

O PROBLEMA DO SERVOMECANISMO E O MÉTODO DO
ESPAÇO DE ESTADO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

PEDRO MAGALHÃES GUIMARÃES FERREIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO 'DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIA (D.Sc.)

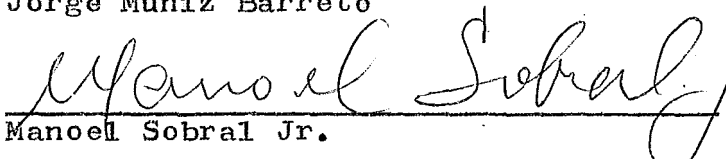
Aprovada por:


Shankar P. Bhattacharyya (Presidente)


Jean-Paul Gravier


João Lizardo Rodrigues de Araujo


Jorge Muniz Barreto


Manoel Sobral Jr.


Paulo Augusto Silva Voloso

RIO DE JANEIRO (R. J.) - BRASIL

DEZEMBRO DE 1975

Pedro Magalhães Guimarães Ferreira nasceu na cidade do Rio de Janeiro a 7 de agosto de 1935.

Formou-se em Engenharia Elétrica pela Escola Politécnica da PUC-RJ em 1961 e obteve o grau de Mestre em Ciências (M.Sc.) pelo Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-RJ em 1970.

É Professor do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-RJ desde 1969 (em licença desde março de 1974).

Publicações técnico-científicas:

- "The servomechanism problem and the method of the stato-space in the frequency domain", International Journal of Control, a ser publicado em dezembro de 1975
- "On degenerate systems", International Journal of Control, a ser publicado,
- "Otimização do "dispatch" em sistemas hidro-termo-elétricos pelo Princípio do Máximo Discreto."
(Tese de Mestrado)

A meus pais,

amDg

AGRADECIMENTO

Ao Professor Shankar P. Bhattacharyya, pela
Orientação competente e dedicada.

Aos colegas e amigos da COPPE e da FUC pelas
trocas de idéias e estímulo.

SINOPSE

O principal objetivo deste trabalho é a solução do problema do servomecanismo. Utilizando-se o método do espaço de estado no domínio da frequência, mostra-se que o compensador proposto por Davison não é 'robusto' com relação a perturbações em todos os seus parâmetros. Entretanto, se as perturbações dos parâmetros 'sensíveis' for "pequena", o erro (que deve ser regulado) será também "pequeno" com a condição adicional que o sinal a ser rastreado e o ruído sejam limitados,

O problema do servomecanismo motivou um estudo de zeros e polos em sistemas multivariáveis, bem como um pequeno estudo do sistemas degenerados. Propõe-se a definição de "zeros de bloqueio" para uma solução sistemática do problema do servomecanismo.

A tese inclui ainda a demonstração apresentada por Francis e Wonham da necessidade do modelo interno e da realimentação do erro (a ser regulado) para que o rastreamento seja 'robusto' quando alguns parâmetros da estrutura são perturbados.

ABSTRACT

The main purpose of this Dissertation is the solution of the servomechanism problem. Using the method of the state-space in the frequency domain it is shown that Davison's compensator is not robust with respect to all of its parameters. However, if the perturbations of the sensitive parameters is "small", the error to be regulated is also "small", provided that the signal to be tracked and the disturbances are bounded.

The servomechanism problem motivated a study of zeros and poles in multivariable systems, as well as a study of degenerate systems. The notion of "blocking zeros" is introduced in order to make more systematic the solution of the servomechanism problem.

The Dissertation also presents the demonstration (due to Francis and Wonham) of the necessity of both the internal model and error feedback in order for the tracking to be robust with respect to some of the synthesis parameters.

ÍNDICE

Introdução	1
1. Conceitos e resultados fundamentais	3
1.1 Matriz do sistema e matriz de transferência	3
1.2 Operações elementares em matrizes. Formas de Smith e McMillan	7
1.3 Controlabilidade e observabilidade	12
2. Zeros e Polos	24
2.1 Sistemas escalares	24
2.2 Sistemas multivariáveis	32
3. Rastreamento de um sinal em regime permanente	62
3.1 Sistemas escalares	62
3.2 Sistemas multivariáveis	82
4. Rastreamento em presença de ruídos	98
4.1 Regulação da resposta	98
4.2 Síntese para o problema geral	102
4.3 Sensibilidade do servomecanismo	107
5. Necessidade do 'modelo interno' e da realimentação do erro	120
5.1 Introdução	120
5.2 Notação e conceitos fundamentais	121
5.3 Solução do problema	130
Apêndice: Sistemas degenerados	153
Conclusão	159
Referências	162

INTRODUÇÃO

O presente trabalho versa sobre sistemas regidos por equações diferenciais ordinárias, lineares e com coeficientes constantes.

Dentre as ferramentas matemáticas para abordar tais sistemas foi escolhida a desenvolvida ultimamente principalmente por Rosenbrock (ver (1)) e que pode ser denominada "método do espaço de estado no domínio da frequência" (ver (42)).

O trabalho é desenvolvido da seguinte maneira:

No primeiro capítulo são resumidos resultados fundamentais já conhecidos e que serão utilizados com mais frequência durante o desenvolvimento do texto. Ao final investiga-se propriedades relativas aos modos desacoplados da entrada e da resposta.

O segundo capítulo tem por objetivo um estudo sistemático de polos e (principalmente) zeros em sistemas multivariáveis. Diversas definições de zeros propostas ultimamente são investigadas e comparadas. Relações entre polos, zeros e modos desacoplados são estabelecidas. Ao final é introduzida a noção de "zero de bloqueio", útil para o estudo de servomecanismo, e demonstradas duas de suas propriedades fundamentais.

O terceiro e o quarto capítulos tratam do problema do servomecanismo dividido nas suas duas etapas "clássicas": rastreamento de um sinal e regulação da resposta. É utilizado o compensador proposto por Davison (ver (32) e (33)), empregando-

se **entretanto** ferramenta matemática distinta (a supra-mencionada), o que permite propor a forma do compensador de modo mais **natural**, simplificar a **demonstração** dos resultados e estabelecer com mais clareza que o rastreamento (e/ou **regulação** da resposta) **não é** robusto com **relação** a **perturbações** de alguns **parâmetros** do compensador. Mais ainda, este método permite estudar o efeito das **perturbações** dos **parâmetros "sensíveis"** do compensador, concluindo-se que o compensador permite o rastreamento com erro "**pequeno**" de sinais limitados se a **perturbação** dos **parâmetros "sensíveis"** também for "**pequena**".

O 5º capítulo, incluído depois que o trabalho de pesquisa já tinha sido dado por encerrado, apresenta a **demonstração** (proposta muito recentemente por Francis e Wonham (53) e utilizando o chamado "**método Geométrico**") da necessidade da **realimentação** do erro e do **modelo** interno no compensador para que o rastreamento seja robusto com **relação** a **perturbações** em alguns **parâmetros**.

O Apêndice volta a empregar o método do **espaço** de estado no **domínio** da **frequência** para investigar algumas propriedades dos **sistemas** degenerados.

1. CONCEITOS E RESULTADOS FUNDAMENTAIS

1.1. Matriz do sistema e matriz de transferência

Seja \mathcal{S} o sistema definido por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.1.1b)$$

$x(t)$, $u(t)$, e $y(t)$ são vetores definidos sobre o corpo dos reais de dimensões n, m e q respectivamente. As matrizes A , B , C e D também são definidas sobre o corpo dos reais e têm as dimensões apropriadas.

Tomando as transformadas de Laplace em (1.1.1), temos:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \quad (1.1.2a)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad , \quad (1.1.2b)$$

$$\text{sendo: } x_0 = x(t) \Big|_{t=0}$$

$$(sI - A)X(s) - BU(s) = x_0$$

$$- CX(s) - DU(s) = -Y(s)$$

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

Seja:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \quad (1.1.3)$$

$P(s)$, uma matriz definida sobre o anel dos polinômios, será chamada, seguindo Rosenbrock (ver (1), pg. 43), matriz do sistema.

É claro que $P(s)$, tal como a quádrupla ordenada (A, B, C, D) ,

contém todas as informações "inerentes" ao sistema.

§§§

A matriz de transferência relaciona a resposta $y(s)$ com a entrada (ou controle) $u(s)$ com condições iniciais nulas. De

(1.1.2) para $x_0 = 0$, vem:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} B u(s)$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1} B u(s) + D u(s)$$

$$y = G(s)u(s),$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (1.1.5)$$

$G(s)$ é a matriz de transferência do sistema, definida sobre o corpo das funções racionais.

$$\text{Mas: } (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

$|sI - A|$ é o polinômio característico associado à matriz A , também chamado polinômio característico do sistema S .

Se houver fatores comuns entre todos os elementos não nulos de $\text{adj}(sI - A)$ e $|sI - A|$, eles podem ser cancelados, obtendo-se:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\Gamma(s)}{m(s)} \quad (1.1.6)$$

$\Gamma(s)$ é chamada matriz adjunta reduzida. Pode-se demonstrar (ver por ex. (2), I, pg. 90 ou (3), pg. 89) que $m(s)$ é o polinômio mínimo associado à matriz A , isto é, $m(s)$ é o polinômio mônico aniquilador de A de menor grau. (Lembra-se que um polinômio $f(s)$ é dito aniquilador de A se e somente se $f(A) = 0$.)

Claro que:

$$m(s) \mid |sI - A|$$

$$G(s) = \frac{C \text{ adj}(sI - A) B}{|sI - A|} + D$$

$$= \frac{C \Gamma(s) B}{m(s)} + D \quad (1.1.7)$$

Observe-se que embora não seja possível, por definição, cancela-

mento entre fatores de todos os elementos de $\Gamma(s)$ e $m(s)$, é possível haver cancelamento entre fatores de todos os elementos de $C\Gamma(s)B$ e $m(s)$.

Exemplo 1.1.7a

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+1)^2(s+2)$$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}; \quad m(s) = (s+1)(s+2)$$

$$C\Gamma(s)B = \begin{bmatrix} s+2 & s+2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§§§

Seja agora:

$$G(s) = \|g_{ij}(s)\| \quad ; \quad i = \overline{1, q} \quad ; \quad j = \overline{1, m}$$

De (1.1.5) vem:

$$g_{ij}(s) = c_i (sI - A)^{-1} b_j + d_{ij} \quad (1.1.8)$$

Ora, dada uma matriz quadrada

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

onde M_1 e M_4 também são quadradas e M_1 não é singular, pode-se demonstrar que (ver (1), pg. 4):

$$|M| = |M_1| \cdot |-M_3 M_1^{-1} M_2 + M_4| \quad (1.1.9)$$

Seja

$P_{1,2,\dots,n,n+i}$ o menor formado a partir da matriz $F(s)$ e cons-

tituido pelas linhas de ordem $1, 2, \dots, n, n+i$ e pelas colunas de ordem $1, 2, \dots, n, n+j$.

De (1.1.3) vem: (simplificando a notação) r

$$P_{1,2,\dots,n,n+i}^{1,\dots,n+j} = \begin{vmatrix} sI - A & b_j \\ -c_i & d_{ij} \end{vmatrix}$$

De (1.1.9):

$$P_{1, \dots, n+j}^{1, \dots, n+i} = |sI - A| \cdot |c_i (sI - A)^{-1} b_j + d_{ij}|$$

E finalmente de (1.1.8):

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{P_{1, \dots, n+j}^{1, \dots, n+i}}{|sI - A|} \quad (1.1.10)$$

1.2 Operações elementares em matrizes. Formas de Smith e McMillan

Conforme uma matriz seja definida sobre um corpo (e.g. dos reais, dos complexos ou das funções racionais) ou sobre o anel dos polinômios, definem-se as seguintes operações elementares (ver por ex. (1), pg. 7 ou (2), I, pg. 130):

- a) Permutar duas linhas (ou colunas),
- b) Somar a uma linha (ou coluna) uma outra linha (ou coluna) multiplicada por um elemento do corpo em questão (ou do anel dos polinômios).
- c) (Para matrizes definidas sobre um corpo) Multiplicar uma linha (ou coluna) por um elemento diferente de zero do corpo.
- c') (Para matrizes definidas sobre o anel dos polinômios): Multiplicar uma linha (ou coluna) por um elemento diferente de zero do corpo sobre o qual estão definidos os polinômios.

Às operações elementares acima definidas correspondem operações inversas que conduzem à matriz original:

- a_i) Permutação inversa
- b_i) Diminuir de uma linha (ou coluna) . . .
- c_i) Multiplicar uma linha (ou coluna) pelo inverso (com relação à operação de multiplicação) do elemento em (c).
- c'_i) Multiplicar . . . pelo inverso do elemento em (c').

Lembra-se (ver por ex, (4), pg. 101) que os elementos de um anel não têm inverso (com relação à operação de multiplicação), o que explica a diferença entre as operações (c) e (c').

É fácil verificar que as operações elementares acima definidas não alteram o posto de uma matriz: com efeito, nenhuma dessas operações altera o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes. Lembra-se a este propósito que o posto de uma matriz pode ser definido ou como a ordem do menor (diferente de zero) de ordem máxima ou como o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes sobre o menor corpo que contém os elementos da matriz (ver (43), pg. 21). Assim, por exemplo, se se tratar de uma matriz polinomial, a independência linear das linhas (ou colunas) deve ser verificada sobre o corpo das funções racionais.

Outro fato bem conhecido é que as operações elementares acima definidas são equivalentes a pré-multiplicações (ou pós-multiplicações) por matrizes convenientes:

- a) Suponha-se uma permutação da i -ésima com a j -ésima linha (ou coluna). Isto equivale, como pode ser verificado facilmente, à pré-multiplicação (ou pós-multiplicação) pela matriz identidade com a i -ésima e a j -ésima linhas permutadas.
- b) Suponha-se que à i -ésima linha (ou coluna) seja somada a j -ésima linha (ou coluna) multiplicada por um elemento x do corpo em questão (ou do anel dos polinômios). Isto equivale à pré-multiplicação (ou pós-multiplicação) pela matriz identidade acrescida do elemento x colocado na posição (i, j) (ou na posição (j, i)).
- c) e c') Suponha-se que a i -ésima linha (ou coluna) seja multi-

plicada por um elemento x (diferente de zero) do corpo em questão. Isto equivale à pré-multiplicação (ou pós-multiplicação) pela matriz identidade em que o i -ésimo elemento da diagonal principal é substituído por x .

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 \dots 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 1 \dots 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{array} \right] ; \quad \text{(b)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 \dots x & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right] \\
 \text{(c)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

No caso de operações elementares em matrizes polinômiais (especialmente importantes para o presente trabalho), o elemento x da matriz (b) é um polinômio, $p(s)$, enquanto que o elemento x da matriz (c) é um escalar (real ou complexo).

É fácil verificar que o determinante da matriz (a) é 1 (a menos do sinal), o da matriz (b) é 1 e o da matriz (c) é x .

Tendo em vista que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes, conclui-se que uma sequência de operações elementares realizadas em matrizes polinômiais (na indeterminada s) é equivalente à pré-multiplicação e pós-multiplicação por matrizes polinômiais cujos determinantes são independentes de s e diferentes de zero. Tais matrizes são chamadas unimodulares (ver e.g. (3), pg.94).

Dada uma matriz polinomial $N(s)$, pode-se demonstrar (ver por ex. (3), pg. 91 ou (2), I, pg. 138) que ela pode ser transformada através de operações elementares em:

$$S(s) = P(s)N(s)Q(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}(p_i(s)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

sendo:

$i = \overline{1, \rho}$, sendo $\rho = \text{Posto } N(s)$,

$P(s)$ e $Q(s)$ são, como vimos, matrizes unimodulares,

$p_i(s)$ são polinômios mônicos tais que:

$$p_i(s) \mid p_{i+1}(s); \quad i = \overline{1, \rho-1} \quad (1.2.2)$$

$S(s)$ é a chamada forma de Smith de $N(s)$ e é única

$p_i(s)$ ($i = \overline{1, \rho}$) são os chamados polinômios invariantes de $N(s)$.

Pode-se demonstrar ainda que (ver (2), I, pgs. 139-141):

$$p_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}; \quad i = \overline{1, \rho} \quad (1.2.3)$$

onde:

$$D_0(s) = 1$$

$D_i(s)$ é o maior divisor comum (m.d.c.) mônico de todos os menores de ordem i da matriz $N(s)$; $i = \overline{1, \rho}$ \$\$\$

Seja agora $G(s)$ a matriz de transferência de um sistema. Façamos:

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)} \quad (1.2.4)$$

sendo:

$N(s)$ uma matriz polinomial

$d(s)$ menor denominador comum mônico dos elementos de $G(s)$

Transformemos $N(s)$ na forma de Smith por meio de operações elementares, ou seja:

$$S(s) = P(s)N(s)Q(s)$$

Dividamos $S(s)$ por $d(s)$, chamando $M(s)$ a matriz resultante:

$$M(s) = \frac{S(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} \text{diag} \left(\frac{p_i(s)}{d(s)} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{diag} \left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i = \overline{1, \rho} \quad (1.2.5)$$

Na última passagem foram feitos os cancelamentos entre os eventuais fatores comuns de $p_i(s)$ e $d(s)$.

$M(s)$ é a chamada forma de Mo Millan da matriz de transferência.

De (1.2.2), vem:

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s) \quad ; \quad i = \overline{1, \rho-1} \quad (1.2.6a)$$

$$\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s) \quad ; \quad i = \overline{1, \rho-1} \quad (1.2.6b)$$

$$\psi_1(s) = d(s) \quad (1.2.6c)$$

A última igualdade pode ser facilmente demonstrada por contradição: se ela não fosse satisfeita, $d(s)$ teria algum fator comum com $p_1(s)$ e, conseqüentemente, com todos os demais $p_i(s)$, o que significaria que todos os elementos de $N(s)$ seriam divisíveis por um fator comum, contrariando a hipótese,

1.3 Controlabilidade e observabilidade

Os conceitos de **controlabilidade** e **observabilidade** representam um papel fundamental na moderna teoria do controles,

Diz-se que o estado de um sistema é **controlável** se e somente se puder ser levado à origem em tempo **finito** por meio do controle (ou da entrada) do sistema (ver por ex. (5), pg. 500). E num abuso de linguagem (ver (1), pg. 177) diz-se que um sistema é **controlável** se e **somente se** seu estado for controlável,

O **critério** (necessário e suficiente) de **controlabilidade** provavelmente mais conhecido é:

$$\text{Posto } \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{p-1}B \end{bmatrix} = n, \quad (1.3.1)$$

sendo p um número inteiro igual ou maior do que o grau do polinômio mínimo de A (ver por ex. (1), pgs. 73 e 161).

Um sistema é dito **observável** se e **somente se**, conhecidas a sua resposta $y(t)$ e o controle $u(t)$ durante um certo tempo, for **possível** determinar o valor inicial do estado $x(0)$.

O **critério** (necessário e suficiente) de **observabilidade** provavelmente mais conhecido é:

$$\text{Posto } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} = n \quad (1.3.2)$$

Como **critérios** de **controlabilidade** e **observabilidade** usaremos com maior frequência neste trabalho os seguintes resul-

tados demonstrados por Rosenbrock ((1), pgs. 72, 161, 178-180):

(i) O sistema (1.1.1) é controlável se e somente se

$$\text{Posto } \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.3)$$

(sendo \mathbb{C} o corpo dos complexos)

(ii) O sistema (1.1.1) é observável se e somente se

$$\text{Posto } \begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.4)$$

De acordo com esses teoremas, portanto, se o sistema não for controlável (observável), para algum valor de $s \in \mathbb{C}$ o posto (sobre o corpo dos complexos) de $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix}$) será inferior a n .

Os valores do $s \in \mathbb{C}$ que eventualmente diminuem o posto de $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix}$) são evidentemente as raízes do m.d.c. de todos os menores de ordem n de $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$ (ou $\begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix}$).

Exemplo 1.3.4a

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 1 \quad 0]; \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 & 1 \end{bmatrix}$$

Menores de ordem 3 de $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$: $(s+1)(s+2)(s+3)$; $(s+1)(s+2)$;
0; $(s+2)(s+3)$

m.d.c. dos menores de ordem 3 de $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$: $s+2$

°. s = -2 reduz o posto de [sI-A B], o que neste exemplo poderia ter sido verificado por simples **inspeção**.

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ s0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Menores de ordem 3: (s+1)(s+2)(s+3); 0; (s+1)(s+3); -(s+2)(s+3)

m.d.c. dos menores de ordem 3: s+3

s = -3 reduz o posto de $\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}$

§§§

...

As **equações** diferenciais do sistema no exemplo acima **são**:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$

Ora, da segunda **equação** diferencial, **vem**:

$$x_2(t) = ke^{-2t}$$

Verificamos então que e^{-2t} **não é** afetado pelo **controle** $u(t)$ e **di-**
remoa, seguindo **Rosenbrock** ((1), pg. 64), que $s = -2$ é um **modo**
desacoplado da entrada.

É fácil verificar ainda do **sistema** de **equações** diferen-
ciais acima que e^{-3t} **não** aparecerá na resposta e diremos que
 $s = -3$ é um **modo desacoplado da resposta**.

Para facilitar o desenvolvimento do que se segue, estabelecamos as seguintes definições:

Definição 1.3.52

O polinômio dos modos desacoplados da entrada ($p_e(s)$) é o m.d.c. mônico de todos os menores de ordem n de $[sI-A \quad B]$.

Definição 1.3.6:

O polinômio dos modos desacoplados da resposta ($p_r(s)$) é o m.d.c. mônico de todos os menores de ordem n de $\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}$. § § §

Pode acontecer que algum valor de $s \in \mathbb{C}$ reduza os postos de $[sI-A \quad B]$ e de $\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}$. Tal valor de s será então um modo desacoplado da entrada e da resposta, vejamos ^{como} ~~como~~ esses modos são determinados.

Seja o sistema (1.1.1) e suponha-se que s_0 seja um modo desacoplado da entrada, Neste caso pode-se demonstrar (ver (1), pgs. 60-62) que através de operações elementares sobre as linhas de $[sI-A \quad B]$, consegue-se obter uma linha divisível por $s-s_0$. Dividamos a referida linha por $s-s_0$. Façamos em seguida a mesma sequência de operações com todos os modos desacoplados da entrada, Depois de termos eliminado, por este processo, todos os modos desacoplados da entrada, $[sI-A \quad B]$ é transformado na forma (não -única) $\begin{bmatrix} T_1(s) & B_1 \end{bmatrix}$.

É claro que ao eliminarmos todos os modos desacoplados da entrada, teremos também eliminado os modos desacoplados da entrada e da resposta, pois o conjunto destes é necessariamente um sub-conjunto daqueles.

Seja:

$$p_r'(s) = \text{m.d.c. m\^o nico de todos os menores de ordem } n \text{ de } \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_1(s) \\ -C \end{bmatrix}$$

(pode-se provar que $p_r'(s)$ \^e \^unico, apesar de $T_1(s)$ n\~ao o ser: ver (1), pgs. 64-67).

Temos ent\~ao:

Defini\~ao 1.3.7:

Polin\^omio dos modos desacoplados da entrada e da resposta:

$$p_{er}(s) = \frac{p_r(s)}{p_r'(s)}$$

observa\~ao 1.3.7a

Uma outra maneira, mais \^obvia, de determinar o polin\^omio dos modos desacoplados da entrada e da resposta \^e:

$$p_{er}(s) = \text{m.d.c.}(p_e(s), p_r(s)) \tag{1.3.7a}$$

§§§

Eliminemos de $\begin{bmatrix} T_1(s) \\ -C \end{bmatrix}$ os modos desacoplados da resposta

que restaram por meio de opera\~oes sobre as colunas. Ap\^os tal

elimina\~ao, $\begin{bmatrix} T_1(s) \\ -C \end{bmatrix}$ \^e transformado na forma (n\~ao-\^unica) r

$\begin{bmatrix} T_2(s) \\ -C_1 \end{bmatrix}$. Conseq\^uentemente, a matriz do sistema ap\^os a elimina\~ao

de todos os modos desacoplados ter; a forma (n\~ao-\^unica):

$$\begin{bmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{bmatrix},$$

cuj\~a matriz de transfer\^encia \^e (ver (1), pg. 50):

$$G_2(s) = C_1 T_2^{-1}(s) B_1 + D \tag{1.3.8}$$

Pode-se demonstrar que (ver (1), pg. 59):

$$G_2(s) = G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \quad (1.3.9)$$

Ou dito em palavras, os modos desacoplados da entrada e da resposta não contribuem para a matriz de transferência. \$\$\$

Pode-se demonstrar ainda ((1), pgs. 79 e 85) que dado

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix}, \text{ existe uma matriz } H \text{ não-singular e indepen-}$$

dente de s tal que:

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} sI_1 - A_{11} & 0 & 0 \\ -A_{21} & sI_2 - A_{22} & B_2 \\ -C_1 & -C_2 & D \end{bmatrix}, \text{ sendo:}$$

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI_2 - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = \dim I_2 \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.10)$$

Temos então:

$$H \begin{bmatrix} sI-A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_1 - A_{11} & 0 & 0 \\ -A_{21} & sI_2 - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

$$\therefore \text{Posto} \begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI_1 - A_{11} & 0 & 0 \\ -A_{21} & sI_2 - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.12)$$

De (1.3.10) e (1.3.12), vem:

$$p_0(s) = |sI_1 - A_{11}| \quad (1.3.13)$$

Façamos agora operações elementares em $sI_1 - A_{11}$ de modo a transformá-la na forma de Smith:

$$P_{11}(s) (sI_1 - A_{11}) Q_{11}(s) = S_{11}(s) = \text{diag}(p_i(s)) \quad (1.3.14)$$

sendo:

$$i = \overline{1, n_1} \quad ; \quad n_1 = \dim I_1$$

$$p_i(s) \mid p_{i+1}(s) \quad (1.3.15)$$

$$\text{Posto } (sI_1 - A_{11}) = \text{Posto } S_{11}(s) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (1.3.16)$$

Ora, dependendo dos **polinômios** invariantes $p_i(s)$ ($i = \overline{1, n_1}$),

pode acontecer que se s^* for uma raiz de $sI_1 - A_{11}$ com grau de

multiplicidade j , o posto de $S_{11}(s^*)$ seja reduzido de um número menor que j . Assim, por exemplo, se

$$p_i(s) = 1 \quad (i = \overline{1, n_1-1}) \quad \text{e}$$

$$(s-s^*)^j \mid p_{n_1}(s), \text{ teremos:}$$

$$\text{Posto } S_{11}(s) = n_1 - 1$$

Por outro lado, a redução do posto de $S_{11}(s^*)$ não pode ser maior de que j . Com efeito, suponha-se que a redução seja $j+1$. Teríamos então:

$$(s-s^*) \mid p_{n_1-j}(s)$$

$$(s-s^*) \mid p_{n_1-j+1}(s)$$

⋮

$$(s-s^*) \mid p_{n_1}(s)$$

Ora, tendo em vista que um **polinômio** invariante $p_i(s)$ é a relação entre os m.d.c. dos menores de ordem i e $i-1$, concluiríamos:

$(s-s^*)^{j+1} \mid |sI_1 - A_{11}|$, contrariando a hipótese inicial. Finalmente, tendo em vista (1.3.16), (1.3.12) e (1.3.10), podemos concluir:

Proposição 1.3.17:

Seja s^* um modo desacoplado da entrada com grau de multiplicidade j . Então:

$$\text{Posto} [s^*I - A \quad B] = n - d_j ; \quad 1 \leq d_j \leq j \quad (1.3.17)$$

Por um desenvolvimento análogo podemos concluir o resultado dual:

Proposição 1.3.18:

Seja s^* um modo desacoplado da resposta com grau de multiplicidade j . Então:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} s^*I - A \\ -C \end{bmatrix} = n - d_j ; \quad 1 \leq d_j \leq j \quad (1.3.18)$$

§§§

Por outro lado, a partir de (1.3.11) pode-se demonstrar com relativa facilidade (ver (1), pg. 85) que o número de modos desacoplados da entrada (contados segundo os respectivos graus de multiplicidade) é igual à redução (com relação a n) do posto de

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & \dots & A^{p-1}B \end{bmatrix}$$

E, paralelamente, o número dos modos desacoplados da resposta é igual à redução do posto de

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}$$

§§§

Exemplo 1.3.19

Vamos ilustrar a maneira de calcular os modos desacoplados

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

$$[sI - A \quad B] = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por simples inspeção, sem precisar calcular o m.d.c. dos menores de ordem 4, verifica-se que -1 e -2 reduzem o posto de $[sI - A \quad B]$. E são os Únicos modos desacoplados da entrada porque $\text{Posto } B = 2$. Onde:

$$p_e(s) = (s+1)(s+2)$$

Analogamente de $\begin{bmatrix} sI - A \\ -C \end{bmatrix}$ conclui-se facilmente que:

$$p_r(s) = (s+1)^2$$

$$p_{er}(s) = \text{m.d.c.}((s+1)(s+2), (s+1)^2) = s+1$$

Calculemos $p_{er}(s)$ pelo outro método mais trabalhoso: dividindo-se a 1ª linha de $[sI - A \quad B]$ por $s+1$ e a 2ª por $s+2$, vem:

$$[sI - A \quad B] \longrightarrow [T_1(s) \quad B_1] = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E portanto:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) \\ -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

°. p_r'(s) = s+1

E portanto:

$$P_{er}(s) = \frac{(s+1)^2}{s+1} = s+1$$

Eliminando-se s+1 de $\begin{bmatrix} T_1(s) \\ -C \end{bmatrix}$ obtém-se a seguinte forma da matriz

do sistema:

$$\begin{bmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de transferência do sistema sem os modos desacoplados é (ver (1.3.8)):

$$G_2(s) = C_1 T_2^{-1}(s) B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \bigcirc & \\ & & 1 & \\ \bigcirc & & & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s+3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E a matriz de transferência calculada a partir da matriz de sistema original é:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & & & \\ & \frac{1}{s+2} & & \\ & & \frac{1}{s+1} & \\ & & & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s+3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.3.20

Vamos agora verificar a Proposição 1.3.17. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[sI-A \quad B] = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & s-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Menores de ordem 3 de $[sI-A \quad B]$

$$(s-1)^3; \quad (s-1)^2; \quad -(s-1)^2; \quad 0$$

$$\therefore p_e(s) = (s-1)^2$$

Portanto $s^* = 1$ é um modo desacoplado com grau de multiplicidade 2.

$$\text{posto } [s^*I - A \quad B] = \text{Posto} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

A redução do posto é portanto igual a 1

E por outro lado:

$$\text{Posto } [B \quad AB \quad A^2B] = \text{Posto } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

(A redução do posto é igual a 2)

2, ZEROS E POLOS

2.1 Sistemas escalares (uma entrada e uma saída)

Para melhor compreendermos os significados matemático e "físico" dos **zeros** e **polos** em sistemas **lineares**, convém começar com sistemas **escalares**.

