}_i \rangle \geq$$

$$\geq \rho_i(x_i, u_i) + \langle p_{i+1}, x_{i+1} \rangle - \langle p_i, x_i \rangle \quad i=0,\ldots,k-1 ,$$

equivalente àquela, quando $p^o = -1$.

OBSERVAÇÕES E EXEMPLOS

1) A hipótese de b_o - convexidade feita no 2º capítulo:

Dados:

$u', u'' \in U_i(x)$, $0 \leq \lambda \leq 1$

$\exists \; u(\lambda) \in U_i(x) \;\ni$

$$f_i(x,u(\lambda)) = \lambda f_i(x,u') + (1-\lambda)f_i(x,u'') \quad \text{e}$$

$$f_i^o(x,u(\lambda)) \leqq \lambda f_i^o(x,u') + (1-\lambda)f_i^o(x,u'') \quad ,$$

no caso em que $f_i(.,.)$ ou equivalentemente $w_i(.,.)$, sejam afins na primeira variável, é garantida pela concavidade de $f_i^o(.,.)$ (concavidade de $\rho_i(.,.)$) :

$$f_i^o(x,\lambda u'+(1-\lambda)u'') \leqq \lambda f_i^o(x,u')+(1-\lambda)f_i^o(x,u'') \quad .$$

2) Em relação à representação de uma economia dada no segun do exemplo no fim do 1º capítulo por intermédio de conjuntos Q_i (Weitzman [16]) , se considerarmos que $((\alpha_i,x_i))_{i=0,...,k}$ é um programa viável para $Q = (Q_i)_{i=0,...,k-1}$ quando

$$(x_i,\alpha_i,x_{i+1}) \in Q_i \qquad i=0,...,k-1 \quad , \; x_o=\theta$$

e admitirmos satisfeitas as hipóteses:

(20) Se $(x,\alpha,y) \in Q_i$ e $x' \geqq x$, então $(x',\alpha,y) \in Q_i$

(21) $(0,0,0) \in Q_i$

(22) Q_i é convexo

(23) s $\{0,...,k-1\}$ $\exists$ um programa $((\alpha_i^s, x_i^s))_{i=0,...,k}$ viável para Q com $x_s^s > 0$,

e para a configuração de produção associada:

$P_i = Gr\, w_i(.,.) / Q_i$, definirmos a sequência de funções

$(\rho_i)_{i=0,\ldots,k-1}$ por :

$$\rho_i(x,u) = \langle b,u \rangle \quad \text{onde} \quad b=(1,0,\ldots,0) \quad ,$$

as condições que garantem a existência de preços de equilíbrio forte com $p^o=-1$ (expressão (19)), são todas verificadas.

As hipóteses (20) a (23) são comuns em economia e são as mesmas utilizadas por Weitzman [16] .

3) Quando, em uma configuração de produção

$P = \mathrm{Gr}\, w(.,.) / X$, o conjunto X é dado na forma:

$X = \{(x,u) : R(x,u) \leq 0 \}$, o teorema (44) do 2º capítulo nos fornece meios de determinar os vetores $p_o,\ldots,p_k$ (equações (45), (46), (47) do capítulo citado). Assim, por exemplo, se

$$w(x,u) = (A+I)x + Bu$$

$$\rho(x,u) = \langle c,x \rangle - \langle d,u \rangle$$

$$R(x,u) = \begin{bmatrix} -u \\ u - Dx \end{bmatrix}$$

onde as matrizes D, A+I e B têm elementos não-negativos, além de as condições (5), (7), (8), (11), (12) , (15) , (16) e (18) serem satisfeitas, o que garante a existência de preços de equilíbrio forte e que $p^o=-1$, se utilizarmos as equações (45), (46) e (47) do 2º capítulo, poderemos determinar iterativamente os preços de equilíbrio forte (*).

$$p_i = (A^T+I)p_{i+1} + c - D^T\beta_i \qquad i=0,\ldots,k-1$$

$$p_k = 0$$

onde

$$\beta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i^j \geq 0 \\ a_i^j & \text{se } a_i^j < 0 \end{cases}$$

e

$$a_i = d - B^T p_{i+1} \quad .$$

(*) A determinação dos vetores p_i, $i=0,\ldots,k$ neste exemplo, usando um outro resultado foi feita por von Stockert [13].

CAPÍTULO IV

UTILIZAÇÃO DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE NA DETERMINAÇÃO DE PROCESSOS ÓTIMOS

A forma em que as condições necessárias de otimalidade obtidas anteriormente são utilizadas na determinação de um processo ótimo para uma configuração de produção e um critério dados, depende evidentemente da particularidade do problema. Para efeito de ilustração, é resolvido em detalhe um problema de otimização formulado a partir de um modêlo neo-clássico de crescimento econômico.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Consideremos uma economia que produza um só produto, trigo por exemplo. Há dois fatores de produção, capital e trabalho. Se K_i e L_i são respectivamente o estoque de capital e o trabalho empregado no período $(i, i+1]$, então a taxa de produção Q_i no período é dada pela função de produção:

$$Q_i = F(K_i, L_i)$$

Parte da produção é alocada para consumo, sendo C_i a taxa de consumo por período, e o restante I_i para investimento em bens de capital. Assim,

$$Q_i = C_i + I_i = (1 - s_i)Q_i + s_i Q_i$$

onde

$$s_i = \frac{I_i}{Q_i} \in [0,1]$$

é a fração do produto que é poupada e investida no período.

Suponhamos que o estoque de capital se deprecia com o tempo na razão $\delta < 1$. Então o crescimento líquido do capital no período é dado pela equação:

$$\text{(1)} \qquad K_{i+1} - K_i = -\delta K_i + s_i Q_i = -\delta K_i + s_i F(K_i, L_i) \quad ,$$

além disso, que a força de trabalho cresce à taxa constante $\beta > 0$, isto é:

(2) $L_{i+1} - L_i = \beta L_i$

ou seja

$$L_{i+1} = (1+\beta)L_i$$

Admitamos também que a função de produção apresenta rendimentos constantes à escala:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L) \qquad \forall \lambda > 0$$

Se definirmos as variáveis per capita,

$$q = \frac{Q}{L} \quad , \quad c = \frac{C}{L} \quad , \quad k = \frac{K}{L}$$

e tomarmos $\bar{f}(k) = F(K,1)$, então

$F(K,L) = LF(K/L,1) = L\bar{f}(k)$, logo , o consumo per capita fica:

$$c_i = (1 - s_i)\bar{f}(k_i)$$

Usando essas definições e as equações (1) e (2), é fácil ver que k_i satisfaz a equação a diferenças finitas:

$k_{i+1} - k_1 = s_i f(k_i) - \mu k_i$, onde

$$\mu = \frac{\delta+\beta}{1+\beta} < 1 \qquad e \qquad f = \frac{\bar{f}}{1+\beta}$$

Ainda, se bem que em cada período todo o produto possa ser endereçado ao consumo, há um limite máximo para a poupança a ser investida, limite esse que depende da intensidade de capital naquele instante. Isto é,

$$s_i \in [0, g(k_i)]$$

onde

$$g : E_+ \rightarrow (0,1)$$

Suponhamos finalmente que iniciando com uma intensidade de capital $k_o = \theta$, se deseje maximizar o consumo, isto é,

$$\sum_{i=1}^{T-1} c_i = (1+\beta) \sum_{i=1}^{T-1} (1-s_i)\, f(k_i) \quad \text{onde} \quad T<\infty$$

Colocando na forma de um problema de controle ótimo,temos:

Dado o sistema

$$k_{i+1} - k_i = s_i f(k_i) - \mu k_i \qquad i=0,\ldots,T$$

$$k_o = \theta \quad , \quad k_t \in E \quad , \quad R(k_i,s_i) \leq 0 \quad i=0,\ldots,T-1 \; .$$

Encontrar, se possível, uma sequência $(\hat{s}_o,\ldots,\hat{s}_{T-1})$, com trajetória $(\hat{k}_o,\ldots,\hat{k}_T)$ correspondente, que maximize

$$\sum_{i=1}^{T-1} (1-s_i) f(k_i)$$

onde

$$R : E_+ x \left[0,1 \right] \to E^2 \;. \qquad (k,s) \to (s-g(k),-s)$$

É fácil verificar que o problema se refere a um sistema definido no 1º capítulo, equivalente à configuração de produção:

$$P = Grw(.,.) \quad \text{onde} \quad w : \{(x,u) : R(x,u) \leq 0\} \to E$$

$$w : \{(x,u) : R(x,u) \leq 0\} \to E$$

$$(x,u) \mapsto uf(x) - \mu x$$

APLICAÇÃO DO TEOREMA (44) DO 2º CAPÍTULO

Definamos a função:

$$G : E_+ x \left[0,1\right] \to E^2$$

$$(k,s) \mapsto \begin{bmatrix} sf(k) - \mu k \\ (1-s)f(k) \end{bmatrix}$$

Como essa função é afim em s, e os conjuntos

$$U(k) = \left[0,g(k)\right] \quad k \in E_+$$

são convexos, então os conjuntos $G(k,U(k))$ são convexos k E . Se supusermos que $F(.,.)$ (portanto $f(.)$) e $g(.)$ sejam continuamente diferenciáveis, as hipóteses do referido teorema são todas satisfeitas e podemos aplicá-lo. Suponhamos, então, que $(\hat{s}_o,\ldots,\hat{s}_{T-1})$ é uma sequência ótima de controles e $(\hat{k}_o,\ldots,\hat{k}_T)$ a correspondente tra jetória. Logo, pelo teorema (44) do 2º capítulo, existem números $p^o, p_o, p_1, \ldots, p_T, \mu_o, \lambda_o, \lambda_1$, satisfazendo:

(3) $\quad p^o, \lambda_o, \lambda_1 \geq 0$

(4) $\quad$ nem todos são nulos

(5) $$p_{i+1} - p_i = -p^o(1-\hat{s}_i)\frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - p_{i+1}\left(\hat{s}_i\frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - \mu\right) - \lambda_o\frac{dg(\hat{k}_i)}{dk}$$

$i=0,\ldots,T-1$

(6) $$-p^o f(\hat{k}_i) + p_{i+1}f(\hat{k}_i) - \lambda_o + \lambda_1 = 0$$

$i=0,\ldots,T-1$

(7) $\quad p_T = 0 \quad$ e $\quad p_o = \mu_o$

(8) $\quad \lambda_o(\hat{s}_i - g(\hat{k}_i)) - \lambda_1\hat{s}_i = 0 \qquad i=0,\ldots,T-1$

(9) $\quad$ para $i=0,\ldots,k-1$

$$p^o(1-s_i)f(\hat{k}_i) + p_{i+1}(s_i f(\hat{k}_i) - \mu\hat{k}_i)$$

é maximizado $\quad \forall\, s_i \in [0, g(\hat{k}_i)]$ em $\hat{s}_i$.

mas se $p^o = 0$, de (5), temos:

$$p_{T-1} = \lambda_o\frac{dg(\hat{k}_i)}{dk}$$

e de (6):

$\lambda_1 = \lambda_o$, logode (8):

$$\lambda_o g(\hat{k}_i) = 0$$

Como $g(k) > 0 \ \forall\, k \in E$, $\lambda_o = 0$ $\quad p_{T-1} = 0$ e sucessivamente $p_{T-2} = 0, \ldots, p_o = \mu_o = 0$, o que contrariaria (4). Então, $p^o > 0$ e podemos reescrever, $\forall\, i = 0, \ldots, T-1$:

$$(10) \qquad p_{i+1} - p_i = -(1-s_i)\frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - p_{i+1}\left(\hat{s}_i \frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - \mu\right) - \lambda_o \frac{dg(\hat{k}_i)}{dk}$$

$$(11) \qquad f(\hat{k}_i) - p_{i+1} f(\hat{k}_i) + \lambda_o - \lambda_1 = 0$$

$$(12) \qquad \lambda_o(\hat{s}_i - g(\hat{k}_i)) - \lambda_1 \hat{s}_i = 0$$

$$(13) \qquad (1-s_i)f(\hat{k}_i) + p_{i+1}(s_i f(\hat{k}_i) - \mu\hat{k}_i)$$

é maximizado $\quad \forall\, s_i \in \left[0, g(\hat{k}_i)\right] \quad$ em $\hat{s}_i$.

ANÁLISE QUALITATIVA DAS POSSÍVEIS SOLUÇÕES

Façamos as seguintes hipóteses de uso corrente na economia:

$$\frac{df(k)}{dk} > 0 \ , \qquad \frac{d^2 f(k)}{dk^2} < 0 \qquad \forall\, k \in E$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{df(k)}{dk} = \infty \qquad \text{e} \qquad \frac{dg(k)}{dk} > 0$$

Como por (13):

$s_i f(\hat{k}_i)(p_{i+1}-1)$ é maximizado em $\hat{s}_i$, e $f(k) \geq 0 \; \forall \; k$:

$$\hat{s}_i = \begin{cases} g(\hat{k}_i) & \text{se} \quad p_{i+1} > 1 \\ 0 & \text{se} \quad p_{i+1} < 1 \\ ? & \text{se} \quad p_{i+1} = 1 \end{cases}$$

Vamos analisar separadamente os três casos acima:

Caso 1 : $p_{i+1} > 1$, $\hat{s}_i = g(\hat{k}_i)$

Então as equações dinâmicas ficam:

$$\text{(14)} \qquad \hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = g(\hat{k}_i)f(\hat{k}_i) - \mu\hat{k}_i$$

$$\text{(15)} \qquad p_{i+1} - p_i = (g(\hat{k}_i)-1)\,\frac{df(\hat{k})}{dk} - p_{i+1}\left(g(\hat{k}_i)\frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - \mu\right) - \frac{\lambda_o dg(\hat{k}_i)}{dk}$$

$$\text{(16)} \qquad f(\hat{k}_i) - p_{i+1}f(\hat{k}_i) + \lambda_o = 0$$

Mas levando (16) em (15), obtemos:

$$\text{(17)} \qquad p_{i+1} - p_i = h(\hat{k}_i) - \frac{df(k_i)}{dk} - p_{i+1}(h(\hat{k}_i)-\mu)$$

onde

$$h(k) = g(k)\,\frac{df(k)}{dk} + f(k)\,\frac{dg(k)}{dk} \quad .$$

Então as equações dinâmicas podem ser escritas:

$$p_i = \frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - h(\hat{k}_i) + p_{i+1}(h(\hat{k}_i) - \mu + 1) \tag{18}$$

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = g(\hat{k}_i)f(\hat{k}_i) - \mu\hat{k}_i \tag{19}$$

Para analisar as soluções desse sistema, façamos as seguintes definições:

(20) K_G é o ponto em que $\dfrac{df(k)}{dk} = \mu$

(21) P é o ponto em que $\dfrac{df(k)}{dk} = h(k)$

(22) K_H é o ponto em que $h(k) = \mu$

(23) K_M é o ponto em que $g(k)f(k) = \mu k$

As hipóteses feitas em relação a $g(.)$ e a $f(.)$ garantem a existência de todos esses pontos, assim como o fato de:

$$K_H < K_M \,. \tag{24}$$

É importante notar que se $K_H = K_G$, então $P = K_H = K_G$.

Observemos a forma das funções ilustradas na figura 1.