Seja a função racional própria:

$$g(s) = \frac{k\varphi_g(s)}{p_g(s)}, \quad (2.1.1)$$

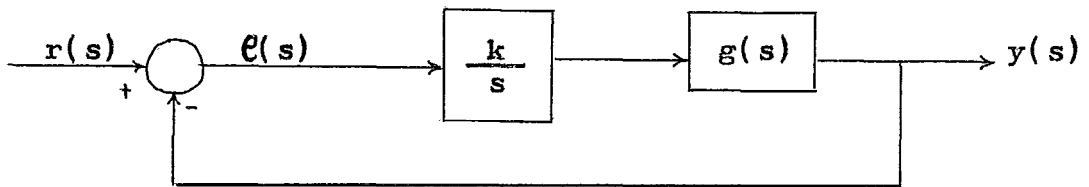
onde supomos que $\varphi_g(s)$ e $p_g(s)$ são **mônicos** e **irreduzíveis** (não há fator comum entre eles).

As **raízes** de $\varphi_g(s)$ são chamados zeros de $g(s)$, enquanto que as **raízes** de $p_g(s)$ são chamadas polos de $g(s)$.

Suponha-se agora que $g(s)$ seja a **função de transferência** de um sistema escalar. A interpretação "física" óbvia de um **polo** da função de **transferência** é que ele será um modo da resposta do sistema submetido a uma entrada impulsional e com condições iniciais nulas. A interpretação "física" dos zeros não é tão óbvia. A **colocação** dos zeros no plano complexo é importante quando se estuda a estabilidade de um sistema com realimentação da **resposta**: assim, no caso escalar, uma função de **transferência** com um zero no semi-plano aberto da direita oferece dificuldades quanto à estabilidade quando se aplica **realimentação** da resposta (tais sistemas são chamados de fase **não-mínima**: ver por ex.

(1), pg.174; (7) pg. 425; (8), pg. 191).

Para o presente trabalho, entretanto, é mais importante o fato que, por meio dos zeros da função de transferência, podemos bloquear (através do cancelamento) os modos da entrada. Tal propriedade é usada, com efeito, no seguinte projeto clássico de servomecanismo em que se deseja rastrear um degrau:



$$r(s) = \frac{1}{s} ; \quad e(s) = r(s) - y(s) ; \quad y(s) = \frac{k}{s} g(s) e(s)$$

$$\therefore e(s) = \frac{s}{s+kg(s)} \cdot r(s) = \frac{1}{s+kg(s)}$$

Supondo que o denominador da expressão acima tenha as raízes com a parte real negativa, podemos aplicar o teorema do valor final, obtendo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

§§§

Como é bem sabido, a função de transferência não nos fornece todas as informações sobre o sistema. Consideremo-lo portanto na forma do espaço de estado:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{2.1.2a}$$

$$y = cx + du \tag{2.1.2b}$$

cuja função de transferência é (ver (1.1.5)):

$$g(s) = \frac{k \varphi_g(s)}{p_g(s)} = c(sI - A)^{-1} b + d = \dots$$

$$= \frac{c \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot b}{|sI - A|} + d \quad (2.1.3)$$

$p(s)$ é usualmente chamado **polinômio característico** da função de transferência, enquanto que $|sI-A|$ é, como vimos, frequentemente chamado **polinômio característico** do sistema, E, paralelamente, as raízes de $p_g(s)$ são chamadas polos da função de transferência enquanto que as raízes de $|sI-A|$ são chamadas **polos do sistema**,

Investiguemos agora a **relação** entre $|sI-A|$ e $p_g(s)$.

Seja a **matriz** do sistema:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI-A & b \\ -c & d \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

Por meio de **operações** elementares sobre as **linhas** de $\begin{bmatrix} sI-A & b \end{bmatrix}$ podemos eliminar os modos desacoplados da entrada (ver **secção** 1.3), obtendo:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & b_1 \\ -c & d \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

Ora, como **vimos**, a passagem de $\begin{bmatrix} sI-A & b \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} T_1(s) & b_1 \end{bmatrix}$ exige a divisão das linhas pelos fatores correspondentes aos modos desacoplados da entrada, Temos **então**:

$$|sI-A| = k_1 |T_1(s)| \cdot p_e(s) \quad ; \quad k_1 \neq 0 \quad (2.1.6)$$

Façamos agora o mesmo tipo de **operações** elementares sobre as **n** primeiras colunas de (2.1.5):

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & b_1 \\ -c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_2(s) & b_1 \\ -c_1 & d \end{bmatrix}$$

E analogamente:

$$|T_1(s)| = k_2 |T_2(s)| \cdot p_r'(s) \quad ; \quad k_2 \neq 0 \quad (2.1.7)$$

De (2.1.6), (2.1.7) e da **definição** 1.3.7, vem:

$$|sI-A| = k_1 k_2 |T_2(s)| \cdot \frac{p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)} \quad (2.1.8)$$

De fato pode-se demonstrar que (ver (1), pg. 66)

$$|sI-A| = p_g(s) \cdot \frac{p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)} \quad (2.1.9)$$

(Rosenbrock exprime este resultado de forma diversa, não polinomial),

Exemplor

$$A = \text{diag}(1, 2, 3, 4) ; b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T ; c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ; d=0$$

É faoil verificar quer

$$p_e(s) = (s-1)(s-2) ; p_r'(s) = \frac{p_r(s)}{p_{er}(s)} = 1$$

$$g(s) = \frac{c \cdot \text{adj}(sI-A) \cdot b}{sI-A} + d = \frac{4s-16}{(s-3)(s-4)} \quad \therefore p_g(s) = (s-3)(s-4)$$

$$\therefore p_g(s) \cdot \frac{p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)} = (s-3)(s-4)(s-1)(s-2) = |sI-A| \quad \text{\$ \$ \$}$$

De (2.1.9), se o sistema não tiver modos desacoplados, temos:

$$|sI-A| = p_g(s)$$

Por outro lado, é claro que em todo sistema escalar, temos:

$$p_g(s) \mid m(s) , \quad (2.1.10)$$

sendo $m(s)$ o polinômio mínimo de A (ver (1.1.6)).

E tendo em vista que $m(s) \mid |sI-A|$, podemos concluir:

Em todo sistema escalar controlável e observável temos:

$$m(s) = |sI-A| .$$

Ou ainda: Todo sistema escalar em que $m(s) \neq |sI-A|$ é incontrollável e/ou inobservável.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} ; \quad c = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] ; \quad d = 0$$

$$\text{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)(s-2) & 0 \\ (s-1) & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$|sI-A| = (s-1)^2(s-2)$$

$$\therefore m(s) = (s-1)(s-2) \neq |sI-A|$$

$$\text{Posto} [b \quad Ab \quad A^2b] = \text{Posto} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_1+2b_3 & 3b_1+4b_3 \end{bmatrix} = 2$$

E o sistema é de fato incontrolável $\forall b_1, b_2, b_3$ (mas observável para c_1, c_2 o c_3 apropriados, como pode ser verificado facilmente:)

§§§

Dada a função de transferência:

$$g(s) = \frac{c \cdot \text{adj}(sI-A) \cdot b + d}{|sI-A|}$$

(2.1.9) estabelece uma relação entre os denominadores da função de transferência antes dos cancelamentos (isto é, $|sI-A|$) e depois dos cancelamentos (isto é, $p_g(s)$) de fatores comuns no numerador,

Estamos interessados agora em investigar a relação entre os numeradores de $g(s)$ antes e depois dos eventuais cancelamentos de fatores comuns do denominador.

$$g(s) = \frac{c \cdot \text{adj}(sI-A) \cdot b + |sI-A| \cdot d}{|sI-A|} \quad (2.1.12)$$

E após o cancelamento de eventuais fatores comuns:

$$g(s) = k. \frac{\varphi_g(s)}{p_g(s)}$$

As raízes de $\varphi_g(s)$ são os zeros da função de transferência.

Seguindo Rosenbrock (ver (9a)), definamos os zeros do sistema do seguinte modo:

Seja $P(s)$ dado por (2.1.4). Então:

$$\begin{aligned} \text{Se } |P(s)| \equiv 0, \quad \{\text{Zeros do sistema}\} &= \{\text{Raízes de } |sI-A|\} \\ \text{Se } |P(s)| \neq 0, \quad \{\text{Zeros do sistema}\} &= \{\text{Raízes de } |P(s)|\} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Ora, de (1.1.9), vem:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & d \end{vmatrix} &= |sI-A| \cdot (c \cdot (sI-A)^{-1} \cdot b + d) \\ &= |sI-A| \cdot \frac{c \cdot \text{adj}(sI-A) \cdot b + |sI-A| \cdot d}{|sI-A|} \\ &= c \cdot \text{adj}(sI-A) \cdot b + |sI-A| \cdot d \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Comparando (2.1.1) e (2.1.12), verificamos que se $|P(s)| \neq 0$, os zeros do sistema são as raízes do numerador da função de transferência antes do cancelamento de eventuais fatores comuns de $|sI-A|$.

Suponha-se $|P(s)| \neq 0$ e seja:

$$|P(s)| = k' \varphi_S(s), \text{ sendo } \varphi_S(s) \text{ mônico} \quad (2.1.15)$$

Então tomamos:

Proposição 2.1.16:

Se $|P(s)| \neq 0$,

$$\varphi_S(s) = \varphi_g(s) \cdot \frac{p_e(s)p_r(s)}{p_{er}(s)} \quad (2.1.16)$$

Com efeito:

Através das operações já conhecidas para a eliminação dos modos desacoplados da matriz do sistema, obtemos sucessivamente:

$$\begin{bmatrix} sI-A & b \\ -c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_1(s) & b_1 \\ -c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_2(s) & b_1 \\ -c_1 & d \end{bmatrix}$$

E conseqüentemente:

$$\begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & d \end{vmatrix} = k_1 p_e(s) \begin{vmatrix} T_1(s) & b_1 \\ -c & d \end{vmatrix} = k_1 k_2 p_e(s) p_r'(s) \begin{vmatrix} T_2(s) & b_1 \\ -c_1 & d \end{vmatrix}$$

$$= k_3 p_e(s) p_r'(s) (c_1 \cdot \text{adj} T_2(s) \cdot b_1 + |T_2(s)| \cdot d) \quad (2.1.17)$$

Ora, sabemos que a função de transferência não se altera quando os modos desacoplados são eliminados. Então:

$$g(s) = k \frac{\varphi_g(s)}{p_g(s)} = \frac{c_1 \cdot \text{adj} T_2(s) \cdot b_1 + |T_2(s)| \cdot d}{|T_2(s)|}$$

$$\therefore c_1 \cdot \text{adj} T_2(s) \cdot b_1 + |T_2(s)| \cdot d = k |T_2(s)| \frac{\varphi_g(s)}{p_g(s)} \quad (2.1.18)$$

Mas de (2.1.8) e (2.1.9) vem:

$$p_g(s) = k_4 |T_2(s)|$$

Substituindo em (2.1.18):

$$c_1 \cdot \text{adj} T_2(s) \cdot b_1 + |T_2(s)| \cdot d = k_5 \varphi_g(s)$$

De (2.1.15) e (2.1.17):

$$k' \varphi_S(s) = k_3 p_e(s) p_r'(s) k_5 \varphi_g(s)$$

$$\therefore \varphi_S(s) = \frac{k_3 k_5}{k'} \cdot \frac{\varphi_g(s) p_e(s) p_r'(s)}{p_{er}(s)} \quad (2.1.19)$$

Como todos os polinômios em (2.1.19) são mônicos, teremos for-

çosamente:

$$\frac{k_3 k_5}{k^1} = 1, \text{ donde se segue o resultado (2.1.16).}$$

Q. E. D.

Comparando (2.1.16) com (2.1.9) verificamos a "simetria" das noções de zeros a polos e podemos concluir ipso facto que a noção de zero do sistema introduzida por Rosenbrock é adequada.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 2]; \quad d = 0$$

É fácil verificar que -1 é o único modo desacoplado da mada. Donde:

$$p_e(s) = s+1$$

E também:

$$p_r(s) = p_r'(s) = s+2$$

Por outro lado, efetuando-se, vem:

$$g(s) = \frac{4(s+5/2)}{(s+2)(s+3)}$$

Donde:

$$\varphi_g(s) = s + 5/2$$

$$\begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} = 4(s+1)(s+2)(s+5/2) \quad \therefore \quad \varphi_s(s) = (s+1)(s+2)(s+5/2)$$

§§§

Observação 2.1.20:

Quando $|P(s)| \equiv 0$ é claro que tanto $g(s)$ como $\varphi_g(s)$ são identicamente nulos e conseqüentemente (2.1.16) não vale neste caso. Observe-se, entretanto, que o resultado geral demonstrado em (9a), equivalente a (2.1.16), é apresentado em forma diversa, não polinomial. No caso particular em que $|P(s)| \equiv 0$, a função de transferência não tem zeros, e a relação entre os zeros do sistema e os modos desacoplados é:

$$\{\text{Zeros do sistema}\} = \{\text{Modos desacoplados da entrada}\} + \{\text{Modos desacoplados da resposta}\} - \{\text{Modos desacoplados da entrada e da resposta}\}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = [1 \quad 0]; \quad d = 0$$

É fácil ver que:

$$g(s) = 0$$

$$\{\text{Zeros do sistema}\} = \{-1, -2\}$$

$$\{\text{Modos desacoplados da entrada}\} = \{-1\}$$

$$\{\text{Modos desacoplados da resposta}\} = \{-2\}$$

2.2 Sistemas multivariáveis

Não há unanimidade entre os pesquisadores de sistemas lineares a respeito das definições de polos e (principalmente) de zeros em sistemas multivariáveis.

Seja $G(s)$ uma matriz definida sobre o corpo das funções racionais, Em análise clássica (ver (11), pg. 241, apud (10))

diz-se que um número é um polo de uma matriz se e somente se ele for um polo de pelo menos um elemento da matriz, E, analogamente, um número é dito um zero da matriz se e somente se ele for um zero de pelo menos um elemento da matriz,

Suponha-se agora que $G(s)$ seja a matriz de transferência de (1.1.1) dada por (1.1.5). Neste caso, a definição acima de zero, apesar de adotada por alguns autores ((12)-(14) apud (10)), não satisfaz às interpretações "físicas" dos zeros em sistemas escalares (ver seção anterior), pois é claro que um zero colocado na posição (i, j) da matriz de transferência só bloqueará o respectivo modo da entrada na i -ésima componente da resposta e com a condição que o modo só apareça na j -ésima componente da entrada.

A noção de polo dada acima, pelo contrário, satisfaz à interpretação "física": todo polo aparecerá como modo de pelo menos uma componente da resposta. Tal noção de polo da matriz de transferência é adotada por muitos autores (ver por ex. (6), pg. 85 e (10)).

§§§

Por outro lado, o polinômio característico de uma matriz de transferência $G(s)$ é usualmente definido (ver por ex. (6), pg. 219) como o menor denominador comum mônico de todos os menores de $G(s)$, ou por outras palavras, é o m.m.c. mônico dos denominadores de todos os menores de $G(s)$. (Como é usual, supõe-se que todos os elementos de $G(s)$ são irredutíveis).

É claro então que todo polo (de acordo com a definição acima) de $G(s)$ será uma raiz do polinômio característico de $G(s)$, mas não há necessariamente coincidência quanto ao grau de multi-

plieidades, conforme pode ser verificado no seguinte:

Exemplo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

De acordo com a definição acima, vemos que 0, -1 e -2 são polos de G(s)

E é fácil verificar que o polinômio característico de G(s) é: $s^2(s+1)(s+2)$.

§§§

Seria conveniente que, tal como ocorre nos sistemas escalares, os polos de G(s) tivessem graus de multiplicidade idênticos aos das respectivas raízes de polinômio característico.

Por esta razão e por outra que veremos mais adiante, adotaremos a seguinte:

Definição 2.2.1:

Os polos de uma matriz da transferência G(s) são as raízes do polinômio característico de G(s), ou seja, são as raízes do menor denominador comum mônico de todos os menores de G(s).

Portanto, de acordo com esta definição, tanto para sistemas escalares como para sistemas multivariáveis temos:

$$\{\text{Polos da matriz (função) de transferência}\} = \{\text{Raízes do polinômio característico da matriz (função) de transferência}\}$$

Observe-se porém que, ao contrário do que ocorre em sistemas escalares, o grau de multiplicidade de um polo de uma matriz de transferência não significa (como pode ser verificado facilmente no exemplo acima) que o respectivo modo vai aparecer

na resposta do sistema ao impulso com o mesmo grau de multiplicidade. Tal fato, aliás, é favorável à outra definição de polo de sistemas multivariáveis mencionada no início desta seção. A razão principal da nossa preferência pela definição 2.2.1 vai aparecer mais adiante,

§§§

Rosenbrock ((1), pg. 113) define os polos de uma matriz de transferência como as raízes dos denominadores da forma de McMillan de $G(s)$, ou-seja:

$$\{\text{Polos de } G(s)\} = \left\{ \text{Raízes de } \prod_{i=1}^{\rho} \psi_i(s) \right\}, \quad (2.2.2)$$

sendo ρ o posto (sobre o corpo das funções racionais) de $G(s)$.

Vamos demonstrar a equivalência de (2.2.2) e da definição 2.2.1 através de:

Proposição 2.2.3:

O menor denominador comum mônico de todos os maiores (não nulos) de uma matriz de transferência $G(s)$ é $\prod_{i=1}^{\rho} \psi_i(s)$, onde $\psi_i(s)$ ($i = \overline{1, \rho}$) são os denominadores da forma de Mc Millan de $G(s)$ e ρ é o posto (sobre o corpo das funções racionais) de $G(s)$.

Para demonstrar a proposição acima, vamos usar o seguinte resultado obtido por Rosenbrock ((1), pg. 114):

O menor denominador comum mônico de todos os menores de ordem k ($k = \overline{1, \rho}$) de uma matriz de transferência $G(s)$ é o denominador

obtido de $\frac{\prod_{i=1}^k \varepsilon_i(s)}{\prod_{i=1}^k \psi_i(s)}$ depois que todos os fatores comuns foram

cancelados. ($\varepsilon_i(s)$ e $\psi_i(s)$ são respectivamente os numeradores e denominadores da forma de Mc Millan de $G(s)$.)

Ora, tendo em vista este resultado para demonstrar a Proposição 2.2.3 basta provar que o menor denominador comum de

$$\left\{ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)}{\psi_1(s)\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)\dots\varepsilon_p(s)}{\psi_1(s)\psi_2(s)\dots\psi_p(s)} \right\} \text{ é } \prod_{i=1}^p \psi_i(s).$$

Mas sabemos que (ver (1.2.6):

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s) \quad ; \quad i = \overline{1, \rho-1}$$

$$\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s) \quad ; \quad i = \overline{1, \rho-1}$$

$\varepsilon_i(s)$ e $\psi_i(s)$ ($i = \overline{1, \rho}$) não têm fatores comuns

Donde se conclui:

$\varepsilon_1(s)$ e $\psi_1(s)$ não têm fatores comuns

$\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)$ e $\psi_2(s)$ não têm fatores comuns porque $\varepsilon_2(s)$ e $\psi_2(s)$

não os têm e $\varepsilon_1(s) \mid \varepsilon_2(s)$

⋮

$\prod_{i=1}^p \varepsilon_i(s)$ e $\psi_p(s)$ não têm fatores comuns porque $\varepsilon_p(s)$ e $\psi_p(s)$

não os têm e $\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_p(s)$ ($i = \overline{1, \rho-1}$)

Consequentemente $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_p(s)$ permanecem intactos em

peelo menos um dos elementos de

$$\left\{ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s)}{\psi_1(s)\psi_2(s)}, \dots, \frac{\prod_{i=1}^p \varepsilon_i(s)}{\prod_{i=1}^p \psi_i(s)} \right\} \text{ e portanto } \prod_{i=1}^p \psi_i(s)$$

é realmente o menor denominador comum procurado.

Q.E.Do

Estabelecida a equivalência entre (2.2.2) e a definição 2.2.1, vamos agora investigar a relação entre os polos de $G(s)$ e os polos do sistema, definidos, como vimos, como as raízes de $|sI-A|$.

Considere-se a matriz do sistema (1.1.1):

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

Através da eliminação dos modos desacoplados da entrada e depois dos modos desacoplados da resposta que restaram, obtemos sucessivamente:

$$P(s) \longrightarrow \begin{bmatrix} T_1(s) & B_1 \\ -C & D \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{bmatrix}$$

Isto acarreta:

$$\begin{aligned} |sI-A| &= k_1 p_e(s) |T_1(s)| = k_1 k_2 p_e(s) p_r'(s) |T_2(s)| \\ &= \frac{k_1 k_2 p_e(s) p_r(s) |T_2(s)|}{p_{er}(s)} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Efetivamente pode-se demonstrar que (ver (1), pgs. 66 e 113):

$$\frac{|sI-A|}{p_{er}(s)} = \frac{p_G(s) p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)}, \quad (2.2.5)$$

onde $p_G(s)$ é o polinômio característico de $G(s)$.

(O resultado acima, (2.2.5), do qual (2.1.9) é um caso particular, é expresso por Rosenbrock em forma diversa, não polinomial.)
§§§

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -2 & & \\ & & & \\ & & & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

É fácil verificar que:

$$|sI-A| = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)$$

$$p_e(s) = (s+1)(s+2)$$

$$p_r(s) = (s+1)(s+3)$$

$$p_{er}(s) = s+1$$

Efetuada $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$, podemos determinar $p_G(s)$ ou

pela definição 2.2.1 ou por (2.2.2). A forma de Mc Millan de

$G(s)$ é:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad p_G(s) = s+4$$

§§§

É importante notar que em sistemas multivariáveis, ao contrário do que ocorre em sistemas escalares (ver seção anterior) pode acontecer que $p_G(s) \not\propto m(s)$

Exemplo:

Seja o sistema controlável a observável:

$$A = B = C = I_2 \quad D = 0$$

$$|sI-A| = (s-1)^2$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

Donde vemos que :

$$m(s) = s-i$$

$$p_G(s) = (s-1)^2$$

§§§

Voltemos agora a nossa **atenção** para os zeros em **sistemas multivariáveis**.

Ultimamente a **definição** de zeros de $G(s)$ mencionada no **início** desta **secção** tem sido abandonada (além de (1), (9) e (9a), ver por ex. (10), (17)-(26), (46) e (49)).

Adotaremos neste trabalho a seguinte **definição** de zeros de uma matriz de **transferência** proposta por Rosenbrock ((1), pg. 113):

Os zeros de $G(s)$ são as **raízes** dos numeradores da forma de Mc Millan de $G(s)$, ou seja:

$$\{\text{Zeros de } G(s)\} = \{\text{Raízes de } \prod_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i(s)\} \quad , \quad (2.2.7)$$

onde ρ é o posto (sobre o corpo das **funções racionais**) de $G(s)$ e $\varepsilon_i(s)$ ($i = \overline{1, \rho}$) são os numeradores da forma de Mc Millan de $G(s)$.

Vemos que essa **definição** é **simétrica** com relação à **definição** de **polos** de $G(s)$ (ver (2.2.2)), indício de que $\bar{\quad}$ uma **definição** adequada.

§§§

Por outro lado, **estamos** interessados também, tal como nos **sistemas** escalares, em definir os zeros do sistema. Seguindo Rosenbrock (9a) seja $R(s)$ a matriz do sistema dada por (1.1.3).

Construamos os menores:

$$P_{\substack{1,2,\dots,n,n+i_1,\dots,n+i_p \\ 1,2,\dots,n,n+j_1,\dots,n+j_p}} \quad (2.2.9)$$

Os **menores acima** são formados a partir de $P(s)$ com as linhas de ordem $1,2,\dots,n,n+i_1,n+i_2,\dots,n+i_p$ e com as colunas

de ordem $1,2,\dots,n,n+j_1,n+j_2,\dots,n+j_p$, sendo:

$$i_1 < i_2 < \dots < i_p$$

$$j_1 < j_2 < \dots < j_p$$

$n+p$ é o posto (sobre o corpo das funções racionais) de $P(s)$

$$0 \leq p \leq \min(m, q)$$

Os zeros do sistema são definidos como as raízes do m.d.c. de todos os **menores** (não nulos) da forma (2.2.9)

§§§

Tal como nos sistemas escalares, estamos interessados em **investigar** a relação entre os zeros do sistema e os zeros da matriz de transferência.

Seja então $\varphi_G(s)$ o polinômio mônico oujas raízes são

os zeros de $G(s)$, ou seja:

$$\varphi_G(s) = \prod_{i=1}^p \varepsilon_i(s) \quad (2.2.10)$$

E seja $\varphi_S(s)$ o polinômio mônico cujas raízes são os zeros do sistema, ou seja:

$$\varphi_S(s) = \text{m.d.c. mônico de } \left\{ \begin{array}{l} P_{\substack{1,\dots,n,n+i_1,\dots,n+i_p \\ 1,\dots,n,n+j_1,\dots,n+j_p}} \end{array} \right\} \quad (2.2.11)$$

Temos então:

Proposição 2.2.12

$$\varphi_S(s) = \frac{\varphi_G(s) p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)} \quad (2.2.12)$$

(Vamos demonstrar a igualdade acima somente para o caso em que $\rho = m = q$. Para o caso geral ver (9a), onde o resultado é expresso em forma diversa, não polinomial.)

Com efeito, através das operações já conhecidas para a eliminação dos modos desacoplados, obtemos:

$$\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_1(s) & B_1 \\ -C & D \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{bmatrix}$$

Ora, sendo $\rho = m = q$, temos:

$$\varphi_S(s) = k_1 \begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix}; \quad k_1 \neq 0 \quad (2.2.13)$$

E por outro lado:

$$\begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix} = k_2 p_e(s) \begin{vmatrix} T_1(s) & B_1 \\ -C & D \end{vmatrix} = k_2 k_3 p_e(s) p_r'(s) \begin{vmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{vmatrix}$$

Donde:

$$\varphi_S(s) = k_1 k_2 k_3 \frac{p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)} \begin{vmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{vmatrix} \quad (2.2.14)$$

Mas de (1.1.9):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} T_2(s) & B_1 \\ -C_1 & D \end{vmatrix} &= |T_2(s)| \cdot |C_1 T_2^{-1}(s) B_1 + D| \\ &= |T_2(s)| \cdot |G_2(s)| = |T_2(s)| \cdot |G(s)| \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

De (2.2.4) e (2.2.5) vem:

$$|T_2(s)| = k_4 p_G(s) = k_4 \prod_{i=1}^p \psi_i(s) \quad (2.2.16)$$

E por outro lado:

$$|G_2(s)| = |G(s)| = k_5 \frac{\prod_{i=1}^p \epsilon_i(s)}{\prod_{i=1}^p \psi_i(s)} \quad (2.2.17)$$

De (2.2.14) a (2.2.17), vem:

$$\varphi_S(s) = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 \frac{p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)} \prod_{i=1}^p \varepsilon_i(s)$$

De (2.2.10) e tendo em vista que todos os polinômios da expressão acima são mônicos obtém-se o resultado (2.2.12)

Q.E.D.

(2.2.12), do qual (2.2.16) é um caso particular, ~~é um caso particular~~, é uma relação que mostra a "simetria" (ver (2.2.5)) entre as noções de polos do sistema e zeros do sistema, por um lado, e entre polos da matriz de transferência e zeros da matriz de transferência por outro. Esta simetria e o fato de (2.2.12) e (2.2.5) serem generalizações de relações válidas para sistemas escalares (ver (2.1.9) e (2.1.16)) constituem o motivo principal da nossa preferência pela definição de polos da matriz de transferência adotada neste trabalho (ver as considerações no início desta seção),

Observação 2.2.17a:

Se $\rho = 0$ em (2.2.9) é claro que (ver (1.1.10)) $G(s) \equiv 0$ e $\varphi_G(s) \equiv 0$

e conseqüentemente (2.2.12) não vale, pois neste caso $\varphi_S(s) = |sI - A|$.

Tal como no caso escalar (ver Observação 2.1.20), deve-se notar, entretanto, que o resultado geral demonstrado em (9a) equivalente a (2.2.12) é apresentado em forma diversa, não polinomial.

No caso especial em que $\rho = 0$, e matriz de transferência não tem zeros a relação entre os zeros do sistema e os modos desacoplados é:

$$\{\text{Zeros do sistema}\} = \{\text{Modos desacoplados da entrada}\} + \{\text{Modos desacoplados da resposta}\} - \{\text{Modos desacoplados da entrada e da resposta}\}$$

Antes de investigarmos algumas propriedades dos zeros em sistemas multivariáveis, comparemos as definições de Rosenbrock com algumas outras que apareceram ultimamente na literatura especializada.

Wolovich ((17) e (19)) define os zeros de $G(s)$ do seguinte modo:

i) Utiliza o fato conhecido ((27) apud (10)) que qualquer matriz $G(s)$ definida sobre o corpo das funções racionais pode ser fatorizada (de forma não única) em :

$$G(s) = D^{-1}(s)N(s) = \hat{N}(s)\hat{D}^{-1}(s) \quad , \quad (2.2.18)$$

sendo $D(s)$ e $N(s)$ matrizes polinomiais relativamente primas à esquerda enquanto que $\hat{N}(s)$ e $\hat{D}(s)$ são matrizes polinomiais relativamente primas à direita. (Ver respectivas definições em, por exemplo, (i) pg. 70 ou (43), pg. 36). Para verificar se duas matrizes são relativamente primas à esquerda, pode-se usar o seguinte critério necessário e suficiente:

Posto $\begin{bmatrix} D(s) & N(s) \end{bmatrix} = q \quad \forall s \in \mathbb{C}$, sendo $D(s)$ uma matriz $q \times q$.

E para verificar se duas matrizes polinomiais são relativamente primas à direita, temos o resultado dual:

Posto $\begin{bmatrix} \hat{D}(s) \\ \hat{N}(s) \end{bmatrix} = q \quad \forall s \in \mathbb{C}$, sendo $\hat{D}(s)$ uma matriz $q \times q$.

(A demonstração desses critérios pode ser encontrada em (1), pg.71)

ii) Chamando $N(s)$ e $\hat{N}(s)$ "numeradores" de $G(s)$, demonstra que dois numeradores de $G(s)$ são sempre 'equivalentes', isto é,

$$N(s) = R(s)\hat{N}(s)Q(s) \quad ,$$

sendo $R(s)$ e $Q(s)$ matrizes unimodulares.

iii) Os zeros de $G(s)$ são então definidos como os valores $s^* \in \mathbb{C}$ para os quais:

Posto $N(s^*) < \text{Posto}(\text{sobre o corpo das funções racionais})$ de $N(s)$

iv) Demonstra que se um sistema for controlável e observável, $s^* \in \mathbb{C}$ será um zero de $G(s)$ se e somente se:

$$\text{Posto}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} s^* I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < \text{Posto}_{F(s)} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}, \quad (2.2.19)$$

onde $\text{Posto}_{\mathbb{C}}$ denota o posto sobre o corpo dos complexos e

$\text{Posto}_{F(s)}$ denota o posto sobre o corpo das funções racionais.

\$\$\$

Comparemos a definição de Wolovich com a de Rosenbrock.

Suponha-se, para facilitar, que $G(s)$ já esteja na forma de

Mc Millan e que $\rho = m = q$, ou seja:

$$G(s) = \text{diag} \left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \right), \quad (2.2.20)$$

$$i = \overline{1, \rho}$$

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s)$$

$$\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s)$$

Fatorizemos $G(s)$ do seguinte modo:

$$G(s) = (\text{diag}(\psi_i(s)))^{-1} \text{diag}(\varepsilon_i(s)) = D^{-1}(s) N(s) \quad (2.2.21)$$

$$[D(s) \quad N(s)] = \begin{bmatrix} \psi_1(s) & 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon_1(s) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & & & \cdot & 0 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \psi_\rho(s) & 0 & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_\rho(s) \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que o posto da matriz acima é ρ para todos os valores possíveis de $s \in \mathbb{C}$ e consequentemente a fatorização (2.2.21) é válida para a determinação dos zeros no sentido de Wolovich, os quais são os valores de $s^* \in \mathbb{C}$ que reduzem o posto de $N(s) = \text{diag}(\xi_i(s))$. Ora, tendo em vista que $E_i(s) \mid \xi_{i+1}(s)$, conclui-se que os zeros de $G(s)$ no sentido de Wolovich são as raízes de $\xi_\rho(s)$. Como os zeros de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock são as raízes de $\prod_{i=1}^{\rho} \xi_i(s)$, conclui-se que todo zero de $G(s)$ no sentido de Wolovich será também um zero de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock, e vice-versa, mas a definição de Wolovich (ao contrário da de Rosenbrock) não indica o grau de multiplicidade de cada zero,

Exemplo:

Suponha-se uma matriz de transferência que já esteja na forma de Mc Millan:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+2)^3} & 0 \\ 0 & \frac{(s-1)^2}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

É fácil ver que:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} (s+2)^3 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix} = 2 \quad \forall s^* \in \mathbb{C}$$

Consequentemente $G(s)$ pode ser fatorizado do seguinte modo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^3 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

Donde se vê que $s = 1$ é um zero de $G(s)$ no sentido de Wolovich (e a sua definição nada nos diz a respeito do grau do multiplicidade do zero).

Por outro lado $G(s)$ já está na forma de McMillan pois são satisfeitas as condições (2.2.20). Então os zeros no sentido da Rosenbrock são $\{1,1,1\}$.

Observe-se ainda que a redução do posto de $N(s)$ para $s = 1$ é igual a 2, diferente portanto do grau de multiplicidade do zero no sentido de Rosenbrock.

§§§

Comparemos agora as duas definições utilizando o outro critério de Wolovich (ver (2.2.19)). Ao invés de utilizar a matriz de transferência para calcular os zeros de $G(s)$, o segundo critério utiliza a matriz do sistema (supondo que o mesmo seja controlável e observável).

É claro, porém, que este critério é uma consequência imediata de (2.2.12), pois se o sistema é controlável e observável, temos:

$$\varphi_S(s) = \varphi_G(s)$$

Donde se conclui mais uma vez que todo zero de $G(s)$ no sentido de Wolovich é também um zero de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock, e vice-versa, mas o critério de Wolovich nada nos diz a respeito dos graus de multiplicidade dos zeros.

Seja ainda observado que, ao contrário do que se poderia pensar, a redução do posto da matriz do sistema não é necessariamente igual ao grau de multiplicidade de um zero, conforme pode ser verificado no seguinte:

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar facilmente que este sistema é controlável e observável.

Para determinar quais os valores de s que reduzem o posto de

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}, \text{ o \u00fanico m\u00e9todo sistem\u00e1tico \u00e9 determinar o m.d.c.}$$

dos menores de ordem m\u00e1xima, o que j\u00e1 nos dar\u00e1 ipso facto os zeros de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock com os respectivos graus de multiplicidade.

No caso presente a matriz do sistema \u00e9 quadrada, e efetuando, obt\u00eam-se:

$$\begin{vmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{vmatrix} = (s-1)^3$$

Donde se conclui:

1 \u00e9 zero de $G(s)$ no sentido de Wolovich

{1,1,1} s\u00e3o os zeros de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock.

Observe-se agora que para $s^* \equiv I$, temos:

$$\begin{bmatrix} s^* I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} s^* I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = 4$$

Isto mostra que a redução do posto ($6 - 4 = 2$) não é igual ao grau de multiplicidade do zero no sentido de Rosenbrock (3).

§§§

Desoer e Sahulman (10) de-finem os zeros de $G(s)$ da mesma forma que Wolovich e demonstram que:

- i) Se um sistema tiver igual número de entradas e saídas os zeros de $G(s)$ são os polos da matriz de transferência do sistema inverso e vice-versa,
- ii) Se a for um zero de $G(s)$ então existe um vetor u_1 (constante) diferente de zero tal que se a entrada for $u(t) = u_1 \cdot e^{at}$ o modo e^{at} não aparecerá na resposta,

Como todo zero de $G(s)$ no sentido de Desoer-Schulman é também um zero de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock, e vice-versa, conclui-se que as duas propriedades acima valem também para os zeros de $G(s)$ no sentido de Rosenbrock quando os graus de multiplicidade não são tomados em consideração. Resta a verificar, porém, se as duas propriedades permanecem válidas quando se leva em consideração os graus de multiplicidade dos zeros de $G(s)$ (no sentido de Rosenbrock). Ora:

- i) A forma de McMillan da matriz inversa de $G(s)$ é a matriz inversa da forma de McMillan de $G(s)$. Donde se conclui que a primeira propriedade permanece válida quando os zeros e polos

são computados segundo os seus graus de multiplicidade.

ii) Vamos verificar que a segunda propriedade não permanece válida quando os zeros são úomputados segundo os seus graus de multiplicidade por meio do seguinte contra-exemplo simples:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-a}{d_1(s)} & 0 \\ 0 & \frac{s-a}{d_2(s)} \end{bmatrix} ; \quad u(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Suponha-se que:

$d_1(s)$ e $d_2(s)$ são mônicos

$$(s-a) \nmid d_1(s) , \quad (s-a) \nmid d_2(s) , \quad d_2(s) \mid d_1(s)$$

Com as hipóteses acima $G(s)$ está na forma de McMillan, a sondo um zero de $G(s)$ (no sentido de Rosenbrock) com grau de multiplicidade 2. Ora, é fácil ver que o modo e^{at} aparecerá na resposta a não ser que $u_1 = u_2 = 0$.

§§§

Davison e Wang (18) definem zeros de transmissão do sistema (1.1.1) como os valores $s^* \in \mathbb{C}$ tais que:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} s^* I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(m, q) \quad (2.2.22)$$

Definem por outro lado um sistema degenerado como aquele em que:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(m, q) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (2.2.23)$$

Portanto, quando o sistema é degenerado, os zeros de transmissão são todo o plano complexo.

Comparando (2.2.22) com a definição de zeros do sistema de Rosenbrock, verificamos que se o sistema não for degenerado, todo zero de transmissão será um zero do sistema, e vice-versa, mas a definição de zeros de transmissão nada nos diz a respeito dos respectivos graus de multiplicidade.

Para verificar que a redução do posto da matriz do sistema não é necessariamente igual ao grau de multiplicidade do zero do sistema, basta considerar o exemplo já resolvido, em que o sistema além de não ser degenerado, era controlável e observável (ver o exemplo ao final do estudo sobre a definição de zeros de $G(s)$ no sentido de Wolovich, pgs. 47s.).

§§§

Observação 2.2.24

Davison e Wang (18) interpretaram a definição de zeros de $G(s)$ de Rosenbrock como sendo as raízes de $E_p(s)$. E, ao que parece, esta foi também a interpretação de Wolovich (17) ao afirmar a equivalência da sua definição à de Rosenbrock. Que tal interpretação é errônea pode ser verificado das próprias palavras de Rosenbrock (ver (1), pg. 113 e (9)). Ver também o recente trabalho de Francis e Wonham (54) no qual é apresentada uma nova definição de zeros de transmissão que coincida com a definição de zeros da matriz de transferência de Rosenbrock.

Observação 2.2.24a

Doravante, neste trabalho, sempre que falarmos em zeros do sistema e zeros da matriz de transferência, estaremos nos referindo às definições propostas por Rosenbrock,

verifiquemos agora, a título de exercício, a relação entre o zeros de $G(s)$ e os zeros de $|G(s)|$ para sistemas em que posto $G(s) = m = q$.

Proposição 2.2.24b:

Para sistemas em que posto $G(s) = m = q$, temos:

$$|G(s)| = k \frac{\varphi_G(s)}{p_G(s)}, \text{ sendo } k \text{ uma constante, ou:}$$

$$\{\text{Zeros de } |G(s)|\} \subset \{\text{Zeros de } G(s)\}$$

$$\{\text{Polos de } |G(s)|\} \subset \{\text{Polos de } G(s)\}$$

Vamos demonstrar este resultado de dois modos simples:

$$i) |P(s)| = \begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix} = |sI-A| \cdot |C(sI-A)^{-1}B + D| = |sI-A| \cdot |G(s)|$$

$$|P(s)| = k \varphi_S(s) = k \frac{\varphi_G(s) p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)}$$

$$|sI-A| = \frac{p_G(s) p_e(s) p_r(s)}{p_{er}(s)}$$

Das tres igualdades vem:

$$|G(s)| = k \frac{\varphi_G(s)}{p_G(s)} \quad \text{sendo de notar que pode haver fatores comuns a } \varphi_G(s) \text{ e } p_G(s).$$

ii) Seja $M(s)$ a forma de McMillan de $G(s)$. Então:

$$|G(s)| = k |M(s)| = k \frac{\prod_{i=1}^m \varepsilon_i(s)}{\prod_{i=1}^m \psi_i(s)} = k \frac{\varphi_G(s)}{p_G(s)}$$

§§§

Investiguemos algumas outras propriedades dos zeros em sistemas multivariáveis.

Rosenbrock (9a) demonstrou que quando um sistema é submetido à realimentação da resposta permanecem invariantas: .

- i) Os zeros do sistema
- ii) Os zeros da $G(s)$
- iii) Os modos desacoplados da entrada
- iv) Os modos desacoplados da resposta
- v) Os modos dosacoplados da entrada e da resposta.

Vejamos agora o que ocorre quando um sistema é submetido à realimentação do estado:

Proposição 2.2.25

Quando um sistema é submetido à realimentação do estado permanecem invariantes:

- (a) Os modos desacoplados da entrada
- (b) Os zeros do sistema se ele não for degenerado e se o número de entradas for igual ao de saídas.
- (c) A função racional $\frac{\varphi_G(s) p_r(s)}{p_{er}(s)}$ se forem satisfeitas as condições em (b).

Demonstração:

(a) Seja:

$$u = Kx + v$$

A matriz do sistema passará a ser:

$$\begin{bmatrix} sI - A - BK & B \\ -C - DK & D \end{bmatrix}$$

Ma sr

$$\begin{bmatrix} sI-A-BK & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix}$$

Ora, os polinômios invariantes não se alteram com este tipo de operações elementares (ver por ex. (2), I, pg. 141).

Por outro lado, o m.d.c. de todos os menores de ordem n de $\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}$ é igual ao produto de seus polinômios invariantes.

Com efeito (ver (1.2.3)):

$$p_i(s) = \frac{1}{D_{i-1}(s)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{sendo:}$$

$$D_0(s) = 1$$

$$D_i(s) = \text{m.d.c. de todos os menores de ordem } i$$

Donde:

$$D_n(s) = p_n(s) \cdot D_{n-1}(s) = p_n(s) \cdot p_{n-1}(s) \cdot D_{n-2}(s) = \dots = \prod_{i=1}^n p_i(s)$$

Mas o m.d.c. de todos os menores de ordem n de $\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}$ é, como vimos, o polinômio dos modos desacoplados $p_e(s)$.

E como os polinômios invariantes permanecem idênticos após a realimentação do estado, concluímos que $p_e(s)$ também não se altera, o que demonstra (a).

(b) Suponha-se $\rho = m = q$

$$\begin{bmatrix} sI-A-BK & B \\ -C-DK & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{vmatrix} sI-A-BK & B \\ -C-DK & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix} \det \varphi_S(s), \quad \text{o que demonstra (b).}$$

Observe-se que se $m \neq q$ ou se $\rho \neq m = q$, alguns dos menores

de ordem máxima da matriz do sistema não conterão as n primeiras linhas (colunas) e portanto o m.d.o. dos menores de ordem máxima não será o polinômio cujas raízes são os zeros do sistema (ver (2.2.9)).

Seja dito de passagem que as raízes do m.d.c. de todos estes menores de ordem máxima seriam os zeros do sistema de acordo com a primeira definição de Rosenbrock (9), corrigida posteriormente (9a).

(c) Este resultado é uma consequência imediata de (a), (b) e (2.2.12).

Por este resultado vemos que por meio da realimentação de estado, um sistema inobservável pode se tornar observável, e vice-versa: no primeiro caso os modos desacoplados da resposta passam a ser zeros de $G(s)$ o no segundo caso pelo menos um dos zeros de $G(s)$ passa a ser modo desacoplado da resposta. É claro também que se o sistema for observável antes e depois da realimentação de estado, os zeros de $G(s)$ permanecerão invariantes.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 1$$

$$\begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix} = (s+1)(s+2) = \varphi_S(s), \quad p_e(s) = s+1, \quad p_r(s) = s+2$$

$$\begin{vmatrix} sI-A-BK & B \\ -C-DK & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -k_1 & s+2-k_2 & 1 \\ -1-k_1 & -k_2 & 1 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)$$

$$p_{e_K}(s) = s+1, \quad p_{r_K}(s) = 1$$

$$G_K(s) = (C+DK)(sI-A-BK)^{-1}B + D = \frac{s+2}{s+2-k_2} \quad \text{.º.} \quad \psi_{G_K}(s) = s+2.$$

§§§

Vimos que Desoer e Schulman (10) demonstraram que se α for um zero de $G(s)$, então $\exists u_1 \neq 0$ tal que se a entrada for $u(s) = \frac{u_1}{s-\alpha}$, o modo $e^{\alpha t}$ não aparecerá na resposta.

Pergunta-se agora como podemos bloquear o modo $e^{\alpha t}$ permitindo que u_1 seja qualquer. Para responder a esta pergunta, introduziremos primeiramente a seguinte:

Definição 2.2.26

Os zeros de bloqueio de um sistema multivariável são as raízes do m.d.c. de todos os numeradores da matriz de transferência $G(s)$.

Observação 2.2.26a

Na definição acima supomos, como é usual, que não há fatores comuns entre numerador e denominador de cada elemento de $G(s)$.

A utilidade da definição acima aparecerá no desenvolvimento que se segue:

Suponha-se que a entrada de um sistema multivariável é

$$u(s) = \frac{1}{\phi(s)} \begin{bmatrix} u_1(s) & \dots & u_m(s) \end{bmatrix}^T, \quad (2.2.27)$$

sendo $\phi(s)$ e $u_i(s)$ ($i = \overline{1, m}$) polinômios, que supomos, sem perda de generalidade, sem fatores canceláveis.

Seja $G(s)$ a matriz de transferência do sistema:

$$G(s) = \|\|g_{ij}(s)\|\| \quad ; \quad i = \overline{1,q} \quad ; \quad j = \overline{1,m} \quad (2.2.28)$$

Suponhamos que se deseja que $G(s)$ seja tal que todos os fatores de $\phi(s)$ sejam bloqueados independentemente dos valores de $u_i(s)$ ($i = \overline{1,m}$). Ou por outras palavras, deseja-se que nenhum dos fatores de $\phi(s)$ apareça nas componentes da resposta $y_i(s)$, ($i = \overline{1,q}$) para quaisquer $u_j(s)$, ($j = \overline{1,m}$).

Vamos demonstrar que:

Proposição 2.2.29

O sistema cuja matriz de transferência é $G(s)$ e cuja entrada é dada por (2.2.27) bloqueará todos os fatores de $\phi(s)$ com $u_i(s)$ ($i = \overline{1,m}$) arbitrários se e somente se todas as raízes de $\phi(s)$ forem zeros de bloqueio de $G(s)$.

Com efeito:

(a) Suficiência

Seja:

$$g_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)} \quad ; \quad i = \overline{1,q} \quad ; \quad j = \overline{1,m} \quad (2.2.30)$$

Então a i -ésima componente da resposta será:

$$y_i(s) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(s) \frac{u_j(s)}{\phi(s)} = \sum_{j=1}^m \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)} \frac{u_j(s)}{\phi(s)} \quad (2.2.31)$$

E é claro que se $\phi(s) \mid n_{ij}(s)$ os fatores de $\phi(s)$ não aparecerão como modos da resposta.

(b) Necessidade

Suponha-se que ~~as raízes~~ ^{alguma raiz} de $\phi(s)$ não sejam zeros de bloqueio.

Então $\exists k, \ell$ tais que

$$\phi(s) \nmid n_{k\ell}(s) \quad (2.2.32)$$

Então:

$$\begin{aligned} y_k(s) &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_{kj}(s) \cdot \frac{u_j(s)}{\phi(s)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^m \varepsilon_{kj}(s) \cdot \frac{u_j(s)}{\phi(s)} + \varepsilon_{k\ell}(s) \frac{u_\ell(s)}{\phi(s)} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^m \varepsilon_{kj}(s) \frac{u_j(s)}{\phi(s)} + \frac{n_{k\ell}(s)}{d_{k\ell}(s)} \frac{u_\ell(s)}{\phi(s)} \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

E da Última igualdade vemos que se $u_\ell(s) \neq 0$, alguma raiz de $\phi(s)$ aparecerá como modo da k -ésima componente da resposta.

Q. E. D.

Exemplor

$$u(s) = \begin{bmatrix} \frac{u_1(s)}{(s-a)(s-b)} \\ \frac{u_2(s)}{(s-a)(s-b)} \end{bmatrix},$$

sendo $u_1(s)$ e $u_2(s)$ polinômios não divisíveis por $(s-a)$ e $(s-b)$.

Desejamos bloquear os modos e^{at} e e^{bt} por meio de um sistema de duas entradas e duas saídas:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(s) & \varepsilon_{12}(s) \\ \varepsilon_{21}(s) & \varepsilon_{22}(s) \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}; \quad i, j = 1, 2$$

Efetuando, obtém-se:

$$y_1(s) = \frac{n_{11}(s) d_{12}(s) u_1(s) + n_{12}(s) d_{11}(s) u_2(s)}{(s-a)(s-b) d_{11}(s) d_{12}(s)}$$

$$y_2(s) = \frac{n_{21}(s) d_{22}(s) u_1(s) + n_{22}(s) d_{21}(s) u_2(s)}{(s-a)(s-b) d_{21}(s) d_{22}(s)}$$

Donde se vê que:

$$\text{Bloqueio de } e^{at} \text{ e } e^{bt} \quad \forall u_1(s), u_2(s) \iff (s-a)(s-b) \mid n_{ij}(s);$$

$i, j = 1, 2$
§§§

Investiguemos agora a relação entre os zeros de bloqueio e os zeros de $G(s)$ (no sentido de Rosenbrock):

Proposição 2.2.34

Todo zero de bloqueio com grau de multiplicidade j é um zero de $G(s)$ com grau de multiplicidade maior ou igual a $j\rho$, sendo ρ o posto (sobre o corpo das funções racionais) de $G(s)$.

Com efeito:

Seja $G(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$, sendo $N(s)$ uma matriz polinomial e $d(s)$ o menor denominador comum mônico dos elementos de $G(s)$.

Transformemos $N(s)$ na forma de Smith:

$S(s) = R(s) \cdot N(s) \cdot Q(s)$, sendo $R(s)$ e $Q(s)$ matrizes unimodulares.

A forma de McMillan de $G(s)$ é, como sabemos,

$$M(s) = \frac{S(s)}{d(s)}$$

Sejam $p_i(s)$ os polinômios invariantes do $S(s)$:

$$p_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, \quad i = \overline{1, \rho}$$

$$D_0(s) = 1$$

$D_i(s)$ = m.d.c. dos menores de ordem i de $N(s)$

seja $\phi(s)$ o polinômio mônico cujas raízes são os zeros de bloqueio de $G(s)$. Temos então:

$$\phi^i(s) \mid D_i(s) \quad ; \quad i = \overline{1, \rho}$$

E portanto:

$$\frac{\phi^i(s)}{\phi^{i-1}(s)} = \phi(s) \mid p_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \quad ; \quad i = \overline{1, \rho} \quad (2.2.35)$$

Mas por outro lado, como sabemos:

$$\frac{p_i(s)}{d(s)} = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \quad ; \quad i = \overline{1, \rho} \quad ,$$

sendo $\varepsilon_i(s)$ e $\psi_i(s)$ os numeradores e denominadores da forma

de McMillan de $G(s)$.

De (2.2.35) e tendo em vista que não há fatores comuns entre

$\phi(s)$ e $d(s)$, vem:

$$\phi(s) \mid \varepsilon_i(s) \quad ; \quad i = \overline{1, \rho}$$

Mas:

$$\phi_G(s) = \prod_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i(s)$$

Donde finalmente:

$$\phi^{\rho}(s) \mid \phi_G(s) \quad (2.2.36)$$

Q. E. D.

Exemplo:

Seja:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-a}{(s+1)^2} & 0 & \frac{(s-a)(s-1)}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{s-a}{(s+1)(s+2)} & \frac{(s-a)^2}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{(s-a)(s-1)}{(s+1)^2(s+2)} & \frac{s-a}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

Donde se vê que a é um zero de bloqueio com grau de multiplicidade unitário.

$$G(s) = \frac{N(s)}{d(s)},$$

sendo:

$$d(s) = (s+1)^3(s+2)^2$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} (s-a)(s+1)(s+2)^2 & 0 & (s-a)(s+1)^2(s-1) \\ (s-a)(s+1)^2(s+2) & (s-a)^2(s+2)^2 & 0 \\ 0 & (s-a)(s-1)(s+1)(s+2) & (s-a)(s+1)(s+2)^2 \end{bmatrix}$$

E portanto:

$$D_1(s) = s-a$$

$$D_2(s) = (s-a)^2(s+1)(s+2)$$

$$D_3(s) = (s-a)^3(s+1)^3(s+2)^2 \left[(s-a)(s+2)^4 + (s-1)(s+1)^3 \right]$$

$$p_1(s) = s-a$$

$$p_2(s) = (s-a)(s+1)(s+2)$$

$$p_3(s) = (s-a)(s+1)(s+2) \left[(s-a)(s+2)^4 + (s-1)^2(s+1)^3 \right]$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-a}{(s+1)^3 (s+2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s-a}{(s+1)^2 (s+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(s-a) [(s-a)(s+2)^4 + (s-1)^2 (s+1)^3]}{(s+1)^2 (s+2)} \end{bmatrix}$$

∴ $\varphi_G(s) = (s-a)^3 [(s-a)(s+2)^4 + (s-1)^2 (s+1)^3]$

E portanto a é um zero de $G(s)$ com grau de multiplicidade 3.

3. RASTREAMENTO DE UM SINAL EM REGIME PERMANENTE

A solução do problema do servomecanismo é certamente um dos objetivos principais de toda a teoria e prática de controle de sistemas lineares e tem sido sempre objeto de pesquisa. (Ver por exemplo, entre os trabalhos recentes, (28)-(36), (45), (53)-(55)).

O problema do servomecanismo será estudado neste trabalho de acordo com a distinção clássica: rastreamento de um sinal e regulação da resposta de um sistema submetido a perturbações.

Para melhor compreensão do primeiro sub-problema, começaremos estudando os:

3.1 Sistemas escalares

Estamos interessados em resolver o seguinte problema: Dado um sistema **S** escalar (isto é, com uma entrada e uma saída), determinar uma estrutura (da qual **S** será uma parte) tal que a resposta de **S** seja uma cópia em regime permanente de um sinal dado,

Seja então:

$$S: \quad \dot{x} = Ax + bu \quad (3.1.1a)$$

$$y = cx + du \quad , \quad (3.1.1b)$$

cuja função de transferência é:

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b + d \quad (3.1.2)$$

Seja $r(t)$ o sinal a ser rastreado.

Desejamos achar uma estrutura (da qual S será uma parte) tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \quad (3.1.3)$$

Definamos o erro entre o sinal e a resposta:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad , \quad (3.1.4a)$$

cuja transformada de Laplace é:

$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (3.1.4b)$$

Nosso objetivo é portanto determinar uma estrutura tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad . \quad (3.1.5)$$

Suporemos em todo este trabalho, sem perda de generalidade, que todos os modos do sinal (ou seja, as raízes do denominador da sua transformada de Laplace) têm parte real não-negativa, pois os modos com parte real negativa desaparecem quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $h(s)$ a função de transferência entre o erro e o sinal:

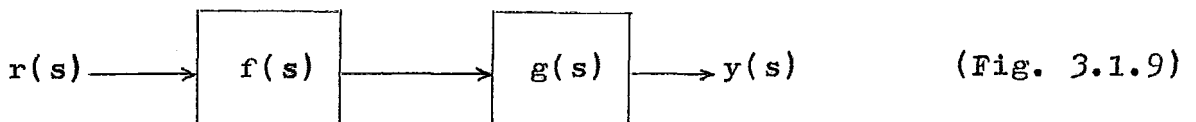
$$e(s) = h(s) r(s) \quad (3.1.6)$$

Uma maneira de obter (3.1.5) é fazer:

$$h(s) \equiv 0 \quad , \quad (3.1.7)$$

o que se pode conseguir fazendo na figura abaixo:

$$f(s) = \frac{1}{g(s)} \quad (3.1.8)$$



(Fig. 3.1.9)

Com efeito:

$$y(s) = g(s) f(s) r(s) = g(s) \frac{1}{g(s)} r(s) = r(s)$$

$$\therefore e(s) = 0 \quad , \quad h(s) \equiv 0 \quad .$$

O primeiro inconveniente óbvio desta estrutura é que $f(s)$, a função de transferência do compensador, nunca será uma função racional estritamente própria (ver (3.1.2)), podendo ser uma função racional imprópria (se $d = 0$, fato indesejável pela razão que tais estruturas amplificam o "ruído" do sinal (e tratando-se de sistemas discretos, tais estruturas não são realizáveis fisicamente)).

Estudemos mais detalhadamente o sistema de compensação da figura 3.1.9:

Seja:

$$g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)}, \quad (3.1.10)$$

sendo $n_g(s)$ e $d_g(s)$ polinômios, dos quais o segundo é sempre suposto (sem perda de generalidade) mônico.

$$\therefore f(s) = \frac{d_g(s)}{n_g(s)}$$

Suponha-se agora que por erro de implementação ou por perturbação dos parâmetros não se consiga $f(s)$ exatamente igual a $\frac{1}{g(s)}$,

mas ao invés, tenhamos:

$$f'(s) = \frac{d'_g(s)}{n'_g(s)}, \text{ sendo } n'_g(s) \neq n_g(s) \text{ e } d'_g(s) \neq d_g(s).$$

Então:

$$y(s) = g(s) f'(s) r(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} \frac{d'_g(s)}{n'_g(s)} r(s)$$

$$\therefore e(s) = r(s) - y(s) =$$

$$e(s) = \frac{n_g^i d_g - n_g d_g^i}{n_g^i d_g} \cdot r \quad (3.1.11)$$

Da última expressão vemos que:

a) $h(s) \neq 0$ (em geral) e portanto os modos de $r(s)$ aparecerão (em geral) no erro em regime permanente.

b) Se $n_g^i(s)$ e $d_g(s)$ tiverem raízes instáveis (isto é, raízes

com parte real não-negativa), os respectivos modos também aparecerão (em geral) no erro em regime permanente. Ou por outras palavras, a própria estrutura de rastreamento pode se tornar geradora de modos instáveis no erro.

§§§

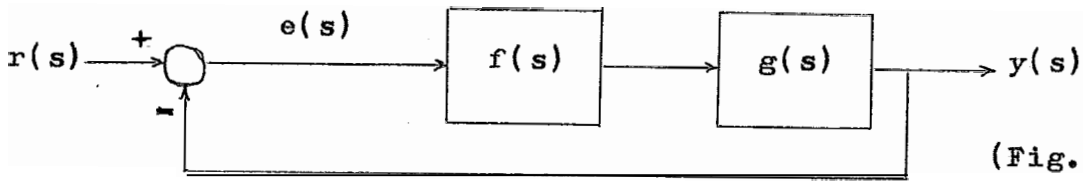
Conclui-se portanto que a estrutura de rastreamento da figura 3.1.9 é péssima e foi discutida aqui apenas por motivos de ordem didática.

A condição (3.1.7) é muito forte. Nosso objetivo é (3.1.5), o qual pode ser conseguido com uma condição bem mais fraca. Com efeito, se $h(s) \neq 0$, obteremos (3.1.5) se e somente se (tendo em vista o teorema do valor final):

i) O denominador de $h(s)$ tiver todas as raízes estáveis

ii) Todos os modos do sinal dividirem o numerador de $h(s)$

Por outro lado, sabemos que um sistema sem realimentação é muito sensível. A teoria clássica de controles nos ensina, com efeito, que deve haver realimentação da resposta para que o erro seja corrigido. Consideremos portanto a seguinte estrutura:



(Fig. 3.1.13)

$g(s)$ é a função de transferência do sistema S dado e $f(s)$ (que desejamos seja racional) é a função de transferência do compensador a ser projetado,

Sejam:

$$g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} \quad , \quad f(s) = \frac{n_f(s)}{d_f(s)}$$

Temos então (omitindo o argumento s)

$$e = r - y$$

$$y = g \cdot f \cdot e \quad \therefore \quad r - e = gfe$$

$$e = \frac{r}{1 + gf}$$

$$e = \frac{d_g \cdot d_f}{d_g d_f + n_g n_f} r \quad (3.1.14)$$

Seja r

$$r(s) = \frac{r_0(s)}{\phi(s)} \quad , \quad (3.1.15)$$

sendo $r_0(s)$ e $\phi(s)$ polinômios. $\phi(s)$ será sempre suposto (sem perda de generalidade) mônico e, como já foi dito, com todas as raízes com parte real não-negativa

De (3.1.14) vemos que se for possível escolher $n_f(s)$ e $d_f(s)$ tais que:

i) $\phi(s) \mid d_g(s)d_f(s)$

ii) $d_g(s)d_f(s) + n_g(s)n_f(s)$ seja um polinômio estável ,

obteremos o resultado almejado (3.1.5).