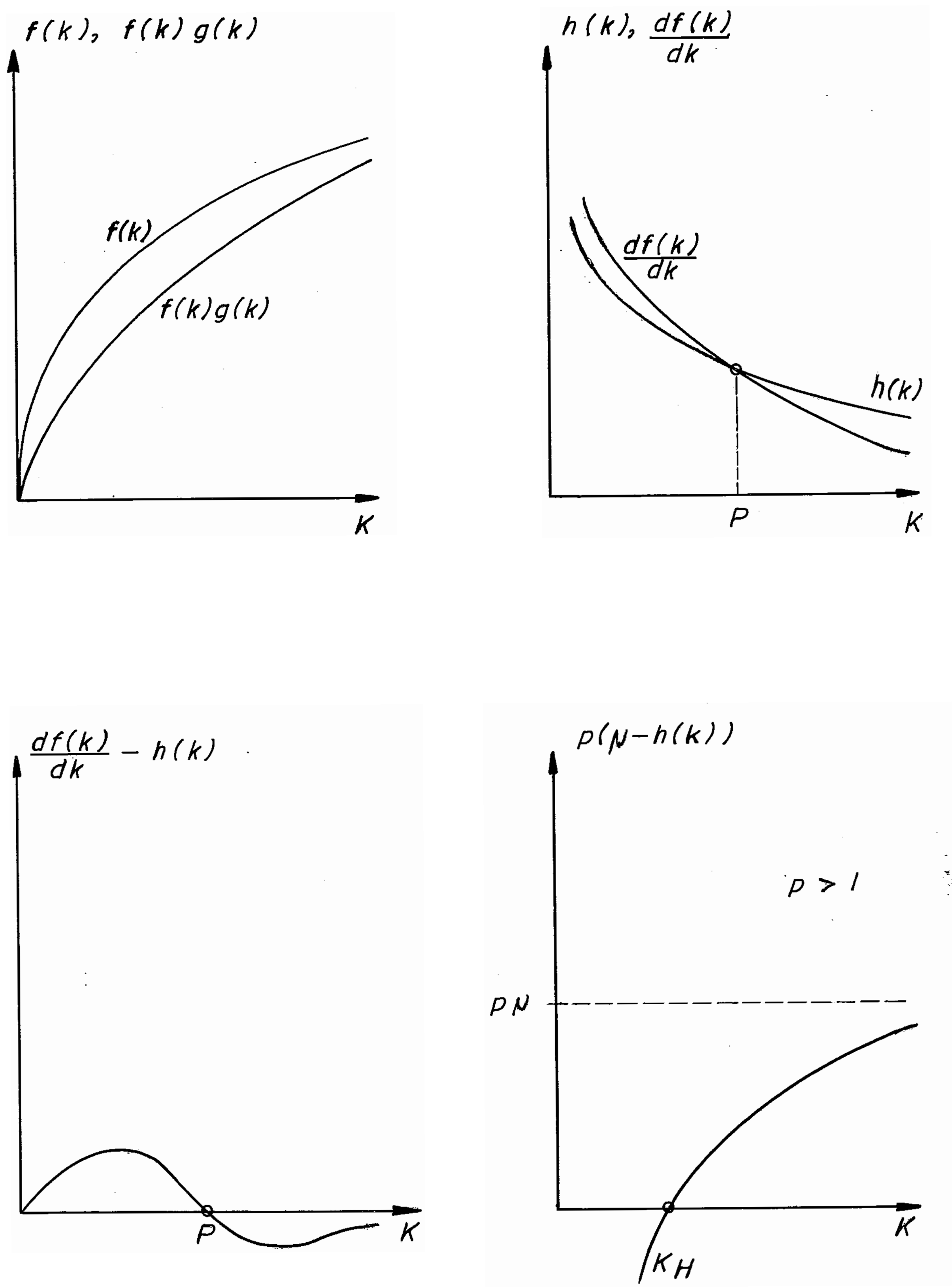


FIGURA I

Então, qualquer que seja o valor de p_{i+1} $(p_{i+1} > 1)$, existir; um ponto em que

(25) $$\frac{df(k)}{dk} - h(k) = p_{i+1}(\mu - h(k)) \quad .$$

Nesse caso, $p_{i+1} \simeq p_i$.

Além disso; dependendo de f(.) e g(.),pode ocorrer um dos casos:

(25) $K_H = K_G < K_M$

(26) $K_H < K_G < K_M$

(27) $K_G < K_H < K_M$

(28) $K_H < K_M \leq K_G$

Nos casos (26) e (28) os pontos que satisfazem a e - quação (25) decrescem com o aumento de p_{i+1}, enquanto no caso (27) se dá o inverso.

Como as soluções da equação (19) tem o comportamen- to ilustrado na figura 2, onde o intervalo de tempo foi considerado arbitrariamente pequeno para se obter curvas contínuas, e em qual - quer dos casos (25) a (28), da equação (18) concluímos que quando $k \to \infty$, $p_i < p_{i+1}$, já que $\mu<1$, e quando $k \to 0$, $p_i > p_{i+1}$, o relacio namento entre k_i e p_{i+1} tem a forma ilustrada na figura 3.

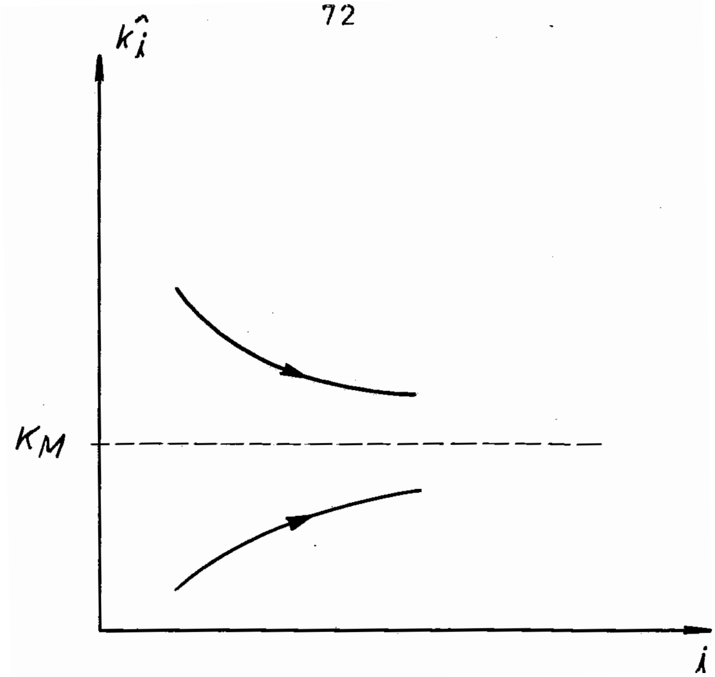


FIGURA 2

Então, qualitativamente, o relacionamento entre i e p_i pode apresentar duas características diferentes, ilustradas nas figuras 4 e 5.