Ora é exatamente isto que faz o controle clássico para rastrear degraus: utiliza um compensador cuja função de transferência é $f(s) = \frac{k}{s}$ (ver o exemplo ao início do capítulo anterior),

Exemplo 3.1.16

Seja:

$$g(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad r(s) = \frac{r_0}{s^2+4} \text{ (sinal senoidal)}$$

Escolhamos um compensador tal que:

$$f(s) = \frac{k_1 s + k_0}{s^2+4}$$

De (3.1.14), vem:

$$\begin{aligned} e(s) &= \frac{(s+1)(s+2)(s^2+4)}{(s+1)(s+2)(s^2+4) + (s+3)(k_1 s + k_0)} \frac{r_0}{s^2+4} \\ &= \frac{r_0 (s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s^2+4) + (s+3)(k_1 s + k_0)} \end{aligned}$$

Se for possível escolher k_1 e k_0 tais que o denominador da expressão acima seja estável, o problema está resolvido. Aplicando-se o critério de Routh-Hurwitz (ver por ex. (8), pg. 113) pode-se verificar que, por exemplo, $k_1 = k_0 = 1$ resolvem o problema.

§§§

Voltemos à figura (3.1.13). Suponhamos que seus parâmetros sejam perturbados e que ao invés de (3.1.14), tenhamos:

$$e(s) = \frac{d'_g d'_f}{d'_g d'_f + n'_g n'_f} \frac{r_0}{\phi(s)} \quad (3.1.17)$$

Teremos então:

$$\phi(s) \Big| d_g'(s) d_f'(s)$$

Conseqüentemente os modos (ou pelo menos alguns dos modos) do sinal aparecerão no erro.

Observe-se que é razoável escolher o compensador de tal forma que $\phi(s) \Big| d_f(s)$. Neste caso, o rastreamento será robusto com relação a perturbações dos parâmetros do sistema S dado. Mais ainda, se quisermos um compensador de ordem mínima, é só fazer: $d_f(s) = \phi(s)$.

A grande vantagem da estrutura da fig. 3.1.13 sobre a da fig. 3.1.9 é que (além de permitir um compensador com função de transferência própria) se o denominador de $h(s)$ for "bastante" estável, ele permanecerá estável mesmo perturbado, e, conseqüentemente, a estrutura não será geradora de modos instáveis no erro.

§§§

No exemplo 3.1.16 fizemos $d_f(s) = \phi(s)$ para que o compensador tivesse ordem mínima. Nada nos garante, porém, que sempre seja possível obter uma função de transferência estável com um compensador de ordem mínima. Assim, por exemplo, pode-se verificar que se

$$g(s) = \frac{s-2}{(s+1)^2}, \quad r(s) = \frac{r_0}{(s-1)^2} \quad \text{e} \quad f(s) = \frac{k_1 s + k_0}{(s-1)^2}, \quad \text{não exist-}$$

tem k_1 e k_0 tais que o denominador de $h(s)$ (dado em (3.1.14)) seja estável.

Seria interessante investigar quais as condições de possibilidade de existência de um compensador (de ordem não

necessariamente igual ao grau de $\phi(s)$ que permita o rastreamento de um sinal mediante a eventual inclusão de um elemento dinâmico no canal de realimentação, aproveitando-se, por exemplo, os resultados obtidos por Youla et alii (37) ou então os de Psarson et alii (50).

No presente trabalho não investigaremos este problema. Seguiremos, pelo contrário, para a solução do problema do servomecanismo, a idéia desenvolvida por Davison (ver especialmente (32) e (33)), isto é, além da realimentação da resposta e da utilização de um compensador cujo denominador da função de transferência é o mesmo que o do sinal, utilizaremos a realimentação do estado de S que, como veremos, permitirá estabilizar sempre o denominador de $h(s)$ (e, mais ainda, os polos do sistema em malha fechada) se forem satisfeitas certas condições de compatibilidade,

§§§

Vimos que no problema do servomecanismo é desejável que o sistema em malha fechada (isto é, o sistema que tem $h(s)$ como função de transferência) seja não somente estável, mas "bastante" estável, isto é, ele deve permanecer estável mesmo se seus parâmetros forem perturbados dentro de certos limites "razoáveis",

Ora, para saber se o sistema em malha fechada é "bastante" estável, não basta conhecer as raízes do polinômio característico de $h(s)$. Com efeito, mesmo que estas raízes tenham parte real "bastante" negativa, pode acontecer que o sistema seja precariamente estável se um modo desaooplado tiver parte real

não-negativa: efetivamente; uma pequena perturbação nos parâmetros do sistema poderá fazer com que o referido modo apareça na função de transferência $h(s)$. Dito de outra forma, para saber se o sistema é "bastante" estável, não basta verificar os polos da função de transferência, é preciso verificar os polos do sistema.

Exemplo:

Suponha-se que o sistema em malha fechada seja tal que:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c} = [0 \quad 1], \quad \tilde{d} = 1$$

$$h(s) = \tilde{c} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} + \tilde{d} = \frac{2}{s+3} + 1$$

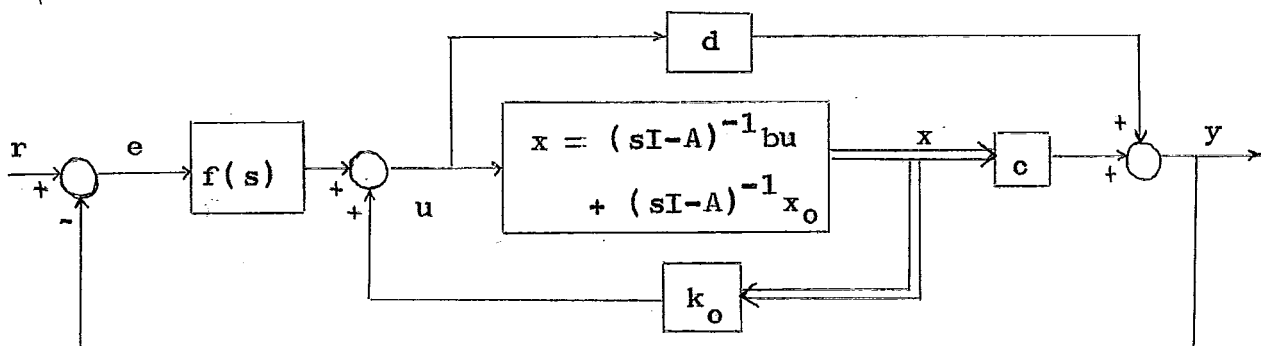
Se \tilde{c} for perturbado de tal modo que $\tilde{c}' = [\delta \quad 1]$, vem:

$$h'(s) = \frac{\delta}{s-2} + \frac{2}{s+3} + 1.$$

Pelo motivo acima, entre outros, passaremos doravante a tratar o problema no espaço de estado,

§§§

Como foi dito, além da realimentação da resposta de S , utilizaremos a realimentação do estado. A estrutura de rastreamento será então:



(Fig. 3.1.19)

Vimos que é de todo conveniente escolher um compensador tal que o denominador da sua função de transferência seja $\phi(s)$.

Seja então o compensador definido por:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= F z(t) + \gamma e(t) \\ \eta(t) &= k z(t),\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

sendo:

$$|sI - F| = \phi(s)$$

γ é um vetor coluna de dimensão p (sendo p o grau de $\phi(s)$)

k é um vetor linha de dimensão p .

As equações do sistema em malha fechada serão então:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du \\ \dot{z} &= Fz + \gamma e \\ \eta &= kz \\ u &= k_0 x + \eta \\ e &= r - y\end{aligned}\tag{3.1.21}$$

Antes de estudarmos a estabilidade do sistema em malha fechada, verifiquemos qual é a função de transferência entre o erro e o sinal.

O vetor de estado do sistema em malha fechada é :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Das equações (3.1.21) obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bk_0 x + b\eta \\ &= (A + bk_0)x + bkz \\ e &= r - cx - du \\ &= r - (c + dk_0)x - dkz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + \gamma e \\ &= Fz + \gamma r - \gamma(c + dk_0)x - \gamma dkz \\ &= -\gamma(c + dk_0)x + (F - \gamma dk)z + \gamma r \end{aligned}$$

Reagrupando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + bk_0)x + bkz \\ (c + dk_0)x + (F - \gamma dk)z + \gamma r & \quad (3.1.22) \\ e &= -(c + dk_0)x - dkz + r \end{aligned}$$

A matriz do sistema em malha fechada será portanto:

$$\tilde{F}(s) = \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix}, \quad (3.1.23)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A + bk_0 & bk \\ -\gamma(c + dk_0) & F - \gamma dk \end{bmatrix}, & \tilde{b} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \\ \tilde{c} &= \begin{bmatrix} -(c + dk_0) & -dk \end{bmatrix}, & \tilde{d} &= 1 \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Ora, de (1.1.9), vem:

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(s)| &= |sI - \tilde{A}| \cdot (\tilde{c}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{b} + \tilde{d}) = |sI - \tilde{A}| \cdot h(s) \\ \therefore h(s) &= \frac{|\tilde{F}(s)|}{|sI - \tilde{A}|} \quad (3.1.25) \end{aligned}$$

Mas:

$$|\tilde{F}(s)| = \begin{vmatrix} sI - A - bk_0 & -bk & 0 \\ \gamma(c + dk_0) & sI - F + \gamma dk & \gamma \\ c + dk_0 & dk & 1 \end{vmatrix}$$

Seja:

$$\gamma = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_p]^T$$

Multiplicando no determinante acima a Última linha sucessivamente por $-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_p$ e somando respectivamente às linhas de ordem $n+1, n+2, \dots, n+p$, obtemos:

$$|\tilde{F}(s)| = \begin{vmatrix} sI-A-bk_0 & -bk & 0 \\ 0 & sI-F & 0 \\ c+dk_0 & dk & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |sI-A-bk_0| \cdot |sI-F|$$

Substituindo em (3.1.25), vem:

$$h(s) = \frac{|sI-A-bk_0| \cdot |sI-F|}{|sI-\tilde{A}|} \quad (3.1.26a)$$

$$= \frac{|sI-A-bk_0| \cdot \phi(s)}{|sI-\tilde{A}|} \quad (3.1.26b)$$

E tendo em vista que :

$$e(s) = h(s) r(s), \quad r(s) = \frac{r_0(s)}{\phi(s)},$$

obtemos:

$$e(s) = \frac{|sI-A-bk_0| r_0(s)}{|sI-\tilde{A}|} \quad (3.1.27)$$

Observação 3.1.27a:

De (3.1.26a) vemos que se desejarmos que o rastreamento seja "robusto" com relação a perturbações de A, b, k_0 é necessário que o compensador seja tal que $\phi(s) \parallel |sI-F|$. Mais ainda, se desejarmos um compensador de ordem mínima, é necessário fazer $|sI-F| = \phi(s)$.

Do (3.1.27) vemos que se for possível escolher k e k_0

tais que $|sI - \tilde{A}|$ seja estável, obteremos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Observe-se ainda (ver (3.1.26)) que os auto-valores de \tilde{A} são os polos do sistema em malha fechada. Se estes forem "bastante" estáveis (mediante escolha apropriada de k e k_0), o rastreamento será "robusto" com relação a perturbações em \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} .

Por outro lado do (3.1.24) vemr

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A + bk_0 & bk \\ -\gamma(c + dk_0) & F - \gamma dk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\gamma c & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ -\gamma d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 & k \end{bmatrix} \\ &= \hat{A} + \hat{B} \hat{k}, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

sendo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\gamma c & F \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} b \\ -\gamma d \end{bmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{bmatrix} k_0 & k \end{bmatrix} \quad (3.1.26a)$$

Ora, é um fato bem conhecido (ver por ex. (38); (44) pg. 48;

(1) pg. 169) que as raízes de $|sI - \tilde{A}| = |sI - \hat{A} - \hat{B}\hat{k}|$ podem ser fixadas arbitrariamente por meio de ~~escolha~~ escolha apropriada: de \hat{k} se e somente se o par (\hat{A}, \hat{B}) for controlável.

Por outro lado, de (1.3.3), vem:

$$(\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \iff \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n+p \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.1.27)$$

Ora,

$$\begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & 0 & b \\ \gamma c & sI - F & -\gamma d \end{bmatrix} \quad (3.1.28)$$

Donde:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n+p \quad \forall s \in \mathbb{C} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & b \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Mas:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & b \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \iff (A, b) \text{ controlável}$$

Então:

$$(i) \quad (\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies (A, b) \text{ controlável} \quad (3.1.29)$$

Por outro lado, de (3.1.28) temos também:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = n+p \quad \forall s \in \mathbb{C} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} \gamma c & sI - F & -\gamma d \end{bmatrix} = p \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Por meio de operações elementares obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \text{Posto} \begin{bmatrix} \gamma c & sI - F & -\gamma d \end{bmatrix} &= \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & -\gamma d & \gamma c \end{bmatrix} \\ &= \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - B & \gamma & \gamma c \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \gamma & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(A primeira igualdade foi obtida por simples permutações de colunas. A segunda igualdade foi obtida por meio da divisão da (p+1)-ésima coluna por $-\gamma d$. A terceira igualdade foi obtida multiplicando-se a (p+1)-ésima coluna sucessivamente por $-c_1$, $-c_2$, ..., $-c_n$ e somando-se respectivamente às n últimas colunas.)

Donde:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = n+p \quad \forall s \in \mathbb{C} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \gamma \end{bmatrix} = p \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Mas:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \gamma \end{bmatrix} = p \quad \forall s \in \mathbb{C} \iff (F, \gamma) \text{ controlável} \quad (3.1.31)$$

E portanto:

$$(ii) \quad (\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \iff (F, \gamma) \text{ controlável} \quad (3.1.32)$$

Ainda de (3.1.28) obtemos por uma simples permutação de colunas:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & b & 0 \\ \gamma c & -\gamma d & sI - F \end{bmatrix} \quad (3.1.33)$$

Efetuem os operações elementares sobre as p últimas linhas e colunas de modo a transformar $sI - F$ na forma de Smith:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & b & 0 & 0 \\ -v_1(s)c & v_1(s)d & p_1(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -v_p(s)c & v_p(s)d & 0 & \dots & p_p(s) \end{bmatrix} \quad (3.1.33a)$$

Na matriz acima:

$p_i(s)$ são os polinômios invariantes de $sI - F$; $i = \overline{1, p}$

$$\prod_{i=1}^p p_i(s) = \phi(s)$$

$v_i(s)$ são polinômios ; $i = \overline{1, p}$

Seja ν o número de polinômios invariantes $p_i(s)$ diferentes da 1 ;
 $1 \leq \nu \leq p$. Ou por outras palavras, suponhamos que:

$$p_i(s) = 1, \quad i = \overline{1, p-\nu}$$

Seja α uma raiz de $\phi(s)$ tal que:

$$(s - \alpha) \mid p_{p-\nu+1}(s)$$

Então:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - A & b & 0 & 0 \\ -v_1(\alpha)c & v_1(\alpha)d & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot \vdots & \vdots \\ -v_p(\alpha)c & v_p(\alpha)d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Examinando as colunas da matriz acima, vemos que:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} \leq n + 1 + p - \nu$$

Mas:

$$(\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = n + p$$

Donde:

$$(\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies n + p \leq n + 1 + p - \nu \iff \nu \leq 1$$

Mas $\lambda \geq 1$

Donde:

$$(iii) \lambda = 1 \tag{3.1.34}$$

As matrizes que satisfazem à condição acima são semelhantes; assim, se F_1 e F_2 satisfizerem (3.1.34), existe H tal que

$$F_1 = H^{-1} F_2 H.$$

Com efeito, duas matrizes quadradas têm os mesmos polinômios invariantes se e somente se forem semelhantes (ver por ex. (3), pg. 96).

Note-se ainda que as matrizes que só têm um polinômio invariante diferente da unidade são cíclicas (ver por ex. (48), pg. 280).

Voltemos a (3.1.33a), onde supomos que a condição necessária (iii) seja satisfeita, ou seja:

$$p_i(s) = 1 ; \quad i = \overline{1, p-1}$$

$$p_p(s) = \phi(s)$$

Então:

$$\text{Posto} [sI - \hat{A} \quad \hat{b}] = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & b & 0 & 0 \\ -v_1(s)c & v_1(s)d & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -v_p(s)c & v_p(s)d & 0 & \dots & \phi(s) \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se a $(n+2)$ -ésima coluna sucessivamente por $v_1(s)c_1$, $v_1(s)c_2$, ..., $v_1(s)c_n$, $-v_1(s)d$ e somando-se respectivamente às colunas de ordem $1, 2, \dots, n, n+1$ e depois fazendo operações elementares do mesmo tipo com as colunas de ordem $n+3, n+4, \dots, n+p$, obtemos:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI-A & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -v_p(s)c & v_p(s)d & 0 & \dots & \phi(s) \end{bmatrix} \quad (3.1.35)$$

Sejam α_i ($i = \overline{1,p}$) as raízes de $\phi(s)$. Então da última matriz vemos que:

$$(F, \gamma) \text{ controlável} \implies v_p(\alpha_i) \neq 0, \quad i = \overline{1,p} \quad (3.1.36)$$

Por outro lado, de (3.1.35) vem também:

$$\begin{aligned} \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha_i I - \hat{A} & \hat{b} \end{bmatrix} &= \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha_i I - A & b & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -v_p(\alpha_i)c & v_p(\alpha_i)d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha_i I - A & b & 0 & \dots & 0 \\ -v_p(\alpha_i)c & v_p(\alpha_i)d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha_i I - A & b & 0 & \dots & 0 \\ -c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad i = \overline{1,p} \end{aligned}$$

(Na primeira passagem acima fizemos permutações de linhas e na segunda dividimos a $(n+1)$ -ésima linha por $v_p(\alpha_i)$.)

Tendo em vista que na última matriz o bloco identidade tem

ordem $p-1$, vem:

$$(\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha_i I - A & b \\ -c & d \end{bmatrix} = n+1 \quad ; \quad i = \overline{1, p}$$

Donde

$$(iv) \quad (\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies S \text{ não é degenerado} \quad (3.1.37)$$

$$(v) \quad (\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies \text{As raízes de } \phi(s) \text{ não são "zeros do sistema" de } S \quad (3.1.38)$$

Por outro lado, se a condição (i) for satisfeita, isto é, se (A, b) é controlável, S não tem modos desacoplados da entrada, e portanto (v) pode ser substituído (para evitar redundância) por (ver (2.1.16)):

$$(v-a) \quad (\hat{A}, \hat{b}) \text{ controlável} \implies \text{As raízes de } \phi(s) \text{ não são zeros da função de transferência nem modos desacoplados da resposta de } S. \quad (3.1.38a)$$

É fácil verificar que se todas as condições necessárias (i), (ii), (iii), (iv) a (v) ou (v-a) forem satisfeitas, (\hat{A}, \hat{b}) será controlável, ou por outras palavras, o conjunto das condições necessárias acima é uma condição suficiente para a controlabilidade de (\hat{A}, \hat{b}) . Isto nos permite formular o seguinte resultado principal desta secção:

Proposição 3.1.39

Dado o sistema

$$S : \dot{x} = Ax + bu$$

$$y(t) = cx(t) + du(t) ,$$

suja resposta desejamos **que** rastreie em regime permanente o sinal

$$r(s) = \frac{r_0(s)}{\phi(s)}$$

por meio do compensador

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + \gamma e(t)$$

$$\eta(t) = kz(t) ,$$

$$\text{sendo } e(t) = r(t) - y(t) , u(t) = k_0 x(t) + \eta(t) ,$$

o rastreamento será robusto com relação a perturbações em A , b e

k_0 e o compensador terá ordem mínima somente se

$$|sI - F| = \phi(s) .$$

Neste caso, o rastreamento em regime permanente com um regime tran-

sitório arbitrariamente rápido (mediante escolha apropriada de k

e k_0) será possível se e somente se:

(i) (A, b) controlável

(ii) (F, γ) controlável

(iii) F cíclica

(iv) S não-degenerado

(v) As raízes de $\phi(s)$ não forem zeros da função da transferência nem modos desacoplados da resposta de S .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad c = [0 \quad 1] , \quad d = 0$$

$$r(s) = \frac{2}{s-2}$$

É fácil ver que a condição (i) é satisfeita

$$\begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 1 \\ 0 & s-2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = s-1$$

Portanto as condições (iv) e (v) também são satisfeitas, Devemos ter $F = 2$; para que (ii) e (iii) sejam satisfeitos basta tomar $\chi \neq 0$; façamos $\chi = 1$.

Suponhamos que se deseja que os polos do sistema em malha fechada sejam $\{-1, -1, -1\}$. Utilizando-se o algoritmo de (6), pg. 275, encontramos:

$$k_0 = [4 \quad -11] , \quad k = 8$$

Observação 3.1.40

A condição (iii) acima é redundante o foi demonstrada apenas a título do exercício e para que tivesse destaque, Com efeito, é fato conhecido que:

(F, χ) controlável $\implies F$ cíclica .

A demonstração deste resultado pode ser feita pelo mesmo método para provar (iii), ou seja:

Suponha-se (F, χ) controlável. Ora

$$(F, \chi) \text{ controlável} \iff \text{Posto} [sI-F \quad \chi] = p \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Efetuando-se operações elementares sobre $[sI-F \quad \chi]$ de modo a transformar $sI-F$ na forma de Smith, vem:

$$\text{Posto} [sI-F \quad \chi] = \text{Posto} \begin{bmatrix} p_1(s) \dots 0 & v_1(s) \\ \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & p_p(s) & v_p(s) \end{bmatrix} ,$$

sendo $p_i(s)$ os polinômios invariantes de $sI-F$. Ora, se F não for cíclica, haverá mais de um polinômio invariante diferente de 1, e portanto o posto da matriz acima será menor do que p para

algum valor de s , o que é equivalente à incontrolabilidade do par (F, γ) . Q.E.D.

Observação 3.1.41

É fácil verificar que a condição (iv) é equivalente a $g(s) \neq 0$, sendo $g(s)$ a função de transferência de S .

3.2 Sistemas multivariáveis

Seja:

$$\begin{aligned} S: \quad \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

onde supomos sem perda de generalidade que:

$$\text{Posto } B = m \tag{3.2.2}$$

$$\text{Posto } C = q$$

Queremos que a resposta $y(t)$ rastreie o sinal

$$r(t) = [r_1(t) \ . \ . \ . \ r_q(t)]^T \ , \tag{3.2.3}$$

sendo

$$r_i(s) = \frac{r_{i0}(s)}{\phi(s)} \ , \ i = \overline{1, q} \ , \tag{3.2.4}$$

onde supomos que $r_{i0}(s)$ pode ser qualquer (desconhecido) e $\phi(s)$ (conhecido) tem as raízes com a parte real não-negativa. Tal suposição, como vimos na seção anterior, não implica em perda de generalidade. Suporemos também (ainda sem perda de generalidade) que $\phi(s)$ é mônico. Observe-se ainda que se o sinal não tiver impulsos nem derivadas de impulsos, vem:

$$\text{grau } r_{i0}(s) < \text{grau } \phi(s) \ ; \ i = \overline{1, q}$$

Seja o erro entre o sinal e a resposta de S :

$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (3.2.5)$$

$$e(s) = H(s) r(s) \quad , \quad (3.2.6)$$

sendo $H(s)$ a matriz de transferência entre o erro e o sinal.

Vimos no final do capítulo anterior que as raízes de $\phi(s)$ não aparecerão como modos de $e(s)$ para $r_{i_0}(s)$ arbitrários se e somente se elas forem zeros de bloqueio de $H(s)$. E tendo em vista a definição de zeros de bloqueio, concluímos que $\phi(s)$ deve ser fator de todos os numeradores (diferentes de zero) da matriz $H(s)$.

Tal como no modelo da seção anterior (fig. 3.1.19), e seguindo Davison ((31)-(33)), o compensador terá o erro como entrada e sua resposta (adicionada à realimentação de estado de S) será a entrada de S .

Seja p o grau de $\phi(s)$. Como o erro tem dimensão q , o compensador terá agora dimensão pq . (veremos logo adiante um motivo bem mais forte para justificar esta escolha).

Sejam então as equações de estado do compensador:

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + \Gamma e(t) \quad (3.2.7)$$

$$\eta(t) = Kz(t) \quad ,$$

sendo:

F uma matriz($pq \times pq$)

Γ uma matriz($pq \times q$)

K uma matriz($m \times pq$)

$$\begin{aligned} u(t) &= K_0 x(t) + \eta(t) \\ &= K_0 x(t) + Kz(t) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$e(t) = r(t) - Cx(t) - Du(t)$$

Substituindo e reagrupando, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = (A+BK_0)x(t) + BKz(t)$$

$$\dot{z}(t) = -\Gamma(C+DK_0)x(t) + (F-\Gamma DK)z(t) + \Gamma r(t) \quad (3.2.9)$$

$$e(t) = -(C+DK_0)x(t) - DKz(t) + r(t) .$$

Considerando $\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ como o estado do sistema em malha fechada, $r(t)$

a entrada e $e(t)$ a resposta, temos a seguinte quádrupla:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A+BK_0 & BK \\ -\Gamma(C+DK_0) & F-\Gamma DK \end{bmatrix} ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -(C+DK_0) & -DK \end{bmatrix} ; \quad \tilde{D} = I$$

A matriz do sistema em malha fechada será então:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s) &= \begin{bmatrix} sI-\tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI-A-BK_0 & -BK & 0 \\ \Gamma(C+DK_0) & sI-F+\Gamma DK & \Gamma \\ C+DK_0 & DK & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Mas:

$$\begin{bmatrix} sI-A-BK_0 & -BK & 0 \\ \Gamma(C+DK_0) & sI-F+\Gamma DK & \Gamma \\ C+DK_0 & DK & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & \Gamma \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A-BK_0 & -BK & 0 \\ 0 & sI-F & 0 \\ C+DK_0 & DK & I \end{bmatrix}$$

Donde:

$$|\tilde{P}(s)| = \begin{vmatrix} sI-A-BK_0 & -BK & 0 \\ 0 & sI-F & 0 \\ C+DK_0 & DK & I \end{vmatrix} = |sI-A-BK_0| \cdot |sI-F|$$

Por outro lado (ver (1.1.9)):

$$|\tilde{P}(s)| = |sI-\tilde{A}| \cdot |\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}| = |sI-\tilde{A}| \cdot |H(s)|$$

E portanto:

$$H(s) = \frac{|sI - A - BK_0| \cdot |sI - F|}{|sI - \tilde{A}|} \quad (3.2.12)$$

Ora, queremos que $\phi(s)$ seja fator de cada numerador (diferente de zero) de $H(s)$. Sendo $H(s)$ uma matriz ($q \times q$) isto implica (se $|H(s)| \neq 0$):

$$\phi^q(s) \mid |H(s)| \quad (3.2.13)$$

Ora, das duas últimas expressões vemos que se desejarmos que o rastreamento seja robusto com relação a perturbações em A , B e K_0 e que o compensador tenha ordem mínima, então devemos escolher F tal que:

$$|sI - F| = \phi^q(s) \quad (3.2.14)$$

Escolhamos F e Γ quase-diagonais, isto é:

$$F = \text{diag}(F_i) \quad ; \quad \Gamma = \text{diag}(\gamma_i) \quad ; \quad i = \overline{1, q} \quad , \quad (3.2.15)$$

sendo :

F_i matrizes ($p \times p$)

γ_i vetores ($p \times 1$)

$$(3.2.16)$$

$$|sI - F_i| = \phi(s)$$

Vamos agora calcular o elemento genérico $h_{ij}(s)$ da matriz $H(s)$ a partir de (3.2.11) e utilizando (1.1.10).

Particionemos as matrizes C , D , K_0 e K da seguinte forma

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} ; \quad K_0 = [k_{01} \quad \dots \quad k_{0n}]$$

$$K = [k_1 \quad \dots \quad k_{pq}]$$

Então:

$$C + DK_0 = \begin{bmatrix} c_1 + d_1(k_{o1} \dots k_{on}) \\ \vdots \\ c_q + d_q(k_{o1} \dots k_{on}) \end{bmatrix}; DK = \begin{bmatrix} d_1(k_1 \dots k_{pq}) \\ \vdots \\ d_q(k_1 \dots k_{pq}) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(C+DK_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1(c_1 + d_1(k_{o1} \dots k_{on})) \\ \vdots \\ \gamma_q(c_q + d_q(k_{o1} \dots k_{on})) \end{bmatrix} \tag{3.2.17a}$$

$$\Gamma DK = \begin{bmatrix} \gamma_1 d_1(k_1 \dots k_{pq}) \\ \vdots \\ \gamma_q d_q(k_1 \dots k_{pq}) \end{bmatrix} \tag{3.2.17b}$$

De (3.2.11) e (1.1.10) para $i \neq j$ vem:

$$h_{ij}(s) = \frac{|N_{ij}(s)|}{|sI - \tilde{A}|}, \tag{3.2.18}$$

sendo:

$$|N_{ij}(s)| = \begin{vmatrix} sI - A - BK_0 & -BK & 0 \\ \Gamma(C+DK_0) & sI - F + \Gamma DK & \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_i + d_i(k_{o1} \dots k_{on}) & d_i(k_1 \dots k_{pq}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} sI - A - BK_0 & -BK & 0 \\ \gamma_1(c_1 + d_1(k_{o1} \dots k_{on})) & (sI - F_1 \dots 0) + \gamma_1 d_1(k_1 \dots k_{pq}) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_q(c_q + d_q(k_{o1} \dots k_{on})) & (0 \dots sI - F_q) + \gamma_q d_q(k_1 \dots k_{pq}) & 0 \\ c_i + d_i(k_{o1} \dots k_{on}) & d_i(k_1 \dots k_{pq}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} sI-A-BK_0 & & -BK & 0 \\ \chi_1(c_1+d_1(k_{01}\dots k_{on})) & (sI-F_1 \ 0 \ \dots \ 0) + \chi_1 d_1(k_1\dots k_{pq}) & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_i(c_i+d_i(k_{01}\dots k_{on})) & (0\dots sI-F_i\dots 0) + \chi_i d_i(k_1\dots k_{pq}) & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_q(c_q+d_q(k_{01}\dots k_{on})) & (0 \ \dots \ 0 \ sI-F_q) + \chi_q d_q(k_1\dots k_{pq}) & & 0 \\ \hline c_i+d_i(k_{01}\dots k_{on}) & d_i(k_1 \ \dots \ k_{pq}) & & 0 \end{array} \quad (3.2.19)$$

(Supuzemos acima $i < j$; o caso $i > j$ é tratado da mesma forma)

No determinante acima multipliquemos a Última linha sucessivamente pelos elementos do vetor $-\chi_i$ e somemos respectivamente às linhas de ordem $(n+p(i-1)+1)$, $(n+p(i-1)+2)$, ..., $n+pi$. Após estas operações elementares as p linhas supra-mencionadas adquirirão a forma:

$$[0 \ \dots \ sI-F_i \ \dots \ 0]$$

A seguir efetuamos operações elementares de modo a transformar $sI-F_i$ na forma de Smith. As p linhas ficarão assim:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & p_{i1}(s) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \cdot & & & & \vdots \\ \vdots & & \cdot & & & & \vdots \\ \vdots & & \cdot & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \cdot & p_{ip}(s) & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

sendo:

$$p_{ik}(s) = \text{polinômios invariantes} \ ; \ k = \overline{1, p}$$

$$\prod_{k=1}^p p_{ik}(s) = \phi(s)$$

Desenvolvendo agora o determinante segundo os elementos das li-

nhas em questão, vemos que

$$\phi(s) \mid |N_{ij}(s)| \tag{3.2.20}$$

De (3.2.18) vemos que $\phi(s)$ será fator do numerador de todo $h_{ij}(s)$ para $i \neq j$ se o sistema em malha fechada for estável

Seja agora $i = j$. Ao invés de (3.2.19), teremos agora:

$$|N_{ii}(s)| = \begin{vmatrix} sI - A - BK_0 & & & -BK & & 0 \\ \gamma_1(c_1 + d_1(k_{01} \dots k_{0n})) & (sI - F_1 \dots \dots 0) + \gamma_1 d_1(k_1 \dots k_{pq}) & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ \gamma_i(c_i + d_i(k_{01} \dots k_{0n})) & (0 \dots sI - F_i \dots 0) + \gamma_i d_i(k_1 \dots k_{pq}) & & & & \gamma_i \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ \gamma_q(c_q + d_q(k_{01} \dots k_{0n})) & (0 \dots \dots sI - F_q) + \gamma_q d_q(k_1 \dots k_{pq}) & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & c_i + d_i(k_{01} \dots k_{0n}) & & & d_i(k_1 \dots k_{pq}) & 1 \end{vmatrix} \tag{3.2.20}$$

Efetuada as mesmas operações elementares que no caso anterior, obtemos igualmente:

$$\phi(s) \mid |N_{ii}(s)| \quad ; \quad i = \overline{1, q} \tag{3.2.21}$$

se for possível escolher K e K_0 tais que as raízes de $|sI - \tilde{A}|$ tenham parte real negativa, o sistema em malha fechada será estável e aplicando o teorema do valor final obteremos o resultado almejado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Verificaremos entretanto que, tal como na seção precedente, o sistema em malha fechada é não somente estabilizável, mas tam-

bem controlável, o que significa que, mediante escolha apropriada de K e K_0 podemos obter um regime transitório tão rápido quanto queiramos e um sistema em malha fechada "bastante" estável.

Vejam portanto quais as condições para a controlabilidade do sistema em malha fechada.

De (3.2.10), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A+BK_0 & BK \\ -\Gamma C - \Gamma DK_0 & F - \Gamma DK \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\Gamma C & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -\Gamma D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & K \end{bmatrix} \\ &= \hat{A} + \hat{B}\hat{K} \quad , \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

sendo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\Gamma C & F \end{bmatrix} ; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ -\Gamma D \end{bmatrix} ; \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K \end{bmatrix} \quad (3.2.22a)$$

Ora, sabemos que as raízes de $|sI - \tilde{A}|$ (isto é, os polos do sistema em malha fechada) podem ser fixadas arbitrariamente, mediante escolha apropriada de \hat{K} se e somente se (\hat{A}, \hat{B}) for controlável.

Para investigar a controlabilidade de (\hat{A}, \hat{B}) usaremos mais uma vez o critério:

$$(\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \iff \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n + pq \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Ora:

$$\begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & 0 & B \\ \Gamma C & sI - F & -\Gamma D \end{bmatrix} \quad (3.2.22b)$$

Donde:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n + pq \quad \forall s \in \mathbb{C} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Ou seja:

$$(i) \quad (\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \implies (A, B) \text{ controlável} \quad (3.2.23)$$

De (3.2.22b) vem também:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n + pq \quad \forall s \in \mathbb{C} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} \Gamma C & sI - F & -\Gamma D \end{bmatrix} = pq \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Ora, por permutações de ~~linhas~~^{colunas} vem:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} \Gamma C & sI - F & -\Gamma D \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - E & \Gamma C & -\Gamma D \end{bmatrix}$$

E também:

$$\begin{bmatrix} sI - F & \Gamma C & -\Gamma D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - F & \Gamma & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

Donde

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \Gamma C & -\Gamma D \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \Gamma & -\Gamma \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \Gamma \end{bmatrix}$$

Mas:

$$\begin{bmatrix} sI - F & \Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - F_1 & \dots & 0 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & sI - F_q & 0 & \dots & \gamma_q \end{bmatrix}$$

Tendo em vista (3.2.16) vemos que:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F & \Gamma \end{bmatrix} = pq \quad \forall s \in \mathbb{C} \iff \text{Posto} \begin{bmatrix} sI - F_i & \gamma_i \end{bmatrix} = p \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

$$\iff (F_i, \gamma_i) \text{ controlável ; } i = \overline{1, q}$$

Donde:

$$(ii) \quad (\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \implies (F_i, \gamma_i) \text{ controlável ; } i = \overline{1, q}$$

(3.2.24)

(Donde se conclui também que as matrizes F_i devem ser cíclicas)

Voltemos a (3.2.22b). Por permutações de colunas vem:

$$\begin{aligned} \text{Posto } [sI-\hat{A} \quad \hat{B}] &= \text{Posto } \begin{bmatrix} sI-A & B & 0 \\ \Gamma C & -\Gamma D & sI-F \end{bmatrix} \\ &= \text{Posto } \begin{bmatrix} sI-A & B & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 c_1 & -\gamma_1 d_1 & sI-F_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_q c_q & -\gamma_q d_q & 0 & \dots & sI-F_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

(Na última passagem simplesmente efetuamos os produtos ΓC e ΓD .)
 Efetuemos agora operações elementares de modo a transformar $sI-F_i$ na forma de Smith. Obtém-se (tendo em vista que F_i é cíclica)

$$\begin{aligned} &= \text{Posto } \begin{bmatrix} sI-A & B & 0 & \dots & 0 \\ \begin{bmatrix} v_{11}(s) \\ \vdots \\ v_{1p}(s) \end{bmatrix} c_1 & \begin{bmatrix} -v_{11}(s) \\ \vdots \\ -v_{1p}(s) \end{bmatrix} d_1 & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \phi(s) \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} v_{q1}(s) \\ \vdots \\ v_{qp}(s) \end{bmatrix} c_q & \begin{bmatrix} -v_{q1}(s) \\ \vdots \\ -v_{qp}(s) \end{bmatrix} d_q & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \phi(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Façamos agora na matriz acima $s = \alpha$, sendo α uma raiz de $\phi(s)$.

Consideremos o bloco formado pelas linhas de ordem $(n+p(i-1)+1)$, $(n+p(i-1)+2)$, \dots , $n+pi$:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1}(\alpha) \\ \vdots \\ v_{ip}(\alpha) \end{bmatrix} c_i & \begin{bmatrix} -v_{i1}(\alpha) \\ \vdots \\ -v_{ip}(\alpha) \end{bmatrix} d_i & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Efetuada operações elementares sobre as colunas este bloco é transformável em

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ v_{ip}(\alpha)c_i \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ -v_{ip}(\alpha)d_i \end{array} \right] \quad 0 \dots 0 \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \end{array} \right] \dots 0 \end{array} \right]$$

É claro que $v_{ip}(a) \neq 0$ (pois do contrário (F_i, χ_i) não seria controlável). Dividamos então a última linha do bloco acima por $-v_{ip}(\alpha)$.

Façamos estas mesmas operações elementares para todos os blocos ($i = \overline{1, p}$) da matriz (3.2.26). Obtemos após permutações de linhas:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - A & B \\ -C & D \\ & & I_{p-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{p-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.29)$$

(Na matriz acima I_{p-1} significa matriz identidade de ordem $p-1$).

Examinando as colunas de (3.2.29) concluímos:

$$(iii) \quad (\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \implies m \geq q \quad (3.2.30)$$

Examinando as linhas de (3.2.29) vem:

$$(\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \implies \text{Posto} \begin{bmatrix} \alpha I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = n + q$$

Esta última condição necessária pode ser desdobrada em:

$$(iv) \quad (\hat{A}, \hat{B}) \text{ controlável} \implies S \text{ não é degenerado} \quad (3.2.31)$$

(v) (\hat{A}, \hat{B}) controlável \implies \propto não é zero do sistema' de S. (3.2.32)

E tendo em vista que S não pode ter modos desacoplados da entrada (ver (3.2.23)), a última condição (3.2.32) pode ser expressa do seguinte modo (para evitar redundância):

(v-a) (\hat{A}, \hat{B}) controlável \implies As raízes de $\phi(s)$ não são zeros da matriz de transferência nem modos desacoplados da resposta de S. (3.2.32a)

É fácil verificar que se forem satisfeitas todas as condições necessárias, a saber, (i), (ii), (iii), (iv) e (v-a), (\hat{A}, \hat{B}) será controlável, ou por outras palavras, o conjunto dessas condições necessárias é uma condição suficiente para a controlabilidade do sistema em malha fechada, o que nos permite formular o seguinte:

Teorema 3.2.33

Dado o sistema:

$$S: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

cujas resposta se deseja que rastreie o sinal:

$$r(s) = [r_1(s) \ . \ . \ . \ . \ r_q(s)]^T ;$$

$$\text{sendo } r_i(s) = \frac{r_{i0}(s)}{\phi(s)} ; i = \overline{1, q} \ , \ r_{i0}(s) \text{ arbitrários}$$

por meio do compensador

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + \Gamma e(t)$$

$$\eta(t) = Kz(t) \ ,$$

onde:

$$F = \text{diag}(F_i) ; \Gamma = \text{diag}(\gamma_i) ; i = \overline{1, q} ; |sI - F_i| = \phi(s)$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

e por meio da realimentação do estado, isto é:

$$u(t) = K_0 x(t) + \eta(t).$$

Haverá rastreamento em regime permanente com um regime transitório arbitrariamente rápido (mediante escolha conveniente de K e K_0) se e somente se:

i) (A, B) for controlável

ii) (F_i, γ_i) forem controláveis ; $i = \overline{1, q}$

iii) $m \geq q$

iv) S não for degenerado

v) As raízes de $\phi(s)$ não forem zeros da matriz de transferência nem modos desacoplados da resposta do S .

Observação 3.2.34

$$\text{Seja: } \phi(s) = s^p + \beta_{p-1}s^{p-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$$

Façamos:

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & \dots & \dots & -\beta_{p-1} \end{bmatrix} ; \gamma_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} ; i = \overline{1, q}$$

É fácil verificar que as condições (ii) e (iii) acima são satisfeitas para este par (F_i, γ_i) . Este é o compensador usado por Davison (ver (32) e (33)).

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

As condições (i) e (iii) do teorema 3.2.33 são satisfeitas. Entretanto, efetuando, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix} = 0$$

Portanto o sistema é degenerado e não permite rastrear nenhum sinal não "trivial".

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

As condições (i) e (iii) são satisfeitas. Efetuando, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{vmatrix} = -2(s-2)$$

Consequentemente este sistema pode rastrear qualquer sinal em que não apareça o modo e^{2t} . Se quisermos, por exemplo, rastrear um sinal senoidal, podemos usar o seguinte compensador que satisfaz a condição (ii) do teorema:

$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Supozemos o sinal senoidal tal que $\phi(s) = s^2 + 1$)

Observação 3.2.35

O compensador utilizado neste trabalho não é a única solução

para o problema do servomecanismo: veja-se por exemplo a solução á apresentada em (28) e (29). A razão da nossa preferência pelo modelo de Davison se deve à sua "robustez" conforme o seguinte:

Teorema 3.2.36

Sejam o sistema S e o compensador do teorema 3.2.33. Se o sistema em malha fechada for estável, o sinal será rastreado em regime permanente mesmo que A, B, O, D, K, K₀ e γ_i ($i = \overline{1, q}$) sejam perturbados, não porém se F_i forem perturbados.

Demonstração:

Suponha-se primeiramente que A, B, C, D, K, K₀ e γ_i (não porém F_i) sejam perturbados. De (3.2.18) vem:

$$h'_{ij}(s) = \frac{|N'_{ij}(s)|}{|sI - \tilde{A}'|},$$

sendo:

$$N'_{ij}(s) \neq N_{ij}(s) \quad ; \quad \tilde{A}' \neq \tilde{A}$$

Sendo $|sI - \tilde{A}|$ estável, $|sI - \tilde{A}'|$ também o será se a perturbação for suficientemente pequena (ver (56)).

Vejamos o que ocorre com $|N'_{ij}(s)|$.

De (3.2.19) vemos que ao efetuarmos as operações elementares sobre as linhas do ordem $n+p(i-1)+1$, $n+p(i-1)+2$, ..., $n+pi$, elas adquirirão a forma:

$$[0 \dots sI - F_i \dots 0] \tag{3.2.37}$$

Portanto:

$$\phi(s) \Big| |N'_{ij}(s)|$$

Suponha-se agora que F_i seja perturbado, isto é:

$$|sI - F_i| = \phi'(s)$$

Teremos agora:

$$\phi'(s) \mid |N'_{ij}(s)| .$$

Portanto, sendo $\phi'(s) \neq \phi(s)$, todas as raízes de $\phi(s)$ diferentes das raízes de $\phi'(s)$ não serão canceladas e aparecerão como modos do erro em regime permanente

Q. E. D.

Observação 3.2.38

Sendo satisfeitas as condições para a controlabilidade do sistema em malha fechada do teorema 3.2.33, o sistema em malha fechada pode ser tornando 'bastante' estável (mediante escolha apropriada de K e K_0) e, conseqüentemente, 'bastante robusto' com relação a perturbações em A, B, C, D, K, K_0 e γ_i ($i = \overline{1, q}$)

4. RASTREAMENTO EM PRESENÇA DE RUÍDOS

(Nota: Na literatura especializada de língua inglesa a palavra "perturbation" é usada para indicar perturbações nos parâmetros do sistema, enquanto que a palavra "disturbance" é usada para indicar as perturbações nas equações de estado, Usaremos neste trabalho a palavra "ruído" (na falta de melhor) para traduzir "disturbance".)

4.1 Regulação da resposta

Seja o sistema:

$$\begin{aligned} S: \quad \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Vw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + Tw(t) , \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

onde x , u , y , A , B , C , D têm os significados e dimensões dos capítulos precedentes.

$w(t)$ é um ruído tal que:

$$w(s) = [w_1(s) \ . \ . \ . \ w_a(s)]^T \tag{4.1.2}$$

$$w_i(s) = \frac{w_{i0}(s)}{\phi(s)} \quad i = \overline{1, a}$$

V e T são matrizes com as dimensões apropriadas

$w_{i0}(s)$ ($i = \overline{1, a}$) podem ser quaisquer, mas $\phi(s)$ é suposto conhecido, pois é este polinômio que define a classe dos ruídos.

Nosso objetivo é regular em regime permanente a resposta de S ,

ou seja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \tag{4.1.3}$$

Há mais de uma maneira de resolver este problema; veja-se

por exemplo uma solução recente apresentada por Bhattacharyya ((57) e (58)) na qual se obtém uma matriz de transferência nula entre a resposta e o ruído..

Usaremos o mesmo compensador do capítulo precedente, o qual, como vimos, permite uma estrutura bastante "robusta",

A entrada do compensador será agora simplesmente $-y(t)$ (pois $r(t) = 0$), ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + \Gamma y(t) \\ \eta(t) &= Kz(t) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$u(t) = K_0 x(t) + \eta(t) = K_0 x(t) + Kz(t) \tag{4.1.5}$$

Substituindo e agrupando, vem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+BK_0)x(t) + BKz(t) + Vw(t) \\ \dot{z}(t) &= -\Gamma(C+DK_0)x(t) + (F-\Gamma DK)z(t) - \Gamma Tw(t) \\ y(t) &= (C+DK_0)x(t) + DKz(t) + Tw(t) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

E portanto:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A+BK_0 & BK \\ -\Gamma(C+DK_0) & F-\Gamma DK \end{bmatrix} ; & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} V \\ -\Gamma T \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} C+DK_0 & DK \end{bmatrix} ; & \tilde{D} &= T \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Vemos que a expressão de \tilde{A} é exatamente igual à do capítulo precedente (ver (3.2.10)) e, conseqüentemente, as condições para fixar os polos do sistema em malha fechada são as mesmas já demonstradas (ver o teorema 3.2.33).

Resta-nos portanto verificar se $\phi(s)$ é fator de todos os numeradores (diferentes de zero) de $H(s)$, a qual agora será a matriz de transferência entre $y(s)$ e $w(s)$.

De (4.1.7) vem:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI - A - BK_0 & -BK & V \\ \Gamma(C + DK_0) & sI - F + \Gamma DK & -\Gamma T \\ -C - DK_0 & -DK & T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Tal como no capítulo anterior, façamos a seguinte hipótese simplificadora quanto às matrizes F e Γ :

$$F = \text{diag}(F_i) \quad ; \quad \Gamma = \text{diag}(\gamma_i) \quad ; \quad i = \overline{1, q}$$

sendo então:

$$|sI - F_i| = \phi_i(s)$$

Particionemos C , D , K_0 e K da mesma forma que no capítulo anterior (ver pg. 85). As expressões de $C + DK_0$, DK , $\Gamma(C + DK_0)$ e ΓDK encontram-se à pag. 86.

Façamos além disso as seguintes partições:

$$V = [v_1 \ \dots \ v_a] \quad ; \quad T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_q \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

Donde:

$$\Gamma T = \begin{bmatrix} \gamma_1 t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_q t_q \end{bmatrix} \quad (4.1.9a)$$

De (4.1.8) e (1.1.10) obtém-se (tal como em (3.2.18) e (3.2.19)):

$$h_{ij}(s) = \frac{|N_{ij}(s)|}{|sI - \tilde{A}|} \quad i = \overline{1, q} \quad ; \quad j = \overline{1, a} \quad (4.1.10)$$

Observe-se que

$$\gamma_i t_i = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \vdots \\ \gamma_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{i1} & \dots & t_{ia} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} t_{i1} & \dots & \gamma_{i1} t_{ia} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{ip} t_{i1} & \dots & \gamma_{ip} t_{ia} \end{bmatrix}$$

E portanto a j -ésima coluna de $\gamma_i t_i$ será:

$$(\gamma_i t_i)_j = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} t_{ij} \\ \vdots \\ \gamma_{ip} t_{ij} \end{bmatrix} \tag{4.1.11}$$

Com esta notação, obtemos:

$$|N_{ij}(s)| = \begin{vmatrix} sI - A - BK_0 & & -BK & v_j \\ \gamma_1(c_1 + d_1(k_{o1} \dots k_{on})) & (sI - F_1 \ 0 \dots 0) + \gamma_1 d_1(k_1 \dots k_{pq}) & & -(\gamma_1 t_{i1})_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_i(c_i + d_i(k_{o1} \dots k_{on})) & (0 \dots sI - F_i \dots 0) + \gamma_i d_i(k_1 \dots k_{pq}) & & -(\gamma_i t_{ij})_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_q(c_q + d_q(k_{o1} \dots k_{on})) & (0 \dots sI - F_q) + \gamma_q d_q(k_1 \dots k_{pq}) & & -(\gamma_q t_{iq})_j \\ -c_i - d_i(k_{o1} \dots k_{on}) & & -d_i(k_1 \dots k_{pq}) & t_{ij} \end{vmatrix} \tag{4.1.12}$$

Multiplicando a última linha do determinante acima sucessivamente por $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{ip}$ e somando respectivamente às linhas de ordem $n+(p-1)i+1, n+(p-1)i+2, \dots, n+pi$, estas linhas são transformadas em:

$$[0 \dots sI - F_i \dots 0]$$

Realizando agora operações elementares tais que $sI - F_i$ é transformada na forma de Smith, concluímos:

$$\phi(s) \left| N_{ij}(s) \right| ; \quad i = \overline{1, q} ; \quad j = \overline{1, a} \quad (4.1.13)$$

4.2 Síntese para o problema geral

Do capítulo anterior e da seção precedente verificamos que o mesmo compensador permite rastrear o sinal e regular a resposta (em problemas separados) sendo $\phi(s)$ o denominador da transformada de Laplace das componentes do sinal e do ruído.

Queremos agora rastrear (em regime permanente) um sinal $r(s)$ com o sistema submetido ao ruído $w(s)$.

Seja então $y_r(t)$ a resposta de S quando o sistema em malha fechada é excitado pelo sinal $r(t)$ e seja $y_w(t)$ a resposta de S quando o sistema em malha fechada é excitado pelo ruído $w(t)$. Como a estrutura é linear, podemos aplicar o princípio de superposição, obtendo:

$$y(t) = y_r(t) + y_w(t) \quad ,$$

onde $y(t)$ é a resposta de S quando o sistema em malha fechada é submetido à excitação do sinal $r(t)$ e do ruído $w(t)$.

Donde:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} y_w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) + 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) \end{aligned}$$

Isto nos permite formular o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1

Dado o sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{V}w(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{T}w(t) , \end{aligned}$$

onde:

$$w(s) = \begin{bmatrix} w_1(s) & \dots & w_a(s) \end{bmatrix}^T$$

$$w_i(s) = \frac{w_{i0}(s)}{\phi(s)} \quad ; \quad i = \overline{1, a} \quad , \text{ sendo } \phi(s) \text{ conhecido e } w_{i0}(s)$$

quaisquer,

desejamos que a resposta de \mathbf{S} rastreie (em regime permanente) o sinal:

$$r(s) = \begin{bmatrix} r_1(s) & \dots & r_q(s) \end{bmatrix}^T \quad ; \quad r_i(s) = \frac{r_{i0}(s)}{\phi(s)} \quad ; \quad i = \overline{1, q} ,$$

sendo $r_{i0}(s)$ desconhecidos, utilizando-se o compensador

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{\Gamma}e(t) \\ \eta(t) &= \mathbf{K}\mathbf{z}(t) \quad , \end{aligned}$$

sendo:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$\mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{F}_i) \quad , \quad \mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_i) \quad , \quad s\mathbf{I} - \mathbf{F}_i = \phi(s) \quad ; \quad i = \overline{1, q}$$

$$u(t) = \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{z}(t) .$$

Haverá rastreamento (em regime permanente) do sinal com um regime transitório arbitrariamente rápido se e somente se:

- (i) (\mathbf{A}, \mathbf{B}) for controlável
- (ii) (\mathbf{F}_i, γ_i) for controlável ; $i = \overline{1, q}$
- (iii) $m \geq q$, sendo $m = \text{Posto B}$, $q = \text{Posto C}$
- (iv) \mathbf{S} não for degenerado

(v) As raízes de $\phi(s)$ não forem zeros da matriz de transferência nem modos desacoplados da resposta de S.

§§§

Observação 4.2.2

O resultado acima também pode ser demonstrado diretamente, isto é, considerando-se a atuação simultânea do sinal $r(t)$ e do ruído $w(t)$. Neste caso, o sistema em malha fechada terá $\begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ como entrada e $e(t)$ como saída. É fácil verificar que as equações de estado serão:

$$\dot{x} = (A+BK_0)x + BKz + Vw$$

$$\dot{z} = -\Gamma(C+DK_0)x + (F-\Gamma DK)z + \Gamma(r-Tw)$$

$$e = -(C+DK_0)x - DKz + r - Tw$$

Ou seja:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A+BK_0 & BK \\ -\Gamma(C+DK_0) & F-\Gamma DK \end{bmatrix} ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & V \\ \Gamma & -\Gamma T \end{bmatrix} \quad (4.2.2a)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -(C+DK_0) & -DK \end{bmatrix} ; \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} I & -T \end{bmatrix}$$

O resto do desenvolvimento é semelhante ao do capítulo anterior e o da seção precedente. Note-se que \tilde{A} é a mesma matriz, e portanto basta verificar que $\phi(s)$ é fator de todos os numeradores da matriz de transferência entre $e(s)$ e $\begin{bmatrix} r(s) \\ w(s) \end{bmatrix}$.

Observação 4.2.3

Da expressão de \tilde{A} acima verificamos que V e T não precisam ser conhecidos para projetar o compensador

§§§

O teorema seguinte define a "robustez" da estrutura!

Teorema 4.2.4

Sejam o sistema S e o compensador do teorema 4.2.1. Se o sistema em malha fechada for estável, o sinal será rastreado em regime permanente mesmo que A, B, C, D, K, K₀, V, T, γ_i (i = 1, q) sejam perturbados, não porém se F_i (i = 1, q) forem perturbados.

Demonstração:

A matriz do sistema será:

$$\tilde{F}(s) = \begin{bmatrix} sI - A - BK_0 & -BK & 0 & V \\ \Gamma(C + DK_0) & sI - F + \Gamma DK & \Gamma & -\Gamma T \\ C + DK_0 & DK & I & -T \end{bmatrix}$$

De (1.1.10), pg. 7, vem: (sendo \tilde{A} dado por (4.2.2a) à pg. anterior):

$$h_{ij}(s) = \frac{|N_{ij}(s)|}{|sI - \tilde{A}|} \quad ; \quad i = \overline{1, q} \quad ; \quad j = \overline{1, q+a}$$

A expressão de $|N_{ij}(s)|$ é dada por (3.2.20a), pg. 88, para $i = j$, por (3.2.19), pg. 87, para $i \neq j$, $j = \overline{1, q}$ e por (4.1.12), pg. 101, para $j = q+1, q+2, \dots, q+a$.

O resto da demonstração é como a do teorema 3.2.26 (pgs. 96s).

§§§

Observação 4.2.5:

Se forem satisfeitas as condições do teorema 4.2.1 para a controlabilidade do sistema em malha fechada, os polos do sistema em malha fechada poderão ser escolhidos arbitrariamente (por meio de escolha conveniente de K e K₀), com parte real tão negativa

quanto se desejar e então o compensador será tão robusto quanto desejável com relação a perturbações em $A, B, C, D, K, K_0, V, T, \gamma_i$ ($i = \overline{1, q}$).

Observação 4.2.6

O sistema de compensação estudado neste trabalho utiliza a realimentação do estado de S . Às vezes o estado de S é acessível à medida direta. Casos porém há em que esta medida não é possível, pois pode ocorrer inclusive que algumas componentes do estado nem sejam grandezas "físicas". Nestes casos será necessário o uso do observador para que o estado seja estimado (ver por exemplo (38), (39) e (6), pg. 281). Ora, como é sabido, isto impõe a condição adicional (se quisermos que os valores próprios do observador possam ser escolhidos arbitrariamente) que S seja observável. O grave porém é que, conforme foi demonstrado por Bhattacharyya (ver (40)), o observador não é robusto com relação a perturbações em todos os seus parâmetros. Por conseguinte, se o estado não for diretamente mensurável, a realimentação do estado através do observador pode introduzir um erro (no valor do estado realimentado) que poderá evoluir exponencialmente com o tempo. Seria interessante investigar como é que este erro na medida do estado estimado se reflete no erro entre o sinal (a ser rastreado) e a resposta de S .

Observação 4.2.7

No sistema de compensação utilizado neste trabalho foi suposto que todas as raízes de $\phi(s)$ possam ser modos do sinal $r(s)$ e do ruído $w(s)$. Se soubermos, entretanto, de antemão, que algumas

das raízes de $\phi(s)$ não são modos do ruído e/ou de algumas componentes do sinal, será possível eventualmente um compensador de ordem menor do que pq . Veremos, entretanto, no próximo capítulo, que tal compensador é pouco "robusto".

4.3 Sensibilidade do servomecanismo

No capítulo anterior e nas seções precedentes verificamos que o rastreamento de um sinal (e a regulação da resposta) é possível porque os modos do sinal (e/ou do ruído) são cancelados pelas raízes de $|sI - F_i|$ ($i = \overline{1, q}$). É claro que este cancelamento é "crítico", isto é, se houver um pequeno erro de implementação do compensador ou uma pequena perturbação nos elementos de alguma das matrizes F_i , teremos $|sI - F_i| \neq \phi(s)$, e conseqüentemente, não haverá cancelamento de algum(s) modo(s) do sinal (e/ou do ruído), os quais aparecerão no erro entre o sinal e a resposta de S .

Ora parece pouco provável que se possa evitar na prática algum pequeno erro de implementação ou ligeira perturbação nos parâmetros de um sistema, donde seríamos levados à conclusão que o sistema de compensação estudado neste trabalho é inútil do ponto de vista prático.

Ocorre, porém, que não é possível obter estrutura de compensação melhor, como será visto no próximo capítulo. Mais ainda, veremos nesta seção que se a perturbação nos elementos do F_i ($i = \overline{1, q}$) for "pequena" o rastreamento será satisfatório. (Veremos adiante quais as condições que devem ser satisfeitas.)

Lema 4.3.1

Seja um sistema escalar tal que:

$$y(s) = g(s)u(s) ,$$

onde $g(s)$ é estável (mesmo quando o sistema é perturbado) e tal que o seu numerador cancele os modos instáveis de $u(s)$. Então:

1) Se uma perturbação do sistema fizer com que um dos modos (com grau de multiplicidade 1) de $u(s)$ não seja cancelado, o modo aparecerá em $y(s)$, mas o seu resíduo θ será tal que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \theta = 0 , \text{ sendo } \delta \text{ a } \overset{\text{perturbação da}}{\text{respectiva raiz do numerador de } g(s)} .$$

2) Suponha-se que o modo não cancelado tenha grau de multiplicidade $\sigma > 1$. Sejam δ_i , ($i = \overline{1, \sigma}$) as perturbações (não necessariamente iguais) da raiz (com grau de multiplicidade σ) do numerador de $g(s)$ correspondente ao modo que se deseja cancelar e sejam θ_j ($j = \overline{1, \sigma}$) os resíduos correspondentes às diversas potências do modo não cancelado. Teremos:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \theta_1 = 0 ; i = \overline{1, \sigma}$$

E em geral:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \frac{\theta_j}{\theta_{j-1}} = 0 ; i = \overline{1, \sigma} ; j = \overline{1, \sigma} ; \theta_0 = 1$$

Demonstração:

1) Suponha-se que se deseja bloquear o modo $e^{\alpha t}$ de $u(t)$, o qual supomos para simplificar e sem perda de generalidade tal que:

$$u(s) = \frac{u_0}{s - \alpha}$$

Suponha-se que por erro de implementação ou por perturbação

ou por perturbação nos parâmetros do sistema a função ^{de transferência} tenha um zero em $\alpha - \delta$ ao invés de α , ou seja:

$$g'(s) = (s - \alpha + \delta) g_0(s),$$

sendo $g_0(s)$ uma função racional com o denominador estável.