<u>**Caso 2**</u> : $p_{i+1} < 1$, $\hat{s}_i = 0$

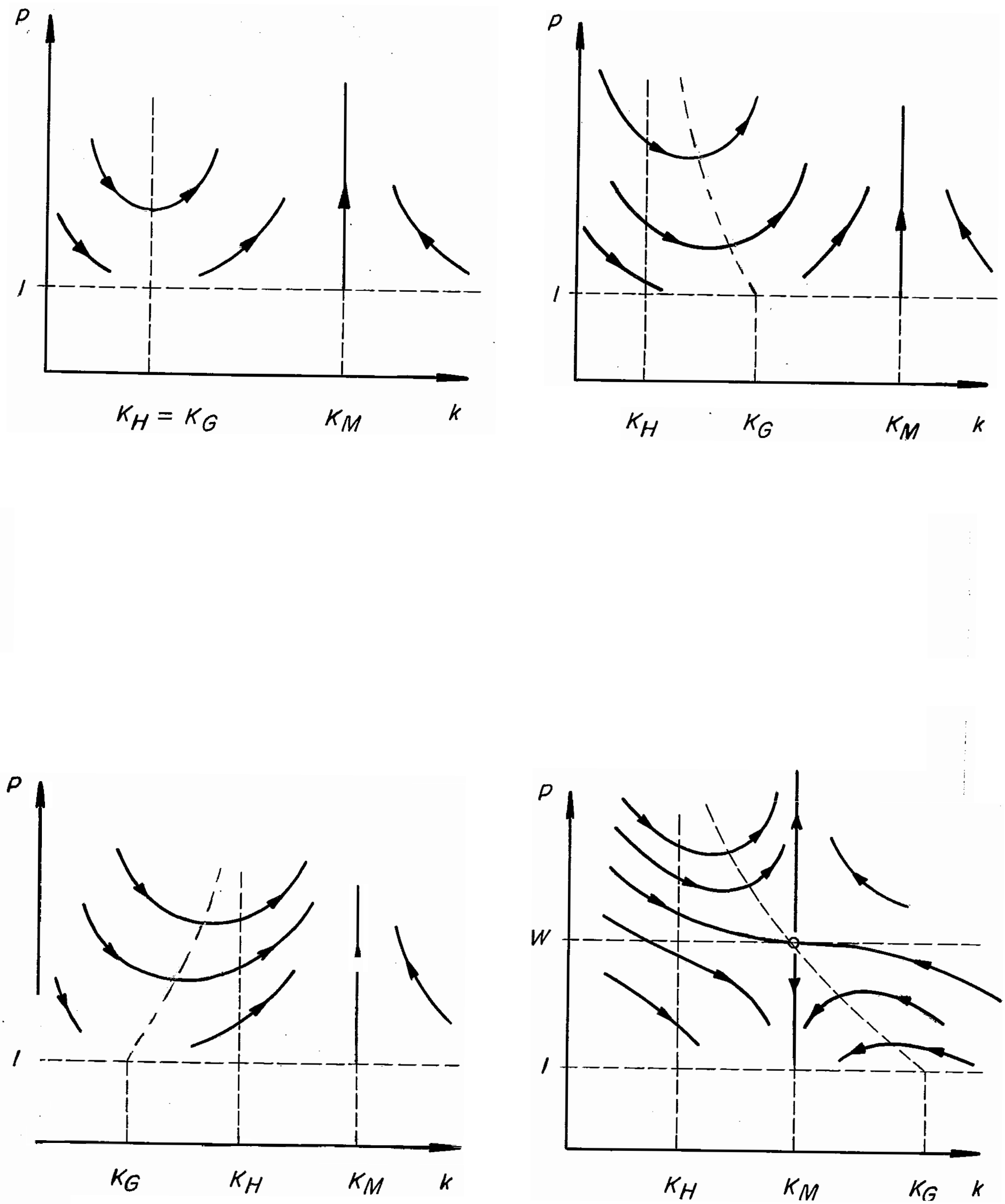
As equações dinâmicas ficam:

(29) $\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = -\mu\hat{k}_i$

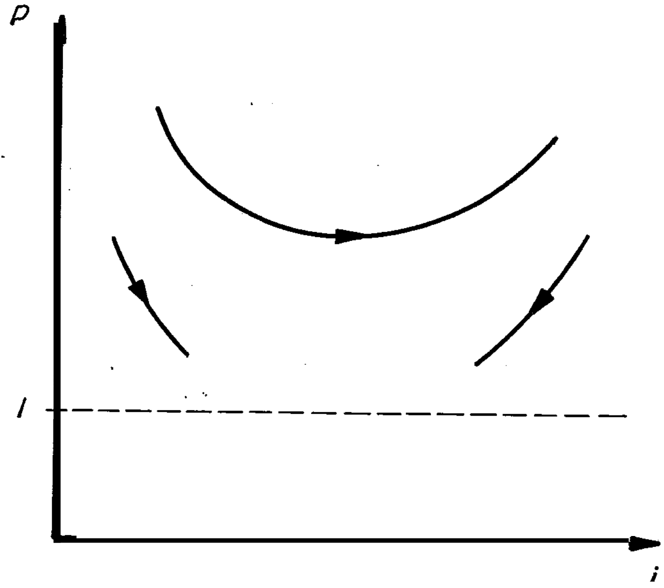
(30) $p_{i+1} - p_i = - \dfrac{df(\hat{k}_i)}{dk} + \mu p_{i+1} - \lambda_o \dfrac{dg(\hat{k}_i)}{dk}$

(31) $f(\hat{k}_i) - p_{i+1}f(\hat{k}_i) + \lambda_o - \lambda_1 = 0$

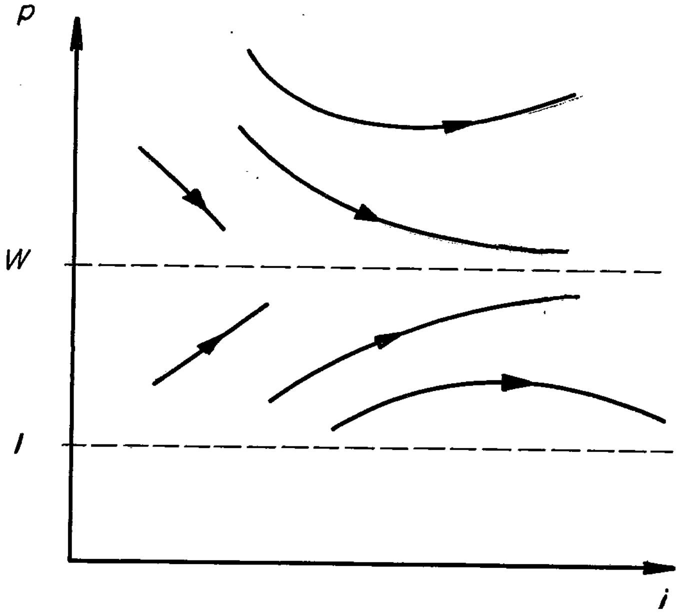
(32) $- \lambda_o g(\hat{k}_i) = 0$



F I G U R A 3



F I G U R A   4



F I G U R A   5

Como $g(k) > 0 \; \forall \, k$, $\lambda_o = 0$, logo, ficamos com:

(33) $$\hat{k}_{i+1} - k_i = -\mu \hat{k}_i$$

(34) $$p_{i+1} - p_i = - \frac{df(\hat{k})}{dk} + \mu p_{i+1}$$

dando margem ao comportamento ilustrado na figura 6.

<u>Caso 3</u> : $\hat{p}_{i+1} = 1$ $\quad \hat{s}_i = ?$

Vamos considerar essa ocorrência em pontos sucessi - vos, que são os de interesse: De (11), temos $\lambda_o = \lambda_1$, e em (12): $- \lambda_o g(\hat{k}_i) = 0$, o que implica em $\lambda_o = 0$. Então, em (9):

$$0 = (\hat{s}_i - 1) \frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - \hat{s}_i \left(\frac{df(\hat{k}_i)}{dk} - \mu \right)$$

ou seja:

$$0 = - \frac{df(\hat{k}_i)}{dk} + \mu$$, isto é:

(35) $$\frac{df(\hat{k}_i)}{dk} = \mu \; .$$

Isto significa que $\hat{k}_i = K_G$, logo, $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+1}$, o que na equação de $\hat{k}_{i+1}$ leva a