A resposta com o sistema perturbado será então:

$$y'(s) = g'(s)u(s) = \frac{s - \alpha + \delta}{s - \alpha} g_0(s) u_0$$

$$= \frac{\theta}{s - \alpha} + \dots \text{modos estáveis correspondentes às raízes do denominador de } g_0(s).$$

Da expressão dos resíduos (ver por ex. (41)):

$$\theta = \left[(s - \alpha) y'(s) \right]_{s = \alpha} = \delta g_0(\alpha) u_0$$

E portanto:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \theta = 0.$$

2) Seja agora:

$$u(s) = \frac{u_0(s)}{(s - \alpha)^\sigma}$$

Suponha-se que por erro de implementação ou perturbação nos parâmetros do sistema a função de transferência ao invés de ter um zero em α com grau de multiplicidade σ , seja tal que:

$$g'(s) = g_0(s) \prod_{i=1}^{\sigma} (s - \alpha + \delta_i),$$

onde $g_0(s)$ é uma função racional com denominador estável.

A resposta passara a ser:

$$y'(s) = g'(s)u(s) = \frac{g_0(s) u_0(s)}{(s - \alpha)^\sigma} \prod_{i=1}^{\sigma} (s - \alpha + \delta_i)$$

$$= \frac{\Theta_1}{(s-\alpha)} + \frac{\Theta_2}{(s-\alpha)^2} + \dots + \frac{\Theta_\sigma}{(s-\alpha)^\sigma} + \dots \text{modos estáveis correspondentes às raízes do denominador de } g_0(s)$$

Ora, da expressão geral dos resíduos (ver por ex. (41), pgs. 168 e 202), vem:

$$\begin{aligned} \Theta_{\sigma-j} &= \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} \left[(s-\alpha)^\sigma y'(s) \right] \Big|_{s=\alpha} \\ &= \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} \left[g_0(s)u_0(s) \prod_{i=1}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) \right] \Big|_{s=\alpha} \quad ; j = \overline{0, \sigma-1} \end{aligned} \tag{4.3.1a}$$

Para $j = 0$:

$$\Theta_\sigma = g_0(\alpha)u_0(\alpha) \prod_{i=1}^{\sigma} \delta_i \tag{4.3.1b}$$

Donde:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \Theta_\sigma = 0 \tag{4.3.2}$$

Para $j = 1$:

$$\begin{aligned} \Theta_{\sigma-1} &= \frac{d}{ds} \left[g_0(s)u_0(s) \prod_{i=1}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) \right] \Big|_{s=\alpha} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) \frac{d}{ds} [g_0(s)u_0(s)] + g_0(s)u_0(s) \left[\prod_{i=2}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) + \dots + \prod_{i=1}^{\sigma-1} (s-\alpha+\delta_i) \right] \right\} \Big|_{s=\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{i=1}^{\sigma} \delta_i \frac{d}{ds} \left[g_0(s) u_0(s) \right] \Big|_{s=\alpha} + g_0(\alpha) u_0(\alpha) \left[\prod_{\substack{i=2 \\ i \neq 2}}^{\sigma} \delta_i + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{\sigma} \delta_i + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \prod_{i=1}^{\sigma-1} \delta_i \right] \tag{4.3.3}
 \end{aligned}$$

Donde vemos quer

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \Theta_{\sigma-1} = 0 \tag{4.3.4}$$

E além disso comparando (4.3.1b) e (4.3.3) vem:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \frac{\Theta_{\sigma}}{\Theta_{\sigma-1}} = 0 \tag{4.3.5}$$

Vamos agora demonstrar que se a expressão abaixo for verdadeira para j , também o será para $j+1$ r

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\sigma-j} &= \frac{1}{j!} \left[g_0(s) u_0(s) \sum_{\binom{\sigma}{\sigma-j}} \prod_{\sigma-j} (s-\alpha+\delta_i) + \dots \text{parcelas com pro-} \right. \\
 &\quad \left. \text{dutórios em que o número de fatores da forma } (s-\alpha+\delta_i) \text{ é} \right. \\
 &\quad \left. \text{maior do que } \sigma-j \right] \Big|_{s=\alpha} \\
 &= \frac{1}{j!} \left[g_0(\alpha) u_0(\alpha) \sum_{\binom{\sigma}{\sigma-j}} \prod_{\sigma-j} \delta_i + \dots \text{parcelas com produtó-} \right. \\
 &\quad \left. \text{rios em que o número de fatores } \delta_i \text{ é maior do que } \sigma-j \right] . \tag{4.3.6}
 \end{aligned}$$

(Nas expressões acima $\sum_{\binom{\sigma}{\sigma-j}} \prod_{\sigma-j}$ indica a soma de todos os produ-

tórios com $\sigma-j$ fatores; é claro que o número de tais produtórios é $\binom{\sigma}{\sigma-j}$).

Ora, da expressão geral dos resíduos (ver (4.3.1)) vem:

$$\begin{aligned} \theta_{\sigma-j-1} &= \frac{1}{(j+1)!} \frac{d^{j+1}}{ds^{j+1}} \left[g_0(s) u_0(s) \prod_{i=1}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) \right] \Big|_{s=\alpha} \\ &= \frac{1}{j+1} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} \left[g_0(s) u_0(s) \prod_{i=1}^{\sigma} (s-\alpha+\delta_i) \right] \right] \Big|_{s=\alpha} \\ &= \frac{1}{(j+1)!} \frac{d}{ds} \left[g_0(s) u_0(s) \sum_{\binom{\sigma}{\sigma-j}} \prod (s-\alpha+\delta_i) + \dots \text{parcelas} \right] \end{aligned}$$

com produtórios em que o número de fatores da forma $s-\alpha+\delta_i$ é maior do que $\sigma-j$ $\Big|_{s=\alpha}$

$$= \frac{1}{(j+1)!} \left[g_0(s) u_0(s) \sum_{\binom{\sigma}{\sigma-j-1}} \prod (s-\alpha+\delta_i) + \dots \text{parcelas} \right]$$

com produtórios em que o número de fatores da forma $s-\alpha+\delta_i$ maior do que $\sigma-j-1$ $\Big|_{s=\alpha}$

$$= \frac{1}{(j+1)!} \left[g_0(\alpha) u_0(\alpha) \sum_{\binom{\sigma}{\sigma-j-1}} \prod \delta_i + \dots \text{parcelas} \right]$$

com produtórios em que o número de fatores δ_i é maior do que $\sigma-j+1$ $\Big|_{s=\alpha}$. (4.3.7)

Como (4.3.6) é verdadeiro para $j = 1$ (ver (4.3.3)), a prova por indução matemática fica completa.

Comparando (4.3.6) e (4.3.7) vem:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \frac{\theta_{\sigma-j}}{\theta_{\sigma-j-1}} = 0 ; \quad j = \overline{0, \sigma-1} ; \quad i = \overline{1, \sigma} \quad (4.3.8)$$

E da expressão de $\theta_{\sigma^{-j}}$ (ver (4.3.6)) para $j = \sigma - 1$ vem:

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \theta_1 = 0 \quad . \quad (4.3.9)$$

Q.E.D.

Exemplo:

Desejamos bloquear o sinal senoidal

$$u(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$$

por meio de um sistema cuja função de transferência é

$$g(s) = \frac{s^2 + a^2}{(s + 1)^2}$$

Suponha-se que uma pequena perturbação nos parâmetros do sistema faça com que a sua função de transferência passe a ser:

$$g^1(s) = \frac{(s + ia + \delta_1)(s - ia + \delta_2)}{(s + 1)^2} \quad ;$$

sendo $i = \sqrt{-1}$

A resposta será:

$$y(s) = \frac{\theta_1}{s + ia} + \frac{\theta_2}{s - ia} \quad \text{7 . . . modos estáveis}$$

Efetuando, obtém-se para, os dois primeiros resíduos:

$$\theta_1 = \delta_1 \frac{(2ia - \delta_2)}{2ia(1 - ia)^2}$$

$$\theta_2 = \delta_2 \frac{(2ia + \delta_1)}{2ia(1 + ia)^2}$$

É fácil verificar também que δ_1 e δ_2 não podem ser indepen-

dentos, mas devem ser tais que

$\theta_1 + \theta_2$ é real

$\theta_2 - \theta_1$ é imaginário

\$\$\$

Observação 4.3.10

Do Lema (pg. 108) que acaba de ser demonstrado concluímos que os resíduos dos modos não cancelados serão 'pequenos' se a perturbação do sistema também for 'pequena'. Mais ainda, tratando-se de modos com grau-de multiplicidade maior do que 1, os resíduos tenderão a zero tanto mais rapidamente, quanto maior elevado o expoente. Assim, exemplificando, se os modos o^t , te^t , t^2e^t não forem cancelados, o resíduo do terceiro tenderá a zero mais rapidamente do que o do segundo, e este do que o do primeiro.

Observação 4.3.11

Suponha-se que a perturbação do sistema seja 'pequena'. Do Lema conclui-se que se os modos não bloqueados corresponderem a funções limitadas, eles aparecerão na resposta, mas com amplitude também pequena. Se pelo contrário os modos não bloqueados corresponderem a funções não-limitadas sua amplitude será 'pequena' somente durante um tempo finito e supondo que as condições iniciais sejam nulas (ou então que o regime transitório seja suficientemente rápido).

\$\$\$

Vamos agora aplicar o Lema 4.3.1 ao problema do servomecanismo,

Seja então:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: \quad \dot{x} &= Ax + Bu + Vw \\ y &= Cx + Du + Tw \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

cujas resposta desejamos que rastreie um sinal tal que:

$$r_i(s) = \frac{r_{io}(s)}{\phi(s)} \quad ; \quad i = \overline{1, q} \quad (4.3.12a)$$

sendo:

$$w_i(s) = \frac{w_{io}(s)}{\phi(s)} \quad ; \quad i = \overline{1, a} \quad (4.3.12b)$$

Para tal fim utilizamos o compensador do capítulo precedente e das secções pcedentes.

Suponha-se agora que a sub-matriz F_k tenha seus elementos perturbados, isto é:

$$|sI - F_k| = \phi'(s) \neq \phi(s) \quad ; \quad 1 \leq k \leq q$$

Seja $H(s)$ a matriz de transferência entre $e(s)$ e $\begin{bmatrix} r(s) \\ w(s) \end{bmatrix}$, isto é:

$$H(s) = \left\| h_{ij}(s) \right\| \quad ; \quad i = \overline{1, q} \quad ; \quad j = \overline{1, q+a}$$

Ora, sabemos que (ver a demonstração do teorema 4.2.4, pg. 105):

$$h_{ij}(s) = \frac{|N_{ij}(s)|}{|sI - \tilde{A}|} \quad ; \quad \phi(s) \left| |N_{ij}(s)| \right| \quad ; \quad \begin{matrix} i = \overline{1, q} \\ i \neq k \end{matrix} \quad ; \quad j = \overline{1, q+a}$$

$$h_{kj}^i(s) = \frac{|N_{kj}^i(s)|}{|sI - \tilde{A}|} \quad ; \quad \phi'(s) \left| |N_{kj}^i(s)| \right| \quad ; \quad j = \overline{1, q+a}$$

Então renumerando os índices, vem:

$$e_k(s) = \sum_{j=1}^q h'_{kj}(s) r_j(s) + \sum_{j=1}^a h'_{k,j+q}(s) w_j(s)$$

Definamos: $f_{kj}(s)$ tal que :

$$h'_{kj}(s) = \phi'(s) f_{kj}(s) \quad ; \quad j = \overline{1, q+a}$$

Então:

$$\begin{aligned} e_k(s) &= \sum_{j=1}^q \phi'(s) f_{kj}(s) \frac{r_{j_0}(s)}{\phi(s)} + \sum_{j=1}^a \phi'(s) f_{k,j+q}(s) \frac{w_{j_0}(s)}{\phi(s)} \\ &= \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \left[\sum_{j=1}^q f_{kj}(s) r_{j_0}(s) + \sum_{j=1}^a f_{k,j+q}(s) w_{j_0}(s) \right] \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Seja:

$$\phi(s) = \prod_{\ell=1}^p (s - \alpha_\ell) \quad ;$$

$$\phi'(s) = \prod_{\ell=1}^p (s - \alpha_\ell + \delta_\ell)$$

Suponha-se primeiramente que o grau de multiplicidade de todos os modos do sinal seja 1.

Então:

$$e_k(s) = \frac{\theta_1}{s - \alpha_1} + \frac{\theta_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{\theta_p}{s - \alpha_p} + \dots \text{modos estáveis correspondentes as raízes de } |sI - A|$$

Da expressão dos resíduos temos a expressão do ℓ -ésimo:

$$\theta_\ell = \frac{(\alpha_\ell - \alpha_1 + \delta_1) \dots \delta_\ell \dots (\alpha_\ell - \alpha_p + \delta_p)}{(\alpha_\ell - \alpha_1) \dots (\alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}) (\alpha_\ell - \alpha_{\ell+1}) \dots (\alpha_\ell - \alpha_p)} \left[\sum_{j=1}^q f_{kj}(\alpha_\ell) r_{j_0}(\alpha_\ell) + \sum_{j=1}^a f_{k,j+q}(\alpha_\ell) w_{j_0}(\alpha_\ell) \right]$$

$$\theta_\ell = \delta_\ell \cdot \frac{\prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \ell}}^p (\alpha_\ell - \alpha_\lambda + \delta_\lambda)}{\prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \ell}} (\alpha_\ell - \alpha_\lambda)} \left[\sum_{j=1}^q f_{kj}(\alpha_\ell) r_{jo}(\alpha_\ell) + \sum_{j=1}^a f_{k, j+q}(\alpha_\ell) w_{jo}(\alpha_\ell) \right] \quad (4.3.14)$$

Donde se vê que:

$$\lim_{\delta_\ell \rightarrow 0} \theta_\ell = 0 \quad ; \quad \ell = \overline{1, p} \quad (4.3.14a)$$

Suponha-se agora que uma das raízes de $\phi(s)$ tenha grau de multiplicidade σ , ou seja:

$$\phi(s) = (s - \alpha_1)^\sigma (s - \alpha_{\sigma+1}) \dots (s - \alpha_p)$$

Então:

$$\phi'(s) = (s - \alpha_1 + \delta_1)(s - \alpha_1 + \delta_2) \dots (s - \alpha_1 + \delta_\sigma)(s - \alpha_{\sigma+1} + \delta_{\sigma+1}) \dots (s - \alpha_p + \delta_p)$$

De (4.3.13) vem:

$$e_k(s) = \frac{\theta_1}{s - \alpha_1} + \frac{\theta_2}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{\theta_\sigma}{(s - \alpha_1)^\sigma} + \frac{\theta_{\sigma+1}}{s - \alpha_{\sigma+1}} + \dots + \frac{\theta_p}{s - \alpha_p} + \dots$$

... modos estáveis correspondentes às raízes de $|sI - \tilde{A}|$

Os σ primeiros resíduos são dados (de acordo com a expressão geral) por:

$$\theta_\ell = \frac{1}{(\sigma - \ell)!} \frac{d^{\sigma - \ell}}{ds^{\sigma - \ell}} \left[(s - \alpha_1)^\sigma \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \left[\sum_{j=1}^q f_{kj}(s) r_{jo}(s) + \sum_{j=1}^a f_{k, j+q}(s) w_{jo}(s) \right] \right]_{s = \alpha_1}$$

Ou seja:

$$\theta_\ell = \frac{1}{(\sigma-\ell)!} \frac{d^{\sigma-\ell}}{ds^{\sigma-\ell}} \left[\frac{\prod_{\lambda=1}^{\sigma} (s-\alpha_{1+\delta_\lambda})}{\prod_{\lambda=\sigma+1}^p (s-\alpha_\lambda)} \left[\sum_{j=1}^q f_{kj}(s) r_{j0}(s) + \sum_{j=1}^a f_{k,j+q}(s) w_{j0}(s) \right] \right] \Big|_{s=\alpha_1}$$

$$\ell = \overline{1, \sigma} \quad (4.3.15)$$

Utilizando o Lema 4.3.1, vem:

$$\lim_{\delta_\lambda \rightarrow 0} \frac{\theta_{\ell-1}}{\theta_\ell} = 0 \quad ; \quad \ell = \overline{1, \sigma} \quad ; \quad \lambda = \overline{1, p} \quad ; \quad \theta_0 = 1 \quad (4.3.16)$$

$$\lim_{\delta_\lambda \rightarrow 0} \theta_1 = 0 \quad ; \quad \lambda = \overline{1, p} \quad (4.3.17)$$

Isto permite formular o seguinte teorema, expresso numa linguagem não muito rigorosa, em benefício da concisão e simplicidade:

Teorema 4.3.18

Dado o sistema S o o compensador conectados de acordo com o teorema 4.2.1 e supondo que o sistema em malha fechada seja estável, se os elementos da sub-matriz Fk forem perturbados, aparecerão modos do sinal r(t) o do ruído w(t) na k-ésima componente do erro entre o sinal a a resposta de S. Os resíduos destes modos, entretanto, serão 'pequenos' se as perturbações das raízes do $|sI - F_k|$ também o forem. Se algum modo não bloqueado tiver grau de multiplicidade maior do que 1. os resíduos correspondentes às diversas potências do modo tenderão a zero

tanto mais rapidamente quanto mais altos os respectivos expoentes.

§§§

Observação 4.3.19

Se a perturbação de F_k for 'pequena' e os modos não bloqueados forem funções limitadas, o erro entre o sinal e a resposta de S terá amplitude pequena em regime permanente

Observação 4.3.20

Se os modos não bloqueados forem não limitados, as respectivas amplitudes só serão 'pequenas' durante um intervalo finito de tempo e supondo que o regime transitório seja suficientemente rápido (mediante escolha apropriada de K e K_0 , caso sejam satisfeitas as condições para R controlabilidade do sistema em malha fechada: ver o teorema 4.2.1, pg. 103)

Observação 4.3.21

É de todo conveniente um regime transitório arbitrariamente rápido (o que implica a controlabilidade do sistema em malha fechada), mesmo quando o sinal a ser rastreado é limitado: só assim teremos um bom rastreamento quando o sinal (e/ou ruído) é sujeito a pequenas oscilações.

Observação 4.3.22

É digno de nota o fato que se a Única sub-matriz perturbada for F_k , os modos não bloqueados só aparecerão na k -ésima componente do erro,

5. NECESSIDADE DO 'MODELO INTERNO' E DA REALIMENTAÇÃO DO ERRO

5.1 Introdução

Vimos nos dois capítulos anteriores que a estrutura de compensação utilizada é bastante robusta, só não havendo rastreamento em regime permanente com erro nulo quando as sub-matrizes F_i ($i = \overline{1, q}$) são perturbadas,

Como vimos também, a estrutura de compensação utilizada consistiu numa generalização do modelo clássico: realimentação do erro e utilização de um compensador cuja função de transferência tem o mesmo 'formato' do sinal a ser rastreado,

Ora, é claro que a estrutura de compensação estudada nos dois capítulos precedentes não é a Única possível. Cabe portanto a pergunta. a estrutura de compensação estudada neste trabalho (proposta e estudada pela primeira vez por Davison) é a melhor?

Comparando-a com outras soluções para o problema do servomecanismo apresentadas até o presente momento (como por exemplo as soluções de Bhattacharyya e Pearson (28) e Bhattacharyya (57)), a resposta é afirmativa, graças à sua 'robustez'.

Mas esta pergunta pode ser posta de forma mais constringente: é possível obter uma estrutura de compensação melhor? Ou de outra forma (uma vez que o conceito 'melhor' é um pouco vago): é necessário utilizar a realimentação do erro e um compensador com o mesmo 'formato' do sinal para se obter 'robustez'?

No 3º capítulo vimos argumentos **suasórios** a favor da estrutura de **compensação** empregada. Assim por exemplo (ver pg. 85) vimos que utilizando a realimentação do erro, é **necessário** que F seja tal que $\phi^q(s) \propto |sI-F|$ se quisermos que o rastreamento seja robusto com relação a **perturbações** em A, B, K_0 .

Não se conseguiu, entretanto, uma **demonstração** rigorosa da necessidade da **realimentação** do erro e de um **compensador**, com o **'formato'** empregado utilizado - se o **método** do espaço de estado no **domínio** da frequência.

Neste capítulo apresentamos a solução deste problema proposta recentemente por Francis e Wonham (53); estes autores demonstraram, utilizando o chamado **'método geométrico'**, que para que o rastreamento seja robusto com relação a **perturbações** em alguns dos **parâmetros** da estrutura de **compensação**, é **necessário** realimentar o erro o utilizar um compensador com um **'modelo interno'** (cujo sentido preciso veremos mais adiante) do sinal,

5.2 Notação e conceitos fundamentais

Como o **método matemático** utilizado e a maneira da **colocar** o problema do servomecanismo **são** diferentes do restante deste trabalho (4 **capítulos** anteriores e **Apêndice**), seguiremos, com poucas **alterações**, a notação de (53).

As primeiras letras do alfabeto, em maiúscula, **com** ou sem **índice**, indicarão operadores lineares ou suas respectivas matrizes: A, A_1 , B, C_1 , etc...

As últimas letras do alfabeto, em maiúsculas, com ou sem índices, indicarão espaços vetoriais $X, X_1, Y, Z, \text{etc.}\dots$

As últimas letras do alfabeto, em minúsculas, com ou sem índices, indicarão vetores: $x, x_0, u, \text{etc.}\dots$

⊕ indicará soma direta de espaços vetoriais

$\sigma(A)$ indicará o espectro de A , isto é, o conjunto das raízes (enumeradas segundo os seus graus do multiplicidade) do polinômio característico de R .

$\text{Im } B$ ou \mathcal{B} indicarão a imagem do operador B .

$\text{Nuc } B$ indicará o espaço nulo de B .

$\langle A | \mathcal{B} \rangle$ indicará o espaço controlável do par (A, B) , ou seja:

$$\langle A | \mathcal{B} \rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \dots + A^{n-1}\mathcal{B}$$

$d(X)$ indicará a dimensão do espaço X .

$B|V$ indicará a restrição do operador B ao espaço V . Assim por exemplo se $B: U \rightarrow X, V \subset U$, então $B|V: V \rightarrow X$

\approx indicará isomorfismo de dois espaços

$\text{Esp } \{x, y, z\}$ indicará o espaço expandido pelos vetores x, y, z .

§§§

Seja então:

$$S: \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_3 x_2 + B_1 u, \tag{5.2.1}$$

sendo x_1 o estado de S , u o controle e x_2 tal que:

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 \tag{5.2.2}$$

$A_3 x_2$ é portanto o ruído na equação de estado de S .

Deseja-se regular?

$$z = D_1 x_1 + D_2 x_2 \tag{5.2.3}$$

Dispõe-se para medida direta de:

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (5.2.4)$$

(Podemos considerar z como o erro que se deseja regular em regime permanente e $D_1 x_1$ como a resposta que deve rastrear o sinal $-D_2 x_2$)

Seja o compensador:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \quad (5.2.5a)$$

$$u = F_c x_c + Fy \quad , \quad (5.2.5b)$$

sendo x_c o vetor de estado do compensador.

Os vetores x_1, x_2, u, z, y, x_c pertencem aos espaços vetoriais

$$X_1, X_2, U, Z, Y, X_c \quad (5.2.6)$$

de dimensões n_1, n_2, m, q, p, n_c respectivamente

Os operadores de (5.2.1)-(5.2.5) são supostos invariantes no tempo.

Definamos o espaço de estado do sistema em malha fechada:

$$X_L = X_1 \oplus X_c \quad (5.2.7a)$$

Então:

$$x_L = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \end{bmatrix} \in X_L \quad (5.2.7b)$$

Combinando (5.2.1), (5.2.4) e (5.2.5) vem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 & B_1 F C_2 \\ B_1 F C_2 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 + B_1 F C_2 \\ B_2 C_2 \end{bmatrix} x_2 \quad (5.2.8)$$

Definamos:

$$A_L = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F C_1 & B_1 F c \\ B_c C_1 & A_c \end{bmatrix}, \quad B_L = \begin{bmatrix} A_3 + B_1 F C_2 \\ B_c C_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

Definamos ainda $D_L : X_L \rightarrow Z$ tal que:

$$D_L = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.10)$$

Donde:

$$z = D_L x_L + D_2 x_2 \quad (5.2.11)$$

Podemos supor sem perda de generalidade que:

$$\sigma(A_2) \subset \mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq 0\}, \quad (5.2.12)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \text{ é sobrejetor.} \quad (5.2.13a)$$

ou equivalentemente:

$$\text{Im} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = Y, \quad (5.2.13b)$$

$$D_1 \text{ é sobrejetor} \quad (5.2.14a)$$

ou equivalentemente:

$$\text{Im } D_1 = Z \quad (5.2.14b)$$

Observe-se que não pode haver regulação de z a não ser que:

$$\text{Im } D_2 \subset \text{Im } D_1$$

Diremos que " $z(t)$ é legível a partir de $y(t)$ " se todas as informações de $z(t)$ estiverem em $y(t)$, ou mais formalmente:

Definição 5.2.15

z é legível a partir de y se existir um operador $Q : Y \rightarrow Z$

tal que $z = Qy$

É fácil provar que isto é equivalente a:

$$\text{Nuc} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \subset \text{Nuc} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.15a)$$

Com efeito:

Suponha-se que (5.2.15a) não seja satisfeito. Então $\exists \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\implies \nexists Q : \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Mas:

$$\exists Q : z = Qy \iff \exists Q : \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\text{Nuc} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \not\subset \text{Nuc} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} \implies \nexists Q : z = Qy$$

Inversamente, suponha-se que exista Q tal que $z = Qy$

Seja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Nuc} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \quad \because y = 0 \quad \because z = 0 \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Nuc} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies \text{Nuc} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \subset \text{Nuc} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix},$$

completando a prova.

Se (5.2.15a) for satisfeito, diremos que o par

$$\left(\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix} \right) \text{ é legível} \quad (5.2.15b)$$

Escolhamos uma base para Y tal que

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}, \quad (5.2.17)$$

o que permite fazer

$$Y = W \oplus Z \quad (5.2.17a)$$

Sejam:

$$F_W = F|W, F_Z = F|Z, B_{CW} = B_C|W, B_{CZ} = B_C|Z$$

Podemos fazer então:

$$F = \begin{bmatrix} F_W & F_Z \end{bmatrix}, B_C = \begin{bmatrix} B_{CW} & B_{CZ} \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

(5.2.17)-(5.2.18) são verdadeiros se z for legível a partir de y. O conceito de legibilidade será importante no desenvolvimento deste capítulo. Veremos que a regulação de z em regime permanente será robusta quando alguns parâmetros são perturbados somente se z for legível a partir de y. Mais ainda, z será suposto legível a partir de y na demonstração da necessidade do 'modelo interno' e da realimentação do erro,

§§§

O conceito mais importante na demonstração de Francis e Wonham é o seguinte:

Definição 5.2.18a

Seja $A : X \rightarrow X$. Dizemos que A incorpora um modelo interno de A_2 se o polinômio mínimo de A_2 dividir pelo menos $q = d(Z)$ polinômios invariantes de A

Exemplo:

Suponha-se que o polinômio mínimo de A_2 seja $(s-a)(s-b)$ e $q = d(Z) = 2$. Seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & & \\ & & & b & \\ & & & & b & 1 \\ & & & & & & b \end{bmatrix}$$

É fácil ver que os polinômios invariantes de A são:

$$p_1(s) = (s-a)(s-b) \quad , \quad p_2(s) = (s-a)^2(s-b)^2$$

Donde se conclui que A incorpora um modelo interno de A_2 .

Vejamos uma Outra maneira de caracterizar a incorporação de um modelo interno:

Seja A na forma de Jordan e X decomposto convenientemente (isto é, segundo os diversos blocos de Jordan), ou seja:

$$X = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \bigoplus_{i=1, t(\lambda)} X_{\lambda}^i \quad , \quad (5.2.18b)$$

onde $t(\lambda)$ é o número de blocos de Jordan correspondentes a λ , enquanto que X_{λ}^i são os sub-espacos primos correspondentes a λ . (5.2.18c)

Seja $k(\lambda)$ o grau do fator $(s-\lambda)$ no polinômio mínimo de A_2 , $\lambda \in \sigma(A_2)$.

Então:

A incorpora um modelo interno de A_2 se e somente se para cada $\lambda \in \sigma(A_2)$ houver sub-espacos primos independentes X_{λ}^i , tais que $d(X_{\lambda}^i) \geq k(\lambda) \quad i = \overline{1, q}$ (5.2.18d)

No exemplo acima $k(a) = 1$, $k(b) = 1$, $d(X_a^1) = 1$, $d(X_a^2) = 2$, $d(X_b^1) = 1$, $d(X_b^2) = 2$. E portanto concluímos mais uma vez que

A incorpora um modelo interno de A_2 .

§§§

Seja $A : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$, $C : X \rightarrow Y$

Então:

$$(A,B) \text{ controlável} \iff X = \text{Im} (A-\lambda I) + \text{Im} B \quad , \quad \lambda \in \sigma(A) \quad (5.2.18e)$$

$$(C,A) \text{ observável} \iff \text{Nuc} C \cap \text{Nuc} (A-\lambda I) = 0 \quad , \quad \lambda \in \sigma(A)$$

A demonstraçãõ do segundo resultado acima pode ser encontrada em (44), pg. 196 , enquanto que a prova do primeiro é por dualidade. Estes dois resultados também podem ser deduzidos a partir de (1.3.3) e (1.3.4): com efeito, a 1ª igualdade de (5.2.18e) é equivalente ao fato que todas as linhas de $[sI-A \quad B]$ são l.i.

Qse \mathbb{C} , enquanto que a 2ª é equivalente ao fato que todas as colunas de $\begin{bmatrix} sI-A \\ -C \end{bmatrix}$ são l.i. $\forall s \in \mathbb{C}$.

Seja $R_c \subset X_c$, (5.2.18f)

sendo R_c invariante com relação a A_c

Seja $P_c : X_c \rightarrow \bar{X}_c$ (5.2.18g)

a projeção canônica (ver (44) pg. 9)

Seja $\bar{A}_c : \bar{X}_c \rightarrow \bar{X}_c$ o operador induzido por A_c em \bar{X}_c , isto é

$$\bar{A}_c P_c = P_c A_c \tag{5.2.18h}$$

Então:

Definição 5.2.18i

Diremos que o compensador incorpora um modelo interno de A_2 se R_c existir (ver (5.2.18f)) e tal que \bar{A}_c ~~e tal que \bar{A}_c~~ incorpore um modelo interno de A_2 no sentido da Definição 5.2.18a.

Definição 5.2.18j

Suponha-se que o compensador incorpore um modelo interno de A_2 e que além disso:

$$\text{Nuc } F_c \cap \text{Nuc } (A_c - \lambda I) = 0 \quad \lambda \in \sigma(A_2).$$

Diremos então que o modelo interno é observável por u .

(Ou seja, tendo em vista (5.2.18e), os A_2 -modos de A_c são observáveis por F_c)

Definição 5.2.18k

Suponha-se que o compensador incorpore um modelo interno de A_2 , z seja legível a partir de y e que além disso

$$\text{Im } B_{cw} \subset R_c$$

$$\bar{X}_c = \text{Im } (\bar{A}_c - \lambda I) + \text{Im } \bar{B}_{cz} \quad , \quad \lambda \in \sigma(A_2)$$

$$\text{sendo } \bar{B}_{cz} = P_c B_{cz} \quad .$$

Diremos então que o modelo interno é controlável por z (Tendo em vista (5.2.18e) isto é equivalente ao fato de os A_2 -modos de \bar{A}_c serem controláveis por \bar{B}_{cz})

§§§

Para compreendermos melhor a incorporação de um modelo interno por um compensador decomponhamos:

$$X_c = R_c \oplus X_{c2}$$

Escolhida uma base conveniente, pode-se mostrar que (ver (44), pg. 12):

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{c1} & A_{c3} \\ 0 & \bar{A}_c \end{bmatrix} \quad , \quad B_{cw} = \begin{bmatrix} B_{cw1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{cz} = \begin{bmatrix} B_{cz1} \\ \bar{B}_{cz} \end{bmatrix}$$

$$F_c = \begin{bmatrix} F_{c1} & F_{c2} \end{bmatrix}$$

Se o compensador incorporar um modelo interno de A_2 então, por definição, como vimos, o polinômio mínimo de A_2 deve dividir pelo menos q polinômios invariantes de \bar{A}_c . Isto não significa necessariamente, porém, que o polinômio mínimo de A_2 deva dividir pelo menos q polinômios invariantes de A_c como pode ser visto no seguinte exemplo:

Exemplo:

Seja $A_2 = 1$, $q = 2$

$$A_{c1} = 3 , \quad A_{c3} = 0 , \quad \bar{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os polinômios invariantes de \tilde{A}_e são:

$$\bar{p}_1(s) = \bar{p}_2(s) = s-1$$

Portanto o compensador incorpora um modelo interno de A_2 (pois \bar{A}_c incorpora um modelo interno de A_2). Entretanto, os polinômios invariantes de A_c são:

$$p_1(s) = p_2(s) = 1 , \quad p_3(s) = (s-1)^2(s-3)$$

(Donde se vê que neste caso A_c não incorpora um modelo interno de A_2).

Observe-se porém que teremos sempre:

$$|sI-A_c| = |sI-A_{c1}| \cdot |sI-\bar{A}_c|$$

Por conseguinte, se o compensador incorporar um modelo interno de A_2 , o polinômio mínimo de A_2 dividirá pelo menos q vezes o polinômio característico de A_c .

5.3 Solução do problema

A demonstração da necessidade da realimentação do erro e da incorporação de um modelo interno pelo compensador é feita do seguinte modo:

Lema 1

Suponha-se que o sistema em malha fechada seja estável. Então a regulação do erro e é equivalente à existência de um operador

$G : X_2 \rightarrow X_L$ tal que:

$$A_L G - G A_2 = B_L \quad (5.3.1)$$

$$D_L G = D_2, \quad (5.3.2)$$

sendo A_L , B_L e D_L dados por (5.2.9) e (5.2.10)

Demonstração:

Sendo A_L estável, vem:

$$\sigma(A_L) \cap \sigma(A_2) = \emptyset \quad (\text{conjunto vazio})$$

Consequentemente (ver (2), I, pg. 225), (5.3.1) define G de forma única: ou por outras palavras, a solução da equação matricial (5.3.1) em G é única porque A_L e A_2 não têm nenhum autovalor em comum.

Por outro lado, de (5.2.7)-(5.2.11), vem:

$$\dot{x}_L = A_L x_L + B_L x_2$$

$$z = D_L x_L + D_2 x_2$$

Definamos:

$$X_S = X_L \oplus X_2$$

$$A_S = \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad D_S = \begin{bmatrix} D_L & D_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.2a)$$

$$\dot{x}_S = A_S x_S$$

$$z = D_S x_S$$

Seja $X_S^+(A_S)$ o sub-espaço instável de X_S relativo a A_S

A regulação da resposta é então equivalente a:

$$X_S^+(A_S) \subset \text{Nuc } D_S \quad (5.3.3)$$

Definamos $Q : X_S \rightarrow X_S$ tal que

$$Q = \begin{bmatrix} I_L & -R \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} I_L & R \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} A_S Q = \begin{bmatrix} A_L & -A_L G + G A_2 + B_L \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Substituindo (5.3.1), vem:

$$Q^{-1} A_S Q = \begin{bmatrix} A_L & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$X_S^+(A_S) = Q \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{bmatrix} -R \\ I_2 \end{bmatrix}$$

E de (5.3.2a):

$$-D_L R + D_2 = 0$$

Q. E. D.

Proposição 1

Seja $\lambda \in \sigma(A_2)$ e seja $X_{2\lambda}$ um sub-espço primo de X_2 correspondente a λ . Façamos $k = d(X_{2\lambda})$ e definamos o sub-espço T

$T \subset X_1 \oplus X_c$ da seguinte forma:

$$T = \left\{ (x_1, x_c) : B_c C_1 x_1 + (A_c - \lambda I) x_c = 0, x_1 \in \text{Nuc } D_1, x_c \in \langle A_c | B_c C_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im} (A_c - \lambda I)^{k-1} \right\} \quad (5.3.4)$$

Então o erro z é regulado mesmo quando A_3 é perturbado (no sentido da Observação abaixo) somente se $d(T) \geq n_1$.

Observação 5.3.4a:

Na Proposição acima a perturbação de A_3 deve ser tal que

$$\text{Esp} \{ \delta a_{3,1} \} = X_1 ,$$

sendo $\delta a_{3,1}$ a perturbação da 1ª coluna (escolhida uma base conveniente) do $A_3|_{X_{2\lambda}}$.

Demonstração da Proposição 1:

Seja:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_c \end{bmatrix} : X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_c$$

Substituindo (5.2.9) e (5.2.10) em (5.3.1) e (5.3.2) vem:

$$(A_1 + B_1 F C_1) G_1 - G_1 A_2 + B_1 F_c G_c = A_3 + B_1 F C_2 \quad (5.3.5a)$$

$$B_c C_1 G_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_c C_2 \quad (5.3.5b)$$

$$D_1 G_1 = D_2 \quad (5.3.5c)$$

Sejam $A_{2\lambda}$, $A_{3\lambda}$, $C_{2\lambda}$, $D_{2\lambda}$, $G_{1\lambda}$, $G_{c\lambda}$ as restrições de A_2 , A_3 , C_2 , D_2 , G_1 , G_c ao sub-espaço $X_{2\lambda}$. Das tres igualdades acima vem:

$$(A_1 + B_1 F C_1) G_{1\lambda} - G_{1\lambda} A_{2\lambda} + B_1 F_c G_{c\lambda} = A_{3\lambda} + B_1 F C_{2\lambda} \quad (5.3.6a)$$

$$B_c C_1 G_{1\lambda} + A_c G_{c\lambda} - G_{c\lambda} A_{2\lambda} = B_c C_{2\lambda} \quad (5.3.6b)$$

$$D_1 G_{1\lambda} = D_{2\lambda} \quad (5.3.6c)$$

Escolhamos uma base para $X_{2\lambda}$ tal que $A_{2\lambda}$ seja representado por um bloco de Jordan de ordem $k = d(X_{2\lambda})$. Seja nesta base:

$$G_{1\lambda} = [g_{11} \ \dots \ g_{1k}] \ , \quad G_{c\lambda} = [g_{c1} \ \dots \ g_{ck}]$$

$$A_{3\lambda} = [a_{31} \ \dots \ a_{3k}] \ , \quad C_{2\lambda} = [c_{21} \ \dots \ c_{2k}]$$

$$D_{2\lambda} = [d_{21} \ \dots \ d_{2k}]$$

E por hipótese:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Então:

$$G_{1\lambda} A_{2\lambda} = [\lambda g_{11} \quad g_{11} + \lambda g_{12} \ \dots \ g_{1,k-1} + \lambda g_{1k}]$$

Igualando coluna por coluna as k colunas de (5.3.6a) vem:

$$(A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I) g_{11} + B_1 F_0 g_{c1} = a_{31} + B_1 F c_{21}$$

$$-g_{11} + (A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I) g_{12} + B_1 F_0 g_{c2} = a_{32} + B_1 F c_{22}$$

\(\cdot\)
\(\cdot\)
\(\cdot\)

(5.3.7)

$$-g_{1,k-1} + (A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I) g_{1k} + B_1 F_0 g_{ck} = a_{3k} + B_1 F c_{2k}$$

Fazendo o mesmo com as k colunas de (5.3.6b) vem:

$$B_c C_1 g_{11} + (A_c - \lambda I) g_{c1} = B_c c_{21}$$

$$B_c C_1 g_{12} - g_{c1} + (A_c - \lambda I) g_{c2} = B_c c_{22}$$

\(\cdot\)
\(\cdot\)

(5.3.8)

⋮

$$B_c C_1 g_{1k} - g_{c,k-1} + (A_c - \lambda I) g_{ck} = B_c c_{2k}$$

De (5.3.6c) vem:

$$D_1 g_{1i} = d_{2i} \quad , \quad i = \overline{1, k} \quad (5.3.9)$$

Perturbemos A_3 . Então, de acordo com o Lema 1, para todo \hat{a}_{31} em alguma vizinhança de a_{31} existe $\hat{g}_{1i} \in X_1$ e $\hat{g}_{ci} \in X_c$, $i = \overline{1, k}$, tais que as igualdades acima (5.3.7)-(5.3.9) continuam valendo e em particular:

$$(A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I) \hat{g}_{11} + B_1 F c_{c1} = \hat{a}_{31} + B_1 F c_{21}$$

$$B_c C_1 \hat{g}_{11} + (A_c - \lambda I) \hat{g}_{c1} = B_c c_{21}$$

$$B_c C_1 \hat{g}_{12} - \hat{g}_{c1} + (A_c - \lambda I) \hat{g}_{c2} = B_c c_{22}$$

(5.3.9a)

⋮

$$B_c C_1 \hat{g}_{1k} - \hat{g}_{c,k-1} + (A_c - \lambda I) \hat{g}_{ck} = B_c c_{2k}$$

$$D_1 \hat{g}_{1i} = d_{2i} \quad , \quad i = \overline{1, k}$$

Seja $\delta a_{31} = \hat{a}_{31} - a_{31}$, $\delta g_{1i} = \hat{g}_{1i} - g_{1i}$, $\delta g_{ci} = \hat{g}_{ci} - g_{ci}$.

Então, subtraindo membro a membro cada igualdade de (5.3.9a) da respectiva igualdade do (5.3.7), (5.3.8) e (5.3.9) vemos que para todo a_{31} em alguma vizinhança da origem do espaço \mathbb{R}^{n_1} existem $\delta g_{1i} \in X_1$ e $\delta g_{ci} \in X_c$ tais que:

$$(A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I) \delta g_{11} + B_1 F \delta g_{c1} = \delta a_{31} \quad (5.3.9b)$$

$$B_c C_1 \delta g_{11} + (A_c - \lambda I) \delta g_{c1} = 0 \quad (5.3.9c)$$

$$\begin{aligned} B_c C_1 \delta g_{12} + (A_c - \lambda I) \delta g_{c2} &= \delta g_{c1} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{aligned} \quad (5.3.9d)$$

$$B_c C_1 \delta g_{1k} + (A_c - \lambda I) \delta g_{ck} = \delta g_{c,k-1} \quad (5.3.9e)$$

$$D_1 \delta g_{1i} = 0 \quad , \quad i = \overline{1, k}$$

De (5.3.9d) vem:

$$\begin{aligned} \delta g_{c1} &= B_c C_1 \delta g_{12} + (A_c - \lambda I) \{ B_c C_1 \delta g_{13} + (A_c - \lambda I) \delta g_{c3} \} \\ &= B_c C_1 \delta g_{12} + (A_c - \lambda I) B_c C_1 \delta g_{13} + (A_c - \lambda I)^2 \{ B_c C_1 \delta g_{14} + \\ &\quad (A_c - \lambda I) \delta g_{c4} \} \\ &= \dots = \\ &= B_c C_1 \delta g_{12} + (A_c - \lambda I) B_c C_1 \delta g_{13} + \dots + (A_c - \lambda I)^{k-2} B_c C_1 \delta g_{1k} \\ &\quad + (A_c - \lambda I)^{k-1} \delta g_{ck} \end{aligned}$$

E tendo em vista (5.3.9e) vem:

$$\begin{aligned} \delta g_{c1} &\in \langle (A_c - \lambda I) | B_c C_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im } (A_c - \lambda I)^{k-1} \\ &= \langle A_c | B_c C_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im } (A_c - \lambda I)^{k-1} \end{aligned} \quad (5.3.9f)$$

De (5.3.9c), (5.3.9e) e (5.3.9f) vemos que:

$$(\delta g_{11}, \delta g_{c1}) \in T \quad (\text{ver } (5.3.4))$$

Ora:

$$\text{Esp} \{ \delta a_{31} \} = X_1$$

De (5.3.9b) vem então:

$$X_1 = [A_1 + B_1 F C_1 - \lambda I \quad B_1 F_0] T$$

$$\implies d(T) \gg n_1$$

Q. E. D.

Proposição 2:

O erro z é regulado mesmo quando A_3 é perturbado (no sentido da Proposição 1) somente se o par (C_1, D_1) for legível.

Demonstração:

Seja $\lambda \in \Gamma(A_2)$ e $X_{2\lambda}$ um sub-espaço primo de X_2 correspondente a λ . É claro que T definido em (5.3.4) está contido em:

$$\text{Nuc} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, da Proposição 1, a regulação de z quando A_3 é perturbado implica:

$$d \left(\text{Nuc} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \geq n_1$$

Ou seja:

$$d \left(\text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \leq n_c \quad (5.3.10)$$

Ora, a estabilidade do sistema em malha fechada implica que $A_L - \lambda I$ tem inversa. Isto, por sua vez, implica (de (5.2.9)):

$$\begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} : X_1 \oplus X_c \rightarrow X_c \quad \text{é sobrejetor.}$$

Ou seja:

$$d \left(\text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} \right) = n_c \quad (5.3.11)$$

E portanto, de (5.3.10):

$$d \left(\text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \right) = n_c \quad (5.3.11a)$$

Donde (ver (44), pg. 8):

$$\text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \approx \text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} \quad (5.3.11b)$$

Vamos demonstrar agora que (5.3.11b) implicar

$$\text{Nuc} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} \subset \text{Nuc} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.11c)$$

Suponha-se que (5.3.11c) não seja satisfeito. Então

$$\exists x \in \text{Nuc} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix}, \quad x \notin \text{Nuc} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.11d)$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} x = 0, \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{sendo } z \neq 0$$

Seja agora H bijetor tal que:

$$H : \text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_c \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_c \end{bmatrix}$$

seja $x \in X_1 \oplus X_c$ e satisfazendo a (5.3.11d). Então:

$$0 = H \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad z \neq 0$$

$$\implies H \text{ não é injetor} \implies H \text{ não é bijetor}$$

$$\iff \text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \end{bmatrix} \not\subset \text{Im} \begin{bmatrix} B_c C_1 & A_c - \lambda I \\ D_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{em contradição}$$

com (5.3.11b).

Por outro lado é fácil verificar que (5.3.11c) implica

$$\text{Nuc } C_1 \subset \text{Nuc } D_1$$

Q. E. D.

Lema 2

Sejam $R : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$, $k \geq 1$, k inteiro.

Definamos o sub-espaço $V \subset U \oplus X$ do seguinte modo:

$$V = \{(u, x) : Bu + Ax = 0, x \in \langle A|B \rangle + \text{Im } A^{k-1}\}$$

(a) Seja \tilde{A} o operador induzido por A no espaço (resultante da projeção canônica) $X/\langle A|B \rangle$. Então:

$$d(V) \leq d(U) + d(\text{Nuc } \tilde{A} \cap \text{Im } \tilde{A}^{k-1}) \quad (5.3.12)$$

(b) Se $1 \leq l \leq k$ e

$$\text{Im } A^{l-1} \subset \langle A|B \rangle + \text{Im } A^l, \quad (5.3.13)$$

então:

$$d(V) \leq d(U) \quad (5.3.14)$$

Demonstração: ver (53)

§§§

Teorema 1 :

O erro z é regulado mesmo quando A_3 e $B_c|z$ são perturbados somente se o par $([C_1 \ C_2], [D_1 \ D_2])$ for legível.

Demonstração:

Vimos na Proposição 2 que o erro r é regulado mesmo quando A_3 é perturbado somente se o par (C_1, D_1) for legível. Suponhamos que esta condição necessária seja satisfeita. Então, como vimos, podemos fazer

$$C_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \quad (5.3.22)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} E_2 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix}, \quad B_c = [B_{c1} \quad B_{c2}] \quad (5.3.23)$$

sendo $B_{c2} = B_c | Z$

Para demonstrar o teorema, bastará provar que :

$$\tilde{D}_2 = D_2$$

Suponha-se (prova por contradição) que:

$$\tilde{D}_2 \neq D_2 \quad (5.3.24)$$

Do Lema 1 , a regulação de z em presença de perturbações em A_2 e B_{c2} implica que, mesmo quando B_{c2} é perturbado, existe G tal que:

$$A_L G - G A_2 = B_L$$

$$D_L G = D_2$$

Fazendo $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_c \end{bmatrix}$ e tendo em vista (5.2.9) e (5.2.10), vem:

$$B_c C_1 G_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_c C_2 \quad (5.3.25a)$$

$$D_1 G_1 = D_2 \quad (5.3.25b)$$

Decomponhamos X_1 :

$$X_1 = \text{Nuc } D_1 \oplus X_{11}, \quad (5.3.26)$$

sendo X_{11} um complemento ortogonal de $\text{Nuc } D_1$ em X_1 .

Sendo D_1 sobrejetor, tem um inverso à direita, isto é:

$$\exists D_1^\dagger : D_1 D_1^\dagger = I, \quad (5.3.26a)$$

onde I_Z é o operador identidade em Z .

Temos ainda:

$$D_1^+ : Z \rightarrow X_1, \quad \text{Im } D_1^+ = X_{11}$$

$$\text{Seja } a_1 = \hat{G}_1 + D_1^+ D_2 \quad (5.3.26b)$$

De (5.3.25b) vem:

$$D_1 \hat{G}_1 + D_1 D_1^+ D_2 = D_2 \iff \text{Im } \hat{G}_1 \subset \text{Nuc } D_1 \quad (5.3.26c)$$

De (5.3.26b) temos:

$$B_c C_1 \hat{G}_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_c (C_2 - C_1 D_1^+ D_2) \quad (5.3.27)$$

Substituindo (5.3.22) e (5.3.23) acima, vem:

$$\begin{bmatrix} B_{c1} & B_{c2} \\ & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \hat{G}_1 + A_c G_c - G_c A_2 = \begin{bmatrix} B_{c1} & B_{c2} \\ & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{c1} & B_{c2} \\ & D_1 \end{bmatrix} D_1^+ D_2$$

$$B_{c1} E_1 \hat{G}_1 + B_{c2} D_1 \hat{G}_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_{c1} E_2 + B_{c2} \tilde{D}_2 - B_{c1} E_1 D_1^+ D_2 - B_{c2} D_1 D_1^+ D_2$$

Tendo em vista (5.3.26c) e (5.3.26a), vem:

$$B_{c1} E_1 \hat{G}_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_{c1} (E_2 - E_1 D_1^+ D_2) + B_{c2} (\tilde{D}_2 - D_2) \quad (5.3.28)$$

Suponha-se que B_{c2} seja perturbado e que ao invés de B_{c2} tenhamos $B_{c2} + \delta B_{c2}$. Para que o sistema em malha fechada permaneça estável é necessário que (5.3.28) tenha uma solução única

$$\hat{G}_1 + \delta \hat{G}_1, \quad G_c + \delta G_c.$$

Ou ainda, da última igualdade, $\delta \hat{G}_1, \delta G_c$ deve ser a solução de

$$B_{c1} E_1 (\delta \hat{G}_1) + A_c (\delta G_c) - (\delta G_c) A_2 = (\delta B_{c2}) (\tilde{D}_2 - D_2), \quad (5.3.29)$$

sendo $\text{Im}(\delta \tilde{G}_1) \subset \text{Nuc } D_1$

De (5.3.24) temos que existe algum sub-espaço primo $X_{2\lambda}$ correspondente a λ tal que:

$$\tilde{D}_2|_{X_{2\lambda}} \neq D_2|_{X_{2\lambda}}$$

Seja $k = d(X_{2\lambda})$

Escolhamos uma base para $X_{2\lambda}$ tal que a representação de $A_2|_{X_{2\lambda}}$ seja um bloco de Jordan. Sejam nesta base:

$$\delta \tilde{G}_1|_{X_{2\lambda}} = [g_{11} \cdot \cdot \cdot g_{1k}]$$

$$\delta G_c|_{X_{2\lambda}} = [g_{c1} \cdot \cdot \cdot g_{ck}]$$

(g_{1i} e g_{ci} são colunas)

Restringindo (5.3.29) a $X_{2\lambda}$ vem:

$$B_{c1} E_1 [g_{11} \cdot \cdot \cdot g_{1k}] + A_c [g_{c1} \cdot \cdot \cdot g_{ck}] - [g_{c1} \cdot \cdot \cdot g_{ck}] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix} = (\delta B_{c2}) (\tilde{D}_2 - D_2)|_{X_{2\lambda}} \quad (5.3.30a)$$

Suponha-se que a primeira coluna diferente de zero do $(\tilde{D}_2 - D_2)|_{X_{2\lambda}}$

seja a ℓ -ésima ($1 \leq \ell \leq k$), Igualando coluna por coluna em

(5.3.30a) vem:

$$B_{c1} E_1 g_{11} + (A_c - \lambda I) g_{c1} = 0$$

$$B_{c1} E_1 g_{12} - g_{c1} + (A_c - \lambda I) g_{c2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

(5.3.30b)

⋮

$$B_{c1} E_1 g_{1, \ell-1} - g_{c, \ell-2} + (A_c - \lambda I) g_{c, \ell-1} = 0$$

$$B_{c1} E_1 g_{1\ell} - g_{c, \ell-1} + (A_c - \lambda I) g_{c\ell} = x_c$$

(O segundo membro da última igualdade é a ℓ -ésima coluna de $(\delta B_{c2})(\tilde{D}_2 - D_2) | X_{2\lambda}$; claro que será um vetor $x_c \in X_c$)

Da última igualdade acima vem:

$$g_{c, \ell-1} = B_{c1} E_1 g_{1\ell} + (A_c - \lambda I) g_{c\ell} - x_c$$

Substituindo na penúltima:

$$g_{c, \ell-2} = B_{c1} E_1 g_{1, \ell-1} + (A_c - \lambda I) B_{c1} E_1 g_{1\ell} + (A_c - \lambda I)^2 g_{c\ell} - (A_c - \lambda I) x_c$$

Substituindo na anterior, e assim sucessivamente, até a 1ª das equações (5.3.30b) vem:

$$(A_c - \lambda I)^{\ell-1} x_c = B_{c1} E_1 g_{11} + (A_c - \lambda I) B_{c1} E_1 g_{12} + \dots + (A_c - \lambda I)^{\ell-1} B_{c1} E_1 g_{1\ell} + (A_c - \lambda I)^\ell g_{c\ell} \quad (5.3.30c)$$

Então para todo $x_c \in X_c$ existe $g_{1i} \in \text{Nuc } D_1$, $g_{ci} \in X_c$, $i = \overline{1, \ell}$, tal que (5.3.30c) é satisfeito. Isto implica:

$$\begin{aligned} \text{Im } (A_c - \lambda I)^{\ell-1} &\subset \langle (A_c - \lambda I) | B_{c1} E_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im } (A_c - \lambda I)^\ell \\ &= \langle A_c | B_{c1} E_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im } (A_c - \lambda I)^\ell \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

De (5.3.22) e (5.3.23) vem:

$$B_c C_1 = B_{c1} E_1 + B_{c2} D_1$$

Substituindo em (5.3.4):

$$T = \left\{ (x_1, x_c) : B_{c1} E_1 x_1 + (A_c - \lambda I) x_c = 0, x_1 \in \text{Nuc } D_1, x_c \in \langle A_c | B_{c1} E_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im } (A_c - \lambda I)^{\ell-1} \right\} \quad (5.3.31a)$$

Façamos no Lema 2:

$$A = A_c - \lambda I, \quad B = B_{c1} E_1, \quad X = X_c, \quad U = \text{Nuc } D_1, \quad V = T.$$

De (5.3.31) vemos que (5.3.13) é satisfeito e portanto:

$$d(T) \leq d(\text{Nuc } D_1) = n_1 - q, \text{ contradizendo a Proposição 1. Donde}$$

se conclui que a hipótese (5.3.24) é falsa e portanto:

$$\tilde{D}_2 = D_2$$

Q.E.D.

Lema 3:

Seja $h : X \rightarrow X$. Então R incorpora um modelo interno de A_2 se e somente se $\forall \lambda \in \sigma(A_2)$ tivermos:

$$d\left(\text{Nuc}(A - \lambda I) \cap \text{Im}(A - \lambda I)^{k(\lambda)-1}\right) \geq q, \quad (5.3.31b)$$

onde $k(\lambda)$ é o grau do fator $s - \lambda$ no polinômio mínimo de A_2 .

Demonstração:

Seja $\mu \in \sigma(A)$ e considere-se a decomposição ^{de Jordan} V de X relativamente a A . Seja X_μ um sub-espaco primo correspondente a μ nesta decomposição.

Definamos:

$$A_\mu = A|_{X_\mu}, \quad \ell = d(X_\mu)$$

Então sabemos que existe um gerador cíclico $x \in X_\mu$ tal que:

$$X_\mu = \text{Esp}\{x, (A_\mu - \mu I)x, \dots, (A_\mu - \mu I)^{\ell-1}x\}$$

Aplicando $A_\mu - \mu I$ à última igualdade, vem:

$$\text{Im}(A_\mu - \mu I) = \text{Esp}\{(A_\mu - \mu I)x, \dots, (A_\mu - \mu I)^{\ell-1}x\}$$

E de um modo geral?

$$\text{Im}(A_\mu - \mu I)^{i-1} = \text{Esp} \left\{ (A_\mu - \mu I)^{i-1} x, \dots, (A_\mu - \mu I)^{\ell-1} x \right\}, \quad i = \overline{1, \ell}$$

(5.3.31c)

E por outro lado:

$$\text{Nuc}(A_\mu - \mu I) = \text{Esp} \left\{ (A_\mu - \mu I)^{\ell-1} \right\} \quad (5.3.31d)$$

Das duas últimas igualdades vem:

$$d \left(\text{Nuc}(A_\mu - \mu I) \cap \text{Im}(A_\mu - \mu I)^{i-1} \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = \overline{1, \ell} \\ 0 & \text{se } i > \ell \end{cases}$$

Donde se vê que:

$$d \left(\text{Nuc}(A - \lambda I) \cap \text{Im}(A - \lambda I)^{k(\lambda)-1} \right) \quad (5.3.31e)$$

é igual ao número de sub-espacos primos $X_\lambda \subset X$ tais que $d(X_\lambda) \geq k(\lambda)$ e portanto (5.3.31e) igual ao número de polinômios invariantes de A divisíveis por $(s-\lambda)^{k(\lambda)}$.

Q. E. D.

Observação 5.3.31f:

Tendo, provado a necessidade da legibilidade do par $([C_1 \ C_2], [D_1 \ D_2])$ suporemos doravante que esta condição necessária para robustez seja satisfeita. Para a demonstração do resultado principal da Francis e Wonham suporemos que:

$$\text{Im } B_{cw} \subset \langle A_c | B_{cw} E_1 \text{Nuc } D_1 \rangle \quad (5.3.32)$$

Teorema 2 (Necessidade do modelo interno e da realimentação):

Considere-se a estrutura na qual vale (5.3.32). Então haverá regulação do erro mesmo quando A_3 é perturbado somente se o compensador incorporar um modelo internode A_2' o qual \bar{z} controlar por z (o erro) e observável por u .