$$\hat{s}_i f(K_G) = \mu K_G$$, ou

$$\hat{s}_i = \mu \frac{K_G}{f(K_G)}$$

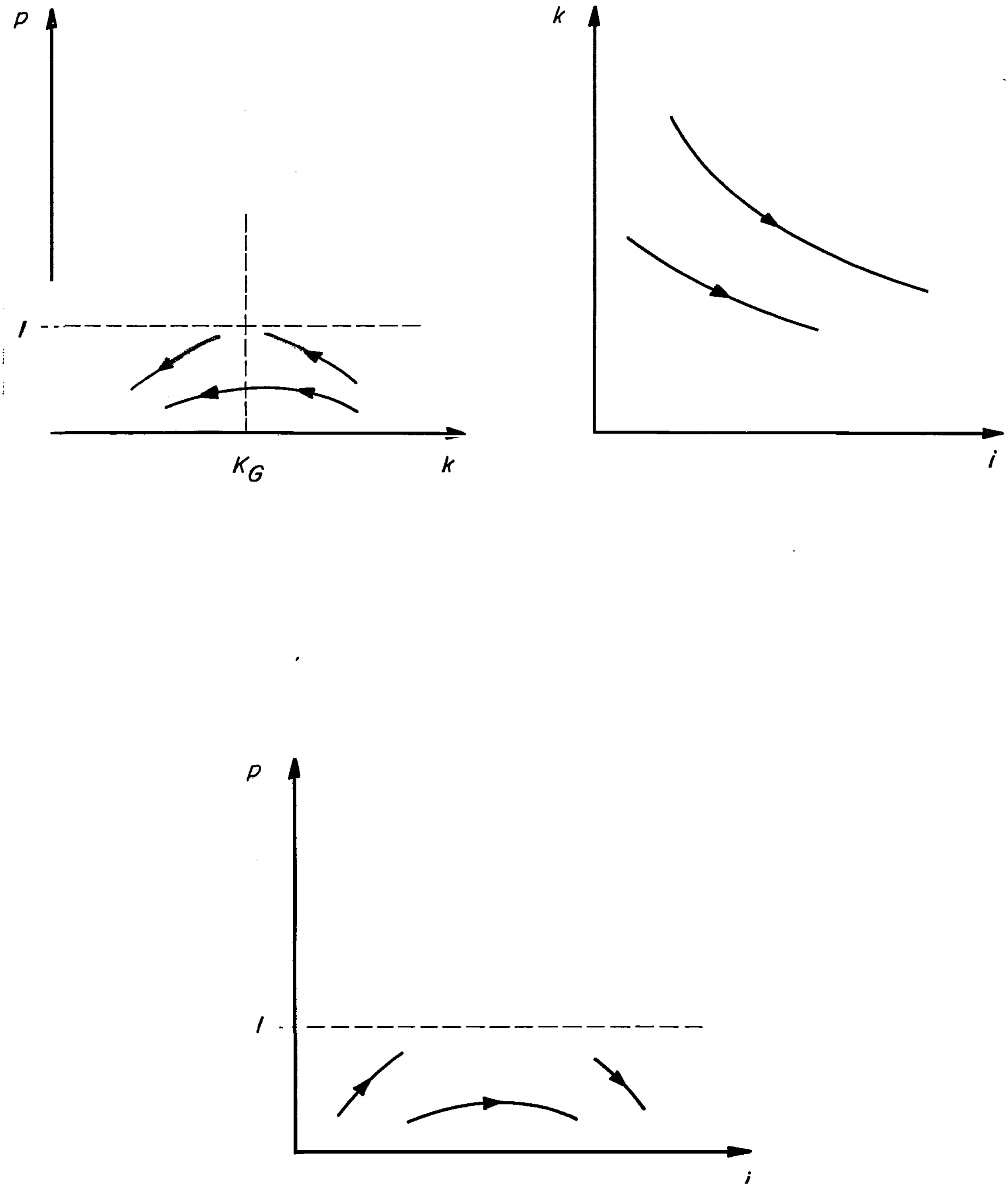


FIGURA 6

Devemos notar que se $K_M < K_G$, este caso não pode o-corres, pois

$$g(K_G) \geq \hat{s}_i = \mu \frac{K_G}{f(K_G)}$$

Mas então

$$g(K_G)f(K_G) \geq \mu K_G \quad , \text{ isto é, } \quad K_M > K_G \quad .$$

Esse comportamento é ilustrado na figura 7.

Podemos agora reunir os diversos casos para obter a sequência de controles ótimos.

Há duas situações basicamente distintas a serem analisadas, dependendo das funções $f(.)$ e $g(.)$, relacionadas com os casos 1 e 3.

<u>Quando $K_G \leq K_M$:</u>

Antes de mais nada, da condição final (7), sabemos que perto de T, $p_{i+1} < 1$, logo estamos no caso 2 .

Há então duas possibilidades:

(A):

$$p_i < 1 \qquad i=1,\ldots,T-1$$

$$\hat{s}_i = 0 \quad \text{para} \quad i=0,\ldots,T-1$$

ou (B):

$$\exists\, i_2 \in \{1,\ldots,T-1\} \ni p_{i_2} \geq 1 \quad , \quad p_{i_2} \leq 1 \qquad \text{e}$$

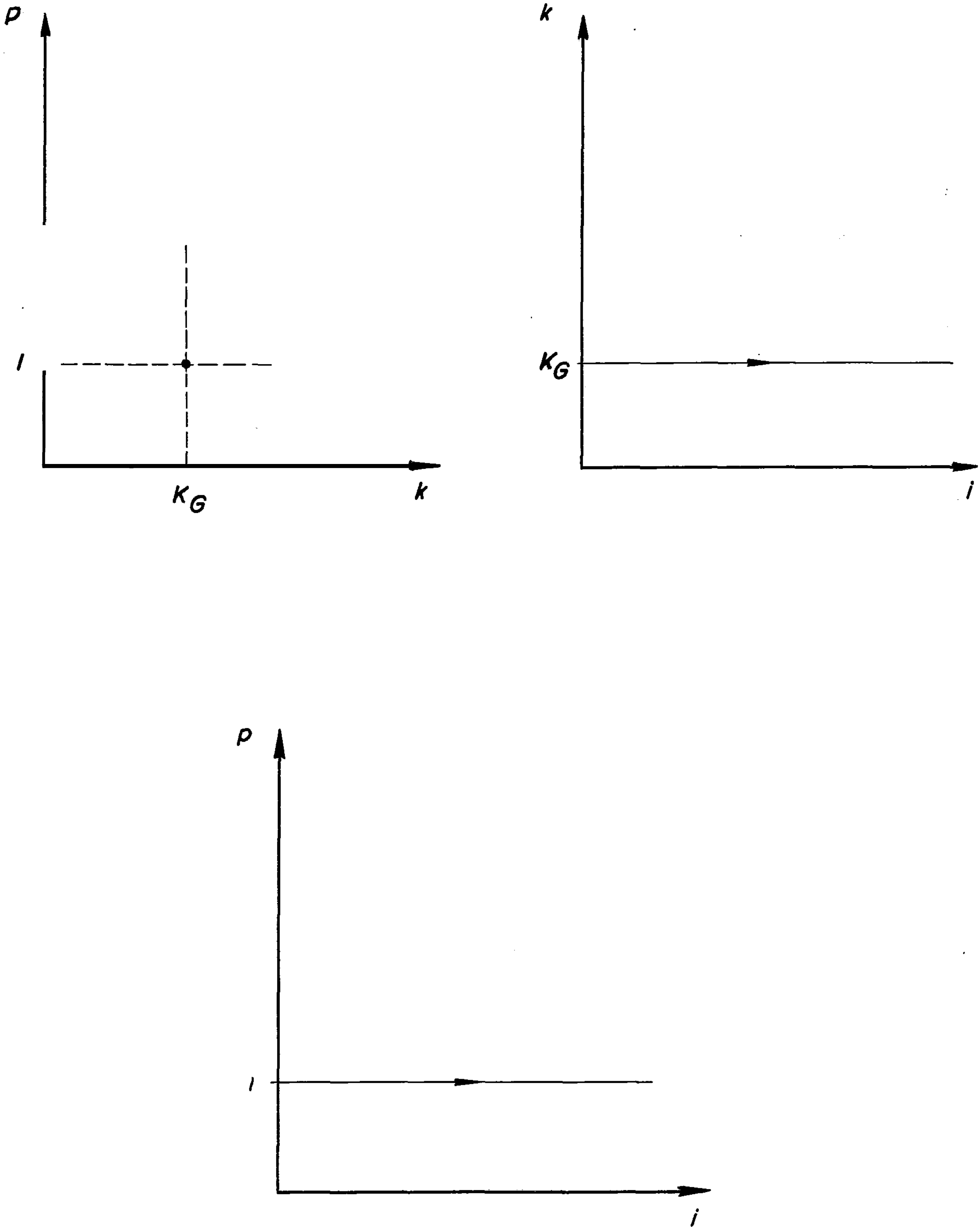


FIGURA 7

$p_i < 1$ para $i=i_2+2,\ldots,T-1$

Mas, se em i_2+1 estamos no caso 2 ($p_{i_2+1} \leq 1$) e $p_{i_2} \geq 1$, da equação (34), temos:

$$-\mu = (1-\mu)-1 \geq p_{i_2+1}(1-\mu) - p_{i_2} = - \frac{df(\hat{k}_{i_2})}{dk}$$

o que implica em $\hat{k}_{i_2} \leq K_G$.

(B_i) se $\hat{k}_{i_2} < K_G$, das equações (10), (11) e (12), concluímos que $p_{i_2-1}>1$ e estamos no caso 1, onde ficaremos até i=0 . Em particular, $\theta < K_G$.

(B_{ii}) se $\hat{k}_{i_2} = K_G$, então $p_{i_2+1} = p_{i2} = 1$, logo estamos no caso 3 com $s_i = \mu \frac{K_G}{f(K_G)}$, onde ficamos até $i=1$ se $\theta = K_G$. Se $\theta \neq K_G$, haverá um $i_1 \in \{2, \ldots, i_2-1\}$ tal que ou $p_i>1$ para $i=1,\ldots,i_1$ (caso 1) se $\theta < K_G$, ou $p_i < 1$ para $i=1,\ldots,i_1$ (caso 2) se $\theta > K_G$.

Todas essas possibilidades estão elustradas na figura 8 .

<u>Quando $K_G > K_M$</u> :

Como anteriormente, perto de T , $p_{i+1} < 1$ (caso 2), havendo as mesmas duas possibilidades, (A) e (B) . Mas agora, temos:

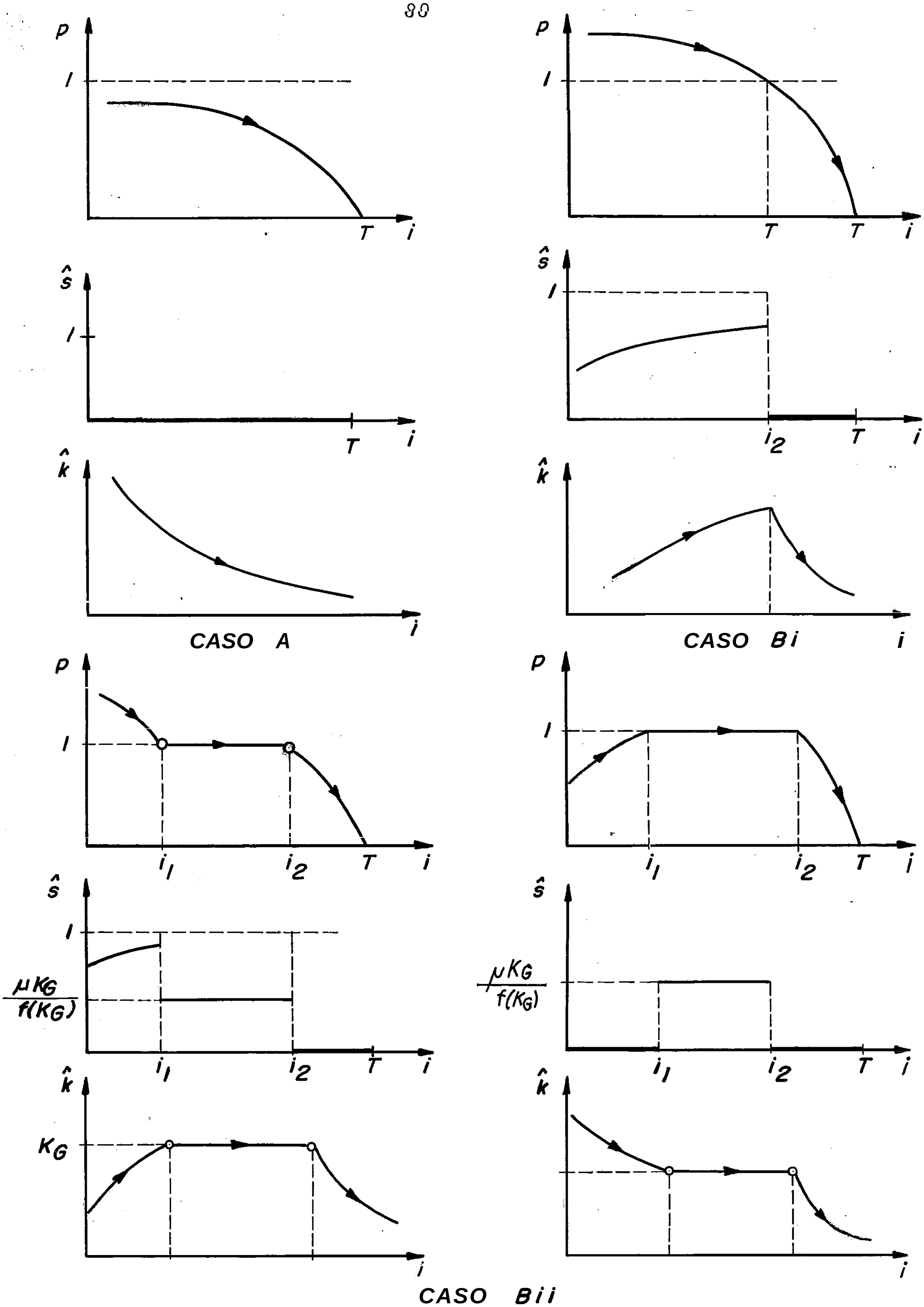


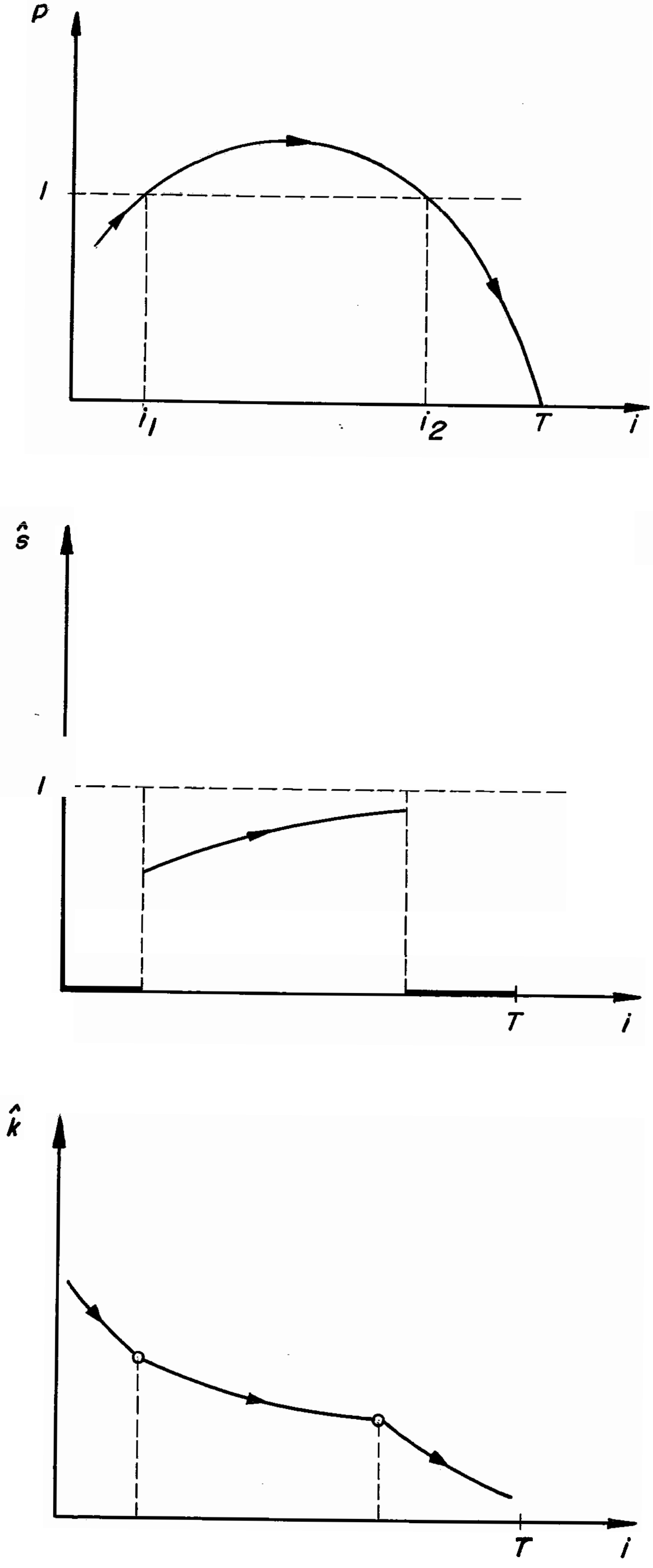
FIGURA 8

(B_i) Se $\hat{k}_{i_2} \leq K_M \leq K_G$, das equações (10), (11) e (12), concluímos que $p_{i_2-1} > 1$, logo estamos no caso 1 , onde ficaremos até $i=0$. Em particular, $\theta < K_G$.