Demonstração:

Definamos:

$$R_c = \langle A_c | B_{cw} E_1 \text{Nuc } D_1 \rangle \quad (5.3.33)$$

Seja:

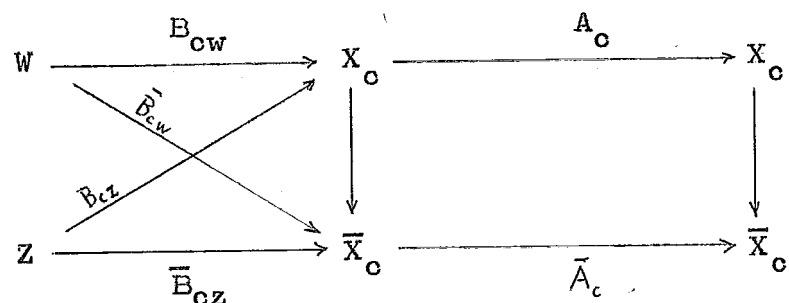
$$P_c : X_c \rightarrow \bar{X}_c = X_c/R_c \quad \text{a projeção canônica}$$

Sejam ainda:

$$\bar{B}_{cw} = P_c B_{cw} \quad , \quad \bar{B}_{cz} = P_c B_{cz}$$

$$\bar{A} \quad \text{tal quer} \quad P_c A_c = \bar{A}_c P_c$$

Temos então o seguinte diagrama comutativos



Seja $\lambda \in \mathbb{C}(A_2)$. Substituindo (5.2.17) e (5.2.18) em (5.3.4) com $k = k(\lambda)$, vem:

$$T = \left\{ (x_1, x_c) : B_{cw} E_1 x_1 + (A_c - \lambda I) x_c = 0, \quad x_1 \in \text{Nuc } D_1, \right. \\
 \left. x_c \in \langle A_c | B_{cw} E_1 \text{Nuc } D_1 \rangle + \text{Im}(A_c - I)^{k-1} \right\} \quad (5.3.33a)$$

Utilizemos agora o Lema 2(a) com:

$$A = A_c - \lambda I, \quad B = B_{cw} E_1, \quad X = X_c, \quad u = \text{Nuc } D_1, \quad v = T$$

Tendo em vista que:

$$P_c (A_c - \lambda I) = P_c A_c - \lambda P_c = \bar{A}_c P_c - \lambda P_c = (\bar{A}_c - \lambda I) P_c \quad \text{r vem:}$$

$$d(T) \leq d(\text{Nuc } D_1) + d(\text{Nuc}(\bar{A}_c - \lambda I) \cap \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^{k-1}) \quad (5.3.34)$$

Mas da Proposição 1 : $d(T) \geq n_1$

E por outro lado:

$$d(\text{Nuc } D_1) = n_1 - q$$

Donde

$$d\left(\text{Nuc}(\bar{A}_c - \lambda I) \cap \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^{k-1}\right) \geq q$$

E do Lema 3 concluimos que \bar{A}_c incorpora um modelo interno de A_2 , e portanto (ver Definição 5.2.18i) o compensador incorpora um modelo interno de A_2 .

Por outro lado a estabilidade do sistema em malha fechada implica que $A_L - \lambda I$ tem inversa $\forall \lambda \in \sigma(A_2)$. Então as últimas colunas de $A_L - \lambda I$ (ver (5.2.9)) devem ser l.i. e isto implica:

$$\text{Nuc} \begin{bmatrix} B_1 F_c \\ A_c - \lambda I \end{bmatrix} = 0$$

Esta última igualdade por sua vez implica (prova por contradição):

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(B_1 F_c) \cap \text{Nuc}(A_c - \lambda I) &= 0 \\ \implies \text{Nuc } F_c \cap \text{Nuc}(A_c - \lambda I) &= 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A_2) \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Donde se conclui (ver Definição 5.2.18j) que o modelo interno é observável por u .

Por outro lado, sendo as última linhas de $A_L - \lambda I$ lin. ind., vem:

$$X_c = \text{Im}(A_c - \lambda I) + \text{Im } B_c$$

De (5.2.18):

$$X_c = \text{Im}(A_c - \lambda I) + \text{Im } B_{cw} + \text{Im } B_{cz}$$

Aplicamos P_c a ambos os membros da igualdade acima. De (5.3.32)

temos: $\bar{B}_{cw} = 0$. Donde:

$$\bar{X}_c = \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I) + \text{Im} \bar{B}_{cz} \quad (5.3.36)$$

Donde se conclui que o ~~compensador~~ ^{modelo interno} \bar{O} controlável por z , o erro a ser regulado (ver Definição 5.2.18k).

Q. E. D.

Observação 5.3.36a:

Seja ρ o grau do polinômio mínimo de A_2 . Deste teorema conclui-se que a ordem de \bar{A}_c deve ser pelo menos $q\rho$. Ora, nos dois capítulos precedentes utilizamos o erro como entrada do compensador (Isto é, realimentamos o erro de acordo com a terminologia de Francis e Wonham) e vimos que a ordem do compensador era pq , sendo p o grau de $\phi(s)$. Do presente teorema concluímos então que o compensador de Davison (utilizado nos dois capítulos anteriores) é efetivamente de ordem mínima. Mais ainda, sendo $A_c = \bar{A}_c$ ($= F$ nos capítulos precedentes), concluímos que A_c deve incorporar um modelo interno de A_2 , ou seja, o polinômio mínimo do A_2 deve dividir q polinômios invariantes do A_c , o que efetivamente foi verificado nos dois capítulos anteriores, pois temos: $F = \text{diag}(F_i)$, $|sI - F_i| = s^{(si)}$, $i = \overline{1, q}$.

Observação 5.3.36b

Francis e Wonham notam que se alguns elementos de A_3 forem fixos, não será necessário, eventualmente, um modelo interno do tipo considerado.

Observação 5.3.36c

Na demonstração do Teorema 2, a hipótese (5.3.32) só foi necessária para a demonstração da controlabilidade do modelo interno

por z . Tal fato é crucial na demonstração da seguinte!

Proposição 3:

Se (5.3.32) não ocorrer, a regulação do erro z não é robusta com relação a perturbações de A_3 e \bar{B}_{cw} .

Demonstração (por contradição):

Suponha-se que exista uma estrutura que permita a regulação de z mesmo quando A_3 são perturbados e que não satisfaça a (5.3.32). Então, de acordo com o Lema 1, para cada \bar{B}_{cw} perturbado existe $G: X_2 \rightarrow X_L$ tal que:

$$A_L G - G A_2 = B_L$$

$$D_L G = D_2$$

Tendo em vista (5.2.9), (5.2.10) e $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_c \end{bmatrix}$, vem:

$$B_c C_1 G_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_c C_2 \quad (5.3.37a)$$

$$D_1 G_1 = D_2 \quad (5.3.37b)$$

Substituindo (5.2.17) e (5.2.18) em (5.3.37a), temos:

$$(B_{cw} E_1 + B_{cz} D_1) G_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_{cw} E_2 + B_{cz} D_2$$

E tendo em vista (5.3.37b):

$$B_{cw} E_1 G_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_{cw} E_2 \quad (5.3.38a)$$

$$D_1 G_1 = D_2 \quad (5.3.38b)$$

Tal como na demonstração do Teorema 1, seja X_{11} um complemento arbitrário de $\text{Nuc } D_1$ em X_1 e seja $D_1^+ : Z \rightarrow X_1$ o inverso à direita de D_1 com $\text{Im } D_1^+ = X_{11}$.

$$\text{Seja: } G_1 = \hat{G}_1 + D_1^+ D_2 \quad (5.3.38c)$$

De (5.3.38b):

$$D_1 G_1 = D_1 \hat{G}_1 + D_1 D_1^+ D_2 = D_1 \hat{G}_1 + D_2 = D_2$$

$$\implies \text{Im } \hat{G}_1 \subset \text{Nuc } D_1 \quad (5.3.38d)$$

Substituindo (5.3.38c) com (5.3.38d) em (5.3.38a) vem:

$$B_{cw} E_1 \hat{G}_1 + A_c G_c - G_c A_2 = B_{cw} (E_2 - E_1 D_1^+ D_2) \quad (5.3.39)$$

Aplicando P_c à Última expressão:

$$P_c B_{cw} E_1 \hat{G}_1 + P_c A_c G_c - P_c G_c A_2 = P_c B_{cw} (E_2 - E_1 D_1^+ D_2)$$

$$P_c B_{cw} E_1 \hat{G}_1 + \bar{A}_c \bar{G}_c - \bar{G}_c A_2 = \bar{B}_{cw} (E_2 - E_1 D_1^+ D_2),$$

sendo $\bar{G}_c = P_c G_c$.

De (5.3.38d) e (5.3.33) vem:

$$\bar{A}_c \bar{G}_c - \bar{G}_c A_2 = \bar{B}_{cw} (E_2 - E_1 D_1^+ D_2) \quad (5.3.40)$$

Ora, sendo $\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$ sobrejetor, $\forall w \in W$ existem $x_1 \in X_1$ e

$x_2 \in X_2$ tais que:

$$w = E_1 x_1 + E_2 x_2 \quad (5.3.40a)$$

$$0 = D_1 x_1 + D_2 x_2 \quad (5.3.40b)$$

Da última igualdade, podemos escrever:

$$x_1 = -D_1^+ D_2 x_2 + \hat{x}_1, \text{ sendo } \hat{x}_1 \in \text{Nuc } D_1$$

Portanto, de (5.3.40a) $\forall w \in W$ existem $\hat{x}_1 \in \text{Nuc } D_1$ e $x_2 \in X_2$

tais que:

$$w = E_1 \hat{x}_1 + (E_2 - E_1 D_1^+ D_2) x_2 \quad (5.3.40c)$$

Donde,

$$W = E_1 \text{ Nuc } D_1 + \text{Im}(E_2 - E_1 D_1^+ D_2)$$

Aplicando \bar{B}_{cw} a ambos os membros da igualdade acima e tendo em vista (5.3.33) vem:

$$\text{Im } \bar{B}_{cw} = \bar{B}_{cw} \text{Im}(E_2 - E_1 D_1^+ D_2) \quad (5.3.41)$$

Como por hipótese (5.3.32) não vale, $\bar{B}_{cw} \neq 0$. Donde:

$$E_2 - E_1 D_1^+ D_2 \neq 0$$

Então existe $\lambda \in \sigma(A_2)$ e um sub-espaço primo $X_{2\lambda}$ correspondente a λ tal que:

$$(E_2 - E_1 D_1^+ D_2)|_{X_{2\lambda}} \neq 0.$$

Escolhâmos para base de $X_{2\lambda}$ aquela em que $A_2|_{X_{2\lambda}}$ é representado por um bloco de Jordan cuja ordem será $k = d(X_{2\lambda})$.

Suponha-se que a 1ª coluna diferente de zero de $(E_2 - E_1 D_1^+ D_2)|_{X_{2\lambda}}$ seja a ℓ -ésima, $1 \leq \ell \leq k$.

Restringindo (5.3.40) a $X_{2\lambda}$ vem:

$$\bar{A}_c \begin{bmatrix} \bar{g}_{c1} & \dots & \bar{g}_{ck} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{g}_{c1} & \dots & \bar{g}_{ck} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{bmatrix} = \bar{B}_{cw} (E_2 - E_1 D_1^+ D_2)|_{X_{2\lambda}}$$

Igualando uma a uma as colunas da expressão acima concluímos

que $\forall \bar{x}_c \in \bar{X}_c, \exists \bar{g}_{ci} \in \bar{X}_c \quad (i = \overline{1, \ell})$ tais que:

$$(\bar{A}_c - \lambda I) \bar{g}_{c1} = 0 \quad (5.3.42a)$$

$$(\bar{A}_c - \lambda I) \bar{g}_{c2} = \bar{g}_{c1} \quad (5.3.42b)$$

$$(\bar{A}_c - \lambda I) \bar{g}_{c, \ell-1} = \bar{g}_{c, \ell-2} \quad (5.3.42c)$$

$$(\bar{A}_c - \lambda I) \bar{g}_{c\ell} = \bar{g}_{c, \ell-1} + \bar{x}_c \quad (5.3.42d)$$

Substituindo $\bar{g}_{c, \ell-1}$ da última igualdade na penúltima, vem:

$$(\bar{A}_c - \lambda I)^2 \bar{g}_{c, \ell} - (\bar{A}_c - \lambda I) \bar{x}_c = \bar{g}_{c, \ell-2}$$

Substituindo $\bar{g}_{c, \ell-2}$ na igualdade anterior e assim sucessivamente até (5.3.42a) vemos que $\forall \bar{x}_c \in \bar{X}_c \exists \bar{g}_c$ tal que

$$(\bar{A}_c - \lambda I)^\ell \bar{g}_c = (\bar{A}_c - \lambda I)^{\ell-1} \bar{x}_c \quad (5.3.42e)$$

Ao fazermos \bar{x}_c expandir todo o espaço \bar{X}_c , a última igualdade implica:

$$\text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^{\ell-1} \subset \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^\ell \quad (5.3.43)$$

Apliquemos o Lema 2 (b) com

$$A = \bar{A}_c - \lambda I, \quad B = 0, \quad k = k(\lambda), \quad X = \bar{X}_c, \quad U = 0 \\ V = \left\{ \bar{x}_c : (\bar{A}_c - \lambda I) \bar{x}_c = 0, \bar{x}_c \in \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^{k(\lambda)-1} \right\}$$

Donde:

$$V = \text{Nuc}(\bar{A}_c - \lambda I) \cap \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^{k(\lambda)-1}$$

Ora, do (5.3.43) vemos que (5.3.13) é satisfeito e portanto:

$$d(V) \leq d(U) = 0$$

$$\implies \text{Nuc}(\bar{A}_c - \lambda I) \cap \text{Im}(\bar{A}_c - \lambda I)^{k(\lambda)-1} = 0$$

E do Lema 3 concluímos que \bar{A}_c não incorpora um modelo interno de A_2 , em contradição com o que foi demonstrado no Teorema 2 prescindindo de (5.3.32).

Q*E. D.

APÊNDICE: SISTEMAS DEGENERADOS

Dado o sistema cuja matriz é:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix}, \quad (A.1)$$

vimos que ele é chamado degenerado se e somente se todos os menores de ordem máxima de $P(s)$ forem identicamente nulos, (Ver (18)).

É claro que um sistema escalar degenerado tem função de transferência identicamente nula. Por sua vez, um sistema multivariável degenerado é aquele cuja matriz de transferência não tem inversa (isto é, pseudo-inversa) nem à direita nem à esquerda.

Já tivemos ocasião de verificar as seguintes propriedades relativas a tais sistemas:

(i) No 2º capítulo (Proposição 2.2.25, pg. 52) foi demonstrado que se um sistema não for degenerado e o número de entradas for igual ao de saídas, os zeros do sistema permanecem invariantes sob realimentação do estado.

(ii) No 3º e 4º capítulos vimos que uma das condições necessárias para a controlabilidade do sistema em malha fechada é que S não seja degenerado.

§§§

Investiguemos outras propriedades de tais sistemas:

Sabemos que um sistema com condições iniciais nulas tem resposta funcionalmente controlável quando existe uma entrada $u(t)$ que

permite obter uma resposta $y(t)$ ^{da} durante um intervalo arbitrário de tempo (ver por ex. (6), pg. 208).

Proposição A.2

Dado o sistema

$$\begin{aligned}
S : \quad \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t) \quad , \quad (A.2a)
\end{aligned}$$

sendo Posto $B = m$, Posto $C = q$,

- (i) Se $m \geq q$, S será degenerado se e somente se sua resposta for funcionalmente incontrolável
- (ii) Se $m < q$, S pode ou não ser degenerado, independentemente do fato que terá sempre resposta funcionalmente incontrolável.

Demonstração:

Usaremos o seguinte resultado conhecido (ver por ex. (6), pg. 208):

Seja $G(s)$ a matriz de transferência de S. Então:

$$S \text{ tem resposta funcionalmente incontrolável} \iff \text{Posto } G(s) < q \quad (A.3)$$

a) seja $m = q$

$$\text{Posto } G(s) < q \iff |G(s)| = 0 \iff |P(s)| = 0 \iff \text{Sistema degenerado}$$

b) $m > q$

Particionemos $P(s)$:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & b_1 \cdot \cdot \cdot b_m \\ -C & d_1 \cdot \cdot \cdot d_m \end{bmatrix}$$

Seja $|P_q^i(s)|$ um menor genérico de ordem $n+q$ de $P(s)$:

$$\begin{aligned}
 |P_q^i(s)| &= \begin{vmatrix} sI-A & b_{i_1} & \dots & b_{i_q} \\ -C & d_{i_1} & \dots & d_{i_q} \end{vmatrix} \\
 &= |sI-A| \cdot |C(sI-A)^{-1}(b_{i_1} \dots b_{i_q}) + (d_{i_1} \dots d_{i_q})| \\
 &= |sI-A| \cdot |G_q^i(s)| \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, \binom{m}{q} ,
 \end{aligned}$$

sendo $|G_q^i(s)|$ um menor genérico de ordem q de $G(s)$

Donde:

$$|G_q^i(s)| = 0 \iff |P_q^i(s)| = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, \binom{m}{q}$$

E tendo em vista (A.3), conclui-se a prova para $m > q$

c) $m < q$

De (A.3) vemos que neste caso o sistema será sempre com resposta funcionalmente incontrolável. Mas por outro lado, tais sistemas podem não ser degenerados, bastando que um dos menores de ordem m da matriz $P(s)$ não seja nulo.

observação A.4

A Proposição A.2 tem aplicação imediata no problema do servomecanismo: a resposta de um sistema poderá rastrear um sinal somente se o sistema não for degenerado.

§§§

Vejamos agora qual a relação entre sistema degenerado e sistema com resposta pontualmente incontrolável.

Sabemos que um sistema tem resposta pontualmente controlável se e somente se sua resposta puder assumir (mediante um contro-

le apropriado) um dado valor em tempo finito (ver por ex. (6), pg. 206).

Demonstra-se (ver (6), pg. 207) que o sistema (A.2a) com $D = 0$ tem resposta pontualmente ~~in~~controlável se e somente se as linhas da sua matriz de transferência $G(s)$ forem linearmente independentes (l.i.) sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} .

Observação A.5

As linhas de $G(s)$ podem ser l.i. sobre \mathbb{C} sem o serem sobre o corpo das funções racionais, como por exemplo:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Mas se as linhas do $G(s)$ não forem l.i. sobre o corpo dos complexos, também não o serão sobre o corpo das funções racionais.

Isto posto, vamos demonstrar que:

Proposição A.6

Suja o sistema:

$$\begin{aligned} S : \quad \dot{x} &= Ax + Eu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

sendo Posto $B = m$, Posto $C = q$.

- (i) Se $m \geq q$, todo sistema com resposta pontualmente incontrolável será também degenerado, mas a recíproca não é verdadeira.
- (ii) Se $m < q$, o sistema pode ou não ter resposta pontualmente incontrolável sem ser degenerado e vice-versa.

Demonstração:

a) $m = q$

$$\text{Sistema dgenerado} \iff |P(s)| = 0 \iff |G(s)| = 0$$

Ora:

$$\text{Sistema com resposta pontualm. incontr.} \implies |G(s)| = 0$$

Mas:

$$|G(s)| = 0 \not\implies \text{Sist. com resposta pontualm. incontr.}$$

b) $m > q$

Sejam os menores de ordem máxima da matriz do sistema:

$$\begin{aligned} |P_q^i(s)| &= \begin{vmatrix} sI-A & b_{i_1} & \dots & b_{i_q} \\ -C & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} ; i = 1, 2, \dots, \binom{m}{q} \\ &= |sI-A| \cdot |C(sI-A)^{-1}(b_{i_1} \dots b_{i_q})| \\ &= |sI-A| \cdot |G_q^i(s)| ; i = 1, 2, \dots, \binom{m}{q} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \text{Sist. com resp. pontualm. incontr.} &\implies |G_q^i(s)| = 0 \quad \forall i \\ &\iff \text{Sist. degen.} \end{aligned}$$

Mas:

$$\text{Sist. degen.} \iff |G_q^i(s)| = 0 \quad \forall i \not\implies \text{Sist. com resp. pont. incontr.}$$

c) $m < q$

Os menores de ordem máxima da matriz do sistema serão:

$$|P_m^i(s)| = \begin{vmatrix} sI-A & B \\ -c_i & 0 \\ 1 & \\ \vdots & \\ -c_{i_m} & 0 \end{vmatrix} = |sI-A| \cdot |G_m^i(s)| ; i = 1, 2, \dots, \binom{q}{m}$$

Ora:

Sist. degen. $\iff |G_m^i(s)| = 0 \quad \forall i \not\iff$ Sist. com resp. pont. incontr.

E por outro lado uma matriz de transferência pode ter as q linhas l.d. sobre \mathbb{C} , havendo entretanto m linhas l.i. sobre o corpo das funções racionais.

Q. E. D.

CONCLUSÃO

O objetivo primeiro deste trabalho foi resolver o problema do servomecanismo, Tomando como ponto de partida o modelo proposto por Davison ((32) e (33)), verificou-se que a solução do problema se torna mais natural e mais simples utilizando-se como ferramenta matemática o método do espaço de estado no domínio da frequência desenvolvido por Rosenbrock (1). Tal método permitiu ainda fazer o estudo do efeito da perturbação dos parâmetros sensíveis do compensador.

O fato de os zeros representarem um papel crucial na solução do problema do servomecanismo motivou a elaboração do segundo capítulo, no qual se fez um estudo comparativo das definições correntes de zeros e polos em sistemas multivariáveis e foi proposta a definição de "zero de bloqueio".

Durante o desenvolvimento deste trabalho, além dos resultados apresentados, foram abordados os seguintes problemas que ficaram sem solução satisfatória:

- a) A demonstração pelo método do espaço de estado no domínio da frequência da necessidade da realimentação da resposta e do modelo interno no compensador para se ter um rastreamento robusto com relação a perturbações em alguns parâmetros.
- b) Foi verificado que quando algum zero do sistema de S está "próximo" de um modo do sinal a ser rastreado, é necessário que pelo menos um dos ganhos do compensador seja "muito grande". Não se

conseguiu, entretanto, uma demonstração rigorosa deste resultado,

c) Foi verificado que para o rastreamento do degrau, pode-se utilizar um compensador que seja constituído de "ganhos puros" (pelo menos quando $D = 0$). O rastreamento, neste caso, não será robusto com relação a perturbações nos elementos de S, mas o erro em regime permanente, se for diferente de zero, será um degrau. Não se conseguiu, entretanto, condições suficientes para que seja possível o rastreamento com este tipo de compensador.

d) O resultado (c) foi generalizado, isto é, verificou-se que pode-se rastrear rampas utilizando integradores, parábolas do 2º grau utilizando-se compensador com função de transferência da forma $\frac{1}{s^2}$, e assim por diante. Em todos os casos o rastreamento não será robusto. Não se conseguiu, entretanto, tal como em (c), condições suficientes para que o rastreamento seja possível.

Ao encerrarmos este trabalho resumimos aqui alguns problemas que ficam abertos a investigação ulterior além dos 4 acima mencionados:

- (i) Investigação de outras propriedades dos zeros de bloqueio.
- (ii) Efeitos do erro entre o valor real e o valor estimado do estado (quando se usa observador e supondo-se que este não possa ser robusto) sobre o erro a ser regulado em regime permanente.
- (iii) Condições de possibilidade de se obter um compensador de ordem menor quando alguns modos instáveis não aparecem em todas

as componentes do sinal o do ruído.

(iv) Condições de possibilidade de se obter um compensador de ordem eventualmente maior do que pq e que dispense a realimentação do estado, utilizando-se entretanto um outro elemento dinâmico no canal de realimentação da resposta, aproveitando, por exemplo, os resultados de (37) e (50)-(52).

REFERÊNCIAS

No que se segue usaremos as seguintes siglas principais:

IEEE-AC = Transactions on Automatic Control of the IEEE.

IJC = International Journal of Control.

MGH = McGraw-Hill

- (1) Rosenbrock, Ho H., **State-Space and Multivariable Theory**,
Nelson, 1970
- (2) Gantmacher, F. R., **The Theory of Matrices**, Chelsea, 1959,
2 volumes.
- (3) Rosenbrock, H. H. and Storey, C., **Mathematics of Dynamical
Systems**, John Wiley, 1970.
- (4) Herstein, I., **Tópicos de Álgebra**, Polígono, 1970,
- (5) Zadeh, L. A. and Desoer, C. A., **Linear System Theory**, MGH,
1963.
- (6) Chen, C. T., **Introduction to Linear System Theory**, Holt,
Rinehart and Winston, 1970.
- (7) Truxal, J. G., **Control System Synthesis**, MGH, 1955
- (8) Dorf, R. C., **Modern Control Systems**, Addison-Wesley, 1970.
- (9) Rosenbrock, H. H., **The zeros of a system**, IJC, vol 18 (1973),
n^o 2, pgs. 297-299:
- (9a) Rosenbrock, H. H., **Correction to "The zeros of a system"**,
University of Manchester, Control Systems Centre Report
n^o 241, março 1974.
- (10) Desoer, C.A. and Schulman, J. D., **Zeros and poles of matrix
transfer functions and their dynamical interpretation**,
Univ. of California, Berkeley, Memo. No, ERL-M366, out. 1972

- (11) Dieudonné, J., Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1969.
- (12) Davison, E. J., A computational method for finding the zeros of a multivariable linear time-invariant system, Automatica, maio 1970, pgs. 481-484.
- (13) Bollinger, K. E. and Mathur, J. C., To compute the zeros of large systems, PEEE-AC, fev, 1971, pgs. 95-96.
- (14) Marshall, S. A., Remarks on computing the zeros of large systems, PEEE-AC, abr. 1972, pg. 261.
- (15) Kalman, R. E., Canonical structure of linear dynamical systems, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., vol. 48, nº 4, pgs. 596-600, 1962.
- (16) Kalman, R. E., Mathematical description of linear dynamical systems, SIAM Journal on Control, vol. 1 (1963), pgs. 152-192.
- (17) Wolovich, W. A., On the numerators and zeros of rational transfer matrices, IEEE-AC, out. 1973, pgs. 544-546.
- (18) Davison, E. J. and Wang, S. H., The properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable systems, Automatica, dez. 1974, pgs. 643-658.
- (19) Wolovich, W. A., On determining the zeros of state-space systems, IEEE-AC, out. 1973, pgs. 542-544.
- (20) Kwakernaak, H. and Sivan, R., Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, 1972.
- (21) Morse, A. S., Structural invariants of linear multivariable systems, JACC, junho 1972, pgs. 138-145.
- (22) Wang, S. H. and Davison, E. J., Canonical forms of linear multivariable systems, 6th. Asilomar Conference on Cir-

uits and Systems, nov. 1972.

- (23) Moore, B. C. and Silverman, L. M., Equivalent characterizations of zeros in multivariable systems, IEEE Decision and Control Conference, dez. 1972.
- (24) Wolovich, W. A., Static decoupling, IEEE-AC, out. 1973, pgs. 536-537.
- (25) Wolovich, W. A., On the cancellation of multivariable systems by state-feedback, IEEE-AC, junho 1974, pgs. 276-277.
- (26) Desoer, C. A. and Schulman, J. D., Cancellations in multivariable continuous-time and discrete-time feedback systems treated by greatest common divisor extraction, IEEE-AC, agosto 1973, pgs. 401-402.
- (27) Mac Duffee, C. C., The theory of matrices, Chelsea, 1956.
- (28) Bhattacharyya, S. P., and Pearson, J. B., On error systems and the servomechanism problem, IJC, 1972, vol. 15, nº 6, pgs. 1041-1062.
- (29) Bhattacharyya, S. P., Pearson, J. B. and Wonham, W. M., On zeroing the output of a linear system, Information and Control, vol. 20, nº 2, março 1972, pgs. 135-142.
- (30) Bhattacharyya, S. P., Output regulation with bounded energy, IEEE-AC, ago. 1973, pgs. 381-383.
- (31) Davison, E. J. and Smith, H. W., Pole assignment in linear time-invariant multivariable systems with constant disturbances, Automatica, 1971, vol. 7, pgs. 489-498.
- (32) Davison, E. J., The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances, IEEE-AC, out. 1972, pgs. 621, 629.
- (33) Davison, E. J., The feedforward and feedback control of a

general servomechanism problem, Univ. of Toronto, Control System Reports CS-7305 and CS-7306

- (34) Johnson, C. D., Optimal control of the linear regulator with constant disturbances, IEEE-AC, ago. 1968, pgs. 416-421.
- (35) Johnson, C. D., Further study of the linear regulator with disturbances, IEEE-AC, abr. 1970, pgs. 222-227.
- (36) Pearson, J. B., Compensator design for multivariable linear systems, IEEE-AC, abr. 1969, pgs. 130-134.
- (37) Youla, D. C., Bongiorno, J. J. and Lu, C. N., Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants, Automatica, 1974, vol. 10, pgs. 159-173.
- (38) Wonham, W. M., On pole assignment in multi-input controllable linear systems, IEEE-AC, dez. 1967, pgs. 660-665.
- (39) Luenberger, D. G., Observing the state of a linear system, IEEE Trans. Mil. Electron., abr. 1964, pgs. 74-80.
- (39a) Luenberger, D. G., An introduction to observers, IEEE-AC, dez. 1971, pgs. 596-602.
- (40) Bhattacharyya, S. P., Robust design of dynamical observers, Proc. 6th. IPAC Congress, ago. 1975, Boston.
- (41) Dettman, J. W., Applied complex variables, Macmillan, 1965.
- (42) Macfarlane, A. G. J., A survey of some recent results in linear multivariable feedback theory, Automatica, vol. 8 (1972), pgs. 455-492.
- (43) Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, Springer, 1974.
- (44) Wonham, W. M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer, 1974.
- (45) Pearson, J. B., Shields, R. W. and Straats Jr., F. W., Robust

solutions to linear multivariable control problems, IEEE-AC, out. 1974, pgs. 508-517.

- (46) Vandewalle, J. and Dewilde, P., On the determination of the order and the degree of a zero of a rational matrix, IEEE-AC, out. 1974, pgs. 608-609.
- (47) Horowitz, I.M. and Shaked, U., Superiority of transfer-function over state-variable methods in linear time-invariant feedback system design, IEEE-AC, fev. 1975, pgs. 84-97.
- (48) Kalman, R.E., Falb, P.L. and Arbib, M.A., Topics in mathematical system theory, MGH, 1969.
- (49) Patel, R.V., On zeros of multivariable systems, IJC, abr. 1975, pgs. 599-608.
- (50) Brasch Jr., F.M. and Pearson, J.B., Pole placement using dynamic compensator, IEEE-AC, fev. 1970, pgs. 34-43.
- (51) Ahmari, R. and Vaccroux, A.G., IJC, vol. 17 (1973), pgs. 397ss.
- (52) Sirisena, H.R. and Choi, S.S., Optimal pole placement in linear multivariable systems using dynamic output feedback, IJC, abr. 1975, pgs. 661-671.
- (53) Francis, B.A. and Wonham, W.M., The internal model principle for linear multivariable regulators, Univ. of Toronto, Control Systems Report 7406, fev. 1975.
- (54) Idem, The rôle of transmission zeros in linear multivariable regulators, Univ. of Toronto, Control Systems Report 7501, abr. 1975.
- (55) Idem, The internal model principle of linear control theory, Proc. 6th. IFAC Congress, ago. 1975, Boston.

- (56) Young, D. M., Iterative solutions of large linear systems, Academic Press, 1971
- (57) Bhattacharyya, S. P., Disturbance rejection in linear systems, International Journal of System Sciences, 1974, vol. 5, no. 7, pgs. 633-637
- (58) Bhattacharyya, S. P., Compensator design based on the invariance principle, IEEE-AC, out, 1975, pgs. 708-711