Esse comportamento é o mesmo ilustrado na figura 8.

(B_{ii}) Se $K_M < \hat{k}_{i_2} < K_G$, então, como em (B_i), $p_{i_2-1}>1$ mas poderá haver um i_1 $\{1,\ldots,i_2-2\}$ tal que $p_{i_1} < 1$, $p_{i_1+1} \geq 1$ e $p_i > 1$ para $i=i_1+2,\ldots,i_2-1$. Se isso acontece $\hat{k}$ $> K_G$ e estamos no caso 2, onde ficaremos até $i=0$ (Vide Figura 3).

Essa possibilidade está ilustrada na figura 9.



CASO Bii $(K_G\ 7\ K_M)$

FIGURA 9

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

A idéia de caracterizar problemas de otimização em economia como problemas de controle Ótimo relativos a sistemas, não é nova, e aparece com alguma frequência na literatura recente. Por exemplo, Weitzman e Schmidt [20] a apresentam, chegando a estabelecer um princípio do máximo para processos econômicos discretos, onde as decisões não aparecem restringidas pelo estado (*).

Entretanto, como já foi observado no Capítulo I, a característica quase constante dos sistemas definidos a partir de estruturas econômicas, devido à complexidade destas, é justamente a de haver uma intrínseca interdependência entre as decisões ou controlese o estado do sistema.

Assim, o resultado apresentado no Capítulo II vem possibilitar esse tipo de tratamento de problemas de otimização de processas econômicos de uma forma mais realística, aplicando-se também a sistemas provenientes de modelos econômicos mais complexos.

Com vistas a um plano de pesquisas posteriores, acreditamos'promissor o emprego de uma técnica análoga à usada na obten

(*) Os resultados obtidos pelos autores citados se aplicam a processos em um intervalo de tempo infinito, que não são considerados neste trabalho.

ção do princípio do máximo discreto, para sistemas contínuos no tempo. Especificamente: - a transformação do problema em um de programação matemática e subsequente utilização de um teorema básico de otimização.

Isso viria possibilitar o mesmo tratamento para modelos contínuos de produção, e problemas de programação contínua a eles associados.

GLOSSÁRIO E SÍMBOLOS

I - Convenções Gerais

E^n - Denota o espaço euclidiano dasn-uplas ordenadas de núme - ros reais, que são muitas vezes tratadas como matrizes co lunas em operações matriciais.

E - Identificamos com o conjunto E^1 de números reais.

Como norma de um vetor em E^n , usamos a aplicação:

$$||.|| : E^n \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Como produto interno de dois vetores de E^n, usamos a aplica- ção:

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : E^n \times E \longrightarrow E$$

$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

II - Símbolos e Abreviações

$A \subset B$ - A é subconjunto de B

$A \times B$ - Produto carteziano de A por B

$x \in A$ - x pertence a A

$\bar{A}$ - aderência ou fecho do conjunto A

$\ni$ - tal que

$\forall$ - para todo

$f : A \to B$ - f é uma função de A em B que associa a cada $x \in A$

$x \mapsto f(x)$ um elementp $f(x) \in B$

$f(.) / X$ com $X \subset A$ - restrição da função $f : A \to B$ ao conjunto X :

$$f/X : X \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

$Gr\, f(.) / X \triangleq \{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$ - gráfico da restrição da função $f : A \to B$ ao conjunto X

$\Rightarrow$ - implica em

$\Leftrightarrow$ - se e somente se

$\therefore$ - donde

co A - envoltória convexa de A

$RC(\hat{z},\Omega)$ - cone radial

$IC(\hat{z},\Omega)$ - cone interno

A^T - matriz transposta

$||x||$ - norma do vetor x

$\langle x,y \rangle$ - produto interno de x por y

III - Símbolos de Significação Especial

X - conjunto de estados

U - conjunto de controles ou decisões

x_i - estado do sistema dinâmico no instante i

u_i - controle do sistema no instante i

P - configuração de produção

$u \leqq 0$ - um vetor $u \in E^n$ cujas componentes são todas não positivas

$u \leq 0$ - um vetor $u \in E^n$ tal que $u \leqq 0$ e $u \neq 0$

$u < 0$ - um vetor $u \in E^n$ cujas componentes são todas negativas.

APÊNDICE

(1) DEFINIÇÃO

Uma função $f : X \subset E^n x E^m \rightarrow Y \subset E^n$, onde $(0,0) \in X$ é dita *afim* , se e somente se:

(i) dados $(x^1,u^1),(x^2,u^2) \in X$ tais que

$(x^1,u^1) + (x^2,u^2) \in X$,

$f((x^1,u^1) + (x^2,u^2)) = f(x^1,u^1) + f(x^2,u^2) - f(0,0)$

(ii) dados $(x,u) \in X$ e $\theta \in E$ tal que

$\theta(x,u) \in X$,

$f(\theta(x,u)) = \theta f(x,u) + \theta f(0,0)$

(2) DEFINIÇÃO

A *envoltória convexa* de um conjunto finito de pontos $x^1,x^2,\ldots,x^k \in E^n$ é o conjunto

$$\{x : x = \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i \; , \; \mu^i \geq 0 \; , \; \sum_{i=1}^{k} \mu^i = 1\}$$

denotado por: $co\,\{x^1,x^2,\ldots,x^k\}$

(3) <u>DEFINIÇÃO</u>

A <u>envoltória convexa</u> de um conjunto $X \subset E^n$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm X. É denotada por co X .

(4) <u>PROPOSIÇÃO</u>:

A envoltória convexa de um conjunto $X \subset E^n$ consiste de todas as combinações convexas finitas de X, isto é :

$$\text{co } X = \{x : x = \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i \ , \ \sum_{i=1}^{k} \mu^i = 1 \ , \ \mu^i \geq 0 \ ,$$

$$k \text{ inteiro positivo e } x^i \in X \}$$

<u>prova</u> : [18] , pag. 44 .

(5) <u>PROPOSIÇÃO</u> :

Se $X = \{\hat{x}, \hat{x}+x^1, \hat{x}+x^2, \ldots, \hat{x}+x^k\} \subset E^n$

então

$$\text{co } X = \{x : x = \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i, \ \mu^i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \mu^i \leq 1$$

$$\text{e } \hat{x}, \hat{x}+x^1, \ldots, \hat{x}+x^k \in X \} \ .$$

prova:

Se $x \in \text{co}\, X$, então $x = \mu^o \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i(\hat{x}+x^i)$, onde $\mu^i \geq 0 \quad i=0,\ldots,k$ e $\sum_{i=0}^{k} \mu^i = 1$. Logo:

$$x = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i = \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i$$, logo, evidentemente:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu^i \leq 1 .$$

Por outro lado, se

$x = \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i$, $\mu^i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \mu^i \leq 1$ e $\hat{x}, \hat{x}+x^1, \ldots, \hat{x}+x^k \in X$,

então:

$$x = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i x^i = \mu^o \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i(\hat{x}+x^i) \in \text{co}\, X$$

onde

$$\mu^o = 1 - \sum_{i=1}^{k} \mu^i \qquad \lhd$$

(6) DEFINIÇÃO

Seja $e \in E^n$ arbitrário. Um conjunto $S \subset E^n$ é dito e-convexo ou convexo na direção e se $\forall\, z' \in \text{co}\, S, \exists\, z \in S \ni$

$$z = z' + \beta e \quad , \quad \beta \in E \quad , \quad \beta \geq 0 \quad .$$

(7) DEFINIÇÃO

Um cone $C \subset E^n$ é um conjunto tal que, se $x \in C$, $\alpha \in E$, $\alpha \geq 0$, $\alpha x \in C$.

(8) DEFINIÇÃO

Um cone C com vértice $x^o \in E^n$ é um subconjunto de E^n, tal que:

$C - \{x^o\} = \{z : z + x^o \in C\}$ seja um Cone.

(9) DEFINIÇÃO

Um cone C é dito um cone convexo, se C é um conjunto convexo.

(10) PROPOSIÇÃO

Um cone C é um cone convexo se e somente se $x^1 + x^2 \in C$ sempre que $x^1, x^2 \in C$.

prova : [1] pag. 241

(11) DEFINIÇÃO

O cone radial ao conjunto Ω no ponto $\hat{z} \in \Omega$, denotado por $RC(\hat{z}, \Omega)$ é o conjunto de todos os vetores δz para os quais existe um $\varepsilon > 0$, tal que:

$$(\hat{z} + \alpha \delta z) \in \Omega \qquad \forall \alpha \in [0, \varepsilon]$$

(12) DEFINIÇÃO

Um conjunto denotado por $C(\hat{z},\Omega)$ E'' é dito uma aproximação cônica de primeira espé~~cie~~ do conjunto Ω no ponto $z \in \Omega$, se for um cone convexo, e para toda coleção $\{\delta z_1,\ldots,\delta z\}$ de vetores linearmente independentes em $C(\hat{z},\Omega)$ existir um $\varepsilon > 0$, dependendo talvez de $\bar{z}$, $\delta z_1,\ldots,\delta z_k$, tal que:

$$\text{co}\,\{\hat{z},\hat{z}+\varepsilon\delta z_1,\ldots,\hat{z}+\varepsilon\delta z_k\} \subset \Omega$$

(13) DEFINIÇÃO

Um conjunto $C(\hat{z},\Omega) \subset E^n$ é dito uma aproximação cônica de segunda espécie do conjunto Ω no ponto $\hat{z} \in \Omega$, se for um cone convexo, e para toda coleção de vetores $\{\delta z_1,\ldots,\delta z_k\}$ linearmente independentes em $C(\hat{z},\Omega)$ existir um $\varepsilon > 0$, dependendo talvez de $\bar{z}$, $\delta z_1,\ldots,\delta z_k$, e uma função contínua:

$$\xi : \text{co}\,\{\hat{z},\hat{z}+\varepsilon\delta z_1,\ldots,\hat{z}+\varepsilon\delta z_k\} \longrightarrow \Omega$$

tal que:

$$\xi(\hat{z}+\delta z) = \hat{z} + \hat{a}z\ t\ 0(\delta z) \quad \text{, onde:}$$

$$\lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||0(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

(14) DEFINIÇÃO

Seja $\Omega = \{z : q(z) \leq 0\}$, onde $q : E^n \to E^k$ é uma função continuamente diferenciável. Para qualquer $\hat{z} \in \Omega$, o <u>cone interno</u> a Ω em $\hat{z}$, denotado por $IC(\hat{z},\Omega)$ é o conjunto:

$$IC(\hat{z},\Omega) = \{\delta z : \quad \nabla q^{i}(\hat{z}),\delta z \quad < 0 \quad i \in I(\hat{z}) \cup \{0\}\}$$

onde:

$$I(\hat{z}) = \{i \in \{1,2,\ldots,k\} : q^{i}(\hat{z}) = 0\}$$

(15) <u>PROPOSIÇÃO</u>

Seja $\Omega \subset E^{n}$ convexoe $\hat{z} \in \Omega$. Então, $RC(\hat{z},\Omega)$ é uma aproximação cônica de primeira espécie e

$$RC(\hat{z},\Omega) = \{\delta z : \delta z = \lambda(z-\hat{z}),\ \lambda \geq 0\ ,\ z \in \Omega\}$$

<u>prova</u> : [1] pag. 24 .

(16) <u>PROPOSIÇÃO</u>

Uma transformação linear $L : X \to Y$, onde $X \subset E^{n}$, $Y \subset E^{m}$ é injetiva se e somente se tem uma inversa à esquerda.

<u>prova</u>: [19] , pag. 52 .

(17) <u>PROPOSIÇÃO</u> (Lema de Farkas)

Se $\{a_1,\ldots,a_k, b\}$ é um conjunto finito de E^{n}, então:

$$\langle b,x\rangle \leq 0\ ,\quad \langle a_i,x\rangle \leq 0 \quad i=1,\ldots,k\ ,\quad x \in E^{n} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\exists\ \mu^{1}. \quad {}^{k} \in E\ ,\quad \mu^{i} \geq 0 \quad i=1,\ldots,k \ni b = \sum_{i=1}^{k} \mu^{i} a_i \quad .$$

<u>prova</u> : [1] pag. 250 .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Cannon, M.D. , Cullum, C. D. and Polak,E. , "Optimization,Control and Algorithm", New York, McGraw-Hill, 1970.

[2] Pontryagin,L. S. et.al, "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Interscience, 1962.

[3] Rozonoer,L. I., "The Maximum Principle of L.S. Pontryagin in Optimal-System Theory", Part III, Automation and REmote Control, 20, pp. 1515-1532, 1960.

[4] Halkin,~~H. , "Optimal Conirol for Systems Described by Difference~~ Equations", Advances in Cont. Systems, Edited by C.T. Leondes, New York, Academic Press, Ch. 4, 1964.

[5] Halkin,H., "A Maximum Principle of the Pontryagin Type for Systems Described by Nonlinear Difference Equations", SIAM J. on Control, Vol. 4, Nº 1, pp. 90-111, 1966.

[6] Propoi,A. I., "The Maximum Principle for Discrete Systems" , Automation and Remote Control, 26, pp. 1169-1177, 1965 .

[7] Bruckner, J. and Wu,S. , "A Maximum Principle for Discrete Systems with Control Variable Inequality Constraints, Proc. Sixth Annual Allerton Conf. on Circ. and Syst. Theory, pp. 475-484, 1968 .

[8] Holtzman,J.M., "Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems", IEEE Trans. on Auto. Contr., Vol. AC-11, Nº1, pp. 30-36, 1966.

[9] Holtzman, J.M. and Halkin,H. , "Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems", SIAM J. on Control , Vol.4, Nº2, pp. 263-275, 1966.

[10] Holtzman, J.M. , "On the Maximum Principle for Nonlinear Discrete-Time Systems", IEEE Trans. on Auto. Cont., Vol. AC-11, Nº 2, pp. 273-274, 1966.

[11] Cannon, M. , Cullum,C. and Polak,E. , "Constrained Minimization Problems in Finite Dimensional Spaces", SIAM J. on Control , Vol.4, Nº 3, pp. 528-547, 1966.

[12] Da Cunha, N.O. and Polak,E. , "Constrained Minimization under Vector-Valued Criteria in Finite Dimensional Spaces", J. Math. Anal. & Appl., Vol. 19, Nº 1, pp. 103-124 , 1967.

[13] von Stockert,E.R. , "Condições de Otimalidade para Sistemas Discretos no Tempo com Controles Limitados pelo Estado", Tese de Mestrado, COPPE, Rio de Janeiro, Brasil, 1973.

[14] Gale,D., "The Closed Linear Model of Production", Linear Inequalities and REIated Systems, editado por Kuhn e Tucker, Princeton, 1956.

[15] Gale,D. , "On Optimal Development in a Multi-Sector Economy", Problems in the Theory of Optimal Accumulation, editado por

Oliver and Boyd Limited, London, 1967.

[16] Weitzman, M.L., "Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models", Management Science, Vol.19, Nº 7, Março de 1973.

17 McKenzie,L.W., "Turnpike Theorems for a Generalized Leontif Model", Econometrica, Vol.31, Nº 1-2, Janeiro/Abril de 1963.

[18] Mangasarian,O.L., "Nonlinear Programming", New York, McGraw-Hill, 1969.

[19] Greub,W.H., "Linear Algebra", New York, Springer, 3rd edition, 1967.

[20] Weitzman,M.L. e Schmidt,A.G., "The Maximum Principle for Discrete Economic Processes on an Infinite Time Interval", Kibernetika, Nº5, 1971.